

Ferdinand P. Beer ■ E. Russell Johnston, Jr. ■ Elliot R. Eisenberg

MECÂNICA VETORIAL *para* ENGENHEIROS

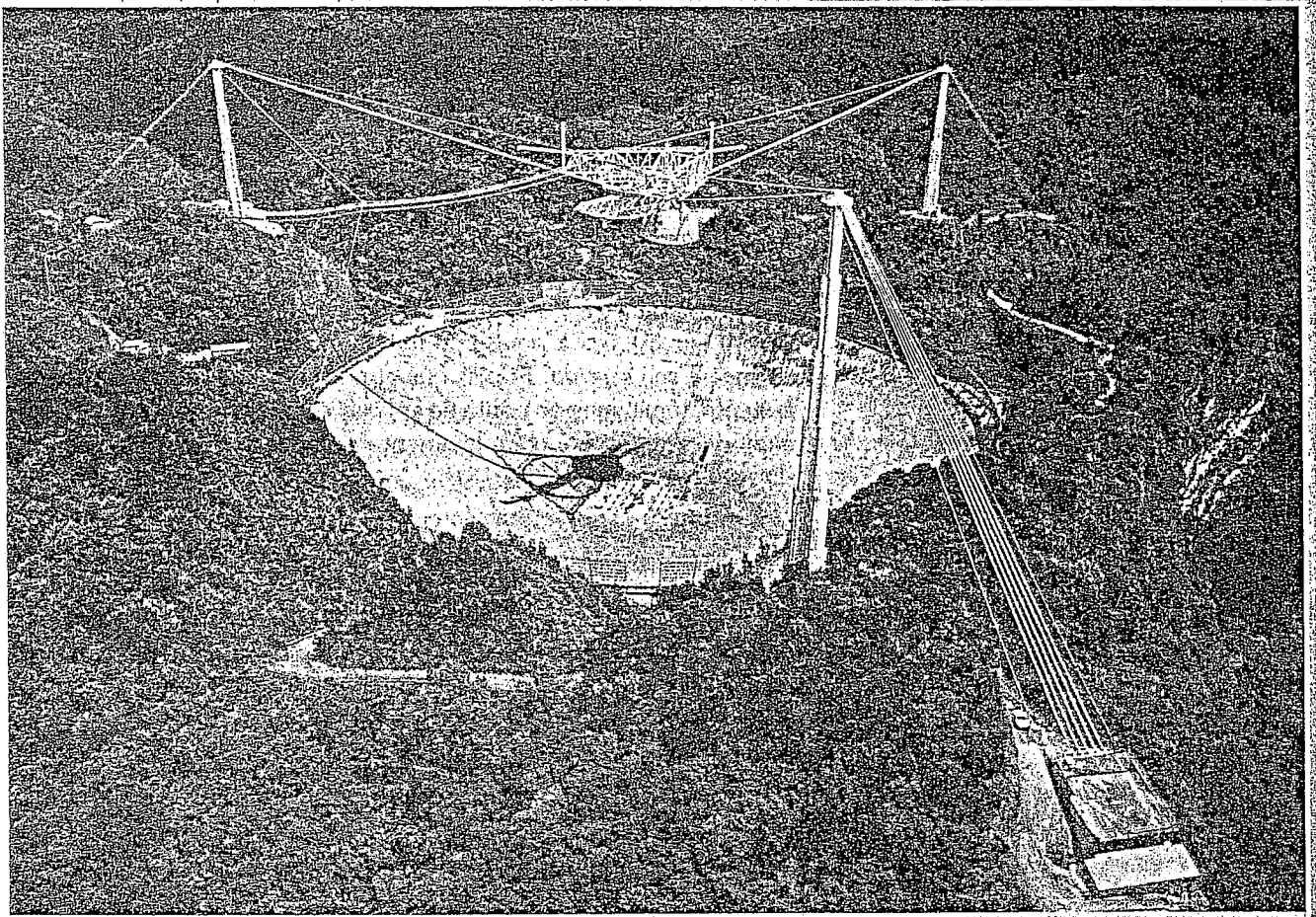
Estática

7^a Edição

Totalmente no
Sistema Internacional



Estática das Partículas



A foto mostra o maior radiotelescópio de “prato” único do mundo localizado em Arecibo, Porto Rico. O “prato” refletor esférico, de 305 m de diâmetro, cobre uma área de aproximadamente 81.000 m^2 . Suspensa acima do refletor está uma plataforma de 900 ton, abaixo da qual está o braço de azimute de 100 m de comprimento. Neste capítulo, vamos aprender que, ao considerarmos a plataforma como uma *partícula* em equilíbrio, será possível determinarmos as forças de tração nos cabos de suporte.

- 2:1 Introdução
- Forças no Plano**
- 2.2 Força sobre uma Partícula. Resultante de Duas Forças
- 2.3 Vetores
- 2.4 Adição de Vetores
- 2.5 Resultante de Várias Forças Concorrentes
- 2.6 Decomposição dos Componentes de uma Força
- 2.7 Componentes Retangulares de uma Força. Vetores Unitários
- 2.8 Adição de Forças pela Soma dos Componentes x e y
- 2.9 Equilíbrio de uma Partícula
- 2.10 Primeira Lei de Newton do Movimento
- 2.11 Problemas que Envolvem o Equilíbrio de uma Partícula. Diagramas de Corpo Livre
- Forças no Espaço**
- 2.12 Componentes Retangulares de uma Força no Espaço
- 2.13 Força Definida por sua Intensidade e por Dois Pontos em sua Linha de Ação
- 2.14 Adição de Forças Concorrentes no Espaço
- 2.15 Equilíbrio de uma Partícula no Espaço

Neste capítulo você estudará o efeito de forças que atuam sobre partículas. Primeiro você vai aprender como substituir duas ou mais forças que atuam sobre uma dada partícula por uma única força que tenha o mesmo efeito que as forças originais. Essa única força equivalente é a *resultante* das forças originais que atuam sobre a partícula. Depois, as relações que existem entre as várias forças que atuam sobre a partícula em estado de *equilíbrio* serão deduzidas e usadas para se determinarem algumas das forças que atuam sobre a partícula.

O uso da palavra *partícula* não implica que nosso estudo será limitado a pequenos corpos. Significa que o tamanho e o formato dos corpos em consideração não afetarão significativamente a resolução dos problemas tratados neste capítulo e que todas as forças que atuem sobre um dado corpo serão consideradas em um mesmo ponto de aplicação. Como tal hipótese é verificada em muitas aplicações práticas, neste capítulo você ficará habilitado a resolver diversos problemas de engenharia.

A primeira parte do capítulo é dedicada ao estudo de forças contidas em um único plano, e a segunda parte, à análise de forças em espaço tridimensional.

FORÇAS NO PLANO

2.2 FORÇA SOBRE UMA PARTÍCULA. RESULTANTE DE DUAS FORÇAS

Uma força representa a ação de um corpo sobre outro e é geralmente caracterizada por seu *ponto de aplicação*, sua *intensidade*, sua *direção* e seu *sentido*. Forças que atuam sobre uma dada partícula, entretanto, têm o mesmo ponto de aplicação. Cada força considerada neste capítulo será, então, completamente definida por sua intensidade, sua direção e seu sentido.

A intensidade de uma força é caracterizada por um certo número de unidades. Como indicamos no Cap. 1, as unidades SI usadas por engenheiros para medir a intensidade de uma força são o newton (N) e seu múltiplo, o quilonewton (kN), igual a 1.000 N. A direção de uma força é definida pela *linha de ação* e o *sentido* da força. A linha de ação é a linha reta infinita ao longo da qual a força atua; caracteriza-se pelo ângulo que ela forma com algum eixo fixo (Fig. 2.1).

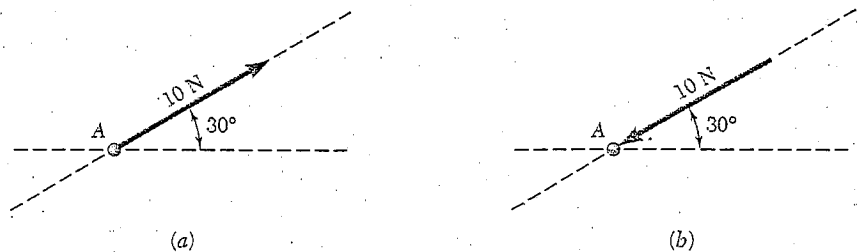


Fig. 2.1

A força propriamente dita é representada por um segmento dessa linha; por meio do uso de uma escala apropriada, pode-se escolher o comprimento desse segmento para representar a intensidade da força. Finalmente, o sentido da força deve ser indicado por uma ponta de seta. É importante, na definição de uma força, a indicação de seu sentido. Duas forças que tenham a mesma intensidade e a mesma linha de ação mas sentidos diferentes, tais como as forças mostradas na Fig. 2.1a e b, terão efeitos diretamente opostos sobre uma partícula.

Constata-se experimentalmente que duas forças P e Q que atuem sobre uma partícula A (Fig. 2.2a) podem ser substituídas por uma única força R que tem o mesmo efeito sobre essa partícula (Fig. 2.2c). Essa força é chamada de *resultante* das forças P e Q e pode ser obtida, como mostra a Fig. 2.2b, pela construção de um paralelogramo, usando-se P e Q como dois lados adjacentes desse paralelogramo. A *diagonal que passa por A representa a resultante*. Esse método de encontrar a resultante é denominado *lei do paralelogramo* para a adição de duas forças. Essa lei é baseada em evidência experimental; não pode ser provada ou deduzida matematicamente.

2.3 VETORES

Observa-se, pelo descrito acima, que forças não obedecem às regras de adição definidas na álgebra ou aritmética comuns. Por exemplo, duas forças que atuem a um ângulo reto entre si, uma de 4 N e a outra de 3 N, somadas resultam em uma força de 5 N, e não em uma força de 7 N. Forças não são as únicas quantidades que seguem a lei do paralelogramo para adição. Como você verá mais adiante, *deslocamentos*, *velocidades*, *acelerações* e *quantidades de movimento* são outros exemplos de quantidades físicas que têm intensidade, direção e sentido e que são somadas de acordo com a lei do paralelogramo. Todas essas quantidades podem ser representadas matematicamente por *vetores*, enquanto aquelas quantidades físicas que têm intensidade mas não direção, tais como *volume*, *massa* ou *energia*, são representadas por números simples ou *escalares*.

Vetores são definidos como *expressões matemáticas que têm intensidade, direção e sentido, que se somam de acordo com a lei do paralelogramo*. Vetores são representados por setas nas ilustrações e serão distinguidos dos escalares neste texto pelo uso de negrito (\mathbf{P}). Na escrita a mão, um vetor pode ser expresso pelo desenho de uma pequena seta acima da letra usada para representá-lo (\vec{P}) ou sublinhando-se essa letra (\underline{P}). A intensidade do vetor define o comprimento da seta usada para representá-lo. Neste texto, a fonte em itálico será usada para denotar a intensidade de um vetor. Assim, a intensidade de um vetor \mathbf{P} será representada por P .

Um vetor usado para representar uma força que atua sobre uma dada partícula tem um ponto de aplicação bem definido, a saber, a partícula propriamente dita. Diz-se que tal vetor é *fixo* e não pode ser deslocado sem que se modifiquem as condições do problema. Outras quantidades físicas, entretanto, como momentos e binários (ver Cap. 3), são representadas por vetores que podem se mover livremente no espaço; esses vetores são denominados vetores *livres*. Ainda outras quantidades,

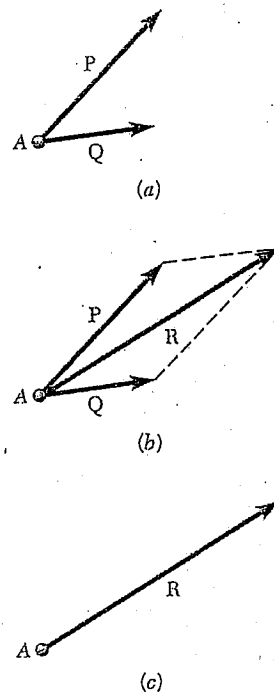


Fig. 2.2

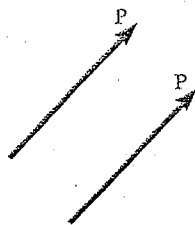


Fig. 2.4



Fig. 2.5

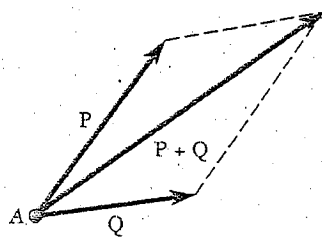


Fig. 2.6

tais como forças atuantes sobre um corpo rígido (ver Cap. 3), são representadas por vetores que podem ser deslocados, ou deslizados, ao longo de suas linhas de ação; esses são denominados vetores *deslizantes*.¹

Dois vetores que têm a mesma intensidade, a mesma direção e o mesmo sentido são considerados *iguais*, independentemente de terem ou não o mesmo ponto de aplicação (Fig. 2.4); vetores iguais podem ser representados pela mesma letra.

O *vetor oposto* de um dado vetor \mathbf{P} é definido como um vetor que tem a mesma intensidade e a mesma direção de \mathbf{P} e um sentido oposto ao de \mathbf{P} (Fig. 2.5); o oposto de um vetor \mathbf{P} é denotado por $-\mathbf{P}$. Em geral nos referimos aos vetores \mathbf{P} e $-\mathbf{P}$ como vetores *iguais e opostos*. Obviamente, temos

$$\mathbf{P} + (-\mathbf{P}) = 0$$

2.4 ADIÇÃO DE VETORES

Vimos na seção precedente que, por definição, vetores se somam de acordo com a lei do paralelogramo. Portanto, a soma de dois vetores \mathbf{P} e \mathbf{Q} é obtida aplicando-se os dois vetores no mesmo ponto A e construindo-se o paralelogramo, usando \mathbf{P} e \mathbf{Q} como dois lados do paralelogramo (Fig. 2.6). A diagonal que passa através de A representa a soma dos vetores \mathbf{P} e \mathbf{Q} , e essa soma é representada por $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$. O fato de o sinal $+$ ser usado para representar tanto as adições de vetores como as de escalares não deve causar confusão, se as quantidades vetoriais e escalares forem sempre cuidadosamente distinguidas. Portanto, devemos notar que a intensidade do vetor $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ *não* é, em geral, igual à soma $P + Q$ das intensidades dos vetores \mathbf{P} e \mathbf{Q} .

Como o paralelogramo construído com os vetores \mathbf{P} e \mathbf{Q} não depende da ordem em que \mathbf{P} e \mathbf{Q} são selecionados, concluímos que a adição de dois vetores é *comutativa*, e escrevemos

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{Q} + \mathbf{P} \quad (2.1)$$

¹ Algumas expressões têm intensidade, direção e sentido, mas não se somam de acordo com a lei do paralelogramo. Embora possam ser representadas por setas, essas expressões *não podem* ser consideradas vetores.

Um grupo dessas expressões é o de rotações finitas de um corpo rígido. Coloque um livro fechado sobre uma mesa à sua frente, de modo que fique em posição de leitura, com a capa para cima e a lombada para a esquerda. Agora gire o livro 180° em torno de um eixo paralelo à lombada (Fig. 2.3a); essa rotação pode ser representada por uma seta de comprimento igual a 180 unidades e orientada tal como mostra a figura. Pegando o livro nessa nova posição, gire-o agora 180° em torno de um eixo perpendicular à lombada (Fig. 2.3b); essa segunda rotação pode

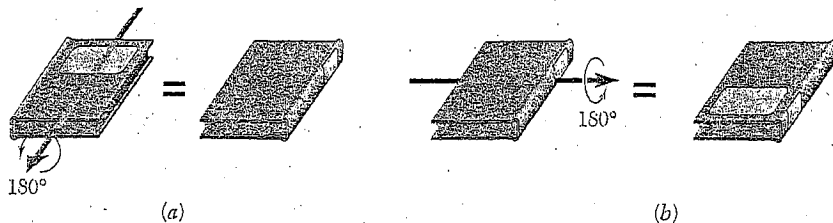


Fig. 2.3 Rotações finitas de um corpo rígido.

Da lei do paralelogramo, podemos deduzir um outro método para se determinar a soma de dois vetores. Esse método, conhecido como a *regra do triângulo*, é apresentado a seguir. Considere a Fig. 2.6, na qual a soma dos vetores P e Q foi determinada pela lei do paralelogramo. Como o lado do paralelogramo oposto a Q é igual a Q em intensidade e direção, podemos desenhar apenas metade do paralelogramo (Fig. 2.7a). A soma dos dois vetores pode, portanto, ser determinada *dispondo-se P e Q no padrão ponta-a-cauda² e, em seguida, unindo-se a cauda de P à ponta de Q* . Na Fig. 2.7b, é considerada a outra metade do paralelogramo, e obtém-se o mesmo resultado. Isso confirma o fato de que a adição de vetores é comutativa.

A *subtração* de um vetor é definida como a adição do vetor oposto correspondente. Portanto, o vetor $P - Q$ representando a diferença entre os vetores P e Q é obtido adicionando-se a P o vetor oposto $-Q$ (Fig. 2.8). Escrevemos

$$P - Q = P + (-Q) \quad (2.2)$$

Aqui novamente devemos observar que, embora seja usado o mesmo sinal para denotar a subtração vetorial e a escalar, serão evitadas confusões se forem tomados cuidados para se distinguir entre quantidades escalares e vetoriais.

Vamos agora considerar a *soma de três ou mais vetores*. A soma de três vetores P , Q e S será, *por definição*, obtida primeiro somando-se os vetores P e Q e depois adicionando-se o vetor S ao vetor $P + Q$. Escrevemos, portanto,

$$P + Q + S = (P + Q) + S \quad (2.3)$$

De modo semelhante, a soma de quatro vetores será obtida adicionando-se o quarto vetor à soma dos três primeiros. Segue-se que a soma de qualquer número de vetores pode ser obtida aplicando-se repetidamente a lei do paralelogramo a pares sucessivos de vetores até que todos os vetores dados tenham sido substituídos por um único vetor.

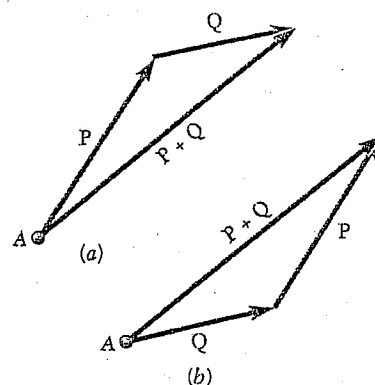


Fig. 2.7

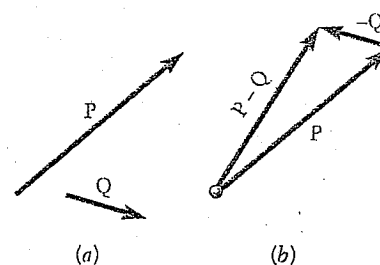
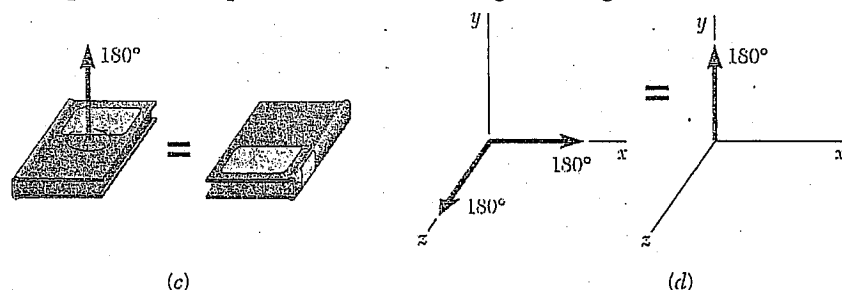


Fig. 2.8

ser representada por uma seta de 180 unidades de comprimento e orientada tal como mostra a figura. Mas o livro poderia ter sido colocado nessa posição final por meio de uma rotação única de 180° em torno de um eixo vertical (Fig. 2.3c). Concluímos que a soma das duas rotações de 180° representadas pelas setas direcionadas respectivamente ao longo dos eixos z e x é uma rotação de 180° representada por uma seta direcionada ao longo do eixo y (Fig. 2.3d). Obviamente, as rotações finitas de um corpo rígido *não* obedecem à lei do paralelogramo para adição; em conseqüência, *não podem* ser representadas por vetores.

² N.T.: Entende-se por padrão ponta-a-cauda a disposição de dois vetores de modo a unir a ponta (final) do primeiro vetor à cauda (origem) do segundo vetor.



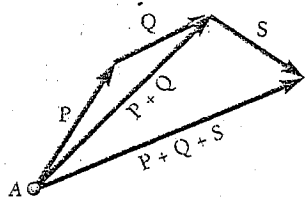


Fig. 2.9

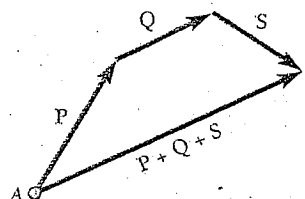


Fig. 2.10

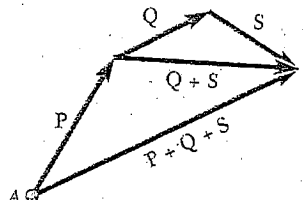


Fig. 2.11

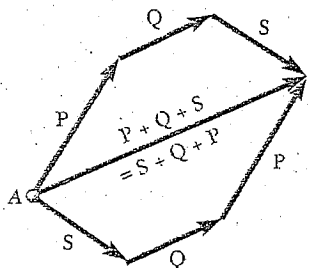


Fig. 2.12

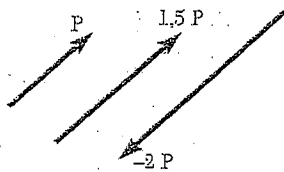


Fig. 2.13

Se os vetores dados são *coplanares*, ou seja, se eles estão contidos no mesmo plano, será fácil obter a sua soma graficamente. Nesse caso, a aplicação sucessiva da regra do triângulo é preferível do que a aplicação da lei do paralelogramo. Na Fig. 2.9 a soma de três vetores P , Q e S foi obtida dessa maneira. A regra do triângulo foi primeiro aplicada para se obter a soma $P + Q$ dos vetores P e Q ; e foi aplicada novamente para se obter a soma dos vetores $P + Q$ e S . A determinação do vetor $P + Q$, entretanto, poderia ter sido omitida e a soma dos três vetores poderia ter sido obtida diretamente, como mostra a Fig. 2.10, *dispondo-se os vetores dados no padrão ponta-a-cauda e unindo-se a cauda do primeiro vetor à ponta do último*. Esse procedimento é conhecido como *regra do polígono* para adição de vetores.

Observamos que o resultado obtido teria sido o mesmo se, como mostra a Fig. 2.11, os vetores Q e S tivessem sido substituídos pela soma $Q + S$. Portanto, podemos escrever

$$P + Q + S = (P + Q) + S = P + (Q + S) \quad (2.4)$$

o que expressa o fato de que a adição de vetores é *associativa*. Lembrando que foi mostrado que a adição de vetores, no caso de dois vetores, é comutativa, escrevemos

$$\begin{aligned} P + Q + S &= (P + Q) + S = S + (P + Q) \\ &= S + (Q + P) = S + Q + P \end{aligned} \quad (2.5)$$

Esta expressão, assim como outras que poderiam ser obtidas da mesma maneira, mostra que a ordem em que vários vetores são adicionados é irrelevante (Fig. 2.12).

Produto de um escalar por um vetor. Como é conveniente representar a soma $P + P$ por $2P$, a soma $P + P + P$ por $3P$ e, em geral, a soma de n vetores iguais P pelo produto nP , definiremos o produto nP de um inteiro positivo n por um vetor P como um vetor que tem a mesma direção e o mesmo sentido que P e a intensidade nP . Estendendo essa definição para incluir todos os escalares, e lembrando a definição de vetor oposto dada na Seção 2.3, definiremos o produto kP de um escalar k por um vetor P como um vetor que tem a mesma direção e o mesmo sentido que P (se k for positivo), ou a mesma direção e sentido oposto ao de P (se k for negativo), e uma intensidade igual ao produto de P e do valor absoluto de k (Fig. 2.13).

2.5 RESULTANTE DE VÁRIAS FORÇAS CONCORRENTES

Considere uma partícula A sobre a qual atuam várias forças coplanares, isto é, várias forças contidas em um mesmo plano (Fig. 2.14a). Como as forças consideradas aqui passam todas por A , também são denominadas *concorrentes*. Os vetores que representam as forças que atuam sobre A podem ser adicionados pela regra do polígono (Fig. 2.14b). Como o uso da regra do polígono é equivalente à aplicação repetida da lei do paralelogramo, o vetor R assim obtido representa a resultante das forças concorrentes dadas, ou seja, a força única que tem sobre a partícula A o mesmo efeito que as forças originais dadas. Como indicamos acima, a ordem em que os vetores P , Q e S , representando as forças dadas, são adicionados é irrelevante.

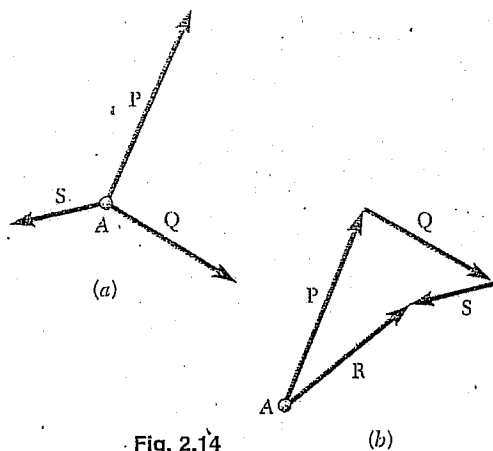


Fig. 2.14

2.6 DECOMPOSIÇÃO DOS COMPONENTES DE UMA FORÇA

Vimos que duas ou mais forças que atuam sobre uma partícula podem ser substituídas por uma força única que tem o mesmo efeito sobre a partícula. Reciprocamente, uma força única F que atua sobre uma partícula pode ser substituída por duas ou mais forças que, juntas, têm o mesmo efeito sobre a partícula. Essas forças são chamadas de *componentes* da força original F , e o processo de substituição de F por elas é denominado *decomposição dos componentes da força F* .

Obviamente, para cada força F existe um número infinito de possíveis conjuntos de componentes. Conjuntos de *dois componentes* P e Q são os mais importantes no que concerne a aplicações práticas. Mas, mesmo assim, o número de maneiras pelas quais uma dada força F pode ser decomposta em dois componentes é ilimitado (Fig. 2.15). Dois casos são de particular interesse:

1. *Um dos dois componentes, P , é conhecido.* O segundo componente, Q , é obtido aplicando-se a regra do triângulo e *unindo-se* a ponta de P à ponta de F (Fig. 2.16); a intensidade, a direção e o sentido de Q são determinados graficamente ou por trigonometria. Uma vez que Q tiver sido determinado, ambos os componentes P e Q devem ser aplicados em A .
2. *A linha de ação de cada componente é conhecida.* A intensidade e o sentido dos componentes são obtidos aplicando-se a lei do paralelogramo e traçando-se retas, a partir da ponta de F , paralelas às linhas de ação dadas (Fig. 2.17). Esse processo conduz a dois componentes bem definidos, P e Q , que podem ser determinados graficamente ou calculados trigonometricamente aplicando-se a lei dos senos.

Muitos outros casos podem ser encontrados; por exemplo, a direção de um componente pode ser conhecida, enquanto se deseja que a intensidade do outro componente seja tão pequena quanto possível (ver Problema Resolvido 2.2). Em todos os casos, o triângulo ou paralelogramo adequado que satisfaz as condições dadas é desenhado.

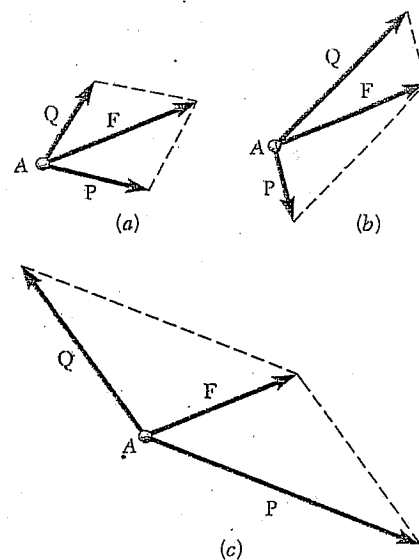


Fig. 2.15

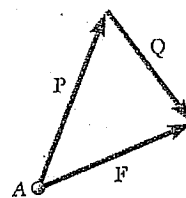


Fig. 2.16

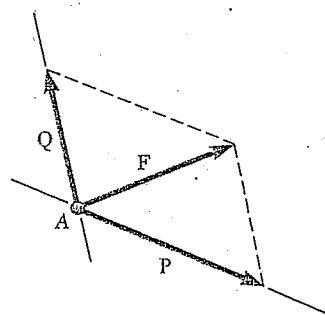
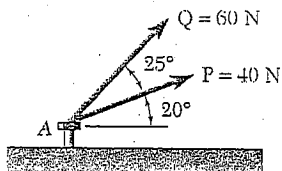


Fig. 2.17



PROBLEMA RESOLVIDO 2.1

As duas forças **P** e **Q** atuam sobre um parafuso **A**. Determine sua resultante.

SOLUÇÃO

Solução gráfica. Um paralelogramo com lados iguais a **P** e **Q** é desenhado em escala. A intensidade e o ângulo que define a direção da resultante são medidos e os valores encontrados são

$$R = 98 \text{ N} \quad \alpha = 35^\circ \quad \mathbf{R = 98 \text{ N} \angle 35^\circ} \quad \blacktriangleleft$$

Pode-se usar também a regra do triângulo. As forças **P** e **Q** são desenhadas no padrão ponta-a-cauda. Novamente a intensidade e o ângulo que define a direção da resultante são medidos.

$$R = 98 \text{ N} \quad \alpha = 35^\circ \quad \mathbf{R = 98 \text{ N} \angle 35^\circ} \quad \blacktriangleleft$$

Solução trigonométrica. A regra do triângulo é usada novamente; dois lados e o ângulo incluso são conhecidos. Aplicamos a lei dos co-senos.

$$\begin{aligned} R^2 &= P^2 + Q^2 - 2PQ \cos B \\ R^2 &= (40 \text{ N})^2 + (60 \text{ N})^2 - 2(40 \text{ N})(60 \text{ N}) \cos 155^\circ \\ R &= 97,73 \text{ N} \end{aligned}$$

Agora, aplicando a lei dos senos, escrevemos

$$\frac{\sin A}{Q} = \frac{\sin B}{R} \quad \frac{\sin A}{60 \text{ N}} = \frac{\sin 155^\circ}{97,73 \text{ N}} \quad (1)$$

Resolvendo a Eq. (1) para $\sin A$, obtemos

$$\sin A = \frac{(60 \text{ N}) \sin 155^\circ}{97,73 \text{ N}}$$

Usando uma calculadora, primeiro calculamos o quociente, em seguida seu arco seno, e obtemos

$$A = 15,04^\circ \quad \alpha = 20^\circ + A = 35,04^\circ$$

Usamos 3 algarismos significativos para escrever a resposta (ver Seção 1.6):

$$\mathbf{R = 97,7 \text{ N} \angle 35,0^\circ} \quad \blacktriangleleft$$

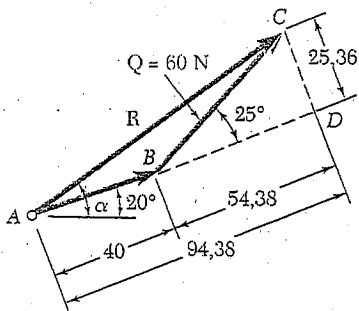
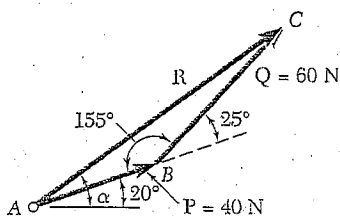
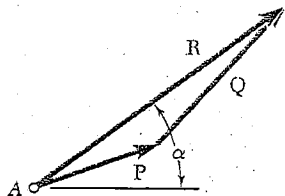
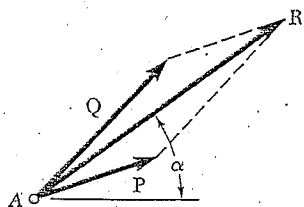
Solução trigonométrica alternativa. Construímos o triângulo retângulo **BCD** e calculamos

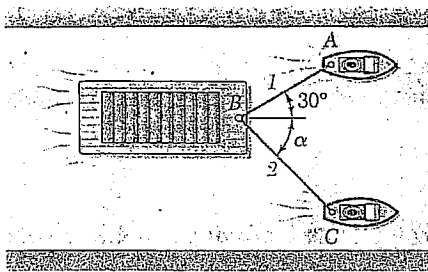
$$\begin{aligned} CD &= (60 \text{ N}) \sin 25^\circ = 25,36 \text{ N} \\ BD &= (60 \text{ N}) \cos 25^\circ = 54,38 \text{ N} \end{aligned}$$

Em seguida, usando o triângulo **ACD**, obtemos

$$\begin{aligned} \tan A &= \frac{25,36 \text{ N}}{94,38 \text{ N}} & A &= 15,04^\circ \\ R &= \frac{25,36 \text{ N}}{\sin A} & R &= 97,73 \text{ N} \end{aligned}$$

Novamente, $\alpha = 20^\circ + A = 35,04^\circ$ $\mathbf{R = 97,7 \text{ N} \angle 35,0^\circ}$ \blacktriangleleft



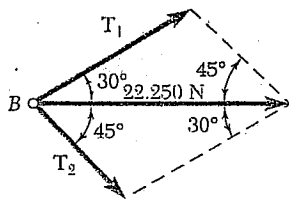


PROBLEMA RESOLVIDO 2.2

Uma barcaça é puxada por dois rebocadores. Se a resultante das forças exercidas pelos rebocadores é uma força de 22.250 N dirigida ao longo do eixo da barcaça, determine (a) a força de tração em cada um dos cabos, sabendo que $\alpha = 45^\circ$, (b) o valor de α para o qual a tração no cabo 2 é mínima.

SOLUÇÃO

a. Tração para $\alpha = 45^\circ$. *Solução gráfica.* Aplica-se a lei do paralelogramo; a diagonal (resultante) é conhecida, igual a 22.250 N e está dirigida para a direita. Os lados são desenhados paralelos aos cabos. Se o desenho for feito em escala, medimos

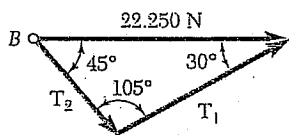


$$T_1 = 16.200 \text{ N}$$

$$T_2 = 11.500 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

Solução trigonométrica. Pode-se aplicar a regra do triângulo. Notamos que o triângulo mostrado representa metade do paralelogramo mostrado acima. Aplicando a lei dos senos, escrevemos

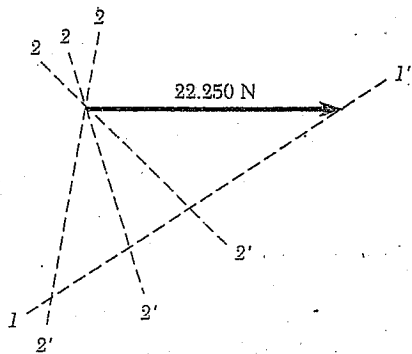
$$\frac{T_1}{\sin 45^\circ} = \frac{T_2}{\sin 30^\circ} = \frac{22.250 \text{ N}}{\sin 105^\circ}$$



Com uma calculadora, primeiro calculamos e armazenamos o valor do último quociente. Multiplicando esse valor sucessivamente por $\sin 45^\circ$ e $\sin 30^\circ$, obtemos

$$T_1 = 16.288 \text{ N}$$

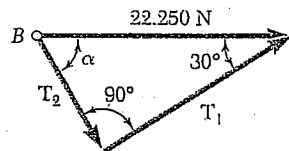
$$T_2 = 11.517 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$



b. Valor de α para T_2 mínimo. Para determinar o valor de α para o qual a tração no cabo 2 é mínima, aplica-se novamente a regra do triângulo. No croqui mostrado, a linha $l-l'$ é a direção conhecida de T_1 . Várias direções possíveis de T_2 são mostradas pelas linhas $2-2'$. Observamos que o valor mínimo de T_2 ocorre quando T_1 e T_2 são perpendiculares. O valor mínimo de T_2 é

$$T_2 = (22.250 \text{ N}) \sin 30^\circ = 11.125 \text{ N}$$

Os valores correspondentes de T_1 e α são



$$T_1 = (22.250 \text{ N}) \cos 30^\circ = 19.269 \text{ N}$$

$$\alpha = 90^\circ - 30^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ \quad \blacktriangleleft$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

As seções anteriores foram dedicadas à introdução e à aplicação da *lei do paralelogramo* para a adição de vetores.

Agora você vai ser solicitado a solucionar problemas por conta própria. Alguns podem parecer um dos problemas resolvidos; outros não. O que todos os problemas e problemas resolvidos nesta seção têm em comum é que eles podem ser solucionados pela aplicação direta da lei do paralelogramo.

Sua solução para um dado problema deve consistir nos seguintes passos:

1. Identifique quais das forças são as forças aplicadas e qual é a resultante. Frequentemente é útil escrever a equação vetorial que mostra como as forças estão relacionadas. Por exemplo, no Problema Resolvido 2.1 teríamos

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}$$

Você deve ter em mente essa relação enquanto formula a próxima parte da sua solução.

2. Desenhe um paralelogramo tendo as forças aplicadas como dois lados adjacentes e a resultante como a diagonal incluída (Fig. 2.2). Como alternativa, você pode usar a *regra do triângulo*, com as forças aplicadas desenhadas no padrão ponta-a-cauda e com a resultante se estendendo da cauda do primeiro vetor à ponta do segundo (Fig. 2.7).

3. Indique todas as dimensões. Usando um dos triângulos do paralelogramo ou o triângulo construído de acordo com a regra do triângulo, indique todas as dimensões – sejam lados ou ângulos – e determine as dimensões desconhecidas, seja graficamente ou por trigonometria. Se você usar trigonometria, lembre-se de que, se dois lados e o ângulo incluído forem conhecidos [Problema Resolvido 2.1], a lei de co-senos deve ser aplicada primeiro; e de que, se um lado e todos os ângulos forem conhecidos [Problema Resolvido 2.2], a lei de senos deve ser aplicada primeiro.

Como é evidente pelas figuras da Seção 2.6, os dois componentes de uma força não precisam ser perpendiculares. Por isso, quando solicitado a decompor uma força em dois componentes, é essencial que você alinhe os dois lados adjacentes do seu paralelogramo com as linhas de ação especificadas dos componentes.

Se você teve contato anterior com a Mecânica, pode se sentir tentado a ignorar as técnicas de solução dessa lição em favor da decomposição das forças em componentes retangulares. Apesar de esse último método ser importante – e, por isso, será considerado na próxima seção –, o uso da lei do paralelogramo simplifica a solução de muitos problemas e deve ser dominado completamente neste momento.

PROBLEMAS

2.1 Duas forças são aplicadas à cabeça de um parafuso preso em uma viga. Determine graficamente a intensidade, a direção e o sentido de sua resultante usando (a) a lei do paralelogramo, (b) a regra do triângulo.

2.2 Os cabos AB e AD ajudam a suportar o poste AC . Sabendo que a tração é 500 N em AB e 160 N em AD , determine graficamente a intensidade, a direção e o sentido da resultante das forças exercidas pelos cabos em A usando (a) a lei do paralelogramo e (b) a regra do triângulo.

2.3 Duas forças P e Q são aplicadas no ponto A de um suporte tipo gancho, como mostra a figura. Sabendo que $P = 66\text{ N}$ e $Q = 110\text{ N}$, determine graficamente a intensidade, a direção e o sentido da resultante usando (a) a lei do paralelogramo, (b) a regra do triângulo.

2.4 Duas forças P e Q são aplicadas no ponto A de um suporte tipo gancho, como mostra a figura. Sabendo que $P = 198\text{ N}$ e $Q = 66\text{ N}$, determine graficamente a intensidade, a direção e o sentido da resultante usando (a) a lei do paralelogramo, (b) a regra do triângulo.

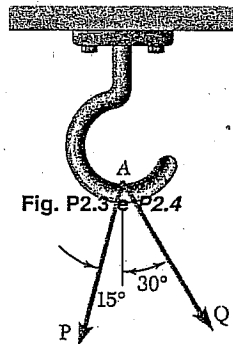


Fig. P2.3 e P2.4

2.5 Duas hastas de controle são conectadas à alavanca AB em A . Usando trigonometria e sabendo que a força na haste da esquerda é $F_1 = 120\text{ N}$, determine (a) a força F_2 requerida na haste da direita para que a resultante R das forças exercidas pelas hastas na alavanca seja vertical, e (b) a intensidade correspondente de R .

2.6 Duas hastas de controle são conectadas à alavanca AB em A . Usando trigonometria e sabendo que a força na haste da direita é $F_2 = 80\text{ N}$, determine (a) a força F_1 requerida na haste da esquerda para que a resultante R das forças exercidas pelas hastas na alavanca seja vertical, e (b) a intensidade correspondente de R .

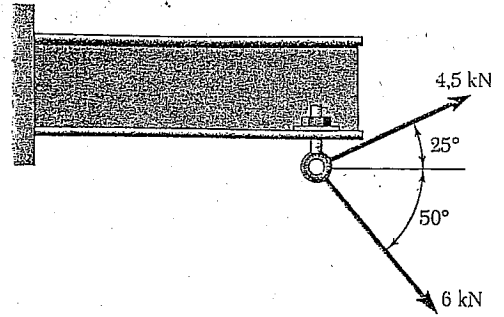


Fig. P2.1

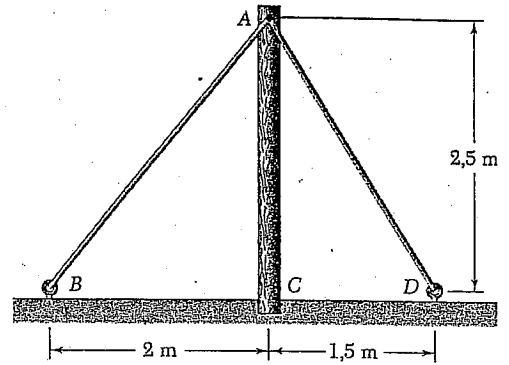


Fig. P2.2

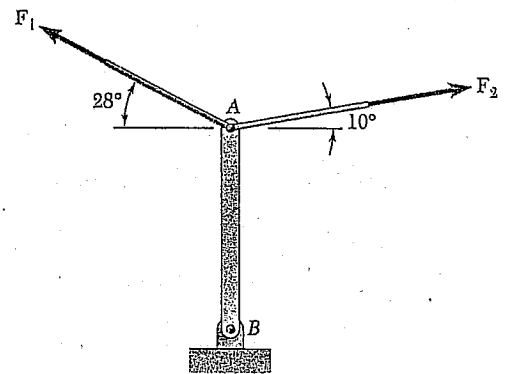


Fig. P2.5 e P2.6

* Respostas a todos os problemas escritos em fonte normal (tal como 2.1) são dadas no final do livro. Respostas a problemas cujo número é escrito em itálico (tal como 2.4) não são dadas.

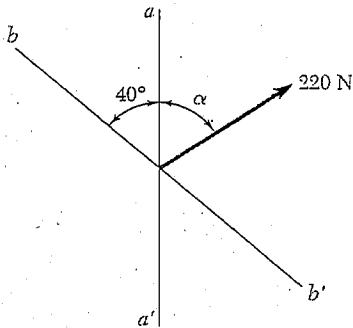


Fig. P2.7 e P2.8

2.7 A força de 220 N deve ser decomposta em componentes ao longo das linhas $a-a'$ e $b-b'$. (a) Usando trigonometria, determine o ângulo α sabendo que o componente ao longo de $a-a'$ é 154 N. (b) Qual é o correspondente valor do componente ao longo de $b-b'$?

2.8 A força de 220 N deve ser decomposta em componentes ao longo das linhas $a-a'$ e $b-b'$. (a) Usando trigonometria, determine o ângulo α sabendo que o componente ao longo de $b-b'$ é 132 N. (b) Qual é o valor correspondente do componente ao longo de $a-a'$?

2.9 Para estabilizar uma placa de sinalização enquanto é abaixada, dois cabos são conectados a essa placa em A. Usando trigonometria e sabendo que $\alpha = 25^\circ$, determine (a) a intensidade requerida da força P se a resultante R das duas forças aplicadas em A for vertical, e (b) a correspondente intensidade de R .

2.10 Para estabilizar uma placa de sinalização enquanto é abaixada, dois cabos são conectados a essa placa em A. Usando trigonometria e sabendo que a intensidade da força P é 300 N, determine (a) o ângulo requerido α se a resultante R das duas forças aplicadas em A for vertical, e (b) a correspondente intensidade de R .

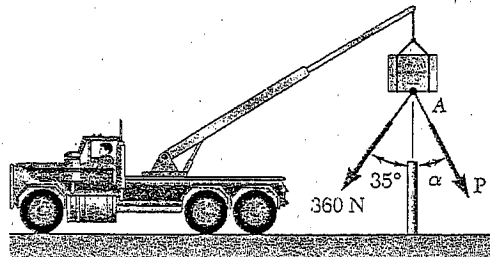


Fig. P2.9 e P2.10

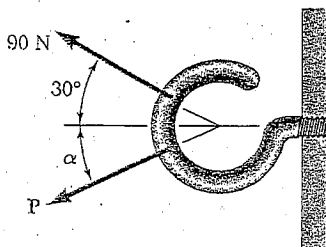


Fig. P2.11

2.11 Duas forças são aplicadas, como mostra a figura, a um suporte tipo gancho. Usando trigonometria e sabendo que a intensidade de P é 63 N, determine (a) o ângulo requerido α se a resultante R das duas forças aplicadas no suporte for horizontal, e (b) a correspondente intensidade de R .

2.12 Para o suporte tipo gancho do Problema 2.3, usando trigonometria e sabendo que a intensidade de P é 110 N, determine (a) a intensidade requerida da força Q se a resultante R das duas forças aplicadas em A for vertical, e (b) a correspondente intensidade de R .

2.13 Para o suporte tipo gancho do Problema 2.11, determine, usando trigonometria, (a) a intensidade e a direção da menor força P para a qual a resultante R das duas forças aplicadas no suporte é horizontal, e (b) a correspondente intensidade de R .

2.14 Como mostra a Fig. P2.9, dois cabos são conectados a uma placa de sinalização em A para se estabilizar essa placa enquanto é abaixada. Usando trigonometria, determine (a) a intensidade, a direção e o sentido da menor força P para a qual a resultante R das duas forças aplicadas em A é vertical, e (b) a correspondente intensidade de R .

2.15 Para o suporte tipo gancho do Problema 2.11, determine, usando trigonometria, a intensidade, a direção e o sentido da resultante das duas forças aplicadas no suporte sabendo que $P = 45 \text{ N}$ e $\alpha = 40^\circ$.

2.16 Resolva o Problema 2.1 usando trigonometria.

2.17 Resolva o Problema 2.2 usando trigonometria.

2.18 Resolva o Problema 2.3 usando trigonometria.

2.19 Dois elementos estruturais A e B são parafusados a um suporte, como mostra a figura. Sabendo que ambos os elementos estão em compressão e que a força é 30 kN no elemento A e 20 kN no elemento B, determine, usando trigonometria, a intensidade, a direção e o sentido da resultante das forças aplicadas ao suporte pelos elementos A e B.

2.20 Dois elementos estruturais A e B são parafusados a um suporte, como mostra a figura. Sabendo que ambos os elementos estão em compressão e que a força é 20 kN no elemento A e 30 kN no elemento B, determine, usando trigonometria, a intensidade, a direção e o sentido da resultante das forças aplicadas ao suporte pelos elementos A e B.

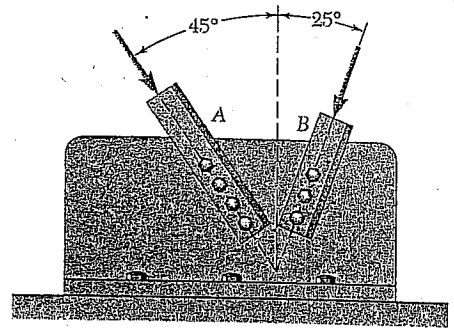


Fig. P2.19 e P2.20

2.7 COMPONENTES RETANGULARES DE UMA FORÇA. VETORES UNITÁRIOS³

Em muitos problemas será desejável decompor uma força em dois componentes que são perpendiculares entre si. Na Fig. 2.18, a força F foi decomposta em um componente F_x ao longo do eixo x e um componente F_y ao longo do eixo y . O paralelogramo desenhado para se obterem os dois componentes é um *retângulo*, e F_x e F_y são chamados de *componentes retangulares*.

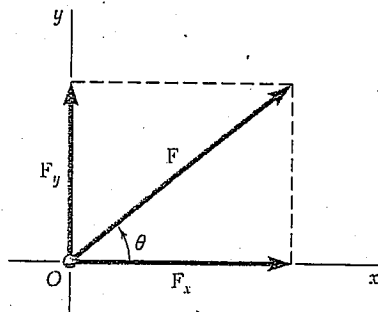


Fig. 2.18

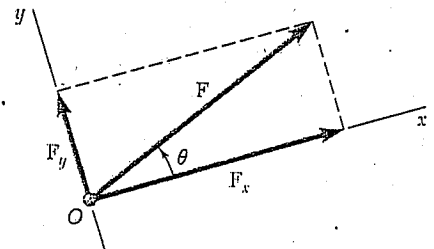


Fig. 2.19

Os eixos x e y são, geralmente escolhidos na horizontal e na vertical, respectivamente, como na Fig. 2.18; podem, entretanto, ser escolhidos em duas direções perpendiculares quaisquer, como mostra a Fig. 2.19. Na determinação dos componentes retangulares de uma força, o estudante deve pensar nas linhas de construção do gráfico representadas nas Figs. 2.18 e 2.19 como sendo *paralelas* aos eixos x e y , em vez de *perpendiculares* a esses eixos. Essa prática vai ajudar a evitar erros na determinação de componentes *oblíquos*, como na Seção 2.6.

³ As propriedades estabelecidas nas Seções 2.7 e 2.8 podem ser facilmente estendidas a componentes retangulares de qualquer quantidade vetorial.

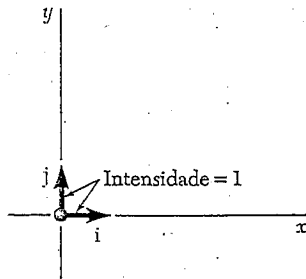


Fig. 2.20

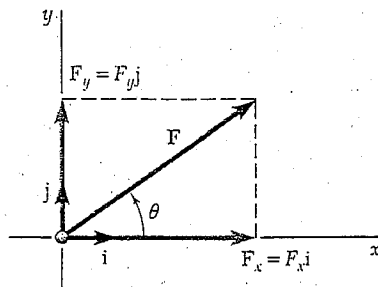


Fig. 2.21

Dois vetores de intensidade unitária, dirigidos respectivamente ao longo dos eixos positivos x e y , serão introduzidos neste ponto. Esses vetores são denominados *vetores unitários* e são representados por i e j , respectivamente (Fig. 2.20). Lembrando a definição do produto de um escalar por um vetor dada na Seção 2.4, notamos que os componentes retangulares F_x e F_y da força F podem ser obtidos multiplicando-se respectivamente os vetores unitários i e j pelos escalares apropriados (Fig. 2.21). Escrevemos

$$F_x = F_x i \quad F_y = F_y j \quad (2.6)$$

e

$$F = F_x i + F_y j \quad (2.7)$$

Embora os escalares F_x e F_y possam ser positivos ou negativos, dependendo do sentido de F_x e de F_y , seus valores absolutos são respectivamente iguais às intensidades das forças componentes F_x e F_y . Os escalares F_x e F_y são denominados *componentes escalares* da força F , enquanto as verdadeiras forças componentes F_x e F_y devem receber a denominação *componentes vetoriais* de F . Entretanto, quando não houver possibilidade de confusão, pode-se referir tanto a componentes vetoriais quanto a componentes escalares de F simplesmente como *componentes* de F . Notamos que o componente escalar F_x é positivo quando o componente vetorial F_x tiver o mesmo sentido que o vetor unitário i (ou seja, o mesmo sentido que o eixo x positivo) e é negativo quando F_x tiver sentido oposto. Pode-se chegar a uma conclusão semelhante com relação ao sinal do componente escalar F_y .

Representando por F a intensidade da força F e por θ o ângulo entre F e o eixo x , medido no sentido anti-horário a partir do eixo x positivo (Fig. 2.21), podemos expressar os componentes escalares de F da seguinte maneira:

$$F_x = F \cos \theta \quad F_y = F \sin \theta \quad (2.8)$$

Notamos que as relações obtidas valem para qualquer valor do ângulo θ , de 0° a 360° , e que elas definem tanto o sinal quanto o valor absoluto dos componentes escalares F_x e F_y .

Exemplo 1. Uma força de 800 N é exercida no parafuso A, como mostra a Fig. 2.22a. Determine os componentes vertical e horizontal dessa força.

Para se obter o sinal correto para os componentes escalares F_x e F_y , o valor θ nas Eqs. (2.8) deve ser substituído por $180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$. Entretanto, pode ser mais prático determinar por inspeção os sinais de F_x e F_y (Fig. 2.22b) e usar as funções trigonométricas do ângulo $\alpha = 35^\circ$. Escrevemos, portanto,

$$F_x = -F \cos \alpha = -(800 \text{ N}) \cos 35^\circ = -655 \text{ N}$$

$$F_y = +F \sin \alpha = +(800 \text{ N}) \sin 35^\circ = +459 \text{ N}$$

Os componentes vetoriais de F são, então,

$$F_x = -(655 \text{ N})i \quad F_y = +(459 \text{ N})j$$

e podemos escrever F na forma

$$F = -(655 \text{ N})i + (459 \text{ N})j$$

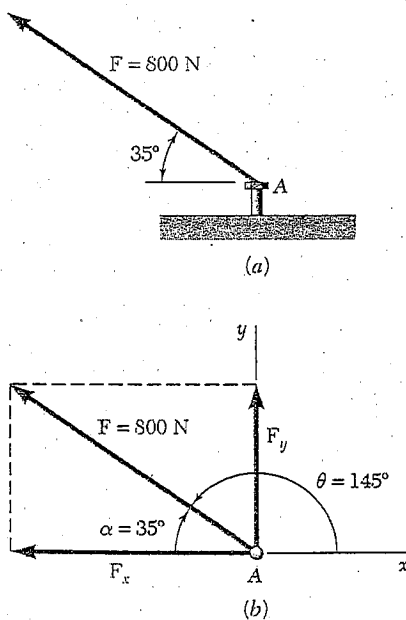


Fig. 2.22

Exemplo 2. Um homem puxa com a força de 300 N uma corda amarrada a um edifício, como mostra a Fig. 2.23a. Quais são os componentes horizontal e vertical da força exercida pela corda no ponto A?

Vê-se da Fig. 2.23b que:

$$F_x = +(300 \text{ N}) \cos \alpha \quad F_y = -(300 \text{ N}) \sin \alpha$$

Observando que $AB = 10 \text{ m}$, obtemos da Fig. 2.23a

$$\cos \alpha = \frac{8 \text{ m}}{10 \text{ m}} = \frac{4}{5} \quad \sin \alpha = \frac{6 \text{ m}}{10 \text{ m}} = \frac{3}{5}$$

Portanto, obtemos

$$F_x = +(300 \text{ N}) \frac{4}{5} = +240 \text{ N} \quad F_y = -(300 \text{ N}) \frac{3}{5} = -180 \text{ N}$$

e escrevemos

$$\mathbf{F} = (240 \text{ N})\mathbf{i} - (180 \text{ N})\mathbf{j}$$

Quando a força \mathbf{F} é definida pelos seus componentes retangulares F_x e F_y (ver Fig. 2.21), o ângulo θ definindo sua direção pode ser obtido escrevendo-se

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} \quad (2.9)$$

A intensidade F da força pode ser obtida aplicando-se o teorema de Pitágoras e escrevendo-se

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (2.10)$$

ou resolvendo-se em termos de F uma das Eqs. (2.8).

Exemplo 3. Uma força $\mathbf{F} = (3.150 \text{ N})\mathbf{i} + (6.750 \text{ N})\mathbf{j}$ é aplicada a um parafuso A. Determine a intensidade da força e o ângulo θ que ela forma com a horizontal.

Primeiro desenhamos um diagrama mostrando os dois componentes retangulares da força e o ângulo θ (Fig. 2.24). A partir da Eq. (2.9), escrevemos

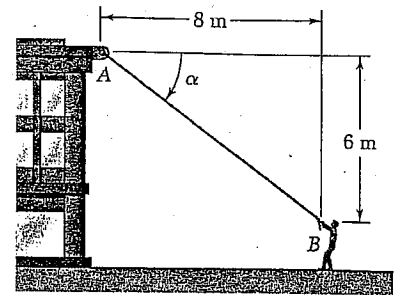
$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{6.750 \text{ N}}{3.150 \text{ N}}$$

Usando uma calculadora⁴, digitamos 6.750 N e dividimos por 3.150 N; calculando o arco tangente do quociente, obtemos $\theta = 65,0^\circ$. Resolvendo a segunda das Eqs. (2.8) para F , temos

$$F = \frac{F_y}{\sin \theta} = \frac{6.750 \text{ N}}{\sin 65^\circ} = 7.448 \text{ N}$$

O último cálculo é facilitado se o valor de F_y for armazenado na memória quando originalmente digitado; ele pode, então, ser chamado de volta para ser dividido por $\sin \theta$.

⁴ Supõe-se que a calculadora usada tenha teclas para o cálculo de funções trigonométricas e trigonométricas inversas. Algumas calculadoras também têm teclas para conversão direta de coordenadas retangulares em coordenadas polares, e vice-versa. Tais calculadoras eliminam a necessidade de se calcularem funções trigonométricas nos Exemplos 1, 2 e 3 e em problemas do mesmo tipo.



(a)

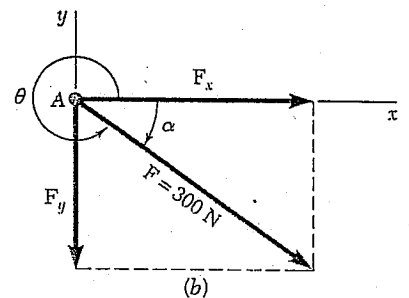


Fig. 2.23

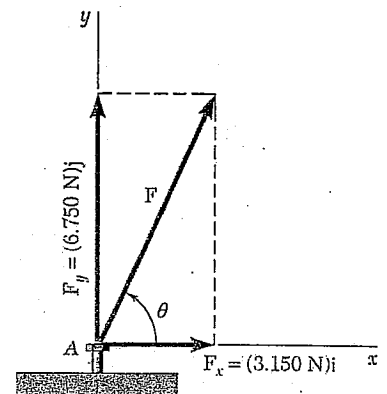


Fig. 2.24

2.8 ADIÇÃO DE FORÇAS PELA SOMA DOS COMPONENTES X E Y

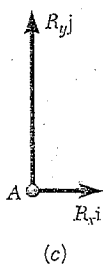
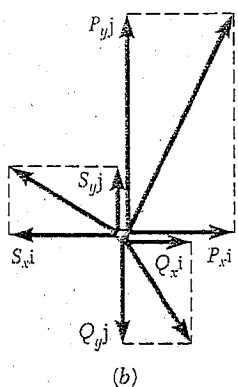
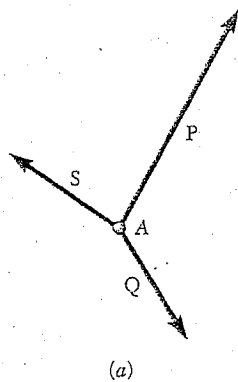


Fig. 2.25

Foi visto na Seção 2.2 que forças devem ser adicionadas de acordo com a lei do paralelogramo. A partir dessa lei, dois outros métodos, mais facilmente aplicáveis a soluções *gráficas* de problemas, foram apresentados nas Seções 2.4 e 2.5: a regra do triângulo para adição de duas forças e a regra do polígono para adição de três ou mais forças. Foi também visto que o triângulo de forças usado para se definir a resultante de duas forças poderia ser usado para se obter uma solução *trigonométrica*.

Quando três ou mais forças são adicionadas, nenhuma solução trigonométrica prática pode ser obtida do polígono de forças que define a resultante das forças. Nesse caso, uma solução *analítica* do problema pode ser obtida decompondo-se cada força em dois componentes retangulares. Considere, por exemplo, três forças **P**, **Q** e **S** atuando sobre uma partícula A (Fig. 2.25a). A resultante **R** delas é definida pela relação

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} \quad (2.11)$$

Decompondo cada força em seus componentes retangulares, escrevemos

$$\begin{aligned} R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} &= P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + S_x \mathbf{i} + S_y \mathbf{j} \\ &= (P_x + Q_x + S_x) \mathbf{i} + (P_y + Q_y + S_y) \mathbf{j} \end{aligned}$$

de onde temos que

$$R_x = P_x + Q_x + S_x \quad R_y = P_y + Q_y + S_y \quad (2.12)$$

ou, em notação reduzida,

$$R_x = \Sigma F_x \quad R_y = \Sigma F_y \quad (2.13)$$

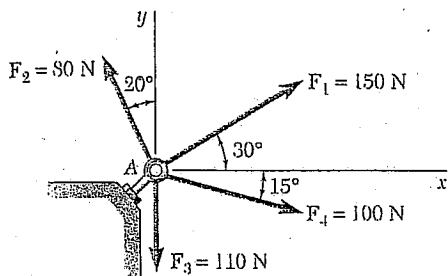
Concluimos que os componentes escalares R_x e R_y da resultante **R** de várias forças que atuem sobre uma partícula são obtidos adicionando-se algebricamente os correspondentes componentes escalares das forças dadas.⁵

Na prática, a determinação da resultante **R** é feita em três passos, como ilustra a Fig. 2.25. Primeiro as forças dadas mostradas na Fig. 2.25a são decompostas em seus componentes x e y (Fig. 2.25b). Adicionando esses componentes, obtemos os componentes x e y de **R** (Fig. 2.25c). Por fim, a resultante $\mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j}$ é determinada aplicando-se a lei do paralelogramo (Fig. 2.25d). O procedimento aqui descrito será feito mais eficientemente se os cálculos forem dispostos em uma tabela. Este é o único método analítico prático para a adição de três ou mais forças, e é também, muitas vezes, preferido em vez da solução trigonométrica no caso da adição de duas forças.

⁵ Obviamente, esse resultado também se aplica à adição de outras quantidades vetoriais, tais como velocidades, acelerações ou quantidades de movimento.

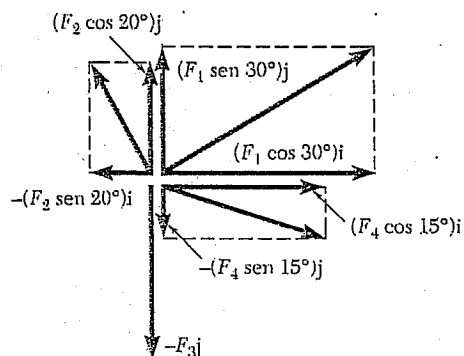
PROBLEMA RESOLVIDO 2.3

Quatro forças atuam no parafuso A, como mostrado na figura. Determine a resultante das forças no parafuso.



SOLUÇÃO

Os componentes x e y de cada força são determinados por trigonometria como mostra a figura e são inseridos na tabela abaixo. De acordo com a convenção adotada na Seção 2.7, o número escalar representando o componente da força é positivo se o componente da força tem o mesmo sentido que o eixo coordenado correspondente. Logo, os componentes x atuando para a direita e os componentes y atuando para cima são representados por números positivos.

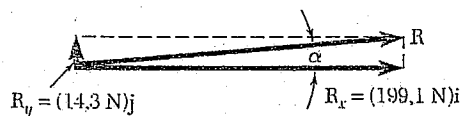


Força	Intensidade, N	Componente x , N	Componente y , N
F_1	150	+129,9	+75,0
F_2	80	-27,4	+75,2
F_3	110	0	-110,0
F_4	100	+96,6	-25,9
		$R_x = +199,1$	$R_y = +14,3$

Então, a resultante R das quatro forças é

$$R = R_x i + R_y j \quad R = (199,1 \text{ N})i + (14,3 \text{ N})j \quad \blacktriangleleft$$

A intensidade, a direção e o sentido da resultante podem agora ser determinados. A partir do triângulo mostrado, temos



$$\tan \alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{14,3 \text{ N}}{199,1 \text{ N}} \quad \alpha = 4,1^\circ$$

$$R = \frac{14,3 \text{ N}}{\sin \alpha} = 199,6 \text{ N} \quad R = 199,6 \text{ N} \angle 4,1^\circ \quad \blacktriangleleft$$

Com uma calculadora, o último cálculo pode ser facilitado se o valor de R_y for armazenado na memória quando originalmente digitado; ele pode então, depois, ser recuperado para ser dividido por $\sin \alpha$. (Ver também a nota de rodapé na página 29.)

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Você viu na seção anterior que a resultante de duas forças pode ser determinada graficamente ou a partir da trigonometria de um triângulo oblíquo.

A. Quando três ou mais forças estão envolvidas, a determinação de sua resultante \mathbf{R} é feita mais facilmente decompondo-se primeiro cada força em *componentes retangulares*: Dois casos podem ser encontrados, dependendo do modo como cada uma das forças dadas é definida.

Caso 1. A força \mathbf{F} é definida por sua intensidade F e pelo ângulo α que ela forma com o eixo x . Os componentes x e y da força podem ser obtidos multiplicando-se F por $\cos \alpha$ e $\sin \alpha$, respectivamente [Exemplo 1].

Caso 2. A força \mathbf{F} é definida por sua intensidade F e pelas coordenadas de dois pontos A e B em sua linha de ação (Fig. 2.23). O ângulo α que \mathbf{F} forma com o eixo x pode ser determinado primeiro por trigonometria. Entretanto, os componentes de \mathbf{F} também podem ser obtidos diretamente a partir das proporções entre as várias dimensões envolvidas, sem de fato determinar α [Exemplo 2].

B. Componentes retangulares da resultante. Os componentes R_x e R_y da resultante podem ser obtidos somando-se algebricamente os componentes correspondentes das forças dadas [Problema Resolvido 2.3].

Você pode expressar a resultante em *forma vetorial* usando os vetores unitários \mathbf{i} e \mathbf{j} , que são direcionados ao longo dos eixos x e y , respectivamente:

$$\mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j}$$

Como alternativa, você pode determinar a *intensidade, a direção e o sentido* da resultante solucionando o triângulo retângulo de lados R_x e R_y para R e para o ângulo que \mathbf{R} forma com o eixo x .

Nos exemplos e problemas resolvidos desta seção, os eixos x e y eram horizontal e vertical, respectivamente. Você deve lembrar, entretanto, que para alguns problemas seria mais eficiente girar os eixos para alinhá-los com uma ou mais das forças aplicadas.

PROBLEMAS

2.21 Determine os componentes x e y de cada uma das forças indicadas.

2.22 Determine os componentes x e y de cada uma das forças indicadas.

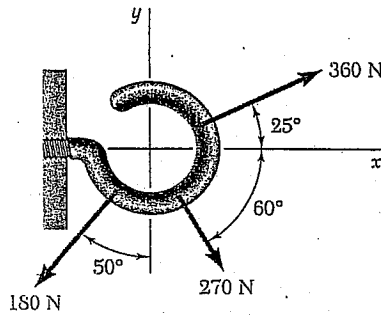


Fig. P2.22

2.23 e 2.24 Determine os componentes x e y de cada uma das forças indicadas.

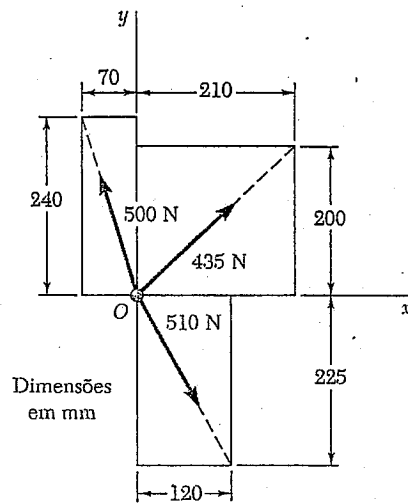


Fig. P2.24

2.25 Ao esvaziar um carrinho de mão, uma jardineira exerce em cada haste (varal) AB uma força P dirigida ao longo da linha CD . Sabendo que P deve ter um componente horizontal de 135 N, determine (a) a intensidade da força P , e (b) seu componente vertical.

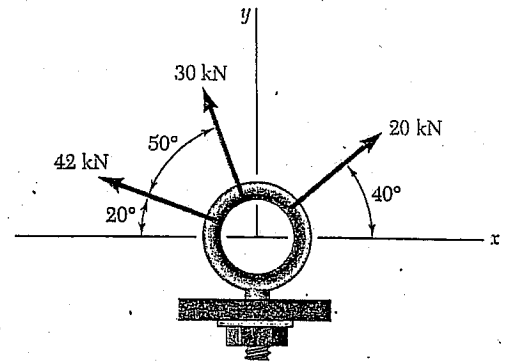


Fig. P2.21

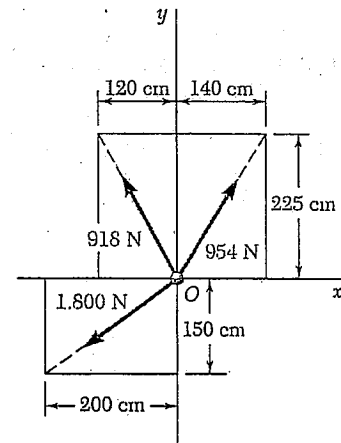


Fig. P2.23

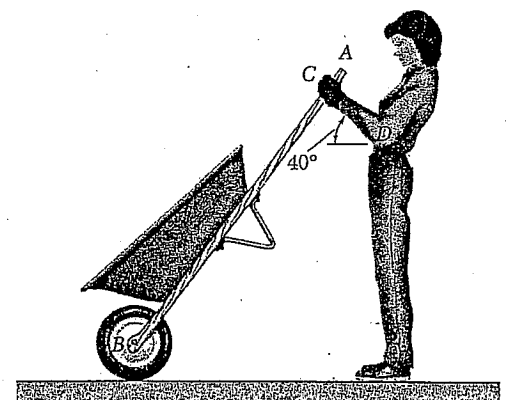


Fig. P2.25

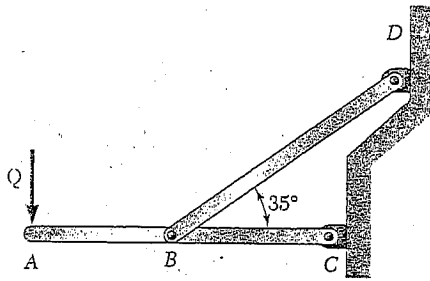


Fig. P2.26

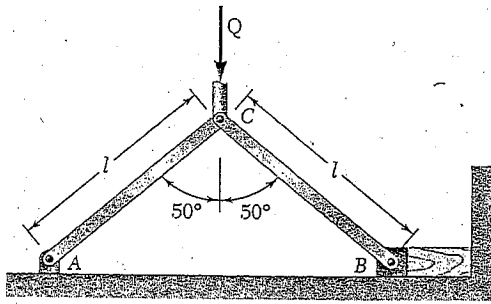


Fig. P2.27

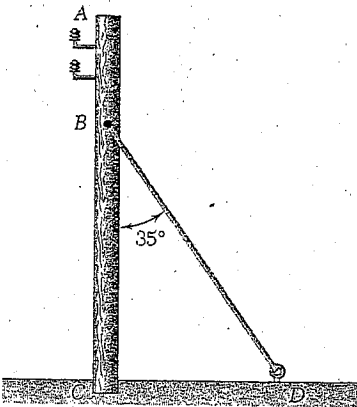


Fig. P2.29 e P2.30

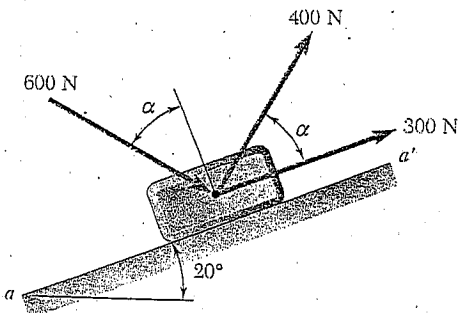


Fig. P2.35 e P2.36

2.26 O elemento BD exerce sobre o elemento ABC uma força P dirigida ao longo da linha BD . Sabendo que P deve ter um componente vertical de 960 N, determine (a) a intensidade da força P , e (b) seu componente horizontal.

2.27 O elemento CB de um torno de bancada (morsa) exerce no bloco B uma força P dirigida ao longo da linha CB . Sabendo que P deve ter um componente horizontal de 1.170 N, determine (a) a intensidade da força P , e (b) seu componente vertical.

2.28 A haste ativadora AB exerce no elemento BCD uma força P dirigida ao longo da linha AB . Sabendo que P deve ter um componente de 110 N perpendicular ao braço BC do elemento, determine (a) a intensidade da força P , e (b) seu componente ao longo da linha BC .

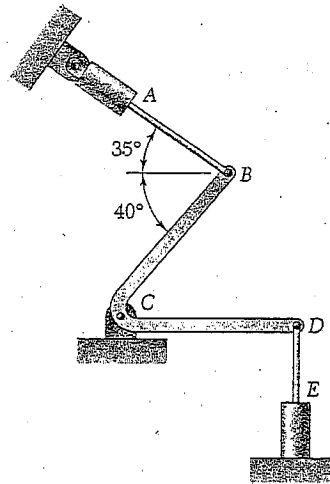


Fig. P2.28

2.29 O cabo de sustentação BD exerce no poste telefônico AC uma força P dirigida ao longo de BD . Sabendo que P tem um componente de 450 N ao longo da linha AC , determine (a) a intensidade da força P , e (b) seu componente em uma direção perpendicular a AC .

2.30 O cabo de sustentação BD exerce no poste telefônico AC uma força P dirigida ao longo de BD . Sabendo que P deve ter um componente de 200 N perpendicular ao poste AC , determine (a) a intensidade da força P , e (b) seu componente ao longo da linha AC .

2.31 Determine a resultante das três forças do Problema 2.24.

2.32 Determine a resultante das três forças do Problema 2.21.

2.33 Determine a resultante das três forças do Problema 2.22.

2.34 Determine a resultante das três forças do Problema 2.23.

2.35 Sabendo que $\alpha = 35^\circ$, determine a resultante das três forças mostradas.

2.36 Sabendo que $\alpha = 65^\circ$, determine a resultante das três forças mostradas.

2.37 Sabendo que a tração no cabo BC vale 638 N , determine a resultante das três forças exercidas no ponto B da viga AB .

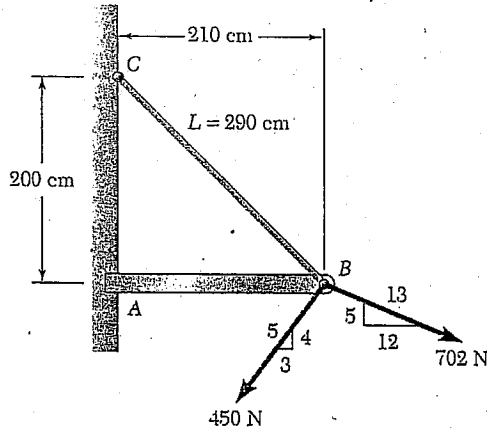


Fig. P2.37

2.38 Sabendo que $\alpha = 50^\circ$, determine a resultante das três forças mostradas.

2.39 Determine (a) o valor necessário de α para que a resultante das três forças mostradas seja vertical, e (b) a correspondente intensidade da resultante.

2.40 Para a viga do Problema 2.37, determine (a) a tração necessária no cabo BC se a resultante das três forças exercidas no ponto B for vertical, e (b) a correspondente intensidade da resultante.

2.41 A haste AB é mantida na posição mostrada por três cabos. Sabendo que as forças de tração nos cabos AC e AD são 4 kN e $5,2\text{ kN}$, respectivamente, determine (a) a tração no cabo AE se a resultante das forças de tração exercidas no ponto A da haste tiver que ser direcionada ao longo de AB , e (b) a correspondente intensidade da resultante.

2.42 Para o bloco dos Problemas 2.35 e 2.36; determine (a) o valor necessário de α para que a resultante das três forças mostradas seja paralela ao plano inclinado, e (b) a correspondente intensidade da resultante.

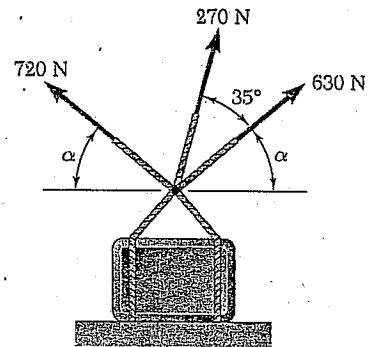


Fig. P2.38 e P2.39

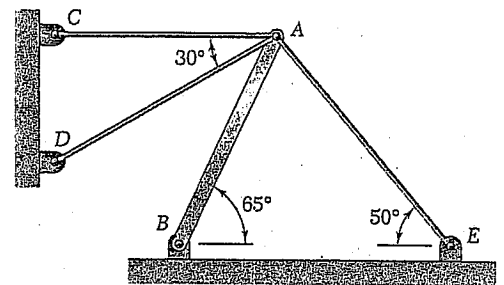


Fig. P2.41

2.9 EQUILÍBRIO DE UMA PARTÍCULA

Nas seções anteriores, discutimos os métodos para se determinar a resultante de várias forças que atuem sobre uma partícula. Embora isso não tenha ocorrido em nenhum dos problemas considerados até aqui, é perfeitamente possível que a resultante seja zero. Nesse caso, o efeito resultante das forças dadas é nulo, e diz-se que a partícula está em equilíbrio. Temos então a seguinte definição: Quando a resultante de todas as forças que atuam sobre uma partícula é igual a zero, a partícula está em equilíbrio.

Uma partícula sobre a qual se aplicam duas forças estará em equilíbrio se as duas forças tiverem a mesma intensidade e a mesma linha de ação mas sentidos opostos. A resultante dessas duas forças é, então, igual a zero. Tal caso é ilustrado na Fig. 2.26.

Outro caso de equilíbrio de uma partícula é representado na Fig. 2.27, que mostra quatro forças atuando em A . Na Fig. 2.28, a resultante das forças

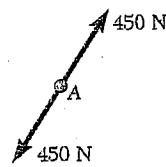


Fig. 2.26

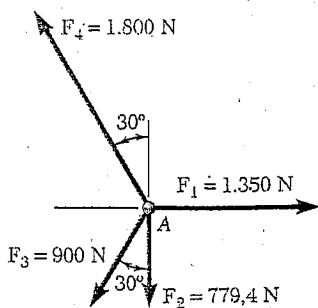


Fig. 2.27

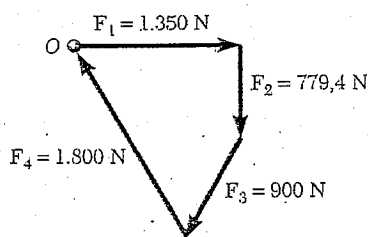


Fig. 2.28

dadas é determinada pela regra do polígono. Começando no ponto O com F_1 e dispendo as forças no padrão ponta-a-cauda, encontramos que a ponta de F_4 coincide com o ponto inicial O . Logo, a resultante R do sistema de forças dado é zero, e a partícula está em equilíbrio.

O polígono fechado desenhado na Fig. 2.28 fornece uma expressão gráfica para o equilíbrio de A . Para expressar *algebricamente* as condições de equilíbrio de uma partícula, escrevemos

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F} = 0 \quad (2.14)$$

Decompondo cada força F em componentes retangulares, temos

$$\Sigma (F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j}) = 0 \quad \text{ou} \quad (\Sigma F_x) \mathbf{i} + (\Sigma F_y) \mathbf{j} = 0$$

Concluimos que as condições necessárias e suficientes para o equilíbrio de uma partícula são

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2.15)$$

Retornando à partícula mostrada na Fig. 2.27, verificamos que as condições de equilíbrio são satisfeitas. Escrevemos

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 1.350 \text{ N} - (900 \text{ N}) \text{ sen } 30^\circ - (1.800 \text{ N}) \text{ sen } 30^\circ \\ &= 1.350 \text{ N} - 450 \text{ N} - 900 \text{ N} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= -779,4 \text{ N} - (900 \text{ N}) \text{ cos } 30^\circ + (1.800 \text{ N}) \text{ cos } 30^\circ \\ &= -779,4 \text{ N} - 779,4 \text{ N} + 1.558,8 \text{ N} = 0 \end{aligned}$$

2.10 PRIMEIRA LEI DE NEWTON DO MOVIMENTO

Na parte final do século XVII, Sir Isaac Newton formulou três leis fundamentais nas quais se baseia a ciência da mecânica. A primeira dessas leis pode ser enunciada nos seguintes termos:

Se a força resultante que atua sobre uma partícula é nula, a partícula permanecerá em repouso (se originalmente em repouso) ou se moverá a velocidade constante em linha reta (se originalmente em movimento).

Desta lei e da definição de equilíbrio dada na Seção 2.9, conclui-se que uma partícula em equilíbrio ou está em repouso ou se desloca em linha reta a velocidade constante. Na próxima seção, serão considerados vários problemas que envolvem o equilíbrio de uma partícula.

2.11 PROBLEMAS QUE ENVOLVEM O EQUILÍBRIO DE UMA PARTÍCULA. DIAGRAMAS DE CORPO LIVRE

Na prática, um problema de engenharia mecânica é derivado de uma situação física real. Um esboço mostrando as condições físicas do problema é conhecido como *diagrama espacial*.

Os métodos de análise discutidos nas seções precedentes aplicam-se a sistemas de forças que atuam sobre uma partícula. Muitos problemas que envolvem estruturas reais, entretanto, podem ser reduzidos a problemas que envolvem o equilíbrio de uma partícula. Isso é feito escolhendo-se uma partícula significativa e traçando-se um diagrama separado mostrando essa partícula e todas as forças que atuam sobre ela. Tal diagrama é denominado *diagrama de corpo livre*.

Como exemplo, considere o caixote de 75 kg mostrado no diagrama espacial da Fig. 2.29a. Esse caixote se encontrava entre dois edifícios, e agora está sendo carregado em um caminhão, que irá removê-lo. O caixote é sustentado por um cabo vertical, que está fixado em A a duas cordas que passam por roldanas presas aos edifícios em B e C. Deseja-se determinar a tração em cada uma das cordas AB e AC.

Para resolver esse problema, deve-se traçar um diagrama de corpo livre mostrando a partícula em equilíbrio. Como estamos interessados nas forças de tração nas cordas, o diagrama de corpo livre deve incluir ao menos uma dessas forças de tração ou, se possível, ambas as forças de tração. Observa-se que o ponto A é um bom corpo livre para esse problema. O diagrama de corpo livre do ponto A está representado na Fig. 2.29b. A figura mostra o ponto A e as forças exercidas sobre A pelo cabo vertical e pelas duas cordas. A força exercida pelo cabo é dirigida para baixo, e sua intensidade é igual ao peso W do caixote. Recordando a Eq. (1.4), escrevemos

$$W = mg = (75 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2) = 736 \text{ N}$$

e indicamos esse valor no diagrama de corpo livre. As forças exercidas pelas duas cordas não são conhecidas. Como elas são respectivamente iguais em intensidade às forças de tração na corda AB e na corda AC, vamos designá-las por T_{AB} e T_{AC} e desenhá-las afastando-se de A nas direções mostradas no diagrama espacial. Nenhum outro detalhe é incluído no diagrama de corpo livre.

Como o ponto A está em equilíbrio, as três forças que atuam sobre ele devem formar um triângulo fechado quando desenhadas no padrão ponta-a-cauda. Esse *triângulo de forças* foi desenhado na Fig. 2.29c. Os valores T_{AB} e T_{AC} das forças de tração nas cordas podem ser encontrados graficamente se o triângulo for desenhado em escala, ou podem ser encontrados por trigonometria. Se for escolhido o último método de solução, usamos a lei dos senos e escrevemos

$$\frac{T_{AB}}{\text{sen } 60^\circ} = \frac{T_{AC}}{\text{sen } 40^\circ} = \frac{736 \text{ N}}{\text{sen } 80^\circ}$$

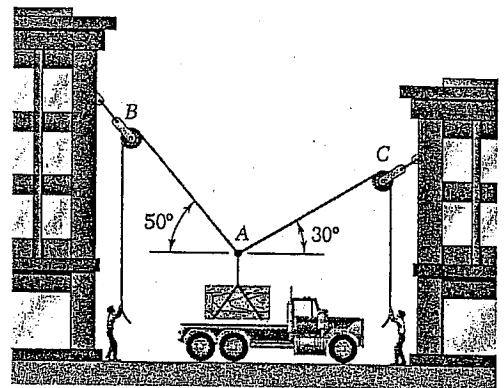
$$T_{AB} = 647 \text{ N} \quad T_{AC} = 480 \text{ N}$$

Quando uma partícula está em *equilíbrio sob três forças*, o problema pode ser resolvido desenhando-se um triângulo de forças. Quando a partícula está em *equilíbrio sob mais de três forças*, o problema pode ser resolvido graficamente desenhando-se um polígono de forças. Se desejarmos uma solução analítica, devemos resolver as *equações de equilíbrio* dadas na Seção 2.9:

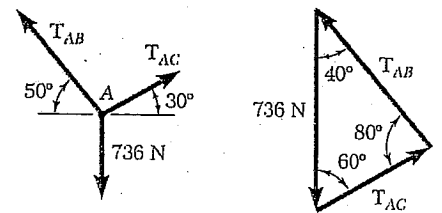
$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0$$

Essas equações podem ser resolvidas para não mais do que *duas incógnitas*; de modo idêntico, o triângulo de forças usado nesse caso de equilíbrio sob três forças pode ser resolvido para duas incógnitas.

Os tipos mais comuns de problemas são aqueles nos quais as duas incógnitas representam (1) os dois componentes (ou a intensidade e a direção) de uma única força, (2) as intensidades de duas forças, cada qual de direção conhecida. Problemas envolvendo a determinação do valor máximo ou mínimo da intensidade de uma força são também encontrados (ver Problemas 2.59 a 2.64).



(a) Diagrama espacial



(b) Diagrama de corpo livre (c) Triângulo de forças
Fig. 2.29

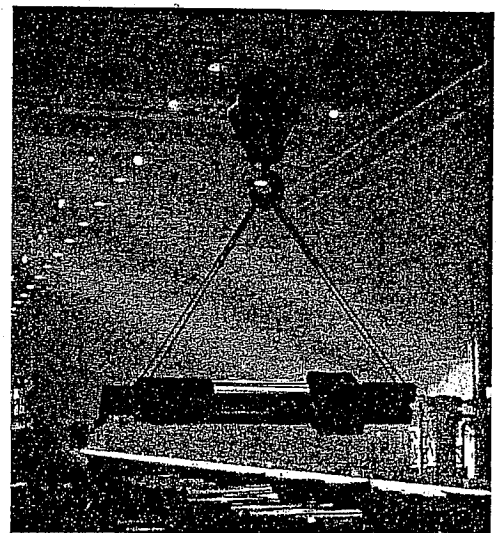
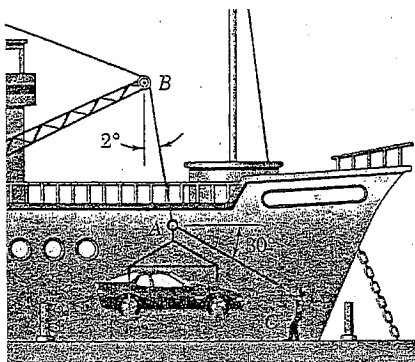


Foto 2.1 Como ilustra o exemplo acima, é possível determinar as forças de tração nos cabos que sustentam o eixo mostrado tratando o gancho como uma partícula e, então, aplicando as equações de equilíbrio às forças que atuam sobre o gancho.

PROBLEMA RESOLVIDO 2.4



Numa operação de descarregamento de um navio, um automóvel de 15.750 N é sustentado por um cabo. Uma corda é amarrada ao cabo em A e puxada para centrar o automóvel para a posição desejada. O ângulo entre o cabo e a vertical é de 2°, enquanto o ângulo entre a corda e a horizontal é de 30°. Qual é a tração na corda?

SOLUÇÃO

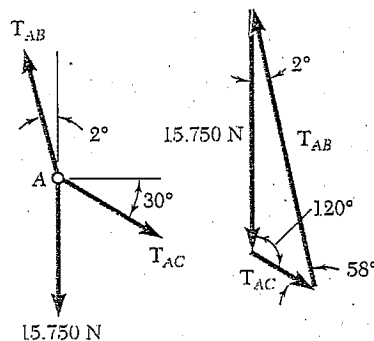
Diagrama de corpo livre. O ponto A é escolhido como um corpo livre, e desenha-se o diagrama de corpo livre completo. T_{AB} é a tração no cabo AB, e T_{AC} é a tração na corda.

Condição de equilíbrio. Como apenas três forças atuam no corpo livre, desenhamos um triângulo de forças para expressar que ele está em equilíbrio: Usando a lei dos senos, escrevemos

$$\frac{T_{AB}}{\sin 120^\circ} = \frac{T_{AC}}{\sin 2^\circ} = \frac{15.750 \text{ N}}{\sin 58^\circ}$$

Com uma calculadora, primeiro calculamos e armazenamos na memória o valor do último quociente. Multiplicando esse valor sucessivamente por $\sin 120^\circ$ e por $\sin 2^\circ$, obtemos

$$T_{AB} = 16.084 \text{ N} \quad T_{AC} = 648 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 2.5

Determine a intensidade e a direção da menor força F que irá manter em equilíbrio a embalagem mostrada. Observe que a força exercida pelos roletes na embalagem é perpendicular ao plano inclinado.

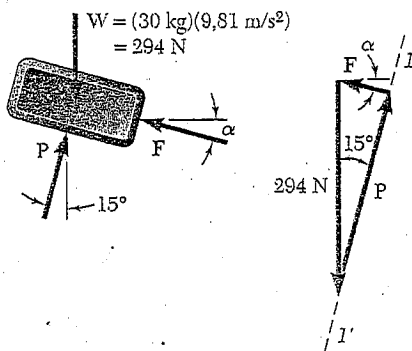
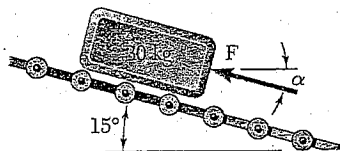
SOLUÇÃO

Diagrama de corpo livre. Escolhemos o pacote como um corpo livre, supondo que ele pode ser tratado como uma partícula. Desenhamos o diagrama de corpo livre correspondente.

Condição de equilíbrio. Como apenas três forças atuam no corpo livre, desenhamos um triângulo de forças para expressar que ele está em equilíbrio. A linha $I-I'$ representa a direção conhecida de P . Para obter o valor mínimo da força F , escolhemos a direção de F perpendicular à de P . Da geometria do triângulo obtido, encontramos

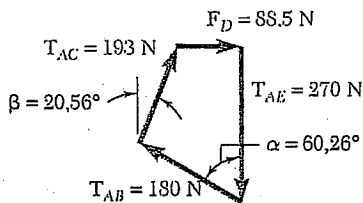
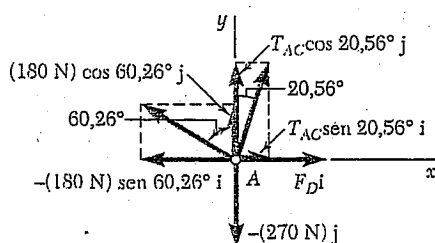
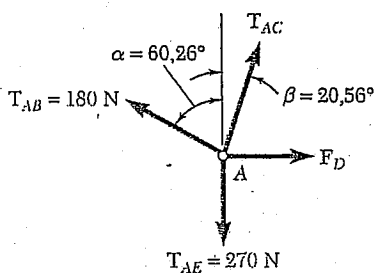
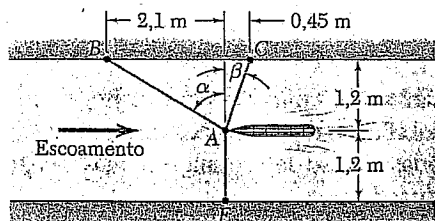
$$F = (294 \text{ N}) \sin 15^\circ = 76,1 \text{ N} \quad \alpha = 15^\circ$$

$$F = 76,1 \text{ N} \leq 15^\circ \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 2.6

Como parte do projeto de um novo barco a vela, deseja-se determinar a força de arrasto que pode ser esperada a uma dada velocidade. Para tal, é colocado um modelo do casco proposto em um canal de teste e são usados três cabos para manter sua proa na linha de centro do canal. Leituras de dinamômetro indicam que, para uma dada velocidade, a tração é de 180 N no cabo AB e de 270 N no cabo AE. Determine a força de arrasto exercida no casco e a tração no cabo AC.



SOLUÇÃO

Determinação dos ângulos. Primeiro, determinam-se os ângulos α e β que definem as direções dos cabos AB e AC. Escrevemos

$$\tan \alpha = \frac{2,1 \text{ m}}{1,2 \text{ m}} = 1,75 \quad \tan \beta = \frac{0,45 \text{ m}}{1,2 \text{ m}} = 0,375$$

$$\alpha = 60,26^\circ \quad \beta = 20,56^\circ$$

Diagrama de corpo livre. Escolhendo o casco como um corpo livre, desenhamos o diagrama de corpo livre mostrado. Este inclui as forças exercidas pelos três cabos sobre o casco, assim como a força de arrasto F_D exercida pelo escoamento.

Condição de equilíbrio. Expressamos que o casco está em equilíbrio escrevendo que a resultante de todas as forças é zero:

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{T}_{AE} + \mathbf{F}_D = 0 \quad (1)$$

Como mais de três forças estão envolvidas, decomparamos as forças em componentes x e y :

$$\mathbf{T}_{AB} = -(180 \text{ N}) \sin 60,26^\circ \mathbf{i} + (180 \text{ N}) \cos 60,26^\circ \mathbf{j}$$

$$= -(156,29 \text{ N}) \mathbf{i} + (89,29 \text{ N}) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC} \sin 20,56^\circ \mathbf{i} + T_{AC} \cos 20,56^\circ \mathbf{j}$$

$$= 0,3512 T_{AC} \mathbf{i} + 0,9363 T_{AC} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{T}_{AE} = -(270 \text{ N}) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}_D = F_D \mathbf{i}$$

Substituindo as expressões obtidas na Eq. (1) e fatorando os vetores unitários \mathbf{i} e \mathbf{j} , temos

$$(-156,29 \text{ N} + 0,3512 T_{AC} + F_D) \mathbf{i} + (89,29 \text{ N} + 0,9363 T_{AC} - 270 \text{ N}) \mathbf{j} = 0$$

Esta equação será satisfeita se e somente se os coeficientes de \mathbf{i} e \mathbf{j} forem iguais a zero. Obtemos então as duas equações de equilíbrio mostradas a seguir, que expressam, respectivamente, que a soma dos componentes x e a soma dos componentes y das forças dadas devem ser iguais a zero.

$$\Sigma F_x = 0: \quad -156,29 \text{ N} + 0,3512 T_{AC} + F_D = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma F_y = 0: \quad 89,29 \text{ N} + 0,9363 T_{AC} - 270 \text{ N} = 0 \quad (3)$$

A partir da Eq. (3) encontramos $T_{AC} = +193 \text{ N}$ e, substituindo esse valor na Eq. (2), $F_D = +88,5 \text{ N}$

Ao traçarmos o diagrama de corpo livre, pressupomos um sentido para cada força desconhecida. Um sinal positivo na resposta indica que o sentido que se pressupôs está correto. O polígono de forças completo pode ser desenhado para se verificarem os resultados.

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Quando uma partícula está em *equilíbrio*, a resultante das forças que atuam sobre a partícula tem que ser zero. Expressando esse fato no caso de uma partícula sob a ação de *forças coplanares*, obtêm-se duas relações entre essas forças. Como vimos nos problemas resolvidos anteriores, essas relações podem ser usadas para se determinarem duas incógnitas – tais como a intensidade e a direção de uma força ou as intensidades de duas forças.

Traçar um diagrama de corpo livre é o primeiro passo na solução de um problema que envolva o equilíbrio de uma partícula. Esse diagrama representa a partícula e todas as forças que atuam sobre ela. Indique no seu diagrama de corpo livre as intensidades das forças conhecidas, bem como qualquer ângulo ou dimensões que definam a direção de uma força. Qualquer intensidade ou ângulo desconhecido deve ser representado por um símbolo apropriado. Nada mais deve ser incluído no diagrama de corpo livre.

Traçar um diagrama de corpo livre claro e preciso é fundamental na solução de qualquer problema de equilíbrio. Se saltar esse passo, você pode economizar lápis e papel, mas muito provavelmente chegará a uma solução errada.

Caso 1. Se apenas três forças estão envolvidas no diagrama de corpo livre, o restante da solução é mais bem executado traçando-se essas forças no padrão ponta-a-cauda para formar um *triângulo de forças*. Esse triângulo pode ser resolvido graficamente ou por trigonometria, desde que não haja mais do que duas incógnitas [Problemas Resolvidos 2.4 e 2.5].

Caso 2. Se mais de três forças estão envolvidas, é mais vantajoso usar uma *solução analítica*. Comece selecionando eixos x e y apropriados e decomponha cada uma das forças mostradas no diagrama de corpo livre em componentes x e y . Expressando que a soma dos componentes x e a soma dos componentes y de todas as forças são ambas iguais a zero, você vai obter duas equações que podem ser resolvidas para no máximo duas incógnitas [Problema Resolvido 2.6].

É fortemente recomendado que, quando se adota uma solução analítica, as equações de equilíbrio sejam escritas na mesma forma que as Eqs. (2) e (3) do Problema Resolvido 2.6. A prática, adotada por alguns estudantes, de colocar inicialmente as incógnitas no lado esquerdo da equação e as quantidades conhecidas no lado direito pode levar a confusão na atribuição do sinal apropriado a cada termo.

Observamos que, independentemente do método empregado para resolver um problema de equilíbrio bidimensional, é possível determinar no máximo duas incógnitas. Se um problema bidimensional envolve mais de duas incógnitas, uma ou mais relações adicionais têm que ser obtidas a partir da informação contida no enunciado do problema.

Alguns dos problemas a seguir contêm pequenas roldanas. Vamos supor que essas roldanas não têm atrito, de modo que a tração na corda ou cabo que passam por uma roldana é a mesma em cada lado dessa roldana. No Cap. 4, vamos discutir por que a tração é a mesma.

PROBLEMAS

2.43 Dois cabos estão ligados em C e são carregados tal como mostra a figura. Determine a tração (a) no cabo AC e (b) no cabo BC .

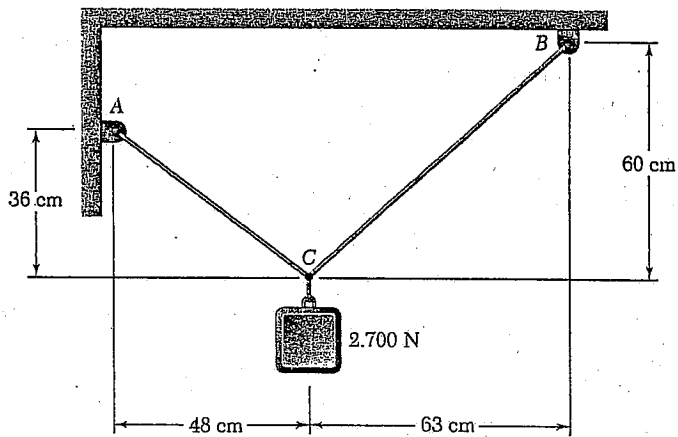


Fig. P2.43

2.44 Sabendo que $\alpha = 25^\circ$, determine a tração (a) no cabo AC e (b) na corda BC .

2.45 Sabendo que $\alpha = 50^\circ$ e que a haste AC exerce no pino C uma força dirigida ao longo da linha AC , determine (a) a intensidade dessa força e (b) a tração no cabo BC .

2.46 Dois cabos estão ligados em C e são carregados tal como mostra a figura. Sabendo que $\alpha = 30^\circ$, determine a tração (a) no cabo AC e (b) no cabo BC .

2.47 Um teleférico parou na posição indicada. Sabendo que cada cadeira pesa 300 N e que o esquiador que está na cadeira E pesa 890 N, determine o peso do esquiador da cadeira F .

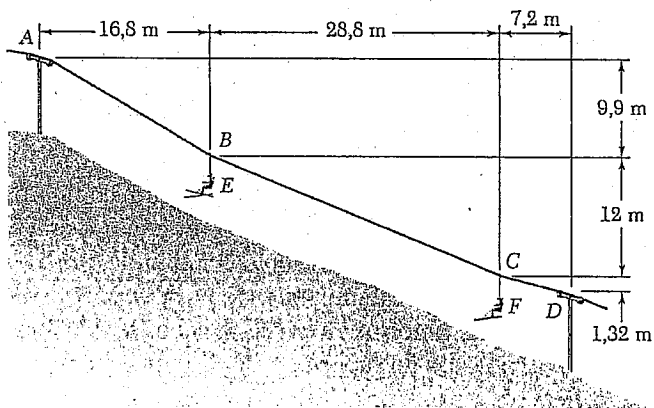


Fig. P2.47 e P2.48

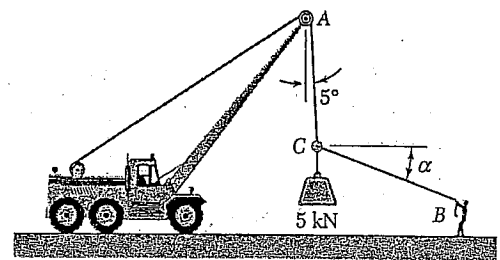


Fig. P2.44

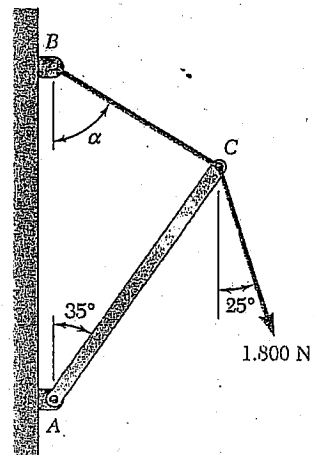


Fig. P2.45

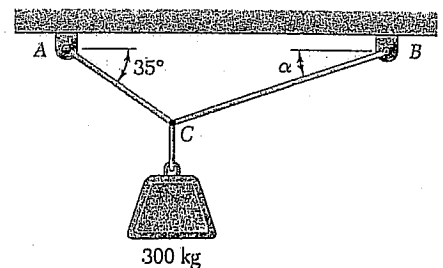


Fig. P2.46

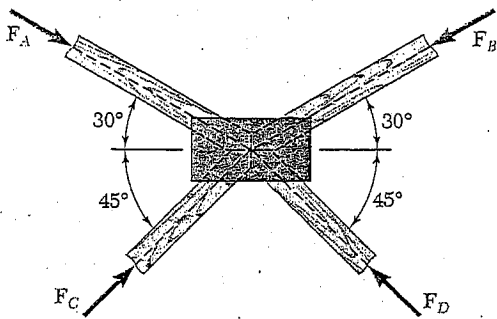


Fig. P2.49 e P2.50

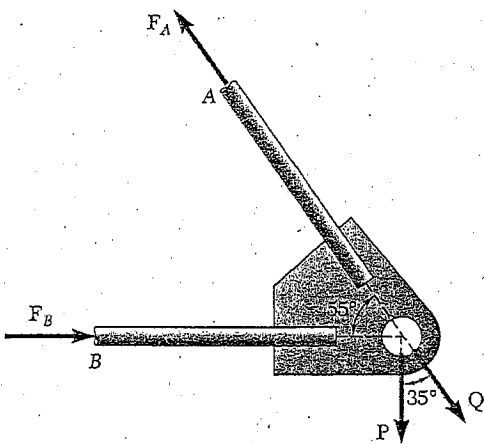


Fig. P2.51 e P2.52

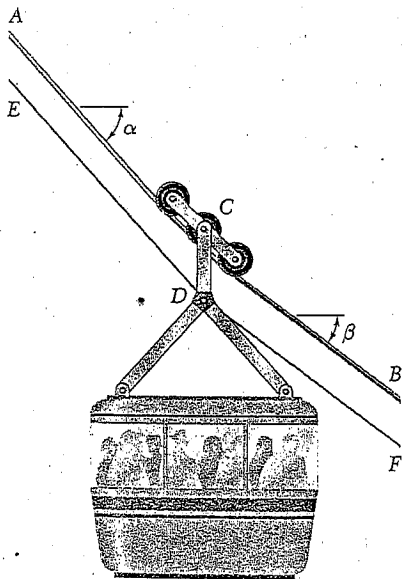


Fig. P2.55 e P2.56

2.48 Um teleférico parou na posição mostrada. Sabendo que cada cadeira pesa 300 N e que o esquiador na cadeira F pesa 800 N, determine o peso do esquiador na cadeira E .

2.49 Quatro elementos de madeira são unidos com placas conectoras metálicas e estão em equilíbrio sob a ação das quatro forças mostradas. Sabendo que $F_A = 2.295$ N e $F_B = 2.160$ N, determine as intensidades das outras duas forças.

2.50 Quatro elementos de madeira são unidos com placas conectoras metálicas e estão em equilíbrio sob a ação das quatro forças mostradas. Sabendo que $F_A = 1.890$ N e $F_C = 2.430$ N, determine as intensidades das outras duas forças.

2.51 Duas forças P e Q são aplicadas tal como mostra a figura a uma conexão de uma aeronave. Sabendo que a conexão está em equilíbrio e que $P = 1.800$ N e $Q = 2.340$ N, determine as intensidades das forças exercidas nas hastes A e B .

2.52 Duas forças P e Q são aplicadas tal como mostra a figura a uma conexão de uma aeronave. Sabendo que a conexão está em equilíbrio e que as intensidades das forças exercidas nas hastes A e B são $F_A = 2.700$ N e $F_B = 1.440$ N, determine as intensidades de P e Q .

2.53 Dois cabos ligados em C são carregados tal como mostra a figura. Sabendo que $W = 840$ N, determine a tração (a) no cabo AC e (b) no cabo BC .

2.54 Dois cabos ligados em C são carregados tal como mostra a figura. Determine a faixa dos valores de W para os quais a tração não irá exceder 1.050 N em qualquer dos cabos.

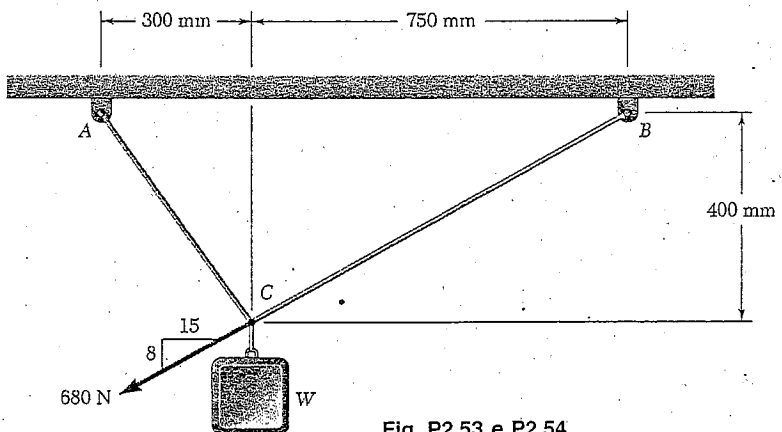


Fig. P2.53 e P2.54

2.55 A cabine de um teleférico é suspensa por um conjunto de rodas que podem rolar livremente sobre o cabo de suporte ACB e está sendo puxada a uma velocidade constante pelo cabo DE . Sabendo que $\alpha = 40^\circ$ e $\beta = 35^\circ$, que o peso combinado da cabine, seu sistema de suporte e seus passageiros é 24,8 kN, e considerando que a tração no cabo DF é desprezível, determine a tração (a) no cabo de suporte ACB e (b) no cabo de tração DE .

2.56 A cabine de um teleférico é suspensa por um conjunto de rodas que podem rolar livremente sobre o cabo de suporte ACB e que está sendo

puxado a uma velocidade constante pelo cabo DE . Sabendo que $\alpha = 42^\circ$ e $\beta = 32^\circ$, que a tração no cabo DE é 20 kN, e considerando que a tração no cabo DF é desprezível, determine (a) o peso combinado da cabine, seu sistema de suporte e seus passageiros, e (b) a tração no cabo de suporte ACB .

2.57 Um bloco de peso W é suspenso por uma corda de 500 mm de comprimento e por duas molas de comprimentos, sem deformação, de 450 mm. Sabendo que as constantes das molas são $k_{AB} = 1.500 \text{ N/m}$ e $k_{AD} = 500 \text{ N/m}$, determine (a) a tração na corda e (b) o peso do bloco.

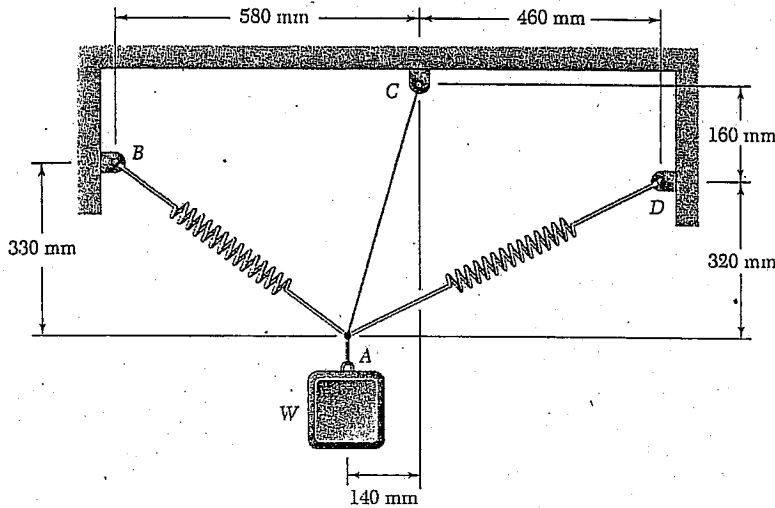


Fig. P2.57

2.58 Uma carga de peso 400 N é suspensa por uma mola e duas cordas que são presas a blocos de pesos $3W$ e W , tal como mostra a figura. Sabendo que a constante de mola é 800 N/m, determine (a) o valor de W e (b) o comprimento, sem deformação, da mola.

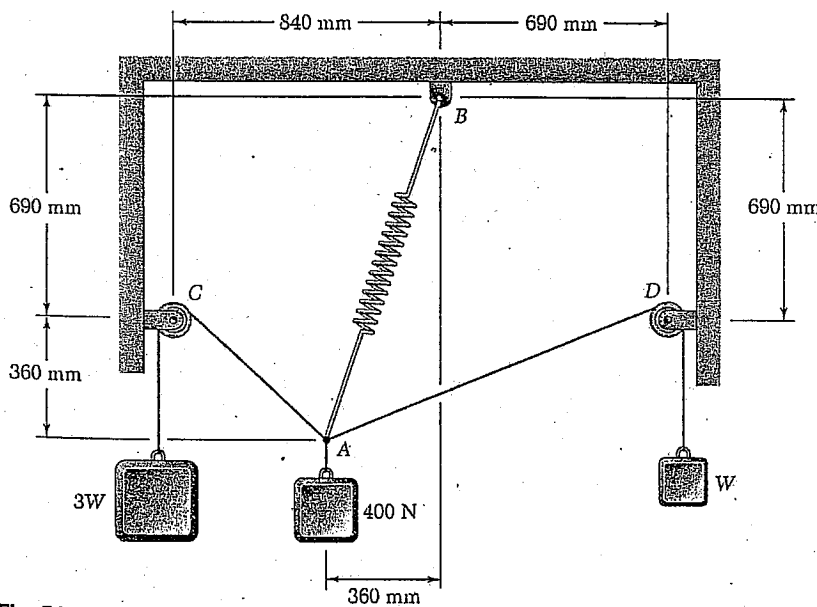


Fig. P2.58

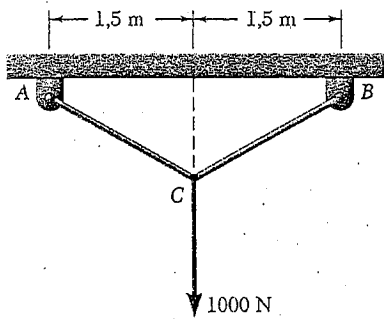


Fig. P2.60

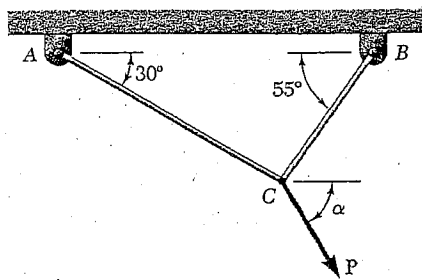


Fig. P2.61 e P2.62

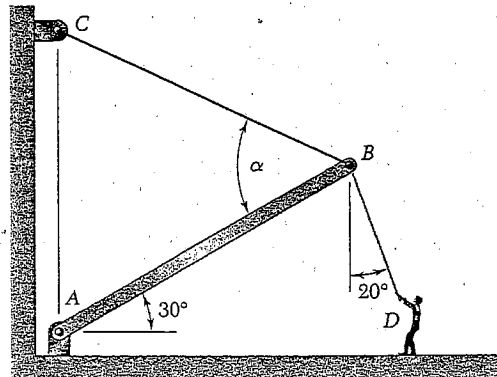


Fig. P2.64

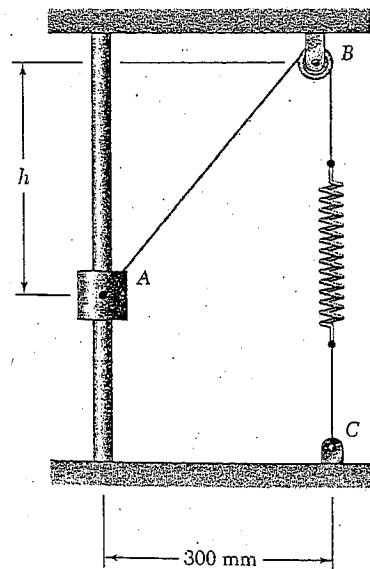


Fig. P2.65 e P2.66

2.59 Para os cabos e carregamento do Problema 2.46, determine (a) o valor de α para o qual a tração no cabo BC é a menor possível, e (b) o correspondente valor da tração.

2.60 Sabendo que as porções AC e BC do cabo ACB devem ser iguais, determine o menor comprimento de cabo que pode ser usado para suportar a carga mostrada se a tração no cabo não puder exceder 725 N.

2.61 Dois cabos ligados em C são carregados tal como mostra a figura. Sabendo que a tração máxima permissível em cada cabo é 900 N, determine (a) a intensidade da maior força P que pode ser aplicada em C e (b) o correspondente valor de α .

2.62 Dois cabos ligados em C são carregados tal como mostra a figura. Sabendo que a tração máxima permissível é 1.350 N no cabo AC e 675 N no cabo BC , determine (a) a intensidade da maior força P que pode ser aplicada em C e (b) o correspondente valor de α .

2.63 Para a estrutura e carregamento do Problema 2.45, determine (a) o valor de α para o qual a tração no cabo BC é a menor possível, e (b) o correspondente valor da tração.

2.64 A haste AB é sustentada pelo cabo BC e por uma articulação em A . Sabendo que a haste exerce no pino B uma força dirigida ao longo da haste e que a tração na corda BD é 315 N, determine (a) o valor de α para o qual a tração no cabo BC é a menor possível, (b) o correspondente valor da tração.

2.65 O cursor A mostrado na Fig. P2.65 e P2.66 pode deslizar sobre uma haste vertical sem atrito e é preso a uma mola, tal como mostra a figura. A constante da mola é 660 N/m, e a mola está indeformada quando $h = 300$ mm. Sabendo que o sistema está em equilíbrio quando $h = 400$ mm, determine o peso do cursor.

2.66 O cursor A de 40 N pode deslizar em uma haste vertical sem atrito e é preso a uma mola, como mostra a figura. A mola está indeformada quando $h = 300$ mm. Sabendo que a constante da mola é de 560 N/m, determine o valor de h para que o sistema esteja em equilíbrio.

2.67 Um caixote de 280 kg é sustentado por vários arranjos de corda-e-roldana, tal como mostra a ilustração. Determine para cada arranjo a tração na corda. (Dica: a tração na corda é a mesma em cada lado de uma roldana. Isso pode ser provado pelos métodos do Cap. 4.)

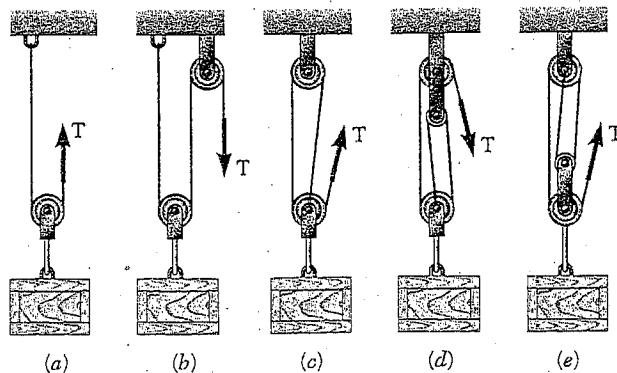


Fig. P2.67

2.68 Solucione as partes *b* e *d* do Problema 2.67 considerando que o lado livre da corda está preso ao caixote.

2.69 Um peso de 1.575 N é sustentado pelo arranjo de corda-e-roldana mostrado na figura. Sabendo que $\beta = 25^\circ$, determine a intensidade, a direção e o sentido da força **P** que deve ser exercida no lado livre da corda para se manter o equilíbrio. (Ver dica do Problema 2.67.)

2.70 Um peso de 1.575 N é sustentado pelo arranjo de corda-e-roldana mostrado na figura. Sabendo que $\alpha = 35^\circ$, determine (a) o ângulo β , e (b) a intensidade da força **P** que deve ser exercida no lado livre da corda para se manter o equilíbrio. (Ver dica do Problema 2.67.)

2.71 Uma carga **Q** é aplicada à roldana *C*, que pode rolar no cabo *ACB*. A roldana é segura na posição mostrada por um segundo cabo *CAD*, que passa pela roldana *A* e sustenta uma carga **P**. Sabendo que $P = 800$ N, determine (a) a tração no cabo *ACB*, e (b) a intensidade da carga **Q**.

2.72 Uma carga **Q** de 2.000 N é aplicada à roldana *C*, que pode rolar no cabo *ACB*. A roldana é segura na posição mostrada por um segundo cabo *CAD*, que passa pela roldana *A* e sustenta uma carga **P**. Determine (a) a tração no cabo *ACB*, e (b) a intensidade da carga **P**.

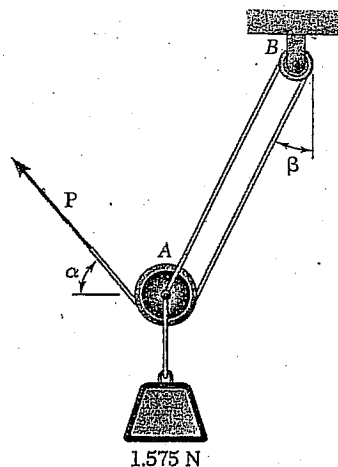


Fig. P2.69 e P2.70

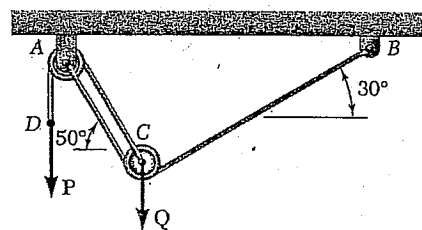


Fig. P2.71 e P2.72

FORÇAS NO ESPAÇO

2.12. COMPONENTES RETANGULARES DE UMA FORÇA NO ESPAÇO

Os problemas considerados na primeira parte deste capítulo envolveram somente duas dimensões; podem ser formulados e solucionados em um único plano. Nesta seção e nas seções restantes deste capítulo, vamos discutir problemas que envolvem as três dimensões do espaço.

Considere a força **F** atuando na origem *O* do sistema de coordenadas retangulares *x, y, z*. Para definir a direção de **F**, traçamos o plano vertical *OBAC* contendo **F** (Fig. 2.30*a*). Esse plano passa pelo eixo vertical *y*; sua orientação é definida pelo ângulo ϕ que ele forma com o plano *xy*. A direção de **F** no plano é definida pelo ângulo θ_y que **F** forma com o eixo *y*. A força **F** pode ser decomposta em um componente vertical F_y e um componente horizontal F_h ; essa operação, mostrada na Fig. 2.30*b*, é feita no plano *OBAC* de acordo com as regras desenvolvidas na primeira parte do capítulo. Os componentes escalares correspondentes são

$$F_y = F \cos \theta_y \quad F_h = F \sin \theta_y \quad (2.16)$$

Mas F_h pode ser decomposta em dois componentes retangulares F_x e F_z ao longo dos eixos *x* e *z*, respectivamente. Essa operação, mostrada na Fig. 2.30*c*, é feita no plano *xz*. Obtemos as seguintes expressões para os componentes escalares correspondentes:

$$\begin{aligned} F_x &= F_h \cos \phi = F \sin \theta_y \cos \phi \\ F_z &= F_h \sin \phi = F \sin \theta_y \sin \phi \end{aligned} \quad (2.17)$$

A força **F** dada foi então decomposta em três componentes retangulares vetoriais F_x, F_y, F_z , que estão dirigidos ao longo dos três eixos coordenados.

Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos OAB e OCD da Fig. 2.30, escrevemos

$$F^2 = (OA)^2 = (OB)^2 + (BA)^2 = F_y^2 + F_h^2$$

$$F_h^2 = (OC)^2 = (OD)^2 + (DC)^2 = F_x^2 + F_z^2$$

Eliminando F_h^2 dessas duas equações e resolvendo para F , obtemos a seguinte relação entre a intensidade de \mathbf{F} e seus componentes retangulares escalares:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (2.18)$$

A relação existente entre a força \mathbf{F} e seus três componentes F_x, F_y, F_z é mais facilmente visualizada se uma "caixa" tendo F_x, F_y, F_z como arestas for desenhada tal como mostra a Fig. 2.31. A força \mathbf{F} é então representada pela diagonal OA dessa caixa. A Fig. 2.31b mostra o triângulo retângulo OAB usado para se deduzir a primeira das expressões (2.16): $F_y = F \cos \theta_y$. Nas Figs. 2.31a e c, foram também desenhados outros dois triângulos retângulos: OAD e OAE . Vê-se que esses triângulos ocupam na caixa posições comparáveis com a do triângulo OAB . Representando por θ_x e θ_z , respectivamente, os ângulos que \mathbf{F} forma com os eixos x e z , podemos deduzir duas expressões similares a $F_y = F \cos \theta_y$. Escrevemos então

$$F_x = F \cos \theta_x \quad F_y = F \cos \theta_y \quad F_z = F \cos \theta_z \quad (2.19)$$

Os três ângulos $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ definem a direção da força \mathbf{F} ; eles são mais comumente usados para essa finalidade do que os ângulos θ_y e ϕ apresentados no início desta seção. Os co-senos de $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ são conhecidos como *co-senos diretores* da força \mathbf{F} .

Introduzindo os vetores unitários $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, dirigidos respectivamente ao longo dos eixos x, y e z (Fig. 2.32), podemos expressar \mathbf{F} na forma

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad (2.20)$$

na qual os componentes escalares F_x, F_y, F_z são definidos pelas relações (2.19).

Exemplo 1. Uma força de 500 N forma ângulos de $60^\circ, 45^\circ$ e 120° , respectivamente, com os eixos x, y e z . Encontre os componentes F_x, F_y e F_z da força.

Substituindo $F = 500$ N, $\theta_x = 60^\circ, \theta_y = 45^\circ, \theta_z = 120^\circ$ nas fórmulas (2.19), escrevemos

$$F_x = (500 \text{ N}) \cos 60^\circ = +250 \text{ N}$$

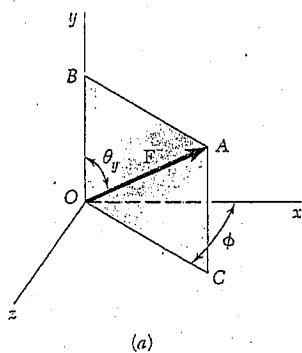
$$F_y = (500 \text{ N}) \cos 45^\circ = +354 \text{ N}$$

$$F_z = (500 \text{ N}) \cos 120^\circ = -250 \text{ N}$$

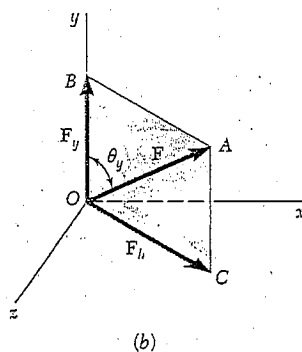
Introduzindo na Eq. (2.20) os valores obtidos para os componentes escalares de \mathbf{F} , temos

$$\mathbf{F} = (250 \text{ N})\mathbf{i} + (354 \text{ N})\mathbf{j} - (250 \text{ N})\mathbf{k}$$

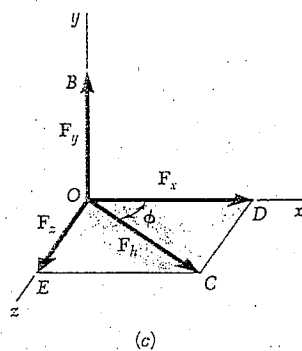
Assim como no caso de problemas bidimensionais, um sinal positivo indica que o componente tem o mesmo sentido que o eixo correspondente, e um sinal negativo indica que ele tem o sentido oposto.



(a)

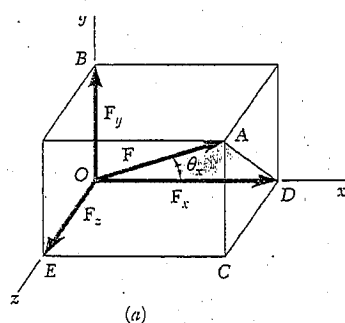


(b)



(c)

Fig. 2.30



(a)

Fig. 2.31

O ângulo que a força \mathbf{F} forma com um eixo deve ser medido a partir do lado positivo do eixo e será sempre entre 0 e 180° . Um ângulo θ_x menor que 90° (agudo) indica que \mathbf{F} (cuja origem supõe-se que seja em O) está no mesmo lado do plano yz como o eixo x positivo; $\cos \theta_x$ e F_x serão então positivos. Um ângulo θ_x maior que 90° (obtusos) indica que \mathbf{F} está no outro lado do plano yz ; $\cos \theta_x$ e F_x serão então negativos. No Exemplo 1 os ângulos θ_x e θ_y são agudos, enquanto θ_z é obtuso; conseqüentemente, F_x e F_y são positivos, enquanto F_z é negativo.

Substituindo em (2.20) as expressões obtidas de F_x, F_y, F_z em (2.19), escrevemos

$$\mathbf{F} = F(\cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k}) \quad (2.21)$$

o que mostra que a força \mathbf{F} pode ser expressa como o produto do escalar F pelo vetor

$$\lambda = \cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k} \quad (2.22)$$

Obviamente, o vetor λ é um vetor cuja intensidade é igual a 1 e cuja direção e sentido são os mesmos que os de \mathbf{F} (Fig. 2.33). O vetor λ é denominado *vetor unitário* ao longo da linha de ação de \mathbf{F} . Segue-se de (2.22) que os componentes do vetor unitário λ são respectivamente iguais aos co-senos que orientam a linha de ação de \mathbf{F} :

$$\lambda_x = \cos \theta_x \quad \lambda_y = \cos \theta_y \quad \lambda_z = \cos \theta_z \quad (2.23)$$

Deve-se observar que os valores dos três ângulos $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ não são independentes. Lembrando que a soma dos quadrados dos componentes de um vetor é igual ao quadrado da sua intensidade, escrevemos

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1$$

ou, substituindo os valores de $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ a partir de (2.23),

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1 \quad (2.24)$$

No Exemplo 1, por exemplo, quando os valores $\theta_x = 60^\circ$ e $\theta_y = 45^\circ$ foram selecionados, o valor de θ_z deve ser igual a 60° ou 120° para poder satisfazer a identidade (2.24).

Quando os componentes F_x, F_y, F_z de uma força \mathbf{F} são dados, a intensidade F da força é obtida de (2.18). Podem-se então resolver as relações (2.19) para os co-senos diretores,

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} \quad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F} \quad (2.25)$$

e determinar os ângulos $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ que caracterizam a direção de \mathbf{F} .

Exemplo 2. A força \mathbf{F} tem os componentes $F_x = 90 \text{ N}, F_y = -135 \text{ N}, F_z = 270 \text{ N}$. Determine sua intensidade F e os ângulos $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ que essa força forma com os eixos coordenados.

Da fórmula (2.18) obtemos⁶

⁶ Com uma calculadora programada para converter coordenadas retangulares em coordenadas polares, será mais expedito calcular F pelo seguinte procedimento: primeiro determine F_h a partir de seus dois componentes retangulares F_x e F_z (Fig. 2.30c), e depois determine F a partir de seus dois componentes retangulares F_h e F_y (Fig. 2.30b). A ordem em que os três componentes F_x, F_y e F_z são considerados é irrelevante.

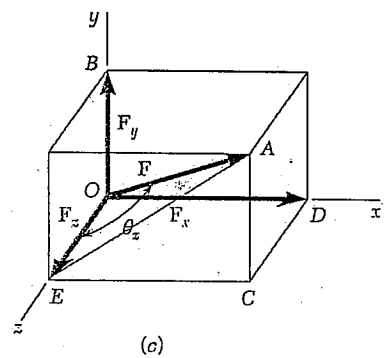
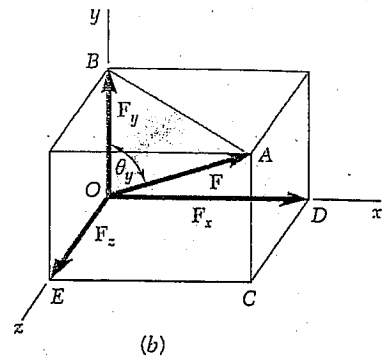


Fig. 2.31

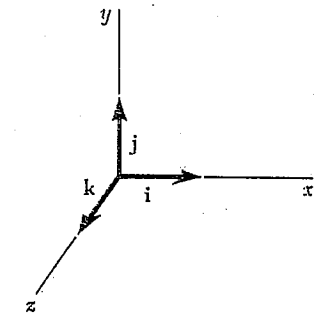


Fig. 2.32

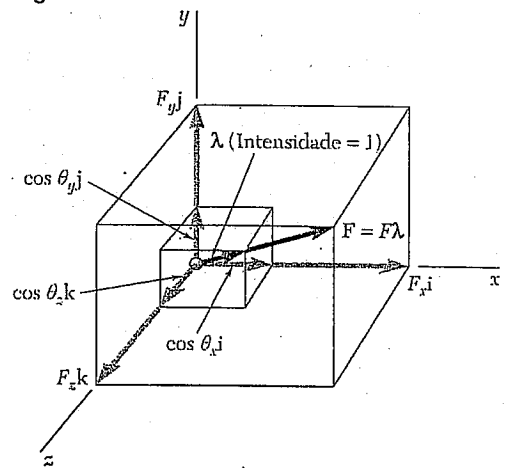


Fig. 2.33

$$\begin{aligned}
 F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \\
 &= \sqrt{(90 \text{ N})^2 + (-135 \text{ N})^2 + (270 \text{ N})^2} \\
 &= \sqrt{99.225 \text{ N}} = 315 \text{ N}
 \end{aligned}$$

Substituindo os valores dos componentes e a intensidade de \mathbf{F} nas Eqs. (2.25), escrevemos

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{90 \text{ N}}{315 \text{ N}} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{-135 \text{ N}}{315 \text{ N}} \quad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{270 \text{ N}}{315 \text{ N}}$$

Calculando sucessivamente cada quociente e seu arco co-seno, obtemos

$$\theta_x = 73,4^\circ \quad \theta_y = 115,4^\circ \quad \theta_z = 31,0^\circ$$

Esses cálculos podem ser feitos facilmente com uma calculadora.

2.13 FORÇA DEFINIDA POR SUA INTENSIDADE E POR DOIS PONTOS EM SUA LINHA DE AÇÃO

Em muitas aplicações, a direção de uma força \mathbf{F} é definida pela coordenada de dois pontos, $M(x_1, y_1, z_1)$ e $N(x_2, y_2, z_2)$, localizados em sua linha de ação (Fig. 2.34). Considere o vetor \overline{MN} ligando M e N e de

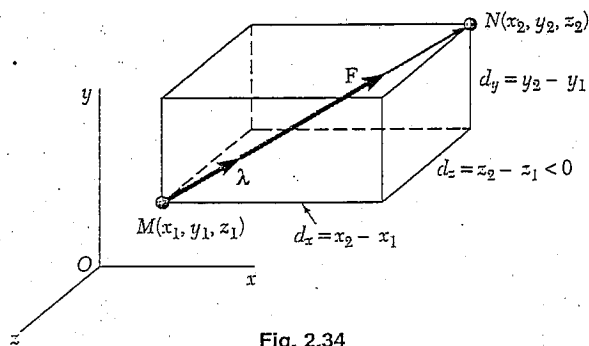


Fig. 2.34

mesmo sentido que \mathbf{F} . Representando seus componentes escalares por d_x , d_y e d_z , respectivamente, escrevemos

$$\overline{MN} = d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k} \quad (2.26)$$

O vetor unitário λ ao longo da linha de ação de \mathbf{F} (i.e., ao longo da linha MN) pode ser obtido dividindo-se o vetor \overline{MN} por sua intensidade MN . Substituindo por \overline{MN} de (2.26) e observando que MN é igual à distância d de M a N , escrevemos

$$\lambda = \frac{\overline{MN}}{MN} = \frac{1}{d}(d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}) \quad (2.27)$$

Lembrando que \mathbf{F} é igual ao produto de F e λ , temos

$$\mathbf{F} = F\lambda = \frac{F}{d}(d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}) \quad (2.28)$$

do qual segue-se que os componentes escalares de \mathbf{F} são, respectivamente,

$$F_x = \frac{Fd_x}{d}, \quad F_y = \frac{Fd_y}{d}, \quad F_z = \frac{Fd_z}{d} \quad (2.29)$$

As relações (2.29) simplificam consideravelmente a determinação dos componentes de uma força \mathbf{F} de uma dada intensidade F quando a linha de ação de \mathbf{F} é definida por dois pontos M e N . Subtraindo as coordenadas de M das coordenadas de N , primeiro determinamos os componentes do vetor \overline{MN} e a distância d de M a N :

$$d_x = x_2 - x_1 \quad d_y = y_2 - y_1 \quad d_z = z_2 - z_1$$

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

Substituindo F e d_x, d_y, d_z e d nas relações (2.29), obtemos os componentes F_x, F_y e F_z da força.

Os ângulos θ_x, θ_y e θ_z que \mathbf{F} forma com os eixos coordenados podem então ser obtidos das Eqs. (2.25). Comparando as Eqs. (2.22) e (2.27), podemos também escrever

$$\cos \theta_x = \frac{d_x}{d}, \quad \cos \theta_y = \frac{d_y}{d}, \quad \cos \theta_z = \frac{d_z}{d} \quad (2.30)$$

e determinar os ângulos θ_x, θ_y e θ_z diretamente dos componentes e da intensidade do vetor \overline{MN} .

2.14 ADIÇÃO DE FORÇAS CONCORRENTES NO ESPAÇO

A resultante \mathbf{R} de duas ou mais forças no espaço será determinada somando-se seus componentes retangulares. Métodos gráficos ou trigonométricos geralmente não são práticos no caso de forças no espaço.

O método que será apresentado a seguir é similar àquele usado na Seção 2.8 para forças coplanares. Fazendo

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F}$$

decompomos cada força em seus componentes retangulares e escrevemos

$$R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} + R_z \mathbf{k} = \Sigma(F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k})$$

$$= (\Sigma F_x) \mathbf{i} + (\Sigma F_y) \mathbf{j} + (\Sigma F_z) \mathbf{k}$$

de onde se conclui que

$$R_x = \Sigma F_x, \quad R_y = \Sigma F_y, \quad R_z = \Sigma F_z \quad (2.31)$$

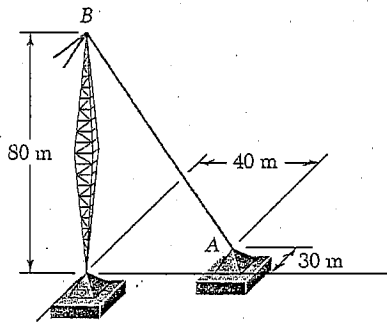
A intensidade da resultante e os ângulos θ_x, θ_y e θ_z que a resultante forma com os eixos coordenados são obtidos por meio do método discutido na Seção 2.12. Escrevemos

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (2.32)$$

$$\cos \theta_x = \frac{R_x}{R}, \quad \cos \theta_y = \frac{R_y}{R}, \quad \cos \theta_z = \frac{R_z}{R} \quad (2.33)$$

PROBLEMA RESOLVIDO 2.7

Um cabo de sustentação de uma torre está ancorado por meio de um parafuso em A. A tração no cabo é 2.500 N. Determine (a) as componentes F_x , F_y e F_z da força que atua sobre o parafuso, e (b) os ângulos θ_x , θ_y e θ_z que definem a direção da força.



SOLUÇÃO

a. Componentes da força. A linha de ação da força que atua no parafuso passa por A e B, e a força é dirigida de A para B. Os componentes do vetor \overline{AB} , que tem a mesma direção da força, são

$$d_x = -40 \text{ m} \quad d_y = +80 \text{ m} \quad d_z = +30 \text{ m}$$

A distância total de A até B é

$$AB = d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} = 94,3 \text{ m}$$

Representando por \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} os vetores unitários ao longo dos eixos coordenados, temos

$$\overline{AB} = -(40 \text{ m})\mathbf{i} + (80 \text{ m})\mathbf{j} + (30 \text{ m})\mathbf{k}$$

Introduzindo o vetor unitário $\lambda = \overline{AB}/AB$, escrevemos

$$\mathbf{F} = F\lambda = F \frac{\overline{AB}}{AB} = \frac{2.500 \text{ N}}{94,3 \text{ m}} \overline{AB}$$

Substituindo a expressão encontrada para \overline{AB} , obtemos

$$\mathbf{F} = \frac{2.500 \text{ N}}{94,3 \text{ m}} [-(40 \text{ m})\mathbf{i} + (80 \text{ m})\mathbf{j} + (30 \text{ m})\mathbf{k}]$$

$$\mathbf{F} = -(1.060 \text{ N})\mathbf{i} + (2.120 \text{ N})\mathbf{j} + (795 \text{ N})\mathbf{k}$$

Os componentes de \mathbf{F} , então, são

$$F_x = -1.060 \text{ N} \quad F_y = +2.120 \text{ N} \quad F_z = +795 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

b. Direção da força. Usando as Eqs. (2.25), escrevemos

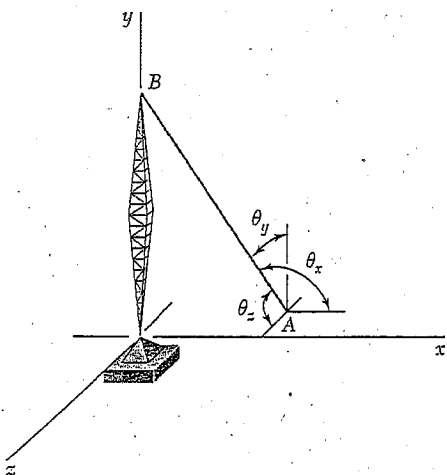
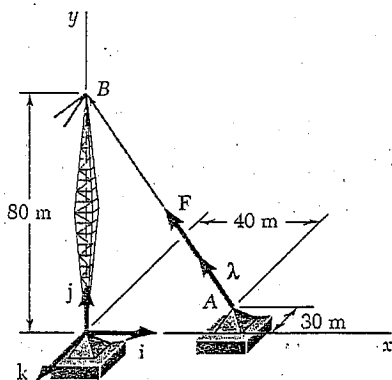
$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{-1.060 \text{ N}}{2.500 \text{ N}} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{+2.120 \text{ N}}{2.500 \text{ N}}$$

$$\cos \theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{+795 \text{ N}}{2.500 \text{ N}}$$

Calculando sucessivamente cada quociente e seu arco co-seno, obtemos

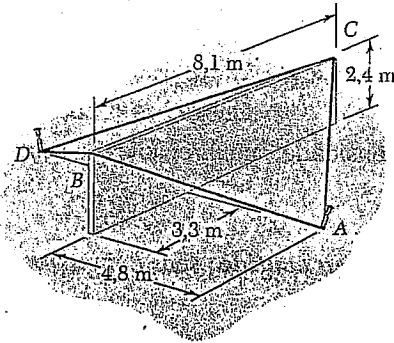
$$\theta_x = 115,1^\circ \quad \theta_y = 32,0^\circ \quad \theta_z = 71,5^\circ \quad \blacktriangleleft$$

(Nota: este resultado poderia ter sido obtido por meio do uso dos componentes e da intensidade do vetor \overline{AB} em vez dos da força \mathbf{F} .)



PROBLEMA RESOLVIDO 2.8

Uma seção de um muro de concreto pré-moldado é temporariamente segura pelos cabos mostrados. Sabendo que a tração é 3.780 N no cabo AB e 5.400 N no cabo AC, determine a intensidade e a direção da resultante das forças exercidas pelos cabos AB e AC na estaca A.



SOLUÇÃO

Componentes das forças. A força exercida por cada cabo na estaca A será decomposta em componentes x , y e z . Primeiro determinamos os componentes e a intensidade dos vetores \overline{AB} e \overline{AC} , medindo-os a partir de A em direção à seção do muro. Representando por i , j e k os vetores unitários ao longo dos eixos coordenados, temos

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= -(4,8 \text{ m})\mathbf{i} + (2,4 \text{ m})\mathbf{j} + (3,3 \text{ m})\mathbf{k} & AB &= 6,3 \text{ m} \\ \overline{AC} &= -(4,8 \text{ m})\mathbf{i} + (2,4 \text{ m})\mathbf{j} - (4,8 \text{ m})\mathbf{k} & AC &= 7,2 \text{ m}\end{aligned}$$

Representando por λ_{AB} o vetor unitário ao longo de AB, temos

$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB} \lambda_{AB} = T_{AB} \frac{\overline{AB}}{AB} = \frac{3.780 \text{ N}}{6,3 \text{ m}} \overline{AB}$$

Substituindo a expressão encontrada para \overline{AB} , obtemos

$$\mathbf{T}_{AB} = \frac{3.780 \text{ N}}{6,3 \text{ m}} [-(4,8 \text{ m})\mathbf{i} + (2,4 \text{ m})\mathbf{j} + (3,3 \text{ m})\mathbf{k}]$$

$$\mathbf{T}_{AB} = -(2.880 \text{ N})\mathbf{i} + (1.440 \text{ N})\mathbf{j} + (1.980 \text{ N})\mathbf{k}$$

Representando por λ_{AC} o vetor unitário ao longo de AC, obtemos de modo similar

$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC} \lambda_{AC} = T_{AC} \frac{\overline{AC}}{AC} = \frac{5.400 \text{ N}}{7,2 \text{ m}} \overline{AC}$$

$$\mathbf{T}_{AC} = -(3.600 \text{ N})\mathbf{i} + (1.800 \text{ N})\mathbf{j} + (3.600 \text{ N})\mathbf{k}$$

Resultante das forças. A resultante R das forças exercidas pelos dois cabos é

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} = -(6.480 \text{ N})\mathbf{i} + (3.240 \text{ N})\mathbf{j} - (1.620 \text{ N})\mathbf{k}$$

A intensidade e a direção da resultante são agora determinadas:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(-6.480)^2 + (3.240)^2 + (-1.620)^2}$$

$$R = 7.425 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

Das Eqs. (2.33) obtemos

$$\cos \theta_x = \frac{R_x}{R} = \frac{-6.480 \text{ N}}{7.425 \text{ N}} \quad \cos \theta_y = \frac{R_y}{R} = \frac{+3.240 \text{ N}}{7.425 \text{ N}}$$

$$\cos \theta_z = \frac{R_z}{R} = \frac{-1.620 \text{ N}}{7.425 \text{ N}}$$

Calculando sucessivamente cada quociente e seu arco co-seno, obtemos

$$\theta_x = 150,8^\circ \quad \theta_y = 64,1^\circ \quad \theta_z = 102,6^\circ \quad \blacktriangleleft$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção vimos que uma *força no espaço* pode ser definida por sua intensidade, sua direção e seu sentido ou por seus três componentes retangulares F_x , F_y e F_z .

A. Quando uma força é definida por sua intensidade, sua direção e seu sentido, seus componentes retangulares F_x , F_y e F_z podem ser encontrados como se segue:

Caso 1. Se a direção da força \mathbf{F} é definida pelos ângulos θ_y e ϕ mostrados na Fig. 2.30, as projeções de \mathbf{F} calculadas por meio desses ângulos ou seus complementos vão fornecer os componentes de \mathbf{F} [Eqs. (2.17)]. Observe que os componentes x e z de \mathbf{F} são encontrados projetando-se \mathbf{F} primeiro no plano horizontal; a projeção F_h obtida dessa maneira é então decomposta nos componentes F_x e F_z (Fig. 2.30c).

Quando estiver resolvendo problemas desse tipo, sugerimos enfaticamente que você esboce primeiro a força \mathbf{F} e depois sua projeção F_h e os componentes F_x , F_y e F_z , antes de começar a parte matemática da solução.

Caso 2. Se a direção da força \mathbf{F} é definida pelos ângulos θ_x , θ_y e θ_z que \mathbf{F} forma com os eixos coordenados, cada componente pode ser obtido multiplicando-se a intensidade F da força pelo co-seno do ângulo correspondente [Exemplo 1]:

$$F_x = F \cos \theta_x \qquad F_y = F \cos \theta_y \qquad F_z = F \cos \theta_z$$

Caso 3. Se a direção da força \mathbf{F} é definida por dois pontos M e N localizados em sua linha de ação (Fig. 2.34), você vai primeiro expressar o vetor \overline{MN} traçado de M para N em termos de seus componentes d_x , d_y e d_z e dos vetores unitários \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} :

$$\overline{MN} = d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}$$

Em seguida, você vai determinar o vetor unitário λ ao longo da linha de ação de \mathbf{F} dividindo o vetor \overline{MN} por sua intensidade MN . Multiplicando λ pela intensidade de \mathbf{F} , você vai obter a expressão desejada para \mathbf{F} em termos de seus componentes retangulares [Problema Resolvido 2.7]:

$$\mathbf{F} = F\lambda = \frac{F}{d}(d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k})$$

É vantajoso usar um sistema de notação consistente e significativo quando da determinação dos componentes retangulares de uma força. O método usado neste livro é ilustrado no Problema Resolvido 2.8, no qual, por exemplo, a força \mathbf{T}_{AB} atua a partir da estaca A em direção ao ponto B . Observe que os índices foram ordenados para coincidir com o sentido da força. Recomenda-se que você adote a mesma notação, pois ela vai ajudá-lo a identificar o ponto 1 (o primeiro índice) e o ponto 2 (o segundo índice).

Ao formar o vetor que define a linha de ação de uma força, você pode pensar em seus componentes escalares como sendo o número de passos que você deve dar em cada direção coordenada para ir do ponto 1 ao ponto 2. É essencial que você sempre se lembre de atribuir o sinal correto a cada um dos componentes.

B. Quando uma força é definida pelos seus componentes retangulares F_x , F_y e F_z , pode-se obter a sua intensidade F escrevendo

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

Pode-se determinar os co-senos diretores da linha de ação de \mathbf{F} dividindo-se os componentes da força por F :

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} \quad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F}$$

Dos co-senos diretores podem-se obter os ângulos θ_x , θ_y e θ_z que \mathbf{F} forma com os eixos coordenados [Exemplo 2].

C. Para determinar a resultante \mathbf{R} de duas ou mais forças em espaço tridimensional, primeiro determine os componentes retangulares de cada força por um dos procedimentos descritos acima. Da adição desses componentes obter-se-ão os componentes R_x , R_y , R_z da resultante. A intensidade, a direção e o sentido da resultante podem então ser obtidos tal como indicamos anteriormente para a força \mathbf{F} [Problema Resolvido 2.8].

PROBLEMAS

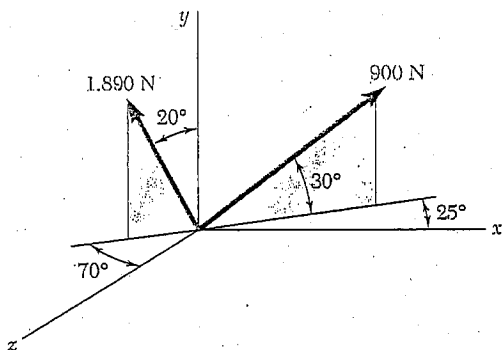


Fig. P2.73 e P2.74

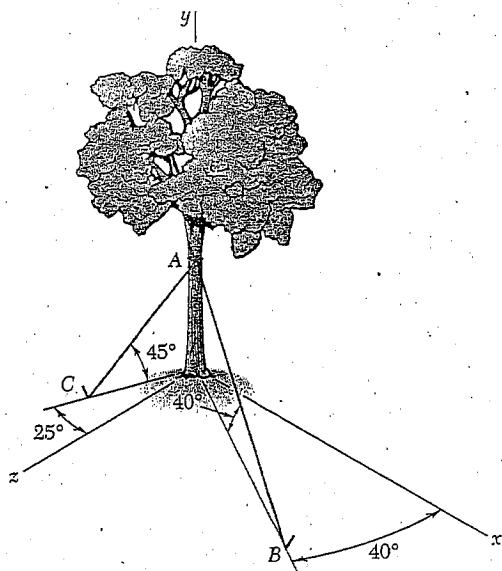


Fig. P2.75 e P2.76

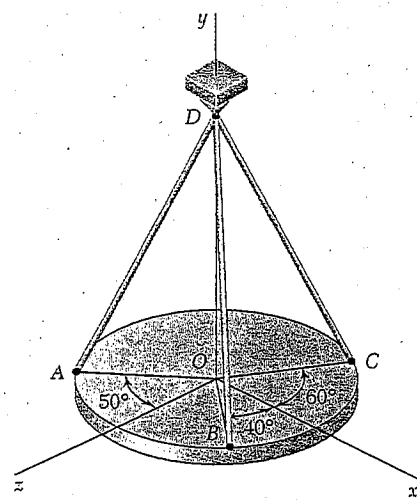


Fig. P2.77, P2.78, P2.79, e P2.80

2.73 Determine (a) os componentes x , y e z da força de 900 N e (b) os ângulos θ_x , θ_y e θ_z que a força forma com os eixos coordenados.

2.74 Determine (a) os componentes x , y e z da força de 1.890 N e (b) os ângulos θ_x , θ_y e θ_z que a força forma com os eixos coordenados.

2.75 Para se estabilizar uma árvore parcialmente arrancada durante uma tempestade, os cabos AB e AC são amarrados na parte superior do tronco da árvore e depois são presos a hastes de aço ancoradas no chão. Sabendo que a tração no cabo AB é 4,2 kN, determine (a) os componentes da força exercida por esse cabo na árvore, e (b) os ângulos θ_x , θ_y e θ_z que a força forma com os eixos em A paralelos aos eixos coordenados.

2.76 Para se estabilizar uma árvore parcialmente arrancada durante uma tempestade, os cabos AB e AC são amarrados na parte superior do tronco da árvore e depois são presos a hastes de aço ancoradas no chão. Sabendo que a tração no cabo AC é 3,6 kN, determine (a) os componentes da força exercida por esse cabo na árvore, (b) os ângulos θ_x , θ_y e θ_z que a força forma com os eixos em A paralelos aos eixos coordenados.

2.77 Uma placa circular horizontal está suspensa, como mostra a figura, por três fios que estão ligados a um suporte D e formam ângulos de 30° com a vertical. Sabendo que o componente x da força exercida pelo fio AD na placa é 220,6 N, determine (a) a tração no fio AD e (b) os ângulos θ_x , θ_y e θ_z que a força exercida em A forma com os eixos coordenados.

2.78 Uma placa circular horizontal está suspensa, tal como mostra a figura, por três fios que estão ligados a um suporte D e formam ângulos de 30° com a vertical. Sabendo que o componente z da força exercida pelo fio BD na placa é $-64,28$ N, determine (a) a tração no fio BD , e (b) os ângulos θ_x , θ_y e θ_z que a força exercida em B forma com os eixos coordenados.

2.79 Uma placa circular horizontal está suspensa, tal como mostra a figura, por três fios que estão ligados a um suporte D e formam ângulos de 30° com a vertical. Sabendo que a tração no fio CD é 540 N, determine (a) os componentes da força exercida por esse fio na placa, e (b) os ângulos θ_x , θ_y e θ_z que a força forma com os eixos coordenados.

2.80 Uma placa circular horizontal está suspensa, tal como mostra a figura, por três fios que estão ligados a um suporte D e formam ângulos de 30° com a vertical. Sabendo que o componente x da força exercida pelo fio CD na placa é -180 N, determine (a) a tração no fio CD e (b) os ângulos θ_x , θ_y e θ_z que a força exercida em C forma com os eixos coordenados.

2.81 Determine a intensidade, a direção e o sentido da força $\mathbf{F} = (3.600 \text{ N})\mathbf{i} + (1.170 \text{ N})\mathbf{j} - (1.440 \text{ N})\mathbf{k}$.

2.82 Determine a intensidade, a direção e o sentido da força $\mathbf{F} = (400\text{N})\mathbf{i} - (1200\text{N})\mathbf{j} + 300\text{N}\mathbf{k}$.

2.83 Uma força atua na origem de um sistema de coordenadas na direção definida pelos ângulos $\theta_x = 64,5^\circ$ e $\theta_z = 55,9^\circ$. Sabendo que o componente y da força é -200 N , determine (a) o ângulo θ_y e (b) os outros componentes e a intensidade da força.

2.84 Uma força atua na origem de um sistema de coordenadas na direção definida pelos ângulos $\theta_x = 75,4^\circ$ e $\theta_y = 132,6^\circ$. Sabendo que o componente z da força é -60 N , determine (a) o ângulo θ_z e (b) os outros componentes e a intensidade da força.

2.85 Uma força \mathbf{F} de intensidade 400 N atua na origem de um sistema de coordenadas. Sabendo que $\theta_x = 28,5^\circ$, $F_y = -80\text{ N}$, e $F_z > 0$, determine (a) os componentes F_x e F_z e (b) os ângulos θ_y e θ_z .

2.86 Uma força \mathbf{F} de intensidade 2.700 N atua na origem de um sistema de coordenadas. Sabendo que $F_x = 900\text{ N}$, $\theta_z = 136,8^\circ$ e $F_y < 0$, determine (a) os componentes F_y e F_z e (b) os ângulos θ_x e θ_y .

2.87 Uma torre de transmissão é sustentada por três cabos de sustentação ancorados por parafusos em B , C e D . Se a tração no cabo AB é 2.100 N , determine os componentes da força exercida pelo cabo no parafuso em B .

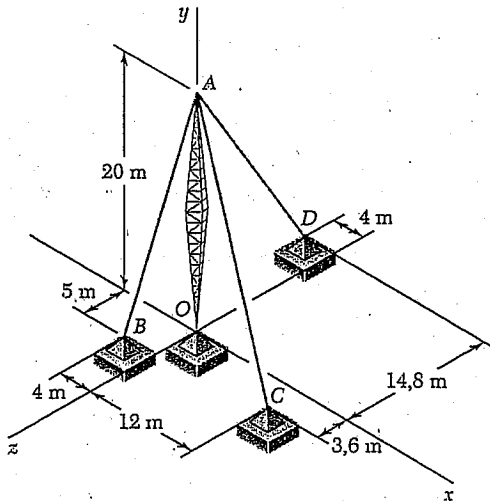
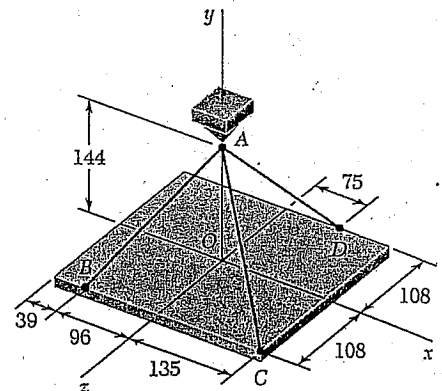


Fig. P2.87 e P2.88

2.88 Uma torre de transmissão é sustentada por três cabos de sustentação ancorados por parafusos em B , C e D . Se a tração no cabo AD é 1.260 N , determine os componentes da força exercida pelo cabo no parafuso em D .

2.89 Uma placa retangular é sustentada por três cabos, tal como mostra a figura. Sabendo que a tração no cabo AB é 918 N , determine os componentes da força exercida na placa em B .

2.90 Uma placa retangular é sustentada por três cabos, como mostra a figura. Sabendo que a tração no cabo AD é 878 N , determine os componentes da força exercida na placa em D .



Dimensões em centímetros
Fig. P2.89 e P2.90

2.91 Uma barra de aço é curvada em forma de anel semicircular de raio $0,96\text{ m}$ e é sustentada, em parte, pelos cabos BD e BE que estão amarrados ao anel em B . Sabendo que a tração no cabo BD é 220 N , determine os componentes dessa força exercida pelo cabo no suporte em D .

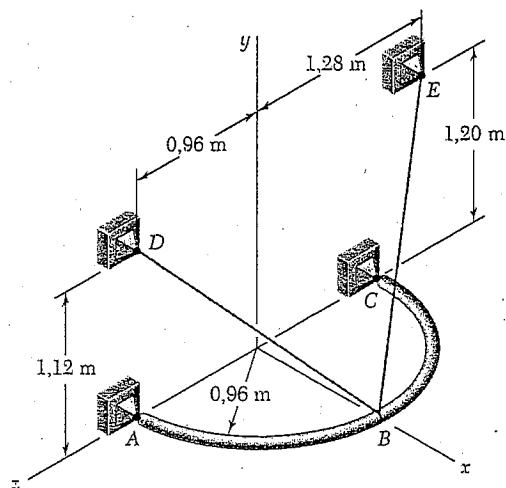


Fig. P2.91 e P2.92

2.92 Uma barra de aço é curvada na forma de anel semicircular de raio $0,96\text{ m}$ e é sustentada, em parte, pelos cabos BD e BE que estão amarrados ao anel em B . Sabendo que a tração no cabo BE é 250 N , determine os componentes dessa força exercida pelo cabo no suporte em E .

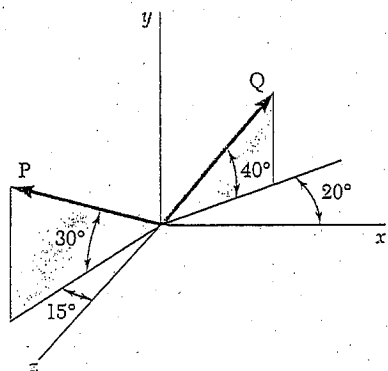


Fig. P2.93 e P2.94

2.93 Encontre a intensidade, a direção e o sentido da resultante das duas forças mostradas, sabendo que $P = 2.250\text{ N}$ e $Q = 2.700\text{ N}$.

2.94 Encontre a intensidade, a direção e o sentido da resultante das duas forças mostradas, sabendo que $P = 600\text{ N}$ e $Q = 400\text{ N}$.

2.95 Sabendo que a tração é 850 N no cabo AB e 1.020 N no cabo AC , determine a intensidade, a direção e o sentido da resultante das forças exercidas em A pelos dois cabos.

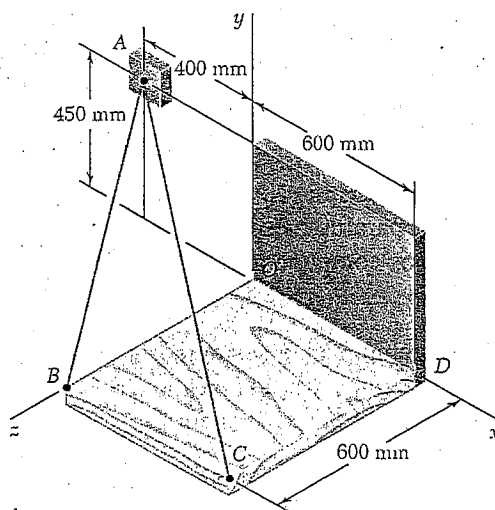


Fig. P2.95

2.96 Supondo que no Problema 2.95 a tração é 1.020 N no cabo AB e 850 N no cabo AC, determine a intensidade, a direção e o sentido da resultante das forças exercidas em A pelos dois cabos.

2.97 Para o anel semicircular do Problema 2.91, determine a intensidade, a direção e o sentido da resultante das forças exercidas pelos cabos em B, sabendo que as forças de tração nos cabos BD e BE são 220 N e 250 N, respectivamente.

2.98 Para se estabilizar uma árvore parcialmente arrancada durante uma tempestade, amarram-se os cabos AB e AC na parte superior do tronco da árvore e depois prendem-se esses cabos a hastes de aço ancoradas no chão. Sabendo que a tração em AB é 4.140 N, e que a resultante das forças exercidas em A pelos cabos AB e AC está no plano yz, determine (a) a tração em AC, e (b) a intensidade, a direção e o sentido da resultante das duas forças.

2.99 Para se estabilizar uma árvore parcialmente arrancada durante uma tempestade, os cabos AB e AC são amarrados na parte superior do tronco da árvore e depois são presos a hastes de aço ancoradas no chão. Sabendo que a tração em AC é 3.825 N, e que a resultante das forças exercidas em A pelos cabos AB e AC está no plano yz, determine (a) a tração em AB, e (b) a intensidade e direção da resultante das duas forças.

2.100 Para a placa do Problema 2.89, determine a tração nos cabos AB e AD sabendo que a tração no cabo AC é 122 N e que a resultante das forças exercidas pelos três cabos em A deve ser vertical.

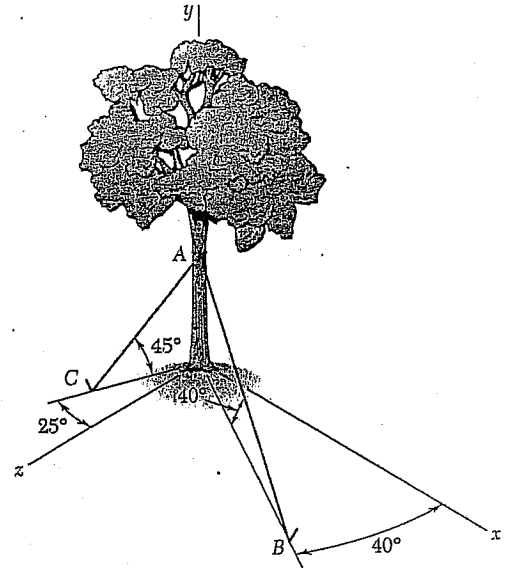


Fig. P2.98 e P2.99

2.15 EQUILÍBRIO DE UMA PARTÍCULA NO ESPAÇO

De acordo com a definição dada na Seção 2.9, uma partícula A estará em equilíbrio se a resultante de todas as forças que atuam em A for zero. Os componentes R_x , R_y e R_z da resultante são dados pelas relações (2.31); expressando que os componentes da resultante são zero, escrevemos

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \quad (2.34)$$

As Equações (2.34) representam as condições necessárias e suficientes para o equilíbrio de uma partícula no espaço. Podem ser usadas na resolução de problemas relacionados ao equilíbrio de uma partícula que envolvam não mais do que três incógnitas.

Para resolver tais problemas, deve-se primeiro desenhar um diagrama de corpo livre representando a partícula em equilíbrio e todas as forças que atuam nela. Pode-se então escrever as Equações de equilíbrio (2.34) e resolvê-las para as três incógnitas. Nos tipos mais comuns de problemas, essas incógnitas representam (1) os três componentes de uma única força ou (2) a intensidade de três forças, todas de direção conhecida.

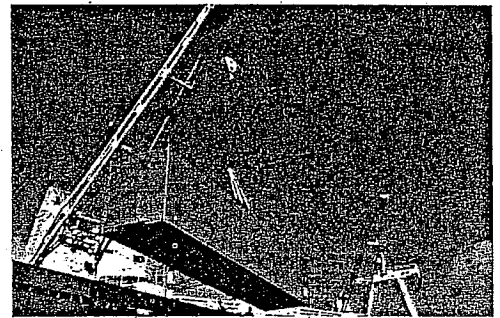


Foto 2.2 Embora a tração nos quatro cabos de sustentação do contêiner do navio não possa ser obtida usando as três equações de (2.34), a relação entre as trações pode ser obtida considerando o equilíbrio do gancho.

PROBLEMA RESOLVIDO 2.9

Um cilindro de 200 kg está pendurado por meio de dois cabos AB e AC, presos ao topo de uma parede vertical. Uma força horizontal P perpendicular à parede segura o cilindro na posição mostrada. Determine a intensidade de P e a tração em cada cabo.

SOLUÇÃO

Diagrama de corpo livre. Escolhemos o ponto A como um corpo livre; esse ponto está sujeito a quatro forças, três das quais têm intensidades desconhecidas.

Introduzindo os vetores unitários i , j e k , decompomos cada força em componentes retangulares.

$$P = P i$$

$$W = -mg j = -(200 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2) j = -(1.962 \text{ N}) j \quad (1)$$

No caso de T_{AB} e T_{AC} , é necessário primeiro determinar os componentes e as intensidades dos vetores \overline{AB} e \overline{AC} . Representando por λ_{AB} o vetor unitário ao longo de AB, escrevemos

$$\overline{AB} = -(1,2 \text{ m}) i + (10 \text{ m}) j + (8 \text{ m}) k \quad AB = 12,862 \text{ m}$$

$$\lambda_{AB} = \frac{\overline{AB}}{AB} = -0,09330 i + 0,7775 j + 0,6220 k$$

$$T_{AB} = T_{AB} \lambda_{AB} = -0,09330 T_{AB} i + 0,7775 T_{AB} j + 0,6220 T_{AB} k \quad (2)$$

Representando por λ_{AC} o vetor unitário ao longo de AC, escrevemos de modo similar

$$\overline{AC} = -(1,2 \text{ m}) i + (10 \text{ m}) j - (10 \text{ m}) k \quad AC = 14,193 \text{ m}$$

$$\lambda_{AC} = \frac{\overline{AC}}{AC} = -0,08455 i + 0,7046 j - 0,7046 k$$

$$T_{AC} = T_{AC} \lambda_{AC} = -0,08455 T_{AC} i + 0,7046 T_{AC} j - 0,7046 T_{AC} k \quad (3)$$

Condição de equilíbrio. Como A está em equilíbrio, devemos ter

$$\Sigma F = 0: \quad T_{AB} + T_{AC} + P + W = 0 \quad (4)$$

Ou, substituindo as expressões (1), (2) e (3) na expressão (4) e fatorando em i , j e k ,

$$(-0,09330 T_{AB} - 0,08455 T_{AC} + P) i + (0,7775 T_{AB} + 0,7046 T_{AC} - 1.962 \text{ N}) j + (0,6220 T_{AB} - 0,7046 T_{AC}) k = 0$$

Igualando os coeficientes de i , j , k a zero, escrevemos três equações escalares, que expressam que as somas dos componentes x , y e z das forças são respectivamente iguais a zero.

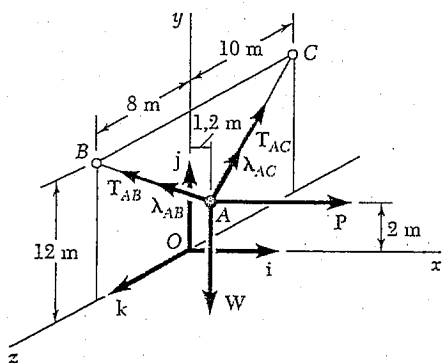
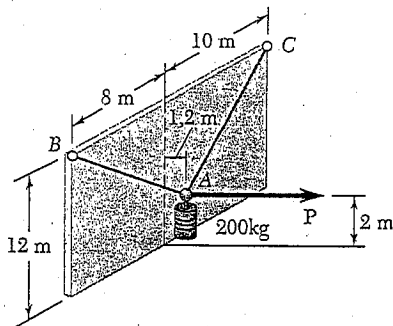
$$\Sigma F_x = 0: \quad -0,09330 T_{AB} - 0,08455 T_{AC} + P = 0$$

$$\Sigma F_y = 0: \quad +0,7775 T_{AB} + 0,7046 T_{AC} - 1.962 \text{ N} = 0$$

$$\Sigma F_z = 0: \quad +0,6220 T_{AB} - 0,7046 T_{AC} = 0$$

Resolvendo essas equações, obtemos

$$P = 235 \text{ N} \quad T_{AB} = 1.402 \text{ N} \quad T_{AC} = 1.238 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$



METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Vimos anteriormente que, quando uma partícula está em *equilíbrio*, a resultante das forças que atuam sobre a partícula deve ser nula. Ao expressar esse fato no caso do equilíbrio de uma *partícula no espaço tridimensional*, você obterá três relações entre as forças atuantes sobre a partícula. Essas relações podem ser usadas para a determinação de três incógnitas – geralmente as intensidades das três forças.

Sua solução consistirá nos seguintes passos:

1. Desenhe um diagrama de corpo livre da partícula. Esse diagrama mostra a partícula e todas as forças que atuam sobre ela. Indique no diagrama as intensidades das forças conhecidas, bem como quaisquer ângulos ou dimensões que definam a direção de uma força. Qualquer intensidade ou ângulo desconhecido deve ser representado por um símbolo apropriado. Nada mais deve ser incluído em seu diagrama de corpo livre.

2. Decomponha cada uma das forças em componentes retangulares. Seguindo o método adotado na lição anterior, você irá determinar para cada força \mathbf{F} o vetor unitário λ que define a direção daquela força, e expressar \mathbf{F} como o produto da sua intensidade F pelo vetor unitário λ . Quando dois pontos sobre a linha de ação de \mathbf{F} forem conhecidos, você obterá uma expressão da forma

$$\mathbf{F} = F\lambda = \frac{F}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k})$$

na qual d , d_x , d_y e d_z são as dimensões obtidas do diagrama de corpo livre da partícula. Mostramos também que a direção de \mathbf{F} pode ser definida em termos dos ângulos θ_y e ϕ . Se uma força é conhecida tanto em intensidade como em direção, então F é conhecida e a expressão obtida para \mathbf{F} fica inteiramente definida; caso contrário, F é uma das três incógnitas que devem ser determinadas.

3. Faça a resultante, ou soma, das forças exercidas sobre a partícula igual a zero. Você obterá uma equação vetorial que consiste em termos que contêm os vetores unitários \mathbf{i} , \mathbf{j} ou \mathbf{k} . Você irá agrupar os termos que contenham o mesmo vetor unitário e fatorar esse vetor. Para que a equação vetorial seja satisfeita, o coeficiente de cada vetor unitário deve ser igual a zero. Logo, tornando cada coeficiente igual a zero, serão obtidas três equações escalares que você poderá resolver para não mais que três incógnitas [Problema Resolvido 2.9].

PROBLEMAS

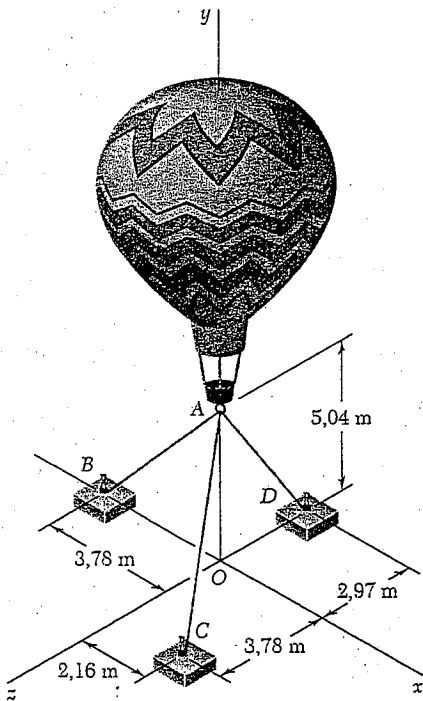


Fig. P2.103 e P2.104

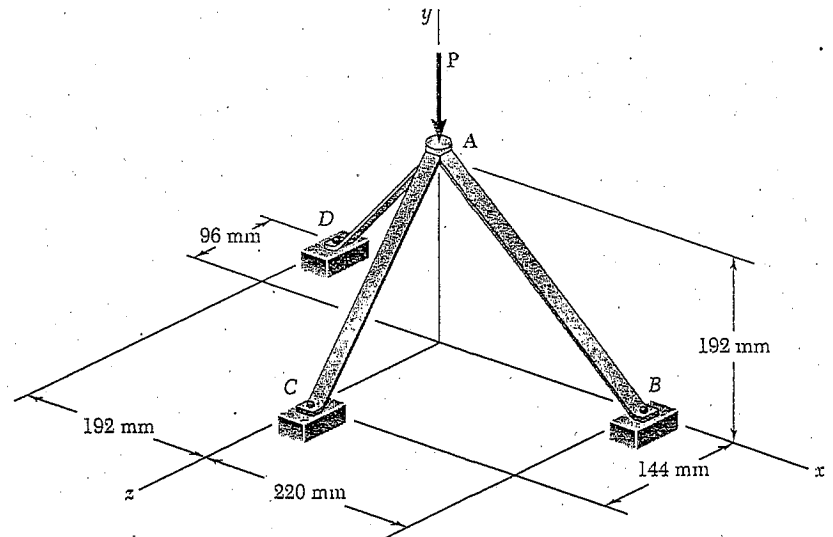


Fig. P2.101 e P2.102

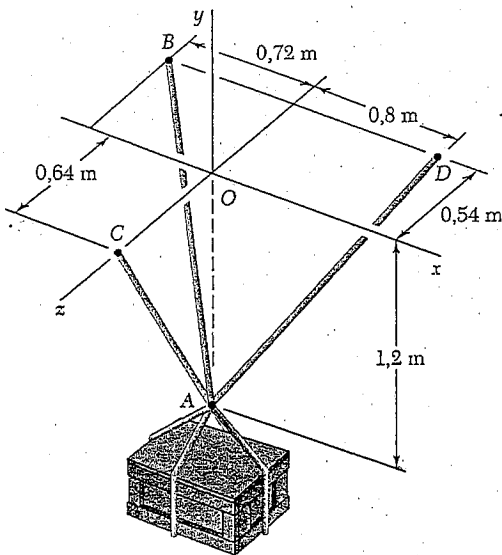


Fig. P2.105 e P2.108

2.101 O conjunto de apoios mostrado na ilustração é aparafusado no local em B , C e D , e sustenta uma força P para baixo em A . Sabendo que as forças nos elementos AB , AC e AD são dirigidas ao longo dos seus respectivos elementos e que a força no elemento AB é 146 N , determine a intensidade de P .

2.102 O conjunto de apoios mostrado é aparafusado no local em B , C e D , e sustenta uma força P para baixo em A . Sabendo que as forças nos elementos AB , AC e AD são dirigidas ao longo dos seus respectivos elementos e que $P = 200\text{ N}$, determine as forças nos elementos.

2.103 Três cabos são usados para amarrar um balão, tal como mostra a ilustração. Determine a força vertical P exercida pelo balão em A , sabendo que a tração no cabo AB é 270 N .

2.104 Três cabos são usados para amarrar um balão, tal como mostra a ilustração. Determine a força vertical P exercida pelo balão em A , sabendo que a tração no cabo AC é 450 N .

2.105 O caixote mostrado na Fig. P2.105 e P2.108 é sustentado por três cabos. Determine o peso do caixote, sabendo que a tração no cabo AB é 3 kN .

2.106 Para o caixote do Problema 2.105, determine o peso do caixote sabendo que a tração no cabo AD é $2,8\text{ kN}$.

2.107 Para o caixote do Problema 2.105, determine o peso do caixote sabendo que a tração no cabo AC é $2,4\text{ kN}$.

2.108 Um caixote de 750 kg é sustentado por três cabos, como mostra a figura. Determine a tração em cada cabo.

2.109 Uma força P é aplicada em um cone uniforme que é sustentado por três cordas, como mostra a figura. As linhas de ação das cordas passam pelo vértice A do cone. Sabendo que $P = 0$ e que a tração na corda BE é $0,9\text{ N}$, determine o peso W do cone.

2.110 Uma força P é aplicada em um cone uniforme que é sustentado por três cordas, como mostra a figura. As linhas de ação das cordas passam pelo vértice A do cone. Sabendo que o cone pesa $7,2\text{ N}$, determine a faixa de valores de P para a qual a corda CF fica tracionada.

2.111 Uma torre de transmissão é sustentada por três cabos de sustentação ligados a um pino em A e ancorados por parafusos em B, C e D . Se a tensão no cabo AB é de $3,6\text{ kN}$, determine a força vertical P exercida pela torre no pino em A .

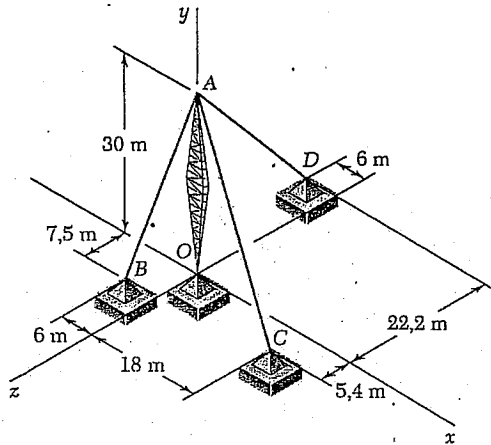


Fig. P2.111 e P2.112

2.112 Uma torre de transmissão é sustentada por três cabos de sustentação ligados a um pino em A e ancorados por parafusos em B, C e D . Se a tensão no cabo AC é de $2,6\text{ kN}$, determine a força vertical P exercida pela torre no pino em A .

2.113 Uma placa retangular é sustentada por três cabos, como mostra a figura. Sabendo que a tração no cabo AC é de $67,5\text{ N}$, determine o peso da placa.

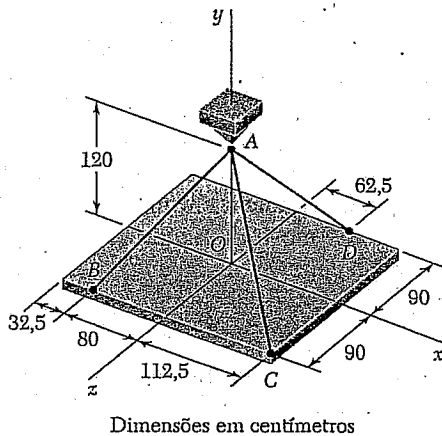


Fig. P2.113 e P2.114

2.114 Uma placa retangular é sustentada por três cabos, como mostra a figura. Sabendo que a tração no cabo AD é de 540 N , determine o peso da placa.

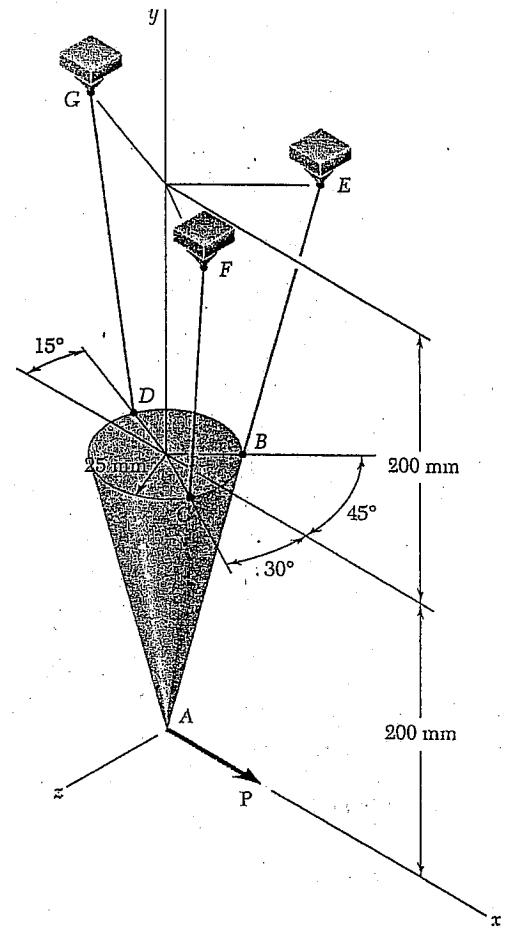


Fig. P2.109 e P2.110.

2.115 Uma placa circular horizontal de massa igual a 28 kg é suspensa por três fios que são ligados a um suporte D e formam ângulos de 30° com a vertical. Determine a tração em cada fio.

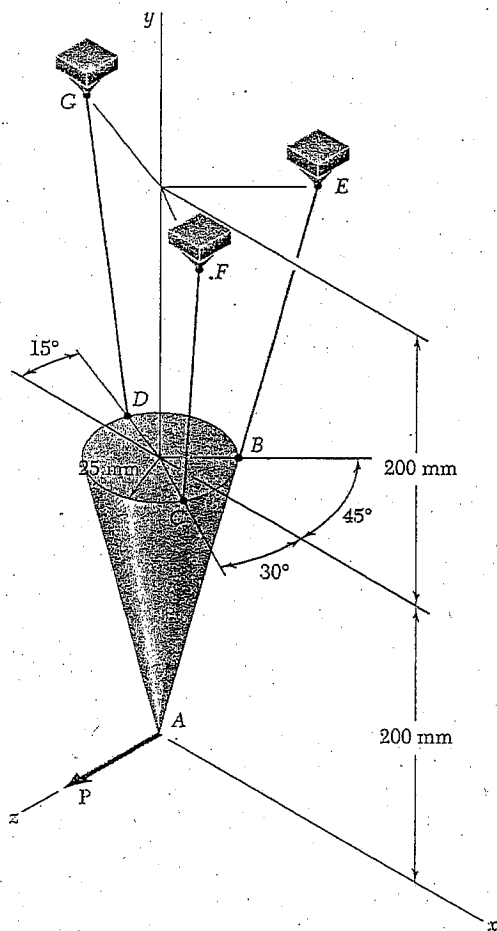


Fig. P2.119 e P2.120

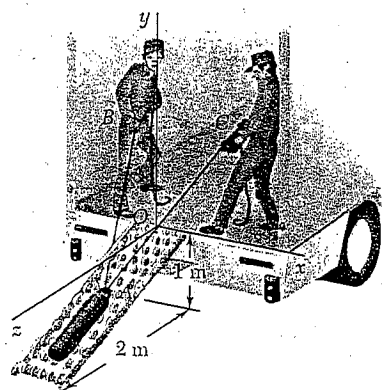


Fig. P2.121

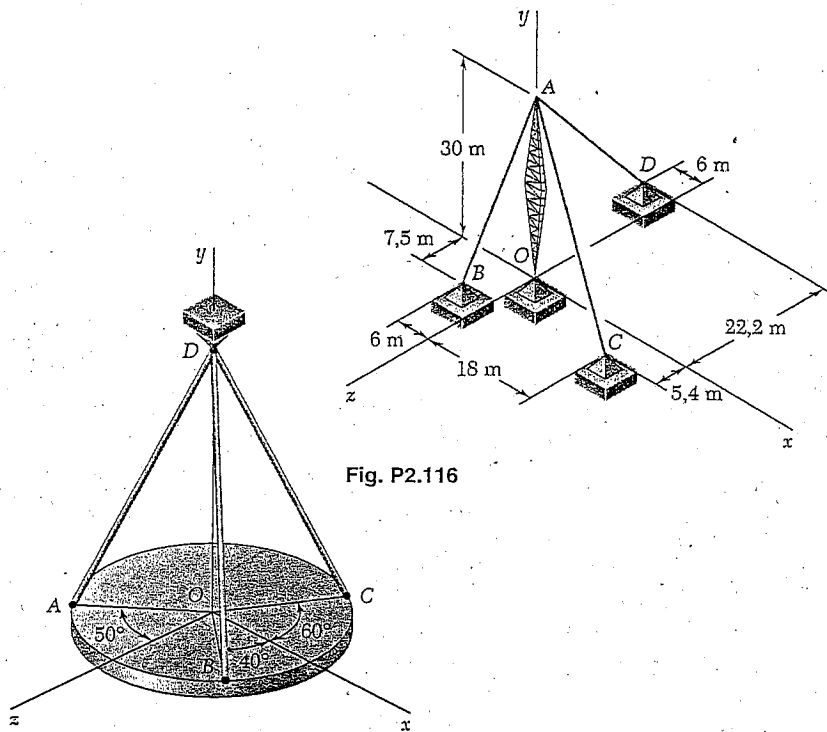


Fig. P2.116

Fig. P2.115

2.116 Uma torre de transmissão é sustentada por três cabos de sustentação ligados a um pino em A e ancorados por parafusos em B , C e D . Sabendo que a torre exerce sobre o pino em A uma força vertical para cima de 8 kN, determine a tração em cada cabo.

2.117 Para a placa retangular dos Problemas 2.113 e 2.114, determine a tração em cada um dos três cabos, sabendo que o peso da placa é de 810 N.

2.118 Para o cone do Problema 2.110, determine a faixa de valores de P para a qual a corda DG fica tracionada, se P for dirigida para a direção $-x$.

2.119 Uma força P é aplicada em um cone uniforme que é sustentado por três cordas, tal como mostra a figura. As linhas de ação das cordas passam pelo vértice A do cone. Sabendo que o cone pesa 10,8 N e que $P = 0$, determine a tração em cada corda.

2.120 Uma força P é aplicada em um cone uniforme que é sustentado por três cordas, como mostra a figura. As linhas de ação das cordas passam pelo vértice A do cone. Sabendo que o cone pesa 10,8 N e que $P = 0,45$ N, determine a tração em cada corda.

2.121 Usando duas cordas e uma rampa de roletes, dois operários descarregam de um caminhão um contrapeso de ferro fundido de 200 kg. Sabendo que, no instante mostrado, o contrapeso é mantido parado e que as posições dos pontos A , B e C são, respectivamente, $A(0, -0,5 \text{ m}, 1 \text{ m})$, $B(-0,6 \text{ m}, 0,8 \text{ m}, 0)$ e $C(0,7 \text{ m}, 0,9 \text{ m}, 0)$, e admitindo que não há atrito entre o contrapeso e a rampa, determine a tração em cada corda. (Dica: como não há atrito, a força exercida pela rampa sobre o contrapeso deve ser perpendicular à rampa.)

2.122 Resolva o Problema 2.121 considerando que um terceiro operário está exercendo uma força $\mathbf{P} = -(180 \text{ N})\mathbf{i}$ sobre o contrapeso.

2.123 Uma peça de máquina de peso W é temporariamente sustentada por cabos AB , AC e ADE . O cabo ADE é fixado no anel em A , passa pela roldana em D , retorna através do anel e é fixado no suporte em E . Sabendo que $W = 1.440 \text{ N}$, determine a tração em cada cabo. (Dica: a tração é a mesma em todas as porções do cabo ADE .)

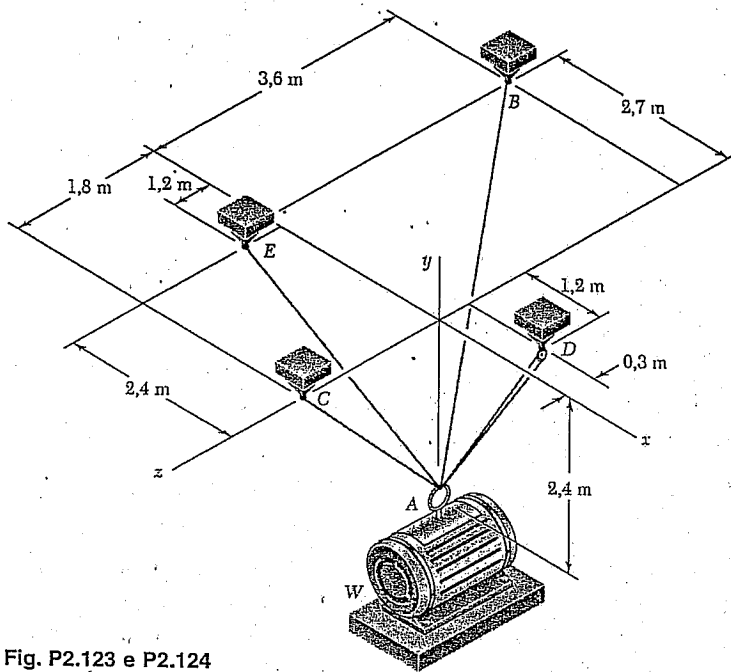


Fig. P2.123 e P2.124

2.124 Uma peça de máquina de peso W é temporariamente sustentada por cabos AB , AC e ADE . O cabo ADE é fixado no anel em A , passa pela roldana em D , retorna através do anel e é fixado no suporte em E . Sabendo que a tração no cabo AB é de 306 N , determine (a) a tração em AC , (b) a tração em ADE , (c) o peso W . (Dica: a tração é a mesma em todas as porções do cabo ADE .)

2.125 Um recipiente de peso W é suspenso pelo anel A . O cabo BAC passa através do anel e é ligado a suportes fixos em B e C . Duas forças $\mathbf{P} = P\mathbf{i}$ e $\mathbf{Q} = Q\mathbf{k}$ são aplicadas no anel para se manter o recipiente na posição mostrada. Sabendo que $W = 1.200 \text{ N}$, determine P e Q . (Dica: a tração é a mesma em ambas as porções do cabo BAC .)

2.126 Para o sistema do Problema 2.125, determine W e P sabendo que $Q = 160 \text{ N}$.

2.127 Os cursores A e B são conectados por um fio de 1 m de comprimento e podem deslizar livremente sobre hastes sem atrito. Se uma força $\mathbf{P} = (680 \text{ N})\mathbf{j}$ é aplicada em A , determine (a) a tração no fio quando $y = 300 \text{ mm}$, (b) a intensidade da força Q necessária para se manter o equilíbrio do sistema.

2.128 Resolva o Problema 2.127, considerando $y = 550 \text{ mm}$.

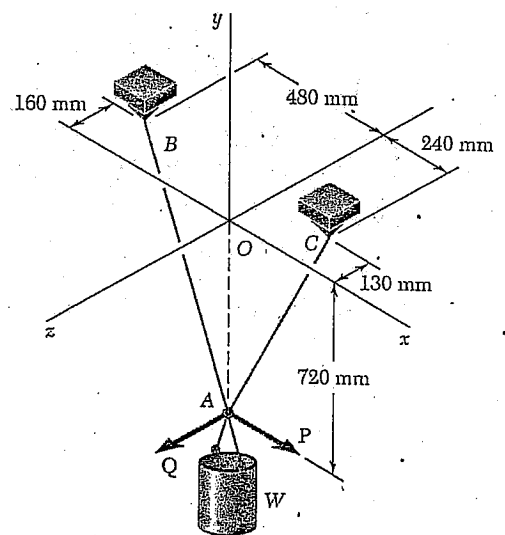


Fig. P2.125

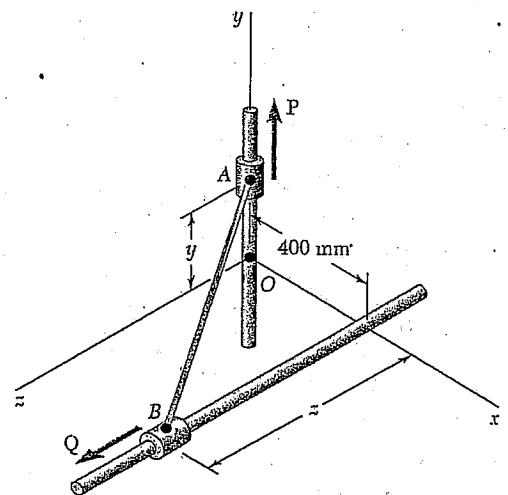


Fig. P2.127

Resultante de duas forças

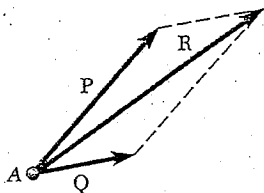


Fig. 2.35

Componentes de uma força

Componentes retangulares

Vetores unitários

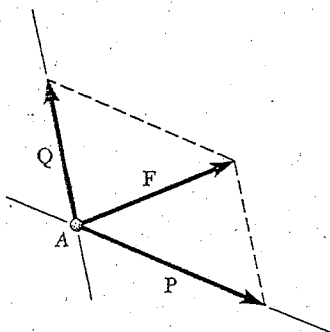


Fig. 2.36

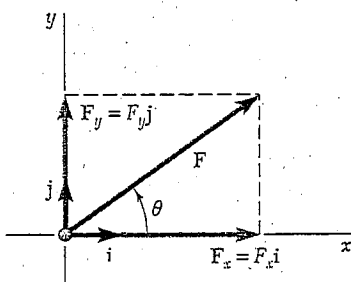


Fig. 2.37

Resultante de várias forças coplanares

Neste capítulo, estudamos o efeito de forças sobre partículas, isto é, sobre corpos de forma e tamanho tais que todas as forças que atuam sobre eles podem ser consideradas como aplicadas no mesmo ponto.

Forças são *grandezas vetoriais*. São caracterizadas por um *ponto de aplicação*, uma *intensidade*, uma *direção* e um *sentido*, e são adicionadas de acordo com a *lei do paralelogramo* (Fig. 2.35). A intensidade, a direção e o sentido da resultante **R** de duas forças **P** e **Q** podem ser determinados ou graficamente ou por trigonometria, usando sucessivamente a lei dos co-senos e a lei dos senos [Problema Resolvido 2.1].

Qualquer força dada, que atue sobre uma partícula, pode ser decomposta em dois ou mais *componentes*, ou seja, pode ser substituída por duas ou mais forças que têm o mesmo efeito sobre a partícula. Pode-se decompor a força **F** em dois componentes **P** e **Q**, desenhando-se um paralelogramo com **F** na diagonal; os componentes **P** e **Q** são então representados pelos dois lados adjacentes do paralelogramo (Fig. 2.36) e podem ser determinados ou graficamente ou por trigonometria [Seção 2.6].

Diz-se que a força **F** é decomposta em dois *componentes retangulares* se seus componentes F_x e F_y forem perpendiculares entre si e dirigidos ao longo dos eixos coordenados (Fig. 2.37). Introduzindo os *vetores unitários* **i** e **j** ao longo dos eixos *x* e *y*, respectivamente, escrevemos [Seção 2.7]

$$F_x = F_x \mathbf{i} \quad F_y = F_y \mathbf{j} \quad (2.6)$$

e

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} \quad (2.7)$$

onde F_x e F_y são os *componentes escalares* de **F**. Esses componentes, que podem ser positivos ou negativos, são definidos pelas relações

$$F_x = F \cos \theta \quad F_y = F \sin \theta \quad (2.8)$$

Quando os componentes retangulares F_x e F_y de uma força **F** são dados, pode-se obter o ângulo θ que define a direção da força escrevendo-se

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} \quad (2.9)$$

Pode-se então obter a intensidade F da força resolvendo-se uma das equações (2.8) para F ou aplicando-se o teorema de Pitágoras e escrevendo-se

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (2.10)$$

Quando *três ou mais forças coplanares* atuam sobre uma partícula, os componentes retangulares de sua resultante **R** podem ser obtidos adicionando-se algebricamente os componentes correspondentes das forças dadas [Seção 2.8]. Temos

$$R_x = \sum F_x \quad R_y = \sum F_y \quad (2.13)$$

Podemos então determinar a intensidade e a direção de \mathbf{R} a partir de relações similares às das Eqs. (2.9) e (2.10) [Problema Resolvido 2.3].

Uma força \mathbf{F} no *espaço tridimensional* pode ser decomposta em componentes retangulares F_x , F_y e F_z [Seção 2.12]. Representando por θ_x , θ_y e θ_z , respectivamente, os ângulos formados por \mathbf{F} com os eixos x , y e z (Fig. 2.38), temos

$$F_x = F \cos \theta_x \quad F_y = F \cos \theta_y \quad F_z = F \cos \theta_z \quad (2.19)$$

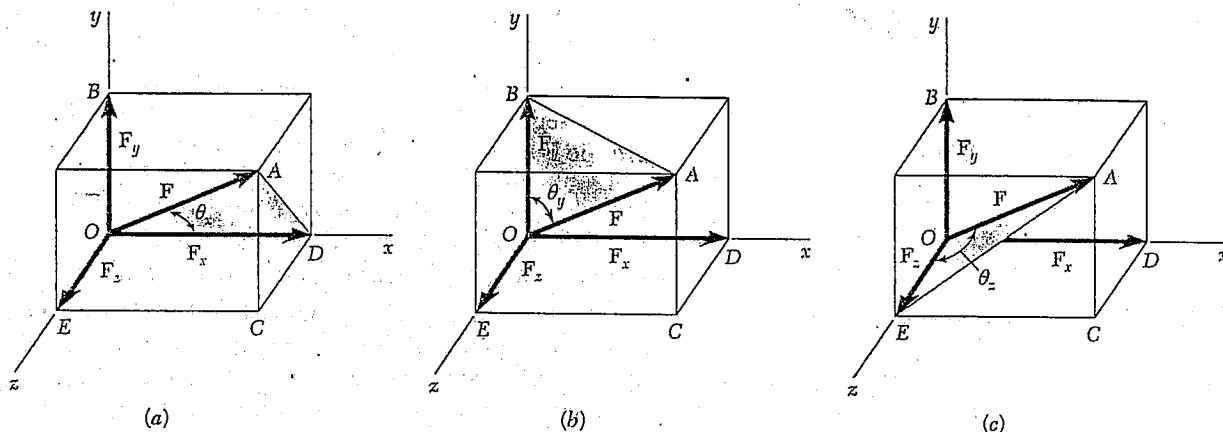


Fig. 2.38

(a)

(b)

(c)

Os co-senos de θ_x , θ_y e θ_z são conhecidos como *co-senos diretores* da força \mathbf{F} . Introduzindo os vetores unitários \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} ao longo dos eixos coordenados, escrevemos

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad (2.20)$$

ou

$$\mathbf{F} = F(\cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k}) \quad (2.21)$$

o que mostra (Fig. 2.39) que \mathbf{F} é o produto da sua intensidade F pelo vetor unitário

$$\lambda = \cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k}$$

Como a intensidade de λ é igual à unidade, devemos ter

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1 \quad (2.24)$$

Quando os componentes retangulares F_x , F_y e F_z de uma força \mathbf{F} são dados, encontramos a intensidade F da força escrevendo

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (2.18)$$

e obtemos os co-senos diretores de \mathbf{F} a partir da Eq. (2.19). Temos

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} \quad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F} \quad (2.25)$$

Forças no espaço

Co-senos diretores

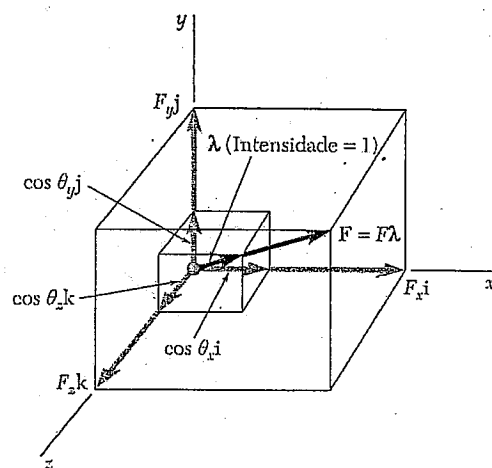


Fig. 2.39

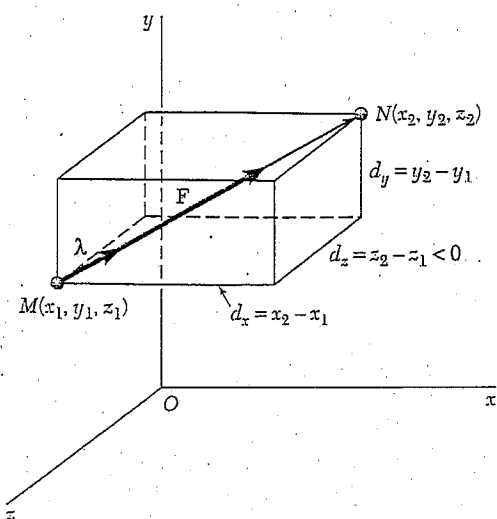


Fig. 2.40

Resultante de forças no espaço

Equilíbrio de uma partícula

Diagrama de corpo livre

Equilíbrio no espaço

Quando uma força F é definida no espaço tridimensional pela sua intensidade F e por dois pontos M e N sobre sua linha de ação [Seção 2.13], seus componentes retangulares podem ser obtidos da seguinte maneira: primeiro, expressamos o vetor \overline{MN} que liga os pontos M e N em termos de seus componentes d_x , d_y e d_z (Fig. 2.40); escrevemos

$$\overline{MN} = d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k} \quad (2.26)$$

Em seguida, determinamos o vetor unitário λ ao longo da linha de ação de F , dividindo \overline{MN} por sua intensidade $MN = d$:

$$\lambda = \frac{\overline{MN}}{MN} = \frac{1}{d} (d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}) \quad (2.27)$$

Lembrando que F é igual ao produto de F por λ , temos

$$\mathbf{F} = F\lambda = \frac{F}{d} (d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}) \quad (2.28)$$

de onde se segue [Problemas Resolvidos 2.7 e 2.8] que os componentes escalares de F são, respectivamente,

$$F_x = \frac{Fd_x}{d} \quad F_y = \frac{Fd_y}{d} \quad F_z = \frac{Fd_z}{d} \quad (2.29)$$

Quando duas ou mais forças atuam sobre uma partícula no espaço tridimensional, podem-se obter os componentes retangulares de sua resultante R pela adição algébrica dos componentes correspondentes das forças dadas [Seção 2.14]. Temos

$$R_x = \sum F_x \quad R_y = \sum F_y \quad R_z = \sum F_z \quad (2.31)$$

A intensidade, a direção e o sentido de R podem então ser determinados a partir de relações similares às das Eqs. (2.18) e (2.25) [Problema Resolvido 2.8].

Diz-se que a partícula está em *equilíbrio* quando a resultante de todas as forças que atuam sobre ela é nula [Seção 2.9]. A partícula então permanecerá em repouso (se originalmente em repouso) ou se moverá a uma velocidade constante em linha reta (se originalmente em movimento) [Seção 2.10].

Para resolver um problema que envolva uma partícula em equilíbrio, primeiro devemos traçar um *diagrama de corpo livre* da partícula, mostrando todas as forças que atuam sobre ela [Seção 2.11]. Se apenas três forças coplanares atuam sobre a partícula, pode-se desenhar um *triângulo de forças* para expressar que a partícula está em equilíbrio. Usando-se métodos gráficos ou trigonometria, pode-se resolver esse triângulo para no máximo duas incógnitas [Problema Resolvido 2.4]. Se mais que três forças coplanares estão envolvidas, devem-se usar as equações de equilíbrio

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad (2.15)$$

Essas equações podem ser resolvidas para no máximo duas incógnitas [Problema Resolvido 2.6].

Quando uma partícula está em *equilíbrio no espaço tridimensional* [Seção 2.15], devem-se usar as três equações de equilíbrio

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \quad (2.34)$$

Essas equações podem ser resolvidas para no máximo três incógnitas [Problema Resolvido 2.9].

PROBLEMAS PARA REVISÃO DO TEMA

2.129 O elemento BD exerce sobre o elemento ABC uma força P dirigida ao longo da linha BD . Sabendo que P deve ter um componente horizontal de 1.350 N, determine (a) a intensidade da força P , e (b) seu componente vertical.

2.130 Um recipiente de peso W é suspenso pelo anel A , ao qual são ligados os cabos AC e AE . Uma força P é aplicada na extremidade F de um terceiro cabo que passa pela roldana em B e através do anel A e é ligado ao suporte em D . Sabendo que $W = 1.000$ N, determine a intensidade de P . (Dica: a tração é a mesma em todas as porções do cabo $FBAD$.)

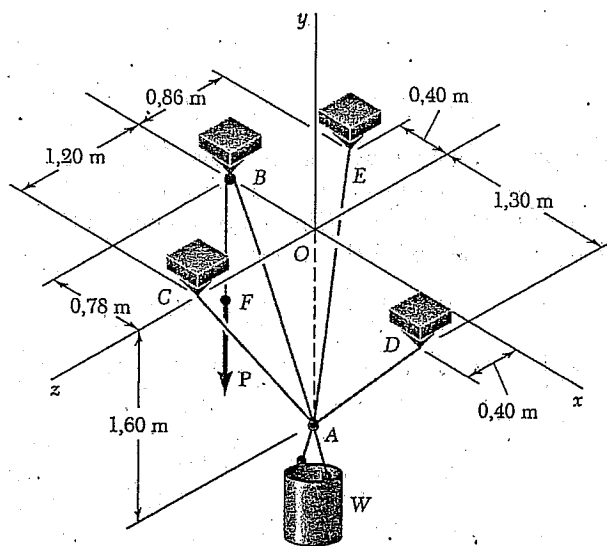


Fig. P2.130 e P2.131

2.131 Um recipiente de peso W é suspenso pelo anel A , ao qual são ligados os cabos AC e AE . Uma força P é aplicada na extremidade F de um terceiro cabo que passa pela roldana em B e através do anel A e é ligado ao suporte em D . Sabendo que a tração no cabo AC é 150 N, determine (a) a intensidade da força P e (b) o peso W do recipiente. (Ver a dica do Problema 2.130.)

2.132 Dois cabos são conectados em C e carregados, como mostra a figura. Sabendo que $Q = 270$ N, determine a tração (a) no cabo AC e (b) no cabo BC .

2.133 Dois cabos são conectados em C e carregados, como mostra a figura. Determine a faixa de valores de Q para a qual a tração não excederá 270 N em cada cabo.

2.134 Uma conexão soldada está em equilíbrio sob a ação das quatro forças mostradas. Sabendo que $F_A = 8$ kN e $F_B = 16$ kN, determine as intensidades das duas outras forças.

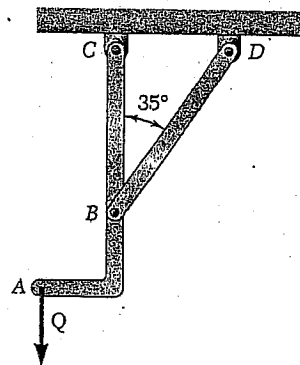


Fig. P2.129

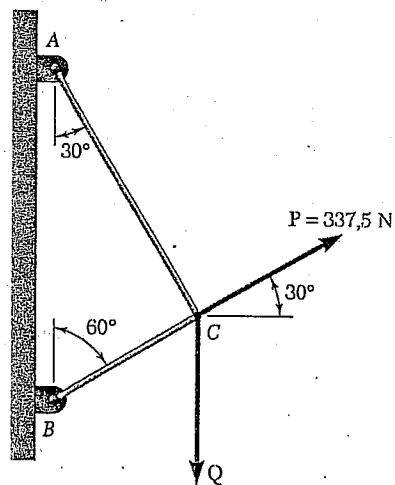


Fig. P2.132 e P2.133

2.135 Uma conexão soldada está em equilíbrio sob a ação das quatro forças mostradas. Sabendo que $F_A = 5 \text{ kN}$ e $F_D = 6 \text{ kN}$, determine as intensidades das duas outras forças.

2.136 O cursor A está conectado a uma carga de 225 N , como mostra a figura, e pode deslizar sobre uma haste horizontal sem atrito. Determine a intensidade da força P necessária para se manter o equilíbrio do cursor quando (a) $x = 112,5 \text{ mm}$ e (b) $x = 375 \text{ mm}$.

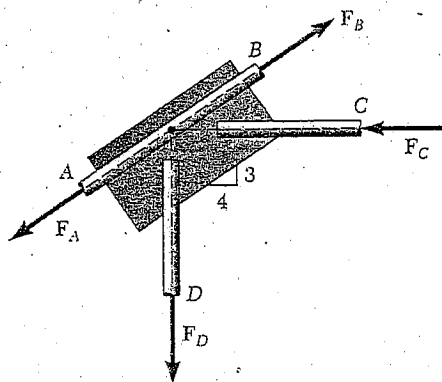


Fig. P2.134 e P2.135

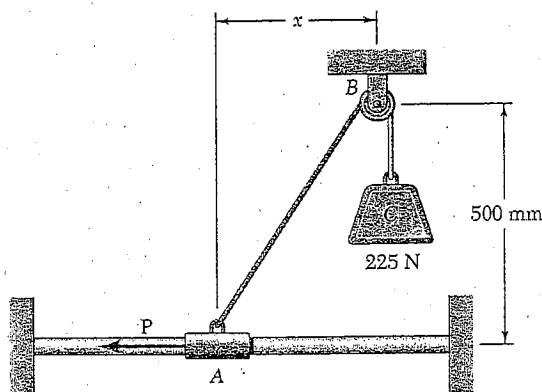


Fig. P2.136 e P2.137

2.137 O cursor A está conectado a uma carga de 225 N , como mostra a figura, e pode deslizar sobre uma haste horizontal sem atrito. Determine a distância x para a qual o cursor está em equilíbrio quando $P = 216 \text{ N}$.

2.138 Uma armação ABC é sustentada em parte pelo cabo DBE que passa através de um anel sem atrito em B . Sabendo que a tração no cabo é de 385 N , determine os componentes da força exercida pelo cabo no suporte em D .

2.139 Uma armação ABC é sustentada em parte pelo cabo DBE que passa através de um anel sem atrito em B . Determine a intensidade, a direção e o sentido da resultante das forças exercidas pelo cabo em B , sabendo que a tração no cabo é de 385 N .

2.140 Um tanque de aço deve ser posicionado em uma escavação. Usando trigonometria, determine (a) a intensidade e a direção da menor força P para que a resultante R das duas forças aplicadas em A seja vertical, e (b) a intensidade de R correspondente.

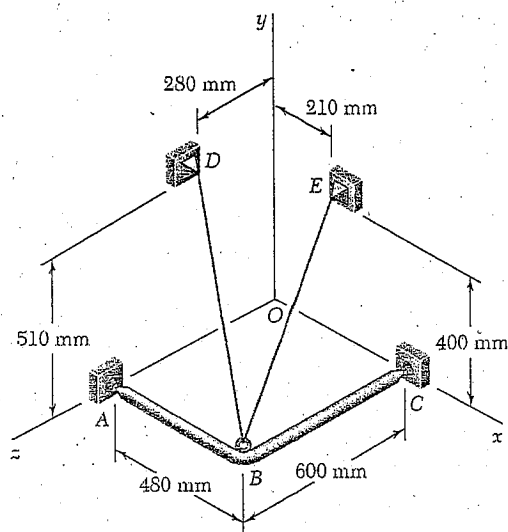


Fig. P2.138 e P2.139

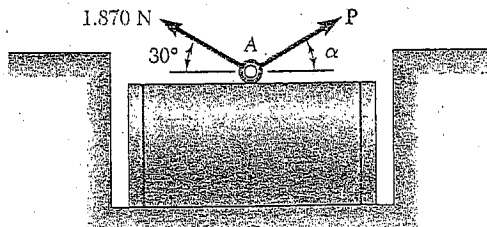


Fig. P2.140

PROBLEMAS PARA UTILIZAÇÃO DO COMPUTADOR

2.C1 Usando um aplicativo computacional, determine a intensidade e a direção da resultante de n forças coplanares aplicadas em um ponto A . Use esse aplicativo para resolver os Problemas 2.32, 2.33, 2.34 e 2.36.

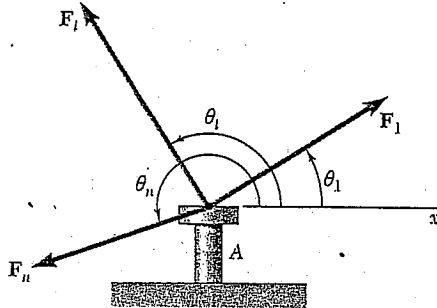


Fig. P2.C1

2.C2 Um operário planeja erguer um balde de tinta de 20 litros e 270 N de peso, amarrando uma corda no andaime em A e, em seguida, passando a corda através da alça do balde em B e, finalmente, pela roldana em C . (a) Plote a tração na corda como uma função da altura y para $0,6 \text{ m} \leq y \leq 5,4 \text{ m}$. (b) Avalie o plano do operário.

2.C3 O cursor A pode deslizar livremente sobre a haste sem atrito horizontal mostrada. A mola conectada ao cursor tem uma constante de mola k e fica sem deformação quando o colar está diretamente abaixo do suporte B . Em termos de k e da distância c , expresse a intensidade da força P necessária para se manter o equilíbrio do sistema. Plote P em função de c para valores de c desde 0 até 600 mm quando (a) $k = 2 \text{ N/mm}$, (b) $k = 3 \text{ N/mm}$ e (c) $k = 4 \text{ N/mm}$.

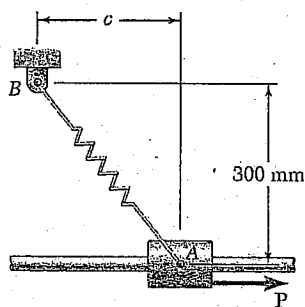


Fig. P2.C3

2.C4 Uma carga P é sustentada por dois cabos, como mostra a ilustração. Usando um aplicativo computacional, determine a tração em cada cabo em função de P e θ . Para os três conjuntos de valores numéricos mostrados a seguir, plote as forças de tração para valores de θ variando de $\theta_1 = \beta - 90^\circ$ até $\theta_2 = 90^\circ$. Em seguida, determine a partir dos gráficos

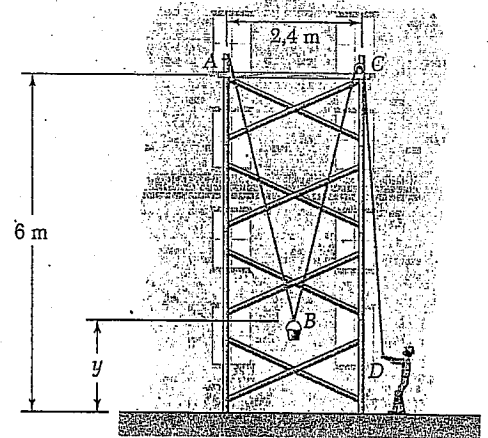


Fig. P2.C2

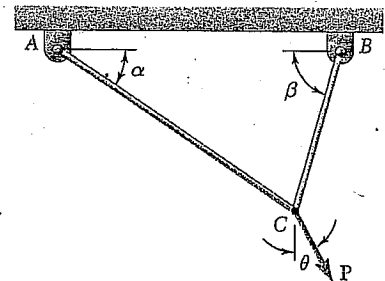


Fig. P2.C4

(a) o valor de θ para o qual a tração nos dois cabos é tão pequena quanto possível, e (b) o valor correspondente da tração.

$$(1) \alpha = 35^\circ, \beta = 75^\circ, P = 1,6 \text{ kN}$$

$$(2) \alpha = 50^\circ, \beta = 30^\circ, P = 2,4 \text{ kN}$$

$$(3) \alpha = 40^\circ, \beta = 60^\circ, P = 1,0 \text{ kN}$$

2.C5 Os cabos AC e BC estão conectados em C e são carregados, tal como mostra a figura. Sabendo que $P = 450 \text{ N}$, (a) expresse a tração em cada cabo como uma função de θ . (b) Plote a tração em cada cabo para $0 \leq \theta \leq 90^\circ$. (c) A partir do gráfico obtido na parte a, determine o menor valor de θ para o qual ambos os cabos ficam tracionados.

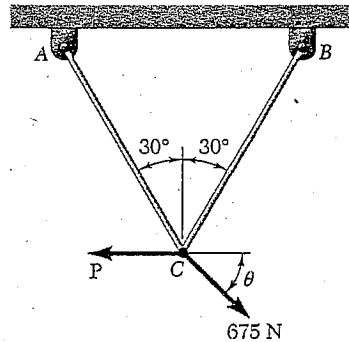


Fig. P2.C5

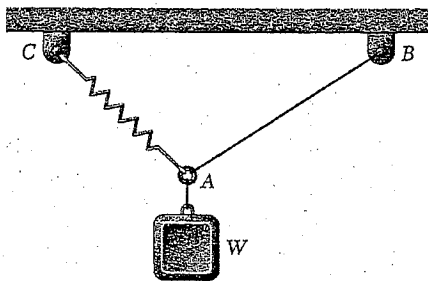


Fig. P2.C6

2.C6 Um recipiente de peso W é suspenso através do anel A ao qual são conectados um cabo AB de comprimento 5 m e uma mola AC . A constante da mola é 100 N/m e seu comprimento não-deformado é de 3 m . Determine a tração no cabo quando (a) $W = 120 \text{ N}$ e (b) $W = 160 \text{ N}$.

2.C7 Um acrobata está caminhando em uma corda-bamba de comprimento $L = 24,09 \text{ m}$, fixada nos suportes A e B a uma distância de $24,0 \text{ m}$ entre si. O peso combinado do acrobata e de sua vara de equilíbrio é de 900 N , e o atrito entre suas sapatilhas e a corda é grande o suficiente para impedi-lo de escorregar. Desprezando o peso da corda e qualquer deformação elástica, use um aplicativo computacional para determinar a deflexão y e as forças de tração nas porções AC e BC da corda para valores de x entre $0,15 \text{ m}$ e 12 m , usando incrementos de $0,15 \text{ m}$. A partir dos resultados obtidos, determine (a) a máxima deflexão da corda, (b) a máxima força de tração na corda, (c) os valores mínimos das forças de tração nas porções AC e BC da corda.

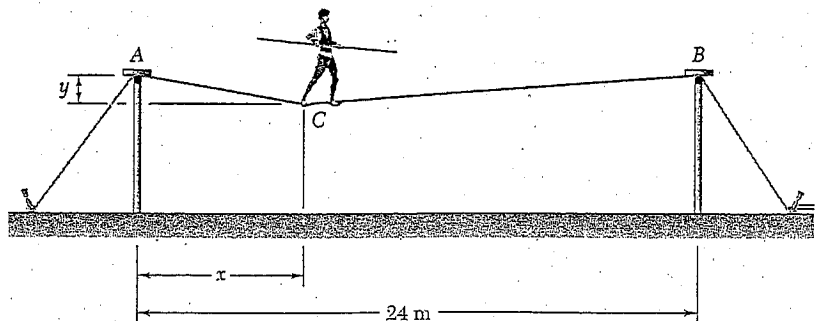


Fig. P2.C7

2.C8 A torre de transmissão mostrada é sustentada por três cabos conectados a um pino em A e ancorados nos pontos B , C e D . O cabo AD tem 21 m de comprimento e a tração nesse cabo é de 20 kN. (a) Expresse os componentes x , y e z da força exercida pelo cabo AD sobre a fixação em D e os ângulos correspondentes θ_x , θ_y e θ_z em termos de α . (b) Plote os componentes da força e os ângulos θ_x , θ_y e θ_z para $0 \leq \alpha \leq 60^\circ$.

2.C9 Uma torre é sustentada pelos cabos AB e AC . Um operário amarra uma corda de 12 m de comprimento à torre em A e exerce uma força constante de 160 N sobre a corda. (a) Expresse a tração em cada cabo como função de θ , sabendo que a resultante das forças de tração nos cabos e na corda está dirigida para baixo. (b) Plote a tração em cada cabo em função de θ para $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ e, a partir do gráfico, determine a faixa de valores de θ em que ambos os cabos estão tracionados.

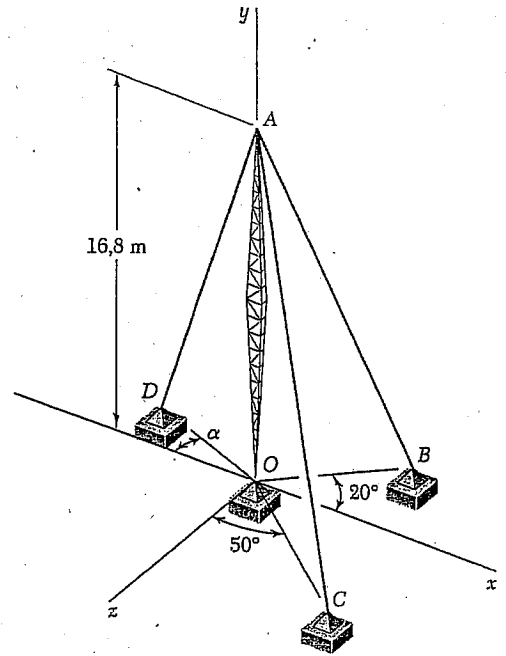


Fig. P2.C8

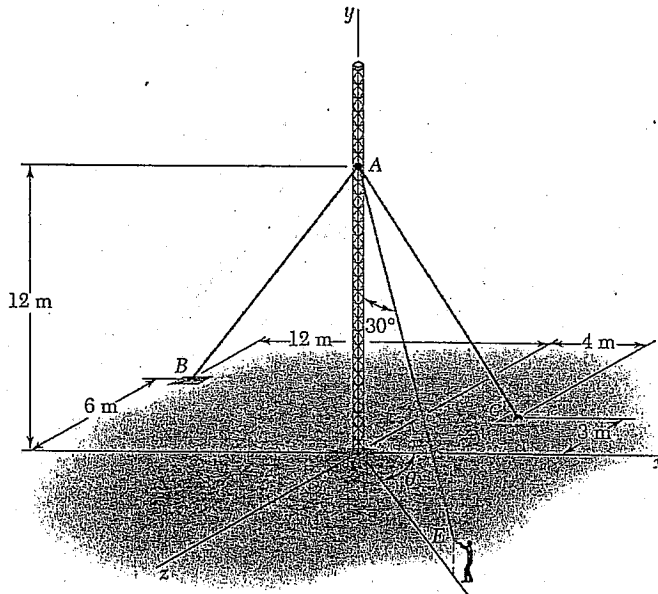


Fig. P2.C9

2.C10 Os cursores A e B estão conectados por um fio de 25 cm de comprimento e podem deslizar livremente sobre hastes sem atrito. Se uma força Q de intensidade 110 N é aplicada no cursor B , como mostra a figura, determine a tração no fio e a intensidade correspondente da força P necessária para se manter o equilíbrio. Plote a tração no fio e a intensidade da força P para $0 \leq x \leq 12,5$ cm.

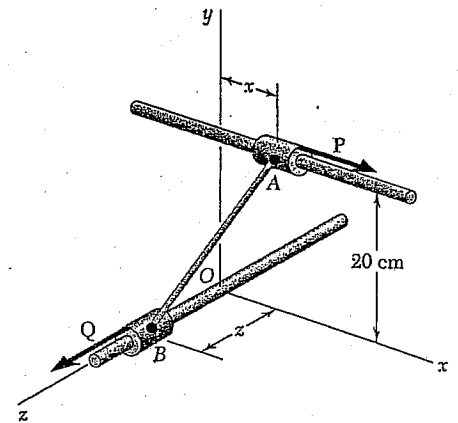


Fig. P2.C10

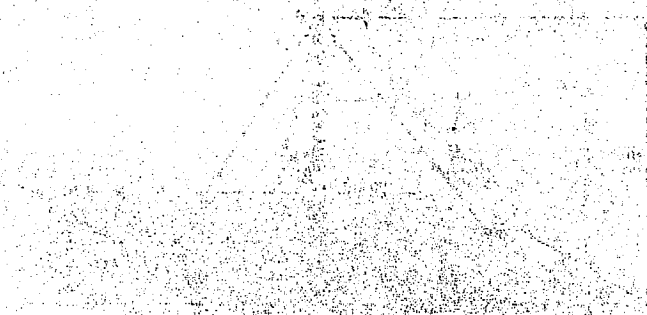
Corpos Rígidos: Sistemas Equivalentes de Forças

3



Neste capítulo, será mostrado que as forças exercidas pelos quatro rebocadores sobre o USS Pasadena poderiam ser substituídas por uma única força equivalente exercida por um rebocador.

Faint, illegible text at the top of the page, possibly a header or introductory paragraph.



Faint, illegible text at the bottom of the page, possibly a footer or concluding paragraph.

CORPOS RÍGIDOS: SISTEMAS EQUIVALENTES DE FORÇAS

- 3.1 Introdução
- 3.2 Forças Externas e Forças Internas
- 3.3 Princípio da Transmissibilidade. Forças Equivalentes
- 3.4 Produto Vetorial de Dois Vetores
- 3.5 Produtos Vetoriais Expressos em Termos de Componentes Retangulares
- 3.6 Momento de uma Força em Relação a um Ponto
- 3.7 Teorema de Varignon
- 3.8 Componentes Retangulares do Momento de uma Força
- 3.9 Produto Escalar de Dois Vetores
- 3.10 Produto Triplo Misto de Três Vetores
- 3.11 Momento de uma Força em Relação a um Dado Eixo
- 3.12 Momento de um Binário
- 3.13 Binários Equivalentes
- 3.14 Adição de Binários
- 3.15 Binários Podem Ser Representados por Vetores
- 3.16 Substituição de uma Dada Força por uma Força em O e um Binário
- 3.17 Redução de um Sistema de Forças a Uma Força e Um Binário
- 3.18 Sistemas Equivalentes de Forças
- 3.19 Sistemas Equipolentes de Vetores
- 3.20 Casos Particulares de Redução de um Sistema de Forças
- 3.21 Redução de um Sistema de Forças a um Torsor

3.1 INTRODUÇÃO

No capítulo anterior, admitiu-se que cada corpo considerado poderia ser tratado como uma única partícula. Tal ponto de vista, porém, nem sempre é possível e um corpo, em geral, deve ser tratado como uma combinação de um grande número de partículas. O tamanho do corpo terá de ser levado em conta, bem como o fato de que as forças atuarão sobre partículas diferentes e, portanto, terão diferentes pontos de aplicação.

Supõe-se que a maioria dos corpos considerados em mecânica elementar são *rígidos*, sendo um *corpo rígido* definido como aquele que não se deforma. Entretanto, as estruturas e máquinas reais nunca são absolutamente rígidas e se deformam sob a ação das cargas a que estão sujeitas. Mas essas deformações geralmente são pequenas e não afetam de modo apreciável as condições de equilíbrio ou movimento da estrutura em consideração. São importantes, no entanto, na medida em que a resistência da estrutura a falhas é levada em consideração, e são estudadas em mecânica dos materiais.

Neste capítulo, você estudará o efeito de forças exercidas sobre um corpo rígido e aprenderá a substituir um dado sistema de forças por um sistema equivalente mais simples. Essa análise terá por base o pressuposto fundamental de que o efeito de uma dada força sobre um corpo rígido permanece inalterado se essa força for deslocada ao longo da sua linha de ação (*princípio da transmissibilidade*). Por conseguinte, forças que atuam sobre um corpo rígido podem ser representadas por *vetores deslizantes*, como indicamos anteriormente na Seção 2.3.

Dois conceitos importantes associados ao efeito de uma força sobre um corpo rígido são o *momento de uma força em relação a um ponto* (Seção 3.6) e o *momento de uma força em relação a um eixo* (Seção 3.11). Uma vez que a determinação dessas grandezas envolve o cálculo de produtos vetoriais e produtos escalares de dois vetores, os fundamentos de álgebra vetorial serão apresentados neste capítulo e aplicados na solução de problemas que envolvam forças que atuam sobre corpos rígidos.

Outro conceito importante apresentado neste capítulo é o de *binário*, ou seja, a combinação de duas forças de mesma intensidade, linhas de ação paralelas e sentido oposto (Seção 3.12). Como você verá, qualquer sistema de forças que atuam sobre um corpo rígido pode ser substituído por um sistema equivalente que consista em uma força que atua em um dado ponto e um binário. Esse sistema básico é denominado *sistema força-binário*. No caso de forças paralelas, coplanares ou concorrentes, o sistema força-binário equivalente pode ainda ser reduzido a uma única força, denominada *resultante* do sistema, ou a um único binário, denominado *binário resultante* do sistema.

3.2 FORÇAS EXTERNAS E FORÇAS INTERNAS

As forças que atuam sobre corpos rígidos podem ser separadas em dois grupos: (1) *forças externas* e (2) *forças internas*.

1. As *forças externas* representam a ação de outros corpos sobre o corpo rígido em consideração. São inteiramente responsáveis pelo comportamento externo do corpo rígido. As forças externas vão causar o movimento do corpo ou garantir que ele permaneça em repouso. Neste capítulo e nos Caps. 4 e 5, deveremos nos preocupar apenas com forças externas.

2. As *forças internas* são as forças que mantêm juntas as partículas que formam o corpo rígido. Se o corpo rígido é composto estruturalmente de várias partes, as forças que mantêm juntas as partes componentes também são definidas como forças internas. As forças internas serão consideradas nos Caps. 6 e 7.

Como um exemplo de forças externas, consideremos as forças atuantes sobre um caminhão-enguilhado que três pessoas puxam para a frente através de uma corda amarrada no pára-choque dianteiro (Fig. 3.1). As forças externas que atuam sobre o caminhão estão mostradas em um *diagrama de corpo livre* (Fig. 3.2). Consideremos primeiro o *peso* do caminhão. Embora ele englobe o efeito da atração da Terra sobre cada uma das partículas que compõem o caminhão, o peso pode ser representado por uma única força W . O *ponto de aplicação* desta força, isto é, o ponto onde a força atua, é definido como sendo o *centro de gravidade* do caminhão. Será visto no Cap. 5 como os centros de gravidade podem ser determinados. O peso W tende a mover o caminhão verticalmente para baixo. De fato, ele realmente faria o caminhão mover-se para baixo, isto é, a cair, não fosse a presença do solo. O solo opõe-se ao movimento descendente do caminhão através das reações R_1 e R_2 . Essas forças são exercidas *pelo solo sobre* o caminhão e, portanto, devem ser incluídas entre as forças externas que agem sobre o caminhão.

As pessoas que puxam a corda exercem uma força F . O ponto de aplicação de F está sobre o pára-choque dianteiro. A força F tende a mover o caminhão para a frente em linha reta e realmente o fará, já que não há forças externas opondo-se a esse movimento. (Para simplificar, foi desprezada aqui a resistência de rolagem.) Esse movimento do caminhão para a frente, durante o qual cada linha reta mantém sua orientação original (o fundo do caminhão permanece horizontal e as paredes permanecem verticais) é conhecido como *translação*. Outras forças podem causar no caminhão um tipo diferente de movimento. Por exemplo, uma força exercida por um macaco colocado sob o eixo dianteiro faria o caminhão girar em torno do eixo traseiro. Tal movimento denomina-se *rotação*. Logo, pode-se concluir que cada uma das *forças externas* que atuam sobre um *corpo rígido* pode, caso não seja contrabalançada, imprimir ao corpo rígido um movimento de translação ou de rotação, ou ambos.

3.3 PRINCÍPIO DA TRANSMISSIBILIDADE. FORÇAS EQUIVALENTES

O *princípio da transmissibilidade* estabelece que as condições de equilíbrio ou movimento de um corpo rígido permanecerão inalteradas se uma força F que atue em um dado ponto do corpo rígido for substituída por uma força F' de intensidade, direção e sentido iguais, mas atuando em um ponto diferente, *desde que essas duas forças tenham igual linha de ação* (Fig. 3.3). As duas forças F e F' têm o mesmo efeito sobre o corpo rígido, e diz-se que são *equivalentes*. O princípio da transmissibilidade, que estabelece que a ação de uma força pode ser *transmitida* ao longo da sua linha de ação, está baseado em evidência experimental. Esse princípio *não pode* ser deduzido das propriedades estabelecidas até aqui neste texto e, portanto, deve ser aceito como uma lei experimental. Todavia, como veremos na Seção 16.5,

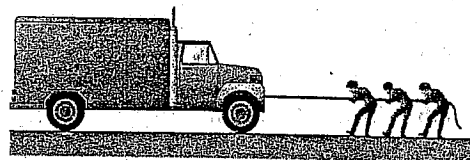


Fig. 3.1

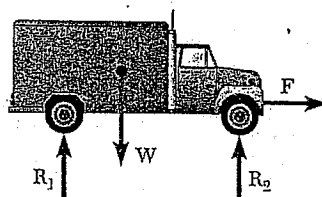


Fig. 3.2

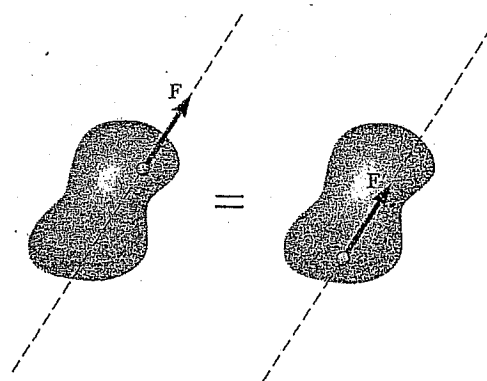


Fig. 3.3

o princípio da transmissibilidade pode ser deduzido do estudo da dinâmica dos corpos rígidos, mas, para esse estudo, é necessária a introdução da segunda e da terceira leis de Newton, bem como de uma gama de outros conceitos. Logo, nosso estudo da estática dos corpos rígidos será baseado nos três princípios apresentados até agora, ou seja, a lei do paralelogramo de adição, a primeira lei de Newton e o princípio da transmissibilidade.

No Cap. 2, foi indicado que as forças que atuam sobre uma partícula podem ser representadas por vetores. Esses vetores tinham um ponto de aplicação bem definido – a saber, a própria partícula – e, desse modo, eram vetores fixos. No caso de forças que atuam sobre um corpo rígido, porém, o ponto de aplicação da força não importa, desde que a linha de ação permaneça inalterada. Logo, forças que atuam sobre um corpo rígido devem ser representadas por um tipo diferente de vetor, denominado *vetor deslizante*, pois as forças são livres para deslizar ao longo de suas linhas de ação. Devemos notar que todas as propriedades que serão deduzidas nas próximas seções para as forças que atuam sobre um corpo rígido serão válidas de modo mais geral para qualquer sistema de vetores deslizantes. Todavia, a fim de manter nossa apresentação mais intuitiva, iremos obtê-las em termos de forças físicas em vez de vetores deslizantes matemáticos.

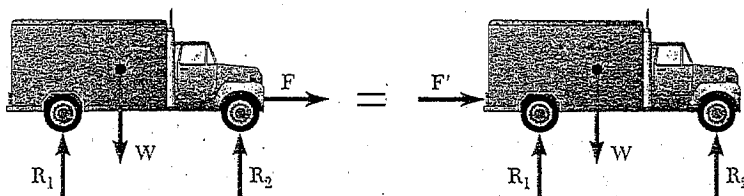


Fig. 3.4

Retornando ao exemplo do caminhão, observemos primeiro que a linha de ação da força F é uma linha horizontal que passa através de ambos os pára-choques dianteiro e traseiro (Fig. 3.4). Aplicando o princípio da transmissibilidade, podemos então substituir F por uma *força equivalente* F' que atua sobre o pára-choque traseiro. Em outras palavras, as condições de movimento não são afetadas e todas as outras forças externas que atuam sobre o caminhão (W , R_1 , R_2) permanecem inalteradas se as pessoas empurrarem pelo pára-choque traseiro em vez de puxar pelo pára-choque dianteiro do caminhão.

Contudo, o princípio da transmissibilidade e o conceito de forças equivalentes têm limitações. Considere, por exemplo, uma barra curta AB sujeita a forças axiais iguais e opostas P_1 e P_2 , como mostra a Fig. 3.5a. De acordo com o princípio da transmissibilidade, a força P_2 pode ser substituída por uma força P'_2 com a mesma intensidade, a mesma

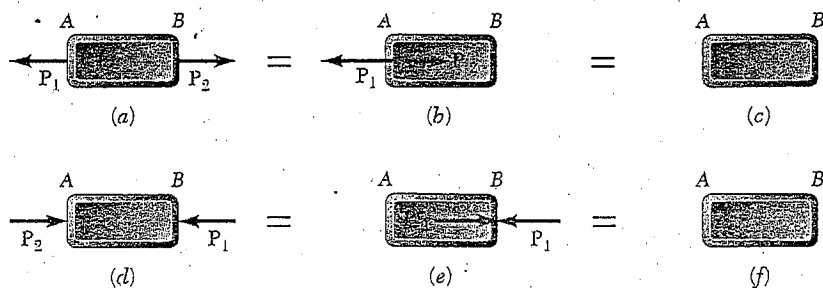


Fig. 3.5

linha de ação e o mesmo sentido, mas atuando em A em vez de B (Fig. 3.5b). As forças P_1 e P'_2 que atuam sobre a mesma partícula podem ser adicionadas de acordo com as regras do Cap. 2 e, como essas forças são iguais e opostas, sua soma é igual a zero. Logo, em termos do comportamento externo da barra, o sistema original de forças mostrado na Fig. 3.5a é equivalente a nenhuma força aplicada (Fig. 3.5c).

Considere agora as duas forças iguais e opostas P_1 e P_2 atuando sobre a barra AB, como mostra a Fig. 3.5d. A força P_2 pode ser substituída por uma força P'_2 de igual intensidade, igual linha de ação e igual sentido, mas atuando em B em vez de em A (Fig. 3.5e). As forças P_1 e P'_2 podem então ser adicionadas e sua soma é zero de novo (Fig. 3.5f). Logo, do ponto de vista da mecânica dos corpos rígidos, os sistemas mostrados na Fig. 3.5a e d são equivalentes. Mas as forças internas e as deformações produzidas pelos dois sistemas são nitidamente diferentes. A barra da Fig. 3.5a está sob tração e, não sendo absolutamente rígida, irá aumentar ligeiramente de comprimento; a barra da Fig. 3.5d está sob compressão e, não sendo absolutamente rígida, irá diminuir ligeiramente de comprimento. Portanto, o princípio da transmissibilidade, embora possa ser usado livremente para se determinarem as condições de movimento ou de equilíbrio de corpos rígidos e para o cálculo das forças externas que atuam sobre esses corpos, deve ser evitado ou, pelo menos, utilizado com cuidado na determinação de forças internas e deformações.

3.4 PRODUTO VETORIAL DE DOIS VETORES

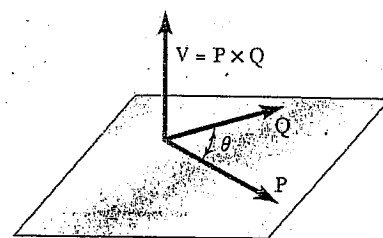
A fim de obtermos uma compreensão melhor do efeito de uma força sobre um corpo rígido, vamos apresentar agora um novo conceito, o conceito de *momento de uma força em relação a um ponto*. Esse conceito será mais bem compreendido e aplicado mais efetivamente se antes acrescentarmos às ferramentas matemáticas de que dispomos o *produto vetorial* de dois vetores.

O produto vetorial de dois vetores P e Q é definido como o vetor V que satisfaz às seguintes condições.

1. A linha de ação de V é perpendicular ao plano que contém P e Q (Fig. 3.6a).
2. A intensidade de V é o produto das intensidades de P e Q e do seno do ângulo θ formado por P e Q (cujo valor será sempre menor ou igual a 180°); temos, então,

$$V = PQ \sin \theta \quad (3.1)$$

3. A direção e o sentido de V são obtidos pela *regra da mão direita*. Feche a mão direita e posicione-a de modo que seus dedos se curvem no mesmo sentido da rotação em θ que leva o vetor P a ficar alinhado com o vetor Q ; seu polegar irá então indicar a direção e o sentido do vetor V (Fig. 3.6b). Observe que, se não tiverem um ponto-comum de aplicação, P e Q deverão primeiro ser redesenhados com as origens no mesmo ponto. Os três vetores P , Q e V — tomados nesta ordem — formam uma *tríade orientada diretamente*.¹



(a)



(b)

Fig. 3.6

¹ Devemos observar que os eixos x , y e z usados no Cap. 2 formam um sistema de eixos ortogonais orientado diretamente e que os vetores unitários i , j e k definidos na Seção 2.12 formam uma tríade ortogonal orientada diretamente.

Conforme mencionamos anteriormente, o vetor V que satisfaz essas três condições (que o definem univocamente) é citado como o produto vetorial de P e Q ; esse vetor é representado pela expressão matemática

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} \quad (3.2)$$

Tem-se da Eq. (3.1) que, quando dois vetores P e Q têm a mesma direção e sentidos iguais ou opostos, seu produto vetorial é nulo. No caso geral em que o ângulo θ formado pelos dois vetores não é 0° nem 180° , é possível fornecer uma interpretação geométrica simples da Eq. (3.1): a intensidade V do produto vetorial de P e Q é igual à área do paralelogramo que tem P e Q como lados (Fig. 3.7). Logo, o produto vetorial $P \times Q$ ficará inalterado se substituirmos Q por um vetor Q' que é coplanar com P e Q e tal que a linha que une as pontas de Q e Q' seja paralela a P . Escrevemos

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}' \quad (3.3)$$

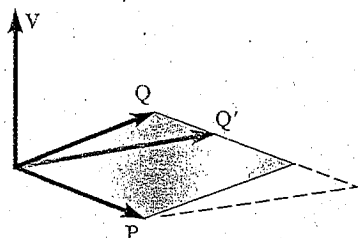


Fig. 3.7

Da terceira condição usada para definir o produto vetorial V de P e Q , ou seja, a condição que estabelece que P , Q e V devam formar uma triade orientada diretamente, conclui-se que os produtos vetoriais *não são comutativos*, ou seja, $Q \times P$ não é igual a $P \times Q$. De fato, podemos constatar facilmente que $Q \times P$ é representado pelo vetor $-V$, que é igual e oposto a V . Escrevemos então

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \quad (3.4)$$

Exemplo. Vamos calcular o produto vetorial $V = P \times Q$, onde o vetor P tem intensidade 6 e está no plano xz a um ângulo de 30° com o eixo x , e onde o vetor Q é de intensidade 4 e está sobre o eixo x (Fig. 3.8).

Segue-se diretamente da definição de produto vetorial que o vetor V deve estar ao longo do eixo y , deve ter a intensidade

$$V = PQ \sin \theta = (6)(4) \sin 30^\circ = 12$$

e deve estar direcionado para cima.

Vimos que propriedade comutativa não se aplica aos produtos vetoriais. Podemos nos perguntar se a propriedade *distributiva* vale, ou seja, se a relação

$$\mathbf{P} \times (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \times \mathbf{Q}_2 \quad (3.5)$$

é válida. A resposta é *sim*. Muitos leitores provavelmente estarão propensos a aceitar sem demonstração formal uma resposta que eles intuitivamente sentem que é correta. Entretanto, como toda a estrutura tanto da álgebra vetorial como da estática depende da relação (3.5), devemos despendar um tempo em deduzi-la.

Sem perda do caráter genérico, podemos admitir que P esteja dirigido ao longo do eixo y (Fig. 3.9a). Q represente a soma de Q_1 e Q_2 , traçamos então perpendiculares a partir das pontas de Q , Q_1 e Q_2 até o plano xz , definindo desse modo os vetores Q' , Q'_1 e Q'_2 . Esses vetores serão referidos, respectivamente, como as *projeções* de Q , Q_1 e Q_2 sobre o plano xz . Retomando a propriedade expressa pela Eq. (3.3), notamos que o primeiro membro da Eq. (3.5) pode ser substituído por $P \times Q'$ e

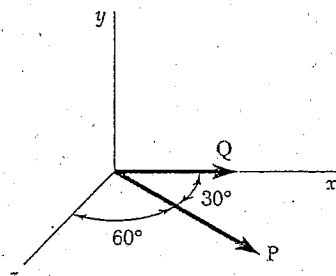


Fig. 3.8

que, analogamente, os produtos vetoriais $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}_1$ e $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}_2$ podem ser substituídos, respectivamente, por $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}'_1$ e $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}'_2$. Logo, a relação a ser demonstrada pode ser escrita na forma

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q}' = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}'_1 + \mathbf{P} \times \mathbf{Q}'_2 \quad (3.5')$$

Observamos agora que $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}'$ pode ser obtido a partir de \mathbf{Q}' , multiplicando-se esse vetor pelo escalar P e girando-o 90° no sentido anti-horário no plano zx (Fig. 3.9b); os outros dois produtos vetoriais na Eq. (3.5') podem ser obtidos da mesma forma a partir de \mathbf{Q}'_1 e \mathbf{Q}'_2 , respectivamente. Agora, como a projeção de um paralelogramo sobre um

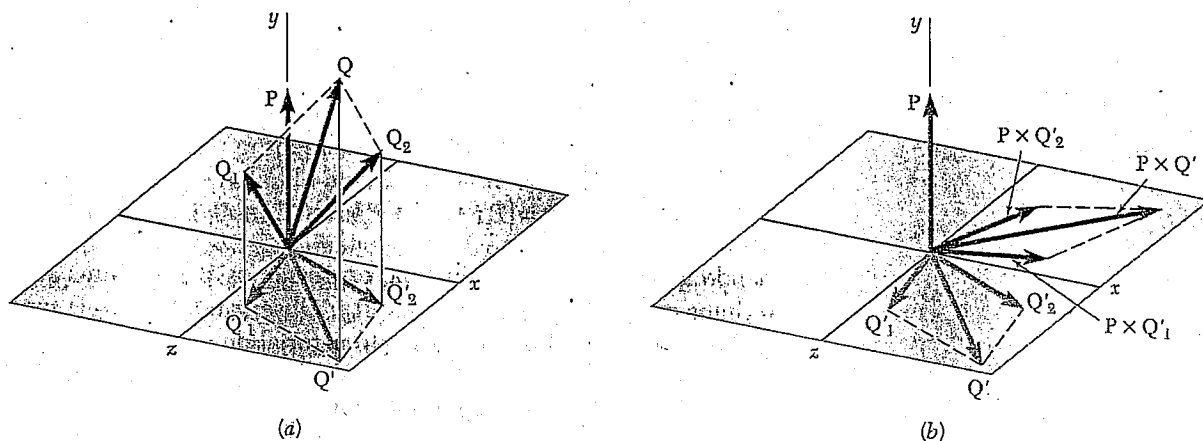


Fig. 3.9

plano arbitrário é um paralelogramo, a projeção \mathbf{Q}' da soma \mathbf{Q} de \mathbf{Q}_1 e \mathbf{Q}_2 deve ser a soma das projeções \mathbf{Q}'_1 e \mathbf{Q}'_2 de \mathbf{Q}_1 e \mathbf{Q}_2 sobre o mesmo plano (Fig. 3.9a). Esta relação entre os vetores \mathbf{Q}' , \mathbf{Q}'_1 e \mathbf{Q}'_2 ainda irá valer depois que os três vetores tenham sido multiplicados pelo escalar P e girados 90° (Fig. 3.9b). Logo, a relação (3.5') está demonstrada, e podemos agora estar seguros de que a propriedade distributiva vale para os produtos vetoriais.

Uma terceira propriedade, a propriedade associativa, não se aplica aos produtos vetoriais; em geral, temos

$$(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \times \mathbf{S} \neq \mathbf{P} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{S}) \quad (3.6)$$

3.5 PRODUTOS VETORIAIS EXPRESSOS EM TERMOS DE COMPONENTES RETANGULARES

Vamos determinar agora o produto vetorial de dois vetores unitários quaisquer entre \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} , que foram definidos no Cap. 2. Considere primeiro o produto $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ (Fig. 3.10a). Como ambos os vetores têm intensidade igual a 1 e como eles formam um ângulo reto entre si, seu produto vetorial também será um vetor unitário. Esse vetor unitário deve ser \mathbf{k} , pois os vetores \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} são mutuamente perpendiculares e formam uma tríade orientada diretamente. Por outro lado, resulta da regra da mão direita, mencionada na Seção 3.4 Produto vetorial de dois vetores, que o produto $\mathbf{j} \times \mathbf{i}$ será igual a $-\mathbf{k}$ (Fig. 3.10b). Finalmente, deve-se observar

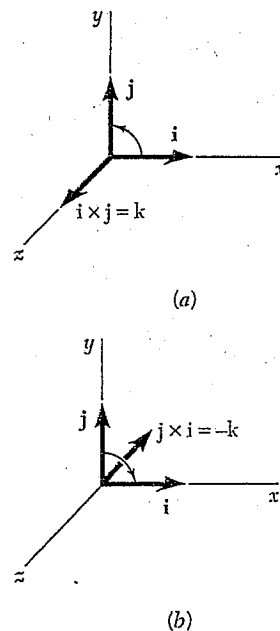


Fig. 3.10

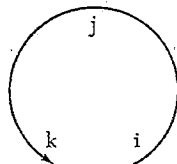


Fig. 3.11

que o produto vetorial de um vetor unitário por si próprio, tal como $\mathbf{i} \times \mathbf{i}$, é igual a zero, pois ambos os vetores têm a mesma direção. Os produtos vetoriais dos vários pares possíveis de vetores unitários são

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{i} &= 0 & \mathbf{j} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} &= 0 & \mathbf{k} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{j} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Arranjando as três letras que representam os vetores unitários em um círculo, em ordem anti-horária (Fig. 3.11), podemos simplificar a determinação do sinal do produto vetorial de dois vetores unitários. O produto vetorial de dois vetores unitários será positivo se eles seguirem um ao outro em ordem anti-horária e será negativo se seguirem um ao outro em ordem horária.

Podemos agora expressar o produto vetorial \mathbf{V} de dois vetores dados \mathbf{P} e \mathbf{Q} em termos dos componentes retangulares desses vetores. Decompondo \mathbf{P} e \mathbf{Q} , escrevemos primeiro

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = (P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}) \times (Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k})$$

Usando a propriedade distributiva, expressamos \mathbf{V} como uma soma de produtos vetoriais, tais como $P_x \mathbf{i} \times Q_y \mathbf{j}$. Observando que cada uma das expressões obtidas é igual ao produto vetorial de dois vetores unitários, tais como $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$, multiplicado pelo produto de dois escalares, tais como $P_x Q_y$, e retomando as identidades (3.7), obtemos, após fatoração em relação a \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} ,

$$\mathbf{V} = (P_y Q_z - P_z Q_y) \mathbf{i} + (P_z Q_x - P_x Q_z) \mathbf{j} + (P_x Q_y - P_y Q_x) \mathbf{k} \quad (3.8)$$

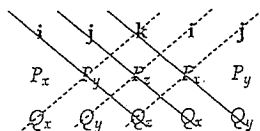
Os componentes retangulares do produto vetorial \mathbf{V} são determinados então como

$$\begin{aligned} V_x &= P_y Q_z - P_z Q_y \\ V_y &= P_z Q_x - P_x Q_z \\ V_z &= P_x Q_y - P_y Q_x \end{aligned} \quad (3.9)$$

Retornando à Eq. (3.8), observamos que o segundo elemento representa a expansão de um determinante. O produto vetorial \mathbf{V} pode então ser representado na seguinte forma, mais fácil de memorizar:²

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

² Qualquer determinante que consista em três linhas e três colunas pode ser calculado repetindo-se a primeira e a segunda colunas e formando-se produtos ao longo de cada linha diagonal. A soma dos produtos obtidos ao longo das linhas tracejadas é então subtraída da soma dos produtos obtidos ao longo das linhas em preto.



Vamos considerar agora uma força F que atua sobre um corpo rígido (Fig. 3.12a). Como sabemos, a força F é representada por um vetor que define sua intensidade, sua direção e seu sentido. Entretanto, o efeito da força sobre o corpo rígido depende também do seu ponto de aplicação A . A posição de A pode ser convenientemente definida pelo vetor r que liga o ponto de referência fixo O com A ; esse vetor é conhecido como *vetor posição* de A .³ O vetor posição r e a força F definem o plano mostrado na Fig. 3.12a.

Vamos definir o *momento de F em relação a O* como o produto vetorial de r e F :

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.11)$$

De acordo com a definição de produto vetorial dada na Seção 3.4, o momento M_O deve ser perpendicular ao plano que contém O e a força F . O sentido de M_O é definido pelo sentido da rotação que faz o vetor r ficar alinhado com o vetor F ; essa rotação será vista como *anti-horária* por um observador localizado na ponta de M_O . Outro modo de se definir o sentido de M_O é fornecido por uma variação da regra da mão direita: feche a mão direita e posicione-a de modo que seus dedos fiquem curvados no sentido da rotação que F imprimiria ao corpo rígido em relação a um eixo fixo dirigido ao longo da linha de ação de M_O : seu polegar irá indicar o sentido do momento M_O (Fig. 3.12b).

Finalmente, representando por θ o ângulo formado entre as linhas de ação do vetor posição r e a força F , concluímos que a intensidade do momento de F em relação a O é

$$M_O = rF \sin \theta = Fd \quad (3.12)$$

onde d representa a distância perpendicular de O até a linha de ação de F . Como a tendência de uma força F de fazer um corpo rígido girar em torno de um eixo fixo perpendicular à força depende da distância de F desse eixo bem como da intensidade de F , notamos que *a intensidade de M_O mede a tendência de uma força F de fazer o corpo rígido girar em torno de um eixo fixo dirigido ao longo de M_O .*

No Sistema Internacional de Unidades, no qual a força é expressa em newtons (N) e a distância em metros (m), o momento de uma força é expresso em newton-metros (N · m).

Podemos observar que, embora o momento M_O de uma força em relação a um ponto dependa da intensidade, da linha de ação e do sentido da força, ele *não* depende da posição real do ponto de aplicação da força ao longo da sua linha de ação. De modo inverso, o momento M_O de uma força F não caracteriza a posição do ponto de aplicação de F .

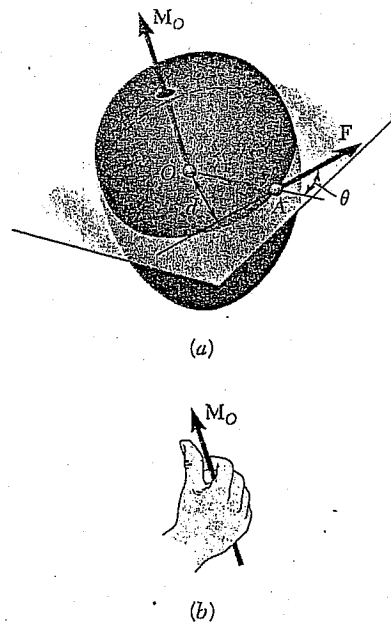


Fig. 3.12

³ Podemos facilmente verificar que os vetores posição obedecem à lei da adição de vetores e, portanto, são vetores verdadeiros. Considere, por exemplo, os vetores posição r e r' de A com relação a dois pontos de referência O e O' e o vetor posição s de O com relação a O' (Fig. 3.40a, Seção 3.16). Verificamos que o vetor posição $r' = \overrightarrow{O'A}$ pode ser obtido dos vetores posição $s = \overrightarrow{O'O}$ e $r = \overrightarrow{OA}$, aplicando-se a regra do triângulo para adição de vetores.

Todavia, como veremos agora, o momento M_O de uma força F de intensidade, direção e sentido conhecidos *define completamente a linha de ação de F*. De fato, a linha de ação de F deve estar em um plano que contém O e ser perpendicular ao momento M_O ; sua distância d de O deve ser igual ao quociente M_O/F das intensidades de M_O e F ; e o sentido de M_O determina se a linha de ação de F deve ser traçada de um lado ou de outro do ponto O .

Lembremos, da Seção 3.3, que o princípio da transmissibilidade estabelece que duas forças F e F' são equivalentes (isto é, têm o mesmo efeito sobre um corpo rígido) se tiverem a mesma intensidade, a mesma linha de ação e o mesmo sentido. Esse princípio pode agora ser reescrito da seguinte maneira: *duas forças F e F' são equivalentes se, e somente se, forem iguais* (isto é, se tiverem a mesma intensidade, a mesma direção e o mesmo sentido) *e têm momentos iguais em relação a um dado ponto O* . Logo, as condições necessárias e suficientes para que duas forças F e F' sejam equivalentes são

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}' \text{ e } M_O = M'_O \quad (3.13)$$

Devemos observar, a partir desse enunciado, que, se as relações (3.13) valem para um dado ponto O , irão valer para qualquer outro ponto.

Problemas envolvendo apenas duas dimensões. Muitas aplicações lidam com estruturas bidimensionais, ou seja, estruturas que têm comprimento e largura, mas profundidade desprezível e estão sujeitas a forças contidas no plano da estrutura. Estruturas bidimensionais e as forças que atuam sobre elas podem ser diretamente representadas em uma folha de papel ou em um quadro negro. Sua análise, portanto, é consideravelmente mais simples que a das estruturas e forças tridimensionais.



Fig. 3.13

Considere, por exemplo, uma placa rígida sujeita a uma força F (Fig. 3.13). O momento de F em relação a um ponto O escolhido no plano da figura é representado por um vetor M_O de intensidade Fd , perpendicular ao plano. No caso da Fig. 3.13a, o vetor M_O aponta *para fora* do papel, enquanto no caso da Fig. 3.13b ele aponta *para dentro* do papel. Olhando para a figura, observamos, no primeiro caso, que F tende a girar a placa no sentido anti-horário e, no segundo caso, que ela tende a girar a placa no sentido horário. Logo, é natural referir-se ao sentido do momento de F em relação a O na Fig. 3.13a como anti-horário ↺, e na Fig. 3.13b como horário ↻.

Como o momento de uma força F que atua no plano da figura deve ser perpendicular a esse plano, precisamos especificar apenas a *intensidade* e o *sentido* do momento de F em relação a O . Isto pode ser feito atribuindo-se à intensidade M_O do momento um sinal positivo ou negativo conforme o vetor M_O aponte para fora ou para dentro do papel, respectivamente.

A propriedade distributiva dos produtos vetoriais pode ser usada para se determinar o momento da resultante de várias forças concorrentes. Se várias forças F_1, F_2, \dots são aplicadas ao mesmo ponto A (Fig. 3.14) e se representarmos por r o vetor posição de A , segue-se imediatamente da Eq. (3.5) da Seção 3.4 que

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \dots \quad (3.14)$$

Em palavras, o momento em relação a um dado ponto O da resultante de diversas forças concorrentes é igual à soma dos momentos das várias forças em relação ao mesmo ponto O . Esta propriedade, que foi originalmente estabelecida pelo matemático francês Pierre Varignon (1654-1722) bem antes da introdução da álgebra vetorial, é conhecida como *teorema de Varignon*.

A relação (3.14) torna possível a substituição da determinação direta do momento de uma força \mathbf{F} pela determinação dos momentos de duas ou mais forças componentes. Como você verá na próxima seção, \mathbf{F} geralmente será decomposta em componentes paralelos aos eixos de coordenadas. Todavia, pode ser mais expedito em algumas circunstâncias decompor \mathbf{F} em componentes que não sejam paralelos aos eixos de coordenadas (ver Problema Resolvido 3.3).

3.8 COMPONENTES RETANGULARES DO MOMENTO DE UMA FORÇA

Em geral, a determinação do momento de uma força no espaço será consideravelmente simplificada se a força e o vetor posição do seu ponto de aplicação forem decompostos em componentes retangulares x , y e z . Considere, por exemplo, o momento \mathbf{M}_O em relação a O de uma força \mathbf{F} cujos componentes são F_x, F_y e F_z e que é aplicada a um ponto A de coordenadas x, y e z (Fig. 3.15). Observando que os componentes do vetor posição \mathbf{r} são respectivamente iguais às coordenadas x, y e z do ponto A , escrevemos

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \quad (3.16)$$

Substituindo as expressões para \mathbf{r} e \mathbf{F} das Eqs. (3.15) e (3.16) em

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

e retomando os resultados obtidos na Seção 3.5, escrevemos o momento \mathbf{M}_O de \mathbf{F} em relação a O na seguinte forma

$$\mathbf{M}_O = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k} \quad (3.17)$$

onde os componentes M_x, M_y e M_z são definidos pelas relações

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \quad (3.18)$$

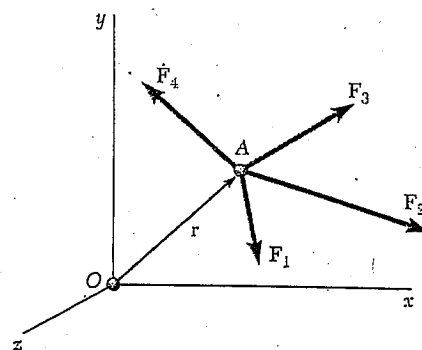


Fig. 3.14

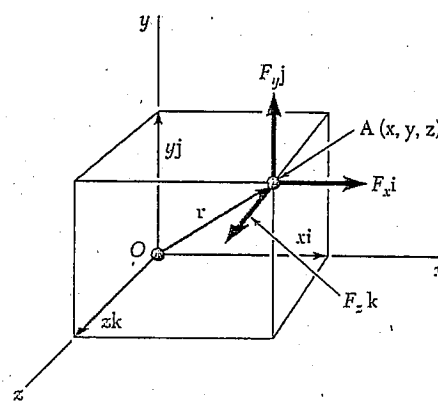


Fig. 3.15

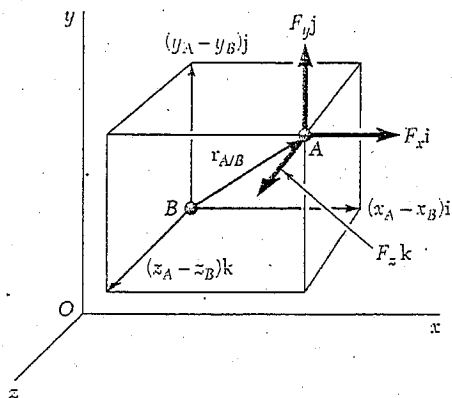


Fig. 3.16

Como você verá na Seção 3.11, os componentes escalares M_x , M_y e M_z do momento \mathbf{M}_O medem a tendência da força \mathbf{F} de imprimir a um corpo rígido um movimento de rotação em torno dos eixos x , y e z , respectivamente. Substituindo a Eq. (3.18) na Eq. (3.17), podemos também escrever \mathbf{M}_O na forma de um determinante

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.19)$$

Para calcular o momento \mathbf{M}_B em relação a um ponto B arbitrário de uma força \mathbf{F} aplicada em A (Fig. 3.16), devemos substituir o vetor posição \mathbf{r} na Eq. (3.11) por um vetor traçado de B até A . Esse vetor é o *vetor posição de A com relação a B* e será representado por $\mathbf{r}_{A/B}$. Observando que $\mathbf{r}_{A/B}$ pode ser obtido subtraindo-se \mathbf{r}_B de \mathbf{r}_A , escrevemos

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F} = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} \quad (3.20)$$

ou, usando a forma de determinante,

$$\mathbf{M}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.21)$$

onde $x_{A/B}$, $y_{A/B}$ e $z_{A/B}$ representam os componentes do vetor $\mathbf{r}_{A/B}$:

$$x_{A/B} = x_A - x_B \quad y_{A/B} = y_A - y_B \quad z_{A/B} = z_A - z_B$$

No caso de *problemas que envolvam apenas duas dimensões*, pode-se admitir que a força \mathbf{F} esteja no plano xy (Fig. 3.17). Tornando $z = 0$ e $F_z = 0$ na Eq. (3.19), obtemos

$$\mathbf{M}_O = (xF_y - yF_x)\mathbf{k}$$

Verificamos que o momento de \mathbf{F} em relação a O é perpendicular ao plano da figura e é completamente definido pelo escalar

$$M_O = M_z = xF_y - yF_x \quad (3.22)$$

Conforme observamos anteriormente, um valor positivo de M_O indica que o vetor \mathbf{M}_O aponta para fora do papel (a força \mathbf{F} tende a girar o corpo no sentido anti-horário em torno de O) e um valor negativo indica que o vetor \mathbf{M}_O aponta para dentro do papel (a força \mathbf{F} tende a girar o corpo no sentido horário em torno de O).

Para calcular o momento em relação a $B(x_B, y_B)$ de uma força situada no plano xy e aplicada em $A(x_A, y_A)$ (Fig. 3.18), estabelecemos que $z_{A/B} = 0$ e $F_z = 0$ nas relações (3.21), e observamos que o vetor \mathbf{M}_B é perpendicular ao plano xy e é definido em intensidade e sentido pelo escalar

$$M_B = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x \quad (3.23)$$

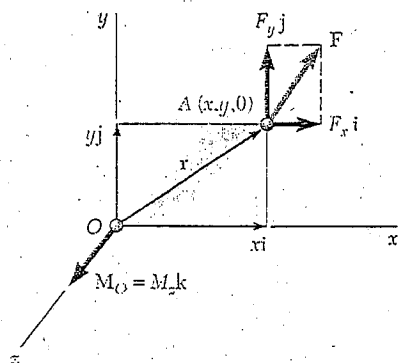


Fig. 3.17

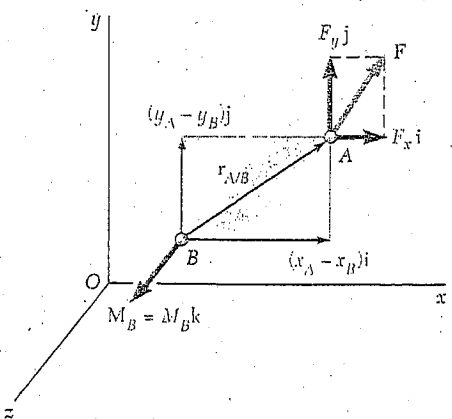


Fig. 3.18

PROBLEMA RESOLVIDO 3.1

Uma força vertical de 450 N é aplicada na extremidade de uma alavanca que está ligada a um eixo em O . Determine (a) o momento da força de 450 N em relação a O ; (b) a força horizontal aplicada em A que gera o mesmo momento em relação a O ; (c) a força mínima aplicada em A que gera o mesmo momento em relação a O ; (d) a que distância do eixo deve atuar uma força vertical de 1.080 N para gerar o mesmo momento em relação a O ; (e) se alguma das forças obtidas nas partes b, c e d é equivalente à força original.

SOLUÇÃO

a. Momento em relação a O . A distância perpendicular de O até a linha de ação da força de 450 N é

$$d = (60 \text{ cm}) \cos 60^\circ = 30 \text{ cm}$$

A intensidade do momento da força de 450 N em relação a O é

$$M_O = Fd = (450 \text{ N})(0,3 \text{ m}) = 135 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Como a força tende a girar a alavanca no sentido horário em torno de O , o momento será representado pelo vetor M_O perpendicular ao plano da figura e apontando para dentro do papel. Expressamos esse fato escrevendo

$$M_O = 135 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$$

b. Força horizontal. Neste caso, temos

$$d = (60 \text{ cm}) \sin 60^\circ = 52 \text{ cm}$$

Como o momento em relação a O deve ser de $135 \text{ N} \cdot \text{m}$, escrevemos

$$M_O = Fd$$

$$135 \text{ N} \cdot \text{m} = F(0,52 \text{ m})$$

$$F = 259,6 \text{ N} \quad F = 259,6 \text{ N} \rightarrow$$

c. Força mínima. Como $M_O = Fd$, o valor mínimo da força F ocorrerá quando d for máximo. Escolhemos a força perpendicular a OA e vemos que $d = 60 \text{ cm}$; logo,

$$M_O = Fd$$

$$135 \text{ N} \cdot \text{m} = F(0,6 \text{ m})$$

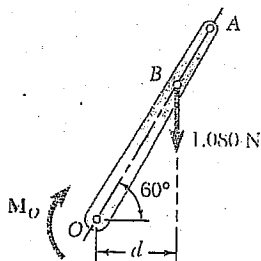
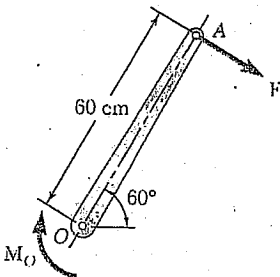
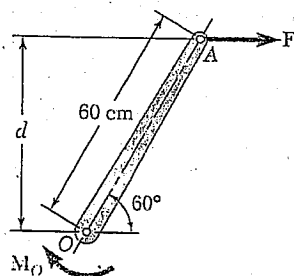
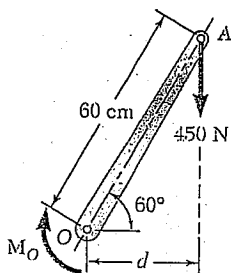
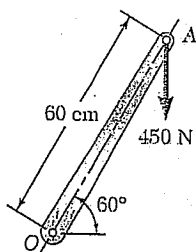
$$F = 225 \text{ N} \quad F = 225 \text{ N} \swarrow 30^\circ$$

d. Força vertical de 1.080 N. Neste caso, $M_O = Fd$ fornece

$$135 \text{ N} \cdot \text{m} = (1.080 \text{ N})d \quad d = 0,125 \text{ m}$$

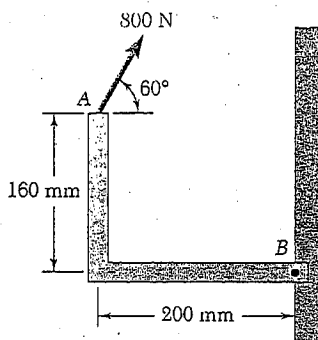
mas $OB \cos 60^\circ = d \quad OB = 25 \text{ cm}$

e. Nenhuma das forças consideradas nas partes b, c e d é equivalente à força original de 450 N. Embora tenham o mesmo momento em relação a O , tais forças têm diferentes componentes x e y . Em outras palavras, embora cada força tenda a girar o eixo da mesma maneira, cada uma faz a alavanca empurrar o eixo de um modo diferente.



PROBLEMA RESOLVIDO 3.2

Uma força de 800 N atua sobre um suporte, como mostra a ilustração. Determine o momento da força em relação a B.



SOLUÇÃO

O momento M_B da força F em relação a B é obtido escrevendo-se o produto vetorial

$$M_B = r_{A/B} \times F$$

onde $r_{A/B}$ é o vetor traçado de B até A. Decompondo $r_{A/B}$ e F em componentes retangulares, temos

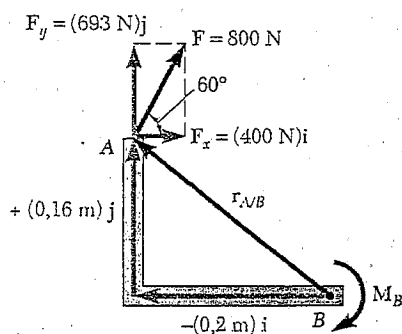
$$\begin{aligned} r_{A/B} &= -(0,2 \text{ m})\mathbf{i} + (0,16 \text{ m})\mathbf{j} \\ F &= (800 \text{ N}) \cos 60^\circ \mathbf{i} + (800 \text{ N}) \sin 60^\circ \mathbf{j} \\ &= (400 \text{ N})\mathbf{i} + (693 \text{ N})\mathbf{j} \end{aligned}$$

Retomando as relações (3.7) para os produtos vetoriais de vetores unitários (Seção 3.5), obtemos

$$\begin{aligned} M_B &= r_{A/B} \times F = [-(0,2 \text{ m})\mathbf{i} + (0,16 \text{ m})\mathbf{j}] \times [(400 \text{ N})\mathbf{i} + (693 \text{ N})\mathbf{j}] \\ &= -(138,6 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} - (64,0 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \\ &= -(202,6 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$M_B = 203 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \blacktriangleleft$$

O momento M_B é um vetor perpendicular ao plano da figura e que aponta *para dentro* do papel.



PROBLEMA RESOLVIDO 3.3

Uma força de 135 N atua na extremidade de uma alavanca de 0,9 m, como mostra a ilustração. Determine o momento da força em relação a O.

SOLUÇÃO

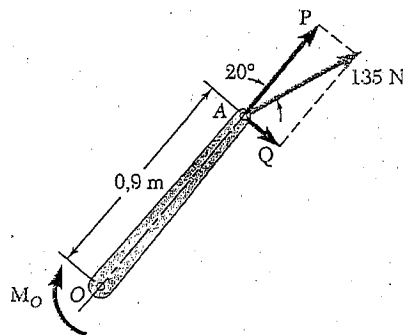
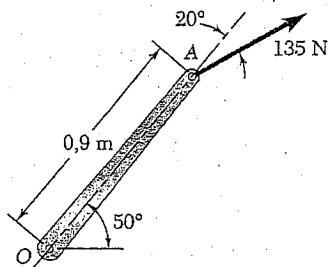
A força é substituída por dois componentes, um componente P na direção de OA e um componente Q perpendicular a OA . Como O está sobre a linha de ação de P , o momento de P em relação a O é nulo e o momento da força de 135 N reduz-se ao momento de Q , que é horário e, portanto, é representado por um escalar negativo.

$$Q = (135 \text{ N}) \sin 20^\circ = 46,17 \text{ N}$$

$$M_O = -Q(0,9 \text{ m}) = -(46,17 \text{ N})(0,9 \text{ m}) = -41,55 \text{ N} \cdot \text{m}$$

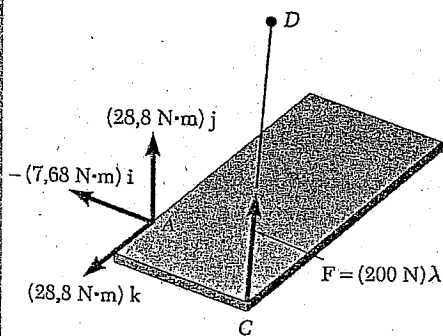
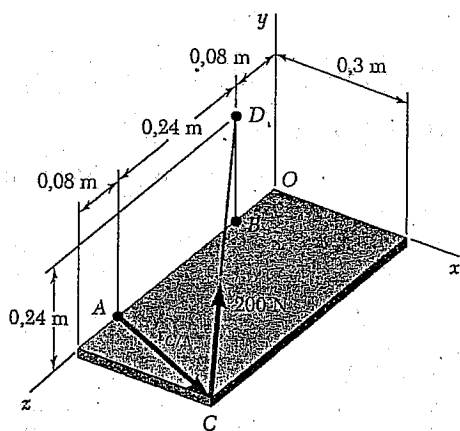
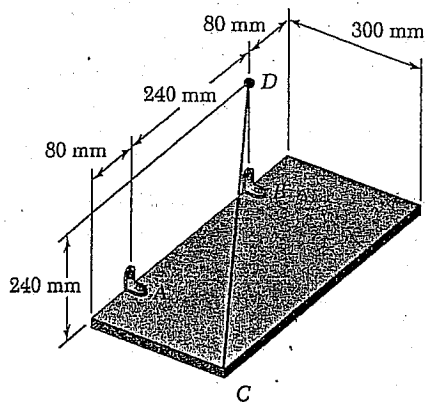
Como o valor obtido para o escalar M_O é negativo, o momento M_O aponta *para dentro* do papel. Escrevemos

$$M_O = 41,55 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 3.4

Uma placa retangular é sustentada por suportes em A e B e por um fio CD . Sabendo que a tração no fio é de 200 N, determine o momento em relação a A da força exercida pelo fio no ponto C .



SOLUÇÃO

O momento M_A da força F exercida pelo fio no ponto C em relação a A é obtido escrevendo-se o produto vetorial

$$M_A = r_{C/A} \times F \quad (1)$$

onde $r_{C/A}$ é o vetor traçado de A até C

$$r_{C/A} = \overline{AC} = (0,3 \text{ m})\mathbf{i} + (0,08 \text{ m})\mathbf{k} \quad (2)$$

e F é a força de 200 N dirigida ao longo de CD . Introduzindo o vetor unitário $\lambda = \overline{CD}/CD$, escrevemos

$$F = F\lambda = (200 \text{ N}) \frac{\overline{CD}}{CD} \quad (3)$$

Decompondo o vetor \overline{CD} em componentes retangulares, temos

$$\overline{CD} = -(0,3 \text{ m})\mathbf{i} + (0,24 \text{ m})\mathbf{j} - (0,32 \text{ m})\mathbf{k} \quad CD = 0,50 \text{ m}$$

Substituindo por (3), obtemos

$$\begin{aligned} F &= \frac{200 \text{ N}}{0,50 \text{ m}} [-(0,3 \text{ m})\mathbf{i} + (0,24 \text{ m})\mathbf{j} - (0,32 \text{ m})\mathbf{k}] \\ &= -(120 \text{ N})\mathbf{i} + (96 \text{ N})\mathbf{j} - (128 \text{ N})\mathbf{k} \end{aligned} \quad (4)$$

Substituindo $r_{C/A}$ e F de (2) e (4) por (1) e retomando às relações (3.7) da Seção 3.5, obtemos

$$\begin{aligned} M_A &= r_{C/A} \times F = (0,3\mathbf{i} + 0,08\mathbf{k}) \times (-120\mathbf{i} + 96\mathbf{j} - 128\mathbf{k}) \\ &= (0,3)(96)\mathbf{k} + (0,3)(-128)(-\mathbf{j}) + (0,08)(-120)\mathbf{j} + (0,08)(96)(-\mathbf{i}) \\ M_A &= -(7,68 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{i} + (28,8 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{j} + (28,8 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Solução alternativa. Conforme indicamos na Seção 3.8, o momento M_A pode ser expresso em forma de um determinante:

$$\begin{aligned} M_A &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0,3 & 0 & 0,08 \\ -120 & -96 & -128 \end{vmatrix} \\ M_A &= -(7,68 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{i} + (28,8 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{j} + (28,8 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, apresentamos o *produto vetorial* de dois vetores. Nos problemas a seguir, você usará o produto vetorial para calcular o *momento de uma força em relação a um ponto* e determinar também a *distância perpendicular* de um ponto a uma linha.

Definimos o momento de uma força \mathbf{F} em relação ao ponto O de um corpo rígido como

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

onde \mathbf{r} é o vetor posição *de O até qualquer ponto* da linha de ação de \mathbf{F} . Como o produto vetorial não é comutativo, é absolutamente necessário, ao calcular tal produto, que você coloque os vetores na ordem apropriada e que cada vetor tenha o sentido correto. O momento \mathbf{M}_O é importante porque sua intensidade é uma medida da tendência de uma força \mathbf{F} em fazer o corpo rígido girar em torno de um eixo dirigido ao longo de \mathbf{M}_O .

1. Cálculo do momento M_O de uma força em duas dimensões. Pode-se adotar um dos seguintes procedimentos:

a. Use a Eq. (3.12), $M_O = Fd$, que expressa a intensidade do momento como o produto da intensidade de \mathbf{F} e da *distância perpendicular d* de O até a linha de ação de \mathbf{F} [Problema Resolvido 3.1].

b. Expresse \mathbf{r} e \mathbf{F} na forma de componentes e efetue o produto vetorial $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ formalmente [Problema Resolvido 3.2].

c. Decomponha \mathbf{F} nos componentes paralelo e perpendicular ao vetor posição \mathbf{r} , respectivamente. Apenas o componente perpendicular contribui para o momento de \mathbf{F} [Problema Resolvido 3.3].

d. Use a Eq. (3.22), $M_O = M_z = xF_y - yF_x$. Quando se aplica esse método, a abordagem mais simples é tratar os componentes escalares de \mathbf{r} e \mathbf{F} como positivos e, por observação, atribuir então o sinal apropriado ao momento produzido por cada um dos componentes da força. Por exemplo, aplicando esse método no Problema Resolvido 3.2, observamos que ambos os componentes da força tendem a produzir uma rotação horária em torno de B . Logo, o momento de cada componente da força em relação a B deve ser representado por um escalar negativo. Temos então o momento total

$$M_B = -(0,16 \text{ m})(400 \text{ N}) - (0,20 \text{ m})(693 \text{ N}) = -202,6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

2. Cálculo do momento M_O de uma força \mathbf{F} em três dimensões. Seguindo o método do Problema Resolvido 3.4, o primeiro passo neste processo é selecionar o vetor posição \mathbf{r} mais conveniente (mais simples). Em seguida, você deve expressar \mathbf{F} em termos de componentes retangulares. O passo final consiste em efetuar o produto vetorial $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ para determinar o momento. Na maioria dos problemas tridimensionais, você achará mais fácil calcular o produto vetorial usando um determinante.

3. Determinação da distância perpendicular d de um ponto A até uma dada linha. Primeiro, admita que a força \mathbf{F} de intensidade conhecida F esteja ao longo de uma dada linha. Em seguida, determine seu momento em relação a A escrevendo o produto vetorial $\mathbf{M}_A = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, e calcule esse produto tal como indicamos anteriormente. Calcule, então, sua intensidade M_A . Finalmente, substitua os valores de F e M_A na equação $M_A = Fd$ e resolva para d .

PROBLEMAS

3.1 Uma força P de $13,2 \text{ N}$ é aplicada à alavanca que controla o rotor de um equipamento para remoção de neve. Determine o momento de P em relação a A quando α é igual a 30° .

3.2 A força P é aplicada à alavanca que controla o rotor de um equipamento para remoção de neve. Determine a intensidade e a direção da menor força P para gerar um momento anti-horário de $2,20 \text{ N} \cdot \text{m}$ em relação a A .

3.3 Uma força P de $13,1 \text{ N}$ é aplicada à alavanca que controla o rotor de um equipamento para remoção de neve. Determine o valor de α sabendo que o momento de P em relação a A é anti-horário e tem uma intensidade de $1,95 \text{ N} \cdot \text{m}$.

3.4 Uma válvula de pedal para um sistema pneumático é articulada em B . Sabendo que $\alpha = 28^\circ$, determine o momento de uma força de 18 N em relação ao ponto B decompondo a força em componentes horizontal e vertical.

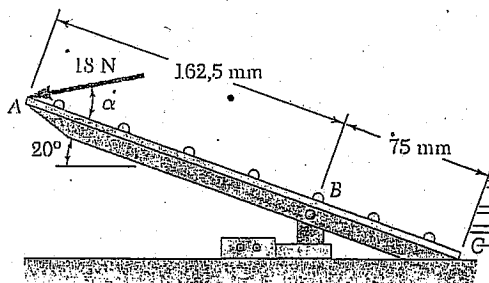


Fig. P3.4 e P3.5

3.5 Uma válvula de pedal para um sistema pneumático é articulada em B . Sabendo que $\alpha = 28^\circ$, determine o momento de uma força de 18 N em relação ao ponto B decompondo a força em componentes ao longo de ABC e em uma direção perpendicular a ABC .

3.6 Sabe-se que uma força vertical de 800 N é necessária para remover da tábua o prego fixado em C . Ao primeiro movimento do prego, determine (a) o momento em relação a B da força exercida sobre o prego, (b) a intensidade da força P que cria o mesmo momento em relação a B se $\alpha = 10^\circ$, (c) a menor força P que cria o mesmo momento em relação a B .

3.7 Uma tabuleta é suspensa por duas correntes AE e BF . Sabendo que a tração em BF é de 198 N , determine (a) o momento em relação a A da força exercida pela corrente em B , (b) a menor força aplicada em C que cria o mesmo momento em relação a A .

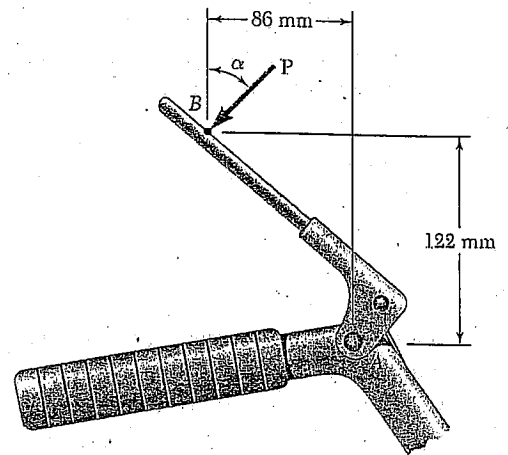


Fig. P3.1, P3.2 e P3.3

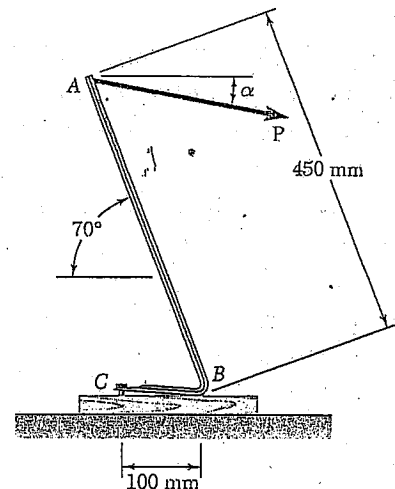


Fig. P3.6

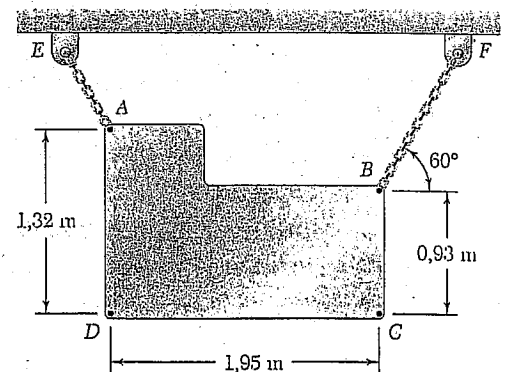


Fig. P3.7 e P3.8

3.8 Uma tabuleta é suspensa por duas correntes AE e BF . Sabendo que a tração em BF é de 198 N , determine (a) o momento em relação a A da força exercida pela corrente em B , (b) a intensidade e o sentido da força vertical aplicada em C que cria o mesmo momento em relação a A , (c) a menor força aplicada em B que cria o mesmo momento em relação a A .

3.9 e 3.10 A porta traseira de um carro é sustentada por uma haste hidráulica BC . Se a haste exerce uma força de 125 N dirigida ao longo da sua linha de centro sobre a rótula em B , determine o momento da força em relação a A .

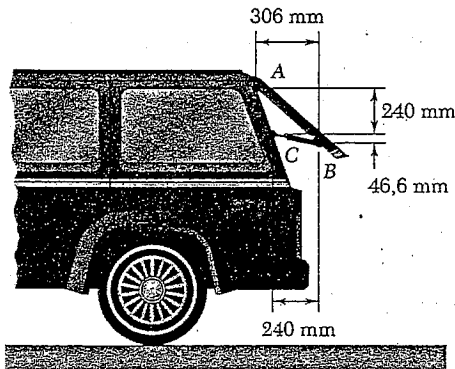


Fig. P3.9

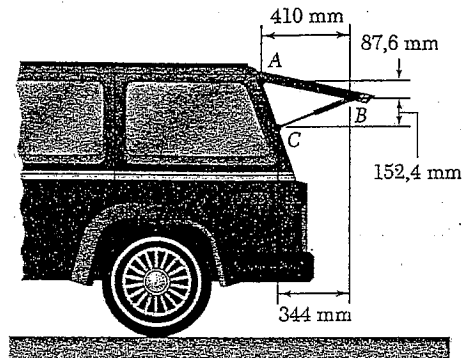


Fig. P3.10

3.11 Um guincho AB é usado para endireitar um mourão. Sabendo que a tração no cabo BC é de 1.170 N , o comprimento a é de 20 cm , o comprimento b é de $87,5\text{ cm}$ e o comprimento d é de 190 cm , determine o momento em relação a D da força exercida pelo cabo em C decompondo tal força em componentes horizontal e vertical aplicadas (a) no ponto C , (b) no ponto E .

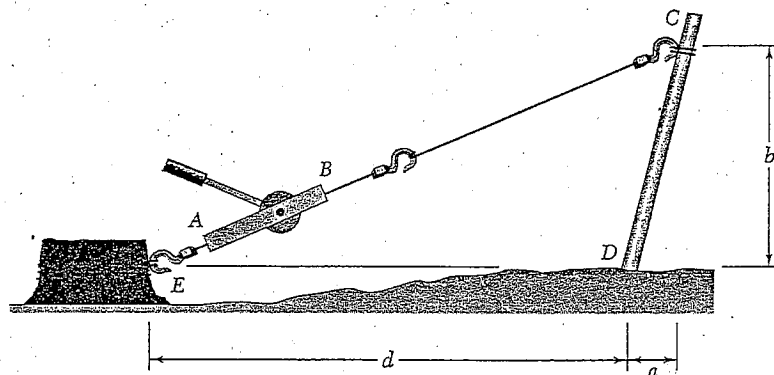


Fig. P3.11, P3.12 e P3.13

3.12 Sabe-se que é necessária uma força com um momento de $882\text{ N} \cdot \text{m}$ em relação a D para endireitar o mourão CD . Se $a = 20\text{ cm}$, $b = 87,5\text{ cm}$ e $d = 280\text{ cm}$, determine a tração que deve ser desenvolvida no cabo do guincho AB para se criar o momento necessário em relação ao ponto D .

3.13 Sabe-se que é necessária uma força com um momento de $1.152\text{ N} \cdot \text{m}$ em relação a D para se endireitar o mourão CD . Se a capacidade do guincho AB é de 2.880 N , determine o valor mínimo da distância d para se criar o momento especificado em relação ao ponto D , sabendo-se que $a = 0,24\text{ m}$ e $b = 1,05\text{ m}$.

3.14 Um mecânico utiliza um pedaço de tubo AB como alavanca para esticar a correia de um alternador. Quando ele empurra a alavanca para baixo em A, uma força de 580 N é exercida sobre o alternador em B. Determine o momento dessa força em relação ao ponto C se a sua linha de ação passa através de O.

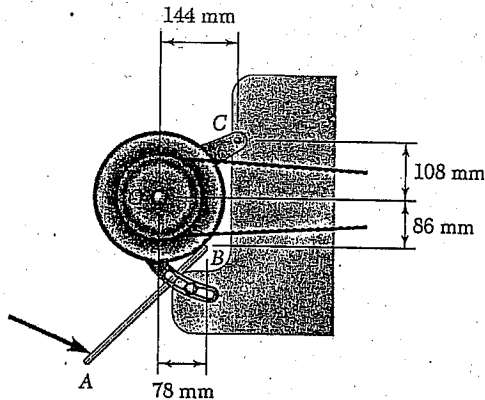


Fig. P3.14

3.15 Desenvolva os produtos vetoriais $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ e $\mathbf{B}' \times \mathbf{C}$, onde $B = B'$, e use os resultados obtidos para demonstrar a identidade

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$$

3.16 Uma linha passa pelos pontos (420 mm, -150 mm) e (-140 mm, 180 mm). Determine a distância perpendicular d da linha até a origem O do sistema de coordenadas.

3.17 Um plano contém os vetores A e B. Determine o vetor unitário normal ao plano quando A e B são iguais, respectivamente, a (a) $4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ e $-2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, (b) $7\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ e $-6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

3.18 Os vetores P e Q constituem dois lados adjacentes de um paralelogramo. Determine a área do paralelogramo quando (a) $\mathbf{P} = (20 \text{ cm})\mathbf{i} + (5 \text{ cm})\mathbf{j} - (2,5 \text{ cm})\mathbf{k}$ e $\mathbf{Q} = (-7,5 \text{ cm})\mathbf{i} + (10 \text{ cm})\mathbf{j} + (5 \text{ cm})\mathbf{k}$, (b) $\mathbf{P} = (-7,5 \text{ cm})\mathbf{i} + (15 \text{ cm})\mathbf{j} + (10 \text{ cm})\mathbf{k}$ e $\mathbf{Q} = (5 \text{ cm})\mathbf{i} + (12,5 \text{ cm})\mathbf{j} - (7,5 \text{ cm})\mathbf{k}$.

3.19 Determine o momento em relação à origem O da força $\mathbf{F} = (-5 \text{ N})\mathbf{i} - (2 \text{ N})\mathbf{j} + (3 \text{ N})\mathbf{k}$ que atua em um ponto A. Suponha que o vetor posição de A seja (a) $\mathbf{r} = (4 \text{ m})\mathbf{i} - (2 \text{ m})\mathbf{j} - (1 \text{ m})\mathbf{k}$, (b) $\mathbf{r} = (-8 \text{ m})\mathbf{i} + (3 \text{ m})\mathbf{j} + (4 \text{ m})\mathbf{k}$, (c) $\mathbf{r} = (7,5 \text{ m})\mathbf{i} + (3 \text{ m})\mathbf{j} - (4,5 \text{ m})\mathbf{k}$.

3.20 Determine o momento em relação à origem O da força $\mathbf{F} = (-6,6 \text{ N})\mathbf{i} + (13,2 \text{ N})\mathbf{j} - (8,8 \text{ N})\mathbf{k}$ que atua em um ponto A. Suponha que o vetor posição de A seja (a) $\mathbf{r} = (0,75 \text{ m})\mathbf{i} - (0,3 \text{ m})\mathbf{j} + (0,6 \text{ m})\mathbf{k}$, (b) $\mathbf{r} = (1,35 \text{ m})\mathbf{i} - (2,7 \text{ m})\mathbf{j} + (1,8 \text{ m})\mathbf{k}$, (c) $\mathbf{r} = (1,2 \text{ m})\mathbf{i} - (0,3 \text{ m})\mathbf{j} + (2,1 \text{ m})\mathbf{k}$.

3.21 Antes que o tronco de uma grande árvore venha a cair, são amarrados cabos AB e BC, como mostra a ilustração. Sabendo que as forças de tração nos cabos AB e BC são de 777 N e 990 N, respectivamente, determine o momento em relação a O da força resultante exercida sobre a árvore pelos cabos em B.

3.22 Para que um cabo telefônico seja esticado, uma corda BAC é amarrada a uma estaca em B e é passada por uma roldana em A. Sabendo

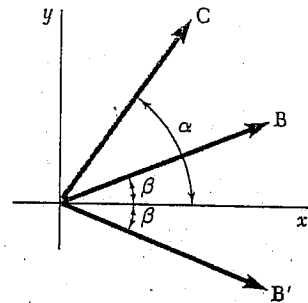


Fig. P3.15

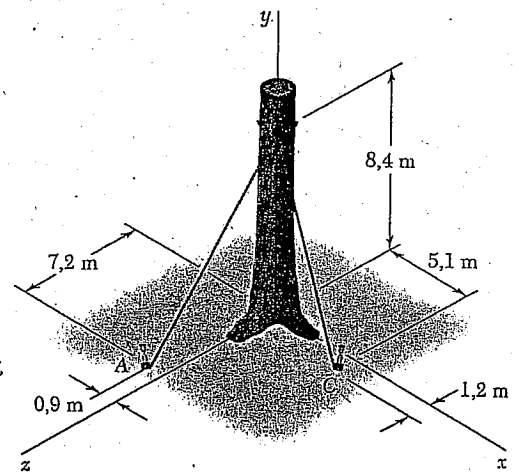


Fig. P3.21

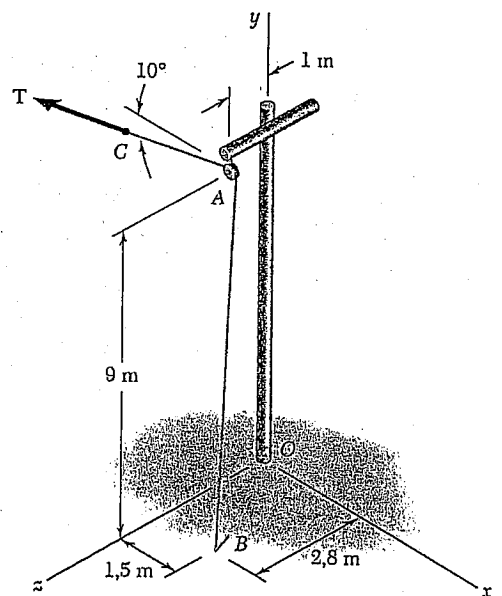


Fig. P3.22

que a porção AC da corda está em um plano paralelo ao plano xy e que a tração T na corda é de 124 N, determine o momento em relação a O da força resultante exercida sobre a roldana pela corda.

3.23 Uma força de 36 N é aplicada a uma chave de porca para apertar uma ducha. Sabendo que a linha de centro da chave é paralela ao eixo x , determine o momento da força em relação a A .

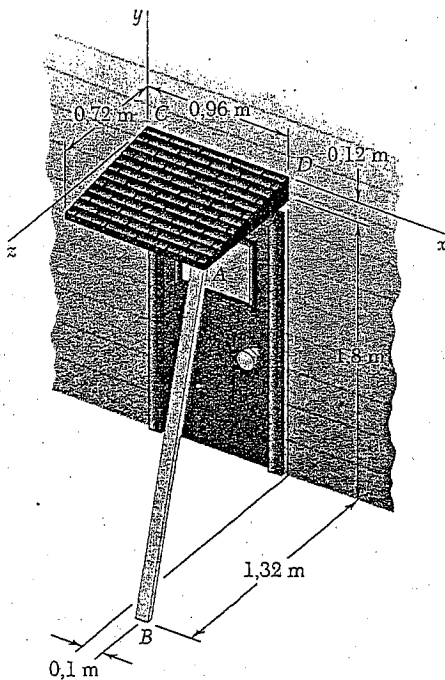


Fig. P3.24

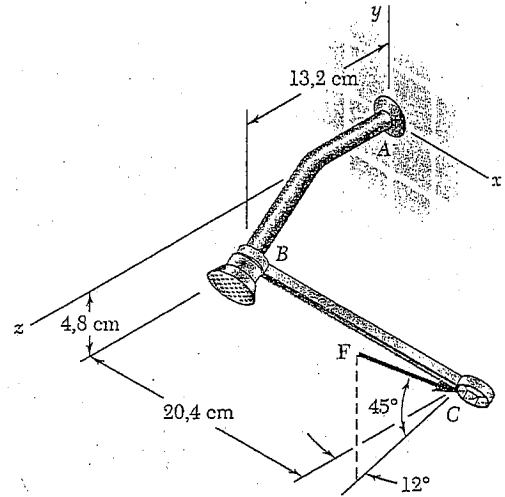


Fig. P3.23

3.24 Uma tábua AB , usada para escorar temporariamente um beiral, exerce no ponto A do beiral uma força de 228 N dirigida ao longo de BA . Determine o momento da força em relação a C .

3.25 A rampa $ABCD$ é sustentada por cabos nos cantos C e D . A tração em cada um dos cabos é de 1.620 N. Determine o momento em relação a A da força exercida (a) pelo cabo em D , (b) pelo cabo em C .

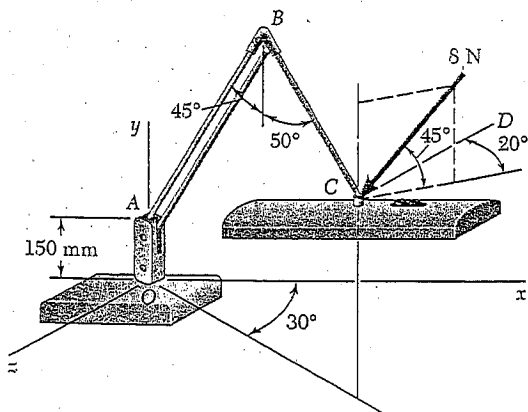


Fig. P3.26

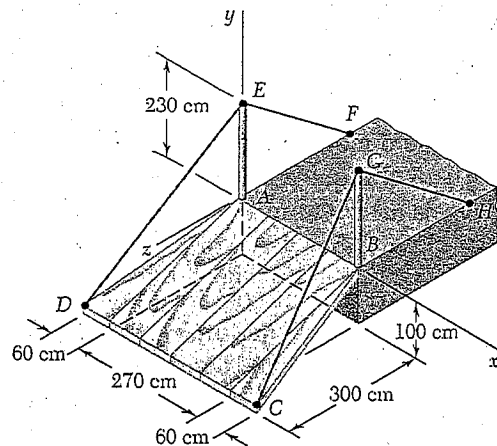


Fig. P3.25

3.26 Os braços AB e BC de uma luminária estão em um plano vertical que forma um ângulo de 30° com o plano xy . Para reposicionar o feixe de luz, é aplicada uma força de intensidade 8 N em C , como mostra a ilustração. Determine o momento da força em relação a O sabendo que $AB = 450$ mm, $BC = 325$ mm e a linha CD é paralela ao eixo z .

3.27 No Problema 3.21, determine a distância perpendicular do ponto O até o cabo AB .

3.28 No Problema 3.21, determine a distância perpendicular do ponto O até o cabo BC .

3.29 No Problema 3.24, determine a distância perpendicular do ponto D até uma linha que passa pelos pontos A e B .

3.30 No Problema 3.24, determine a distância perpendicular do ponto C até uma linha que passa pelos pontos A e B .

3.31 No Problema 3.25, determine a distância perpendicular do ponto A até a porção DE do cabo DEF .

3.32 No Problema 3.25, determine a distância perpendicular do ponto A até uma linha que passa pelos pontos C e G .

3.33 No Problema 3.25, determine a distância perpendicular do ponto B até uma linha que passa pelos pontos D e E .

3.34 Determine o valor de a que minimize a distância perpendicular de um ponto C até a seção da tubulação que passa pelos pontos A e B .

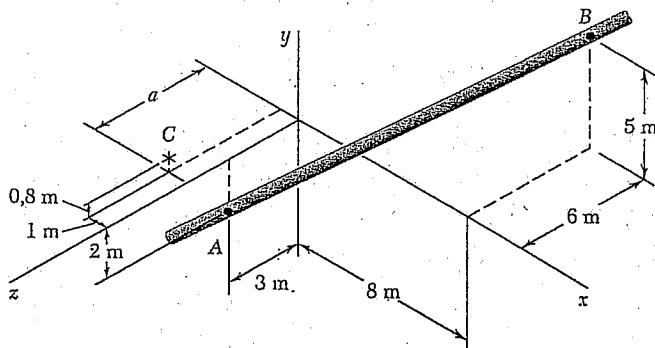


Fig. P3.34

3.9 PRODUTO ESCALAR DE DOIS VETORES

O *produto escalar* de dois vetores \mathbf{P} e \mathbf{Q} é definido como o produto das intensidades de \mathbf{P} e \mathbf{Q} e do co-seno do ângulo θ formado por \mathbf{P} e \mathbf{Q} (Fig. 3.19). O produto escalar de \mathbf{P} e \mathbf{Q} é representado por $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$. Escrevemos então

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta \quad (3.24)$$

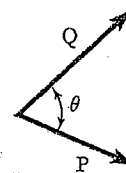


Fig. 3.19

Observe que a expressão definida na Eq. (3.24) não é um vetor, mas um *escalar*, o que explica o nome *produto escalar*.

Segue-se imediatamente da definição que o produto escalar de dois vetores é *comutativo*, ou seja, que

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P} \quad (3.25)$$

Para provar que o produto escalar é também *distributivo*, devemos demonstrar a relação

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_2 \quad (3.26)$$

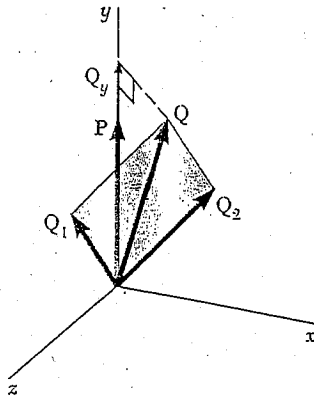


Fig. 3.20

Podemos admitir, sem perda do caráter genérico, que \mathbf{P} esteja dirigido ao longo do eixo y (Fig. 3.20). Representando por \mathbf{Q} a soma de \mathbf{Q}_1 e \mathbf{Q}_2 e por θ_y o ângulo formado entre \mathbf{Q} e o eixo y , expressamos o primeiro membro de (3.26) da seguinte maneira:

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta_y = PQ_y \quad (3.27)$$

onde Q_y é o componente y de \mathbf{Q} . De modo semelhante, podemos expressar o segundo membro de (3.26) como

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_2 = P(Q_1)_y + P(Q_2)_y \quad (3.28)$$

Como \mathbf{Q} é a soma de \mathbf{Q}_1 e \mathbf{Q}_2 , seu componente y deve ser igual à soma dos componentes y de \mathbf{Q}_1 e \mathbf{Q}_2 . Logo, as expressões obtidas em (3.27) e (3.28) são iguais e a relação (3.26) está demonstrada.

Quanto à terceira propriedade – a propriedade associativa –, observamos que essa propriedade não pode ser aplicada aos produtos escalares. De fato, $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{S}$ não tem sentido, pois $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ não é um vetor, mas um escalar.

O produto escalar de dois vetores \mathbf{P} e \mathbf{Q} pode ser expresso em termos de seus componentes retangulares. Exprimindo \mathbf{P} e \mathbf{Q} em componentes, escrevemos primeiro

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = (P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}) \cdot (Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k})$$

Fazendo uso da propriedade distributiva, expressamos $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ como uma soma de produtos escalares, tais como $P_x \mathbf{i} \cdot Q_x \mathbf{i}$ e $P_x \mathbf{i} \cdot Q_y \mathbf{j}$. Entretanto, da definição do produto escalar segue-se que os produtos escalares dos vetores unitários são iguais a zero ou um.

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1 \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1 \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Logo, a expressão obtida para $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ reduz-se a

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \quad (3.30)$$

No caso particular em que \mathbf{P} e \mathbf{Q} são iguais, observamos que

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = P^2 \quad (3.31)$$

Aplicações

1. *Ângulo formado por dois vetores dados.* Sejam dois vetores dados em termos de seus componentes:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k} \\ \mathbf{Q} &= Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k} \end{aligned}$$

Para determinar o ângulo formado pelos dois vetores, igualamos as expressões obtidas em (3.24) e (3.30) para seu produto escalar e escrevemos

$$PQ \cos \theta = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

Resolvendo para $\cos \theta$, temos

$$\cos \theta = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{PQ} \quad (3.32)$$

2. *Projeção de um vetor sobre um dado eixo.* Considere um vetor \mathbf{P} formando um ângulo θ com um eixo, ou linha orientada, OL (Fig. 3.21). A *projeção de \mathbf{P} sobre o eixo OL* é definida como sendo o escalar

$$P_{OL} = P \cos \theta \quad (3.33)$$

Observamos que a projeção P_{OL} é igual em valor absoluto ao comprimento do segmento OA ; a projeção será positiva se OA tiver o mesmo sentido do eixo OL , ou seja, se o ângulo θ for agudo, e negativa, em caso contrário. Se \mathbf{P} e OL estiverem em ângulo reto, a projeção de \mathbf{P} sobre OL será nula.

Considere agora um vetor \mathbf{Q} dirigido ao longo de OL e no mesmo sentido de OL (Fig. 3.22). O produto escalar de \mathbf{P} e \mathbf{Q} pode ser expresso como

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta = P_{OL} Q \quad (3.34)$$

da qual segue-se que

$$P_{OL} = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}}{Q} = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{Q} \quad (3.35)$$

No caso particular em que o vetor escolhido ao longo de OL seja o vetor unitário λ (Fig. 3.23), escrevemos

$$P_{OL} = \mathbf{P} \cdot \lambda \quad (3.36)$$

Decompondo \mathbf{P} e λ em componentes retangulares e lembrando, da Seção 2.12, que os componentes de λ ao longo dos eixos de coordenadas são respectivamente iguais aos co-senos diretores de OL , expressamos a projeção de \mathbf{P} sobre OL como

$$P_{OL} = P_x \cos \theta_x + P_y \cos \theta_y + P_z \cos \theta_z \quad (3.37)$$

onde θ_x , θ_y e θ_z representam os ângulos que o eixo OL forma com os eixos de coordenadas.

3.10 PRODUTO TRIPLO MISTO DE TRÊS VETORES

Definimos o *produto triplo misto* de três vetores \mathbf{S} , \mathbf{P} e \mathbf{Q} como a expressão escalar

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \quad (3.38)$$

obtida a partir do produto escalar de \mathbf{S} pelo produto vetorial de \mathbf{P} e \mathbf{Q} .⁴

Uma interpretação geométrica simples pode ser dada para o produto triplo misto de \mathbf{S} , \mathbf{P} e \mathbf{Q} (Fig. 3.24). Primeiro, lembremos da Seção 3.4 que o vetor $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ é perpendicular ao plano que contém \mathbf{P} e \mathbf{Q} e que sua intensidade é igual à área do paralelogramo que tem \mathbf{P} e \mathbf{Q} por lados. Por outro lado, a Eq. (3.34) indica que o produto escalar de \mathbf{S} e $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ pode ser obtido multiplicando-se a intensidade de $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ (ou seja, a área

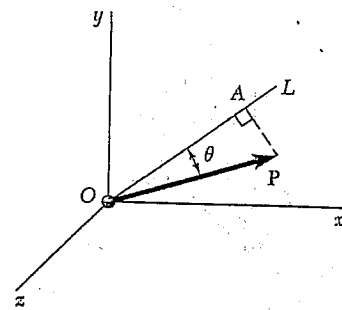


Fig. 3.21

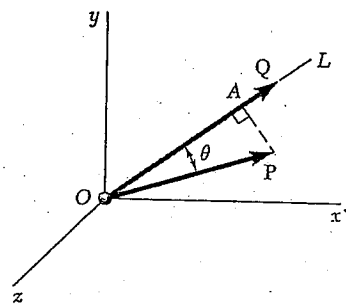


Fig. 3.22

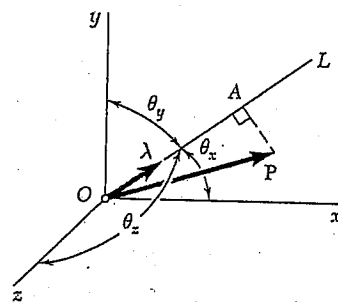


Fig. 3.23

⁴ Um outro tipo de produto triplo será apresentado posteriormente (Cap. 15): o *produto triplo vetorial* $\mathbf{S} \times (\mathbf{P} \times \mathbf{Q})$.

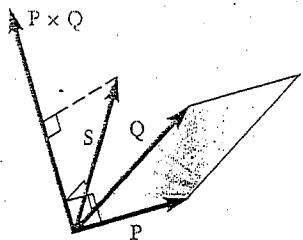


Fig. 3.24

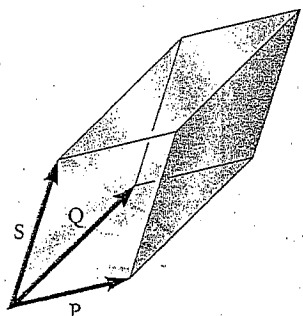


Fig. 3.25

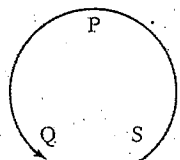


Fig. 3.26

do paralelogramo definido por \mathbf{P} e \mathbf{Q}) pela projeção de \mathbf{S} sobre o vetor $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ (isto é, pela projeção de \mathbf{S} sobre a normal ao plano que contém o paralelogramo). Logo, o produto triplo misto é igual, em valor absoluto, ao volume do paralelepípedo, tendo os vetores \mathbf{S} , \mathbf{P} e \mathbf{Q} por lados (Fig. 3.25). Observamos que o sinal do produto triplo misto será positivo se \mathbf{S} , \mathbf{P} e \mathbf{Q} formarem uma tríade orientada diretamente e negativo se formarem uma tríade orientada inversamente [isto é, $\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q})$ será negativo se a rotação que faz \mathbf{P} ficar alinhado com \mathbf{Q} for vista no sentido horário a partir da ponta de \mathbf{S}]. O produto triplo misto será zero se \mathbf{S} , \mathbf{P} e \mathbf{Q} forem coplanares.

Como o paralelepípedo definido no parágrafo anterior é independente da ordem em que os três vetores são tomados, os seis produtos triplos mistos que podem ser formados com \mathbf{S} , \mathbf{P} e \mathbf{Q} terão todos o mesmo valor absoluto, embora não o mesmo sinal. Verifica-se facilmente que

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) &= \mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q} \times \mathbf{S}) = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{S} \times \mathbf{P}) \\ &= -\mathbf{S} \cdot (\mathbf{Q} \times \mathbf{P}) = -\mathbf{P} \cdot (\mathbf{S} \times \mathbf{Q}) = -\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{S}) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Arranjando as três letras que representam os três vetores em um círculo, em ordem anti-horária (Fig. 3.26), observamos que o sinal do produto triplo misto permanece inalterado se os vetores forem permutados de modo que eles ainda sejam lidos em ordem anti-horária. Tal permutação é denominada *permutação cíclica*. Da Eq. (3.39) e da propriedade comutativa dos produtos escalares resulta também que o produto triplo misto de \mathbf{S} , \mathbf{P} e \mathbf{Q} pode ser igualmente bem definido como $\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q})$ ou como $(\mathbf{S} \times \mathbf{P}) \cdot \mathbf{Q}$.

O produto triplo misto dos vetores \mathbf{S} , \mathbf{P} e \mathbf{Q} pode ser expresso em termos dos componentes retangulares desses vetores. Representando $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ por \mathbf{V} e usando a fórmula (3.30) para expressar o produto escalar de \mathbf{S} e \mathbf{V} , escrevemos

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{V} = S_x V_x + S_y V_y + S_z V_z$$

Substituindo os componentes de \mathbf{V} obtidos pelas relações (3.9), obtemos

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = S_x (P_y Q_z - P_z Q_y) + S_y (P_z Q_x - P_x Q_z) + S_z (P_x Q_y - P_y Q_x) \quad (3.40)$$

Esta expressão pode ser escrita de modo mais compacto se observarmos que ela representa a expansão de um determinante

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (3.41)$$

Aplicando as regras que regem as permutações de linhas em um determinante, poderíamos verificar facilmente as relações (3.39), antes deduzidas a partir de considerações geométricas.

3.11 MOMENTO DE UMA FORÇA EM RELAÇÃO A UM DADO EIXO

Agora que aumentamos mais nosso conhecimento de álgebra vetorial, podemos apresentar um novo conceito, o conceito de *momento de uma força em relação a um eixo*. Considere novamente uma força \mathbf{F} que atua sobre um corpo rígido e o momento \mathbf{M}_O dessa força em relação a O (Fig. 3.27). Seja OL um eixo através de O ; definimos o momento M_{OL} de \mathbf{F} em relação a OL como a projeção OC do momento \mathbf{M}_O sobre o eixo OL . Representando por λ o vetor unitário ao longo de OL e retornando às Seções 3.9 e 3.6, respectivamente, as expressões (3.36) e (3.11) obtidas para as projeções de um vetor sobre um dado eixo e para o momento \mathbf{M}_O de uma força \mathbf{F} , escrevemos

$$M_{OL} = \lambda \cdot \mathbf{M}_O = \lambda \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \quad (3.42)$$

que mostra que o momento M_{OL} de \mathbf{F} em relação ao eixo OL é o escalar obtido desenvolvendo-se o produto triplo misto de λ , \mathbf{r} e \mathbf{F} . Expressando M_{OL} na forma de um determinante, escrevemos

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.43)$$

onde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z =$ co-senos diretores do eixo OL .

$x, y, z =$ coordenadas do ponto de aplicação de \mathbf{F}

$F_x, F_y, F_z =$ componentes da força \mathbf{F}

O significado físico do momento M_{OL} de uma força \mathbf{F} em relação a um eixo fixo OL torna-se mais evidente se decomposermos \mathbf{F} em dois componentes retangulares \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 , com \mathbf{F}_1 paralelo a OL e \mathbf{F}_2 situado em um plano P perpendicular a OL (Fig. 3.28). Decompondo \mathbf{r} de modo semelhante em dois componentes \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 e substituindo \mathbf{F} e \mathbf{r} na Eq. (3.42), escrevemos

$$\begin{aligned} M_{OL} &= \lambda \cdot [(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)] \\ &= \lambda \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1) + \lambda \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_2) + \lambda \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_1) + \lambda \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2) \end{aligned}$$

Observando que todos os produtos triplos mistos, exceto o último, são nulos, pois envolvem vetores que são coplanares quando traçados a partir de uma origem comum (Seção 3.10), temos

$$M_{OL} = \lambda \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2) \quad (3.44)$$

O produto vetorial $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$ é perpendicular ao plano P e representa o momento do componente \mathbf{F}_2 de \mathbf{F} em relação ao ponto Q em que OL intercepta P . Logo, o escalar M_{OL} , que será positivo se $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$ e OL tiverem o mesmo sentido e sentido negativo em caso contrário, mede a tendência de \mathbf{F}_2 a fazer o corpo rígido girar em torno do eixo fixo OL . Como o outro componente \mathbf{F}_1 de \mathbf{F} não tende a fazer o corpo girar em torno de OL , concluímos que o momento M_{OL} de \mathbf{F} em relação a OL mede a tendência da força \mathbf{F} a imprimir ao corpo rígido um movimento de rotação em torno do eixo fixo OL .

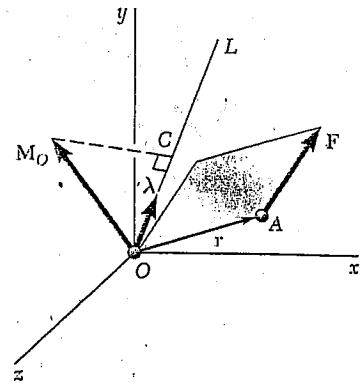


Fig. 3.27

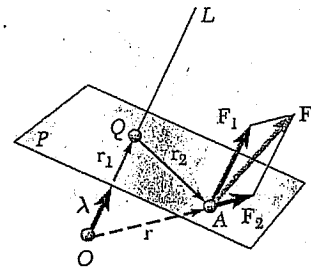


Fig. 3.28

Segue-se da definição do momento de uma força em relação a um eixo que o momento de \mathbf{F} em relação a um eixo de coordenadas é igual ao componente de \mathbf{M}_O ao longo desse eixo. Colocando sucessivamente cada um dos vetores unitários \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} no lugar de λ em (3.42), verificamos que as expressões obtidas para os momentos de \mathbf{F} em relação aos eixos de coordenadas são respectivamente iguais às expressões obtidas na Seção 3.8 para os componentes do momento \mathbf{M}_O de \mathbf{F} em relação a O :

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned}$$

Observamos que, assim como os componentes F_x , F_y e F_z de uma força \mathbf{F} que atua sobre um corpo rígido medem, respectivamente, a tendência de \mathbf{F} a mover o corpo rígido nas direções x , y e z , os momentos M_x , M_y e M_z de \mathbf{F} em relação aos eixos de coordenadas medem a tendência de \mathbf{F} a imprimir ao corpo rígido um movimento de rotação em torno dos eixos x , y e z , respectivamente.

De modo mais geral, o momento de uma força \mathbf{F} aplicada no ponto A em relação a um eixo que não passa pela origem é obtido escolhendo-se um ponto arbitrário B sobre o eixo (Fig. 3.29) e determinando-se a projeção sobre o eixo BL do momento \mathbf{M}_B de \mathbf{F} em relação a B . Escrevemos

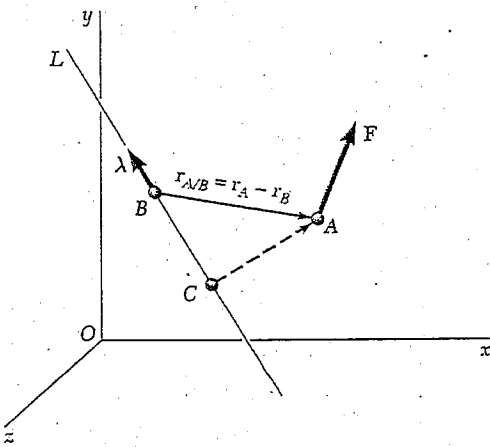


Fig. 3.29

$$M_{BL} = \lambda \cdot \mathbf{M}_B = \lambda \cdot (\mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F}) \tag{3.45}$$

onde $\mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ representa o vetor traçado de B até A . Expressando M_{BL} na forma de um determinante, temos

$$M_{BL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.46}$$

onde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z =$ co-senos diretores do eixo BL .

$$\begin{aligned} x_{A/B} &= x_A - x_B & y_{A/B} &= y_A - y_B & z_{A/B} &= z_A - z_B \\ F_x, F_y, F_z &= \text{componentes da força } \mathbf{F} \end{aligned}$$

Deve-se notar que o resultado obtido é independente da escolha do ponto B sobre o eixo dado. Com efeito, representando por M_{CL} o resultado obtido com um ponto C diferente, temos

$$\begin{aligned} M_{CL} &= \lambda \cdot [(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F}] \\ &= \lambda \cdot [(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}] + \lambda \cdot [(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F}] \end{aligned}$$

Mas, como os vetores λ e $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C$ estão sobre a mesma linha, o volume do paralelepípedo tendo por lados os vetores λ , $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C$ e \mathbf{F} é nulo, bem como o produto triplo misto desses três vetores (Seção 3.10). A expressão obtida para M_{CL} reduz-se, portanto, ao seu primeiro termo, que é a expressão usada anteriormente para definir M_{BL} . Além disso, segue-se da Seção 3.6 que, ao se calcular o momento de \mathbf{F} em relação ao eixo dado, A pode ser qualquer ponto sobre a linha de ação de \mathbf{F} .

PROBLEMA RESOLVIDO 3.5

Um cubo de lado a sofre a ação de uma força \mathbf{P} , como mostra a ilustração. Determine o momento de \mathbf{P} (a) em relação a A , (b) em relação à aresta AB , (c) em relação à diagonal AG do cubo. (d) Usando o resultado da parte c, determine a distância perpendicular entre AG e FC .

SOLUÇÃO

a. **Momento em relação a A.** Escolhendo os eixos x, y, z como mostra a ilustração, decomponemos em componentes retangulares a força \mathbf{P} e o vetor $\mathbf{r}_{F/A} = \overline{AF}$ traçado de A até o ponto de aplicação F de \mathbf{P} .

$$\mathbf{r}_{F/A} = a\mathbf{i} - a\mathbf{j} = a(\mathbf{i} - \mathbf{j})$$

$$\mathbf{P} = (P/\sqrt{2})\mathbf{j} - (P/\sqrt{2})\mathbf{k} = (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

O momento de \mathbf{P} em relação a A é

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{F/A} \times \mathbf{P} = a(\mathbf{i} - \mathbf{j}) \times (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

$$\mathbf{M}_A = (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \quad \blacktriangleleft$$

b. **Momento em relação a AB.** Projetando \mathbf{M}_A sobre AB , escrevemos

$$M_{AB} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{M}_A = \mathbf{i} \cdot (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$M_{AB} = aP/\sqrt{2} \quad \blacktriangleleft$$

Verificamos que, como AB é paralelo ao eixo x , M_{AB} também é o componente x do momento \mathbf{M}_A .

c. **Momento em relação à diagonal AG.** O momento de \mathbf{P} em relação a AG é obtido projetando-se \mathbf{M}_A sobre AG . Representando por λ o vetor unitário ao longo de AG , temos

$$\lambda = \frac{\overline{AG}}{AG} = \frac{a\mathbf{i} - a\mathbf{j} - a\mathbf{k}}{a\sqrt{3}} = (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$$

$$M_{AG} = \lambda \cdot \mathbf{M}_A = (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$M_{AG} = (aP/\sqrt{6})(1 - 1 - 1) \quad \mathbf{M}_{AG} = -aP/\sqrt{6} \quad \blacktriangleleft$$

Método alternativo. O momento de \mathbf{P} em relação a AG pode também ser expresso em forma de um determinante:

$$M_{AG} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{F/A} & y_{F/A} & z_{F/A} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ a & -a & 0 \\ 0 & P/\sqrt{2} & -P/\sqrt{2} \end{vmatrix} = -aP/\sqrt{6}$$

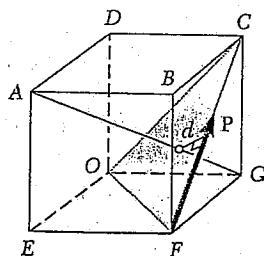
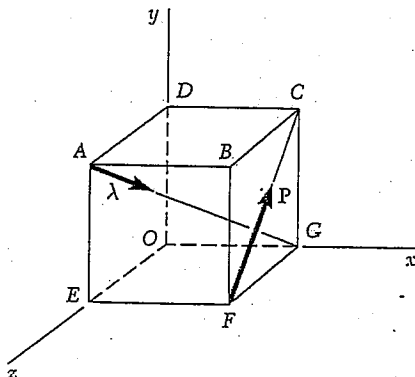
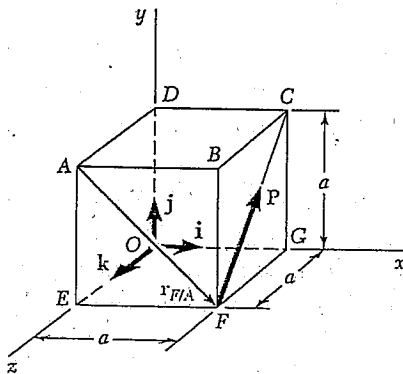
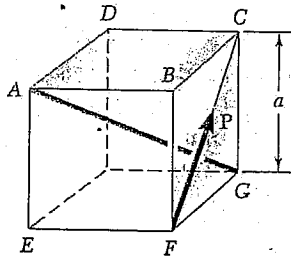
d. **Distância perpendicular entre AG e FC.** Primeiro, observamos que \mathbf{P} é perpendicular à diagonal AG . Pode-se conferir isso efetuando-se o produto escalar $\mathbf{P} \cdot \lambda$ e verificando-se que este é nulo:

$$\mathbf{P} \cdot \lambda = (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) = (P\sqrt{6})(0 - 1 + 1) = 0$$

O momento M_{AG} pode então ser expresso como $-Pd$, onde d é a distância perpendicular de AG até FC . (O sinal negativo é usado porque a rotação imprimida ao cubo por \mathbf{P} é vista no sentido horário por um observador em G .) Retomando o valor encontrado para M_{AG} na parte c,

$$M_{AG} = -Pd = -aP/\sqrt{6}$$

$$d = a/\sqrt{6} \quad \blacktriangleleft$$



Nos problemas desta seção, você vai aplicar o *produto escalar* de dois vetores para determinar o *ângulo formado por dois vetores dados* e a *projeção de uma força sobre um dado eixo*. Você também usará o *produto triplo misto* de três vetores para encontrar o *momento de uma força em relação a um dado eixo* e a *distância perpendicular entre duas linhas*.

1. Cálculo do ângulo formado por dois vetores dados. Primeiro, expresse os vetores em termos de seus componentes e determine as intensidades dos dois vetores. O co-seno do ângulo desejado é obtido então dividindo-se o produto escalar dos dois vetores pelo produto de suas intensidades [Eq. (3.32)].

2. Cálculo da projeção de um vetor \mathbf{P} sobre um dado eixo OL . Em geral, comece expressando \mathbf{P} e o vetor unitário λ , que define a direção e o sentido do eixo, em forma de componentes. Tome cuidado com o sentido correto de λ (ou seja, λ deve ser dirigido de O para L). Assim, a projeção necessária é igual ao produto escalar $\mathbf{P} \cdot \lambda$. Todavia, se você conhece o ângulo θ entre \mathbf{P} e λ , a projeção também é dada por $P \cos \theta$.

3. Determinação do momento M_{OL} de uma força em relação a um dado eixo OL . Definimos M_{OL} como

$$M_{OL} = \lambda \cdot \mathbf{M}_O = \lambda \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

onde λ é o vetor unitário ao longo de OL e \mathbf{r} é um vetor posição de qualquer ponto sobre a linha OL até qualquer ponto sobre a linha de ação de \mathbf{F} . Tal como no caso do momento de uma força em relação a um ponto, a escolha do vetor posição mais conveniente vai simplificar seus cálculos. Lembre-se também do aviso da seção anterior: os vetores \mathbf{r} e \mathbf{F} devem ter o sentido correto e devem ser colocados na ordem apropriada. O procedimento que você deve seguir ao calcular o momento de uma força em relação a um eixo está ilustrado na parte *c* do Problema Resolvido 3.5. Os dois passos essenciais desse procedimento são, em primeiro lugar, expressar λ , \mathbf{r} e \mathbf{F} em termos de seus componentes retangulares e, em seguida, efetuar o produto triplo misto $\lambda \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$ para determinar o momento em relação ao eixo. Na maioria dos problemas tridimensionais, o modo mais conveniente de se calcular o produto triplo misto é usar um determinante.

Como observamos no texto, quando λ estiver direcionado ao longo de um eixo de coordenadas, M_{OL} será igual ao componente escalar de \mathbf{M}_O ao longo desse eixo.

4. Determinação da distância perpendicular entre duas linhas. Você deve se lembrar de que é o componente perpendicular F_2 da força \mathbf{F} que tende a fazer o corpo girar em torno de um dado eixo OL (Fig. 3.28). Resulta então que

$$M_{OL} = F_2 d$$

onde M_{OL} é o momento de \mathbf{F} em relação ao eixo OL e d é a distância perpendicular entre OL e a linha de ação de \mathbf{F} . Esta última equação nos fornece uma técnica simples para determinarmos d . Primeiro, suponha que a força \mathbf{F} de intensidade conhecida F esteja ao longo de uma das linhas dadas e que o vetor unitário λ esteja ao longo da outra linha. Em seguida, calcule o momento M_{OL} da força \mathbf{F} em relação à segunda linha aplicando o método discutido anteriormente. A intensidade do componente paralelo de \mathbf{F} , F_1 , é obtida usando-se o produto escalar:

$$F_1 = \mathbf{F} \cdot \lambda$$

O valor de F_2 é determinado, então, como

$$F_2 = \sqrt{F^2 - F_1^2}$$

Finalmente, substitua os valores de M_{OL} e F_2 na equação $M_{OL} = F_2d$ e resolva para d .

Você deve agora compreender que o cálculo da distância perpendicular na parte d do Problema Resolvido 3.5 ficou simplificado pelo fato de P ser perpendicular à diagonal AG . Em geral, as duas linhas dadas não serão perpendiculares, de modo que a técnica que acabamos de delinear terá de ser usada na determinação da distância perpendicular entre elas.