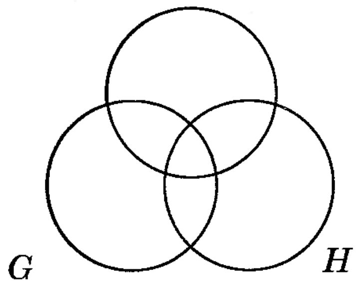

Figura 5-15

Diagramamos uma premissa de cada vez. O diagrama resultante deve ser utilizado para testar a validade da forma, do mesmo modo feito para as inferências imediatas: se ao diagramar as premissas tivermos, automaticamente, diagramado também a conclusão, então a forma é válida; caso contrário, a forma é inválida.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

5.11 Utilize um diagrama de Venn para determinar se o argumento acima é válido.

Solução

A primeira premissa afirma que o conjunto dos quadrúpedes tem pelo menos um elemento em comum com o conjunto dos gnus, portanto colocamos um x na região que é interceptada pelos dois círculos Q e G. Entretanto, essa região está dividida em duas partes pelo círculo H. Em qual dessas duas partes devemos colocar o x? É claro que sabemos que os gnus são herbívoros e, portanto, devemos colocar o x na região compreendida pelos três. Contudo, isso seria um erro. Estamos diagramando somente a informação contida na primeira premissa; introduzir conhecimentos adicionais é "trapacear". A primeira premissa não indica se os gnus de quatro pés são ou não herbívoros. Assim, para levar em conta esse fato, colocamos o x na fronteira entre os herbívoros e os não-herbívoros (fig. 5-16). A segunda premissa diz que o conjunto dos gnus é um subconjunto do conjunto dos herbívoros. Para diagramar isso, sombreamos a região que representa os gnus que não são herbívoros (fig. 5-17). Observe que, ao diagramar a segunda premissa, eliminamos a possibilidade de que o x represente um não-herbívoro. Desse modo, podemos agora ver que o x (que representa pelo menos um gnu de quatro pés) deve estar contido na região comum aos três círculos. Em outras palavras, as premissas requerem que pelo menos um gnu de quatro pés seja um herbívoro. Mas isso é justamente o que a conclusão afirma. Logo, ao diagramar as premissas, temos automaticamente diagramada a conclusão. Isso mostra que se as premissas são verdadeiras, então a conclusão também é verdadeira, isto é, o argumento é válido. Na verdade, mostrou-se que qualquer argumento dessa forma é válido, pois não faz diferença para o diagrama se '*Q*', '*G*' e '*H*' significam 'quadrúpedes', 'gnus' e 'herbívoros', respectivamente, ou qualquer outra classe de atributos.

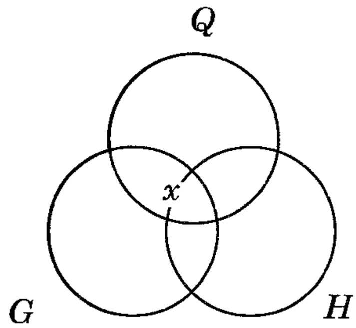

Figura 5-16

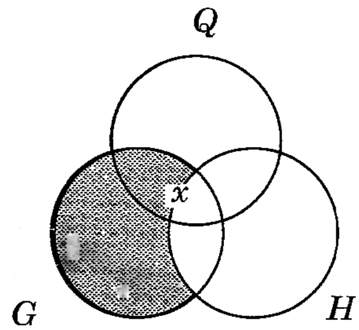

Figura 5-17

5.12 Construa um diagrama de Venn para testar a validade da seguinte forma:

Nenhum F é G.

Todo G é H.

$\therefore$ Nenhum F é H.

Solução

A primeira premissa afirma que os conjuntos *F* e *G* não têm elementos em comum. Assim, devemos sombrear a região compreendida pelos círculos *F* e *G*. A segunda premissa diz que *G* é um subconjunto de *H* e, portanto, sombreamos a região do círculo *G* que é externa ao círculo *H* (fig. 5-18). Isso, ainda, deixa uma região não sombreada entre os círculos *F* e *H* sobre a qual não temos informação. Em outras palavras, isso é consistente com as premissas que existem *F*s que são *H*s mas não são *G*s. Mas se existem tais *F*s, então a conclusão 'Nenhum *F* é *H*' é falsa. Logo, essa conclusão pode ser falsa enquanto suas premissas são verdadeiras. Conseqüentemente, a forma é inválida.

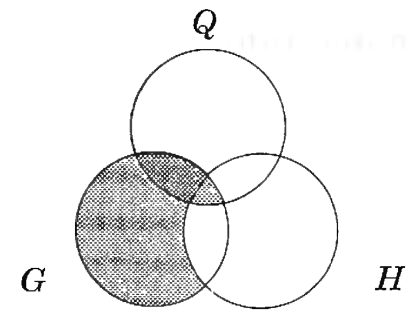

Figura 5-18

5.13 Construa um diagrama de Venn para testar a validade da seguinte forma:

Todo *F* é *G*.
Nenhum *G* é *H*.
∴ Nenhum *F* é *H*.

Solução

Para diagramar a primeira premissa, sombreamos a região do círculo *F* que é externa ao círculo *G*. Para a segunda premissa, sombreamos a região comum compreendida pelos círculos *G* e *H*.

Isso, automaticamente, sombreia uma parte da região compreendida pelos círculos F e H. Assim sendo, o diagrama mostra que a conclusão é verdadeira, dadas as premissas. Logo, a forma é válida (fig. 5-19).

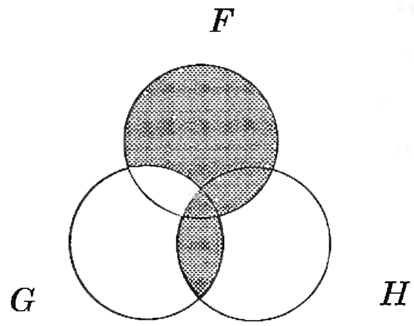

Figura 5-19

5.14 Construa um diagrama de Venn para testar a validade da seguinte forma:

Algum F é G.
Algum G é H.
$\therefore$ Algum F é H.

Solução

As premissas são diagramadas colocando-se xs nas regiões comuns a F e G e, também, aos círculos G e H, respectivamente. Deve-se colocar o x sobre a linha do círculo, pois nenhuma das premissas nos conta a qual parte x pertence. Assim, o diagrama para a forma é como mostra a fig. 5-20. Além disso ele é consistente, pois ambos os xs estão localizados na região comum aos três círculos; nesse caso F e H não precisam ter elementos em comum. Isso significa que a conclusão 'Algum F é H' pode ser falsa. Assim, as premissas não exigem a verdade da conclusão. Portanto, a forma é inválida.

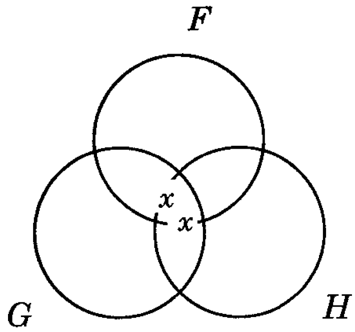

Figura 5-20

Problemas suplementares

Alguns dos seguintes argumentos podem ser formalizados como inferências que envolvem um par de enunciados categóricos ou como silogismos categóricos; outros não podem. Formalize aqueles que podem e teste a validade das formas resultantes por meio de diagramas de Venn.

1) Ninguém conquistou o mundo. Portanto, não é verdade que alguém conquistou o mundo.

2) Ninguém conquistou o mundo. Portanto, todo mundo não é um conquistador do mundo.

3) Ninguém conquistou o mundo. Portanto, não é o caso que todo mundo conquistou o mundo.

4) Ninguém conquistou o mundo. Portanto, alguém não conquistou o mundo.

5) Toda verdade autocontraditória é surpreendente. Portanto, existem verdades autocontraditórias surpreendentes.

6) Todos os números quadrados são não-primos. Assim, todos os números primos são não-quadrados.

7) Milagres são impossíveis. Portanto, não é o caso que alguns milagres são possíveis.

8) Ou toda coisa é palpável ou nada é. Essa rocha é palpável. Logo, toda coisa é palpável.

9) Nenhum pacto sobre os controles de armas será feito agora. Assim, nenhum pacto sobre os controles de armas será feito em qualquer época.

   (*sugestão*: considere 'feito em qualquer época' como o complemento de 'feito agora'.)

10) Todo incompetente fracassa. Portanto, não é verdade que alguns que são bem-sucedidos são incompetentes.

11) Todos os que são incompetentes fracassam. Todos os que são cuidadosos são bem-sucedidos. Portanto, nenhum dos que são incompetentes são cuidadosos.

12) Tudo o que ele fala é tolice. Toda tolice é desprezível. Tudo o que ele fala é desprezível.

13) Se Jane está doente, ela não virá trabalhar. Se ela não vier trabalhar, nenhum de nós terá algo para fazer. Assim, se Jane está doente, nenhum de nós terá algo para fazer.

14) Algumas pessoas são não-fumantes. Algumas são não-bêbadas. Portanto, alguns não-fumantes são não-bêbados.

15) Qualquer material adequado é capaz de resistir àquela pressão. Nenhum metal é suficientemente forte para resistir àquela pressão. Assim, nenhum material adequado é um metal.

16) Nenhum dos jogadores foi ferido. Alguns dos jogadores erraram os exercícios. Assim, ninguém que errou os exercícios ficou ferido.

17) Todas as coisas boas devem ser aceitas. Nenhuma ditadura é uma coisa boa. Conseqüentemente, algumas ditaduras não devem ser aceitas.

18) Todo elétron tem uma carga negativa. Nenhum pósitron tem uma carga negativa. Portanto, nenhum pósitron é um elétron.

19) Todo elétron tem uma carga negativa. Nenhum pósitron tem uma carga negativa. Portanto, alguns pósitrons não são elétrons.

20) Todo alimento gorduroso que ele come é algo que apressa a morte dele. Alguma coisa que apressa a morte dele o está matando. Segue-se que um daqueles alimentos gordurosos que ele come o está matando.

Respostas a alguns problemas suplementares

1) Nenhum P é C.
$\therefore$ ~(Algum P é C).

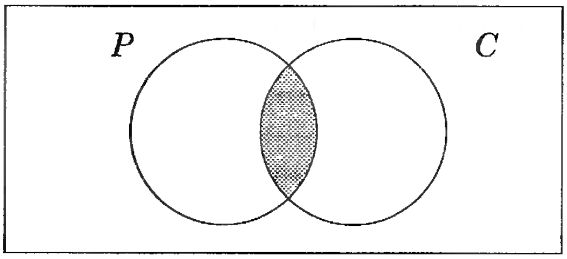

Figura 5-21

('P' significa 'pessoas' e 'C' significa 'coisa que conquistou o mundo'.) Diagramamos a premissa (fig. 5-21), que afirma que os conjuntos P e C não têm elementos em comum. Ao fazer isso, também diagramamos a conclusão. O diagrama para 'Algum P é C' é o mesmo da fig. 5-3. Para diagramar sua negação, substituímos o x da fig. 5-3 e sombreamos a região que o continha. O resultado é o diagrama para 'Nenhum P é C'. Assim, a premissa e a conclusão são logicamente equivalentes; portanto, a inferência é uma forma válida.

4) Nenhum P é C.

$\therefore$ Algum P não é C.

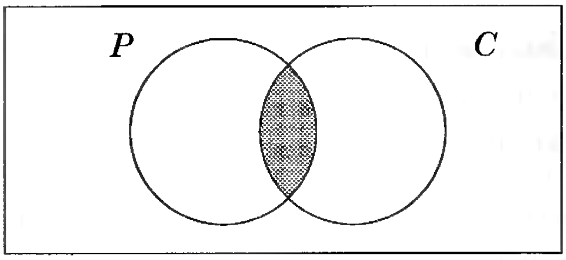

Figura 5-22

(Os símbolos utilizados são os mesmos do problema 1.) Diagramamos a premissa (fig. 5-22) e, com isso, não diagramamos a conclusão. Logo, essa forma é inválida, o que pode parecer surpreendente. Isso se justifica, pois a premissa não garante que qualquer pessoa exista. Uma parte da região interna ao círculo P está em branco, indicando que a premissa não fornece informação sobre esta região. O 'não' da conclusão expressa complementação, porém ele pode ser considerado como expressando a negação. Nesse caso, a conclusão torna-se

~(Algum P é C.)

a qual significa "não é o caso que algumas pessoas são coisas que conquistaram o mundo". Essa forma é a mesma do problema 1; portanto, é válida.

7) Todo M é não-P.

$\therefore$ ~(Algum M é P.)

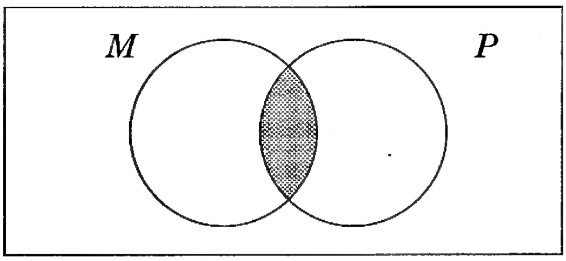

Figura 5-23

(Usamos 'M' para 'milagres' e 'P' para 'possível' ou, na forma padrão, 'coisas possíveis'.) A premissa afirma que o conjunto M é um subconjunto do complemento do conjunto P, e, assim, a região interna comum aos dois círculos é vazia. A conclusão tem a mesma forma que a conclusão do problema 1; daí, seu diagrama é aquela região sombreada (fig. 5-23). Como os diagramas para a premissa e para a conclusão são iguais, segue-se que a inferência é válida.

8) Os enunciados desse argumento (que é válido) não são categóricos.

12) Todo F é T.
   Todo T é D. Válido
   ∴ Todo F é D.

(Usamos 'F' para 'coisas que ele fala', 'T' para 'coisas que são tolas' e 'D' para 'coisas desprezíveis'.) (Ver fig. 5-24.)

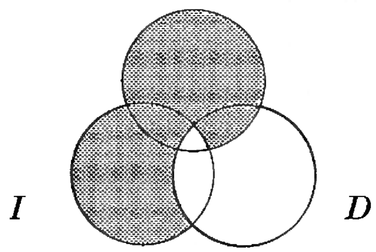

Figura 5-24

13) Os enunciados desse argumento não são categóricos, porém o argumento é válido, pois é uma instância do silogismo hipotético (Seção 3.5).

16) Nenhum J é F.
   Algum J é E. Inválido
   ∴ Nenhum E é F.

(Usamos '*J*' para 'jogadores', '*F*' para 'coisas (ou pessoas) feridas' e '*E*' para 'coisas (ou pessoas) que erram os exercícios'.) (Ver fig. 5-25.)

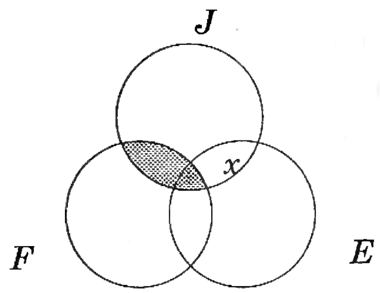

Figura 5-25

20) Todo G é A.
Algum A é M. Inválido
∴ Algum G é M.

(Usamos '*G*' para 'alimentos gordurosos que ele come', '*A*' para 'apressa a morte dele' e '*M*' para 'coisas que o estão matando'.) A formalização introduz uma distorção, pois o termo 'um' na conclusão do argumento pode significar "exatamente um", enquanto o termo 'algum', com o qual formalizamos a conclusão, significa (no sentido lógico) "pelo menos um". (Ver fig. 5-26.)

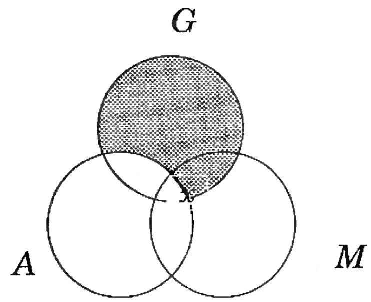

Figura 5-26

Capítulo 6

O CÁLCULO DE PREDICADOS

6.1 Quantificadores e variáveis

O Capítulo 5 introduziu os predicados e os conceitos de 'todo' e 'algum' num contexto limitado da lógica de enunciados categóricos. Neste capítulo, combinamos esses conceitos com os da lógica proposicional — nomes próprios e uma classe mais ampla de predicados — para obter um sistema lógico mais amplo, o cálculo de predicados. Num primeiro passo, notamos que a reformulação dos enunciados categóricos revela a presença de alguns dos operadores lógicos dos Capítulos 3 e 4. Considere, por exemplo, o enunciado da forma A

Todo S é P.

Usando a letra 'x' como uma variável para representar objetos individuais, expressamos tal enunciado por:

Qualquer que seja x, se x é S, então x é P.

Essa reformulação contém um condicional. Adotamos o símbolo '$\forall$', para significar "qualquer que seja" ou "para todo". Esse símbolo chama-se *quantificador universal*. Em vez de escrever 'x é S', escrevemos 'Sx' — e, de modo análogo, escrevemos 'Px'. Usando '$\rightarrow$' para o condicional, o enunciado se torna:

$\forall x(Sx \rightarrow Px)$

Esta é uma fórmula do cálculo de predicados.

O enunciado da forma E,

Nenhum S é P.

pode, também, ser expresso nessa notação. Ele significa

Qualquer que seja x, se x é S, então, x não é P. Isto é,

$\forall x(Sx \rightarrow {\sim}Px)$

Para expressar as proposições I e O, é necessário um segundo tipo de quantificador. A proposição I,

Algum S é P.

pode ser expressa como

Para pelo menos um x, x é S e x é P.

a qual contém uma conjunção. Adotamos o símbolo '$\exists$' para significar "para pelo menos um", ou, abreviadamente, "para algum". Reescrevemos a proposição I como

$\exists x(Sx \ \& \ Px)$

Uma maneira equivalente de expressar o significado de '$\exists$' é "existe .... tal que". Assim, a fórmula acima pode, também, ser lida como

Existe um x, tal que x é S e x é P.

Em conseqüência, '$\exists$' chama-se *quantificador existencial*.

A proposição O,

Algum S não é P.

nessa notação fica

$\exists x(Sx \;\&\; {\sim}Px)$

que significa "para pelo menos um x, x é S e x não é P", ou equivalentemente,

Existe um x tal que x é S e x não é P.

Observe que é errado traduzir a proposição I, 'Algum S é P', como

$\exists x(Sx \rightarrow Px)$

a qual contém um condicional, em vez de uma conjunção. Esta fórmula significa "para pelo menos um x, se x é S, então x é P". Ela pode, portanto, ser verdadeira mesmo que S não o seja. É verdadeira, por exemplo, para pelo menos um x (seja x uma pessoa que você gosta), se x tem sete cabeças, então x é esquisito. Contudo, é falso que alguma pessoa de sete cabeças é esquisita, pois não há pessoa de sete cabeças; assim, esses dois enunciados não são equivalentes. Analogamente, é incorreto usar um condicional na simbolização de uma proposição O.

Proposições A e E, por outro lado, devem sempre ser formalizadas por condicionais, e não por conjunções. É errado, por exemplo, formalizar a proposição A, 'Todo S é P', como

$\forall x(Sx \;\&\; Px)$

Isso significa "para todo x, x é ambos S e P". O enunciado 'Todos os tubarões são predadores' não é equivalente a 'Para todo x, x é ambos um tubarão e um predador', que significa que qualquer coisa é um tubarão predatório.

Essa nova notação revela uma estrutura, previamente desconhecida, nas proposições categóricas. Sua principal vantagem é a de combinar os conceitos da lógica categórica e proposicional para expressar uma rica variedade de estruturas lógicas.

PROBLEMA RESOLVIDO

6.1 Interpretando pela letra '*C*' a sentença 'Está chovendo' e pelas letras '*R*', '*V*', '*S*' e '*T*' os predicados 'é uma rã', 'é verde', 'é saltitante' e 'é iridescente', respectivamente, formalize as seguintes sentenças:

a) Todas as rãs são verdes.

b) Nenhuma rã é verde.

c) Algumas rãs são verdes.

d) Algumas rãs não são verdes.

e) Toda coisa é uma rã.

f) Alguma coisa é uma rã.

g) Nem toda coisa é uma rã.

h) Nada é uma rã.

i) Existem rãs verdes.

j) Qualquer coisa ou é rã ou é iridescente.

k) Qualquer coisa é uma rã verde.

l) Está chovendo e algumas rãs estão saltitando.

m) Se está chovendo, então todas as rãs estão saltitando.

n) Algumas coisas são verdes e algumas não são.

o) Algumas coisas são verdes e iridescentes simultaneamente.

p) Ou qualquer coisa é uma rã ou nada é uma rã.

q) Qualquer coisa ou é uma rã ou não é uma rã.

r) Todas as rãs são rãs.

s) Somente rãs são verdes.

t) Não existem rãs iridescentes.

u) Todas as rãs verdes estão saltitando.

v) Algumas rãs verdes não estão saltitando.

w) Não é verdade que algumas rãs verdes estão saltitando.

x) Se nada é verde, então não existem rãs verdes.

y) Rãs verdes saltam se e somente se não está chovendo.

Solução

a) $\forall x\,(Rx \rightarrow Vx)$

b) $\forall x\,(Rx \rightarrow \sim Vx)$

c) $\exists x(Rx\ \&\ Vx)$

d) $\exists x(Rx\ \&\ \sim Vx)$

e) $\forall xRx$

f) $\exists xRx$

g) $\sim\forall xRx$

h) $\forall x\sim Rx$ (Pode ser expresso como '$\sim\exists xRx$'.)

i) $\exists x(Vx\ \&\ Rx)$

j) $\forall x\,(Vx \vee Ix)$

k) $\forall x\,(Vx\ \&\ Rx)$

l) $\mathrm{C}\ \&\ \exists x(Rx\ \&\ Sx)$

m) $\mathrm{C} \rightarrow \forall x(Rx \rightarrow Sx)$

n) $\exists xVx\ \&\ \exists x\sim Vx$

o) $\exists x(Vx\ \&\ Ix)$

p) $\forall xRx \vee \forall x \sim Rx$

q) $\forall x\,(Rx \vee \sim Rx)$

r) $\forall x\,(Rx \rightarrow Rx)$

s) $\forall x\,(Vx \rightarrow Rx)$

t) $\sim\exists x(Ix\ \&\ Rx)$

u) $\forall x\,((Vx\ \&\ Rx) \rightarrow Sx)$

v) $\exists x((Vx\ \&\ Rx)\ \&\ \sim Sx)$

w) $\sim\exists x((Vx\ \&\ Rx)\ \&\ Sx)$

x) $\forall x\sim Vx \rightarrow \sim\exists x(Vx\ \&\ Rx)$

y) $\forall x\,((Vx\ \&\ Rx) \rightarrow (Sx \leftrightarrow \sim \mathrm{C}))$

6.2 Predicados e nomes próprios

Nem todos os enunciados contêm quantificadores. Existem, por exemplo, enunciados do tipo sujeito-predicado, os quais atribuem uma propriedade a uma pessoa ou coisa. Podemos interpretar as letras minúsculas do início e do meio de nosso alfabeto como nomes próprios para indivíduos, e adotamos a convenção, usual em lógica, de escrever o sujeito depois do predicado. Assim, a sentença

Jones é um ladrão.

é formalizada por:

Lj

onde 'j' é interpretada como o nome próprio 'Jones' e 'L' como o predicado 'é ladrão'.

Alguns predicados podem ser combinados com dois ou mais nomes próprios para formar uma sentença. Isso é verdade, por exemplo, para os verbos transitivos como 'bater', 'amar' ou 'diferir', os quais exigem um sujeito e um objeto. Eles são, usualmente, escritos em notação lógica, na ordem predicado-sujeito-objeto.[1] O enunciado

Bob ama Cathy.

é formalizado por

Abc

e a sentença

Cathy ama Bob.

é formalizada por

Acb

1. Alguns autores usam a ordem sujeito-predicado-objeto.

Verbos transitivos são uma subclasse da classe geral de *predicados de relação*, predicados que combinam dois ou mais nomes próprios para formar uma sentença. A seguir, temos alguns exemplos de predicados de relação: 'é perto de', 'é mais alto do que', 'é menos que', 'é um subconjunto de'. Alguns predicados de relação exigem três ou mais nomes. A expressão '... dá .... para ...', exige três. Na formalização de sentenças que envolvem esses predicados, as letras que representam nomes são escritas depois da letra de predicado e na ordem em que ocorrem na sentença, a não ser que se especifique outra ordem. O enunciado

Cathy deu Lulu para Bob.

é formalizado por

Dclb

Um predicado que exige somente um nome é chamado de *predicado unário* ou *predicado de grau um*. Um predicado de relação que exige dois nomes é chamado *predicado binário* ou *predicado de grau dois;* um predicado que exige três nomes é um *predicado ternário* ou *predicado de grau três* e assim por diante.

PROBLEMA RESOLVIDO

6.2 Formalize os seguintes enunciados interpretando as letras '*b*' e '*c*' como os nomes próprios 'Bob' e 'Cathy'; '*M*', '*E*' e '*A*' como os predicados unários 'é mecânico', 'é enfermeira' e 'é anel'; '*L*' e '*T*' como os predicados binários 'ama' e 'é mais alto do que'; '*D*' como o predicado ternário '... dá ... para ...'.

a) Cathy é mecânica.

b) Bob é mecânico.

c) Cathy e Bob são mecânicos.

d) Ou Cathy ou Bob são mecânicos.

e) Cathy é mecânica ou enfermeira (ou ambos).

f) Se Cathy é mecânica, então ela não é enfermeira.

g) Cathy é mais alta do que Bob.

h) Bob ama Cathy.

i) Bob ama a si próprio.

j) Bob ama a qualquer pessoa.

k) Qualquer pessoa ama Bob.

l) Qualquer pessoa ama a si mesma.

m) Alguma pessoa ama a si mesma.

n) Existe alguém que Cathy não ama.

o) Existe alguém que tanto Bob como Cathy amam.

p) Existe alguém que Bob ama e alguém que Cathy ama.

q) Cathy deu alguma coisa para Bob.

r) Bob deu um anel para Cathy.

s) Todo mundo ama todo mundo.

t) Alguém ama alguém.

u) Existe alguém que ama todo mundo.

v) Todo mundo é amado por alguém (não necessariamente a mesma pessoa em cada caso).

w) Se Bob ama a si próprio, então ele ama alguma pessoa.

x) Se Bob não ama a si próprio, então ele ama ninguém.

y) Para quaisquer três objetos, se o primeiro é mais alto que o segundo e o segundo é mais alto do que o terceiro, então o primeiro é mais alto que o terceiro.

Solução

a) Mc

b) Mb

c) $Mc \,\&\, Mb$

d) $Mc \vee Mb$

e) $Mc \vee Ec$

f) $Mc \rightarrow {\sim}Ec$

g) Tcb

h) Lbc

i) Lbb

j) $\forall xLbx$

k) $\forall xLxb$

l) $\forall xLxx$

m) $\exists xLxx$

n) $\exists x{\sim}Lcx$

o) $\exists x(Lbx \,\&\, Lcx)$

p) $\exists xLbx \,\&\, \exists xLcx$

q) $\exists xDcxb$

r) $\exists x(Ax \,\&\, Dbxc)$

s) $\forall x\forall yLxy$

t) $\exists x\exists yLxy$

u) $\exists x\forall yLxy$

v) $\forall y\exists xLxy$ ou, de modo equivalente, $\forall x\exists yLyx$

w) $Lbb \rightarrow \exists xLbx$

x) ${\sim}Lbb \rightarrow \forall x{\sim}Lbx$

y) $\forall x\forall y\forall z\,((Txy \,\&\, Tyz) \rightarrow Txz)$

Ao se formalizar enunciados, deve-se ter em mente os seguintes pontos:

1) *Variáveis diferentes não designam, necessariamente, objetos diferentes*. A fórmula '$\forall x\forall yLxy$' (problema 6.2 (*s*)) afirma que para qualquer x e qualquer y (não necessariamente distintos), x ama y. Afirma, em outras palavras, não somente que qualquer pessoa ama uma outra pessoa, como também que qualquer pessoa ama a si própria.

2) *Escolha de variáveis não faz diferença para o significado.* No Problema 6.2 (*m*), por exemplo, as simbolizações '$\exists yLyy$' ou

'$\exists zLzz$' ou '$\exists xLxx$' estão corretas. Entretanto, quando dois ou mais quantificadores justapõem-se numa mesma parte da fórmula, como no problema 6.2 (*v*), uma variável diferente deve ser usada para cada quantificador. Essa fórmula pode ser escrita, equivalentemente, como '$\forall x\exists yLyx$' ou '$\forall z\exists xLxz$', mas não como '$\forall x\exists xLxx$'. Neste último caso não podemos distinguir qual quantificador governa as duas últimas ocorrências de 'x'. Devemos considerar essas fórmulas como mal-formadas, isto é, não-gramaticais.[2]

3) *A mesma variável usada com vários quantificadores não designa, necessariamente, o mesmo objeto, em cada caso.* Assim, $\exists xLbx$ & $\exists xLcx$' é uma formalização correta de 'Existe alguém que Bob ama e existe alguém que Cathy ama' (problema 6.2 (*p*)); um enunciado que nem afirma nem nega que cada um ama a mesma pessoa. Mas, algumas pessoas acham mais natural escrever '$\exists xLbx$ & $\exists yLcy$' uma formalização equivalente, e igualmente correta, do mesmo enunciado. Ela é legítima pois usa uma mesma variável em cada quantificador, os quais não sobrepõem-se numa mesma parte da fórmula (cada um é aplicado para o conjunto do qual é uma parte).

4) *As sentenças que misturam quantificadores universal e existencial são, geralmente, ambíguas.* À primeira vista, a sentença 'Alguém ama todo mundo' significa tanto

6.2 (*u*) Existe alguém que ama todo mundo.

como

6.2 (*v*) Todo mundo é amado por alguém (não necessariamente a mesma pessoa em cada caso).

2. Em algumas versões do cálculo de predicados, essas fórmulas são consideradas como wffs sob a convenção de que se uma variável ocorre dentro do escopo de dois ou mais quantificadores, a variável mais próxima da variável do quantificador é a que a governa.

Essas sentenças mais prolixas, mas menos ambíguas, têm formalizações não-equivalentes; como vimos na solução do problema 6.2. A diferença no significado é revelada, formalmente, pela ordem diferente dos quantificadores. As formalizações dessas sentenças não são ambíguas.

5) *A ordem dos quantificadores consecutivos afeta o significado somente quando quantificadores universal e existencial são misturados.* Ocorrências consecutivas de quantificadores universal podem ser permutadas, sem contudo, mudar o significado; o mesmo acontece com ocorrências consecutivas de quantificadores existencial. Por exemplo, '$\exists x \forall y Lxy$' (problema 6.2 (u)) e '$\forall y \exists x Lxy$' (Problema 6.2 (v)) têm significados diferentes, ao passo que '$\exists x \exists y Lxy$' e '$\exists y \exists x Lxy$' significam, ambas, simplesmente e não ambiguamente, "alguém ama alguém".

6.3 Regras de formação

A seguir, definimos, de modo mais preciso, a linguagem formal, exemplificada nas seções anteriores. Tal como no cálculo proporsicional, dividimos o vocabulário dessa linguagem em duas partes: os *símbolos lógicos* (cuja interpretação permanece fixa em todos os contextos) e os *símbolos não-lógicos* (cuja interpretação varia de problema para problema).

Símbolos lógicos

Operadores lógicos: '$\sim$', '&', '$\vee$', '$\rightarrow$', '$\leftrightarrow$'

Quantificadores:[3] '$\forall$', '$\exists$'

Parênteses: '(', ')'

3. Alguns autores omitem o símbolo para o quantificador universal e escrevem 'para todo x' como '(x)'. O quantificador existencial é, então, escrito '($\exists x$)'. Algumas vezes, ambos os símbolos quantificacionais e parênteses são usados. Ocasionalmente, o símbolo '$\wedge$' é usado em vez de '$\forall$', e '$\vee$' em vez de '$\exists$'.

Símbolos não-lógicos

Letras nominais: letras minúsculas de '*a*' a '*t*'

Variáveis: letras minúsculas de '*u*' a '*z*'

Letras predicativas: letras maiúsculas

Para garantir que temos símbolos não-lógicos suficientes para qualquer formalização, permitimos a adição de subscritos numéricos aos símbolos dados. Assim, 'a_3' considera-se como uma letra nominal e 'P_{147}' como uma letra predicativa. Símbolos não-lógicos com subscritos raramente são necessários.

Definimos *fórmula* da linguagem como sendo qualquer seqüência finita de elementos do vocabulário (símbolos lógicos ou não-lógicos).

Uma *fórmula atômica* é uma letra predicativa seguida por zero ou mais letras nominais. Fórmulas atômicas com uma só letra predicativa seguida por zero letras nominais são, exatamente, as letras sentenciais (fórmulas atômicas) do cálculo proposicional. Elas são usadas para simbolizar sentenças, quando não há necessidade de se representar suas estruturas internas. Se o número de letras nominais que vêm em seguida de uma letra predicativa, numa fórmula atômica, é n, então essa letra representa um predicado n-ário. (Letras sentenciais podem ser pensadas como predicados zero-ário.)

O conceito de *fórmula bem formada* (wff) do cálculo de predicados é definido pelas seguintes regras de formação (usamos letras gregas para representar expressões):

1) Toda fórmula atômica é uma wff.

2) Se ϕ é uma wff, então $\sim\phi$ é uma wff.

3) Se ϕ e ψ são wffs, então $(\phi \,\&\, \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ e $(\phi \leftrightarrow \psi)$ são wffs.

4) Se ϕ é uma wff contendo uma letra nominal α, então qualquer fórmula da forma $\forall\beta\ \phi^{\beta}/\alpha$ ou $\exists\beta\ \phi^{\beta}/\alpha$ é uma wff, onde ϕ^{β}/α é o resultado de se substituir uma ou mais ocorrências de α em ϕ por uma variável β que não ocorre em ϕ.[4]

Somente fórmulas obtidas por aplicações dessas regras são wffs.

As regras 2 e 3 são as mesmas que as do cálculo proposicional (veja Seção 3.2). A regra 1 é mais ampla; ela nos permite mais tipos de fórmulas atômicas. A regra 4 é nova; ela gera fórmulas quantificadas a partir de uma fórmula dada, ϕ, não-quantificada. Seja ϕ a fórmula '*(Fa & Gab)*'. (Podemos dizer que ϕ é uma wff, pois '*Fa*' e '*Gab*' são wffs, pela regra 1; assim, '*(Fa & Gab)*' é uma wff, pela regra 3.) ϕ contém duas letras nominais, '*a*' e '*b*'. Ambas satisfazem, igualmente, o que a regra chama de α. Consideremos 'a'. A regra permite escolher uma variável β que não ocorre em ϕ. Qualquer variável serve, pois ϕ não contém variáveis; aseja β a variável '*x*'. Então, existem três fórmulas da forma $\phi\ \beta/\alpha$ que resultam da substituição de uma ou mais ocorrências de α (que é '*a*') em ϕ (que é '*Fa & Gab*') por β (que é '*x*'):

(Fx & Gxb) (ambas ocorrências de '*a*' substituídas por '*x*')

(Fx & Gab) (somente a primeira ocorrência de '*a*' sustituída)

(Fa & Gxb) (somente a segunda ocorrência de '*a*' substituída)

Estas fórmulas, em si, não são wffs, mas a regra 4 estabelece que o resultado de prefixá-las com um quantificador universal seguido por '*x*', que é $\forall\beta\ \phi^{\beta}/\alpha$, é uma wff. Assim,

$\forall x(Fx\ \&\ Gxb)$

$\forall x(Fx\ \&\ Gab)$

$\forall x(Fa\ \&\ Gxb)$

4. Alguns autores usam outras regras de formação (alguns pontos em comum são mencionados nas notas 2 e 3..) Os leitores devem comparar as regras de formação, cuidadosamente, quando forem usadas em contextos diferentes.

são wffs, pela regra 4. A regra também permite prefixá-las com um quantificador existencial, seguido por 'x', que é $\exists\beta\phi^{\beta}/\alpha$. Portanto,

$\exists x(Fx \,\&\, Gxb)$

$\exists x(Fx \,\&\, Gab)$

$\exists x(Fa \,\&\, Gxb)$

são também, wffs. Assim, temos seis wffs quantificadas geradas a partir da wff não-quantificada, '$(Fa \,\&\, Gab)$', pela aplicação da regra 4. Podemos gerar outras usando o nome 'b' para α ou outras variáveis, que não seja 'x', para β. A regra 4 pode ser reaplicada. Por exemplo, como '$\forall x(Fx \,\&\, Gxb)$' é uma wff, podemos aplicar, pela segunda vez, a regra 4, usando 'b' para α e 'y' para β a fim de obter '$\forall y\forall x(Fx \,\&\, Gxy)$' ou '$\exists y\forall x(Fx \,\&\, Gxy)$'.

Observe que a regra 4 é a única que permite introduzir variáveis numa wff. Podemos introduzir só uma variável por vez prefixando a fórmula com um quantificador para essa variável. Assim, qualquer fórmula contendo uma variável sem um quantificador correspondente (por exemplo, 'Fx') não é uma wff. Analogamente, qualquer fórmula contendo um quantificador seguido de uma variável, sem ocorrência adicional dessa variável (por exemplo, '$\exists xP$'), não é uma wff.

Na regra 4, a restrição 'por alguma variável β que não ocorre em ϕ', assegura que os quantificadores usando a mesma variável não se sobrepõem numa mesma parte da fórmula. Por exemplo, embora '$\exists xLxa$' seja uma wff pelas regras 1 e 4, esta cláusula não permite adicionarmos um outro quantificador em x para obter, por exemplo, '$\forall x\exists xLxx$', que, como mencionamos anteriormente (comentário 2, Seção 6.2), é mal formada. Observe que essa cláusula ainda evita que uma fórmula, como '$\forall x(Fx \,\&\, \exists xGx)$', seja bem formada. Pela regra 4, ela poderia ser obtida somente de uma outra, tal como a wff '$(Fa \,\&\, \exists xGx)$', que já contém 'x'. Contudo, não são proibidas fórmulas tais como '$(\exists xFx \,\&\, \exists xGx)$', onde os quantificadores não se sobrepõem, na mesma parte da fórmula. Essa fórmula é uma wff, pois ela é obtida, pela regra 3, de '$\exists xFx$' e '$\exists xGx$', que são wffs, pelas regras 1 e 4 (veja comentário 3, Seção 6.2).

Em geral, para mostrar que uma fórmula é uma wff, mostramos que ela pode ser construída estritamente a partir das regras de formação.

PROBLEMA RESOLVIDO

6.3 Mostre que '$\sim\exists x(\sim Fx \;\&\; \forall zGzx)$' é uma wff.

Solução

Pela regra 1, 'Fa' e 'Gba' são wffs. Pelas regras 2 e 4, respectivamente, '$\sim Fa$' e '$\forall zGza$' são wffs. Aplicando a regra 3 para essas duas fórmulas, temos que '$(\sim Fa \;\&\; \forall zGza)$' é uma wff. Pela regra 4, '$\exists x(Fx \;\&\; \forall zGzx)$' é uma wff. Portanto, pela regra 2, '$\sim\exists\, x(Fx \;\&\; \forall zGzx)$' é uma wff.

As seguintes fórmulas não são wffs pelas razões dadas à direita:

$\forall xLzx$	A variável 'z' necessita de um quantificador.
(Fa)	Fórmulas atômicas não estão entre parênteses (veja regra 1).
$(\exists xFz \;\&\; Gx)$	A ocorrência final de 'x' não está quantificada. Note, entretanto, que '$\exists x(Fx \;\&\; Gx)$' é uma wff.
$\forall x(Fx)$	Parênteses desnecessários.
$(\forall xFx)$	Parênteses desnecessários.
$\exists x\forall yFx$	'$\forall y$' requer uma segunda ocorrência de 'y' (veja regra 4).
$\exists x\exists\, x(Fx \;\&\; \sim Gx)$	Quantificadores usando a mesma variável sobrepondo-se na mesma parte da fórmula.
$\exists xFx \;\&\; \exists xGx$	Ausência de parênteses (veja regra 3).

Tal como no cálculo proposicional, convencionamos suprimir os parênteses externos da fórmula. Assim, embora a última fórmula na lista acima não seja oficialmente uma wff, permitiremos o uso de tais fórmulas como abreviações de wffs. Por outro lado, não podemos desprezar os parênteses de '$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$'.

6.4 Regras de inferência para o quantificador universal

O cálculo de predicados usa as mesmas dez regras do cálculo proposicional (e, portanto, as mesmas regras derivadas; um sumário das regras básicas e derivadas é dado no final do Capítulo 3). Temos, ainda, as regras de introdução e de eliminação para os quantificadores. Do mesmo modo que no cálculo proposicional, as regras de inferências não podem ser aplicadas para uma fórmula qualquer, em uma derivação hipotética, depois de concluída a derivação. Antes de introduzirmos as regras quantificacionais, consideremos uma demonstração no cálculo de predicados que usa, somente, regras da lógica proposicional.

PROBLEMA RESOLVIDO

6.4 Prove:

$$\sim Fa \lor \exists xFx, \exists xFx \rightarrow P \vdash Fa \rightarrow P$$

Solução

1	$\sim Fa \vee \exists xFx$	P
2	$\exists xFx \rightarrow P$	P
3	$\mid\ Fa$	H (para PC)
4	$\mid\ \sim\sim Fa$	3 DN
5	$\mid\ \exists xFx$	1, 4 SD
6	$\mid\ P$	2, 5 MP
7	$Fa \rightarrow P$	3-6 PC

Apesar da complexidade interna, as fórmulas da lógica de predicados são tratadas exatamente como as fórmulas da lógica proposicional o são pelas regras do cálculo proposicional.

Introduzimos, a seguir, a primeira regra nova; a regra de eliminação do quantificador universal, EU. Eliminação universal estabelece que o que é verdadeiro para qualquer coisa deve ser verdadeiro, também, para um indivíduo particular.

Eliminação universal (EU): De uma wff quantificada universalmente, $\forall\beta\phi$, podemos inferir uma wff, da forma ϕ^{α}/β, a qual resulta substituindo-se cada ocorrência da variável β em ϕ por uma letra nominal α.

Esta regra é, algumas vezes, chamada *instanciação universal*. Ela é usada, por exemplo, para provar a validade de:

Todos os homens são mortais.

Sócrates é um homem.

∴ Sócrates é mortal.

Usando '*H*' para 'é um homem', '*M*' para 'é mortal' e '*s*' para 'Sócrates', formalizamos esse argumento por:

$$\forall x(Hx \rightarrow Mx), Hs \vdash Ms$$

PROBLEMAS RESOLVIDOS

6.5 Prove a validade dessa forma.

Solução

1	$\forall x(Hx \to Mx)$	P
2	Hs	P
3	$Hs \to Ms$	1 EU
4	Ms	2, 3 MP

Na aplicação de EU, na linha 3, derivamos a forma da proposição 'Se Sócrates é um homem, então Sócrates é mortal' da forma 'Todos os homens são mortais'. Com relação à regra EU, β é 'x', α é 's', ϕ é '$(Hx \to Mx)$' e ϕ^{α}/β é '$(Hs \to Ms)$', na qual omitimos os parênteses externos, de acordo com a convenção feita.

A seguir, algumas provas envolvendo EU.

6.6 Prove:

$$\forall x(Fx \to Gx), \forall xFx \vdash Ga$$

Solução

1	$\forall x(Fx \to Gx)$	P
2	$\forall xFx$	P
3	$Fa \to Ga$	1 EU
4	Fa	2 EU
5	Ga	3, 4 MP

Como a conclusão contém a letra nominal '*a*', obviamente esta letra é usada para executar as duas passagens de EU.

6.7 Prove:

$\sim Fa \vdash \sim\forall xFx$

Solução

1	Fa	P
2	$\mid\ \forall xFx$	H (para RAA)
3	$\mid\ Fa$	2 EU
4	$\mid\ Fa \ \& \sim Fa$	1, 3 & I
5	$\sim\forall\, xFx$	2-4 RAA

A conclusão é uma negação; assim, a estratégia é usar *redução*. Colocamos a conclusão como hipótese adicional, mas sem o sinal de negação, na linha 2, e mostramos que isso leva a uma contradição, na linha 4. Este fato nos permite descartar a hipótese e inferir a conclusão, na linha 5.

6.8 Prove:

$\forall x\forall yFxy \vdash Faa$

Solução

1	$\forall x\forall yFxy$	P
2	$\forall yFay$	1 EU
3	Faa	2 EU

Note que duas passagens de EU são necessárias para se remover os dois quantificadores. Essa derivação ilustra a observação 1, no final da Seção 6.2.

A regra da introdução universal IU para o quantificador universal é um pouco mais complicada. A idéia fundamental é a seguinte: se pudermos provar algo a respeito de um indivíduo *b* sem, contudo, fazer alguma suposição que distinga *b* de um outro indivíduo, então o que tivermos provado para *b* estará provado, também, para qualquer coisa. Desse modo, podemos concluir que vale para qualquer coisa.

Introdução universal é usada em demonstrações de conclusões quantificadas universalmente. Considere o argumento válido (porém incorreto):

Todos os peixes são ciprinídeos.
Todos os ciprinídeos são vistosos.
$\therefore$ Todos os peixes são vistosos.

Esse argumento é um silogismo categórico e, portanto, podemos mostrar sua validade por um diagrama de Venn, elucidado no Capítulo 5. Todavia, usaremos a técnica mais poderosa do cálculo de predicados. O argumento é formalizado por:

$$\forall x\,(Px \rightarrow Cx), \forall x\,(Cx \rightarrow Vx) \vdash \forall x\,(Px \rightarrow Vx)$$

PROBLEMA RESOLVIDO

6.9 Construa uma prova para essa forma.

Solução

1	$\forall x\,(Px \to Cx)$	P
2	$\forall x\,(Cx \to Vx)$	P
3	$Pa \to Ca$	1 EU
4	$Ca \to Va$	2 EU
5	$Pa \to Va$	3, 4 SH
6	$\forall x\,(Px \to Vx)$	5 IU

A letra nominal '*a*', que é introduzida por EU, nas linhas 3 e 4, designa um indivíduo sobre o qual não fizemos suposições ('*a*' não ocorre nas premissas 1 e 2).[5] Isso permite ao indivíduo '*a*' funcionar, na prova, como um representante de todos os indivíduos. Para a demonstração não importa quem é *a*. O que importa é que não fizemos suposições sobre *a*. Assim, tudo que provarmos sobre *a* permanecerá provado também para qualquer indivíduo. Na linha 5, provamos que, se *a* é um peixe, então *a* é vistoso. Como não fizemos suposições acerca de *a*, nossa prova é perfeitamente geral. Podemos substituir cada ocorrência da letra nominal '*a*' na demonstração por qualquer outra letra nominal, sem destruir a validade da demonstração até a linha 5. Suponhamos que trocamos '*a*' com '*b*'. Então, na linha 5, teríamos provado que se *b* é um peixe, então *b* é vistoso. Podemos provar a mesma coisa para o indivíduo *c*, o indivíduo *d* — e, em geral, para qualquer indivíduo. Assim, como não fizemos suposições especiais sobre *a*, as linhas de 1 a 5 funcionam como uma demonstração que para qualquer objeto *x*, se *x* é um peixe, então *x* é vistoso. Isso é o que IU nos permite concluir na linha 6.

Formalmente, a regra IU é estabelecida do seguinte modo:

Introdução universal (IU): Para uma wff ϕ contendo uma letra nominal α que não ocorre em qualquer uma das premissas ou

5. Algumas versões do cálculo de predicados empregam nomes especiais, chamados "nomes arbitrários" para esse propósito. Outras usam variáveis não-quantificadas.

em qualquer hipótese vigente na linha em que ϕ ocorre, podemos inferir uma wff da forma $\forall\beta\phi^{\beta}/\alpha$, onde ϕ^{β}/α é o resultado de se substituir todas as ocorrências de α em ϕ por uma variável β que não ocorra em ϕ.

Na aplicação de IU, na linha 6 do problema 6.9, a wff ϕ é '$Pa \rightarrow Va$', a letra nominal α é 'a', a variável β é 'x' e a fórmula ϕ^{β}/α é '$(Px \rightarrow Vx)$'.

IU é, algumas vezes, chamada *generalização universal*. A exigência de que α não ocorra em qualquer premissa ou em qualquer hipótese vigente na linha em que ϕ ocorre assegura que nada assumimos que distinga o indivíduo designado por α de qualquer outro indivíduo. A exigência de que a variável β não ocorra em ϕ assegura que $\forall\beta\phi^{\beta}/\alpha$ será bem formada (veja regra de formação 4).

IU deve ser aplicada estritamente como o estabelecido. Em particular, as seguintes restrições são cruciais:

1) *A letra nominal α não pode ocorrer em qualquer premissa.* A seguinte derivação ignora essa restrição e, conseqüentemente, é inválida:

1	Pa	P
2	$\forall xPx$	1 IU (incorreta)

Da suposição, digamos, que Albert é peixe, não se segue que qualquer coisa é peixe.

2) *A letra nominal α não deve ocorrer em qualquer hipótese vigente numa linha em que ϕ ocorre.* (Relembramos que uma hipótese é vigente numa linha se ela foi introduzida antes dessa linha e ainda não descartada naquela linha; em outras palavras, ela é vigente se a linha vertical começando com a hipótese estende-se para baixo até aquela linha.) Isso impede o tipo de invalidade exibida acima.

A seguinte derivação é inválida porque ela infringe essa cláusula:

1	$\forall x(Px \rightarrow Cx)$	P
2	$Pa \rightarrow Ca$	I E U
3	$\mid Pa$	H (para PC)
4	$\mid Ca$	2, 3 MP
5	$\mid \forall xCx$	4 IU (incorreta)
6	$Pa \rightarrow \forall xCx$	3-5 PC

(Aqui, ϕ é '*Ca*'e α é 'a'.) Da premissa de que todos os peixes são ciprinídeos não se segue que, se Albert é peixe, então tudo é ciprinídeo. O erro está na linha 5, onde IU está aplicada para '*Ca*' e 'a' ocorre na hipótese '*Pa*', que ainda está vigente.

3) ϕ^{β}/α *é o resultado de substituir todas as ocorrências de* α *em* ϕ *por uma variável* β. A ênfase, aqui, está na palavra 'todas'. Esta cláusula previne o seguinte tipo de erro:

1	$\forall xLxx$	P
2	Laa	1 EU
3	$\forall zLza$	2 IU (incorreta)

(Aqui, ϕ é '*Laa*', β é '*x*' e α é '*a*'.) Da premissa que todo mundo ama a si mesmo, não se segue que todo mundo ama Albert. ϕ^{β}/α deveria ser '*Lzz*' e não '*Lza*'. IU estaria sendo usada corretamente se em vez de '$\forall zLza$' concluíssemos '$\forall zLzz$'.

As seguintes demonstrações ilustram o uso da regra do quantificador universal.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

6.10 Prove:

$$\forall x(Fx \,\&\, Gx) \vdash \forall xFx \,\&\, \forall xGx$$

Solução

1	$\forall x(Fx \,\&\, Gx)$	P
2	$Fa \,\&\, Ga$	1 EU
3	Fa	2 &E
4	Ga	2 &E
5	$\forall xFx$	3 IU
6	$\forall xGx$	4 IU
7	$\forall xFx \,\&\, \forall xGx$	5, 6 &I

Para utilizar a premissa '$\forall x(Fx \,\&\, Gx)$', instanciâmo-la, na linha 2, usando 'a' para designar um indivíduo representativo. Como não fizemos suposições acerca de a, as aplicações de IU, nas linhas 5 e 6, são legítimas.

6.11 Prove:

$$\forall x(Fx \rightarrow (Gx \vee Hx)), \forall x{\sim}Gx \ \vdash \forall xFx \rightarrow \forall xHx$$

Solução

1	$\forall x(Fx \rightarrow (Gx \rightarrow \vee Hx))$	P
2	$\forall x \sim Gx$	P
3	$Fa \rightarrow (Ga \vee Ha)$	1 EU
4	$\sim Ga$	2 EU
5	$\quad\mid\ \forall xFx$	H (para PC)
6	$\quad\mid\ Fa$	5 EU
7	$\quad\mid\ Ga \vee Ha$	3, 6 MP
8	$\quad\mid\ Ha$	4, 7 SD
9	$\quad\mid\ \forall xHx$	8 IU
10	$\forall xFx \rightarrow \forall xHx$	5-9 PC

A letra nominal 'a' é introduzida para designar um indivíduo representativo. Como a conclusão é um condicional, assumimos seu antecedente, em 5, a fim de derivar seu conseqüente, em 9, e, então, aplicar PC em 10. O uso de IU, na linha 9, obedece à regra, pois nenhuma das premissas ou hipóteses contém 'a'.

Note que uma estratégia diferente é requisitada se, em vez da conclusão condicional '$\forall xFx \rightarrow \forall xHx$', queremos provar a conclusão quantificada universalmente '$\forall x(Fx \rightarrow Hx)$'.

6.12 Prove:

$$\forall x(Fx \rightarrow (Gx \vee Hx)), \forall x \sim Gx \vdash \forall x(Fx \rightarrow Hx)$$

Solução

1	$\forall x(Fx \rightarrow (Gx \vee Hx))$	P
2	$\forall x \sim Gx$	P
3	$Fa \rightarrow (Ga \vee Ha)$	1 EU
4	$\sim Ga$	2 EU
5	$\mid\ Fa$	H (para PC)
6	$\mid\ Ga \vee Ha$	3, 5 MP
7	$\mid\ Ha$	4, 6 SD
8	$Fa \rightarrow Ha$	5-7 PC
9	$\forall x(Fx \rightarrow Hx)$	8 IU

Aqui necessitamos do condicional '$Fa \rightarrow Ha$', a fim de obter '$\forall x(Fx \rightarrow Hx)$' por IU. Assumimos '$Fa$' na linha 5 para concluir '$Fa \rightarrow Ha$' na linha 8, por PC.

6.13 Prove:

$$\forall xFax, \forall x\forall y\ (Fxy \rightarrow Gyx) \vdash \forall xGxa$$

Solução

1	$\forall xFax$	P
2	$\forall x\forall y\ (Fxy \rightarrow Gyx)$	P
3	Fab	1 EU
4	$\forall y\ (Fay \rightarrow Gya)$	2 EU
5	$Fab \rightarrow Gba$	4 EU
6	Gba	3, 5 MP
7	$\forall xGxa$	6 IU

Na passagem 3, introduzimos '*b*' para designar um indivíduo representativo. Qualquer outra letra nominal deverá fazer o mesmo, exceto '*a*'. Podemos inferir, legitimamente, '*Faa*', por EU, da linha 1 na linha 3, mas isso será obstáculo para usarmos IU com '*a*', pois '*a*' ocorre na premissa em 1. O uso de IU com '*b*' na linha 7 é legítimo, pois não fizemos suposições ou hipóteses contendo '*b*'. Note que duas passagens de EU (linhas 4 e 5) são necessárias para se remover os quantificadores de '$\forall x \forall y\ (Fxy \rightarrow Gyx)$'.

6.14 Prove:

$$\forall xFx \rightarrow \forall xGx\ ,\ {\sim}Ga\ \vdash {\sim}\forall xFx$$

Solução

1	$\forall xFx \rightarrow \forall xGx$	*P*
2	${\sim}Ga$	*P*
3	$\forall xFx$	*H* (para RAA)
4	$\forall xGx$	1, 3 MP
5	Ga	4 EU
6	$Ga\ \&\ {\sim}Ga$	2, 5 &I
7	${\sim}\forall xFx$	3-6 RAA

Como a conclusão é uma fórmula negada, a estratégia de *redução* é utilizada. Assim, supomos '$\forall xFx$' na linha 3. Observe que EU não pode ser aplicada, diretamente, em '$\forall xFx \rightarrow \forall xGx$', pois é um condicional e não uma wff quantificada universalmente. (É mais fácil ver isso se relembramos que sua verdadeira forma é '$(\forall xFx \rightarrow \forall xGx)$'; recolocando-se os parênteses externos, omitidos por convenção.)

6.5 Regras de inferência para o quantificador existencial

Tal como o quantificador universal, o quantificador existencial tem duas regras: de introdução e de eliminação. A regra de introdução existencial, IE, é direta: da premissa que um indivíduo tem uma certa propriedade (simples ou complexa), segue-se que alguém (o indivíduo em questão, se nada mais) tem aquela propriedade. Em termos formais:

> *Introdução existencial* (IE): Dada uma wff ϕ contendo uma letra nominal α, podemos inferir uma wff da forma $\exists\beta\ \phi^{\beta}/\alpha$, onde ϕ^{β}/α é o resultado de se substituir uma ou mais ocorrências de α em ϕ por uma variável β, que não ocorra em ϕ.

Por exemplo, dada a premissa '*Fa* & *Ga*' (a suposição de que o indivíduo *a* tem a propriedade complexa de ser, ambos, *F* e *G*), podemos inferir '$\exists x(Fx \ \& \ Gx)$'. A demonstração é feita em duas passagens:

1	$Fa \ \& \ Ga$	*P*
2	$\exists x(Fx \ \& \ Gx)$	1 IE

Com relação ao enunciado formal da regra, ϕ nesse caso é '*Fa* & *Ga*', α é '*a*', β é '*x*' e ϕ^{β}/α é '$(Fx \ \& \ Gx)$'. Há muitos aspectos para se observar nessa regra:

1) *De modo diferente de IU, IE não coloca restrições em ocorrências prévias da letra nominal* α; α pode ocorrer em uma hipótese, não utilizada ainda, ou em uma premissa, tal como na passagem 1 acima.

2) *Em contraste com o caso para IU a variável* β *não precisa substituir todas as ocorrências de* α *em* ϕ*; é preciso substituir somente uma, ou mais*. Assim, as duas demonstrações a seguir estão corretas.

1	$Fa \,\&\, Ga$	P
2	$\exists x(Fx \,\&\, Ga)$	1 IE

1	$Fa \,\&\, Ga$	P
2	$\exists x(Fx \,\&\, Gx)$	1 IE

Da premissa de que Alf é um sapo e Alf é verde, segue-se que algo é tal que é sapo e Alf é verde e, também, que algo é tal que Alf é um sapo e ele é verde.

3) *Tal como IU, IE nos permite introduzir somente um quantificador por vez e somente do lado esquerdo da fórmula.* A seguinte inferência é incorreta:

1	$Fa \rightarrow Ga$	P
2	$\exists xFx \rightarrow Ga$	1 IE (incorreta)

Para ver claramente o erro, note que '$\exists xFx \rightarrow Ga$' não é, oficialmente, uma wff; ela é uma abreviação convencional da wff '$(\exists xFx \rightarrow Ga)$', da qual omitiu-se os parênteses externos. O quantificador não ocupa a posição à esquerda, o que deveríamos ter para a correta aplicação de IE; o símbolo da esquerda é um parêntese. A inferência é inválida; da premissa de que se Alf é um sapo então Alf é verde não se segue, que se algo é um sapo então Alf é verde.

A regra IE estabelece duas importantes pressuposições:

1) Todos os nomes próprios referem-se a indivíduos existentes.

2) Existe pelo menos um indivíduo.

A primeira pressuposição é resultado do fato de que IE pode ser aplicada para qualquer letra nominal. Como o quantificador existencial afirma existência, podemos sempre interpretar letras nominais como referindo-se a indivíduos existentes, e com isso garantirmos que todas as aplicações de IE são válidas. A invalidade surge quando ignoramos essa pressuposição. Suponha que interpretamos 'a' como o nome de um indivíduo inexistente, digamos o deus grego Apolo, e 'M' como o predicado 'é mitológico'. Então, por IE, obtemos a seguinte derivação, inválida:

1	Ma	P
2	$\exists xMx$	1 IE

A premissa é verdadeira, presumivelmente (Apolo é mitológico); mas a conclusão é falsa, pois seres mitológicos não existem, de fato. Seguimos, aqui, a regra IE, estritamente; nosso erro consiste não em fazer mau uso da regra mas, em usar o nome de uma coisa inexistente. O cálculo de predicados usual não está equipado para lidar com tais nomes; é importante que a pessoa que estuda o cálculo de predicados esteja ciente dessa limitação. Várias modificações esteja têm sido desenvolvidas a fim de lidar com nomes de coisas inexistentes; contudo, não vamos discuti-las aqui.

A segunda pressuposição é uma conseqüência da primeira. Como as letras nominais são interpretadas como referindo-se a coisas existentes, o uso do cálculo, em qualquer interpretação, pressupõe a existência de pelo menos uma coisa. Contudo, não pressupõe a existência de mais de uma coisa (não-lingüística), ainda que (pensando nos subscritos) possua um potencial infinito de letras nominais. Dois ou mais (ou mesmo infinitos) nomes podem referir-se ao mesmo indivíduo. Não se presumiu que nomes diferentes devam referir-se a coisas diferentes.

As seguintes demonstrações ilustram o uso de IE.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

6.15 Prove:

$$\forall x\,(Fx \vee Gx) \vdash \exists x(Fx \vee Gx)$$

Solução

1	$\forall x(Fx \vee Gx)$	P
2	$Fa \vee Ga$	1 EU
3	$\exists x(Fx \vee Gx)$	2 IE

Introduzimos 'a', na linha 2, para designar um indivíduo representativo. (Podemos presumir que um tal indivíduo existe, pois o cálculo de predicados pressupõe a existência de pelo menos um.) Como assumimos que toda coisa é ou F ou G, segue-se que a é ou F ou G e, daí, que algo é ou F ou G.

6.16 Prove:

$$\forall x(Fx \vee Gx) \vdash \exists xFx \vee \exists xGx$$

Solução

1	$\forall x(Fx \vee Gx)$	P
2	$Fa \vee Ga$	1 EU
3	$\quad\mid Fa$	H (para PC)
4	$\quad\mid \exists xFx$	3 IE
5	$\quad\mid \exists xFx \vee \exists xGx$	4 $\vee$I
6	$Fa \rightarrow (\exists xFx \vee \exists xGx)$	3-5 PC
7	$\quad\mid Ga$	H (para PC)
8	$\quad\mid \exists xGx$	7 IE
9	$\quad\mid \exists xFx \vee \exists xGx$	8 $\vee$I
10	$Ga \rightarrow (\exists xFx \vee \exists xGx)$	7-9 PC
11	$\exists xFx \vee \exists xGx$	2, 6, 10 $\vee$E

A conclusão do problema 6.15 é uma disjunção quantificada existencialmente. Aqui, a conclusão é uma disjunção de dois enunciados quantificados existencialmente; assim, uma estratégia diferente de demonstração é requerida. Tendo instanciado '$\forall x\ (Fx \lor Gx)$', na linha 2, procedemos com duas provas de PC (linhas 3-6 e 7-10) para deduzir o condicional necessário, a fim de provar a conclusão por $\lor$E.

6.17 Prove:

$$\sim\exists xFx \vdash \forall x \sim Fx$$

Solução

1	$\sim\exists xFx$	*P*
2	$\quad Fa$	*H* (para RAA)
3	$\quad \exists xFx$	2 IE
4	$\quad \exists xFx\ \&\ \sim\exists xFx$	1, 3 &I
5	$\sim Fa$	2-4 RAA
6	$\forall x \sim Fx$	5 IU

Para obter a conclusão quantificada universalmente, '$\forall x {\sim} Fx$', precisamos obter '$\sim Fa$' e, então, aplicar IU. Como '$\sim Fa$' está negada, a estratégia da *redução* é indicada. Assumimos '*Fa*', na linha 2, a fim de derivar uma contradição, em 4, a qual nos permite obter '$\sim Fa$' na linha 5. Nossa hipótese contém uma letra nominal '*a*', mas como ela não está mais vigente na linha 5 e '*a*' não ocorre na premissa, a aplicação de IU, em 6, está correta.

6.18 Prove:

$$\sim\exists x\,(Fx \;\&\; \sim Gx) \vdash \forall x\,(Fx \to Gx)$$

Solução

1	$\sim\exists x(Fx \;\&\; \sim Gx)$	P
2	$\quad Fa$	H (para PC)
3	$\quad\quad \sim Ga$	H (para RAA)
4	$\quad\quad Fa \;\&\; \sim Ga$	2, 3 &I
5	$\quad\quad \exists x(Fx \;\&\; \sim Gx)$	4 IE
6	$\quad\quad \exists x(Fx \;\&\; \sim Gx) \;\&\; \sim\exists x(Fx \;\&\; \sim Gx)$	1, 5 &I
7	$\quad \sim\sim Ga$	3-6 RAA
8	$\quad Ga$	7 ~E
9	$Fa \to Ga$	2-8 PC
10	$\forall x\,(Fx \to Gx)$	9 IU

Como no problema 6.17, a conclusão está quantificada universalmente; assim, seguimos uma estratégia similar. A estratégia é obter, primeiro, '$Fa \to Ga$', e então aplicar IU. Como '$Fa \to Ga$' é um condicional, procedemos por PC, assumindo seu antecedente 'Fa' na linha 2. Não há maneira simples de derivar 'Ga' de 'Fa' e, portanto, tentaremos uma *redução*, assumindo '$\sim Ga$' na esperança de obter uma contradição. Obtemos a contradição na linha 6, que nos permite obter 'Ga' na linha 8 e então completar com PC, em 9. As duas hipóteses contêm 'a', mas, como nenhuma está vigente, na linha 9, e como a premissa não contém 'a', o uso de IU, na linha 10, é legítimo.

Para raciocinar a partir de premissas existenciais, é necessário uma segunda regra para o quantificador existencial, a eliminação existencial (EE).[6] Tal como PC e RAA, EE usa raciocínio hipotético. Uma premissa existencial afirma que pelo menos uma coisa tem uma propriedade (simples ou complexa). Para raciocinar a partir dessa premissa, colocamos, como hipótese, um indivíduo que representa uma dessas coisas que tem essa propriedade. Então, sem fazer suposições adicionais acerca deste indivíduo, derivamos da hipótese a conclusão que queremos provar. Como não fizemos suposições sobre o indivíduo representativo, exceto a propriedade que a premissa existencial atribui a alguma coisa, a derivação da conclusão desejada mostra que, não importa que indivíduo tem essa propriedade, a conclusão deve ser verdadeira. Portanto, descartamos a hipótese e asseguramos a conclusão com base na premissa existencial. Eliminação existencial é a que nos permite fazer isso.

Por exemplo, para provar a conclusão '$\exists xFx$' da premissa existencial '$\exists x(Fx \ \& \ Gx)$', procedemos como se segue:

1	$\exists x(Fx \ \& \ Gx)$	P
2	$\mid\ Fa \ \& \ Ga$	H (para EE)
3	$\mid\ Fa$	2 &E
4	$\mid\ \exists xFx$	3 IE
5	$\exists xFx$	1, 2-4 EE

A premissa existencial '$\exists x(Fx \ \& \ Gx)$' afirma que, pelo menos uma coisa tem a propriedade complexa de ser tanto F como G, mas não nos diz quem ela é. Escolhemos um indivíduo a para representar uma dessas coisas e assumimos, na linha 2, que a tem essa propriedade. (Isso é meramente uma hipótese: o indivíduo a, quem quer que seja, não precisa,

6. Algumas versões da lógica de predicados têm uma regra chamada instanciação existencial, a qual serve ao mesmo propósito que EE, mas que opera diferentemente. As duas não devem ser confundidas. A confusão pode surgir pelo fato de que instanciação existencial é, freqüentemente, abreviada por 'IE', embora isso seja oposto, de fato, à nossa regra de introdução existencial (IE).

de fato, ter essa propriedade.) A linha 2 diz que: "Suponha que *a* é uma das coisas que é tanto *F* como *G* e veja o que se segue". Na derivação hipotética (linhas 2 a 4), mostramos que a conclusão desejada '$\exists xFx$' segue-se. Como não fizemos suposições sobre *a*, exceto a hipótese de que é *F* e *G*, a derivação hipotética é genérica: poderíamos ter usado qualquer outra letra nominal na hipótese e ainda ter derivado a mesma conclusão. Essa generalidade é a chave da demonstração, pois garante que, não importa o que é isso, que é tanto *F* como *G* (já que alguma coisa é), a conclusão '$\exists xFx$' é verdadeira. Desse modo, temos que '$\exists xFx$' se segue validamente de '$\exists x(Fx\ \&\ Gx)$'. A regra EE nos permite tal afirmação, descartando a hipótese e confirmando a conclusão baseada somente em '$\exists x(Fx\ \&\ Gx)$'. Justificamos isso ao assumir a premissa existencial na linha 1, e as linhas de 2 a 4, contendo a derivação hipotética.

Podemos estabelecer a regra EE:

Eliminação existencial (EE): Dada uma wff quantificada existencialmente $\exists\beta\ \phi$ e uma derivação de alguma conclusão ψ de uma hipótese da forma ϕ^{α}/β (o resultado de se substituir cada ocorrência da variável β em ϕ por uma letra nominal α que não ocorra em ϕ), podemos descartar ϕ^{α}/β e reafirmar ψ. *Restrição*: A letra nominal α não pode ocorrer em ψ, nem em qualquer premissa, nem em qualquer hipótese vigente na linha em que EE é aplicada.

Na derivação acima, $\exists\beta\phi$ é '$\exists x(Fx\ \&\ Gx)$', β é 'x', α é 'a', ϕ^{α}/β é '$Fa\ \&\ Ga$' e ψ é '$\exists xFx$'. Podemos chamar ϕ^{α}/β de uma *instância representativa* de $\exists\beta\phi$, já que, em EE, α representa uma das coisas que tem a propriedade indicada por ϕ.

Vários aspectos dessa regra requerem cuidados:

1) *A letra nominal* α *não pode ocorrer em* ϕ. Isso é para prevenir erros como o seguinte:

1	$\forall x \exists y Fyx$	*P*
2	$\exists y Fya$	1 EU
3	$\quad$ | Faa	*H* (para EE)
4	$\quad$ | $\exists x Fxx$	3 IE
5	$\exists x Fxx$	2, 3-4 EE (incorreta)

Aqui, $\exists\beta\phi$ é '$\exists yFya$', β é 'y', α é 'a', ϕ^{α}/β é 'Faa' e ψ é '$\exists xFxx$'. Essa derivação é inválida; da premissa de que todos têm um pai ($\forall x\exists yFyx$) não se segue que alguém é pai de si mesmo ($\exists xFxx$). O erro está na aplicação de EE na linha 5. Como 'a' já ocorre em '$\exists yFya$', a introdução de 'a' na linha 3 para representar o indivíduo ou os indivíduos designados pela variável 'y' nessa fórmula destitui a derivação hipotética (linhas 3 e 4) de generalidade e, assim, invalida a aplicação de EE em 5. Se 'y' fosse substituída por outra letra nominal, criando a hipótese na linha 3, não poderíamos derivar '$\exists xFxx$' em 4. Assim, a derivação hipotética não mostra que '$\exists xFxx$' (alguém é pai de si mesmo) é verdadeira, não importando que indivíduo supomos ser pai de a. (Na verdade, isso só pode ser deduzido sob a hipótese especial 'Faa'.) Portanto, não mostramos que o fato de que a tem um pai ($\exists yFya$) implica que alguém é pai de si mesmo ($\exists xFxx$), que é conseqüência de aplicar EE de modo incorreto.

2) *A letra nominal* α *não deve ocorrer em* ψ *(a conclusão de uma derivação hipotética).* Se essa restrição é violada, resulta o seguinte erro:

1	$\exists xHxx$	*P*
2	$\quad Haa$	*H* (para EE)
3	$\quad \exists xHax$	2 IE
4	$\exists xHax$	1, 2-3 EE (incorreta)

Isso é inválido; da premissa de que alguém bateu em si próprio ($\exists xHxx$) não se segue que Alice bateu em alguém ($\exists xHax$). O erro está na aplicação de EE. A fórmula ψ (nesse caso, $\exists xHax$) contém a letra nominal α (nesse caso, '*a*'), a qual destitui a derivação hipotética de generabilidade. Se tivéssemos introduzido alguma outra letra nominal, digamos '*b*', para designar o indivíduo representativo na linha 2, não teríamos ter derivado a conclusão de que Alice bateu em alguém ($\exists xHax$) na linha 3; teríamos somente '$\exists xHbx$'. A derivação hipotética não mostra que não importa qual indivíduo bateu em si próprio, Alice pode ter batido em alguém e, assim, o uso de EE está incorreto.

3) α *não pode ocorrer em qualquer premissa.* A seguir, temos um exemplo do que acontece se violamos essa cláusula:

1	$\exists xGx$	*P*
2	Fa	*P*
3	$\quad Ga$	*H* (para EE)
4	$\quad Fa \,\&\, Ga$	2, 3 &I
5	$\quad \exists x(Fx \,\&\, Gx)$	4 IE
6	$\exists x(Fx \,\&\, Gx)$	1, 3-5 EE (incorreta)

Mais uma vez, a derivação é inválida. Dadas as premissas de que algo é uma girafa ($\exists xGx$) e Amos é uma rã (Fa), não teríamos deduzido que algo é uma rã e uma girafa simultaneamente ($\exists x(Fx \ \& \ Gx)$). O erro é que a letra nominal α (nesse caso 'a') ocorre na premissa 'Fa'. Isso destrói a generalidade da derivação hipotética e invalida o uso de EE, na linha 6. Se tivéssemos usado qualquer outra letra nominal, que não fosse 'a' para designar o indivíduo representativo, em 2, não teríamos meios de obter '$\exists x(Fx \ \& \ Gx)$', na linha 5. Portanto, a derivação hipotética não mostrou que, não importa que indivíduo é uma girafa, algo deve ser ambos, uma rã e uma girafa.

4) α *não pode ocorrer em qualquer hipótese vigente na linha em que EE será aplicada.* (Relembramos que uma hipótese é vigente numa linha se ela foi introduzida antes daquela linha e ainda não foi descartada.) Isso é, essencialmente, a mesma cláusula da condição 3, mas aplicada para hipóteses em vez de premissas. Para ver a analogia com a condição 3, consideremos a seguinte derivação:

1	$\exists xGx$	P
2	$\quad Fa$	H (para PC)
3	$\quad\quad Ga$	H (para EE)
4	$\quad\quad Fa \ \& \ Ga$	2, 3 &I
5	$\quad \exists x(Fx \ \& \ Gx)$	4 IE
6	$\exists x(Fx \ \& \ Gx)$	1, 3-5 EE (incorreta)
7	$Fa \rightarrow \exists x(Fx \rightarrow Gx)$	2-6 PC

Como no exemplo anterior, ela é inválida; dada a premissa de que algo é uma girafa ($\exists xGx$), não pode se seguir que, se Amos é uma rã, então algo é uma rã e uma girafa, simultaneamente ($Fa \rightarrow \exists x(Fx \ \& \ Gx)$). O erro está no fato de que a letra nominal α (nesse caso 'a') ocorre na hipótese da linha 2, que ainda está vigente, quando EE foi aplicada na linha 6. Isso destrói a generalidade da derivação hipotética, do mesmo modo que a premissa de 'Fa' destruiu no exemplo anterior — e, conseqüentemente, torna o uso de EE em 6 incorreto.

Consideremos, agora, algumas demonstrações que ilustram a aplicação de EE.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

6.19 Prove:

$$\forall x\,(Fx \to Gx), \exists xFx \vdash \exists xGx$$

Solução

1	$\forall x(Fx \to Gx)$	P
2	$\exists xFx$	P
3	$\mid Fa$	H (para EE)
4	$\mid Fa \to Ga$	1 EU
5	$\mid Ga$	3, 4 MP
6	$\mid \exists xGx$	5 IE
7	$\exists xGx$	2, 3-6 EE

A premissa na linha 2 afirma que algo tem a propriedade F. Em 3, admitimos que a é esse algo. Derivamos a conclusão dessa hipótese na linha 6. Essa derivação hipotética obedece a todas as observações feitas sobre a regra EE e, em conseqüência, é perfeitamente geral. Poderíamos ter derivado a mesma conclusão da hipótese de que qualquer outro indivíduo tem a propriedade F. Assim, a passagem final de EE é legítima. Note que devemos aplicar IE na linha 6 *antes* de aplicar EE. Se invertêssemos a ordem dessas duas passagens, a conclusão da derivação hipotética seria 'Ga', que contém 'a', e, portanto, impediria a aplicação de EE (veja condição 2).

6.20 Prove:

$$\exists x(Fx \vee Gx) \vdash \exists xFx \vee \exists xGx$$

Solução

1	$\exists x(Fx \vee Gx)$	P
2	$\quad Fa \vee Ga$	H (para EE)
3	$\qquad Fa$	H (para PC)
4	$\qquad \exists xFx$	3 IE
5	$\qquad \exists xFx \vee \exists xGx$	4 $\vee$I
6	$\quad Fa \rightarrow (\exists xFx \vee \exists xGx)$	3-5 PC
7	$\qquad Ga$	H (para PC)
8	$\qquad \exists xGx$	7 IE
9	$\qquad \exists xFx \vee \exists xGx$	8 $\vee$I
10	$\quad Ga \rightarrow (\exists xFx \vee \exists xGx)$	7-9 PC
11	$\quad \exists xFx \vee \exists xGx$	2, 6, 10 $\vee$E
12	$\exists xFx \vee \exists xGx$	1, 2-11 EE

A premissa é uma disjunção quantificada existencialmente. Para usá-la, assumimos uma instância representativa por EE em 2. Essa instância representativa é a disjunção '$Fa \vee Ga$'. Quando temos uma disjunção, a estratégia é usar $\vee$E. Isso requer os dois condicionais alistados nas linhas 6 e 10, e obtemos esses condicionais por PC. Obtemos assim a conclusão, por $\vee$E, em 11. Completamos a prova descartando a hipótese e afirmando a conclusão por EE, na linha 12. O leitor deverá verificar que a passagem 12 obedece à regra EE.

6.21 Prove:

$$\exists xFx \vee \exists xGx \vdash \exists x(Fx \vee Gx)$$

Solução

1	$\exists xFx \vee \exists xGx$	P
2	$\quad\vert\ \exists xFx$	H (para PC)
3	$\quad\vert\quad\vert\ Fa$	H (para EE)
4	$\quad\vert\quad\vert\ Fa \vee Ga$	3 $\vee$I
5	$\quad\vert\quad\vert\ \exists x(Fx \vee Gx)$	4 IE
6	$\quad\vert\ \exists x(Fx \vee Gx)$	2, 3-5 EE
7	$\exists xFx \rightarrow \exists x(Fx \vee Gx)$	2-6 PC
8	$\quad\vert\ \exists xGx$	H (para PC)
9	$\quad\vert\quad\vert\ Ga$	H (para EE)
10	$\quad\vert\quad\vert\ Fa \vee Ga$	9 $\vee$I
11	$\quad\vert\quad\vert\ \exists x(Fx \vee Gx)$	10 IE
12	$\quad\vert\ \exists x(Fx \vee Gx)$	8, 9-11 EE
13	$\exists xGx \rightarrow \exists x(Fx \vee Gx)$	8-12 PC
14	$\exists x(Fx \vee Gx)$	1, 7, 13 $\vee$E

Esta é a recíproca do problema 6.20. Aqui, estamos provando uma conclusão existencial, a partir de uma disjunção; logo, a estratégia dominante é $\vee$E, é não EE. Isso requer que obtenhamos dois condicionais (linhas 7 e 13), por PC. Cada prova por PC engloba uma estratégia, por EE. Os dois usos de EE são legítimos, mesmo que a letra nominal '*a*' ocorra nas hipóteses das linhas 3 e 9, pois elas não estão vigentes nas linhas em que EE foi aplicada (veja condição 4, acima).

6.22 Prove:

$$\exists x \forall y Lxy \vdash \forall x \exists y Lyx$$

Solução

1	$\exists x \forall y Lxy$	*P*
2	$\quad \forall y Lay$	*H* (para EE)
3	$\quad Lab$	2 EU
4	$\quad \exists y Lyb$	3 IE
5	$\quad \forall x \exists y Lyx$	4 IU
6	$\forall x \exists y Lyx$	1, 2-5 EE

A premissa e a conclusão não são equivalentes. Lendo '*L*' como 'ama', a premissa diz: "Pelo menos alguém é tal que este alguém ama todo mundo", enquanto a conclusão diz: "Todo mundo é amado por alguém" (não, necessariamente, a mesma pessoa, em cada caso). Como a premissa está quantificada existencialmente, assumimos uma instância representativa dela, na linha 2. O uso de IU, em 5, está correto, pois a letra nominal '*b*' não ocorre em qualquer premissa ou hipótese. Do mesmo modo (o leitor deve confirmar), a passagem 6 respeita todos os requisitos da regra

EE. As duas últimas passagens da prova poderiam ter sido intercambiadas tal como:

5	$\exists y Lyb$	1, 2-4 EE
6	$\forall x \exists y Lyx$	5 IU

A prova ainda estaria correta.

6.23 Prove:

$$\forall x(Fx \rightarrow \exists y Lxy), \exists x(Fx \ \& \ Gx) \vdash \exists x \exists y \, (Gx \ \& \ Lxy)$$

Solução

1	$\forall x(Fx \rightarrow \exists y Lxy)$	P
2	$\exists x(Fx \ \& \ Gx)$	P
3	│ $Fa \ \& \ Ga$	H (para EE)
4	│ $Fa \rightarrow \exists y Lay$	1 EU
5	│ Fa	3 &E
6	│ $\exists y Lay$	4, 5 MP
7	│ │ Lab	H (para EE)
8	│ │ Ga	3 & E
9	│ │ $Ga \ \& \ Lab$	7, 8 &I
10	│ │ $\exists y(Ga \ \& \ Lay)$	9 IE
11	│ │ $\exists x \exists y(Gx \ \& \ Lxy)$	10 IE
12	│ $\exists x \exists y(Gx \ \& \ Lxy)$	6, 7-11 EE
13	$\exists x \exists y(Gx \ \& \ Lxy)$	2, 3-12 EE

Essa prova requer dois usos de EE, um para cada quantificador existencial nas premissas. Começamos, em 3, assumindo uma instância representativa de '$\exists x(Fx \ \& \ Gx)$'. Instanciando '$\forall x(Fx \rightarrow \exists y Lxy)$' com '$a$', na linha 4, derivamos '$\exists y Lay$', em 6.

Para usar essa fórmula existencial, assumimos uma instância representativa dela, na linha 7, introduzindo uma nova letra nominal, '*b*'. (Não podemos usar '*Laa*' como uma instância representativa da fórmula, em 6, pois isso poderia impedir a aplicação correta de EE.) Da hipótese, em 7, derivamos a conclusão, na linha 11, e então descartamos as duas hipóteses por duas passagens de EE nas linhas 12 e 13. Embora a letra nominal '*b*' ocorra na hipótese, em 7, a passagem de EE, em 12, é legítima, pois essa hipótese não é mais vigente em 12. Analogamente, embora '*a*' ocorra nas hipóteses das linhas 3 e 7, a passagem de EE, em 13, é legítima, pois essas hipóteses não são mais vigentes, em 13. Não precisamos considerar as ocorrências de '*a*' ao checar a linha 12, pois a letra nominal relevante a, nessa linha, é '*b*' e não '*a*'; também não precisamos considerar as ocorrências de '*b*' ao checar a linha 13, pois α é '*a*' (veja o enunciado formal da regra EE).

6.24 Prove:

$$\forall x\,(Fx \rightarrow \sim Gx) \vdash \sim\exists x(Fx \,\&\, Gx)$$

Solução

1	$\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$	*P*
2	$\mid\ \exists x(Fx \,\&\, Gx)$	*H* (para RAA)
3	$\mid\ \mid\ Fa \,\&\, Ga$	*H* (para EE)
4	$\mid\ \mid\ Fa \rightarrow \sim Ga$	1 EU
5	$\mid\ \mid\ Fa$	3 &E
6	$\mid\ \mid\ \sim Ga$	4, 5 MP
7	$\mid\ \mid\ Ga$	3 &E
8	$\mid\ \mid\ P \,\&\, \sim P$	6,7 CONTRAD
9	$\mid\ P \,\&\, \sim P$	2, 3-8 EE
10	$\sim\exists\, x(Fx \,\&\, Gx)$	2-9 RAA

Como a conclusão está negada, adotamos a estratégia de *redução*; assumimos '$\exists x(Fx \ \& \ Gx)$', em 2, e operamos a fim de obter uma contradição. Como '$\exists x(Fx \ \& \ Gx)$' está quantificada existencialmente, assumimos uma instância representativa dela, em 3. A contradição '$Ga \ \& \ {\sim}Ga$' teria sido obtida na linha 8, mas isso impediria a aplicação de EE em 9, pois '$Ga \ \& \ {\sim}Ga$' contém o nome 'a' (veja condição 2 para a regra EE). Para utilizar RAA é preciso, primeiro, descartar a hipótese da linha 3 por EE. Relembramos que a regra derivada CONTRAD nos permite inferir qualquer wff de uma wff junto com sua negação. Usamos essa regra, em 8, para inferir a contradição, '$P \ \& \ {\sim}P$', a qual não contém 'a' (qualquer outra contradição serviria, desde que nela não ocorresse 'a'). Isso possibilita o uso correto de EE, na linha 9. Completamos a estratégia de *redução*, na linha 10.

Concluímos esta seção com alguns pontos importantes que devemos considerar quando formos fazer demonstrações:

1) *Todas as quatro regras quantificacionais operam somente na posição esquerda de uma fórmula, isto é, somente num quantificador cujo escopo é a fórmula toda.* Introdução existencial e introdução universal nos permitem introduzir um quantificador como um símbolo, no lado esquerdo. Analogamente, EU nos permite remover um quantificador somente se ele é o primeiro símbolo do lado esquerdo, e uma hipótese EE pode ser construída somente pela remoção do quantificador esquerdo de uma wff quantificada existencialmente (nesse caso a variável governada pelo quantificador é substituída por uma letra nominal). Deve-se ter um cuidado especial quando '&', '$\vee$', '$\rightarrow$' ou '$\leftrightarrow$' é o operador principal de uma fórmula, pois a fórmula "oficialmente" tem parênteses externos (veja regra de formação 3, página 250), ainda que eles estejam omitidos, por convenção. Seu símbolo esquerdo é, oficialmente, o parênteses esquerdo externo; por isso, quando um quantificador é introduzido, ele deve ir para o lado esquerdo desse parênteses. Nesse caso, ambos os parênteses, o do lado esquerdo

e do lado direito, devem aparecer explicitamente (compare com a condição 3 para a regra IE).

2) *Para provar uma conclusão quantificada existencial ou universalmente, a estratégia é, primeiro, provar uma fórmula a partir da qual essa conclusão pode ser obtida por IE ou IU.* Por exemplo,

Para provar:	*Prove primeiro:*
$\exists x Fx$	Fa
$\forall x(Fx \to Gx)$	$Fa \to Ga$
$\forall x \sim Fx$	$\sim Fa$
$\forall x \exists y Fxy$	$\exists y Fay$
$\exists y Fay$	Fab
$\exists x Fxx$	Faa

Adote, então, uma subestratégia baseada na forma da conclusão necessária para IU ou IE. Por exemplo, para provar '$\forall x(Fx \to Gx)$', primeiro prove '$Fa \to Ga$', e, para provar esta última, utilize PC como uma subestratégia (veja problemas 6.9 e 6.12). Analogamente, para provar '$\forall x \sim Fx$', primeiro prove '$\sim Fa$' — e como ela é uma fórmula negada, assuma 'Fa' por *redução*.

3) *Se a conclusão é uma negação, conjunção, disjunção, condicional ou bicondicional, então é melhor empregar a estratégia do cálculo proposicional para provar tais conclusões (veja tabela 3-1, Seção 3.4).* Por exemplo, para provar a fórmula negada '$\sim\forall x Fx$', usa-se a estratégia de *redução*: assume-se '$\forall x Fx$' e deriva uma contradição (veja problemas 6.7 e 6.14). Note que isso é feito não para derivar '$\sim Fa$' e então aplicar IU, pois mesmo que isso seja possível o resultado será '$\forall x \sim Fx$', que não é a conclusão desejada. Similarmente, para

provar o condicional '$\forall x Fx \rightarrow \forall x Gx$', assumimos seu antecedente e usamos PC (veja problema 6.11). Isso é feito não para derivar '$Fa \rightarrow Ga$' e então aplicar IU, pois mesmo que possível, isso resultará somente em '$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$'.

6.6 Teoremas e regras de equivalência do quantificador

No cálculo de predicados é possível provar algumas wffs sem fazer uso de premissas. Tais wffs são os *teoremas* do cálculo de predicados. Elas são verdades lógicas, fórmulas cuja verdade é necessária, indiferentes aos significados atribuídos a seus símbolos não-lógicos. Como o cálculo de predicados engloba o cálculo proposicional, todos os teoremas do cálculo proposicional são, também, teoremas do cálculo de predicados. Mas, o cálculo de predicados tem outros teoremas que pertencem somente a ele.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

6.25 Prove o teorema:

$$\vdash \forall x(Fx \rightarrow Fx)$$

Solução

1	| Fa	H (para PC)
2	$Fa \rightarrow Fa$	1-1 PC
3	$\forall x(Fx \rightarrow Fx)$	2 IU

Na linha 2, aplicamos PC para a linha, que é simultaneamente o antecedente e o conseqüente do condicional '$Fa \rightarrow Fa$', que estamos tentando provar. A aplicação de IU é legítima, pois embora 'a' ocorra na hipótese 'Fa', esta hipótese foi descartada na linha 2. Esse teorema pode ser provado usando a regra derivada IT (ver Seção 3.6):

1	$Fa \rightarrow Fa$	IT Cap. 3, prob. supl. VI (1)
2	$\forall x(Fx \rightarrow Fx)$	1 IU

O teorema usado é '$P \rightarrow P$', do qual '$Fa \rightarrow Fa$' é uma instância substitutiva. Note que a linha 1 não é uma hipótese nem tampouco uma premissa; ainda que ela contenha 'a', a aplicação de IU na linha 2 é legítima. Isso fica claro se notamos que '$Fb \rightarrow Fb$', '$Fc \rightarrow Fc$', e assim por diante, são todas instâncias substitutivas desse teorema; na verdade, não importa que nome colocamos no lugar de 'a' para obter uma instância substitutiva. Logo, o teorema implica que, para qualquer x, $(Fx \rightarrow Fx)$.

6.26 Prove o teorema:

$$\vdash \forall xFx \rightarrow Fa$$

Solução

1	$\mid\ \forall xFx$	H (para PC)
2	$\mid\ Fa$	1 EU
3	$\forall xFx \rightarrow Fa$	1, 2 PC

O teorema é um enunciado condicional; assim, usamos a estratégia da prova condicional.

6.27 Prove o teorema:

$$\vdash {\sim}(\forall xFx \ \& \ \exists x{\sim}Fx)$$

Solução

1	$\forall xFx \ \& \ \exists x{\sim}Fx$	H (para RAA)
2	$\forall xFx$	1 &E
3	$\exists x{\sim}Fx$	1 &E
4	${\sim}Fa$	H (para EE)
5	Fa	2 EU
6	$P \ \& \ {\sim}P$	4, 5 CONTRAD
7	$P \ \& \ {\sim}P$	3, 4-6 EE
8	${\sim}(\forall xFx \ \& \ \exists x{\sim}Fx$	1-7 RAA

O teorema é uma negação; assim, assumimos '$\forall xFx \ \& \ \exists x{\sim}Fx$' por *redução* e separamos em seus conjunctos, nas linhas 2 e 3. Para usar '$\exists x{\sim}Fx$', devemos proceder por EE; assumimos uma instância de '$\exists x{\sim}Fx$', na linha 4. A contradição '$Fa \ \& \ {\sim}Fa$' poderia ser obtida em 6, mas ainda não descartamos a hipótese da linha 4, pois '$Fa \ \& \ {\sim}Fa$' contém 'a'. Para vencer essa dificuldade, obtemos uma nova contradição, não contendo 'a', por CONTRAD (compare com o problema 6.24). Isso nos permite descartar a hipótese, por EE, da passagem 4, na linha 7, e completar a *redução*, em 8.

6.28 Prove o teorema:

$$\vdash \forall xFx \lor \exists x{\sim}Fx$$

Solução

1	$\sim\forall\, Fx \sim Fx$	H (para PC)
2	$\sim\exists\, x \sim Fx$	H (para RAA)
3	$\sim Fa$	H (para RAA)
4	$\exists x{\sim}Fx$	3 IE
5	$\exists x{\sim}Fx\ \&\ {\sim}\exists\, x \sim Fx$	2, 4 &I
6	$\sim\sim Fa$	3-5 RAA
7	Fa	6 ~E
8	$\forall xFx$	7 IU
9	$\forall xFx\ \&\ {\sim}\forall xFx$	1, 8 &I
10	$\sim\sim\exists\, x \sim Fx$	2-9 RAA
11	$\exists x{\sim}Fx$	10 ~E
12	$\sim\forall\, xFx \rightarrow \exists x{\sim}Fx$	1-11 PC
13	$\sim\sim\forall xFx \vee \exists x{\sim}Fx$	12 IM
14	$\forall xFx \vee \exists x{\sim}Fx$	13 DN

Aqui, a estratégia é indireta. O teorema é uma disjunção. Em geral, provamos disjunções por $\vee$E, mas isso requer uma premissa disjuntiva, que nos falta, nesse caso. Entretanto, pelas equivalências IM e DN o teorema é o mesmo que '$\sim\forall\, xFx \rightarrow \exists x{\sim}Fx$'. Assim, podemos provar o teorema por meio desse condicional (linha 12) e então aplicar IM e DN. Começamos a prova assumindo o antecedente do condicional, '$\sim\forall\, xFx$'. Para provar seu conseqüente, '$\exists x{\sim}Fx$', procedemos por *redução,* assumimos a negação do conseqüente, em 2, e introduzimos uma hipótese por *redução,* na linha 3, para obter as contradições necessárias. O uso de IU, em 8, é permissível, pois embora 'a' apareça na hipótese em 3, ela não é mais vigente na linha 8.

Muitas equivalências são provadas no cálculo de predicados. A primeira delas mostra a equivalência lógica das fórmulas '$\forall x\,(Fx \rightarrow \sim Gx)$' e '$\sim\exists x\,(Fx\ \&\ Gx)$', que são maneiras de expressar a proposição da forma *E* 'Nenhum F é G'.

PROBLEMA RESOLVIDO

6.29 Prove a equivalência:

$$\vdash \forall x\,(Fx \rightarrow \sim Gx) \leftrightarrow \sim\exists\,x\,(Fx\ \&\ Gx)$$

Solução

1	$\vert\ \forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$	*H* (para PC)
2	$\vert\ \sim\exists x(Fx\ \&\ Gx)$	1 prob. 6.24
3	$\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx) \rightarrow \sim\exists\,x(Fx\ \&\ Gx)$	1-2 PC
4	$\vert\ \sim\exists x(Fx\ \&\ Gx)$	*H* (para PC)
5	$\vert\ \vert\ Fa$	*H* (para PC)
6	$\vert\ \vert\ \vert\ Ga$	*H* (para RAA)
7	$\vert\ \vert\ \vert\ Fa\ \&\ Ga$	5, 6 &I
8	$\vert\ \vert\ \vert\ \exists x(Fx\ \&\ Gx)$	7 IE
9	$\vert\ \vert\ \vert\ \exists x(Fx\ \&\ Gx)\ \&\ \sim\exists\,x\,(Fx\ \&\ Gx)$	4, 8 &I
10	$\vert\ \vert\ \sim Ga$	6-9 RAA
11	$\vert\ Fa \rightarrow \sim Ga$	5-10 PC
12	$\vert\ \forall x\,(Fx \rightarrow \sim Gx)$	11 IU
13	$\sim\exists x(Fx\ \&\ Gx) \rightarrow \forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$	4-12 PC
14	$\forall x\,(Fx \rightarrow \sim Gx) \leftrightarrow \sim\exists\,x(Fx\ \&\ Gx)$	3,13 $\leftrightarrow$I

A tabela 6.1 alista quatro equivalências que expressam relações entre os quantificadores universal e existencial. As duas primeiras equivalências serão provadas, a seguir. A terceira e a quarta são deixadas como exercício para o leitor.

Tabela 6-1 Equivalências quantificacionais.

$\vdash \sim\forall x \sim Fx \leftrightarrow \exists x Fx$
$\vdash \sim\forall x Fx \leftrightarrow \exists x \sim Fx$
$\vdash \forall x \sim Fx \leftrightarrow \sim\exists x Fx$
$\vdash \forall x Fx \leftrightarrow \sim\exists x \sim Fx$

PROBLEMAS RESOLVIDOS

6.30 Prove a equivalência:

$$\vdash \sim\forall x \sim Fx \leftrightarrow \exists x Fx$$

Solução

1	$\sim\forall x \sim Fx$	*H* (para PC)
2	$\sim\exists x Fx$	*H* (para RAA)
3	Fa	*H* (para RAA)
4	$\exists x Fx$	3 IE
5	$\exists x Fx \;\&\; \sim\exists x Fx$	2, 4 &I
6	$\sim Fa$	3-5 RAA
7	$\forall x \sim Fx$	6 IU
8	$\forall x \sim Fx \;\&\; \sim\forall x \sim Fx$	1, 7 &I
9	$\sim\sim\exists x Fx$	2-8 RAA
10	$\exists x Fx$	9 ~E
11	$\sim\forall x \sim Fx \rightarrow \exists x Fx$	1-10 PC

12	$\exists x Fx$	H (para PC)
13	Fa	H (para EE)
14	$\forall x \sim Fx$	H (para RAA)
15	$\sim Fa$	14 EU
16	$Fa \,\&\, \sim Fa$	13, 15 &I
17	$\sim\forall x \sim Fx$	14-16 RAA
18	$\sim\forall x \sim Fx$	12, 13-17 EE
19	$\exists x Fx \rightarrow \sim\forall x \sim Fx$	12-18 PC
20	$\sim\forall x \sim Fx \leftrightarrow \exists x Fx$	11, 19 $\leftrightarrow$ I

6.31 Prove a equivalência:

$$\vdash \sim\forall x Fx \leftrightarrow \exists x \sim Fx$$

Solução

1	$\sim\forall x Fx$	H (para PC)
2	$\sim\exists x \sim Fx$	H (para RAA)
3	$\sim Fa$	H (para RAA)
4	$\exists x \sim Fx$	3 IE
5	$\exists x \sim Fx \,\&\, \sim\exists x \sim Fx$	2, 4 &I
6	$\sim\sim Fa$	3-5 RAA
7	Fa	6 ~E
8	$\forall x Fx$	7 IU
9	$\forall x Fx \,\&\, \sim\forall x Fx$	1, 8 &I
10	$\sim\sim\exists x \sim Fx$	2-9 RAA
11	$\exists x \sim Fx$	10 ~E
12	$\sim\forall x Fx \rightarrow \exists x \sim Fx$	1-11 PC

13	$\exists x{\sim}Fx$	H (para PC)
14	$\quad {\sim}Fa$	H (para EE)
15	$\quad\quad \forall xFx$	H (para RAA)
16	$\quad\quad Fa$	15 EU
17	$\quad\quad Fa \;\&\; {\sim}Fa$	14, 16 &I
18	$\quad {\sim}\forall xFx$	15-17 RAA
19	${\sim}\forall xFx$	13,14-18 EE
20	$\exists x{\sim}Fx \rightarrow {\sim}\forall xFx$	13-19 PC
21	${\sim}\forall xFx \leftrightarrow \exists x{\sim}Fx$	12, 20 $\leftrightarrow$I

As quatro equivalências quantificacionais são base para as regras derivadas do cálculo de predicados. Para enunciar essas regras, necessitamos de algumas terminologias. Uma fórmula que resulta de uma wff quando se remove um quantificador inicial, junto com a variável, chama-se uma *fórmula aberta na variável.* Por exemplo, se removemos '$\exists x$' de '$\exists x(Fx \;\&\; Gx)$', o resultado '$(Fx \;\&\; Gx)$' é uma fórmula aberta em 'x'. Se removemos '$\forall z$' de '$\forall z\forall x(Fxz \rightarrow Gzx)$', o resultado, '$\forall x(Fxz \rightarrow Gzx)$', é uma fórmula aberta em 'z'. Uma fórmula aberta não é uma wff, pois nossas regras de formação não permitem variáveis não-quantificadas.

Observe que nas provas dos problemas 6.30 e 6.31 todas as ocorrências da fórmula 'Fx' poderiam ter sido substituídas por ocorrências de uma outra fórmula aberta em 'x' e, ainda assim, o resultado continuaria sendo uma prova válida. Assim, pelo raciocínio usado no problema 6.30, poderíamos ter provado não somente '$\vdash \forall xFx \leftrightarrow {\sim}\exists x{\sim}Fx$', mas, também, '$\vdash \forall x(Fx \;\&\; Gx) \leftrightarrow {\sim}\exists x{\sim}(Fx \;\&\; Gx)$', '$\vdash \forall x\exists yLxy \leftrightarrow {\sim}\exists x{\sim}\exists yLxy$' e assim por diante. Ou seja, poderíamos ter provado que qualquer wff consistindo em uma fórmula aberta em 'x' prefixada por '$\forall x$' é logicamente equivalente a uma wff consistindo na mesma fórmula aberta prefixada por '${\sim}\exists x{\sim}$'. Como 'F' é uma propriedade qualquer, ela pode ser considerada como sendo qualquer propriedade expressa por uma fórmula aberta em 'x'. Daí, o problema 6.30 é, de fato, uma prova de todas essas equivalências.

Além disso, é claro que a variável 'x' pode ser substituída, uniformemente, nos problemas 6.30 e 6.31, por uma outra variável, sem, contudo, afetar a validade da prova. Assim, o problema 6.30 prova também as equivalências '$\vdash \forall zFz \leftrightarrow \sim\exists z \sim Fz$', '$\vdash \forall y\ (Fy\ \&\ Gy) \leftrightarrow \sim\exists y \sim(Fy\ \&\ Gy)$', etc.

De modo geral, o problema 6.30 mostra que qualquer wff da forma $\forall\beta\phi$, onde β é uma variável e ϕ uma fórmula aberta nessa variável, é logicamente equivalente a $\sim\exists\ \beta\sim\phi$.

As outras equivalências estabelecidas na tabela têm a mesma generalidade. Como fórmulas logicamente equivalentes podem ser substituídas validamente por outra, em qualquer contexto, essas quatro equivalências dão origem à seguinte regra derivada:

Intercâmbio de quantificadores (IQ): Seja ϕ uma fórmula aberta na variável β. Então, se um dos seguintes pares é uma subwff de alguma wff ψ, podemos validamente inferir de ψ o resultado de substituir uma ou mais ocorrências de um deles pelo outro:

$\sim\forall\beta\sim\phi,\ \exists\beta\phi$

$\sim\forall\beta\phi,\ \exists\beta\sim\phi$

$\forall\beta\sim\phi,\ \sim\exists\beta\phi$

$\forall\beta\phi,\ \sim\exists\beta\sim\phi$

Tal como as regras derivadas do cálculo proposicional, IQ simplifica as provas; contudo, ela não permite provar algo novo. Qualquer coisa provável por IQ é provada por uma das quatro regras quantificadas de introdução e eliminação, e as dez regras básicas do cálculo proposicional. Para ilustrar como IQ simplifica as provas, provamos novamente a forma do problema 6.24:

PROBLEMAS RESOLVIDOS

6.32 Prove:

$$\forall x(Fx \to \sim Gx) \vdash \sim\exists x(Fx \,\&\, Gx)$$

Solução

1	$\forall x(Fx \to \sim Gx)$	P
2	$Fa \to \sim Ga$	1 EU
3	$\sim(Fa \,\&\, \sim\sim Ga)$	2 prob. 4.47
4	$\sim(Fa \,\&\, Ga)$	3 DN
5	$\forall x \sim(Fx \,\&\, Gx)$	4 IU
6	$\sim\exists x(Fx \,\&\, Gx)$	5 IQ

Compare essa prova com a do problema 6.24.

A seguir, alguns problemas utilizando IQ.

6.33 Prove o teorema:

$$\vdash \forall xFx \vee \exists x\sim Fx$$

Solução

1	$\forall xFx \vee \sim\forall xFx$	IT 4.45
2	$\forall xFx \vee \exists x\sim Fx$	1 IQ

6.34 Prove:

$$\forall x \sim Fx \to \forall x \sim Gx \vdash \exists xGx \to \exists xFx$$

Solução

1	$\forall x \sim Fx \to \forall x \sim Gx$	P
2	$\sim\exists xFx \to \forall x \sim Gx$	1 IQ
3	$\sim\exists xFx \to \sim\exists xGx$	2 IQ
4	$\exists xGx \to \exists xFx$	4 TRANS

6.35 Prove:

$$\sim\exists xFx, \sim\exists xGx \vdash \sim\exists x(Fx \vee Gx)$$

Solução

1	$\sim\exists xFx$	P
2	$\sim\exists xGx$	P
3	$\forall x \sim Fx$	1 IQ
4	$\forall x \sim Gx$	2 IQ
5	$\sim Fa$	3 EU
6	$\sim Ga$	4 EU
7	$\sim Fa \ \& \sim Ga$	5, 6 &I
8	$\sim(Fa \vee Ga)$	7 DM
9	$\forall x \sim(Fx \ \& \ Gx)$	8 IU
10	$\sim\exists x(Fx \ \& \ Gx)$	9 IQ

Neste contexto as regras IQ têm restrições. Elas permitem intercambiar quantificadores somente quando um quantificador junto com a variável prefixa uma fórmula aberta nessa variável. Não permitem, por exemplo, a inferência

1	$\forall x\,(Fx \rightarrow \exists y \sim Lxy)$	P
2	$\forall x\,(Fx \rightarrow \sim\forall y Lxy$	1 IQ

pois 'Lxy' contém 'y', além de 'x', e por isso não é uma fórmula aberta 'x'. Essa inferência, contudo, é válida, como o é qualquer inferência na qual '$\exists y\sim$' é substituída por '$\sim\forall y$' em qualquer parte de uma wff. (O mesmo é verdade para as outras regras IQ.) Alguns autores usam as regras IQ, sem restrições, as quais permitem inferências como as acima. Outros as restringem ainda mais, permitindo o seu uso somente em quantificadores iniciais. Por outro lado, outros não permitem IQ de modo algum.

Essas variações não afetam o que se pode provar em lógica, pois o que é provável por qualquer versão de IQ é provável pelas quatro regras de introdução e eliminação.

6.7 Identidade

Pode-se adicionar certos símbolos ao cálculo de predicados com propósitos específicos. Um deles é o predicado da identidade, '=', que significa "é idêntico a" ou "é a mesma coisa que". Esse predicado é muito utilizado em matemática, principalmente em relação a números. Em lógica, sua aplicação é mais geral; as letras nominais 'a' e 'b' na fórmula '$a = b$' podem denotar qualquer tipo de objeto. Podemos interpretar 'a', por exemplo, como "Mark Twain" e 'b' como "Samuel Clemens"; assim, '$a = b$' significa que "Mark Twaim é idêntico a (isto é, é o mesmo indivíduo que) Samuel Clemens". Podemos ainda interpretar 'a' como "a Guerra da Secessão" e 'b' como "a Guerra Civil"; assim, '$a = b$' significa que "A Guerra da Secessão é idêntica à Guerra Civil".

O predicado da identidade é especial, pois, tal como os símbolos lógicos e ao contrário das letras predicativas, sua interpretação está fixada. Ele sempre significa "é idêntico a". É também peculiar, sintaticamente, pois, ao contrário dos predicados binários, ele é escrito entre as letras nominais às quais se aplica, e não antes delas.[7] Tais peculiaridades necessitam de regras adicionais de formação e de inferência.

A regra adicional de formação é:

O resultado de escrever '=' entre um par de letras nominais é uma wff atômica.

Essa regra junto com as outras quatro regras de formação fornece uma rica variedade de novas expressões.

PROBLEMA RESOLVIDO

6.36 Formalize as seguintes sentenças no cálculo de predicados com identidade usando a interpretação dada a seguir:

Símbolo	*Interpretação*
Nomes	
c	Samuel Clemens
h	*Huckleberry Finn* (o livro)
t	Mark Twain
Predicado unário	
A	é um autor americano
M	é um mercenário
Predicado binário	
B	é melhor que (como autor)
E	escreveu

7. Alguns autores cercam as fórmulas com identidade com parênteses, especialmente se elas são negações o que salienta mais a diferença entre '=' e os outros predicados binários.

a) Mark Twain não é Samuel Clemens.

b) Existe Mark Twain.

c) Se Mark Twain é Samuel Clemens, então Samuel Clemens escreveu *Huckleberry Finn*.

d) Somente Mark Twain escreveu *Huckleberry Finn*.

e) Todos os autores americanos, exceto Mark Twain, são mercenários.

f) Mark Twain é o melhor autor americano.

g) Existe algo.

h) Existem, pelo menos, duas coisas.

i) Existe, no máximo, uma coisa.

j) Existe, exatamente, uma coisa.

k) Existem, exatamente, duas coisas.

l) Existe exatamente, um escritor de Huckleberry Finn.

m) Existem pelo menos, dois escritores de *Huckleberry Finn*.

n) Existem, no máximo, dois escritores de *Huckleberry Finn*.

o) Existem, exatamente, dois escritores de *Huckleberry Finn*.

Solução

a) $\sim t = c$. É freqüente escrevê-la como '$t \neq c$'. Notemos que, de acordo com as regras de formação, não há parênteses para a wff atômica '$t = c$'; mas o sinal de negação se aplica a toda wff, e não somente para 't'.

b) $\exists x x = t$.

c) $t = c \rightarrow Ech$. Parênteses externos foram omitidos dessa fórmula.

d) $\forall x(Exh \to x = \mathrm{t})$.

e) $\forall x\ ((Ax\ \&\ {\sim}x = t) \to Mx)$. Poderíamos escrevê-la equivalentemente como '$\forall x\ (Ax \to ({\sim}x = t \to Mx))$'. A formalização da sentença dada é relativamente a mais fraca, pois não afirma que Twain foi um mercenário ou que não foi; simplesmente, diz que todos os autores americanos, exceto Twain, são mercenários. Se queremos que a formalização afirme que Twain não foi um mercenário, devemos unir uma das versões acima com '${\sim}Mt$' ou então reescrever a fórmula toda do seguinte modo: '$\forall x\ (Ax \to (Mx \leftrightarrow {\sim}x = t))$'.

f) $At\ \&\ \forall x((Ax\ \&\ {\sim}x = t) \to Btx)$. Dizer que Twain é o melhor autor americano é dizer que ele é um autor americano e que é melhor que todos os outros autores americanos. Isso é o que essa wff afirma. Note que, se tivéssemos escrito o segundo conjuncto sem o requisito '${\sim}x = t$', isto é, como '$\forall x(Ax \to Btx)$', ela afirmaria que Twain é melhor que si próprio; portanto, esse requisito é crucial.

g) $\exists x\ x = x$. Essa fórmula, traduzida literalmente, significa "Existe algo que é idêntico a si próprio".

h) $\exists x \exists y\ {\sim}x = y$. Relembramos que, as variáveis 'x' e 'y' de '$\exists x \exists y\ Axy$' não denotam, necessariamente, objetos diferentes. Lendo 'a' como "ama", essa fórmula é verdadeira mesmo que uma única pessoa ame a si próprio. Assim, para afirmar que pelo menos dois objetos distintos existem, precisamos do requisito '${\sim}x = y$'.

i) $\forall x \forall y\ x = y$. Ela significa, "Para quaisquer objetos x e y, x é idêntico a y", isto é, "Todos os objetos são idênticos", que o universo contém, no máximo, um objeto. Tendo em vista que o cálculo de predicados pressupõe a existência de pelo menos um objeto, essa wff é equivalente ao enunciado (*j*).

j) $\exists x \forall y\ y = x$. Ela diz, literalmente, "Existe um objeto que é idêntico a todos os objetos".

k) $\exists x \exists y\, (\sim x = y \,\&\, \forall z\, (z = x \vee z = y))$. A cláusula '$\sim x = y$' afirma que x e y são dois objetos diferentes. A cláusula '$\forall z\, (z = x \vee z = y)$' diz que, qualquer objeto z, ou z é idêntico a x ou a y, isto é, que não há outros objetos além de x e y.

l) $\exists x(Exh \,\&\, \forall y\, (Eyh \rightarrow y = x))$.

m) $\exists x \exists y\, ((Exh \,\&\, Eyh) \,\&\, \sim x = y)$.

n) $\forall x \forall y \forall z\, (((Exh \,\&\, Eyh) \,\&\, Ezh) \rightarrow ((x = y \vee x = z) \vee y = z))$.

o) $\exists x \exists y\, ((Exh \,\&\, Eyh) \,\&\, \forall z\, (Ezh \rightarrow (z = x \vee z = y)))$.

Os matemáticos estão familiarizados com as regras de introdução e de eliminação para o predicado de identidade. A regra de introdução para identidade é como a regra derivada IT (Seção 3.6), a qual introduz fórmulas nas provas sem, contudo, tê-las derivado em linhas anteriores.

Introdução da identidade (=I): Para qualquer letra nominal α, podemos afirmar $\alpha = \alpha$ numa linha qualquer de uma prova.

Introdução da identidade é usada nas seguintes provas:

PROBLEMAS RESOLVIDOS

6.37 Prove o teorema:

$$\vdash \forall x\, x = x$$

Solução

1	$a = a$	=I
2	$\forall x\, x = x$	1 IU

Note que o uso de IU, na linha 2, é legítimo, pois a prova não usa premissas ou hipóteses contendo 'a'. Esse teorema é conhecido como a *Lei de reflexividade da identidade.*

6.38 Prove o teorema:

$$\vdash \exists x\, a = x$$

Solução

1	$a = a$	=I
2	$\exists x a = x$	1 IE

Esse teorema afirma a existência de um objeto denotado por 'a'. O mesmo raciocínio poderia ser repetido usando qualquer outra letra nominal que não fosse 'a'. Isso é a pressuposição, observada na Seção 6.5, de que os nomes denotam coisas existentes.

A regra de eliminação da identidade (regra que nos permite raciocinar a partir de identidades dadas como premissas) é, simplesmente, a idéia de que se $a = b$, os nomes 'a' e 'b' são intercambiáveis. Essa regra é também chamada *substitutividade da identidade.*

Eliminação da identidade (=E): Se ϕ é uma wff contendo a letra nominal α, então de ϕ e de $\alpha = \beta$ ou $\beta = \alpha$ podemos inferir ϕ^{β}/α, o resultado de se substituir pelo menos uma ocorrência de α em ϕ por β.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

6.39 Prove:

$$Fa, a = b \vdash Fb$$

Solução

1	Fa	P
2	$a = b$	P
3	Fb	1, 2 =E

6.40 Prove:

$$Fa, \sim Fb \vdash \sim a = b$$

Solução

1	Fa	P
2	$\sim Fb$	P
3	$\mid\ a = b$	H (para RAA)
4	$\mid\ Fb$	1, 3 =E
5	$\mid\ Fb \ \& \sim Fb$	2, 4 &I
6	$\sim a = b$	3-5 RAA

6.41 Prove o teorema:

$$\vdash \forall x\, \forall y\, (x = y \rightarrow y = x)$$

Solução

1	$\mid\ a = b$	H (para PC)
2	$\mid\ a = a$	=I
3	$\mid\ b = a$	1, 2 =E
4	$a = b \rightarrow b = a$	1-3 PC
5	$\forall y\, (a = y \rightarrow y = a)$	4 IU
6	$\forall x \forall y\, (x = y \rightarrow y = x)$	5 IU

Na linha 3, usamos a identidade '$a = b$' (linha 1) para substituir a primeira ocorrência de 'a' em '$a = a$' (linha 2) por 'b'. Com relação ao enunciado de =E, '$a = a$' é ϕ e '$b = a$' é ϕ^{β}/α. Esse teorema é chamado *Lei de simetria da identidade*.

6.42 Prove o teorema:

$$\vdash \forall x \forall y \forall z\, ((x = y \,\&\, y = z) \rightarrow x = z)$$

Solução

1	$\quad a = b \,\&\, b = c$	*H* (para PC)
2	$\quad a = b$	1 &E
3	$\quad b = c$	1 &E
4	$\quad a = c$	2, 3 =E
5	$(a = b \,\&\, b = c) \rightarrow a = c$	1-4 PC
6	$\forall z\, ((a = b \,\&\, b = z) \rightarrow a = z)$	5 IU
7	$\forall y \forall z\, ((a = y \,\&\, y = z) \rightarrow a = z)$	6 IU
8	$\forall x \forall y \forall z\, ((x = y \,\&\, y = z) \rightarrow x = z)$	7 IU

Esse teorema é conhecido como *Lei de transitividade da identidade*.

As regras de inferência do cálculo de predicados com identidade são *corretas* (no sentido de que elas geram somente formas válidas de argumentos) e *completas* (no sentido de que elas geram todas as formas de argumentos válidas, em virtude da semântica, dos quantificadores, do predicado de identidade e dos conectivos funcional-veritativos). A correção e a completude das regras podem ser provadas por um tipo de raciocínio conhecido como *metalógico*. Contudo, tal raciocínio está fora do escopo deste livro.[8]

8. Uma excelente obra sobre metalógica é Geoffrey Hunter, *Metalogic: An Introduction to the Metatheory of Standard First Order Logic*, Berkeley, University of California Press, 1971.

Apesar da sua completude, as regras de inferência nem sempre respondem a questão 'Essa forma é válida?'. Se formos incapazes de construir uma prova para uma dada forma, isso poderá significar: a forma é, realmente, inválida, ou ela é válida, mas não temos habilidade suficiente para exibir uma prova. Na verdade, precisamos de um método que decida quais formas são inválidas. Infelizmente, como veremos na próxima seção, esse método não existe.

6.8 Árvores de refutação

O Capítulo 4 mostrou como as tabelas-verdade e as árvores de refutação são empregadas para demonstrar a validade e a invalidade de formas de argumento de cálculo proposicional. O Capítulo 5 mostrou como a validade e a invalidade de silogismos categóricos podem ser verificadas pelos diagramas de Venn. Esses métodos são *algorítmicos*; isto é, são precisos — procedem por regras específicas (do tipo que um computador executa) pelas quais uma resposta é obtida depois de se efetuar várias operações.

Contudo, o método de prova discutido neste capítulo, tal como o do Capítulo 3, gera somente formas de argumentos válidas; não discutimos os meios de se determinar *in*validade de argumentos para o cálculo de predicados. Na verdade, para o cálculo de predicados, exceto os sistemas discutidos anteriormente, não há e não pode haver um procedimento algorítmico que detecta invalidade. Lógica de predicados é, nesse sentido, *indecidível*. (A indecidibilidade da lógica de predicados pode ser provada por raciocínio metalógico, e é conhecida como Tese de Church.[9]) Existem, entretanto, métodos governados por regras que testam a validade e a invalidade somente de algumas formas de argumentos do cálculo de predicados.

9. Uma elegante versão da prova é dada em Richard Jeffrey, *Formal Logic: Its Scope and Limits*, 2ª ed., New York, McGraw-Hill, 1981, Cap. 6.

Nesta seção, discutimos um desses métodos, uma generalização da árvore de refutação do Capítulo 4. Tal como a técnica do Capítulo 4, ele nos possibilita descobrir a validade de um argumento válido num número finito de passos (mesmo que o número de passos seja muito grande e que não sejamos capazes de saber antecipadamente se vamos ou não obter uma resposta). Por outro lado, ele difere da técnica do Capítulo 4, pois algumas vezes não revela a invalidade de formas inválidas.

A técnica de árvores de refutação generalizada incorpora as regras de refutação da lógica proposicional (Capítulo 4). Além dessas, temos seis novas regras para intervir em sentenças que contêm quantificadores e o predicado de identidade. Algumas árvores do cálculo de predicados empregam somente as regras do cálculo proposicional.

PROBLEMA RESOLVIDO

6.43 Use as regras de árvores de refutação do cálculo proposicional para determinar se a seguinte forma de argumento é válida:

$$\forall xFx \rightarrow \forall xGx,\ \sim\forall xGx \vdash \sim\forall xFx$$

Solução

1	✓		$\forall xFx \rightarrow \forall xGx$		
2			$\sim\forall xGx$		
3			$\sim\forall xFx$		
4	$\sim\forall xFx$	$1 \rightarrow$		$\forall xGx$	$1 \rightarrow$
5	X	$3, 4 \sim$		X	$2, 4 \sim$

Todos os ramos fecham-se e, portanto, a forma é válida. Somente as regras do cálculo proposicional são necessárias, pois a forma é uma instância substitutiva de *modus tollens* (MT), que é válida pela lógica proposicional.

O cálculo de predicados com identidade tem três símbolos lógicos, não incluídos no cálculo proposicional (a saber, '$\forall$', '$\exists$' e '$=$'). Assim precisamos de duas regras para cada um deles (um para lidar com sentenças negadas e outro para as não-negadas, nas quais eles ocorrem). Teremos então seis novas regras para as árvores de refutação no cálculo de predicados. A primeira, a regra de quantificação universal, é, essencialmente, uma versão da árvore de refutação de EU.

Quantificação universal ($\forall$): Se uma wff da forma $\forall\beta\phi$ aparece num ramo aberto, e se α é uma letra nominal que ocorre numa wff desse ramo, então escrevemos ϕ^{α}/β (o resultado de substituir todas as ocorrências de β em ϕ por α) no final do ramo. Se nenhuma wff contendo uma letra nominal, aparece no ramo, então escolhemos uma letra nominal α, e escrevemos ϕ^{α}/β no final do ramo. Em cada caso, não ticamos $\forall\beta\phi$.

Não ticamos $\forall\beta\phi$ pois agora não importa quantas wffs inferimos por $\forall$. Embora wffs quantificadas universalmente não sejam ticadas, suas árvores podem fechar-se (nesse caso a inferência será válida) ou podem ir até um ponto em que a árvore não se fecha e nenhuma regra mais se aplica (nesse caso, a inferência é inválida).

PROBLEMAS RESOLVIDOS

6.44 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$\forall x(Fx \rightarrow Gx),\ \forall xFx \ \vdash Ga$$

Solução

1		$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$			
2		$\forall xFx$			
3		$\sim Ga$			
4	$\surd$	$Fa \rightarrow Ga$	$1\ \forall$		
5		Fa	$2\ \forall$		
6	$\sim Fa$	$4 \rightarrow$		Ga	$4 \rightarrow$
7	X	$5, 6 \sim$		X	$3, 6 \sim$

Como a letra nominal '*a*' ocorre em '$\sim Ga$' (linha 3), ela é utilizada para obter as linhas 4 e 5, pela regra de quantificação universal. A árvore se fecha, depois da aplicação da regra do condicional, em 6. Portanto, a forma é válida.

6.45 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$Fa \rightarrow Gb,\ \forall x \sim Fx\ \vdash \sim Gb$$

Solução

1	$\surd$	$Fa \rightarrow Gb$			
2		$\forall x \sim Fx$			
3	$\surd$	$\sim\sim Gb$			
4		Gb	$3 \sim\sim$		
5		$\sim Fa$	$2\ \forall$		
6		$\sim Fb$	$2\ \forall$		
7	$\sim Fa$	$1 \rightarrow$		Gb	$1 \rightarrow$

Aplicando inicialmente as regras não-ramificadas, ticamos a linha 3 e obtemos '*Gb*', em 4, por dupla negação. Em 5 e 6, derivamos '~*Fa*' e '~*Fb*', da linha 2, por duas passagens independentes da regra de quantificação universal. Observe que a linha 2 permanece não-ticada. A partir desse ponto, ∀ não pode mais ser aplicada, pois ela foi usada com as duas letras nominais que ocorrem nas wffs do ramo, e ∀ só pode ser usada para introduzir uma nova letra nominal se letras nominais não aparecem nas wffs do ramo. Assim, o que resta é aplicar a regra do condicional, na linha 7. Isso não fecha a árvore; portanto, a forma é inválida.

Ao contrário das árvores de refutação para a lógica proposicional, as árvores de refutação para a lógica de predicados não produzem uma lista completa de contra-exemplos para um argumento inválido. Cada ramo aberto de uma árvore de refutação concluída, na lógica de predicados pode ser interpretado como um "modelo de universo" que contém, exatamente, os objetos mencionados pelo nome, no ramo. As wffs atômicas ou negações de wffs atômicas no ramo indicam o que é verdade sobre esses objetos nesse modelo.

No problema 6.45, os dois ramos abertos representam um universo contendo exatamente dois objetos, *a* e *b*. Nesse modelo de universo, *b* tem a propriedade *G* e ambos *a* e *b*, não são *F*. (Os ramos não especificam quando, ou não, *a* é *G* isso é irrelevante para o caso.) Como '*Fa*' é falsa nesse modelo, então a premissa '$Fa \rightarrow Ga$' é verdadeira, pois o condicional material é verdadeiro quando seu antecedente é falso (ver Capítulo 5). Além disso, como os únicos objetos nesse universo são *a* e *b* e nenhum deles é *F*, a premissa '$\forall x \sim Fx$' é verdadeira. Mas, a conclusão '~*Gb*' é falsa. Esse modelo mostra que existe pelo menos uma instância da forma cuja conclusão é falsa e as premissas são verdadeiras. Em conseqüência, a forma é inválida.

PROBLEMA RESOLVIDO

6.46 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$\forall x(Fx \rightarrow Gx),\ \forall xGx \ \vdash Fa$$

Solução

1		$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$		
2		$\forall xGx$		
3		$\sim Fa$		
4	✓	$Fa \rightarrow Ga$		$1\ \forall$
5		Ga		$2\ \forall$
6	$\sim Fa$ $4 \rightarrow$		Ga	$4 \rightarrow$

A forma é inválida. Aplicamos a regra da quantificação universal, em 4 e 5, e a do condicional, em 6; como no problema 6.44, a árvore não se fechou. Nenhuma regra mais se aplica e as linhas 1 e 2 permanecem não-ticadas.

Nesse problema, os dois ramos abertos representam um modelo de universo contendo somente um objeto, *a*, que tem a propriedade *G*, mas não *F*. Nesse modelo, as premissas '$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$' e '$\forall xGx$' são verdadeiras e a conclusão '*Fa*' é falsa; assim, a forma é inválida. É óbvio que '$\forall xGx$' é vedadeira no modelo, pois este contém somente um objeto, *a*, e *a* é *G*. É também óbvio que '*Fa*' é falsa. Contudo, não é tão óbvio que '$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$' é verdadeira. '$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$' significa "para qualquer objeto *x* se *x* é *F*, então *x* é *G*", onde 'se' é para ser lido como o condicional material. Um condicional material é verdadeiro se seu antecedente é falso. Como o único objeto no modelo da universo é *a* e *a* não é *F*, o antecedente desse condicional é falso, e portanto o condicional é verdadeiro para qualquer objeto no universo. Logo, '$\forall x\ (Fx \rightarrow Gx)$' é verdadeira nesse modelo. Na verdade, qualquer condicional material quantificado universalmente, cujo antecedente é vazio (isto é, a nada se refere), é verdadeiro. Isso significa que toda proposição da forma *A*, com termo sujeito vazio, é verdadeira (ver o final da Seção 5.2).

Quantificação existencial negada ($\sim\exists$): Se uma wff não-ticada da forma $\sim\exists\ \beta\phi$ aparece num ramo aberto, ticâmo-la e escrevemos $\forall\beta\sim\phi$ no final de cada ramo aberto que contém a wff ticada recentemente.

Quantificação universal negada ($\sim\forall$): Se uma wff não-ticada da forma $\sim\forall\beta\phi$ aparece num ramo aberto, ticâmo-la e escrevemos $\exists\beta\sim\phi$ no final de cada ramo aberto que contém a wff ticada recentemente.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

6.47 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \sim\exists\, xGx \;\vdash \sim Fa$$

Solução

1			$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$			
2	√		$\sim\exists xGx$			
3			$\sim\sim Fa$			
4	√		$\forall x \sim Gx$	2 $\sim\exists$		
5			$\sim Ga$	4 $\forall$		
6	√		$Fa \rightarrow Ga$	1 $\forall$		
7	$\sim Fa$	6 $\rightarrow$			Ga	6 $\rightarrow$
8	X	3, 7 $\sim$			X	5, 7 $\sim$

A forma é válida.

6.48 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$\sim\exists x(Fx \,\&\, Gx) \vdash \sim Fa$$

Solução

1	✓	$\sim\exists x(Fx \,\&\, Gx)$	
2	✓	$\sim\sim Fa$	
3		$\forall x\sim(Fx \,\&\, Gx)$	$1\ \sim\exists$
4		Fa	$2\ \sim\sim$
5	✓	$\sim(Fa \,\&\, Ga)$	$3\ \forall$

6	$\sim Fa$	$5\ \sim\&$	$\sim Ga$	$5\ \sim\&$
7	X	$4, 6\sim$		

O ramo aberto mostra que, num universo consistindo em um objeto a que é F mas não é G, a premissa é verdadeira e a conclusão é falsa. Portanto, a forma é inválida. Note que mais nenhuma regra pode ser aplicada para as wffs não-ticadas do ramo aberto portanto, a árvore está concluída.

6.49 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$\forall xFx \rightarrow \forall xGx, \sim\exists xGx \vdash \exists x\sim Fx$$

Solução

1	✓	$\forall xFx \rightarrow \forall xGx$			
2	✓	$\sim\exists xGx$			
3		$\sim\exists x \sim Fx$			
4		$\forall x \sim Gx$			$2 \sim\exists$
5	✓	$\sim\forall xFx$	$1 \rightarrow$	$\forall xGx$	$1 \rightarrow$
6		$\exists x \sim Fx$	$5 \sim\forall$	Ga	$5\ \forall$
7		X	$3, 6 \sim$	$\sim Ga$	$4\ \forall$
8				X	$6, 7 \sim$

A forma é válida.

A quarta regra quantificacional é um tanto análoga a EE:

<u>*Quantificação existencial* (∃):</u> Se uma wff não-ticada da forma $\exists\beta\phi$ aparece num ramo aberto, ticâmo-la. Escolhemos, então, uma letra nominal α que ainda não apareceu naquele ramo e escrevemos ϕ^{α}/β (o resultado de se substituir cada ocorrência de β em ϕ por α) no final de cada ramo aberto contendo a wff recentemente ticada.

Uma nova letra nominal é escolhida, pois ela representará um dos indivíduos para o qual ϕ é verdadeira e a identidade desses indivíduos pode não ser conhecida, apesar de que pelo menos um tal indivíduo existe se $\exists\beta\phi$ é verdadeira.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

6.50 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$\exists xFx \ \vdash \forall xFx$$

Solução

1	✓	$\exists xFx$	
2	✓	$\sim\forall xFx$	
3		Fa	1 $\exists$
4	✓	$\exists x{\sim}Fx$	2 $\sim\forall$
5		$\sim Fb$	4 $\exists$

Introduzimos uma nova letra nominal 'a' por $\exists$, na linha 3; substituímos '$\sim\forall xFx$' por sua equivalente existencial, em 4, e introduzimos uma outra letra nominal 'b' com a segunda aplicação de $\exists$, em 5. (A regra de quantificação existencial exige que esta segunda letra nominal seja diferente da primeira.) Nenhuma regra mais se aplica. A árvore está terminada mesmo contendo um ramo aberto; logo, a forma é inválida. A árvore representa um universo contendo dois objetos, a e b, em que a é F e b não é F. Nesse universo, '$\exists xFx$' é verdadeira, mas '$\forall xFx$' não é.

6.51 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$\exists x(Fx \ \& \ Gx) \ \vdash \exists xFx \ \& \ \exists xGx$$

Solução

1	√	$\exists x(Fx \,\&\, Gx)$				
2	√	$\sim(\exists xFx \,\&\, \exists xGx)$				
3	√	$Fa \,\&\, Ga$	1 ∃			
4		Fa	3 &			
5		Ga	3 &			
6	√	$\sim\exists xFx$	2 ~&	√	$\sim\exists xGx$	2 ~&
7		$\forall x \sim Fx$	6 ~∃		$\forall x \sim Gx$	6 ~∃
8		$\sim Fa$	7 ∀		$\sim Ga$	7 ∀
9		X	4, 8 ~		X	5, 8 ~

A forma é válida.

6.52 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$\exists xFx, \exists xGx \vdash \exists x(Fx \,\&\, Gx)$$

Solução

1	√	$\exists xFx$	
2	√	$\exists xGx$	
3	√	$\sim\exists x\,(Fx \,\&\, Gx)$	
4		Fa	$1\,\exists$
5		Gb	$2\,\exists$
6		$\forall x{\sim}(Fx \,\&\, Gx)$	$3\,{\sim}\exists$
7	√	$\sim(Fa \,\&\, Ga)$	$6\,\forall$
8	√	$\sim(Fb \,\&\, Gb)$	$6\,\forall$

9	$\sim Fa$	$7\ {\sim}\&$			$\sim Ga$	$7\ {\sim}\&$
10	X	$4, 9\ {\sim}$				
11			$\sim Fb$	$8\ {\sim}\&$	$\sim Gb$	$8\ {\sim}\&$
12					X	$5, 11\ {\sim}$

A forma é inválida. O ramo aberto representa um universo contendo dois objetos, *a* e *b*, em que *a* é *F* mas não é *G*, e *b* é *G* mas não é *F*. Observe que, na aplicação da regra de quantificação existencial, introduzimos uma letra nominal *a*, na linha 4, e outra letra nominal, *b*, na segunda aplicação, na linha 5. Note que a árvore está terminada, pois nenhuma regra mais se aplica para o ramo aberto.

O teste da árvore de refutação para validade de uma forma sem premissas no cálculo de predicados é o mesmo que o do cálculo proposicional: nega-se a conclusão e, então, aplica-se as regras para construir a árvore. A forma é válida se e somente se todos os ramos da árvore concluída estiverem fechados.

Pode-se mostrar, por raciocínio metalógico, que qualquer wff que se segue validamente de um conjunto vazio de premissas é um teorema do cálculo de predicados.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

6.53 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$\vdash \sim(\exists xFx \;\&\; \forall x \sim Fx)$$

Solução

1	✓	$\sim\sim(\exists xFx \;\&\; \forall x \sim Fx)$	
2	✓	$\exists xFx \;\&\; \forall x \sim Fx$	1 ~
3	✓	$\exists xFx$	2 &
4		$\forall x \sim Fx$	2 &
5		Fa	3 ∃
6		$\sim Fa$	4 ∀
7		X	5, 6 ~

A forma é válida.

As regras para os quantificadores operam do mesmo modo para wffs contendo vários quantificadores como para wffs contendo um só quantificador.

6.54 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$\forall x\forall y\,(Fxy \rightarrow \sim Fyx) \;\vdash\; \sim\exists xFxx$$

Solução

1		$\forall x \forall y(Fxy \to {\sim}Fyx)$		
2	√	${\sim}\exists xFxx$		
3	√	$\exists xFx\ x$		$2 \sim\sim$
4		Faa		$3\ \exists$
5		$\forall y\ (Fay \to {\sim}Fya)$		$1\ \forall$
6	√	$Faa \to {\sim}Faa$		$5\ \forall$
7	${\sim}Faa$	$6 \to$	${\sim}Faa$	$6 \to$
8	X	$4, 7 \sim$	X	$4, 7 \sim$

A forma é válida. Observe que aplicamos a regra existencial, em 3, antes de aplicar a regra universal, nas linhas 5 e 6. Assim procedendo como estratégia geral, diminuímos o comprimento das árvores.

6.55 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$\exists x \forall y Lxy \ \vdash \forall x \exists y Lyx$$

Solução

1	√	$\exists x \forall y Lxy$	
2	√	$\sim\forall x \exists y Lyx$	
3		$\forall y Lay$	1 $\exists$
4	√	$\exists x \sim\exists y Lyx$	2 $\sim\forall$
5	√	$\sim\exists y Lyb$	4 $\exists$
6		$\forall y \sim Lyb$	5 $\sim\exists$
7		$\sim Lab$	6 $\forall$
8		Lab	3 $\forall$
9		X	7, 8 $\sim$

A árvore tem somente ramos fechados e, portanto, a forma é válida. (Compare com o problema 6.22.)

6.56 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$\exists x \exists y Lxy \vdash \exists x Lxx$$

Solução

1	√	$\exists x \exists y Lxy$	
2	√	$\sim\exists x Lxx$	
3	√	$\exists y Lay$	1 E
4		Lab	3 E
5		$\forall x \sim Lxx$	2 $\sim\exists$
6		$\sim Laa$	5 $\forall$
7		$\sim Lbb$	6 $\forall$

A regra do quantificador existencial foi usada duas vezes (linhas 3 e 4) e, em cada uso, introduzimos uma nova letra nominal. Na linha 7, nenhuma regra mais se aplica e o ramo permanece aberto; logo, a forma é inválida.

6.57 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$\forall x \exists y Lxy \vdash Laa$$

Solução

1		$\forall x \exists y Lxy$	
2		$\sim Laa$	
3	✓	$\exists y Lay$	1 $\forall$
4		Lab	3 $\exists$
5	✓	$\exists y Lby$	1 $\forall$
6		Lbc	5 $\exists$
7	✓	$\exists y Lcy$	1 $\forall$
8		Lcd	7$\exists$

A árvore nunca terminará. Ela é infinita. Aplicamos a regra do quantificador universal para 1 e isso gerou uma nova fórmula quantificada existencialmente, em 3. Aplicando $\exists$ para esta nova fórmula, em 4, introduzimos uma nova letra nominal, '*b*', no ramo. Como a fórmula universal em 1, não está ticada, devemos aplicar novamente $\forall$, em 5, para '*b*'. Isso nos dá uma nova fórmula existencial, a qual, por sua vez, introduz uma nova letra nominal, '*c*', na linha 6. Mas isso requer a aplicação $\forall$, na linha 1, para '*c*' — e assim por diante. A forma é inválida. Interpretando '*F*' como 'é o pai de'; da suposição de que todo mundo tem um pai não se segue que *a* é seu próprio pai. Como a árvore nunca terminará, jamais obteremos uma resposta.

Esse resultado ilustra a indecidibilidade da lógica de predicados, mencionada no começo desta seção. Na verdade, é impossível produzir um conjunto finito de regras que nos dê uma resposta 'válida' ou 'inválida', para qualquer caso. *Observe, entretanto, que essa árvore não dá uma resposta injusta; ela nada afirma. As respostas que o teste da árvore de refutação dão estão sempre corretas.*

As árvores de refutação podem ser aplicadas às formas contendo o predicado de identidade. Isso requer duas novas regras:

Identidade (=): Se uma wff da forma $\alpha = \beta$ aparece num ramo aberto e se uma outra wff ϕ, contendo ou α ou β, aparece não-ticada naquele ramo, então escrevemos no final do ramo qualquer wff que ainda não esteja no ramo, que é o resultado da substituição de uma ou mais ocorrências de qualquer uma dessas letras nominais pela outra em ϕ. Não ticamos $\alpha = \beta$ nem ϕ.

Identidade negada (~=): Fecha-se qualquer ramo aberto no qual uma wff da forma $\sim\alpha = \alpha$ ocorra.

A regra da identidade é a versão da árvore de refutação para =E. A regra da identidade negada está relacionada com = I.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

6.58 Construa uma árvore de refutação para decidir se seguinte forma é válida:

$$a = b \vdash Fab \rightarrow Fba$$

Solução

1		$a = b$	
2		$\sim(Fab \rightarrow Fba)$	
3	$\checkmark$	$\sim(Faa \rightarrow Faa)$	1, 2 =
4		Faa	3 $\sim\rightarrow$
5		$\sim Faa$	3 $\sim\rightarrow$
6		X	4, 5 $\sim$

Na linha 3, substituímos as duas ocorrências de 'b' em '$\sim(Fab \rightarrow Fba)$' por '$a$' usando a regra da identidade. A árvore fecha-se, na linha 6; logo, a forma é válida.

6.59 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$Fa, Fb \vdash a = b$$

Solução

1	Fa
2	Fb
3	$\sim a = b$

Nenhuma regra se aplica aqui. Em particular, nenhuma regra da identidade opera sobre fórmulas do tipo $\sim\alpha = \beta$, onde α e β são distintas. A árvore está concluída; a forma é inválida. O ramo aberto representa um universo contendo dois objetos distintos que são F.

6.60 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$\sim a = b, \sim b = c \vdash \sim a = c$$

Solução

1		$\sim a = b$	
2		$\sim b = c$	
3	✓	$\sim\sim a = c$	
4		$a = c$	$3 \sim\sim$
5		$\sim c = b$	$1, 4 =$
6		$\sim b = a$	$2, 4 =$

Aplicamos a regra da identidade para as linhas 1 e 4 e também, 2 e 4. Contudo, a árvore não se fecha. Portanto, a forma é inválida. A árvore nos mostra que as premissas podem ser verdadeiras e a conclusão pode ser falsa, num universo em que existem objetos a, b e c, de modo que a e c são idênticos, mas distintos de b.[10]

6.61 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$a = b \vdash b = a$$

10. Alguns autores permitem que a regra da identidade seja aplicada para uma identidade e para si própria; assim, a linha 4 gera mais três fórmulas, '$a = a$', '$c = c$' e '$c = a$'. De acordo com esta regra da identidade, a árvore acima não estaria terminada até que essas três fórmulas fossem adicionadas. Mas essas fórmulas não fecham necessariamente a árvore. O enunciado de nossa regra estipula que ϕ é uma fórmula distinta de $\alpha = \beta$, e portanto impede a produção dessas fórmulas supérfluas.

Solução

1	$a = b$	
2	$\sim b = a$	
3	$\sim a = a$	1, 2 =
4	X	3 ~=

A forma é válida. Na linha 3, substituímos a ocorrência de 'b' em '$\sim b = a$' por 'a', para obter '$\sim a = a$', Daí a árvore se fecha pela regra da identidade negada.

6.62 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$\forall x \forall y \forall z\ ((x = y\ \&\ y = z) \rightarrow x = z)$$

Solução

1	✓	$\sim\forall x \forall y \forall z\ ((x = y\ \&\ y = z) \rightarrow x = z)$	
2	✓	$\exists x \sim\forall y\ \forall z\ ((x = y\ \&\ y = z) \rightarrow x = z)$	1 ~∀
3	✓	$\sim\forall y\ \forall z\ ((a = y\ \&\ y = z) \rightarrow a = z)$	2 ∃
4	✓	$\exists y \forall z\ ((a = y\ \&\ y = z) \rightarrow a = z)$	3 ~∀
5	✓	$\sim\forall z\ ((a = b\ \&\ b = z) \rightarrow a = z)$	4 ∃
6	✓	$\exists z \sim((a = b\ \&\ b = z) \rightarrow a = z)$	5 ~∀
7	✓	$\sim((a = b\ \&\ b = c) \rightarrow a = c)$	6 ∃
8	✓	$a = b\ \&\ b = c$	7 ~→
9		$\sim a = c$	7 ~→
10		$a = b$	8 &
11		$b = c$	8 &
12		$a = c$	10, 11 =
13		X	9, 12 ~

A forma é válida. Na verdade, ela é a lei de transitividade da identidade, provada no problema 6.42.

As tabelas 6-2 até 6-4 resumem as regras de inferência, as regras derivadas e as regras para árvores de refutação, para a lógica de predicados com identidade:

Tabela 6-2 Regras básicas de inferência para a lógica de predicados com identidade.*

Eliminação universal (EU): De uma wff quantificada universalmente, $\forall\beta\phi$, infere-se qualquer wff da forma ϕ^{α}/β, a qual resulta de se substituir cada ocorrência da variável β em ϕ por uma letra nominal α.

Introdução universal (IU): De uma wff ϕ contendo uma letra nominal α, que não ocorre em qualquer premissa ou em qualquer hipótese vigente na linha em que ϕ ocorre, infere-se uma wff da forma $\forall\beta\phi^{\beta}/\alpha$, onde ϕ^{β}/α é o resultado de se substituir todas as ocorrências de α em ϕ por uma variável β que não ocorra em ϕ.

Introdução existencial (IE): Dada uma wff contendo uma letra nominal α, infere-se qualquer wff da forma $\exists\beta\phi^{\beta}/\alpha$, onde ϕ^{β}/α é o resultado de se substituir uma ou mais ocorrências de α em ϕ por uma variável β que não ocorra em ϕ.

Eliminação existencial (EE): Dada uma wff quantificada existencialmente, $\exists\beta\phi$ e uma derivação de uma conclusão ψ a partir da hipótese do tipo ϕ^{α}/β (o resultado de se substituir cada ocorrência da variável β em ϕ por uma letra nominal α que não ocorra em ϕ), descarta-se ϕ^{α}/β e afirma-se ψ.
Restrição: A letra nominal α não pode ocorrer em ψ, nem em qualquer premissa nem em qualquer hipótese vigente na linha em que EE está aplicada.

Introdução da identidade (=I): Para qualquer letra nominal α, pode-se afirmar $\alpha = \alpha$ numa linha qualquer da prova.

Eliminação da identidade (=E): Se ϕ é uma wff contendo uma letra nominal α, então de ϕ e de $\alpha = \beta$ ou $\beta = \alpha$ pode-se inferir ϕ^{β}/α, que é o resultado de se substituir uma ou mais ocorrências de α em ϕ por β.

* Somente regras específicas para o cálculo de predicados estão relacionadas. Para uma lista das regras do cálculo proposicional, básicas e derivadas, ver tabelas 3-3 e 3-4, no final do Capítulo 3.

Tabela 6-3 Regras derivadas para a lógica de predicados.

<u>*Intercâmbio de quantificadores* (IQ)</u>: Seja ϕ uma fórmula aberta na variável β. Se um dos seguintes pares é uma subwff de uma wff ψ, infere-se, a partir de ψ, o resultado de se substituir uma ou mais ocorrências de um deles pelo outro que lhe é correspondente.

$\sim\forall\beta\sim\phi$, $\exists\beta\phi$

$\sim\forall\beta\phi$, $\exists\beta\sim\phi$

$\forall\beta\sim\phi$, $\sim\exists\beta\phi$

$\forall\beta\phi$, $\sim\exists\beta\sim\phi$

Tabela 6-4 Regras para árvore de refutação para a lógica de predicados com identidade. *

<u>*Quantificação universal* ($\forall$)</u>: Se uma wff do tipo $\forall\beta\phi$ aparece num ramo aberto e se α é uma letra nominal que ocorre uma wff naquele ramo, então escrevemos ϕ^{α}/β (o resultado de se substituir todas as ocorrências de β em ϕ por α) no final do ramo. Se nenhuma wff contendo uma letra nominal aparece no ramo, então escolhemos uma letra nominal α e escrevemos ϕ^{α}/β no final do ramo. Em cada caso, não ticamos $\forall\beta\phi$.

<u>*Quantificação existencial negada* ($\sim\exists$)</u>: Se uma wff não-ticada da forma $\sim\exists\ \beta\phi$ aparece num ramo aberto, ticâmo-la e escrevemos $\forall\beta\sim\phi$ no final de cada ramo aberto que contém a wff ticada recentemente.

<u>*Quantificação universal negada* ($\sim\forall$)</u>: Se uma wff não-ticada da forma $\sim\forall\beta\phi$ aparece num ramo aberto, ticâmo-la e escrevemos $\exists\beta\sim\phi$ no final de cada ramo aberto que contém a wff ticada recentemente.

<u>*Quantificação existencial* ($\exists$)</u>: Se uma wff não-ticada do tipo $\exists\beta\phi$ aparece num ramo aberto, ticâmo-la. Escolhemos uma letra nominal α que não apareceu naquele ramo e então escrevemos ϕ^{α}/β (o resultado de se substituir cada ocorrência de β em ϕ por α) no final de cada ramo aberto que contém a wff ticada recentemente.

Identidade (=): Se uma wff do tipo $\alpha = \beta$ aparece no ramo aberto e se uma outra wff ϕ contendo α ou β aparece não-ticada naquele ramo, então escrevemos no final do ramo qualquer wff que não esteja no ramo, que é o resultado de se substituir uma ou mais ocorrências de qualquer uma dessas letras nominais pela outra em ϕ. Não se tica $\alpha = \beta$ nem ϕ.

Identidade negada ($\sim=$): Fechamos qualquer ramo aberto no qual uma wff do tipo $\sim\alpha = \alpha$ ocorra.

* Somente regras específicas para o cálculo de predicados estão relacionadas. Para uma lista das regras do cálculo proposicional, ver tabela 4-1.

Problemas suplementares

I. Formalize as seguintes sentenças usando a interpretação dada a seguir. (As últimas cinco requerem o predicado da identidade.)

Símbolo	*Interpretação*
Nomes	
a	Al
b	Beth
f	fama
d	dinheiro
Predicados unários	
F	é famoso
A	é ambicioso
H	é ser humano
Predicado binário	
G	...gosta de...
Predicado ternário	
P	...prefere...do que...

1) Al e Beth gostam de dinheiro.

2) Nem Beth nem Al são famosos.

3) Al gosta de fama e de dinheiro.

4) Beth prefere fama do que dinheiro.

5) Al prefere Beth do que dinheiro e fama.

6) Beth prefere qualquer coisa do que Al.

7) Al prefere nada do que Beth.

8) Alguns humanos são ambiciosos e famosos.

9) Qualquer pessoa ambiciosa gosta de dinheiro.

10) Nem toda pessoa que gosta de dinheiro é ambiciosa.

11) Se Al e Beth são ambiciosos, então existe um ser humano ambicioso.

12) Beth gosta de qualquer ser humano.

13) Alguém não gosta de si mesmo.

14) Alguém não gosta de alguém.

15) Ninguém gosta de todo mundo.

16) Nenhum ser humano gosta de todo mundo.

17) Al gosta de todo ser humano que gosta dele.

18) Alguns famosos gostam de si próprios.

19) Todos os famosos gostam de si próprios.

20) Nem todos gostam de todos que são famosos.

21) Se Al é ambicioso e Beth não é, então Al e Beth não são idênticos.

22) Beth gosta de todo mundo, exceto de Al.

23) Al é o único ser humano que não é ambicioso.

24) Al prefere dinheiro do que qualquer coisa mais.

25) Todo ser humano que prefere dinheiro a qualquer coisa mais é também ambicioso.

II. Determine quais das seguintes fórmulas são wffs e quais não são. Explique sua resposta.

1) (Fa)

2) Fab

3) $Fab \rightarrow Ga$

4) $\sim Fxy$

5) $\forall x \sim Fxy$

6) $\exists x \exists y \sim Fxy$

7) $(\exists x \exists y \sim Fxy)$

8) $\forall x Fx \rightarrow Lax$

9) $\forall x\,(Fx \rightarrow \mathrm{a} = x)$

10) $\forall x \forall y\,(Fx \rightarrow \sim y = x)$

III. Construa uma prova para cada uma das seguintes formas usando as regras básicas e derivadas:

1) $\forall x Fx \vdash Fa \,\&\, (Fb \,\&\, (Fc \,\&\, Fd))$

2) $\forall x(Fx \vee Gx), \sim Fa \vdash \sim Ga$

3) $\sim Fa \vdash \sim \forall x\,(Fx \,\&\, Gx)$

4) $\forall x(Fx \leftrightarrow R), R \vdash Fa$

5) $\forall x(\sim Fx \vee \sim Gx) \vdash \sim(Fa \,\&\, Ga)$

6) $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \forall x(\sim Gx \rightarrow \sim Fx)$

7) $\forall x\,(Fx \rightarrow Gx) \vdash \forall x \sim Gx \rightarrow \forall x \sim Fx$

8) $\forall x \forall y\, Fxy \vdash \forall x Fx\, x$

9) $\forall x Fx \vdash \forall x Gx \rightarrow \forall x\,(Fx \,\&\, Gx)$

10) $\forall x \forall y\,(Fxy \rightarrow \sim Fyx) \vdash \forall x \sim Fxx$

11) $\forall x Fx \vdash \exists x Fx$

12) $\sim \exists x Fx \vdash \sim Fa$

13) $\exists x \sim Fx \vdash \sim \forall x Fx$

14) $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \exists x Fx \rightarrow \exists\, x Gx$

15) $\sim\exists x(Fx \& Gx) \vdash \forall x(\sim Fx \vee \sim Gx)$

16) $\sim\forall x(Fx \& Gx) \vdash \exists x(\sim Fx \vee \sim Gx)$

17) $\sim\exists x\, \exists y Lxy \vdash \forall x \sim Lxx$

18) $\exists x Fx \vdash \exists x\, \exists y(Fx \& Fy)$

19) $\forall x \sim Fx \vdash \forall x(Fx \rightarrow Gx)$

20) $\forall x \sim Fx \vdash \forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$

21) $\forall x \forall y \forall z\, ((Lxy \& Lyz) \rightarrow \sim Lxz) \vdash \forall x \sim Lxx$

22) $\vdash \sim\exists x(Fx \& \sim Fx)$

23) $\vdash \exists x Fx \vee \exists x \sim Fx$

24) $\vdash \exists x Fx \vee \forall x \sim Fx$

25) $\vdash \sim\exists x\, \forall y(Lxy \leftrightarrow \sim Lxx)$

26) $\vdash \forall x \exists y\; x = y$

27) $\vdash \forall x \forall y(x = y \leftrightarrow y = x)$

28) $Fa, \sim Fa \vdash \sim\forall x\, \forall y\; x = y$

29) $\forall x(x = a \vee x = b), \exists x Fx, \sim Fa \vdash Fb$

30) $\vdash \forall x \forall y(x = y \rightarrow (Fx \leftrightarrow Fy))$

IV. Construa uma árvore de refutação para cada uma das seguintes formas para decidir se ela é válida.

1) $\exists x Fx \vdash Fa$

2) $\forall x Fx \vdash Fa$

3) $Fa \vdash \exists x Fx$

4) $Fa \vdash \forall x Fx$

5) $\forall x Fx \vdash \sim\exists x \sim Fx$

6) $\sim\exists x \sim Fx \vdash \forall x Fx$

7) $\forall x \sim Fx \vdash \sim\forall x Fx$

8) $\sim\forall x Fx \vdash \forall x \sim Fx$

9) $\forall x Fx \vee \forall x Gx \vdash \forall x(Fx \vee Gx)$

10) $\forall x\, (Fx \vee Gx) \vdash \forall x Fx \vee \forall x Gx$

11) $\vdash \forall x(Fx \vee \sim Fx)$

12) $\vdash \forall x \sim(Fx \rightarrow \sim Fx)$

13) $\vdash \exists x Fx \leftrightarrow \sim\forall x \sim Fx$

14) $\exists x\, (Fx \,\&\, \sim Fx) \vdash P$

15) $\exists x Fx \,\&\, \exists x \sim Fx \vdash P$

16) $\sim\exists x Fx \vdash \forall x\, (Fx \rightarrow P)$

17) $\forall x \forall y\, (Lxy \rightarrow Lyx), \exists x Lax \vdash \exists x Lxa$

18) $\exists x \exists y Lxy \vdash \exists x Lxx$

19) $\forall x\, (Fx \rightarrow \forall y Gy) \vdash \forall x Gx$

20) $\forall x\, (Fx \rightarrow \exists y Gy) \vdash Ga$

21) $\vdash \sim\forall x \forall y \sim x = y$

22) $\vdash \forall x \forall y\, (\sim x = y \leftrightarrow \sim y = x)$

23) $\forall x\, (Fx \rightarrow Gx), \sim Fa \vdash \exists x \sim x = a$

24) $\exists x\, \exists y Lxy \vdash \exists x \exists y\, (Lxy \,\&\, \sim x = y)$

25) $\vdash \forall x \forall y\, ((Fxy \,\&\, x = y) \rightarrow Fyx)$

V. Formalize os seguintes argumentos usando a interpretação dada. Construa uma árvore de refutação para determinar se a forma do argumento é válida ou inválida. Se ela é válida, construa uma prova.

Símbolo	*Interpretação*
Nomes	
p	Lógica proposicional
r	Lógica de predicados
i	Lógica de predicados com identidade
Predicados unários	
R	é um conjunto de regras
S	é um sistema formal
Predicados binários	
F	é uma fórmula de
P	é uma parte de
W	é uma wff de

1) A lógica proposicional é uma parte da lógica de predicados. Portanto, a lógica de predicados não é uma parte da lógica proposicional.
2) A lógica proposicional é uma parte de si mesma. Portanto, alguma coisa é uma parte da lógica proposicional.
3) A lógica proposicional é uma parte da lógica de predicados, mas a lógica de predicados não é uma parte da lógica proposicional. Conseqüentemente, a lógica de predicados não é uma parte de si própria.
4) Tudo é uma parte de si mesmo. Logo, a lógica proposicional é uma parte da lógica de predicados.
5) Todo sistema formal é um conjunto de regras. Portanto, todo conjunto de regras é um sistema formal.
6) Como todo sistema formal é um conjunto de regras, nada que não é um conjunto de regras não é um sistema formal.

7) Não é verdade que não existem sistemas formais, pois a lógica de predicados é um sistema formal.

8) A lógica de predicados não é um sistema formal. Portanto, sistemas formais não existem.

9) Qualquer sistema formal é uma parte de si mesmo. Portanto, alguma coisa é uma parte de si mesma.

10) Existem fórmulas da lógica de predicados. Portanto, existem wffs da lógica de predicados, pois todas as wffs da lógica de predicados são fórmulas da lógica de predicados.

11) A lógica de predicados é um sistema formal. Portanto, todos os sistemas formais são sistemas formais.

12) Nem toda fórmula da lógica de predicados é uma wff da lógica de predicados. Portanto, algumas fórmulas da lógica de predicados não são wffs da lógica de predicados.

13) Toda wff de um sistema formal é uma fórmula daquele sistema. Portanto, existe um sistema formal em que nem todas as suas wffs são fórmulas daquele sistema.

14) Se um sistema formal é parte de um segundo sistema formal, então toda wff do primeiro é uma wff do segundo. A lógica de predicados é uma parte da lógica de predicados com identidade e ambas são sistemas formais. Assim, toda wff da lógica de predicados é também uma wff da lógica de predicados com identidade.

15) Se uma coisa é uma parte de uma outra segunda e esta segunda coisa é uma parte de uma terceira, então a primeira é uma parte da terceira. A lógica de predicados é uma parte da lógica de predicados com identidade. Portanto, se a lógica proposicional é parte da lógica de predicados, então a lógica proposicional é uma parte da lógica de predicados com identidade.

16) Tudo é uma parte de si mesmo. Logo, se uma coisa não é uma parte de outra, as duas não são idênticas.

17) A lógica proposicional é uma parte da lógica de predicados. A lógica de predicados não é uma parte da lógica proposicional. Logo, a lógica de predicados não é idêntica à lógica proposicional.

18) Para quaisquer objetos x e y, se x é uma parte de y e y é uma parte de x, então x é idêntico a y. A lógica de predicados não é idêntica à lógica proposicional. Portanto, a lógica de predicados não é uma parte da lógica proposicional.

19) Tudo é uma parte de si mesmo. Logo, se a lógica de predicados é idêntica à lógica proposicional, então a lógica de predicados é uma parte da lógica proposicional e a lógica proposicional é uma parte da lógica de predicados.

20) A lógica de predicados e a lógica proposicional são sistemas formais. A lógica proposicional é uma parte da lógica de predicados, mas a lógica de predicados não é uma parte da lógica proposicional. Logo, existem pelo menos dois sistemas formais distintos.

Respostas a alguns problemas suplementares

I.

5) $Pabd \,\&\, Pabf$

10) $\sim\forall x(Gxd \rightarrow Ax)$

15) $\sim\exists x\, \forall yGxy$, ou, equivalentemente, $\forall x \sim\forall yGxy$

20) $\sim\forall x(Hx \rightarrow \forall y(Fy \rightarrow Gxy))$

25) $\forall x((Hx \,\&\, \forall y(\sim y = d \;\rightarrow Pxdy)) \rightarrow Ax)$

II.

5) Não é uma wff. A variável 'y' ocorre sem quantificador. Entretanto, é uma fórmula aberta em 'y'.

10) 'Fa' é uma wff, pela regra 1; e como '$b = a$' é uma wff pela regra da identidade, '$\sim b = a$' é uma wff, pela regra 2. Assim, '$(Fa \rightarrow \sim b = a)$' é uma wff, pela regra 3. Por duas aplicações da regra 4, segue-se que '$\forall x\forall y(Fx \rightarrow \sim y = x)$' é uma wff.

III.

5)	1	$\forall x(\sim Fx \vee \sim Gx)$	*P*
	2	$\sim Fa \vee \sim Ga$	1 EU
	3	$\sim(Fa \,\&\, Ga)$	2 DM
10)	1	$\forall x\, \forall y(Fxy \rightarrow \sim Fyx)$	*P*
	2	$\quad\mid\; Faa$	*H* (para RAA)
	3	$\quad\mid\; \forall y(Fay \rightarrow \sim Fya)$	1 EU
	4	$\quad\mid\; Faa \rightarrow \sim Faa$	3 EU
	5	$\quad\mid\; \sim Faa$	2, 4 MP
	6	$\quad\mid\; Faa \,\&\, \sim Faa$	3, 5 &I
	7	$\sim Faa$	2-6 RAA
	8	$\forall x \sim Fxx$	7 IU
15)	1	$\sim\exists x(Fx \,\&\, Gx)$	*P*
	2	$\forall x \sim(Fx \,\&\, Gx)$	1 IQ
	3	$\sim(Fa \,\&\, Ga)$	2 EU
	4	$\sim Fa \vee \sim Ga$	3 DM
	5	$\forall x(\sim Fx \vee \sim Gx)$	4 IU
20)	1	$\forall x \sim Fx$	*P*
	2	$\quad\mid\; Fa$	*H* (para PC)
	3	$\quad\mid\; \sim Fa$	1 EU
	4	$\quad\mid\; Ga$	2, 3 CONTRAD
	5	$Fa \rightarrow Ga$	2-4 PC
	6	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	5 IU

25)	1	$\exists x \forall y(Lxy \leftrightarrow \sim Lxx)$	*H* (para RAA)
	2	$\forall y\ (Lxa \leftrightarrow \sim Lxx)$	*H* (para EE)
	3	$Laa \leftrightarrow \sim Laa$	2 EU
	4	Laa	*H* (para RAA)
	5	$Laa \rightarrow \sim Laa$	3 $\leftrightarrow$ E
	6	$\sim Laa$	4, 5 MP
	7	$Laa\ \&\ \sim Laa$	4, 6 &I
	8	$\sim Laa$	4-7 RAA
	9	$\sim Laa \rightarrow Laa$	3 $\leftrightarrow$ E
	10	Laa	8, 9 MP
	11	$P\ \&\ \sim P$	8, 10 CONTRAD
	12	$P\ \&\ \sim P$	1, 2-11 EE
	13	$\sim\exists x\ \forall y(Lxy \leftrightarrow \sim Lxx)$	1-12 RAA

Este teorema tem instâncias interessantes. Ele pode ser interpretado, por exemplo, como não existe um x tal que, para todo y, x gosta de y se e somente se x não gosta de si mesmo. Isto, como a derivação mostrou, é necessariamente verdadeiro! ('*Lxy*' pode ser também interpretada como "y é um atributo de x", pensando em x e y como propriedades, ou como "x é um membro de y", quando x e y são conjuntos. Esse argumento formaliza o raciocínio da antinomia de Russell — veja Seção 10.2.) Para entender intuitivamente a derivação, é mais fácil interpretar '*L*' como 'gosta'. Logo, mais uma vez o que está provado é que ninguém gosta de todos e somente daqueles que não gostam de si próprios. Para provar isso, começamos com a hipótese de que alguém gosta de todos e somente aqueles que não gostam de si mesmos e, assumimos ainda que esse indivíduo é a (linhas 1 e 2). Desta última, segue-se por EU (passagem 3) que a gosta dele mesmo se e somente se ele não gosta dele mesmo. Então, a gosta ou não dele mesmo? Suponhamos que ele gosta (linha 4). Então, a contradição é imediata; logo, por *redução*, ele não gosta (linha 8). Mas

isto também leva a uma contradição (passagens 8 e 10); logo, a hipótese original conduz inevitavelmente a uma contradição.
A contradição exibida nas linhas 8 e 10 não pode ser usada por EE para completar a prova, pois ela contém a letra nominal 'a', a qual aparece na hipótese de EE, na linha 2. Assim, podemos usar CONTRAD para converter essa contradição em uma que pode ser usada por EE (escolhemos arbitrariamente 'P & ~P'). Isto nos permite executar a passagem EE, na linha 12, e obter a conclusão, na linha 13, por RAA (ver problemas 6.24 e 6.27).

30)

1	$a = b$	H (para PC)
2	Fa	H (para PC)
3	Fb	1, 2 = E
4	$Fa \rightarrow Fb$	2-3 PC
5	Fb	H (para PC)
6	Fa	1, 5 = E
7	$Fb \rightarrow Fa$	5-6 PC
8	$Fa \leftrightarrow Fb$	4, 7 $\leftrightarrow$I
9	$a = b \rightarrow (Fa \leftrightarrow Fb)$	1-8 PC
10	$\forall y(\mathrm{a} = y \rightarrow (Fa \leftrightarrow Fy))$	9 IU
11	$\forall x \forall y(x = y \rightarrow (Fx \leftrightarrow Fy))$	10 IU

IV. 5)

1		$\forall x Fx$	
2	✓	$\sim\sim\exists x \sim Fx$	
3	✓	$\exists x \sim Fx$	2 ~~
4		$\sim Fa$	3 $\exists$
5		Fa	1 $\forall$
6		X	4, 5 ~

A forma é válida.

10)

1		$\forall x(Fx \vee Gx)$	
2	√	$\sim(\forall xFx \vee \forall xGx)$	
3	√	$\sim\forall xFx$	2 ~∨
4	√	$\sim\forall xGx$	2 ~∨
5	√	$\exists x \sim Fx$	3 ~∀
6	√	$\exists x \sim Gx$	4 ~∀
7		$\sim Fa$	5 ∃
8		$\sim Gb$	6 ∃
9	√	$Fa \vee Ga$	1 ∀
10	√	$Fb \vee Gb$	1 ∀

11	Fa 9 ∨		Ga 9 ∨			
12	X 7, 11 ~					
13		Fb 10 ∨		Gb 10 ∨		
14				X 8, 13 ~		

A forma é inválida.

15)

1	√	$\exists xFx \ \& \ \exists x \sim Fx$	
2		$\sim P$	
3	√	$\exists xFx$	1 &
4	√	$\exists x \sim Fx$	1 &
5		Fa	3 ∃
6		$\sim Fb$	4 ∃

A forma é inválida.

20)

1			$\forall x\,(Fx \rightarrow \exists yGy)$								
2			$\sim Ga$								
3		√	$Fa \rightarrow \exists yGy$	1 ∀							
4	$\sim Fa$	3 →		√	$\exists yGy$	3 →					
5					Gb	4 ∃					
6				√	$Fb \rightarrow \exists yGy$	1 ∀					
7					$\sim Fb$	6 →	√	$\exists yGy$	6 →		
8								Gc	7 ∃		
9							√	$Fc \rightarrow \exists yGy$	1 ∀		
10							$\sim Fc$	9 →	√	$\exists yGy$	9 →

.
.
.

A árvore é infinita, pois, a linha 1 nunca é ticada e portanto a fórmula '$\exists yGy$' aparece repetidas vezes (linhas 4, 7, 10, etc.). Em cada uma dessas aparições, ela gera uma nova letra nominal. Todavia, podemos ver que a forma é inválida, porque todos os ramos, exceto o do lado mais à esquerda, termina sem fechar-se, e qualquer árvore concluída com um ramo aberto representa uma forma inválida.

25)	1	$\surd$	$\sim\forall x\forall y((Fxy \;\&\; x = y) \rightarrow Fyx)$	
	2	$\surd$	$\exists x \sim\forall y\;((Fxy \;\&\; x = y) \rightarrow Fyx)$	$1 \sim\forall$
	3	$\surd$	$\sim\forall y\;((Fay \;\&\; a = y) \rightarrow Fya)$	$2\ \exists$
	4	$\surd$	$\exists y \sim((Fay \;\&\; a = y) \rightarrow Fya)$	$3 \sim\forall$
	5	$\surd$	$\sim((Fab \;\&\; a = b) \rightarrow Fba)$	$4\ \exists$
	6	$\surd$	$Fab \;\&\; a = b$	$5 \sim\rightarrow$
	7		$\sim Fba$	$5 \sim\rightarrow$
	8		Fab	$6\ \&$
	9		$a = b$	$6\ \&$
	10		Fbb	$8, 9 =$
	11		Fba	$9, 10 =$
	12		X	$7, 11 \sim$

A forma é válida.

V.

5)	1		$\forall x(Fx \rightarrow Rx)$	
	2	$\surd$	$\sim\forall x(Rx \rightarrow Fx)$	
	3	$\surd$	$\exists x \sim(Rx \rightarrow Fx)$	$2 \sim\forall$
	4	$\surd$	$\sim(Ra \rightarrow Fa)$	$3\ \exists$
	5		Ra	$4 \sim\rightarrow$
	6		$\sim Fa$	$4 \sim\rightarrow$
	7	$\surd$	$Fa \rightarrow Ra$	$1\ \forall$
	8	$\sim Fa$ $\quad 7 \rightarrow$	Ra	$7 \rightarrow$

A forma é inválida.

10)	1	√	$\exists x Fxr$	
	2		$\forall x(Wxr \rightarrow Fxr)$	
	3	√	$\sim\exists x Wxr$	
	4		Far	1 $\exists$
	5		$\forall x \sim Wxr$	3 $\sim\exists$
	6		$\sim War$	5 $\forall$
	7		$\sim Wrr$	5 $\forall$
	8	√	$War \rightarrow Far$	2 $\forall$
	9	√	$Wrr \rightarrow Frr$	2 $\forall$

10	$\sim War$ 8 $\rightarrow$		Far 8 $\rightarrow$	
11	$\sim Wrr$ 9 $\rightarrow$	Frr 9 $\rightarrow$	$\sim Wrr$ 9 $\rightarrow$	Frr 9 $\rightarrow$

A forma é inválida. Observe que, sob a interpretação dada, alguns dos ramos representam universos envolvendo a possibilidade arcana de que a lógica de predicados é uma fórmula dela mesma. Embora não se considere essa possibilidade como um fato contra a validade do argumento, ela não deve ser ignorada sob um ponto de vista puramente formal. Os outros ramos abertos exibem maneiras mais vulgares, nas quais as premissas podem ser verdadeiras e a conclusão falsa.

15)

1			$\forall x \forall y \forall z((Pxy \,\&\, Pyz) \rightarrow Pxz)$			
2			Pri			
3	√		$\sim(Ppr \rightarrow Ppi)$			
4			Ppr			$3 \sim\rightarrow$
5			$\sim Ppi$			$3 \sim\rightarrow$
6			$\forall y \forall x((Ppy \,\&\, Pyz) \rightarrow Ppz)$			1
7			$\forall z((Ppr \,\&\, Prz) \rightarrow Ppz)$			6
8	√		$(Ppr \,\&\, Pri) \rightarrow Ppi$			7
9	√ $\sim(Ppr \,\&\, Pri)$		$8 \rightarrow$		Ppi	$8 \rightarrow$
10					X	$5, 9 \sim$
11	$\sim Ppr$	$9 \sim\&$	$\sim Pri$	$9 \sim\&$		
12	X	$4, 11\sim$	X	$2, 10 \sim$		

A forma é válida. Prova:

1	$\forall x \forall y \forall z((Pxy \,\&\, Pyz) \rightarrow Pxz)$	*P*
2	Pri	*P*
3	│ Ppr	*H* (Para PC)
4	│ $\forall y \forall z((Ppy \,\&\, Pyz) \rightarrow Ppz)$	1 EU
5	│ $\forall z((Ppr \,\&\, Prz) \rightarrow Ppz)$	4 EU
6	│ $(Ppr \,\&\, Pri) \rightarrow Ppi$	5 EU
7	│ $Ppr \,\&\, Pri$	2, 3 &I
8	│ Ppi	6, 7 MP
9	$Ppr \rightarrow Ppi$	3-8 PC

20)

1	√		$Sr \& Sp$			
2	√		$Ppr \& \sim Prp$			
3	√		$\sim\exists x\, \exists y((Sx \& Sy) \& \sim x = y)$			
4			Sr			1 &
5			Sp			1 &
6			Ppr			2 &
7			$\sim Prp$			2 &
8			$\forall x \sim\exists y((Sx \& Sy) \& \sim x = y)$			3 ~∃
9	√		$\sim\exists y((Sr \& Sy) \& \sim r = y)$			8 ∀
10			$\forall y \sim((Sr \& Sy) \& \sim r = y)$			9 ~∃
11	√		$\sim((Sr \& Sp) \& \sim r = p)$			10 ∀
12	√ $\sim(Sr \& Sp)$			11 ~&	√ $\sim\sim r = p$	11 ~&
13					$r = p$	12 ~~
14	$\sim Sr$	12 ~&	$\sim Sp$	12 ~&	$\sim Ppp$	7, 13 =
15	X	4, 14 ~	X	5, 14 ~	$\sim Ppr$	13, 14 =
16					X	6, 15 ~

A forma é válida. Prova:

1	$Sr \,\&\, Sp$	P
2	$Ppr \,\&\, {\sim}Prp$	P
3	$\quad\vert\; r = p$	H (para RAA)
4	$\quad\vert\; Ppp \,\&\, {\sim}Prp$	2, 3 = E
5	$\quad\vert\; Prp \,\&\, {\sim}Prp$	3, 4 = E
6	${\sim}r = p$	3-5 RAA
7	$(Sr \,\&\, Sp) \,\&\, {\sim}\, r = p$	1, 6 &I
8	$\exists y((Sr \,\&\, Sy) \,\&\, {\sim}r = y)$	7 IE
9	$\exists x\, \exists y((Sx \,\&\, Sy) \,\&\, {\sim}x = y)$	8 IE

MAKRON
Books

Capítulo 7

FALÁCIAS

7.1 Classificação de falácias

Os métodos empregados para avaliar a maioria dos argumentos foram bem-sucedidos. Contudo, para alguns argumentos esses métodos falham. Tabelas-verdade, árvores e diagramas de Venn estabelecem invalidades somente para formas de argumento e não para argumentos específicos. Esses métodos não possibilitam avaliar um argumento: a real verdade ou a falsidade das premissas, o grau de relevância e o efeito de se suprimir uma evidência relacionada com a conclusão. As técnicas informais de avaliação do Capítulo 2 aplicam-se a argumentos específicos; contudo, eles confiam excessivamente na nossa intuição.

O estudo das falácias é também informal, porém ele aguça a intuição ao elucidar os erros mais comuns do raciocínio usual.

Falácias (num sentido amplo) são erros que ocorrem nos argumentos e que afetam sua irrefutabilidade. Em latim, o verbo *fallere* significa "falir". Argumentos falaciosos são enganosos, pois parecem ser, superficialmente, bons argumentos. Contudo, o engano não é uma condição necessária de uma falácia, da maneira que este termo é aqui empregado. Sempre que raciocinamos inválida ou irrelevantemente, ou seja, aceitamos premissas que não deveríamos, ou não fazemos uso adequado dos fatos relevantes à nossa disposição, cometemos uma falácia.

Não há definição aceita universalmente de 'falácia'. Muitos autores usam definições mais restritas do que a dada aqui e empregam o termo de acordo com sua definição. Além disso, não há uma classificação das falácias universalmente aceita. Dividimos as falácias em seis classes: falácias de relevância, falácias de raciocínio circular, falácias semânticas, falácias indutivas, falácias formais e falácias de premissas falsas. Alguns autores usam outros esquemas classificatórios.

Falácias de relevância ocorrem quando as premissas do argumento não têm relação com a conclusão. Além disso, freqüentemente incluem um elemento para desviar a atenção do real problema.

Falácias de raciocínio circular são as falácias de assumir o que se quer provar.

Falácias semânticas resultam quando a linguagem utilizada na construção dos argumentos tem múltiplos significados ou é excessivamente vaga que interfere na avaliação do argumento.

Falácias indutivas ocorrem quando a probabilidade da conclusão de um argumento, dadas as suas premissas — isto é, sua probabilidade indutiva —, é baixa ou, pelo menos, menor do que o argumentador supõe.

Falácias formais ocorrem quando fazemos mau uso de uma regra de inferência válida ou quando inferimos uma regra que tem sua demonstrabilidade inválida.

Finalmente, há uma classe de erros classificados tradicionalmente como falácias: os argumentos que têm *premissas falsas*.

As próximas seis seções correspondem a cada uma dessas classificações. Não faremos um estudo exaustivo das falácias uma vez que o ser humano pode inventar novas e maneiras de se cometer erros lógicos. Desde que Aristóteles redigiu o primeiro catálogo de falácias, fica evidente que maus hábitos de raciocínio obedecem a padrões precisos.

Muitos textos de lógica ainda empregam expressões do latim na classificação de certas falácias. Fornecemos os termos em latim (e seus equivalentes em português) quando tal uso é habitual.

7.2 Falácias de relevância

Falácias de relevância ocorrem quando as premissas de um argumento não têm relação com a conclusão. Tais argumentos são muitas vezes chamados *non sequiturs* (da frase em latim '*non sequitur*', significando 'não se segue'). Distinguiremos alguns tipos de falácias de relevância, embora o erro genérico seja o mesmo em todos. (Para uma discussão geral do papel da relevância ao se avaliar um argumento, ver Seção 2.4.)

A falta de relevância não é a única coisa errada nos argumentos discutidos nesta seção. A maior parte das falácias de relevância ocorre em argumentos inválidos e que têm probabilidades indutivas baixas. Nesta seção focalizamos exclusivamente o problema da irrelevância.

Argumentos do tipo *ad hominem* tentam refutar uma afirmação ou proposta atacando seu proponente e não fornecem um exame ponderado da proposta. '*Ad hominem*' significa "contra a pessoa". Argumentos do tipo *ad hominem* entram em pelo menos cinco casos:

1) Argumentos do tipo *ad hominem ofensivo* atacam uma pessoa idosa, o caráter, a família, o sexo, a moral, a posição social ou econômica, a personalidade, a aparência, a roupa, o comportamento profissional ou político, ou as filiações religiosas. A dedução é que não há motivo para aceitar seriamente as opiniões da pessoa.

PROBLEMA RESOLVIDO

7.1 O que há de errado com o seguinte argumento?

Jones defende a adição de flúor à água potável para o abastecimento da cidade.

Jones é um raptor condenado.

∴ Não devemos adicionar flúor à água potável para o abastecimento da cidade.

Solução

Embora Jones seja um raptor condenado, isso não tem relação com o fato de se adicionar flúor à água potável. Rejeitar a opinião de Jones simplesmente porque Jones é repreensível é cometer a falácia *ad hominem* ofensiva.

Na prática, as conclusões desses argumentos freqüentemente ficam indeclaradas ou são transmitidas por insinuações. Alguns argumentos contra a pessoa baseam-se em difamação, calúnia, ou no caráter criminoso. Nesses casos as premissas são falsas, bem como irrelevantes.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

7.2 O argumento abaixo comete um *ad hominem* ofensivo?

Jones diz que viu meu cliente cometer um crime.

Jones é um bêbado inveterado.

∴ O testemunho de Jones é sem valor.

Solução

Este é um caso limítrofe. Embora Jones seja um bêbado inveterado, o que é relevante para a integridade de seu testemunho, a relevância neste caso não é extremamente forte ou direta. A observação de Jones pode ter sido efetuada quando ele estava sóbrio.

7.3 O seguinte argumento é melhor que o do problema 7.2?

Jones diz que viu meu cliente cometer um crime na noite de 21 de abril.

Jones também tinha bebido na noite de 21 de abril e estava incapacitado de observar exatamente os acontecimentos.

∴ O testemunho de Jones sobre esse acontecimento não merece confiança.

Solução

Sim; se as premissas são verdadeiras, esse argumento apresenta boas razões para descartar o depoimento da testemunha. Aqui, não há falácia do tipo *ad hominem*.

2) A falácia de *culpa por associação* é a tentativa de repudiar uma afirmação atacando não o proponente da afirmação, mas as pessoas de seu relacionamento, ou questionando a reputação daqueles com quem concorda. Isto, também, é conhecido como *envenenando o poço*.

PROBLEMA RESOLVIDO

7.4 O que há de errado com o seguinte argumento?

Jones defende a adição de flúor à água potável para o abastecimento da cidade.

Jones gasta muito do seu tempo livre vagabundeando com criminosos, toxicômanos e vagabundos.

∴ Não devemos adicionar flúor à água potável para o abastecimento da cidade.

Solução

As premissas são irrelevantes para a conclusão; ainda que Jones tenha amigos indesejáveis, o que ele defende pode muito bem ser verdade. Observe também que contestar meramente a segunda premissa ("Jones na verdade gasta muito de seu tempo livre ajudando os idosos e trabalhando como voluntário nos hospitais") não é o caso. A questão lógica central aqui não é se Jones é vítima de infâmia, mas sim o fracasso em relacionar as premissas com a conclusão.

3) Argumentos do tipo *tu quoque* ("você também") tentam refutar uma afirmação atacando seu proponente alegando que ele é um hipócrita, que tem conduta dupla, ou é selecionador e, portanto inconsistente para impor um princípio. A dedução é que o argumentador está desqualificado para fazer a afirmação e, assim, não há razão para considerar seriamente a afirmação.

PROBLEMA RESOLVIDO

7.5 Comente o argumento:

Jones acredita que nos deveríamos abster de licor.

Jones é um bêbado inveterado.

∴ Não nos devemos abster de licor.

Solução

Os atos de Jones não têm relação com a verdade ou falsidade com o que acredita, ainda que seja convicto hipocritamente. O argumento comete a falácia *tu quoque*.

É preciso disciplinar-se ao distinguir entre o que uma pessoa diz e o que ela faz, para reprimir uma queixa contra indivíduos fingidos, oportunistas ou moralmente fracos e para impedir uma defensiva conveniente quando alguém recomenda um curso de ação. Todavia uma pessoa racional pode fazer isso.

4) Argumentos do tipo *interesse revestido* tentam refutar uma afirmação argüindo que seu proponente deseja obter alguma coisa (ou impedir a perda de algo). A dedução é que o proponente da afirmação deveria sustentar uma opinião diferente e daí que deveríamos desprezar seu argumento.

PROBLEMA RESOLVIDO

7.6 O que há de errado com o seguinte argumento?

Jones apóia o projeto de lei da adição de flúor à água potável, pendente no Congresso.

Ele apóia porque possui uma firma de adição de flúor à água potável que colherá muitos dividendos se o projeto de lei for aprovado.

$\therefore$ Não devemos apoiar esse projeto de lei.

Solução

As premissas são irrelevantes para a conclusão. A adição de flúor à água pode muito bem ser justificada independentemente dos motivos supostamente interesseiros de Jones. O argumento comete a falácia de interesse revestido. Quer Jones lucre, quer perca por causa da adição de flúor à água potável não é importante. O que conta é se a adição de flúor à água potável é desejável higienicamente, se o orçamento é viável e assim por diante.

5) Falácias *ad hominem circunstancial* são algumas vezes agrupadas numa categoria de falácias de interesse revestido, porém há uma distinção entre elas. A versão circunstancial da falácia *ad hominem* é a tentativa de refutar uma afirmação argüindo que seu proponente apóia duas ou mais proposições conflitantes. A implicação é que podemos desprezar seguramente uma ou todas essas proposições.

PROBLEMA RESOLVIDO

7.7 Comente o argumento:

Jones diz que detesta todas as formas de superstição.

Jones também diz que quebrar um espelho dá azar.

∴ Há provavelmente alguém supersticioso.

Solução

É uma falácia do tipo *ad hominem* circunstancial. A afirmação de Jones, consistente ou não, não tem relação com a veracidade da conclusão.

Todos os cinco tipos de argumentos *ad hominem* tentam refutar uma afirmação atacando seu proponente. Argumentos do tipo *homem-de-palha*, ao contrário, tentam refutar uma afirmação confundindo-a com uma afirmação menos plausível e, então, atacam a afirmação menos plausível, em vez de dirigir-se à questão original. O termo vem da esgrima medieval, onde os participantes se aqueciam praticando contra bonecos (homens-de-palha) antes de enfrentarem os adversários.

Um argumento do tipo homem-de-palha pode proporcionar boas razões contra a afirmação menos plausível que a confunde com a questão real, mas essas razões são irrelevantes para a questão real.

PROBLEMA RESOLVIDO

7.8 Comente o argumento:

Não pode existir verdade se qualquer coisa é relativa.
∴ A teoria da relatividade de Einstein não pode ser verdadeira.

Solução

A premissa é totalmente irrelevante para a conclusão, pois a teoria de Einstein não afirma que qualquer coisa é relativa (qualquer que seja o significado). A afirmação de que qualquer coisa é relativa é um homem-de-palha e o argumento implicitamente ataca esse homem-de-palha em vez de examinar a teoria de Einstein. Assim, mesmo que a premissa seja verdadeira (o que é dúbia; é difícil ver o que essa premissa pode significar), ela não oferece apoio para a conclusão.

Para diagnosticar corretamente um argumento do tipo homem-de-palha, geralmente precisamos saber mais sobre a afirmação em questão. Nesse caso, precisaríamos saber que a teoria de Einstein não afirma que qualquer coisa é relativa.

Argumentos *ad baculum* (também chamados de recurso à força ou apelo à força) tentam estabelecer uma conclusão através de ameaça ou intimidação.

PROBLEMA RESOLVIDO

7.9 Comente o argumento:

Se você não dormir comigo, Jones, eu atirarei em você.
∴ Você deve dormir comigo.

Solução

A premissa é irrelevante para justificar a conclusão. Coação, ameaças e intimidação podem ser persuasivas em alguns casos, mas não têm lugar numa apreciação racional. Note que não faz diferença como Jones responderá a essa ameaça; o fato dele recusar não altera esse tipo de "raciocínio" que é inaceitável logicamente.

Um argumento *ad baculum* ocorre numa conversa e, com freqüência, fica subentendido. No problema 7.9, por exemplo, a conclusão poderia ficar implícita. Assim, falácias do tipo *ad baculum* são difíceis de distinguir a partir de meras ameaças. A "proposta que você não pode recusar" é imoral, mas ela é ilógica? Considere o seguinte exemplo:

PROBLEMA RESOLVIDO

7.10 Pai: Limpe seu quarto senão...

Criança: Senão o quê?

∴ Pai: Senão você levará uma surra.

Essa falácia é do tipo *ad baculum*?

Solução

Não. Aqui não há argumento, há meramente um ultimato. O pai não está tentando justificar ou sustentar uma conclusão. Onde não há argumento, não pode haver falácia (pelo menos no sentido em que falácia está sendo empregada aqui).

Argumentos *ad verecundiam* (apelo à autoridade) ocorrem quando aceitamos (ou rejeitamos) uma afirmação simplesmente por causa do prestígio, *status* ou respeito que concedemos a seu proponente (ou oponente).

PROBLEMAS RESOLVIDOS

7.11 Por que o seguinte apelo à autoridade é inadequado?

Meu professor diz que eu deveria orgulhar-me de ser americano.

∴ Eu devo orgulhar-me de ser americano.

Solução

Sem uma evidência adicional de que o enunciado do professor está correto, a premissa é irrelevante para a conclusão. Não importa quão eloquente seja o locutor ao dizer que algo não é para ser feito desse modo.

A insuficiência do apelo à autoridade fica aparente quando opiniões de autoridades são conflitantes.

7.12 O seguinte argumento é melhor que o do problema 7.11?

O professor dela diz que eu deveria envergonhar-me de ser americano.

∴ Eu deveria envergonhar-me de ser americano.

Solução

Não. É outro apelo à autoridade. O fato é que ele infere uma conclusão diametralmente oposta, que não ajuda absolutamente.

Por outro lado, adicionar uma premissa a cada um desses exemplos é uma estratégia para forjar um elo de relevância, tornando cada um dos argumentos válidos.