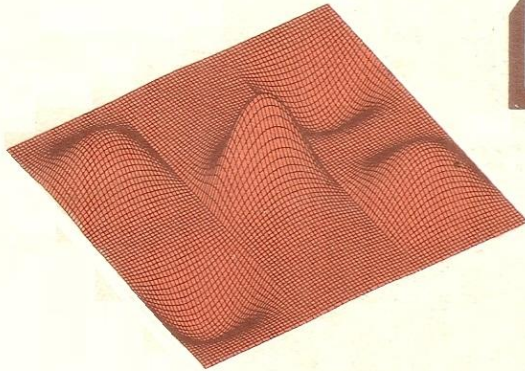




ISSN 0101 - 8299

Vol.5 • Nº6

UMA PUBLICAÇÃO DA  
SOCIEDADE BRASILEIRA DE  
MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL



**BOLETIM**  
DA  
**SBMAC**



**Dezembro - 86**

**SBMAC**  
**SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA**  
**APLICADA E COMPUTACIONAL**

**DIRETORIA**

Presidente	- Paulo Jorge Paes Lemes
1º Vice-Presidente	- Carlos Humes Jr.
2º Vice-Presidente	- Luiz Alberto Vieira Dias
Secretário Geral	- Aníbal Parracho Sant'anna
1º Secretário	- Maria Cristina da Cunha Bezerra
2º Secretário	- João Frederico Mayer
Tesoureiro	- Augusto César Gadelha Vieira

**CONSELHO**

**Membros Titulares:**

- |  |                                 |
|--|---------------------------------|
| ● Marco Antônio Raupp, INPE/MCT        | ● Carlos A. de Moura, LNCC/CNPq |
| ● Luiz Adauto Medeiros, UFRJ           | ● José M. Martinez, UNICAMP     |
| ● Cyro Carvalho Patarra, IME/USP       | ● Hílton U. Machado, UnB        |
| ● Júlio César Ruiz Calyesse, UFRGS     | ● Beatriz da Rocha Neves, UFRJ  |
| ● José Raimundo Braga Coelho, INPE/MCT | ● Marcelo B. Klein, UFCE        |

**MEMBROS SUPLENTE**

- Luiz Carlos Pavlu, UFSCar
- Nelson Maculan Filho, UFRJ
- Sônia Maria Fidelis Garcia, UFPR
- Fernando Campelo, UFPE
- Paulo Roberto de Oliveira, UFRJ

## **SÓCIOS INSTITUCIONAIS**

Laboratório de Computação Científica, LNCC/CNPq  
Computadores e Sistemas Brasileiros S/A, COBRA  
Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária, EMBRAPA  
Instituto Militar de Engenharia, IME  
Comissão Nacional de Energia Nuclear, CNEN  
Centro de Pesquisas de Energia Elétrica, CEPEL  
Instituto de Matemática Pura e Aplicada, IMPA  
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, PUC/RJ  
Serviço Federal de Processamento de Dados, SERPRO  
Petróleo Brasileiro S/A, PETROBRÁS  
Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, ICMSC/USP  
IBM do Brasil, Indústria, Máquinas e Serviços Ltda.  
Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE  
Instituto Tecnológico de Aeronáutica, ITA  
Instituto de Pesquisas Espaciais, INPE/MCT  
Fundação Universidade de Brasília, UnB  
Centro de Processamento de Dados da UFRGS  
MIRANDATA, Processamento de Dados Ltda.  
Centro de Análise de Sistemas Navais, CASNAVE  
Centro de Pesquisa e Desenvolvimento da TELEBRÁS  
Departamento de Matemática da UFCe  
Instituto de Pesquisas Tecnológicas, IPT

## **COMISSÃO EDITORIAL**

- José Raimundo B. Coelho - Editor

## **CORRESPONDÊNCIA**

**José Raimundo B. Coelho**  
**Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE**  
**Caixa Postal 515**  
**12200 - São José dos Campos - SP**

## SUMÁRIO

dezembro de 1986, BOLETIM DA SBMAC, Vol. 5 - nº 6

1 .	NOTA DO EDITOR . . . . .	04
2 .	ARTIGOS DE DIVULGAÇÃO	
	• “Matemática Aplicada e Computacional” Relatório Técnico 1982 a 1986 . . . . .	05
3 .	ARTIGOS TÉCNICOS	
	• Sobre um Algoritmo de Programação Linear Fracionária Cláudia Gerreiro e Waldecir Bianchini . . . . .	10
	• Interconexões Mínimas e Interconexões Mutamente Disjuntas em Grafos: Uma Resenha Paulo Feofiloff . . . . .	32
	• PROL - Sistema para Programação Linear Heleno de Nascimento Santos, Carlos Antonio A.S. Ribeiro, Antonio Moisés de Oliveira e Marcelo Silva Cunha . . . . .	49
4 .	ENSINO	
	• Pós-Graduação em Economia no IMPA/CNPq . . . . .	58
5 .	RESENHA	
	• Review: The Stationary Semiconductor Device Equations Peter A. Markowich . . . . .	59
	• The History of Mathematics from Antiquity to the Present: A Selective Bibliography . . . . .	62
	• Commercium Epistolicum . . . . .	66
6 .	EVENTOS REALIZADOS	
	• Reunião Regional da SBMAC em Campo Grande - MS . . . . .	70
	• Assembléia Geral Ordinária da SBMAC . . . . .	71
7 .	NOTÍCIAS DA PROGRAMOTECA	
	• Criação de Comissão de Informática . . . . .	74
8 .	DIVERSOS	
	• Palavras de gratidão . . . . .	80
	• Beatriz Rocha Pereira das Neves (1935-1986) . . . . .	83
	• Homenagem ao Professor Jean Dieudonné por seus 80 anos . . . . .	87

## NOTA DO EDITOR

---

Entre a publicação do último **"Boletim da SBMAC"** de agosto de 1986 e até fecharmos esta edição, recebemos diversos artigos técnicos para serem aqui publicados. No entanto, embora recebamos com entusiasmo este aumento no volume de trabalhos a nós enviado, não foi possível publicá-los todos nesta edição e nos vimos forçados a dar preferência aos que chegaram com maior antecedência. Temos buscado adotar uma política de publicar um número não muito grande de artigos técnicos, para que tenhamos espaço suficiente para divulgar as outras atividades de nossa comunidade.

Desta forma, solicitamos a compreensão dos colegas autores que nos enviaram artigos técnicos, pois pretendemos publicá-los nas próximas edições.

Esta é a última edição do **"Boletim da SBMAC"** durante o ano de 1986. Felizmente e graças ao empreendimento de um reduzido número de colaboradores, foi possível a produção das três edições previstas para o ano e a sua distribuição para a comunidade em todo o país.

Desejamos a todos um ano novo de muita paz, saúde e sucesso em todos os empreendimentos.

**ARTIGOS DE DIVULGAÇÃO**

---

**"MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL"****RELATÓRIO TÉCNICO (1982 A 1986)**

Durante os seus cinco primeiros anos a "Matemática Aplicada e Computacional" tem-se firmado como um periódico científico de padrão internacional.

Cada volume é sempre publicado durante o ano da capa, o que é um importante fator para adquirir a confiança da comunidade, bem como a manutenção e aumento do volume de assinaturas.

Cada um dos três números anuais publica em média cinco artigos, distribuídos por aproximadamente cem páginas.

**TIRAGEM E ASSINATURAS**

A tiragem é de 1.200 exemplares, sendo que 800 se destinam aos sócios da SBMAC. A partir do número 2, vol. 5 (1986) estaremos acrescentando 200 exemplares a cada uma destas cifras.

**PREÇO POR ASSINATURA**

No momento além dos sócios que recebem a revista temos 24 assinantes no Brasil e 25 no exterior.

As assinaturas são cobradas ao preço de:

Institucional (nacional) : Cz\$ 752,00

Institucional (exterior) : US\$ 80,00

Individual (nacional) : Cz\$ 450,00

Individual (exterior) : US\$ 51,00

## DIVULGAÇÃO

O regime de co-edição com a Editora Campus, associada à Elsevier, é um importante meio de facilitar a divulgação internacional da revista. É digno de nota o fato de que já haviam sido recebidos pedidos do exterior para renovação da assinatura em 1987, antes mesmo de estar publicado o primeiro número de 1986.

A revista figura no catálogo anual da Elsevier e nos seguintes índices seletivos:

- Mathematical Reviews (da American Mathematical Society) e publicações associadas.
- Zentralblatt für Mathematik
- INSPEC (do Institute for Electrical Engineers - Inglaterra)
- Abstracts Journal of the USSR
- Current Contents (e publicações associadas do Institute for Scientific Information)
- Sumários Correntes em Ciência e Tecnologia do IBICT/CNPq

## CORPO EDITORIAL

O Corpo Editorial conta com 40 pesquisadores, sendo metade do Brasil e a outra metade do exterior. Os últimos estão distribuídos na Alemanha, Áustria, Escócia, EUA, França, Inglaterra, Israel, Itália, México e Venezuela. No Brasil, distribuem-se nas Universidades Federais do Rio de Janeiro, Pernambuco, Rio Grande do Sul, Fluminense, Estadual de Campinas, de Brasília, Católica do Rio de Janeiro, LNCC, CBPF, IMPA, INPE, Museu Goeldi e ITA.

## DADOS SOBRE OS ARTIGOS

Nestes 5 anos foram submetidos à Matemática Aplicada e Computacional 158 artigos, dos quais:

- 75 (47,5%) foram aceitos

- 63 (40,5%) foram recusados
- 12 ( 7,6%) estão sendo avaliados
- 7 ( 4,4%) foram re-encaminhados aos autores

Dos 75 artigos aceitos a distribuição por idioma é:

- Inglês : 62 (82,7%)
- Português . 7 ( 9,3%)
- Francês : 6 ( 8,0%)

A distribuição dos autores por nacionalidade é:

- Brasil : 55 (45,9%)
- Europa : 23 (19,2%)
- América do Norte (1) : 21 (17,5%)
- América do Sul (2) : 17 (14,2%)
- Ásia : 2 ( 1,7%)
- África : 1 ( 0,8%)
- Áustria : 1 ( 0,8%)

Observe que cada autor foi tabulado uma vez por cada artigo que publicou, independente do eventual número de co-autores.

A distribuição dos autores por instituição nacional é a seguinte:

- UNICAMP : 12 (22%)
- LNCC : 10 (18%)
- UFRJ : 8 (14,6%)
- PUC/RJ : 8 (14,6%)
- UFSCar, IME e IBGE : 2 cada (3,6%)
- UFCE, UFPE, UFRGS, UFSC, UFPI, USP-SP, INPE, ITA, IMPA, IBM, e FURNAS : 1 cada (1,8%)

Os autores ligados a instituições do exterior estão distribuídos como segue:

- U.C. Venezuela (7), U.Chicago (6), U.Pavia (5), U.Graz-Áustria (4), U.B.Aires (3), U.S.Luis-Argentina (3), LCPC-França (2), U.Augsburg (2), Dekalb U. (2), U. Nottingham (2); e com 1 cada: Brown U., U.



Bremen, College de France, Nankai U., Imperial College, Courant Institute, INRIA, U.S. Bolívar, U.Groningen, Oakland U., U.California-Riverside, U.Udine, U.N. Carolina, Fukuoka U., U.Salta, Tulane U., U. La Plata, U. Viena, Wright S. Univ., N. Mexico U., Oxford U., Sandia Lab., E.E. Tunisia, Australia National U., Everest Consulting e U.S.A.F. Academy, U.N. Ingenieria-Peru.

A distribuição dos artigos por área é:

1 - Equações diferenciais (teoria e aplicações) :	23 (30,6%)
2 - Equações diferenciais (tratamento numérico) :	17 (22,6%)
3 - Teoria matemática de sistemas e controle :	12 (16%)
4 - Álgebra linear numérica :	6 ( 8%)
5 - Estatística :	6 ( 8%)
6 - Otimização :	5 (6,7%)
7 - Computação Científica :	4 (5,3%)
8 - Teoria dos jogos :	2 (2,6%)

Deve-se notar que há um coeficiente de incerteza nesta tabulação: alguns dos artigos tabulados em (4.), (6.) ou (2.) poderiam estar incluídos em (7.), como também parte de (1.) poderia ser incluída em (2.) ou vice-versa.

## AVALIADORES

Segue uma lista (não exaustiva) dos avaliadores acionados nestes cinco volumes. A ela devem-se acrescentar os membros do corpo editorial.

M.Mock, Weissmann I.	Carlos Humes, USP
S. Alpern, London S.E.	L.A. Medeiros, UFRJ
M. Slemrod, Troy (USA)	Hilton Machado, UnB
R.S. Kubrusly, LNCC	Plácido Tâboas, USP
J.Valdo Gonçalves, UnB	A. Carleial, INPE
M.J.Estebán, U.Paris VI	Carlos Tomei, PUC-RJ
D.Colton, Delaware U.	Sidney Stuckenbruch, PUC-RJ
Luciano Pereira, LNCC	Dan Marchesin, PUC-RJ

J. Rissanen, IBM-Palo Alto	Gilberto Correa, LNCC
J. Percus, NYU	Paulo Feofiloff, IME/USP
C. LeMarechal, INRIA	O. Baiocchi, U. Missouri
J.L. Boldrini, UNICAMP	M.Hirata, COPPE
G. Katz, UFPe	L.C. Wrobel, COPPE
Joe Keller, Stanford	P. Letaltec, LCPC
H. Keller, Caltech	John Dennis Jr., Rice U.
C.A. Galvão, CBPF	Richard Tapia, Rice U.
L. Barbanti, USP	Stan Osher, UCLA
J. Blatter, UFRJ	A.C. Atkinson, Imperial C.
I. Duff, Harwell	H. Berestycki, Paris VI
Sergio Werlang, IMPA	C.M. Dafermos, Brown U.
I. Ekeland, Paris IX	Waldemar C. da Rocha Jr., UFPe
B. Gavish, Rochester	J. Beasley, Imperial C.
J.E. Spingarn, Georgia Tech.	H.D. Alber, Bonn
Garth Baker, Maryland	R. Caflish, NYU
L.L. Campbell, Ontario	F.R. Gorini, CEPEST
A. Mandel, USP	G. Banon, INPE
H. Virgi, NSF-EUA	J. Hale, Brown
A. Pazy, Jerusalém	G. Marshall, NYU
L.C. Martins, COPPE	M.V. Kritz, LNCC
P.S. Letelier, UnB	J.P. Bourguignon, E. Polytechnique.

Estamos anexando a este relatório um exemplar do nº 1, vol 5, 1985. O nº 2 está no prelo, razão pela qual anexamos apenas cópia da folha de rosto dos artigos e do índice.

O nº 3, vol. 5 será uma edição especial com artigos escritos a convite pelos seguintes matemáticos:

- J.L. Lions (College de France)
- W. Strauss (Brown University)
- F. Browder (Rutgers University)
- J. Douglas Jr. (U. Chicago)
- C. Bardos (U. Paris)
- H. Breziz (U. Paris)
- A. Pazy (Jerusalém)

SOBRE UM ALGORÍTMO DE PROGRAMAÇÃO  
LINEAR FRACIONÁRIA

*Cláudia Guerreiro (\*)*  
*Waldecir Bianchini*  
*Instituto de Matemática da*  
*U.F.R.J.*

§1. Introdução

Vamos considerar o seguinte problema de programação linear fracionária.

PLF:           Minimizar  $N(x)/D(x)$   
                  sujeito a  $Ax \leq b, x \geq 0,$

onde  $N(x) := cx + c_0, D(x) := dx + d_0, x, c, d \in R^k,$   
 $A$  é uma matriz  $m \times k, b \in R^m, c_0, d_0$  são constantes e  $m, k \in N.$

Os algoritmos que aparecem na literatura para resolver este problema podem ser divididos em duas categorias principais. Uma delas segue o desenvolvimento apresentado por Charnes e Cooper [2], que mostraram que é suficiente resolver os dois seguintes problemas de programação linear, obtidos de PLF através da transformação  $y = tx, t \geq 0:$

---

(\*)  
Parcialmente financiada pelo CNPq.

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min} & c_0 t + cy \\
 \text{sujeito a} & Ay - bt \leq 0 \\
 & -d_0 t - dy = 1 \\
 & y, t \geq 0
 \end{array}
 \quad e \quad
 \begin{array}{ll}
 \text{Min} & -c_0 t - cy \\
 \text{sujeito a} & Ay - bt \leq 0 \\
 & +d_0 t + dy = 1 \\
 & y, t \geq 0
 \end{array}$$

O outro tipo de abordagem, desenvolvida por Martos [3], mantém as restrições na sua forma original e trata o problema diretamente, usando uma versão modificada do método simplex.

Wagner e Yuan [6] mostraram que o algoritmo desenvolvido por Martos é equivalente ao método de Charnes e Cooper, no sentido de que ambos levam a sequências idênticas de operações de pivoteamento.

Bitran [1] comparou o desempenho computacional de vários algoritmos, incluindo o de Charnes e Cooper e o de Martos, usando problemas aleatoriamente gerados. O método de Martos mostrou-se mais eficiente.

O algoritmo apresentado em [3] não contém só um método para a solução de PLF, mas também discute a existência ou não de soluções. O objetivo deste trabalho é descrever de forma simples esse algoritmo e ilustrar sua aplicação com exemplos.

Denotaremos por  $Z := \{x \in \mathbb{R}^k; Ax \leq b\}$ , o conjunto dos pontos viáveis e, no que se segue, suporemos que PLF já está colocado em sua forma padrão, pelo método usual da introdução de variáveis de folga.

§2. O método simplex fracionário

Se o problema PLF satisfizer às condições:

- i) o conjunto de pontos viáveis é não vazio e limitado
- ii)  $D(x) > 0, \forall x \in Z,$

então pode ser resolvido de forma semelhante ao problema linear acrescentando-se uma linha ao tableau do método simplex linear e modificando-se a forma pela qual uma variável é escolhida para entrar na base.

Usando a notação de [4], o tableau inicial de cada etapa do simplex linear tem a seguinte configuração:

$$\left[ \begin{array}{c|c|c} B & F & b \\ \hline c_B & c_F & 0 \end{array} \right]$$

$B$  é uma matriz  $m \times m$  (necessariamente não singular) cujas colunas correspondem a uma solução básica viável,  $F$  é uma matriz  $m \times n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  e em  $(c_B, c_F) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  então os valores dos coeficientes da função objetivo correspondentes a cada coluna.

Para o simplex fracionário substitui-se a última linha do tableau por duas outras: a primeira poucos valores do numerador e a segunda para os valores do denominador da função objetivo. Essas linhas serão denotadas, respectivamente, por  $(c_B, c_F)$  e  $(d_B, d_F) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ .

No simplex linear, o critério para a escolha da coluna de  $F$  que vai entrar na base é o seguinte:

- i) calcula-se  $r := c_F - c_B B^{-1} F \in \mathbb{R}^n$
- ii) se  $r \geq 0$ , o vértice é ótimo; se não, entra na base a coluna  $i$  para a qual  $r_i$  é mínimo.

Este critério pode ser modificado para o caso fracionário da seguinte forma:

- i) calcula-se  $z_1 := c_B B^{-1} b + c_0$   
 e  $z_2 := d_B B^{-1} b + d_0$
- ii) calcula-se  $\Delta := z_2 (c_F - c_B B^{-1} F) - z_1 (d_F - d_B B^{-1} F) \in \mathbb{R}^n$
- iii) se  $\Delta \geq 0$ , o vértice é ótimo; se não, entra na base a coluna  $i$  para a qual  $\Delta_i$  é mínimo.

O restante do método simplex permanece igual ao caso linear, incluindo o critério para saber se o mínimo é finito.

Nas condições descritas neste parágrafo, o mínimo existe e é assumido num vértice de  $Z$ , podendo ser calculado pelo método acima (ver [5] e [3]). Martos denomina este caso de "caso simples". Swarup só tratou do caso simples, mas Martos mostrou que o método simplex fracionário também se aplica num caso mais geral, que ele denominou de "bom caso" (ver parágrafo seguinte).

### §3. Discussão sobre a existência de soluções

As condições  $Z$  limitado e  $D(x) > 0, \forall x \in Z$ , não são realmente necessárias para que PLF tenha solução. Para a discussão da existência de soluções Martos exige apenas que  $Z$  contenha algum ponto  $x$  tal que  $D(x) \neq 0$  (sem perda de generalidade,  $D(x) > 0$ ) e utilize os seguintes conceitos:

Um ponto  $x \in Z$  é dito um bom ponto se uma das seguintes condições for satisfeita:

- a)  $D(x) > 0$
- ou
- b)  $D(x) = 0$  e  $N(x) > 0$ .

É interessante observar que, se existir solução, não poderá ser assumida num ponto  $x \in Z$  que satisfaça  $D(x) = 0$  e  $N(x) > 0$ , onde a função objetivo é ilimitada.

Um ponto  $x \in Z$  é dito um mau ponto se uma das seguintes condições for satisfeita:

- a)  $D(x) < 0$
- ou
- b)  $D(x) = 0$  e  $N(x) < 0$ .

Um ponto  $x \in Z$  é dito um ponto singular se  $D(x) = N(x) = 0$ .

Podemos falar em existência de soluções mesmo quando o conjunto viável contém pontos singulares, caso isto seja interpretado como a existência de um ponto (não singular) onde a função objetivo atinge um mínimo finito, considerando-a apenas onde o quociente  $N/D$  fizer sentido.

O problema PLF é dito:

- i) mau caso, se o conjunto dos pontos viáveis contém algum mau ponto;
- ii) bom caso, se o conjunto dos pontos viáveis só contém bons pontos;
- iii) caso singular, se o conjunto dos pontos viáveis não contém maus pontos, mas contém pontos singulares.

O algoritmo de Martos discute a existência de soluções para PLF baseado na

Proposição [3]

- i) Se PLF é um mau caso, então o problema não tem solução.
- ii) Se PLF é um bom caso e a função objetivo tem um mínimo finito, então o problema tem solução, assumida num ponto extremo de  $Z$ .
- iii) Se PLF é um caso singular, então o problema tem solução, assumida num bom ponto que é ponto extremo de  $Z$ .

§4. Descrição comentada do algoritmo

Para aplicar o algoritmo, não é necessário impor condições sobre PLF.

Etapa I - Obter uma solução básica viável (ou concluir que o conjunto viável é vazio e, portanto, o problema não tem solução).

Se não for conhecida uma solução básica inicial, pode-se usar o procedimento usual da primeira fase do método simplex linear de 2 fases.

Etapa II - Buscar  $x \in Z$ , tal que  $D(x) > 0$ .

II-a: Para o vértice  $x_0$  encontrado na Etapa I, calcular  $D(x_0)$ .

- i) Se  $D(x_0) > 0$ , seguir para a Etapa III.
- ii) Se  $D(x_0) < 0$ , trocar  $N$  por  $-N$  e  $D$  por  $-D$  no problema original e seguir para a Etapa III.
- iii) Se  $D(x_0) = 0$ , seguir para II-b.



II-b: Calcular o mínimo de  $D(x)$  para  $x \in Z$  (usando, por exemplo, o método simplex linear). Se durante esse processo for encontrado  $x \in Z$  tal que  $D(x) \neq 0$ , interrompe-se o cálculo e procede-se como em II-a.i) ou II-a.ii), de acordo com o sinal de  $D(x)$ . Se concluirmos que  $\min D = -\infty$ , procedemos como em II-a.ii). Se  $\min D = 0$  (o que ocorre se  $\min D = D(x_0)$ ), seguimos para II-c.

II-c: Calcular o máximo de  $D(x)$  para  $x \in Z$ .

Se durante esse processo for encontrado  $x \in Z$  tal que  $D(x) \neq 0$ , interrompe-se o cálculo e procede-se como em II-a.i) ou II-a.ii), conforme o sinal de  $D(x)$ .

Se não, teremos chegada a uma das situações seguintes:

- i)  $\max D = 0$ : o denominador é identicamente nulo e o problema não tem sentido
- ii)  $\max D = +\infty$ : seguir para a Etapa II.

### Etapa III - Diferenciação dos casos

III-a: Pelo procedimento da Etapa II, já sabemos que  $Z$  contém pontos onde o denominador é estritamente positivo. Para saber se existem pontos onde o denominador é negativo, calculamos o mínimo de  $D(x)$  para  $x \in Z$ . Se, durante o cálculo de  $\min D$  encontramos algum  $x \in Z$  tal que  $D(x) < 0$  ou concluimos que  $\min D = -\infty$ , interrompemos o processo, porque o problema não tem solução (mau caso). Caso contrário, chegaremos a uma das seguintes situações:

- i)  $\min D = 0$ : seguir para a Etapa III-b
- ii)  $\min D > 0$ : seguir para a Etapa IV (bom caso).

No decorrer da Etapa III-a é conveniente armazenar, entre os tableaus encontrados, aquele que minimiza  $N/D$ , para  $D > 0$ .

III-b: Partindo do último vértice da etapa anterior, resolvemos o problema de minimizar  $N$  sujeito às restrições originais e à restrição extra  $D(x) = 0$ . Para calcular esse mínimo, pode-se aplicar o método simplex fracionário ao problema original introduzindo para a escolha da coluna a entrar na base o seguinte critério:

$$i) \text{ calcula-se } r := c_F - c_B B^{-1} F \in \mathbb{R}^n \text{ e}$$

$$s := d_F - d_B B^{-1} F \in \mathbb{R}^n$$

ii) se  $r_i \geq 0$  ou  $s_i \neq 0$ ,  $\forall i=1, \dots, n$ , então o vértice é ótimo; senão, entre as colunas para as quais  $s_i = 0$ , é escolhida para entrar na base aquela para a qual  $r_i$  é mínimo.

O critério acima obriga a que só entrem na base vértices onde o denominador se anula e é muito mais vantajoso usá-lo do que ao simplex linear.

Se, durante o cálculo de  $\min N$ , obtivermos  $x \in Z$ , tal que  $N(x) < 0$  ou concluirmos que  $\min N = -\infty$ , interrompemos o processo, porque o problema não tem solução (mau caso).

Se o cálculo não for interrompido, chegaremos a uma das seguintes situações:

- i)  $\min N = 0$ : seguir para a Etapa V (caso singular).
- ii)  $\min N > 0$ : seguir para a Etapa IV (bom caso).

#### Etapa IV - Solução do Bom Caso

Usa-se o método simplex fracionário, de preferência partindo do tableau que foi armazenado durante a Etapa III-a.

É bom observar que o método simplex fracionário poderá concluir que o mínimo não é finito.

Etapa V - Solução do Caso Singular

Para o tableau que vem da Etapa III-b, observemos os vetores  $r := c_F - c_B B^{-1}F$  e  $s := d_F - d_B B^{-1}F \in \mathbb{R}^n$ .

Escolha  $j \in \{1, \dots, n\}$  tal que

$$(*) \quad r_j/s_j = \min_{1 \leq i \leq n} \{r_i/s_i, s_i > 0\} \quad (\text{sempre possível neste caso}).$$

Denotando por  $(y_1, \dots, y_m)$  os elementos que aparecem nas  $m$  primeiras linhas da coluna  $m+j$  do tabelau, ocorre uma das duas situações seguintes:

V-a: Existe  $l \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $y_l > 0$  (para alguma escolha de  $j$  satisfazendo (\*)).

Neste caso, incluímos na base a coluna  $m+j$  e retiramos da base a coluna  $k$  tal que

$$b_k/y_k = \min_{1 \leq i \leq n} \{b_i/y_i; y_i > 0\},$$

onde  $b = (b_1, \dots, b_m)$  é o vetor que aparece na última coluna do tableau.

O vértice obtido fazendo apenas mais uma etapa do método simplex é ótimo.

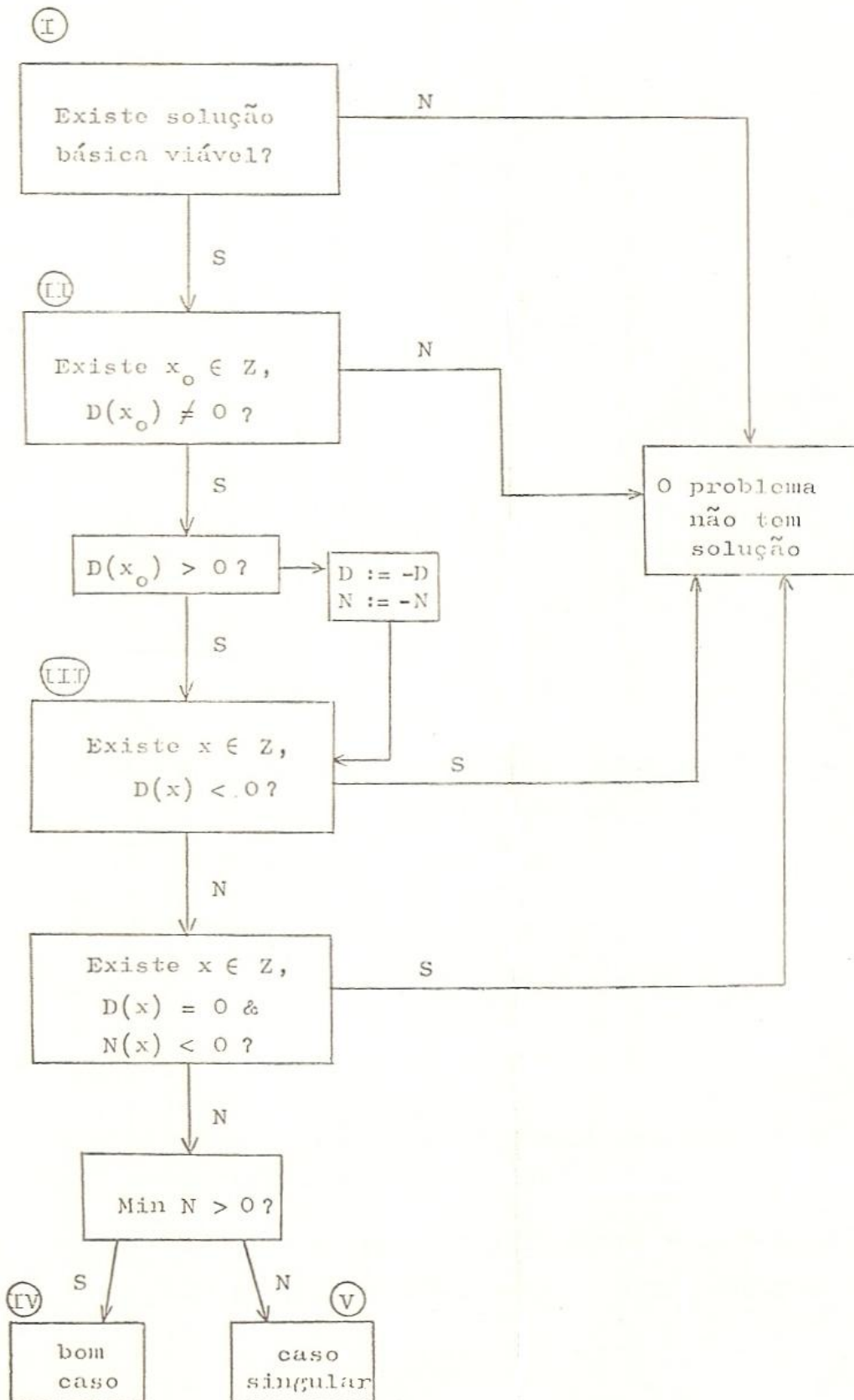
V-b:  $y_l \leq 0, \forall l \in \{1, \dots, m\}$  (para todas as escolhas possíveis de  $j$  satisfazendo (\*)).

Então, para qualquer  $\lambda > 0$ , o vetor

$$(b_1 - \lambda y_1, b_2 - \lambda y_2, \dots, b_m - \lambda y_m, 0, \dots, \lambda, \dots, 0)$$

(j+m)

é uma solução (não básica) para o problema.



§5. Exemplos

Os problemas a seguir foram resolvidos usando um programa BASIC desenvolvido para o microcomputador I-7000 Jr. da Itautec.

Exemplo 1:  $\text{Min } \frac{-x_1+7}{-2x_1+x_2}$ ,

sujeito a

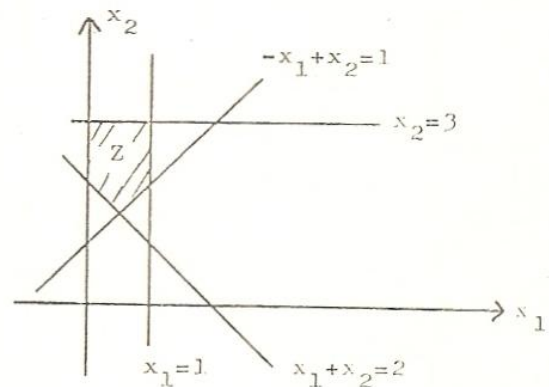
$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$-x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Introduzindo as variáveis de folga  $x_3, x_4, x_5$  e  $x_6$ , colocamos as restrições na forma padrão

$$x_1 + x_2 - x_3 = 2$$

$$-x_1 + x_2 - x_4 = 1$$

$$x_2 + x_5 = 3$$

$$x_1 + x_6 = 1$$

Neste problema temos  $D$  não identicamente nulo e  $\text{Min } D(x) = 0$  em  $Z$ .

No final da Etapa III-a obtivemos o vértice  $x_1 = 1$  e  $x_2 = 2$ . A Etapa III-b se inicia com o tableau

	$x_1$	$x_2$	$x_5$	$x_3$	$x_6$	$x_4$	$b$
	1	0	0	0	1	0	1
	0	1	0	0	1	-1	2
	0	0	1	0	-1	1	1
	0	0	0	1	2	-1	1
$c_B, c_F$	-1	0	0	0	0	0	7
$d_B, d_F$	-2	1	0	0	0	0	0

A matriz  $B$  é a identidade,  $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_B = [-1 \ 0 \ 0 \ 0], \quad c_F = [0 \ 0]$$

$$d_B = [-2 \ 1 \ 0 \ 0] \text{ e } d_F = [0 \ 0]$$

Portanto  $r := c_F - c_B B^{-1} F = [1 \ 0]$  e  $s := d_F - d_B B^{-1} F = [1 \ 1]$ .

Pelo critério descrito em III-b temos um vértice ótimo para o problema de minimizar  $N$  sujeito às restrições originais mais à condição  $D(x) = 0$ . Então  $\min N = 6 > 0$ , logo temos um bom caso.

Para iniciar a Etapa IV, partimos do tableau abaixo, que foi armazenado durante a Etapa III-a.

	$x_1$	$x_2$	$x_5$	$x_6$	$x_3$	$x_4$	b
	1	0	0	0	-0.5	0.5	0.5
	0	1	0	0	-0.5	-0.5	1.5
	0	0	1	0	0.5	0.5	1.5
	0	0	0	1	0.5	-0.5	0.5
$c_B, c_F$	-1	0	0	0	0	0	7
	-2	1	0	0	0	0	0

A matriz B é a identidade, a matriz  $F = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$

$$b = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad c_B = [-1 \ 0 \ 0 \ 0], \quad c_F = [0 \ 0],$$

$$d_B = [-2 \ 1 \ 0 \ 0] \text{ e } d_F = [0 \ 0]$$

	$x_1$	$x_2$	$x_5$	$x_6$	$x_3$	$x_4$	b
	1	0	0	0	-0.5	0.5	0.5
	0	1	0	0	-0.5	-0.5	1.5
	0	0	1	0	0.5	0.5	1.5
	0	0	0	1	0.5	-0.5	0.5
$c_F - c_B B^{-1} F$	-	-	-	-	-0.5	0.5	7
$d_F - d_B B^{-1} F$	-	-	-	-	-0.5	1.5	0
$\Delta$	-	-	-	-	3	-9.5	

Como  $\Delta_2 < 0$ , entra na base a variável  $x_1$ . Pelo critério usual

sai a variável  $x_1$ . O novo tableau é:

	$x_4$	$x_2$	$x_5$	$x_6$	$x_3$	$x_1$	b
	0,5	0	0	0	-0,5	1	0,5
	-0,5	1	0	0	-0,5	0	1,5
	0,5	0	1	0	0,5	0	1,5
	-0,5	0	0	1	0,5	0	0,5
$c_B, c_F$	0,5	0	0	0	-0,5	0	7
$d_B, d_F$	1,5	1	0	0	-0,5	0	0

	$x_4$	$x_2$	$x_5$	$x_6$	$x_3$	$x_1$	b
	1	0	0	0	-1	2	1
	0	1	0	0	-1	1	2
	0	0	1	0	1	-1	1
	0	0	0	1	0	1	1
$c_F - c_B B^{-1} F$	-	-	-	-	0	-1	7
$d_B - d_B B^{-1} F$	-	-	-	-	1	-3	0
$\Delta$	-	-	-	-	-7	19	

Como  $\Delta_1 < 0$ , entra na base  $x_3$  e sai  $x_5$



	$x_4$	$x_2$	$x_3$	$x_6$	$x_5$	$x_1$	
	1	0	-1	0	0	2	1
	0	1	-1	0	0	1	2
	0	0	1	0	1	-1	1
	0	0	0	1	0	1	1
$c_B, c_F$	0	0	0	0	0	-1	7
$d_B, d_F$	0	0	1	0	0	-3	0

	$x_4$	$x_2$	$x_3$	$x_6$	$x_5$	$x_1$	
	1	0	0	0	1	1	2
	0	1	0	0	1	0	3
	0	0	1	0	1	-1	1
	0	0	0	1	0	1	1
$c_F - c_B B^{-1} F$	-	-	-	-	0	-1	7
$d_F - d_B B^{-1} F$	-	-	-	-	-1	-2	0
$\Delta$	-	-	-	-	7	11	

Como  $\Delta > 0$ , chegamos a uma solução ótima  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 3$  com valor mínimo igual a 2,333.

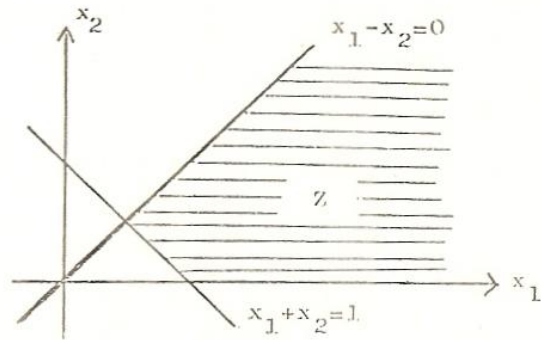
Exemplo 2:  $\text{Min } \frac{-x_1 + 2x_2}{x_2 + 8},$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1 - x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Introduzindo as variáveis de folga, colocamos as restrições na forma canônica:

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$x_1 - x_2 - x_4 = 0$$

Trata-se de um bom caso porque  $D(x) > 0, \forall x \in Z.$

Para iniciar a Etapa IV usamos o seguinte tableau:

	$x_4$	$x_1$	$x_3$	$x_2$	b
	1	0	-1	2	1
	0	1	-1	1	1
$c_B, d_F$	0	-1	0	2	0
$d_B, d_F$	0	0	0	1	8

	$x_4$	$x_1$	$x_3$	$x_2$	b
	1	0	-1	2	1
	0	1	-1	1	1
$c_F - c_B B^{-1} F$	-	-	-1	3	0
$d_F - d_B B^{-1} F$	-	-	0	1	8
$\Delta$	-	-	-8	25	

Tomos  $\Delta_1 = -8 < 0$ , porém a coluna relativa a  $\Delta_1$  contém somente valores negativos, o que indica que o valor mínimo procurado é  $-\infty$ .

Exemplo 3: 
$$\text{Min } \frac{-x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3}{x_2 - x_4 + x_5 + 1}$$
 sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 20 \\ x_3 + x_4 &\leq 5 \\ x_5 &\leq 100 \\ -x_3 + x_5 &\geq 7 \\ x_2 + x_4 &= 0,5 \\ x_1 - x_2 &= 10 \\ x_2 + x_5 &\geq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Trata-se de um bom caso porque  $D(x) > 0, \forall x \in Z$ .

O algoritmo calcula o valor mínimo  $-1,75$  assumido no vértice  $x_1 = 10,57, x_2 = 0,5, x_3 = x_4 = 0$  e  $x_5 = 2,5$ .

Exemplo 4: 
$$\text{Min } \frac{x_1 + x_2 - x_3 - 11}{-x_1 + x_2 + 11x_4 + x_5}$$
 sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 20 \\ x_3 + x_4 &\leq 5 \\ x_5 &\leq 100 \\ x_1 - x_3 + x_5 &\geq 7 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 7x_5 &\geq 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

O problema não tem solução porque o conjunto viável  $Z$  contém pontos onde  $D > 0$  e pontos onde  $D < 0$ . O algoritmo calcula

$$D(12,0,0,0,0) = -12 \quad \text{e} \quad D(7,0,0,5,0) = 13$$

Exemplo 5:       $\text{Min} \frac{-x_1 - x_2}{-2x_1 - x_2 + 8}$ ,

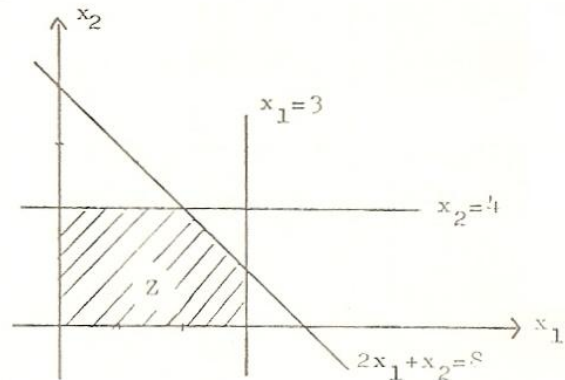
sujeito a

$$x_1 \leq 3$$

$$x_2 \leq 4$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Neste caso temos  $\min D = 0$  e existem pontos onde o denominador se anula e o numerador é estritamente negativo. O algoritmo calcula o vértice  $x_1 = 3$  e  $x_2 = 2$  e conclui que o problema não tem solução.

Exemplo 6:       $\text{Min} \frac{+x_1 - 2x_2 + 6}{+x_1 - x_2 + 2}$ ,

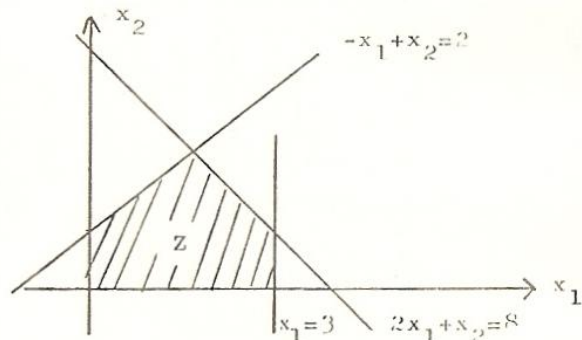
sujeito a

$$x_1 \leq 3$$

$$-x_1 + x_2 \leq 2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Introduzindo as variáveis de folga  $x_3, x_4$  e  $x_5$ , no final da Etapa III-a obtivemos o vértice  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 2$ .

A Etapa III-b se inicia com o tableau:

	$x_3$	$x_2$	$x_5$	$x_1$	$x_4$	b
	1	0	0	1	0	3
	0	1	0	-1	1	2
	0	0	1	3	-1	6
$c_B, c_F$	0	-2	0	1	0	6
$d_B, d_F$	0	-1	0	1	0	2

Neste caso  $r := c_F - c_B B^{-1} F = [-1 \ 2]$  e  $s := d_F - d_B B^{-1} F = [0 \ 1]$ . Logo  $x_1$  entra na base e sai  $x_5$  e temos:

	$x_3$	$x_2$	$x_1$	$x_5$	$x_4$	b
	1	0	1	0	0	3
	0	1	-1	0	1	2
	0	0	3	1	-1	6
$c_B, c_F$	0	0	-1	0	2	6
$d_B, d_F$	0	0	0	0	1	2

	$x_3$	$x_2$	$x_1$	$x_5$	$x_4$	b
	1	0	0	-0.333	0.333	1
	0	1	0	0.333	0.666	4
	0	0	1	0.333	-0.333	2
$c_F - c_B B^{-1} F$	-	-	-	0.333	1.666	6
$d_F - d_B B^{-1} F$	-	-	-	0	1	2

Como  $r = [0.333 \ 1.666]$  só tem componentes positivos, chegamos a um vértice ótimo  $x_1 = 2$  e  $x_2 = 4$ , no qual o numerador se anula. Temos, portanto, um caso singular.

Como  $s = [0 \ 1]$  e o vetor  $y = (0.333, 0.666, -0.333)$  correspondente à coluna 5, satisfaz a  $b_1/y_1 = \min_{1 \leq i \leq 3} \{b_i/y_i; y_i > 0\}$ , entra na base a variável  $x_4$  e sai  $x_3$  (Etapa V-a).

	$x_4$	$x_2$	$x_1$	$x_5$	$x_3$	b
	0.333	0	0	-0.333	1	1
	0.666	1	0	0.333	0	4
	-0.333	0	1	0.333	0	2
$c_B c_F$	1.666	0	0	0.333	0	6
$d_B, d_F$	1	0	0	0	0	2

	$x_4$	$x_2$	$x_1$	$x_5$	$x_3$	b
	1	0	0	-1	3	3
	0	1	0	1	-2	2
	0	0	1	0	1	3
$c_F - c_B B^{-1} F$	-	-	-	2	-5	6
$d_F - d_B B^{-1} F$	-	-	-	1	-3	2
$\Delta$	-	-	-	1	0	

Assim chegamos a uma solução ótima  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 2$  com valor mínimo 1.666.

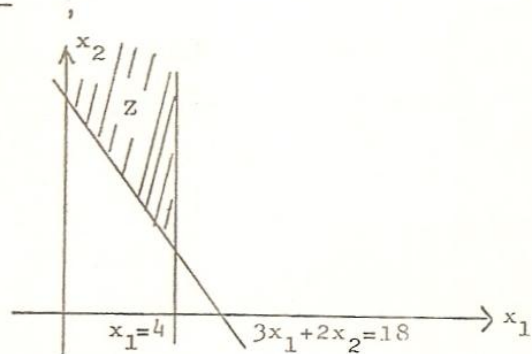
Exemplo 7:      Min  $\frac{-3x_1 - 4x_2 + 24}{-x_2 + x_2 + 1}$

sujeito a

$$x_1 \leq 4$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Introduzindo as variáveis de folga  $x_3$  e  $x_4$ , no final da Etapa III-a, obtivemos o vértice  $x_1 = 4$  e  $x_2 = 3$ . A Etapa III-b se inicia com o tableau:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	b		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	b
	1	0	1	0	4		1	0	1	0	4
	0	1	-1.5	-0.5	3		0	1	-1.5	-0.5	3
$c_B, c_F$	-3	-4	0	0	24	r	0	0	-3	-2	
$d_B, d_F$	-1	1	0	0	1	s	0	0	2.5	0.5	

Neste caso  $r := c_F - c_B B^{-1} F = [-3 \quad -2]$  e  $s := d_F - d_B B^{-1} F = [2.5 \quad 0.5]$ , o que indica um vértice ótimo para o numerador, o qual é nulo. Temos portanto um caso singular. Pelo critério da Etapa V-b a solução é dada por  $x_1 = 4 - \lambda \cdot 0 = 4$  e  $x_2 = 3 - \lambda(-0.5) = 3 + 0,5\lambda$ , onde  $\lambda$  é qualquer número estritamente positivo. O valor mínimo encontrado é  $-4$ .

Bibliografia

- [1] Bitran, G.R.; Experiments with Linear Fractional Problems, Naval Research Logistics Quarterly 26, 689-693 (1979).
- [2] Charnes, A. e Cooper, W.W.; Programming with Linear Fractional Functionals, Naval Research Logistics Quarterly 9, 181-186 (1962).
- [3] Martos, B.; Hyperbolic Programming, Naval Research Logistics Quarterly 11, 135-155 (1964).
- [4] Strang, G.; Linear Algebra and its Applications, 2ª ed., Academic Press, Inc. New York (1980).
- [5] Swarup, K.; Linear Fractional Functionals Programming, Operations Research 13, 1029-1037 (1965).
- [6] Wagner, H.M. e Yuan, J.S.L.; Algorithm Equivalence in Linear Fractional Programming, Management Science 14, 301-306 (1968).



INTERCONEXÕES MÍNIMAS E INTERCONEXÕES  
MUTUAMENTE DISJUNTAS EM GRAFOS : UMA RESENHA

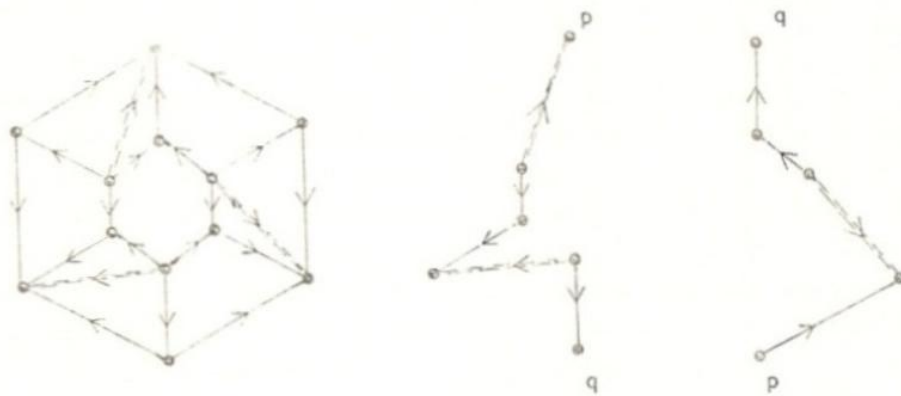
*Paulo Feofiloff*  
*Instituto de Matemática e*  
*Estatística da USP*

Resumo. O subgrafo gerador conexo e o fortemente conexo são os dois tipos mais comuns de interconexão dos vértices de um grafo. Um tipo mais exótico de interconexão parece ter as propriedades mais interessantes do ponto de vista dos dois problemas seguintes: a determinação de uma interconexão mínima e a determinação de uma coleção máxima de interconexões mutuamente disjuntas. O primeiro problema foi resolvido por Lucchesi e Younger e o segundo ainda está aberto.

## 1. OS PROBLEMAS

Os grafos de que trata esta resenha são orientados: cada aresta tem uma ponta inicial e uma ponta final. Os conjuntos de vértices e arestas de um grafo  $G$  serão denotados, como de praxe, por  $V_G$  e  $A_G$  respectivamente. Num caminho  $(v_0, a_1, v_1, \dots, v_{i-1}, a_i, v_i, \dots, a_n, v_n)$  uma aresta  $a_i$  é retrógrada se é usada no sentido contrário ao de sua orientação, isto é, se  $v_{i-1}$  é a ponta final e  $v_i$  a ponta inicial de  $a_i$ . A aresta  $a_i$  é progressiva em caso contrário.

Um subconjunto  $C$  de  $A_G$  semiliga um vértice  $p$  a um vértice  $q$  se existe um caminho de  $p$  a  $q$  cujas arestas retrógradas estão todas em  $C$ . Um semicondutor é um subconjunto  $C$  de  $A_G$  dotado da seguinte propriedade: para todo par  $p, q$  de vértices,  $C$  semiliga  $p$  a  $q$ .



O conceito de semiconector, ainda que um tanto exótico, é muito semelhante ao conceito de subgrafo gerador conexo e ao conceito de subgrafo gerador fortemente conexo. Na seção 6 vamos examinar estas analogias mais de perto.

O assunto central desta resenha é o seguinte: queremos algoritmos eficientes (isto é, polinomialmente delimitados no tempo) para resolver os seguintes problemas:

Problema 1 Dado um grafo  $G$  e um número  $k$ , construir um semiconector de  $G$  com  $k$  ou menos arestas.

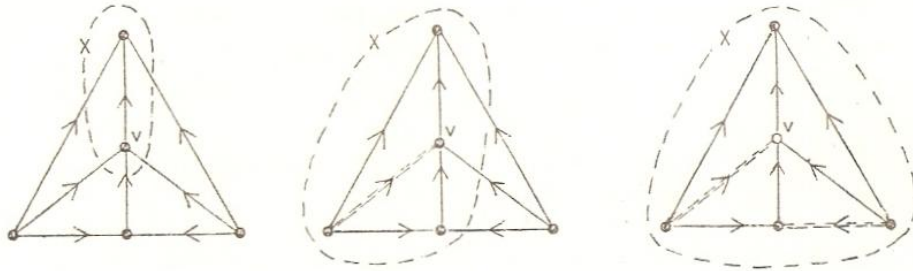
Problema 2 Dado um grafo  $G$  e um número  $k$ , construir  $k$  ou mais semiconectores mutuamente disjuntos.

Vamos discutir os Problemas no que segue — especialmente na seção 5 — mas já podemos adiantar que o primeiro está resolvido [LY,Lu] enquanto o segundo continua aberto [W,FY].

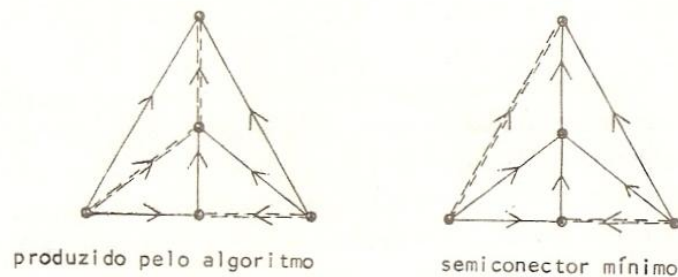
Por que o interesse em semiconectores? Imagine que os vértices do grafo são cidades e que as arestas são estradas de mão única. A restrição de mão impede, em geral, que se vá de certas cidades a certas outras. Um semiconector é um conjunto de estradas que resolve esta dificuldade: quando a restrição de mão é suspensa nas estradas do semiconector torna-se possível viajar de qualquer cidade a qualquer outra. Este exemplo justifica o interesse em semiconectores mínimos. Semiconectores mutuamente disjuntos são um pouco mais difíceis de introduzir no presente exemplo. Imagine que o trânsito de mão dupla em qualquer estrada prejudica certos usuários do sistema. Poderíamos diluir este prejuízo se tivéssemos semiconectores  $C_1, \dots, C_k$  mutuamente disjuntos e ativássemos

$C_1$  no primeiro dia,  $C_2$  no segundo, etc,  $C_k$  no  $k$ -ésimo,  $C_1$  no  $(k+1)$ -ésimo, etc.

Para melhor familiarizar o leitor com o conceito de semiconector vamos descrever um algoritmo muito simples que constrói um semiconector razoavelmente pequeno num grafo dado  $G$ . O algoritmo começa com  $C$  vazio e repete o seguinte procedimento para cada vértice  $v$ , sempre aumentando  $C$ . No início de cada iteração do procedimento,  $X$  é o conjunto dos vértices semiligados a  $v$  por  $C$ . Observe que nenhuma aresta sai de  $X$  e nenhuma aresta de  $C$  entra em  $X$ . Uma iteração consiste do seguinte. Se  $X = V_G$  então a execução do procedimento relativa ao vértice  $v$  termina. Se  $X \neq V_G$  e nenhuma aresta entra em  $X$  então pare pois  $G$  não tem semiconector. Se uma aresta  $b$  de  $A_G - C$  entra em  $X$  então acrescente  $b$  a  $C$ , acrescente a ponta inicial,  $y$ , de  $b$  a  $X$ , e acrescente a  $X$  os termos de todos os caminhos que começam em  $y$  e só têm arestas progressivas. Agora comece nova iteração.



Infelizmente este algoritmo não resolve o Problema 1. De fato, uma aplicação do algoritmo ao exemplo abaixo produz um semiconector de tamanho 3, enquanto o grafo tem um semiconector de tamanho 2.



O algoritmo, repetido  $k$  vezes, também não resolve o Problema 2. De fato, repetidas aplicações do algoritmo ao exemplo abaixo produziram semiconectores  $C_1$  e  $C_2$  e não conseguiram obter  $C_3$ . No entanto, o grafo possui 3 semiconectores mutuamente disjuntos.

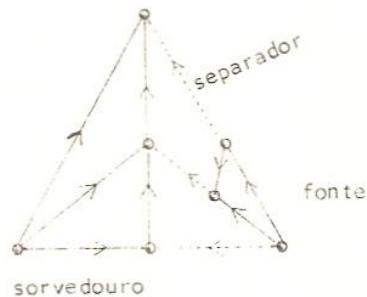


Voltaremos aos Problemas 1 e 2 na seção 5. Antes disso, vamos estudar certas condições necessárias naturais para que os Problemas tenham solução, e resolver duas versões simplificadas dos Problemas.

## 2. CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO

Existem pares  $G, k$  para os quais o Problema 1 não tem solução. Qualquer algoritmo que resolva o Problema deve saber reconhecer um tal par, mostrando talvez que ele viola alguma condição necessária de fácil verificação. Esta seção procura propor uma tal condição.

Para um grafo  $G$  e subconjuntos  $X$  e  $Y$  de  $V_G$ , seja  $A(X, Y)$  o conjunto das arestas que têm ponta inicial em  $X$  e ponta final em  $Y$ . Um separador é um conjunto da forma  $A(V_G - X, X)$ , onde  $X$  é um sorvedouro. Nesta definição, um sorvedouro é um subconjunto próprio e não vazio,  $X$ , de  $V_G$  tal que  $A(X, V_G - X)$  é vazio. Um separador pode ser equivalentemente definido como um conjunto da forma  $A(Y, V_G - Y)$  onde  $Y$  é uma fonte, isto é, um subconjunto próprio e não vazio de  $V_G$  tal que  $A(V_G - Y, Y)$  é vazio.



A relação fundamental entre os separadores e os semiconectores de um grafo é a seguinte:

para todo semiconector  $C$  e todo separador  $S$ ,  $C \cap S \neq \emptyset$  . . . (\*)

Isto é fácil de provar: Se  $X$  é um sorvedouro que define  $S$ , então existe um caminho de  $X$  a  $V_G - X$  cujas arestas retrógradadas estão em  $C$ . Este caminho tem, necessariamente, uma aresta retrógrada em  $S$ .

Do ponto de vista da propriedade (\*), os semiconectores determinam os separadores e reciprocamente. De fato, é fácil provar que (1) para qualquer conjunto  $S'$  de arestas, se  $S' \cap C \neq \emptyset$  para todo semiconector  $C$  então  $S'$  inclui um separador, e (2) para qualquer conjunto  $C'$  de arestas, se  $C' \cap S \neq \emptyset$  para todo separador  $S$  então  $C'$  inclui um semiconector. Assim, a associação entre semiconectores e separadores é bastante natural.

A propriedade (\*) implica a seguinte condição necessária para que o Problema 1 tenha solução:

Condição 1  $G$  não tem mais que  $k$  separadores mutuamente disjuntos.

(Um separador vazio pode figurar um número arbitrário de vezes numa coleção disjunta. Assim, a condição implica, em particular, que  $G$  não tem separador vazio). Analogamente, uma condição necessária para o Problema 2 é

Condição 2  $G$  não tem um separador com menos que  $k$  arestas.

Restam as perguntas: a Condição 1 é suficiente para que o Problema 1 tenha solução? A Condição 2 é suficiente para o Problema 2? Vamos adiar as respostas até a seção 5.

### 3. A VARIANTE BIPOLAR DOS PROBLEMAS

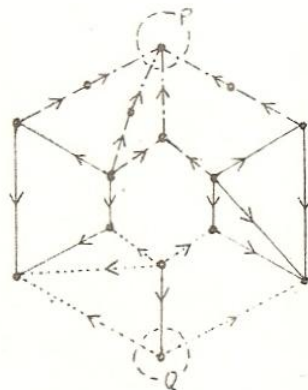
Antes de tentar resolver os Problemas 1 e 2 é conveniente estudar algumas de suas versões simplificadas. Nesta seção definiremos uma versão simplificada de semiconector e mostraremos que as correspondentes versões dos Problemas se comportam essencialmente como os conhecidos problemas do caminho mínimo e do fluxo máximo.

Para conjuntos  $P$  e  $Q$  de vértices (que chamaremos de polos) um semi-conector P-com-Q é um conjunto de arestas que semiliga  $P$  a  $Q$ .

Problema 1\*\* Dado um grafo  $G$ , subconjuntos  $P$  e  $Q$  de  $V_G$ , e um número  $k$ , encontrar um semiconector P-com-Q com  $k$  ou menos arestas.

Existe um algoritmo muito simples que resolve o Problema 1\*\*. Para melhor descrever o algoritmo, é conveniente fazer a seguinte definição: dada uma coleção  $\underline{X}$  de conjuntos,  $X$  é um elemento minimal de  $\underline{X}$  se não existe  $X'$  em  $\underline{X}$  tal que  $X' \subset X$ .

O Algoritmo 1\*\* constrói uma sequência  $Y_1, Y_2, \dots$  de fontes da seguinte maneira: para  $m = 1, 2, \dots$ ,  $Y_m$  é uma fonte minimal dentre as fontes  $Y$  tais que  $Y \supset Q$ ,  $Y \cap P = \emptyset$ , e o separador  $A(Y, V_G - Y)$  é disjunto dos separadores  $A(Y_1, V_G - Y_1), \dots, A(Y_{m-1}, V_G - Y_{m-1})$ . (Para calcular  $Y_m$  acrescente a  $Y_{m-1}$  todos os vértices semiligados a  $Y_{m-1}$  pelo separador  $A(Y_{m-1}, V_G - Y_{m-1})$ .) Se, para algum  $m$  não superior a  $k$ ,  $Y_m$  não tiver sucessor  $Y_{m+1}$ , então o algoritmo extrai de  $Y_1, \dots, Y_m$  um semiconector de tamanho  $m$ . Se o algoritmo gerar  $Y_m$  com  $m > k$  então o Problema não tem solução, fato atestado pela existência de mais que  $k$  separadores mutuamente disjuntos entre  $P$  e  $Q$ .



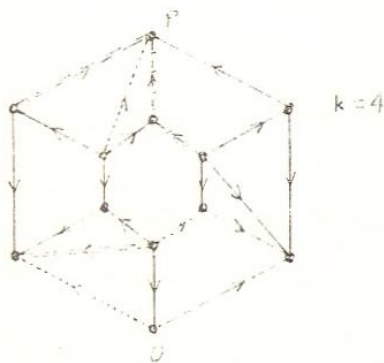
Os separadores que aparecem no algoritmo são definidos por fontes que incluem  $Q$  e são disjuntas de  $P$ ; vamos chamar tais separadores de separadores P-de-Q. O Algoritmo 1\*\* mostra que para o Problema 1\*\* a condição necessária natural — a não-existência de mais que  $k$  separadores P-de-Q mutuamente disjuntos — é também suficiente.

Considere agora a seguinte variante do Problema 2:

Problema 2\*\* Dado um grafo  $G$ , subconjuntos  $P$  e  $Q$  de  $V_G$ , e um número  $k$ , encontrar  $k$  ou mais semiconectores P-com-Q mutuamente disjuntos.

Existe um algoritmo eficiente para o Problema 2\*\*. Trata-se de uma variante simples do conhecido algoritmo de Ford-Fulkerson:

Cada iteração deste Algoritmo 2\*\* começa com uma coleção  $d$ -sujunta  $C_1, \dots, C_m$  de semiconectores P-com-Q. Se  $m \geq k$ , temos uma solução do Problema. Suponha agora que  $m < k$ . Para cada  $i$  o algoritmo determina um caminho  $\pi_i$  de  $P$  a  $Q$  cujas arestas retrógradadas estão em  $C_i$ . Se uma aresta  $b$  é retrógrada em  $\pi_i$  e progressiva em  $\pi_j$ ,  $j \neq i$ , então o algoritmo emenda o segmento de  $\pi_i$  que precede  $b$  com o segmento de  $\pi_j$  que sucede  $b$  e o segmento de  $\pi_j$  que precede  $b$  com o segmento de  $\pi_i$  que sucede  $b$ . Esta operação de normalização é repetida enquanto existirem ternos  $b, \pi_i, \pi_j$  nas condições indicadas. Sejam  $\pi_1^i, \dots, \pi_m^i$  os caminhos que sobram depois de completa a normalização e sejam  $C_1^i, \dots, C_m^i$  os correspondentes semiconectores. Seja  $C_{m+1}^i$  o conjunto  $A_G - (C_1^i \cup \dots \cup C_m^i)$  e seja  $X$  o conjunto dos vértices semiligados por  $C_{m+1}^i$  a  $P$ . Se  $X \cap Q \neq \emptyset$  então inicie nova iteração com  $C_1^i, \dots, C_m^i, C_{m+1}^i$  no papel de  $C_1, \dots, C_m$ . Se  $X \cap Q = \emptyset$  então o sorvedouro  $X$  define um separador com apenas  $m$  arestas, e a existência de um tal separador é evidência de que o Problema não tem solução.



O Algoritmo 2\*\* mostra que para o Problema 2\*\* a condição necessária natural é também suficiente.

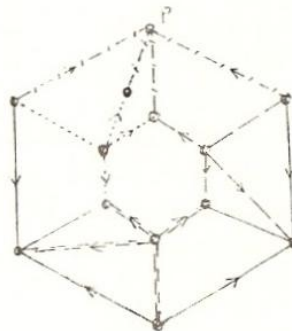
#### 4. A VARIANTE MONOPOLAR DOS PROBLEMAS

Para um conjunto  $P$  de vértices, um semiconector P-com-todos é um conjunto de arestas que semiliga  $P$  com cada um dos vértices do grafo.

Problema 1\* Dado um grafo  $G$ , um subconjunto  $P$  de  $V_G$ , e um número  $k$ , encontrar um semiconector P-com-todos com  $k$  ou menos arestas.

Um separador P-de-alguem é um separador definido por uma fonte disjunta de  $P$  (ou um sorvedouro que inclui  $P$ ). A condição necessária natural para o Problema 1\* é que  $G$  não tenha mais que  $k$  separadores P-de-alguem mutuamente disjuntos.

Younger descreve [Y] um algoritmo simples e eficiente para o Problema 1\*. O Algoritmo 1\*, formalmente análogo ao Algoritmo 1\*\*, gera uma sequência  $Y_1, Y_2, \dots$  de fontes pela seguinte regra: para  $m = 1, 2, \dots$ ,  $Y_m$  é uma minimal dentre as fontes  $Y$  disjuntas de  $P$  tais que o separador  $A(Y, V_G - Y)$  é disjunto de  $A(Y_1, V_G - Y_1), \dots, A(Y_{m-1}, V_G - Y_{m-1})$ . Se o algoritmo gerar  $Y_m$  com  $m > k$  então o Problema não tem solução. Se, para algum  $m$  não superior a  $k$ ,  $Y_m$  não tem sucessor  $Y_{m+1}$  então o algoritmo constrói, pelo processo iterativo descrito a seguir, um semiconector P-com-todos de tamanho  $m$ . No início de cada iteração tem-se o conjunto  $\{c_1, \dots, c_{i-1}\}$  das arestas já escolhidas e um subconjunto  $J$  de  $\{1, \dots, m\}$ . Antes da primeira iteração o conjunto de arestas é vazio e  $J = \{1, \dots, m\}$ . A iteração consiste em escolher  $j$  em  $J$  e  $c_j$  no separador definido por  $Y_j$  tais que  $\{c_1, \dots, c_{i-1}\}$  semiliga  $P$  à ponta final de  $c_j$ . Agora o algoritmo acrescenta  $c_j$  a  $\{c_1, \dots, c_{i-1}\}$  retira  $j$  de  $J$ , e começa nova iteração.





O algoritmo mostra que a condição necessária natural para o Problema 1\* é também suficiente.

Considere agora o seguinte

Problema 2\* Dado um grafo  $G$ , um subconjunto  $P$  de  $V_G$ , e um número  $K$ , encontrar  $k$  semiconectores  $P$ -com-todos mutuamente disjuntos.

Uma condição necessário natural para o Problema 2\* é que  $G$  não tenha um separador  $P$ -de-alguém com menos que  $K$  arestas. Edmonds [E2] foi o primeiro a mostrar que a condição também é suficiente. Pouco depois, Lovász [Lo] confirmou a suficiência com o Algoritmo 2\* que esboçaremos a seguir.

O primeiro passo do algoritmo é verificar se a condição necessária descrita acima está satisfeita. Isto se faz com repetidas execuções do Algoritmo 2\*\*, com  $Q$  percorrendo os subconjuntos unitários de  $V_G - P$ . Se a condição estiver satisfeita, o algoritmo passa a construir  $K$  semicondutores mutuamente disjuntos: primeiro  $C_1$ , depois  $C_2$ , etc, e finalmente  $C_K$ . A única restrição que se faz ao semicondutor  $C_1$ , é que deixe pelo menos  $K-1$  arestas livres em cada separador  $P$ -de-alguém, isto é, que  $|S - C_1| \geq K-1$  para cada separador  $P$ -de-alguém  $S$ . Um semicondutor com esta propriedade é dito admissível. A admissibilidade de  $C_1$  é obviamente necessária para a existência de  $C_2, \dots, C_K$ . Lovász descobriu que a condição é também suficiente! Assim, o algoritmo determina um

$C_1$  admissível, depois repete o processo com  $k-2$  em lugar de  $k-1$  para determinar  $C_2$ , e assim por diante.

A construção de um semiconector admissível  $C_1$  é conceitualmente simples: basta escolher uma aresta por vez, como isso foi feito na seção 1, de tal modo que o conjunto de arestas escolhidas permaneça admissível. No início de cada iteração tem-se portanto, um subconjunto admissível  $\{c_1, \dots, c_{i-1}\}$  de  $A_G$  e o conjunto,  $X$ , dos vértices que  $\{c_1, \dots, c_{i-1}\}$  semiliga a  $P$ . Se  $X = V_G$  então  $\{c_1, \dots, c_{i-1}\}$  é um semicondutor. Se  $X \neq V_G$  então o algoritmo escolhe  $c_i$  dentre as arestas que entram em  $X$  de tal modo que  $\{c_1, \dots, c_{i-1}, c_i\}$  seja admissível. Lovász provou que ma tal aresta necessariamente existe,

Como testar a admissibilidade de  $\{c_1, \dots, c_{i-1}, c_i\}$  dada a admissibilidade de  $\{c_1, \dots, c_{i-1}\}$ ? Se  $x$  e  $y$  são as pontas inicial e final de  $c_i$ , basta verificar se existem  $k-1$  semicondutores  $Pu\{y\}$ -com- $\{x\}$  que sejam disjuntos entre si e disjuntos de  $\{c_1, \dots, c_{i-1}, c_i\}$ . E esta verificação pode ser feita pelo Algoritmo 2\*\*.

## 5. DE VOLTA AOS PROBLEMAS 1 E 2

Os Problemas 1 e 2 parecem ser consideravelmente mais difíceis que suas variantes monoplares. A dificuldade não está na ausência de pólos, pois os sorvedouros e fontes minimais do grafo constituem pólos naturais: um conjunto  $C$  de arestas é um semicondutor se e só se  $C$  semiliga cada sorvedouro minimal com cada fonte minimal. A dificuldade não está na ausência de polos mas antes no grande número de pólos. Se o grafo tiver um só sorvedouro então os Algoritmos 1\* e 2\* resolvem os Problemas 1 e 2, se o grafo tiver uma só fonte minimal estão os duais daqueles algoritmos, obtidos pela inversão da orientação de todas as arestas, resolvem os Problemas.

É interessante perguntar se o método usado pelo Algoritmo 1\* é capaz de resolver o Problema 1. Para  $m = 1, 2, \dots$ , seja  $Y_m$  minimal dentre as fontes  $Y$  cujo separador é disjunto dos separadores de  $Y_1, \dots, Y_{m-1}$ . Pare quando algum  $Y_m$  com  $m \leq k$  não tiver sucessor ou quando  $m$  passar de  $k$ . No primeiro caso extraia um semiconector de  $Y_1, \dots, Y_m$ . Infelizmente este algoritmo não é capaz de resolver o Problema: no exemplo abaixo, qualquer aplicação do algoritmo ao grafo gera apenas duas fontes,  $Y_1$  e  $Y_2$ , enquanto o grafo tem três separadores mutuamente disjuntos.

O exemplo sugere que o Problema 1 exige métodos mais sofisticados. Tais métodos foram desenvolvidos entre 1972 e 1974 por Lucchesi e Younger e levaram à prova [LY] de que a condição necessária natural do Problema 1 - a não-existência de mais que  $k$  separadores mutuamente disjuntos - é também suficiente. Uma prova independente foi dada por Lovász [Lo]. Um algoritmo eficiente para a solução do Problema, intimamente relacionado com a prova de suficiência, foi desenvolvido por Lucchesi [Lu] e depois elaborado por Fujishige e Tomizawa [FT]. O algoritmo produz, recursivamente, um semiconector  $C$  e uma coleção  $\{S_1, \dots, S_m\}$  de separadores mutuamente disjuntos tais que  $|C| = m$ . Se  $m > k$  então a condição necessária está violada; caso contrário,  $C$  é uma solução. A recursão exige que o Problema seja generalizado de uma maneira curiosa: o requisito de disjunção mútua de  $S_1, \dots, S_m$  é relaxado, permitindo-se que cada aresta pertença a até dois separadores. O funcionamento do algoritmo acaba então dependendo do seguinte fato não-trivial: uma coleção de separadores sujeita à disjunção relaxada em no máximo duas vezes mais elementos que qualquer coleção estritamente disjunta.

Considere agora o Problema 2. Começamos tentando aplicar ao Problema a estratégia de Lovász, usada no Algoritmo 2\*: construa um semiconector admissível, depois outro disjunto do primeiro, etc. Infelizmente esta estratégia não resolve o Problema pois nem todo semiconector admissível é parte de uma coleção máxima de semiconectores disjuntos. Este fato foi descoberto por Schrijver [S2], que forneceu o exemplo reproduzido abaixo. Neste exemplo tem-se  $|S| \geq 4$  para todo separador  $S$ , um semiconector  $C_1$  tal que  $|S - C_1| \geq 3$  para todo  $S$ , um semiconector  $C_2$  tal que  $|S - (C_1 \cup C_2)| \geq 2$  para todo  $S$ , mas não existem  $C_3$  e  $C_4$  disjuntos entre si e disjuntos de  $C_1$  e  $C_2$ . (No entanto, o grafo tem 4 semiconectores mutuamente disjuntos.)

Outras estratégias foram tentadas e falharam. O fato é que não se descobriu ainda um algoritmo que resolva o Problema 2 eficientemente. (Ninguém provou tampouco que o Problema seja NP-completo). Ademais não se sabe se a condição necessária natural é suficiente. Woodall [W], Edmonds-Giles [EG] e Younger suspeitam que a condição é de fato suficiente e que existe um algoritmo eficiente (isto é, polinomial) para o Problema. A suspeita é suportada pelo bom comportamento das variantes  $2^*$ ,  $2^{**}$  e da variante  $2^0$  que vamos descrever a seguir.

Seja  $\underline{P}$  a coleção dos sorvedouros minimais e  $\underline{Q}$  a coleção das fontes minimais de  $G$ . Já observamos acima que  $C$  é um semiconector se e só se  $C$  semiliga cada elemento de  $\underline{P}$  a cada elemento de  $\underline{Q}$ . Considere a seguinte redução das responsabilidades de um semiconector: digamos que  $C$  é um semiconector parcial se semiliga cada elemento de  $\underline{P}$  com algum elemento de  $\underline{Q}$  e algum elemento de  $\underline{P}$  com cada elemento de  $\underline{Q}$ . Mais precisamente, um semiconector parcial semiliga cada elemento de  $\underline{P}$  com  $u\underline{Q}$  e  $u\underline{P}$  com cada elemento de  $\underline{Q}$ . Semiconectores parciais coincidem com semiconectores quando  $G$  tem a seguinte propriedade: para cada  $P$  em  $\underline{P}$  e cada  $Q$  em  $\underline{Q}$  existe um caminho de  $P$  a  $Q$  que não tem arestas progressivas.

Considere agora o Problema  $2^0$  que se obtém substituindo "semiconector" por "semiconector parcial" no Problema 2. A condição necessária natural para a existência de solução do Problema  $2^0$  é a não-existência de separador lateral com menos que  $k$  arestas. Aqui, um separador lateral é definido por um sorvedouro que inclui  $u\underline{P}$  ou uma fonte que inclui  $u\underline{Q}$ . Younger e o autor [FY], assim como Schrijver [S1], provaram que esta condição é também suficiente. Uma das provas de suficiência [F] é um algoritmo eficiente que resolve o Problema  $2^0$ .

O algoritmo começa por propor dois subproblemas: encontrar  $k$  semiconectores  $u\underline{P}$ -com-todos mutuamente disjuntos e  $k$  semiconectores todos-com- $u\underline{Q}$  mutuamente disjuntos. Estes subproblemas são resolvidos pelo Algoritmo  $2^*$  e seu dual. Se um dos subproblemas não tiver solução, obtemos um separador lateral que viola a condição necessária dada acima. Suponha agora que os subproblemas têm soluções  $C_1, \dots, C_k$  e  $D_1, \dots, D_k$  respectivamente. É claro que, para cada  $i$ ,  $C_i \cup D_i$  é um semiconector parcial. Mas  $C_i \cup D_i$  não é, em geral, disjunto de  $C_j \cup D_j$  para  $j$  diferente de  $i$ . Para cada par  $i, j$  de índices distintos tal que  $C_i \cap D_j \neq \emptyset$  o algoritmo troca entre si partes de  $C_i$  e  $C_j$  e partes de  $D_j$  e  $D_i$  de modo a reduzir o número  $|C_i \cap D_j| + |D_i \cap C_j|$ . A repetição desta operação produz semiconectores  $C'_1, \dots, C'_k$  e  $D'_1, \dots, D'_k$  tais que  $C'_1 \cup D'_1, \dots, C'_k \cup D'_k$  é uma solução do Problema  $2^0$ . O que acabamos de descrever é apenas uma idealização do algoritmo:

a operação de troca de partes de  $C_i$  e  $C_j$  envolve dificuldades técnicas que só são resolvidas com um elaborado pre-processamento de  $G$  e uma reformulação dos dois subproblemas com que começa a execução do algoritmo.

## 6. VARIANTES DO CONCEITO DE SEMICONECTOR

Neste seção consideraremos o comportamento com relação aos Problemas 1 e 2 de outros dois tipos de interconexão dos vértices de um grafo.

Um conector de um grafo é um conjunto  $C$  de arestas dotado da seguinte propriedade: para cada par  $p, q$  de vértices existe um caminho de  $p$  a  $q$  cujas arestas são todas progressivas e estão todas em  $C$ . (Um conector é, portanto, o conjunto de arestas de um subgrafo fortemente conexo.) Para subconjuntos  $P$  e  $Q$  de  $V_G$ , conectores  $P$ -com- $Q$  e  $P$ -com-todos são definidos da maneira óbvia.

Vamos denotar por  $1', 1^{*'}, 1^{**'}, 2', 2^{*'}, 2^{**'}$  respectivamente as variantes dos Problemas 1,  $1^*$ ,  $1^{**}$ , 2,  $2^*$ ,  $2^{**}$  que se obtém trocando "semiconector" por "conector". As condições necessárias naturais para estes novos problemas são dadas em termos dos semiseparadores que definimos a seguir.

Um semiseparador em um grafo  $G$  é um subconjunto de  $A_G$  da forma  $A(X, V_G - X)$ , onde  $X$  é um subconjunto próprio e não vazio de  $V_G$ . Para subconjuntos  $P$  e  $Q$  de  $V_G$ , semiseparadores  $P$ -de- $Q$  e  $P$ -de-alguem são definidos da maneira óbvia.

Consideremos agora o tipo mais familiar de interconexão dos vértices de um grafo. Um conector não-orientado é um conjunto  $C$  de arestas dotado da seguinte propriedade: para cada par  $p, q$  de vértices existe um caminho de  $p$  a  $q$  cujas arestas (progressivas e retrógradadas) estão todas em  $C$ .

Vamos denotar por  $1'', 1^{*''}, 1^{**''}, 2'', 2^{*''}, 2^{**''}$  os Problemas que se obtém trocando "semiconector" por "conector não-orientado" nos enunciados dos Problemas 1,  $1^*$ ,  $1^{**}$ , 2,  $2^*$ ,  $2^{**}$  respectivamente. As condições necessárias naturais para estes novos problemas são dadas em termos do seguinte conceito de separador. Um separador não-orientado é qualquer conjunto da forma  $A(X, V_G - X) \cup A(V_G - X, X)$  onde  $X$  é um subconjunto próprio e não vazio de  $V_G$ .

Os Problemas  $1^{**'}$  e  $1^{**''}$  se comportam exatamente como o Problema  $1^{**}$ : essencialmente o mesmo algoritmo resolve os três problemas, e a condição necessária natural é também suficiente. O mesmo vale para os Problemas  $2^{**'}$  e  $2^{**''}$  quando comparados com o Problema  $2^{**}$ .

O comportamento do Problema  $1^{*'}$  é muito semelhante ao do Problema  $1^*$ . O algoritmo é até mais simples, pois as fontes  $Y_1, \dots, Y_m$  são todas unitárias. O algoritmo mostra que a condição necessária natural é também suficiente.

O Problema  $2^{*'}$  é inteiramente análogo ao Problema  $2^*$ . Basta dizer que o teorema de Edmonds e o algoritmo de Lovász mencionados acima são foram apresentados no contexto do Problema  $2^{*'}$ . A condição necessária natural do Problema é também suficiente.

Os Problemas  $1^{*''}$  e  $1''$  são equivalentes, bastando portanto discutir o último. O mesmo se dá com os Problemas  $2^{*''}$  e  $2''$ .

O Problema  $1'$  é bem diferente do Problema 1: não se conhece um algoritmo eficiente para o primeiro, e é possível que um tal algoritmo nem exista pois o problema é NP-completo (o caso  $k = |V_G|$  equivale a decidir se  $G$  tem um circuito hamiltoniano orientado). Ademais a condição necessária natural não é suficiente: Woodall [W] cita como exemplo um grafo de Petersen em que cada aresta é substituída por duas arestas com orientações opostas e  $k$  é igual a 10.

O autor não tem notícia de algoritmos eficientes para o Problema  $2'$ . Ademais, a condição necessária natural não é suficiente: troque cada aresta de um grafo completo com 4 vértices por duas arestas com orientações opostas e faça  $k$  igual a 3.

O Problema  $1''$  tem comportamento diferente dos vistos até aqui: existe um algoritmo trivial para resolver o Problema (basta construir uma árvore geradora e comparar  $k$  com  $|V_G|$ ) mas a condição necessária natural é obviamente insuficiente (tome um triângulo no papel de  $G$  e 1 no papel de  $k$ ).

Para o Problema  $2''$ , a condição necessária é obviamente insuficiente (tome um triângulo com  $k = 2$ ) mas Nash-Williams [NW] e Tutte [T] desenvolveram um algoritmo muito interessante para a solução do Problema. O algoritmo mostra, em particular, que o Problema tem solução se e só se, para cada partição  $\underline{P}$  de  $V_G$ , o número de arestas com pontas em blocos diferentes de  $\underline{P}$  é pelo menos  $k(|P| - 1)$ . Edmonds resolveu [E1] uma generalização do Problema para matrôides.

## REFERÊNCIAS

- E1] J. Edmonds  
 "Minimum partition of a matroid into independent sets"  
J. of Research of the National Bureau of Standards B69, 1965 (pags,67-72)
- E2] J. Edmonds  
 "Edge-disjoint branchings"  
 em: Combinatorial Algorithms  
 Algorithmics Press, New York, 1973 (pags.91-96)
- EG] J. Edmonds e R. Giles  
 "A min-max relation for submodular functions on graphs"  
Annals of Discrete Math. 1  
 North-Holland, 1977 (pags.185-204)
- F] P. Feofiloff  
Disjoint transversals of directed coboundaries  
 Ph.D. thesis, University of Waterloo, 1983
- FT] S. Fujishige e N. Tomozawa  
 "An algorithm for finding a minimum-cost strongly connected reorientation  
 of a directed graph"  
 manuscrito, 1982
- FY] P. Feofiloff e D.H. Younger  
 "Directed cut transversal packing for source-sink connected graphs"  
 a ser publicado em Combinatorica
- Lo] L. Lovász  
 "On two minimax theorems in graph [theory]"  
J. of Combinatorial Theory (B) 21, 1976 (pags.96-103)
- Lu] C.L. Lucchesi  
A minimax equality for directed graphs  
 Ph.D. thesis, University of Waterloo, 1976
- LY] C.L. Lucchesi e D.H. Younger  
 "A minimax theorem for directed graphs"  
J. London Math. Society (2) 17, 1978 (pags.369-374)
- NW] C.St.J.A. Nash-Williams  
 "Edge-disjoint spanning trees of finite graphs"  
J. London Math. Society 36, 1961 (pags.445-450)
- S1] A. Schrijver  
 "Min-max relations for directed graphs"  
Annals of Discrete Math. 16  
 North-Holland, 1982 (pags.261-280)



- S2] A. Schrijver  
"A conterexample to a conjecture of Edmonds and Giles"  
Discrete Math. 32, 1980 (pags.213-214)
- TJ] W.T. Tutte  
"On the problem of decomposing a graph into n connected factors"  
J. London Math. Society 36 , 1961 (pags.221-230)
- Y] D.H. Younger  
"From shortest paths to directed cut transversals"  
Annals of the New York Acad. of Sciences 319 , 1979 (pags.555-564)
- W] D.R. Woodall  
"Menger and König systems"  
Lecture Notes in Math. 642  
Springer, 1978 (pags.620-635)

**PROL****SISTEMA PARA PROGRAMAÇÃO LINEAR**

*Helena do Nascimento Santos (DMA)*

*Carlos Antônio A. S. Ribeiro (DPD/CPD)*

*Antônio Moisés de Oliveira (DPD/CPD)*

*Marcelo Silva Cunha (DMA)*

*Universidade Federal de Viçosa*

**1 - INTRODUÇÃO:**

A atividade empresarial pressupõe freqüentemente a análise de um conjunto de fatores a partir do qual são obtidas as conclusões e interferências relativas aos fenômenos e processos sob investigação. A manutenção e, principalmente, a expansão do nível de investimentos de uma empresa em um mercado competitivo dependerão da capacidade de avaliação desses fatores no processo de tomada de decisões.

Apesar dos constantes desenvolvimentos metodológicos nas áreas de manipulação e análise de dados, o grau de complexidade associado aos procedimentos convencionais torna mandatária a utilização de recursos computacionais no desempenho de tais atividades. Neste sentido, os "pacotes" genéricos na área de Pesquisa Operacional, disponíveis no mercado internacional de "software", têm contribuído para a solução do problema.

Programas específicos, ainda que disponíveis em sua estrutura básica na literatura especializada, não se preocupam em apresentar interfaces adequadas aos usuários finais, restringindo o âmbito de sua utilização àqueles com conhecimentos avançados na área de Pesquisa Operacional.

Os "pacotes" importados requerem do usuário conhecimentos do idioma original, possuindo seus custos em moeda estrangeira e, sobretudo, não permitindo adaptações em sua estrutura básica.

As experiências da Divisão de Pesquisa e Desenvolvimento da Central de Processamento de Dados, aliadas às do Departamento de Matemática, da Universidade Federal de Viçosa, no atendimento aos usuários desses "pacotes", demonstraram a necessidade de ser desenvolvida uma alternativa que permitisse a minimização dessas dificuldades. Assim, foi idealizado o **Sistema Integrado para Programação Matemática (SInP)**, cuja filosofia de desenvolvimento volta-se para a especificidade de suas interfaces de entrada/saída, atendendo às limitações dos usuários que possuem pouco ou nenhum conhecimento prévio na área de computação.

## 2 - OBJETIVOS:

- 2.1 - Estimular o uso da Pesquisa Operacional como instrumento no processo de tomada de decisões.
- 2.2 - Elevar o nível de satisfação dos usuários, pela especificação e facilidade de utilização do **Sistema Integrado para Programação Matemática (SInP)**.
- 2.3 - Desenvolver subsistemas específicos com interface para entrada/saída dirigidas para as seguintes áreas de usuários finais da Pesquisa Operacional.
  - 2.3.1 - Balanceamento de rações
  - 2.3.2 - Composição de ligas
  - 2.3.3 - Alocação de recursos
  - 2.3.4 - Distribuição da produção
  - 2.3.5 - Problemas de transporte
  - 2.3.6 - Localização de armazéns e silos
  - 2.3.7 - Dimensionamento de fluxos em redes capacitadas
  - 2.3.8 - Acadêmica
- 2.4 - Minimizar o tempo gasto no equacionamento do problema e interpretação dos resultados.
- 2.5 - Possibilitar a implementação gradativa dos módulos do **SInP**, de acordo com as necessidades de uso.

2.6 - Compatibilizar os requerimentos computacionais e custos de implementação do SInP com os recursos da empresa.

2.7 - Facilitar a manutenção dos módulos.

2.8 - Possibilitar adaptações na estrutura básica dos subsistemas.

### 3 - JUSTIFICATIVAS:

#### O Problema

A Pesquisa Operacional vem se constituindo, já há alguns anos, num poderoso auxílio para os executivos que devem tomar suas decisões nos diferentes campos das atividades industriais, econômicas e militares. A Pesquisa Operacional se utiliza de métodos científicos, fornecendo elementos quantitativos para viabilizar a análise das operações em questão ( ).

Os investimentos no setor agrícola têm exigido constantes subsídios dos órgãos governamentais para viabilizá-los. A complexidade dos fatores envolvidos no processo produtivo dificulta sobremaneira a correta alocação de recursos, afetando negativamente a produtividade e a rentabilidade dos empreendimentos.

A composição de estoques reguladores para os períodos de entresafra exige análises de dimensionamento e localização de unidades armazenadoras, visando à estabilização dos preços.

A distribuição desordenada da produção tem reflexos diretos no aumento das perdas, na ociosidade das frotas e congestionamento das vias de escoamento, elevando-se os gastos com manutenção e combustível.

Tais fatores inevitavelmente alteram de forma negativa a composição final dos custos dos produtos, conduzem à importação para recomposição dos estoques reguladores, tudo isto afetando desfavoravelmente a estabilização da economia nacional ( ).

A difusão das técnicas de Pesquisa Operacional para o equacionamento adequado desses fatores é dificultada pelo nível de conhecimento exigido dos usuários. A grande maioria dos "pacotes" para Pesquisa Operacional propõe-se a resolver uma ampla faixa de problemas, sem, contudo, apresentar interfaces adequadas para cada tipo de problema. Isto tem inibido o usuário a se utilizar mais frequentemente de tais ferramentas, por requerer deste conhecimentos que extrapolam a sua área de atuação. Além disso, os requerimentos computacionais são elevados, onerando ainda mais as empresas que resolvem utilizar tais "pacotes", uma vez que dificilmente o "pacote" será usado na sua plenitude, em decorrência de necessidades específicas compatíveis com a área de atuação da empresa. Esses fatores inviabilizam utilização desses "pacotes" por empresas menores.

Pela potencialidade de seu uso nas mais diversas áreas, os estabelecimentos de ensino do país dão cada vez mais importância à Pesquisa Operacional dentro dos currículos, muitas vezes como uma cadeira independente, e outras como tópicos adicionais nas cadeiras de Estatística ou Economia, ministradas a estudantes dos cursos regulares de engenharia, economia, administração pública e de empresas, e sociologia. Os cursos de extensão e especialização têm levado aos profissionais já formados e atuantes, noções básicas de Pesquisa Operacional ( ). No entanto, a parte prática desse aprendizado tem sido prejudicada pelo porte dos "pacotes" existentes, desestimulando sua implementação nos grandes computadores e não se oferecendo alternativas para equipamentos de menor capacidade de memória.

A alimentação dos rebanhos merece uma atenção especial nas atividades associadas à pecuária. As rações balanceadas complementam a dieta do rebanho, constituindo-se, em muitos casos, no elemento principal. Adquiridas, em sua maioria, no comércio varejista, tais rações podem, no entanto, ser perfeitamente elaboradas pelo próprio pecuarista, desde que se obedecam as exigências nutricionais do rebanho. Tais exigências, associadas à composição química dos ingredientes da ração, constituem as informações primordiais para obtenção de sua fórmula. Essas informações estão disponíveis de forma clara nas literaturas específicas. Associando-se aos ingredientes os respectivos preços de mercado, conseguem-se rações balanceadas com custo mínimo. A inclusão dos alimentos

produzidos pelo pecuarista na relação dos componentes da ração implicarã em uma otimização dos insumos, minimizando-se os custos da produção. Todavia, os procedimentos convencionais para manipulação destas informações são ineficazes face ao volume e à complexidade das interrelações. Torna-se imprescindível o uso de recursos computacionais para a obtenção de resultados confiáveis.

### **Propostas para Solução dos Problemas**

O desenvolvimento de interface específicas para classes distintas de problemas apresenta, dentre outras, as seguintes vantagens:

- Identificação do usuário com o sistema, em função da terminologia própria.
- Menor grau de conhecimentos ou mesmo nenhum conhecimento de Pesquisa Operacional, para utilização do sistema por parte do usuário, atendendo-se aos conhecimentos da sua área de atuação.
- Aumento na confiabilidade dos resultados, pela facilidade de compreensão e análise dos mesmos.

A documentação clara e a modularidade no desenvolvimento do **SInP**, viabiliza sua implementação gradativa, à medida em que a demanda justificar a utilização de outros módulos, permitindo as adaptações necessárias de acordo com as características locais do equipamento computacional utilizado. A utilização dos módulos selecionados por órgãos de extensão rural tornarã exequível levar os benefícios de uma utilização racional de recursos nos segmentos prioritários do setor agrícola.

Os executivos passarã a dispor de bases mais sólidas para o processo de tomada de decisões, elevando o grau de sucesso nos investimentos.

O desenvolvimento de um subsistema genérico para Programação Linear visa atender às necessidades didáticas dos estabelecimentos de ensino que se preocupam em fornecer um embasamento de Pesquisa Operacional aos alunos de áreas afins.

O **SInP** foi idealizado para difundir a Pesquisa Operacional

como instrumento confiável e eficiente no assessoramento às atividades produtivas, procurando-se estabelecer um compromisso adequado entre performance e requerimentos computacionais, dotando-o de características modulares, flexibilidade para adaptações e interfaces específicas.

### PROBLEMAS - EXEMPLO

#### 1 - PROBLEMA DA DIETA

Uma nutricionista pretende obter uma combinação de alguns alimentos disponíveis que podem estar presentes em uma refeição matinal, de forma que o custo de tal refeição seja mínimo e que as exigências nutricionais sejam satisfeitas. Tais exigências estão expressas na Tabela 1 onde os valores são dados em percentual da composição final.

TABELA 1

COMPONENTES ESSENCIAIS	NÍVEIS REQUERIDOS	
	MÍNIMO	MÁXIMO
Proteína	12.500 %	17.500 %
Glicídio	62.910 %	68.750 %
Lipídio	13.890 %	16.560 %

O número de unidades de cada componente essencial, existe em cada unidade dos diferentes alimentos disponíveis (pão francês, leite, manteiga, queijo minas e mel), e o custo unitário associado a cada um destes estão indicados na Tabela 2.

TABELA 2

COMPONENTES ESSENCIAIS	PÃO-FR	LEITE	MANTEIGA	QUEIJO-M	MEL
Proteína	8.700	3.600	1.310	18.000	-
Glicídio	53.700	4.900	-	-	78.140
Lipídio	0.800	3.000	84.580	19.000	-
Custo					
Unitário	0.760	0.281	3.000	3.000	4.000
Associado					

Tem-se ainda que tais alimentos apresentam suas quantidades limitadas na combinação final da refeição. Tais limites são expressos na Tabela 3 onde as unidades são dadas em 100g.

TABELA 3

ALIMENTOS	LIMITE INFERIOR	LIMITE SUPERIOR
Pão	0.000	0.500
Leite	0.000	2.500
Manteiga	0.000	0.300
Queijo	0.000	0.500
Mel	0.000	0.350

Sabe-se ainda que nesta refeição as quantidades de proteína, glicídio e lipídio devem obedecer à seguinte equação.



$$4.0 \text{ prote\u00edna} + 4.0 \text{ glic\u00eddio} + 9.0 \text{ lip\u00eddio} = 466.00$$

De posse das condi\u00e7\u00f5es impostas para a obten\u00e7\u00e3o da qualidade de final da refei\u00e7\u00e3o matinal, pode-se elaborar uma Tabela 4 correlacionando essas condi\u00e7\u00f5es. A organiza\u00e7\u00e3o dessa tabela tem como objetivo o equacionamento do problema proposto e prepara\u00e7\u00e3o dos dados para uso do PROL.

TABELA 4

RESTRIC\u00c7\u00d5ES (linhas)	VARI\u00c1VEIS (colunas)					limites	
	P\u00c1O-FR	LEITE	MANTEIGA	QUEIJO-M	MEL	MIN	MAX
Custo	0.760	0.281	3.000	3.000	4.000	*****	*****
Prote\u00edna	8.700	3.600	1.310	18.000	-	12.500%	17.500%
Glic\u00eddio	53.700	4.900	-	-	78.140	62.910%	68.750%
Lip\u00eddio	0.800	3.000	84.580	19.000	-	13.890%	16.560%
Soma						466.000	466.000
Limites	MIN	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
	MAX	0.500	2.500	0.300	0.500	0.350	

## 2 - PROBLEMA DE ALOCA\u00c7\u00c3O DE RECURSOS

Um agricultor pode desenvolver quatro tipos de atividades: cria\u00e7\u00e3o de porcos, plantio de arroz, de milho e de feij\u00e3o. Tais atividades competem entre si quanto ao uso dos recursos terra, m\u00e3o-de-obra e insumos diversos.

A tabela 5 mostra a quantidade dispon\u00edvel de cada recurso em unidades apropriadas.

TABELA 5

RECURSOS	DISPONIBILIDADES
Terra (TERRA-HA)	900 ha
Mão-de-Obra (M.OBRA - H)	800 homens-hora
Insumos Diversos (CAPITAL)	480 unid. monet.

A quantidade necessária de cada recurso para se produzir uma unidade de cada atividade é mostrada na Tabela 6, em unidades apropriadas.

TABELA 6

RECURSOS	PORCO	ARROZ	MILHO	FEIJÃO
Terra	7	8	3	5
M. Obra	5	4	8	5
Ins. Div.	2	8	4	2

Finalmente, a Tabela 7 mostra o lucro (em unidades monetárias) esperado pela produção de uma unidade de cada atividade.

TABELA 7

ATIVIDADE	LUCRO ESPERADO
Porco	90
Arroz	160
Milho	40
Feijão	100

**PÓS - GRADUAÇÃO EM ECONOMIA NO IMPA/CNPq**

A economia matemática está estabelecida no IMPA desde 1982. É uma área de aplicação da matemática, cujo interesse é grande por duas razões. A primeira é a riqueza do instrumental matemático que a área permite que seja usado. Por exemplo: Análise, Teoria da Medida, Topologia Diferencial, Convexidade, Análise Não-Convencional, Equações Diferenciais Parciais e Sistemas Dinâmicos, entre outros.

A segunda é prática: com os conhecimentos adquiridos no programa de economia matemática no IMPA, após o mestrado, o aluno não só está preparado academicamente, mas também está pronto a ingressar no mercado de trabalho privado, uma situação que é privilegiada nos dias de hoje. O curso de verão introdutório mostra aos interessados o que é a área de economia matemática. Também são oferecidos no verão cursos em nível de mestrado e/ou doutorado.

Os interessados devem procurar contatar o IMPA no endereço: Estrada Dona Castorina, 110 - Jardim Botânico - Rio de Janeiro, RJ; CEP 22460; Tel. (0123) 294 9032.

**REVIEW: THE STATIONARY SEMICONDUCTOR DEVICE EQUATIONS**  
**BY: PETER A. MARKOWICH**

*Joseph W. Jerome*  
*Northwest University*  
*Evanston IL 60201*

Within three years of the discovery of the bipolar junction transistor by a team of Bell Laboratories scientists, one of their colleagues, W.V. van Roosbroeck, formulated in 1950 the mathematical model for the flow of electrons and holes in general semiconductor devices. In today's parlance, the model represents a convection-dominated/reaction/diffusion system of partial differential equations for the electrostatic potential and the particle carrier concentrations. The first equation is the Gauss equation of electricity and magnetism, while the second and third equations are continuity equations for the electron and hole carriers. The choice of dependent variables is critical for this model, particularly in the stationary case, which is considered in the book under review. Because of both analytical and computational considerations, it is advantageous to express the carrier concentrations as exponential functions of the differences between the potential and so-called quasi-Fermi levels, which have the interpretation of energy levels.

The book consists of six chapters, of which the first is a brief introduction and the last is a numerical case study in which the results of a two-dimensional simulation are described. The intermediate four chapters are devoted to model development, existence and approximation theory, perturbation and boundary layer theory, and numerical estimation, respectively. The author himself has been one of a number of researchers to identify interior and boundary layers, to exploit effectively the rapid variation of the carrier concentration in the vicinity of the device interior depletion regions, to define an appropriate related scale thereby, as well as appropriate matching inner and outer solutions. Boundary layers

can also occur in the vicinity of device contacts on which Dirichlet boundary conditions are specified. The remaining part of the device boundary is insulated.

In the chapter on modeling, the reader is led through the derivation of the system from Maxwell's equations, though the reviewer might have preferred the use of conservation principles for the carrier equations. The convective and diffusive components of the current, the quantity actually desired by the device physicist, are developed and Einstein's relations linking mobility and diffusion are assumed. The necessary property of transport saturation is implicitly described here, and explicitly in a later chapter. The recombination/generation mechanisms, which form the reactive parts of the system, are merely quoted from other sources. The device doping and the boundary conditions, which together constitute the explanation of why the device functions, are presented with clarity. The depletion regions, referred to above, occur in the vicinity of junctions of oppositely doped regions. Considerable time is also spent on the scaling of the equations. The bipolar devices have been supplanted to a considerable extent by field effect transistors, and this is the technology illustrated in the chapter.

The early analytical and numerical work on this model was dominated by electrical engineers and device physicists. Apparently, the first applied mathematician to study the model was Michael Mock, who published a seminal paper in 1972, which contains the idea of the existence proof presented by the author. There were many later contributors. Thomas Seidman and the reviewer are among the group quoted. In chapter three, there is also discussion of iteration of the Gummel decoupling map to approach fixed points. This is analogous to nonlinear Gauss-Seidel iteration. Although cited, the exceptional results of Thomas Kerkhoven as related to boundary transition singularities, obtained in his Yale dissertation, appeared too late for inclusion.

We have commented on chapter four, devoted to singular perturbations and asymptotics. The author takes the viewpoint, developed at length in his work elsewhere, that the Gauss equation is singularly

perturbed through scaling. The consequences of this are developed in the course of the chapter. The early part is particularly well written, though the writing becomes very technical as the chapter progresses. The chapter on discretization and numerical methods carefully alerts the reader to the pitfalls involved in straightforward discretization of the continuity equations. This leads to the introduction of the Scharfetter-Gummel method, introduced in 1969. It turns out that this method belongs to the family of hyperbolic cotangent methods, introduced by mathematicians in the early 1960s, and developed over the next twenty years. There is also a useful interpretation as a Petrov-Galerkin method. The introduction of this setting might have helped to clarify an otherwise excellent presentation, particularly for a mathematical audience. Some convergence results are also discussed.

The quality of typesetting and illustrations found in the book is quite high. The book is supplemented by extensive sectional bibliographies and a symbol key. As the author notes in his preface, he has written the book for both mathematicians and device modelers. This is a demanding goal, yet the author has succeeded to a surprising extent. This is not a textbook; however, for specialized audiences, it could be quite useful. The reviewer awaits a comparable book on the transient problem.

*Guilherme M. de La Penha  
LNCC/CNPq e IM/UFRJ  
presentemente: Museu Goeldi/CNPq  
Caixa Postal 399  
66000 - Belém - PA*

THE HISTORY OF MATHEMATICS FROM ANTIQUITY TO THE  
A SELECTIVE BIBLIOGRAPHY

*J. W. Dauben*

*New York e Londres:*

*Garland Publ. Inc.*

*1985, xxxix + 467 pp.*

*US\$ 80,00*

Bibliografias anotadas e seletivas se constituem em tesouros para estudiosos e historiadores da ciência, são na verdade preciosos instrumentos de trabalho sem os quais é impossível produzir qualquer contribuição útil ao conhecimento científico. Mesmo nesta nossa era de bancos de dados e sistemas de informações nada substitui a análise dos pares, a triagem qualitativa do que vale a pena ou não conhecer; mesmo que existam vieses nessas análises ainda assim essa bússola fornecerá uma orientação bastante adequada. Nos países em desenvolvimento, a situação é pior e a valorização desse tipo de informação é ainda superior. No Brasil não há instituição que possa manter atualizada sequer parte das coleções completas de periódicos científicos em suas especialidades, muito menos adquirir obras completas de cientistas ilustres ou comprar todos os livros publicados anualmente ao redor do mundo; certo, nenhum outro país é capaz disso, entretanto a aquisição rápida de textos científicos é rotina em países desenvolvidos e isto está longe de ocorrer aqui. Conjunturas que têm se tornado perenes fazem-nos caminhar no sentido reverso. Além do mais, qual editora estaria disposta a enviar livros a um pesquisador brasileiro a título de inspeção? Nem as nacionais. Bibliografias bem elaboradas aliviam esses sofrimentos em adição a toda importância intrínseca que possuam, permitem orientar a seleção dos pedidos de cópias de artigos e a aquisição de textos. Certamente causam outros danos, estes facilmente discerníveis. Trata-se da "síndrome de citação", graças a qual os Principia de NEWTON são recordistas em referências - cita-se (na maioria das vezes fora do contexto, com interpretação errônea ou despropositadamente) para demonstrar "eru

dição", ou por esnobismo, textos não lidos e muito menos compreendidos. Teses de mestrado e dissertações de doutorado são as primeiras a contrair essa síndrome mas, há outros não tão elementares. Um conhecido texto internacional de Relatividade, de alto padrão, escrito por uma terna de autores brilhantes, cita um resultado geométrico-cinemático de EULER e refere o leitor a um artigo deste em teoria dos números. Escrevi a um dos autores contestando; a resposta imputava a responsabilidade do autor "senior" dizendo que esta é que era "the real expert on this issue amongst the three of us". Pela aceitação do texto a nível mundial não me aventuro a prever quantos outros de  $n$ -ésima categoria em física, com  $n \geq 2$ , propagarão esse erro com pedante autoridade. Este mal é porém inevitável; vem ocorrendo formalmente pelo menos desde o século XVIII quando se iniciou a citação completa de trabalhos de outros; LAGRANGE foi mestre disso em sua *Méchanique* (1788); apenas a experiência e a paciência do investigador permitirão saná-lo.

Na série *Bibliographies of the History of Science and Technology* a Garland, uma editora extremamente especializada e pouco conhecida, consegue a proeza da cooperação de 49 cientistas em cinco continentes para sob a coordenação de JOSEPH DAUBEN de *Historia Mathematica*, apresentar essa excelente, embora indevidamente não exaustiva, coletânea de referências bibliográficas judiciosamente compiladas e comentadas. São 2.384 entradas entremeadas por 16 ilustrações. A partir de obras e fontes gerais de referência constando de 60 itens essenciais e a indicação de matemáticos cujas obras ou correspondências estão publicadas seguem-se 28 obras gerais sobre a história da matemática. Já aí o leitor ganha a confiança no que vem a seguir quando lê comentários desmistificadores de algumas obras do gosto do grande público como por exemplo o *Short Account* de BALL (1888), *Men of Mathematics* de BELL (1873) e classifica a *Mathematicians and Their Times* de YOUNG (1981) como um relato anedótico de utilidade a historiadores apenas no que se refere ao relato da convivência pessoal do autor com seus contemporâneos.

A partir dessa seção os artigos são classificados pelos períodos cronológicos da matemática: do Egito ao Século XX. Essa parte IV lista 1081 itens e ainda referências cruzadas. Detendo-me exaustiva



mente na Renascença e nos Séculos XVII e XVIII não me ocorreram omissões graves; quando buscava um item específico se não o encontrava, logo o detetava como referência cruzada. Especialistas em história da matemática na antiguidade ou dos Séculos XIX e XX podem corroborar ou não esta opinião.

A parte V distribui os artigos por sub-disciplinas da álgebra a topologia, e alegremente constato uma substancial bibliografia em física matemática, ótica matemática, navegação e outros itens ditos "aplicados". Busco a **De Mechanik** de MACH e um deslize não faz incluir o item 1788 no Índice por assuntos, recupero-o por sub-disciplina, embora ela conste do Índice de autores. Esse livro tão citado também é desbeatificado: "This evergreen classic must be read carefully and checked (grifo meu) against the original sources ...". Tendo-me iniciado em história da mecânica na década de sessenta, via uma tradução espanhola desse texto, sei bem o quanto custo libertar-me de erros inclusive conceituais que MACH imprimiu em mim.

Finalmente, tópicos relacionados são agrupados na parte VI e aí vão incluídos a educação, a sociologia e a filosofia da matemática, os estudos regionais e por fim, mas não esquecidas: as mulheres em matemática. Os dois Índices por autor e por assunto são bem completos, o último não é do tipo usual mas, sim, via nomes que aparecem em títulos e anotações dos artigos. Ressalte-se que dentre os nomes mais citados no Índice de assuntos com mais de quarenta referências estão; em alfabética: G. CANTOR, A.-L. CAUCHY, EUCLIDES, EULER, GAUSS, HILBERT, LAGRANGE, KEIBNIZ, MAXWELL, NEWTON, POINCARÉ e RIEMANN - atestando não só a excelência da produção destes, como a perenidade de seus resultados.

Trata-se a meu ver, de uma obra indispensável a qualquer biblioteca matemática institucional e desejável na de todo pesquisador da história da matemática, apesar de seu preço. A diagramação, encadernação e qualidade do papel são excelentes e próprias a um texto de consulta. A autoridade da informação contida inexiste em qualquer outra bibliografia disponível.

Para frisar o cuidado na elaboração desse texto, concluo com uma estória pessoal. Em 84 reclamei de J. CROSS (Melbourne); um dos contribuidores a esta obra; da não referência em seu excelente artigo sobre a contribuição de EULER as origens da teoria do potencial, publicado na coletânea sobre o bicentenário do falecimento de EULER (Birkhäuser), de um clássico de H. BURKHARDT e W.F. MEYER, contido na **Encyklopädie der mathematischen**. CROSS respondeu-me que lamentava o esquecimento, pois se havia iniciado no assunto por esse texto alguns anos atrás, mas que na bibliografia preparada para o volume de DAUBEN certamente já o havia incluído; de fato trata-se da referência 1980.

Assim, essa Bibliografia Seletiva me parece haver recebido o maior cuidado em seu preparo que usualmente o tem os pesquisadores nas bibliografias de seus próprios artigos científicos.

Sem dúvidas, é um item essencial à estudiosos e pesquisadores da história da matemática, vale os tormentos da dificuldade de aquisição (Garland Publ. Inc., 136 Madison Ave., New York, NY 10016-6753).

*Guilherme M. de la Penha  
LNCC/CNPq e IM/UFRJ  
presentemente: Museu Goeldi /  
CNPq - Cx. Postal 399  
66000 - Belém - PA*

## COMMERCIIUM EPISTOLICUM

*Leonhardi Euleri*

Até que se publique e se estude toda a correspondência de EULER, permanecerá impossível compor-se uma história intelectual justa da Europa durante os meados do século dezoito. Após anos de hesitação, os editores da grande edição internacional da *Opera omnia* de EULER decidiram a partir de 1975 publicar a maior parte das cartas de EULER. Sa-be-se que devem ter havido cerca de 5.000 cartas, as quais EULER dedicava uma enorme importância, dessas chegaram até nós, devidamente catalogadas, 2.948 através de originais, cópias, rascunhos e sumários. Meses antes de finalmente obter permissão de deixar a Prússia retornando a Petrogrado (ou S. Petersburgo, hoje Leningrado), EULER escrevia a MÜLLER inquirindo sobre o estado de sua correspondência letrada que havia depositado na Academia "em um pacote adequado" cerca de 25 anos antes. Se a Academia a considerasse inservível, poderia ele receber suas cartas de volta? "[S]e alguém se desse ao trabalho de selecioná-las, encontraria nelas muitos pontos importantes, a publicação dos quais teria maior apelo ao público que elaborações mais profundas".

A série IV A da *Opera omnia*, um trabalho conjunto dos suíços e dos russos, imprimirá a totalidade da correspondência importante que chegou aos nossos dias, exceto com MÜLLER (que havendo sido publicada na República Democrática da Alemanha, parece, envolveria complicações). Trata-se de um dos mais importantes documentos da história intelectual dos meados do Século XVIII a ser tornado público nos últimos 100 anos. No seu formato, impressão e papel essa série difere das demais não sendo porém inferior. Ao utilizar tipos de um estilo mais ou menos antigo, assume uma aparência mais apropriada a um trabalho do século XVIII que o da fria impressão em Bodoni das Séries I-III.

*Commercium com P.-L.M. de MAUPERTUIS et FRÉDÉRIC II (LEONHARDI EULERI Opera Omnia (IV) A 4), ediderunt PIERRE COSTABEL, EDUARD WINTER, ASOT T. GRIGORIJAN et ADOLF P. JUSKEVIC, auxilio EMIL A. FELLMANN, impensis Foundationis Nationalis Confoederationis Helveticae et Societatis Scientiarum Naturalium Helveticae, venditioni exponunt Birkhäuser Basileae, 1986, xi+454 pp in 49.*

O Volume I da série IV A - *Descriptio Commerci epistolici* se constitui no catálogo geral das cartas de EULER e havendo sido publicado em 1975 recebeu uma extensa resenha por C. TRUESDELL (editor de cinco dos 32 volumes da Série II) em *Arch. Int. Hist. Sciences* 27 (1977) : 292-296. Apenas mais um outro volume da Série IV A foi publicado : volume 5 contendo a correspondência com CLAIRAUT (1740 - 1764), D'ALEMBERT (1746 - 1773) e LAGRANGE (1754 - 1775), editado por A. P. JUSKEVIC e R. TATON, 1980. Esse volume inclui errata e adições ao catálogo de cartas. Sem dúvida do ponto de vista científico físico-matemático, este último é o mais importante volume da série, visto os personagens envolvidos. Restam ainda por publicar a correspondência com os BERNOULLI (JOHANN I e NIKLAUS I no vol 2, com DANIEL no vol 3), com CHRISTIAN GOLDBACH no vol 4 e as cartas restantes arroladas no catálogo constituirão os vols. 7 e 8.

O presente volume apresenta correspondências de um outro gôut, pode-se dizer que dela pouco se extrai de interesse genuinamente científico por excelência mas, há muito para inferir do subjacente a "política científica" do século XVIII e do relacionamento entre um cientista, seu patrão imediato PIERRE - LOUIS MOUREAU DE MAUPERTUIS; um sábio de segunda categoria, matemático medíocre, não obstante rempli de soi même e seu patrono volúvel e multifacetado FRÉDÉRIC II. Grosso modo 2/3 do volume cabem as cartas trocadas com o primeiro e o restante com o segundo; sete índices judiciosamente elaborados de duas listas, uma de abreviações e outra relativa as sete pranhas reproduzidas, e correções ao volume O. IV A 5 completam a obra. A introdução a correspondência com MAUPERTUIS é fruto de um de seus maiores especialistas, PIERRE COSTABEL enquanto a de FRÉDÉRIC é devida ao já falecido EDUARD WINTER, COSTABEL e JUSKEVIC assinam o prefácio consiso e explicativo do volume.

Em primeiro lugar é necessário baixar a resistência de potenciais leitores; espanta-me ainda hoje que sob a alegação de que a Opera está em grande parte impressa seja em latim (a linguagem universal do aprendizado quando este ainda existia) ou em alto alemão a consulta a esses volumes seja tão escassa. Para quem se dedique a história da

ciência, se há atenuantes para o alemão não há excusas para o latim a menos que se desacredite ingenuamente no dito traduttore traditore. No caso o problema não é grave, FREDERICO II detestava o latim, usava alemão quase que exclusivamente em suas atividades políticas e bélicas e havia determinado que o francês seria a linguagem oficial de "sua" Académie des Sciences et Belles - Lettres, em Berlim. O presente volume em quase a totalidade de seu conteúdo, a exemplo do vol. IV A 5, é versado em francês o que sem dúvida torna-o acessível a um público mais amplo.

A correspondência com MAUPERTUIS [1698-1759] abrange o período (1738-1759) e com FREDERICO II [1712-1786] o período (1741 - 1777); são 137 documentos além de 4 outros afins no primeiro caso e inclui 87 cartas relativas ao segundo sendo 28 de EULER.

Foi a instabilidade dos czares da Rússia e a insistência de FREDERICO II que determinaram a vinda de EULER, em 1741, para Berlim, onde permaneceu até 1766. Por recomendação de VOLTAIRE é que MAUPERTUIS, um duplo academicien, héros de salon e causer, frívolo embora não de todo um cientista sem méritos, havia sido indicado Presidente da Academia de Berlim. Havia proposto trazer todos os BERNOULLIS e EULER para a Prússia. Apenas EULER veio e, tão logo havia chegado as guerras do rei abalaram tudo e quase matam MAUPERTUIS obrigando-o a se refugiar até estar seguro da firmeza do trono de FREDERICO II.

A correspondência de EULER com MAUPERTUIS se classifica no conjunto de eventos que constituem a história da consolidação da Academia de Berlim entre 1746 e 1759 e da colaboração que o principis mathematicorum prestou ao Presidente dessa instituição mesmo que dissesse viessem a advir escaríes que o tempo não apagou. Quanto a relativa a FREDERICO II, entenda-se que suas relações passavam pelos dirigentes, de fato ou prepostos, da Academia, MAUPERTUIS e D'ALEMBERT, D'ARJEANS e DE CATT, assim, embora rica, revela apenas palidamente a relação entre o grande cientista e o auto-denominado "Philosophe de Sans-Souci". Seria despropositado aqui dar mesmo que uma pálida idéia da riqueza

histórica de ambas as coleções e não haveria sentido resumir as eruditas introduções de COSTABEL e WINTER. Grosso modo a correspondência entre EULER e MAUPERTUIS se refere a assuntos de natureza seja científica ou filosófica, seja financeira ou administrativa, inclusive reivindicações salariais (frequentes). O eixo dos assuntos científicos passa essencialmente pelos princípios da mecânica (princípio da ação mínima e o affair KÖNIG - VOLTAIRE versus MAUPERTUIS-EULER), astronomia e cálculo de propabilidades (teoria de loterias e jogos). Quanto a correspondência com FREDERICO II, varia dos projetos práticos sobre os quais EULER era chamado a opinar (moinhos de vento ou movidos por cavalos, construção de canais, drenagem, jogos de água para jardins, bombas hidráulicas, planos de jardins para Sans Souci) as questões relativas as finanças e pessoal da Academia, a venda de calendários (fonte de renda da Academia) até as insistentes cartas finais de pedido de permissão para deixar a Prússia, retornando a Academia de S. Petersburgo agora sob o firme patrocínio de CATARINA II, respondidas ao final em tom de irritação tão secamente quanto "Postsdam, 2 mai 1776 : Je vous permets, sur votre lettre du 30 d'avril dernier de quitter, pour aller em Russie. Frederic".

No todo a leitura e a busca da compreensão e entendimento do conteúdo dos 4 e 5 da série IV A da **Opera**, permitirá aos estudiosos aquilatar o ambiente científico da Europa no Século XVIII, o relacionamento entre pares e com patronos, bem como valorizar mais ainda resultados obtidos àquela época malgrado dificuldades que hoje seriam consideradas como impedimentos ao desenvolvimento da pesquisa. Sem dúvida, foi justa a denominação de Século das Luzes dada aquela era por VOLTAIRE e DIDEROT, nele as sementes lançadas por NEWTON e LEIBNIZ caíram em solo fértil e se reproduziram graças ao talento, mérito e a inacreditável atividade de EULER.

GUILHERME M. DE LA PENHA  
 LNCC/CNPq e IM/UFRJ  
 presentemente: Museu Goeldi/CNPq  
 Belém - PA

EVENTOS REALIZADOS

---

1ª REUNIÃO REGIONAL DA  
SBMAC EM  
CAMPO GRANDE - MS

*Realizado no período de  
18 a 20 de setembro/86*

OBJETIVO

Promover o encontro de pesquisadores, professores, profissionais e estudantes para cooperação, intercâmbio e divulgação de temas científicos de relevância na atualidade.

ATIVIDADES

- . Conferências
- . Mini-cursos
- . Sessões de Comunicações
- . Mesas Redondas

CONFERENCISTAS

- . Fernando Giorno (IBM Brasil)
- . José Raimundo Braga Coelho (INPE/MCT)
- . Paulo Jorge Paes Leme (PUC-RJ)
- . Siang Wun Song (USP)
- . Orlando Leite de Castro
- . Maria C. Moraes Albuquerque Lima

A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC, fundada em 01.11.78, é uma sociedade civil que congrega profissionais da matemática aplicada, da matemática computacional e da computação científica, bem como estudantes e interessados em geral nas aplicações científicas e técnicas das ciências matemáticas e da computação.

Dentre seus objetivos permanentes destacam-se:

- Incentivar atividades de pesquisa e ensino em suas áreas de atuação no Brasil;
- Zelar pelo padrão de qualidade do trabalho científico e pelo prestígio da ciência no Brasil;
- Promover o intercâmbio científico e profissional efetivo, tanto ao nível do aprendizado das teorias de base e dos métodos e técnicas recentes, quanto aos níveis das interações pesquisador-pesquisador, pesquisa-setor produtivo, e comunidade científica-sociedade nacional;
- Promover a circulação da informação científica produzida ou absorvida.

Na busca destes objetivos a SBMAC constitui-se de sócios regulares, institucionais e estudantes.

The logo for SBMAC (Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional) is located at the bottom center of the page. It consists of the letters 'SBMAC' in a stylized, bold, serif font. The letters are black and are set against a white background. The logo is framed by a red border that has a decorative, stepped appearance at the bottom.