Samuel Liló Abdalla – UNESP - ITA

A Matemática do Sudoku

Mágicas com Matrizes

Os Quadrados Mágicos tem cerca de 4 mil anos de história. Nesses quadriculados, um mesmo número corresponde à soma dos algarismos de cada linha, coluna e diagonal. O mais antigo quadrado mágico que se tem notícia é o Lo Shu Square, encontrado em manuscritos chineses de 2.800 AC, que faziam parte da lenda sobre como acalmar a fúria do rio Lo. No Egito e na Índia, os quadrados mágicos apareceram gravados em pedra ou metal, como forma de talismã e tinham lugar na astrologia e na religião. Esses quadrados têm intrigado os matemáticos há mais de 2000 anos, Depois da fundação da Universidade de Alexandria (cerca de 320 AC), a grande pérola do Mundo Matemático foi o culto ao quadrado Mágico, trazido para a Itália nas proximidades do décimo - quinto século de nossa época.
Em sua forma clássica, o quadrado é constituído de modo que os números de cada fileira, cada coluna e cada diagonal tenham a mesma soma. No entanto, o quadrado mágico da figura a seguir é especial. Embora pareça que os números estão distribuídos ao acaso, o quadrado possui uma propriedade mágica que impressiona.
Imagine que você possui 5 moedas e 20 pedaços de papel, escolhe – se um número qualquer no quadrado, coloca- se então a moeda no lugar desse número e eliminam-se todos os outros da mesma linha e coluna cobrindo-os com pedaço de papel, escolhe – se um segundo número qualquer dentre os que restaram descobertos, cobre-se esse número com outra moeda e os da mesma fila e colunas com pedaços de papel. Repetindo o processo até que todas as moedas estejam no tabuleiro os números sob as moedas sempre somarão 38.

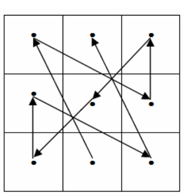
9	4	6	10	1
8	3	5	9	0
12	7	9	13	4
14	9	11	15	6
10	5	7	11	2

Exemplo 1. Seja a seqüência de números {1,2,3,4,5,6,7,8,9}, queremos completar o quadrado abaixo com tais números de tal forma que a soma em qualquer linha, coluna ou diagonal possua o mesmo valor.

Percebemos com certo trabalho que a solução será dada por:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Se observarmos com atenção podemos generalizar este problema com auxílio de um grafo -- considerando que cada ponto é um nó podemos traçar um grafo direcionado que nos dará a solução.



Um dos modos mais simples de formar um quadrado mágico é considerar uma seqüência de números inteiros começando por 1, dessa forma o número forçado será função do tamanho do quadrado e será dado pela fórmula.

$$\frac{n^3+n}{2}$$

em nosso exemplo o número forçado é $\frac{3^3+3}{2}=15$, que é a soma dos valores de qualquer linha, coluna ou diagonal.

Quadrado Latino

No século XVIII, O Matemático suíço Leonhard Euler inventou um quadrado mágico diferente denominado *Quadrado Latino*, uma matriz com o mesmo número de linhas e colunas, onde os elementos não se repetem nas linhas e colunas. Contudo, era só uma invenção para estudos de álgebra. Aqui seguem dois exemplos.

♠A	♥K	♦Q	♣J
♦J	♣Q	♠K	♥A
♣K	♦A	♥J	♠Q
♥Q	♠J	♣A	♦K

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
5	1	2	3	4
2	3	4	5	1
4	5	1	2	3

O nome quadrado latino teve origem quando Euler utilizou caracteres latinos como símbolos.

O que é Sudoku

O nome *Sudoku* é a abreviação japonesa para a longa frase,*suuji wa dokushin ni kagiru* (数字は独身に限る) que significa *os dígitos devem permanecer únicos*. Sudoku, por vezes escrito Su Doku, é um puzzle (quebra – cabeça) baseado na colocação *lógica de números*. O objetivo desse quebra-cabeça é a colocação de números de 1 a 9 em cada uma das células vazias numa grelha (Quadrado quadriculado) de 9×9, constituída por 3×3 subgrelhas chamadas regiões. O puzzle contém algumas pistas iniciais. Cada coluna, linha e região só pode ter um número de cada um dos 1 a 9. O Sudoku se mostra como uma variação de vários jogos e grelhas antigos como os quadrados mágicos e os quadrados latinos.

Abaixo segue uma grade sudoku parcialmente completa e sua solução.

	7	5	3	1				
						1		8
4			5		2	6		3
			7	3			4	6
		4		2		7		
7	6			5	9			
1		7	2		5			9
9		8						
				9	7	5	3	

Fig.1 – Grade parcialmente preenchida

8	7	5	3	1	6	2	9	4
6	2	3	9	7	4	1	5	8
4	1	9	5	8	2	6	7	3
5	8	2	7	3	1	9	4	6
3	9	4	6	2	8	7	1	5
7	6	1	4	5	9	3	8	2
1	3	7	2	4	5	8	6	9
9	5	8	1	6	3	4	2	7
2	4	6	8	9	7	5	3	1

Fig.2 – Solução

Antes de continuarmos o leitor poderia conferir na grade anterior a colocação engenhosa dos números.

O puzzle sudoku foi confeccionado por ***[Howard Garns](#)***, um arquiteto aposentado de 74 anos de idade e construtor independente de puzzles, e o publicou pela primeira vez em 1979. Embora existam fortes evidências de ter se inspirado no quadrado Latino de Euler, O arquiteto adicionou uma terceira dimensão (a limitação regional) à construção matemática e (ao contrário de Euler) apresentou a criação como um puzzle, fornecendo uma grade parcialmente completa e necessitando que o solucionador preenchesse o resto.
O enigma foi publicado em 1970, na revista americana *Math Puzzles and Logic Problems (quebra-cabeças matemáticos e problemas lógicos)*, da editora Dell Magazines, especializada em desafios e quebra-cabeças. A editora deu ao jogo o nome de Number Place (Lugar dos Números) , que é usado até hoje nos Estados Unidos. Em 1984, a Nikoli, maior empresa japonesa de puzzles, descobriu o *number place* e decidiu levá-lo ao Japão.
No Japão, os jogos numéricos são mais populares que palavras-cruzadas e caça-palavras, que não funcionam muito bem na língua japonesa. O sudoku tornou-se um dos puzzles mais vendidos do Japão. Apesar de toda a popularidade no Japão, o sudoku não conseguiu atrair a mesma atenção no Ocidente até o final de 2004, quando Wayne Gould - um juiz aposentado de Hong Kong, que também era fã de puzzles e programador de computador - viajou a Londres para convencer os editores do The Times a publicar o sudoku. O Times decidiu arriscar e no dia 12 de novembro de 2004 publicou seu primeiro sudoku. No Brasil o Sudoku é publicado pela Coquetel (Ediouro) desde o início de 2005.

Motivação

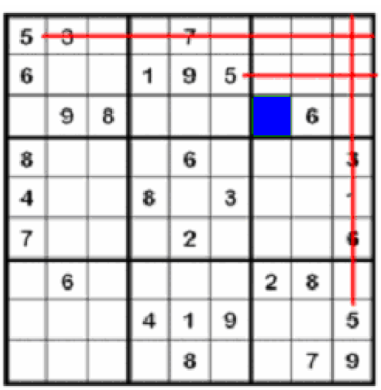
A atração do jogo é que as regras são simples, contudo, a linha de raciocínio requerida para alcançar a solução pode ser complexa. O *Sudoku* é recomendado por alguns educadores como um exercício para o desenvolvimento do ***Raciocínio Lógico Matemático***.

Iniciação ao Jogo

As três regras básicas são:

- ✓ Esquadrinhar as linhas;
- ✓ Esquadrinhar as colunas;
- ✓ Preencher os espaços vazios;

Na região 3×3 no canto superior direito. O solucionador pode eliminar todas as células vazias no canto superior direito que contenham um 5 nas mesmas colunas ou linhas. Isto deixa apenas uma célula possível (destacada em azul).



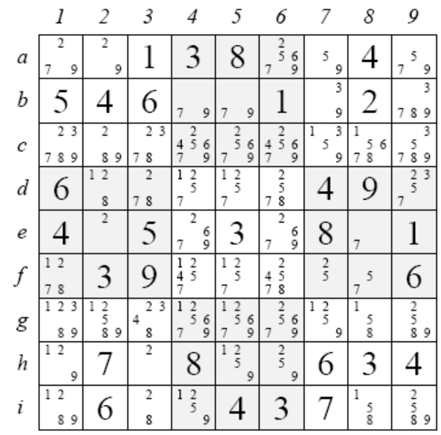
Uma estratégia interessante para resolver os enigmas pode ser considerada como compreender uma combinação de três processos: *fazer uma varredura visual, marcações, e análise.*

A varredura é executada durante todo o processo de busca da solução. As varreduras somente têm que ser executadas uma vez entre períodos da análise. A varredura consiste em apenas duas técnicas básicas:

✓ A varredura das linhas (ou colunas) para identificar que linha em uma região particular pode conter um determinado número por um processo de eliminação. Para maior eficiência os números devem ser verificados por ordem de freqüência(deve-se começar a varredura pelo número com maior freqüência). Este processo deve ser sistemático na verificação dos dígitos de 1 a 9 durante toda resolução.

✓ Contar de 1–9 nas regiões, linhas, e colunas para identificar os números faltantes. A busca do último número descoberto pode fazer com que a busca seja mais rápida, fazendo a varredura da região da célula, linha, e coluna para identificar os valores que *não podem* ser, a fim de se descobrir o que resta.

Uma varredura bem feita mostra os possíveis candidatos em cada célula, com no exemplo abaixo:



Os jogadores avançados procuram *contingências* (Ocorrência Eventual, fato possível mas incerto) ao fazer a varredura — isto é, estreitando a posição de um numeral dentro de uma fileira, coluna, ou região a duas ou três células.

A metodologia da eliminação do candidato consiste na identificação das ‘’células combinadas’’. As pilhas seriam combinadas dentro de uma linha particular, coluna, ou região (bloco) se duas células contiverem o mesmo par de números candidatos (x,y) e mais nenhum outro, ou se três células contiverem o mesmo trio de números candidatos (x,y,z) e mais nenhum outro. A colocação destes números seja lá onde mais for dentro desse mesmo bloco, ***faria com que a solução das células combinadas impossível***; assim, os números candidatos (x,y,z) que aparecerem em outras células da mesma linha, coluna ou região (bloco) podem ser eliminadas.

1) Estratégia ***Asa XY***

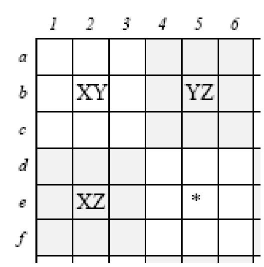
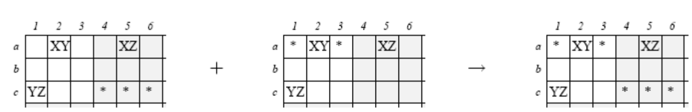


Fig.2 – Asa XY

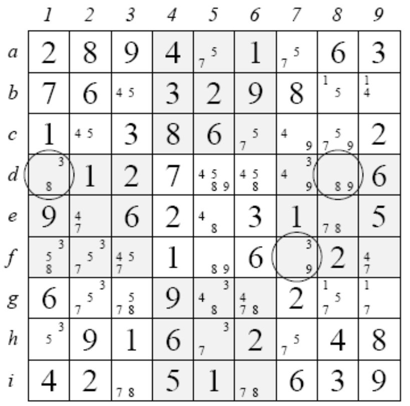
Na configuração acima, supondo que existem dois possíveis candidatos nos quadrados b2, b5 e e2, indicados na figura por X,Y e Z. Se colocarmos X no quadrado b2, então sobrará para a célula e2 o valor Z e conseqüentemente a célula e5 não poderá receber o valor de Z (mesma linha).

Consideremos a configuração da figura abaixo:



Observa – se que na célula a2 podemos ter o valor de X ou Y, considerando os dois blocos (caixas) representados automaticamente Z é candidato eliminado nas células com asterisco (c4,c5 e c6), utilizando o mesmo raciocínio no segundo conjunto de blocos Z não pode ser candidato nos quadrados indicados com asterisco (a1 e a3).
A junção das conclusões mostra que Z não pode ocupar os quadrados com asterisco do terceiro par de caixas.

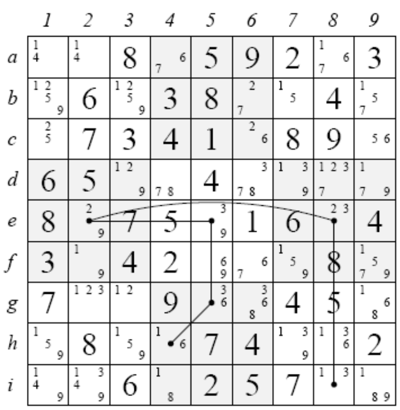
Na figura abaixo temos um exemplo de ***Asa XY***



Nesse caso podemos observar que inserindo **9** na célula f7 só restará o valor 8 para a célula d8 e conseqüentemente restará **3** para a célula d1.

2) Estratégia ***Corrente XY***

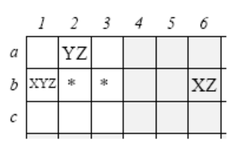
Uma corrente XY é uma conexão de asas XY, como mostrado na figura abaixo:



Observe pela figura que se colocarmos **6** na célula h4 restará **3** para a célula g5, colocando **3** em g5, só restará **9** para a célula e5, inserindo **9** em e5 restará **2** para a célula e2, por conseqüência restará **3** para e8, e finalmente com a inclusão do **3** na célula e8, restará **1** para a célula i8.

3) Estratégia ***ASA XYZ***

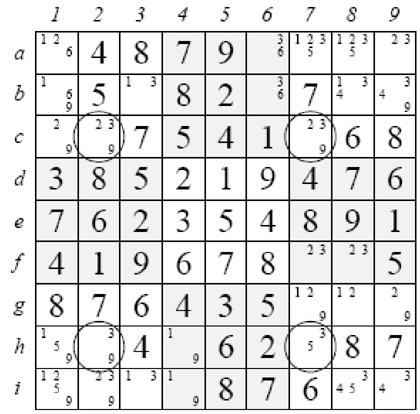
A estratégia asa – XYZ é uma leve variação da asa XY, observe o quadro abaixo:



Observe que se colocarmos Z na célula b1,automaticamente estaremos obrigando os valores Y em a2 e X em b6.

3) Estratégia ***ASA X***

A estratégia asa – X é utilizada quando duas asas XY, se encontram formando um retângulo, como mostra a figura abaixo.



Nesse caso os vértices opostos do retângulo contém os candidatos das células, no exemplo acima o número **3** pode ser colocado na células c2 e h7 ou nas células c7 e h2.

Deve-se levar em conta que, idealmente, é necessário que se descubra uma combinação de técnicas diversificadas que evite alguns inconvenientes. A contagem de regiões, linhas e colunas devem prevalecer a outros métodos fundamentados na metodologia da tentativa e erro. A beleza do jogo é encontrar uma solução com base em raciocínio lógico e não em suposições.
O problema geral de solucionar *puzzles Sudoku* em tabuleiros $n^2 \times n^2$ de blocos $n \times n$ é conhecido como NP – completo (Conjunto de todos os problemas cuja solução pode ser verificada, no entanto não se conhece um algoritmo eficiente para resolvê-lo). Isto dá algumas indicações de porque o *Sudoku* é difícil de resolver, contudo em tabuleiros de tamanhos finitos o problema pode ser solucionado.

Há significativamente menos soluções de grades de *Sudoku* válidas do que os Quadrados Latinos, porque o *Sudoku* impõe restrições de região adicionais. Apesar disso, o número de solução de *Sudoku* para uma grade padrão de 9×9 foram calculados em 2005 por Bertram Felgenhauer, do departamento de Ciência da computação da Universidade Técnica de Dresden, Alemanha como sendo 6.670.903.752.021.072.936.960 ,este número é igual a $9! \times 72^2 \times 2^7 \times 27.704.267.971$, o último fator o qual é um número primo. A derivação deste resultado foi simplificada consideravelmente por análises fornecidas por Frazer Jarvis, do departamento de Matemática Pura da Universidade de Sheffield, Inglaterra. Jarvis demonstrou que quando as simetrias são consideradas, existem 5.472.730.538 soluções. O número de soluções válidas para a variação do *Sudoku* de uma grade 16 × 16 é **desconhecido.**
Apesar de a grade 9 × 9 com regiões 3×3 ser de longe a mais conhecida, existem algumas variações. Um **poliminó** é uma figura geométrica plana formada por quadrados iguais, conectados entre si de modo que pelo menos um lado de cada quadrado coincida com um lado de outro quadrado.
Um ***nonominó*** é um poliminó com 9 peças. A junção de poliminós pode ter níveis de complexidade maior que simplesmente a sua união para formar uma figura geométrica, por exemplo um jogo de Sudoku nonominó composto de nove peças, onde cada número só deve aparecer uma única vez na linha, coluna e dentro do nonominó se mostra um problema intrigante. Existem 1285 nonominós distintos, sendo que 37 destes têm buracos.

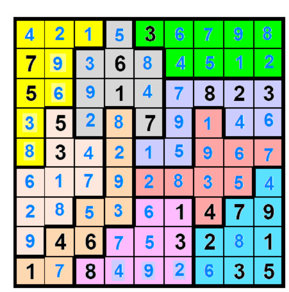


Fig.3 – Sudoku Nonominó

Para saber mais:

[-- http://www.sudoku.com/](http://www.sudoku.com/)
-- Como solucionar Sudoku – Guia passo a passo – Robin Wilson – Editora Marco Zero