Ensino & Informação
Prof.: Altamir A. R. Araldi
Revista®

Geometria Diferencial: Aplicações do Teorema de Gauss-Bonnet

Alunos: Abraão Mendes/Soraya Bianca

Profª.: Drª Inês Padilha

16 de Janeiro de 2014

Publicado em SlideShare

Teorema de Gauss-Bonnet Local

Seja $x : U \to S$ uma parametrização ortogonal (isto é, $F = 0$), de uma superfície orientada S, onde $U \subset R^2$ é homeomorfo a um disco aberto e x é compatível com a orientação de S. Seja $R \subset x(U)$ uma região simples de S e seja $\alpha : I \to S$ tal que $\partial R = \alpha(I)$. Suponha que α é orientada positivamente, paramertizada pelo comprimento de arco s, e sejam $\alpha(s_0), ..., \alpha(s_k)$ e $\theta_0, ..., \theta_k$, respectivamente, os vértices e os ângulos externos de α. Então

$$\sum_{i=0}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s)ds + \int_R K d\sigma + \sum_{i=0}^{k} \theta_i = 2\pi$$

onde $k_g(s)$ é a curvatura geodésica dos arcos regulares de α e K é a curvatura Gaussiana de S.

Proposição 4

Seja $S \subset R^3$ uma superfície compacta e conexa; então um dos valores $2, 0, -2, ..., -2n, ...$ é assumido pela característica de Euler-Poincaré $X(S)$. Além disto, se $S^* \subset R^3$ é uma outra superfície compacta e conexa e $X(S) = X(S^*)$, então S é homeomorfa a S^*.

Teorema de Gauss-Bonnet Global

Seja $R \subset S$ uma região regular de uma superfície orientada e sejam $C_1, ..., C_n$ as curvas fechadas, simples e regulares por partes que formam a fronteira ∂R de R. Suponha que cada C_i é orientada positivamente e sejam $\theta_1, ..., \theta_p$ o conjunto dos ângulos externos das curvas $C_1, ..., C_n$. Então

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} k_g(s)ds + \int_R K d\sigma + \sum_{l=1}^{p} \theta_l = 2\pi X(R)$$

onde s denota o comprimento de arco de C_i, e a integral sobre C_i significa a soma das intergrais em todos os arcos regulares de C_i.

Corolário 1.

Se R é uma região simples de S, então

$$\sum_{i=0}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s)ds + \int_R K d\sigma + \sum_{i=0}^{k} \theta_i = 2\pi$$

Corolário 2.

Seja S uma superfície compacta e orintável; então

$$\int_S K d\sigma = 2\pi X(S)$$

Teorema da Curva de Jordan

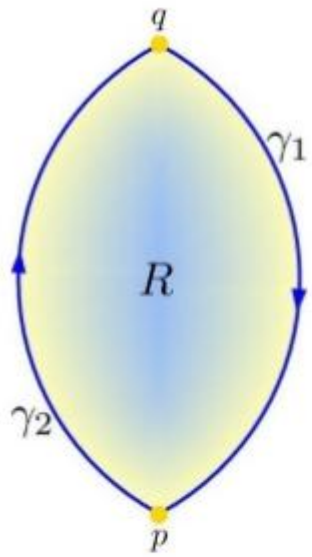
Seja $C \subset \mathbb{R}^2$ uma curva fechada, simples e regular por partes. Então $\mathbb{R}^2 - C$ tem duas componentes conexas, uma limitada D e outra ilimitada A, tais que $\partial D = \partial A = C$. Além disso, D é homeomorfo a um disco, isto é, C é o bordo de uma região simples.

Aplicações do Teorema da Gauss-Bonnet

1. Uma superfície compacta com curvatura positiva é homeomorfa a uma esfera.

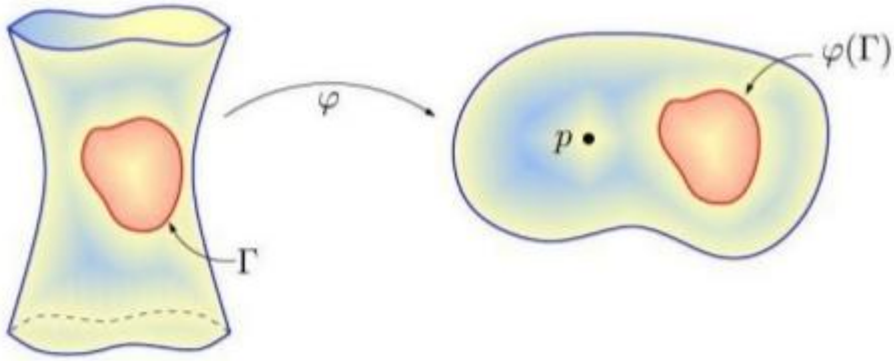
Aplicações do Teorema da Gauss-Bonnet

2. Seja S uma superfície orientável com curvatura Gaussiana não-positiva (i.e. $K \leq 0$). Então duas geodésicas γ_1 e γ_2 que partem de um ponto $p \in S$ não podem se encontrar novamente em um ponto $q \in S$ de tal forma que os traços de γ_1 e γ_2 constituam a fronteira de uma região simples R de S.



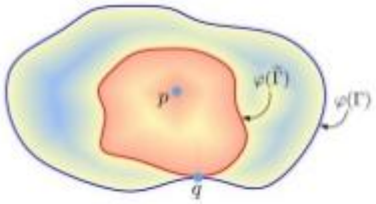
Aplicações do Teorema da Gauss-Bonnet

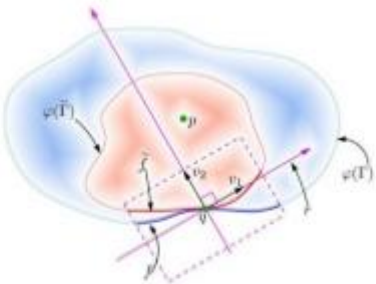
3. Seja S uma superfície homeomorfa a um cilindro com curvatura Gaussiana $K < 0$. Então S tem no máximo uma geodésica fechada simples.



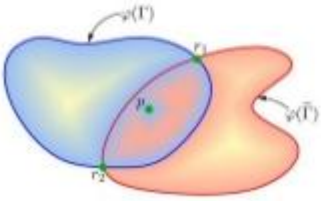
Afirmação: $\Gamma \cap \tilde{\Gamma} = \oslash$.

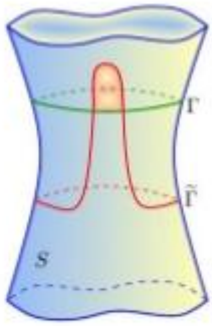
1. Γ e $\tilde{\Gamma}$ não podem se intersectar em apenas um ponto.



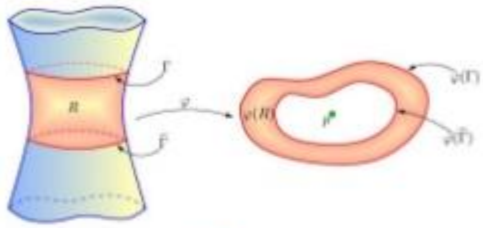


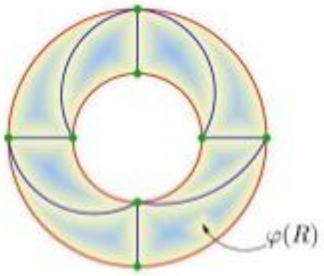
2. Suponhamos que $\varphi(\Gamma) \cap \varphi(\tilde{\Gamma}) \neq \oslash$.





3. Suponhamos que existam duas geodésicas fechadas e simples Γ e $\tilde{\Gamma}$ em S que não se intersectam.



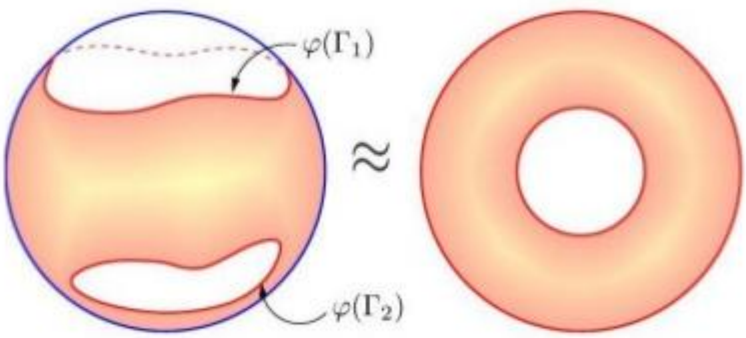


Aplicações do Teorema da Gauss-Bonnet

4. Se existem duas geodésicas fechadas e simples Γ_1 e Γ_2 numa superfície S compacta, conexa e com curvatura gaussiana $K > 0$, então Γ_1 e Γ_2 se intersectam.

Teorema da curva de Jordan na esfera

Seja $C \subset S^2$ uma curva fechada, simples e regular por partes. Então $S^2 - C$ tem duas componentes conexas D_1 e D_2 limitadas homeomorfas a um disco, tais que $\partial D_1 = \partial D_2 = C$.



Teorema de Jacobi

5. Seja $\alpha : [0, l] \to S$ uma curva parametrizada regular fechada (i.e. $\alpha(0) = \alpha(l)$ e $\alpha^{(i)}(0) = \alpha^{(i)}(l)$ para $i = 1, ..., n, ...$) com curvatura diferente de zero em todos os pontos. Suponha que a curva descrita pelo vetor normal à curva $\eta : I \to S^2$ é simples. Então $\eta(I)$ divide S^2 em duas regiões com áreas iguais.

Aplicações do Teorema de Gauss-Bonnet

6. Seja T um triângulo geodésico (i.e. os lados de T são geodésicas) em uma superfície orientada S. Sejam $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ os ângulos externos de T e φ_i, $i = 1, 2, 3$, os ângulos internos. Então a soma dos ângulos internos $\sum_{i=1}^{3} \varphi_i$ de um triângulo geodésico é:

1. Igual a π se $K = 0$;
2. Maior que π se $K > 0$;
3. Menor que π se $K < 0$.

7.
Seja v um campo diferenciável de vetores em uma superfície orientada S. Dizemos que $p \in S$ é um ponto singular de v se $v(p) = 0$.
O ponto singular é dito isolado se existe uma vizinhança V de p em S tal que v não tem pontos singulares em V além de p.
A cada ponto singular isolado p de um campo de vetores v vamos associar um número inteiro, o índice de v em p, da seguinte maneira:

Seja $X : U \to X(U) \subset S$ uma parametrização ortogonal em $X(u_0, v_0)$, $(u_0, v_0) \in U$, compatível com a orientação de S, tal que $v(\bar{p}) \neq 0$ para todo $\bar{p} \in X(U) - \{p\}$, e seja $\alpha : [0, l] \to S$ uma curva parametrizada simples, fechada, regular por partes e orientada positivamente tal que $\alpha([0, l]) \subset X(U)$ é a fronteira de uma região simples R contendo p em seu interior.

Seja $v(t) = v(\alpha(t)), t \in [0, l]$, a restrição de v ao longo de α, e seja $\varphi : [0, l] \to R^3$ uma parametrização diferenciável por partes do ângulo positivo de X_u a $v(t)$, isto é,

$$\frac{v(t)}{\|v(t)\|} = cos\varphi(t).\frac{X_u}{\|X_u\|}(\beta(t)) + sen\varphi(t).\frac{X_v}{\|X_v\|}(\beta(t))$$

onde $\alpha(t) = X(\beta(t))$.

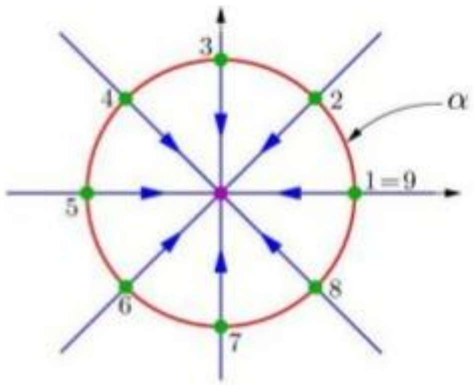
Como α é fechada $(\alpha(l) = \alpha(0))$ existe um inteiro I definido por

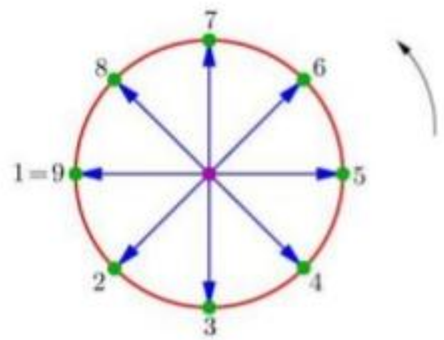
$$2\pi.I = \varphi(l) - \varphi(0) = \int_0^l \varphi' dt$$

O inteiro I é chamado de índice de v em p.

Exemplo: Vamos calcular o índice do seguinte campo de vetores no plano que tem $(0, 0)$ como ponto singular. As curvas que aparecem no desenho são as trajetórias dos campos de vetores.

(1) $w(x, y) = (-x, -y)$.





Bibliografia

1. DO CARMO, Manfredo Perdigão, *Geometria Diferencial das Curvas e Superfícies*, Coleção Textos Universitários, Sociedade Brasileira de Matemática, 2008.