

ELZIMAR DE OLIVEIRA RUFINO

CURVATURAS MÉDIA E GAUSSIANA DE SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

MONOGRAFIA SUBMETIDA À COORDENAÇÃO DO CURSO DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA, COMO REQUISITO
PARCIAL PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE ESPECIALISTA.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

BOA VISTA – RR

2006

CURVATURAS MÉDIA E GAUSSIANA DE SUPERFÍCIES QUÁDRICAS . Trabalho de Conclusão de Curso apresentado por ELZIMAR DE OLIVEIRA RUFINO em Fevereiro de 2006 ao Departamento de Matemática, considerado satisfatório para obtenção do Título de Especialista em Matemática pela Universidade Federal de Roraima e aprovado pela Banca Examinadora.

Prof. **MSc. Joselito de Oliveira**
Orientador

Prof. **Dr. Aldir Chaves Brasil**
Membro da Banca Examinadora

Prof. **Dr. Orlando Jurians**
Membro da Banca Examinadora

Visto e permitida a impressão,
Boa Vista, / / .

Prof. Dr. **Alberto Castanheda**
Coordenador do Curso de Especialização em
Matemática

*Dedico a Deus, a meus pais e a meu querido irmão
Mariano de Oliveira Rufino(in memorian).*

Índice

Lista de Figuras	vi
Agradecimentos	vii
Resumo	viii
Abstract	ix
Introdução	x
1 Preliminares	1
1.1 Superfície Parametrizada Regular	1
1.2 Curvas Coordenadas	1
1.3 Primeira Forma Quadrática	2
1.4 Aplicação Normal de Gauss	3
1.5 Diferencial da Aplicação Normal de Gauss	3
1.6 Curvatura Normal	5
1.7 Cálculo das Curvaturas Gaussiana e Média	8
1.8 Classificação dos Pontos de uma Superfície	10
2 Superfícies Quádricas	12
3 As curvaturas Gaussiana e Média de superfícies quádricas	23
3.1 Elipsóide	23
3.2 Esfera	24
3.3 Parabolóide Elíptico	25
3.4 Cilindro Elíptico	26
3.5 Parabolóide Hiperbólico	27
3.6 Hiperbolóide Elíptico de duas folhas	29
3.7 Cilindro Hiperbólico	30
3.8 Hiperbolóide Elíptico de uma folha	31

3.9	Cone Quadrático	33
3.10	Cilindro Parabólico	34
4	Classificação de pontos em superfícies quádricas.	36
4.1	Esfera	36
4.2	Elipsóide	36
4.3	Parabolóide Elíptico	38
4.4	Cilindro Elíptico	38
4.5	Parabolóide Hiperbólico	39
4.6	Hiperbolóide Elíptico de duas folhas	39
4.7	Cilindro Hiperbólico	40
4.8	Hiperbolóide Elíptico de uma folha	40
4.9	Cone Quadrático	41
4.10	Cilindro Parabólico	41
A		42
A.1	O teorema espectral	42
	Referências Bibliográficas	45

Lista de Figuras

2.1	Esfera	13
2.2	Elipsóide	14
2.3	Hiperbolóide Elíptico de uma folha	15
2.4	Parabolóide hiperbólico	16
2.5	Cilindro Elíptico	17
2.6	Cone quadrático	18
2.7	Parabolóide Elíptico	19
2.8	Cilindro Hiperbólico	20
2.9	Cilindro Parabólico	21
2.10	Hiperbolóide Elíptico de duas folhas	22

Agradecimentos

Ao tentarmos fazer citações nos agradecimentos corremos o risco de sermos infelizes e esquecermos de pessoas que nos foram de grande importância. Porém, gostaria de agradecer ao meu orientador prof. Joselito de Oliveira, por sua paciência e seriedade, ao Professor Lindeval Fernandes de Lima por sua valiosa colaboração na digitação em Latex, ao professor Roberto Câmara por auxiliar-me em relação ao Sistema Linux, à professora Edinny Santos com sua colaboração significativa, em traduções para o inglês, aos meus colegas da especialização e a todos aqueles que de alguma forma contribuíram para o término deste trabalho.

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar as superfícies quádricas sob o ponto de vista da Geometria Diferencial. Mais precisamente, estuda-se as curvaturas gaussiana e média das superfícies quádricas e a classificação de pontos em tais superfícies.

Abstract

The purpose of this monograph is to study quadric surfaces from the Differential Geometry point of view. More precisely, we estudy the mean and gaussian curvature of these surfaces and the classification of their points.

Introdução

Este trabalho tem como objetivo estudar as superfícies quádricas sob o ponto de vista da Geometria Diferencial. Mais precisamente, estuda-se as curvaturas média e gaussiana de superfícies quádricas e aplicações na classificações de pontos de tais superfícies.

Lembramos que as quádricas são superfícies do R^3 da forma

$$\sum a_{ij}x_ix_j + \sum b_ix_i + c = 0.$$

Para uma visualização geométrica, os gráficos de tais superfícies foram construídos utilizando o software Maple.

No capítulo I, será desenvolvida a teoria necessária para a compreensão dos capítulos posteriores e também os resultados que serão utilizados.

No capítulo II apresentaremos as superfícies quádricas, com suas respectivas equações cartesianas e parametrizações.

Consta no capítulo III o cálculo das curvaturas Gaussiana e Média das superfícies quádricas mencionadas no capítulo II.

O capítulo IV trata da classificação dos pontos nas superfícies que estamos estudando.

Espera-se que o texto torne mais clara e objetiva a teoria das superfícies quádricas, possibilitando assim uma ampliação a cerca deste tema, já iniciado nas disciplinas Geometria Analítica e Álgebra linear.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo encontra-se a teoria necessária à compreensão dos capítulos subsequentes bem como os resultados que serão utilizados.

1.1 Superfície Parametrizada Regular

Assumimos aqui que estamos dispondo de um sistema de coordenadas cartesianas em $\mathbb{R}^3$ e consideremos uma aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, com $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ e U é um conjunto aberto.

Uma superfície parametrizada regular é uma aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^2$, tal que

- i) $X \in C^\infty(U)$
- ii) $dX_p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora $\forall p \in U$.

1.2 Curvas Coordenadas

Uma curva parametrizada diferenciável de $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável $\alpha(t) = ((x(t), y(t), z(t)))$, de classe C^∞ , de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^3$.

Fixado $(u_o, v_o) \in U \subset \mathbb{R}^2$, as curvas

$$\alpha(t) = X(u(t), v_o),$$

$$\beta(t) = X(u_o, v(t)),$$

são chamadas **curvas coordenadas** de X em $(u_o, v_o) \in U$.

Os vetores $X_u(u_o, v_o)$ e $X_v(u_o, v_o)$ são denominados os **vetores tangentes** às curvas coordenadas.

Lembramos que o **plano tangente** a X em (u_o, v_o) é o conjunto de todos os vetores tangentes a X em (u_o, v_o) , que denotamos por $T_q X$ onde $q = (u_o, v_o)$.

1.3 Primeira Forma Quadrática

Consideremos a aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ onde U é um conjunto aberto e X uma superfície parametrizada regular. A aplicação

$$I_q : T_q X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$w \rightsquigarrow I_q(w) = \langle w, w \rangle$$

com $q = (u_o, v_o)$ é chamada de **primeira forma quadrática**.

Observe que

$$w \in T_q X \implies w = aX_u + bX_v$$

Então

$$\begin{aligned} I_q(w) &= \langle aX_u + bX_v, aX_u + bX_v \rangle \\ &= a^2 \langle X_u, X_u \rangle + 2a \langle X_u, X_v \rangle + b^2 \langle X_v, X_v \rangle \end{aligned}$$

Agora denotando

$$E = \langle X_u, X_u \rangle; \tag{1.1}$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle; \tag{1.2}$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle. \tag{1.3}$$

temos que

$$I_q(w) = a^2E + 2abF + b^2G,$$

onde E , F e G são denominados os coeficientes da primeira forma quadrática.

Proposição 1.1. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, uma superfície parametrizada regular. Então os coeficientes E , F e G satisfazem $EG - F^2 > 0$.*

Demonstração : Veja que

$$\begin{aligned} 0 < |X_u \times X_v|^2 &= |X_u|^2 \cdot |X_v|^2 \cdot \sin^2 \theta \\ &= |X_u|^2 \cdot |X_v|^2 \cdot (1 - \cos^2 \theta) \\ &= EG - F^2. \end{aligned}$$

Portanto $EG - F^2 > 0$, como queríamos mostrar. ■

1.4 Aplicação Normal de Gauss

Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular.

A aplicação $N : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|},$$

é chamada de **Aplicação Normal de Gauss**.

1.5 Diferencial da Aplicação Normal de Gauss

Proposição 1.2. *O operador $dN_p : T_p X \longrightarrow T_p X$ é auto-adjunto.*

Demonstração : Sabemos que

$$\langle X_u, N \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle X_v, N \rangle = 0. \tag{1.4}$$

De (1.4) obtemos

$$\frac{\partial(\langle X_u, N \rangle)}{\partial v} = \langle X_{uv}, N \rangle + \langle X_u, N_v \rangle = 0, \quad (1.5)$$

e também

$$\frac{\partial(\langle X_v, N \rangle)}{\partial u} = \langle X_{vu}, N \rangle + \langle X_v, N_u \rangle = 0. \quad (1.6)$$

Agora de (1.5) e (1.6) encontramos

$$\begin{aligned} \langle X_{uv}, N \rangle &= -\langle X_u, N_v \rangle, \\ \langle X_{vu}, N \rangle &= -\langle X_v, N_u \rangle. \end{aligned}$$

Finalmente, das duas últimas equações temos $\langle X_u, N_v \rangle = \langle X_v, N_u \rangle$, ou seja,

$$\langle X_u, dN_p(X_v) \rangle = \langle dN_p(X_u), X_v \rangle. \quad \blacksquare$$

Como $-dN_p : T_p X \longrightarrow T_p X$ é auto-adjunto e $\dim T_p X$ é finita, pelo Teorema Espectral existe uma base ortonormal $\{ v_1, v_2 \} \subset T_p X$ tal que

$$\begin{aligned} -dN_p(v_1) &= k_1 v_1, \\ -dN_p(v_2) &= k_2 v_2. \end{aligned}$$

Assim existe uma representação matricial de $-dN_p : T_p X \longrightarrow T_p X$ dada por

$$-\mathbf{dN}_p = \begin{pmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) \end{pmatrix}.$$

Além disso, existe uma forma quadrática $\Pi_p = T_p X \longrightarrow \mathbb{R}$, denominada **segunda forma fundamental**, associada a $T_p X$ dada por $\Pi_p(v) = \langle -dN_p(v), v \rangle$. Sabe-se que k_1 e k_2 são os valores máximo e mínimo da segunda forma fundamental.

Define-se as curvaturas Gaussiana e Média, respectivamente, como sendo,

$$K(p) = \det(-dN_p) = k_1(p) \cdot k_2(p) \quad (1.7)$$

e

$$H(p) = \frac{1}{2} \text{tr}(-dN_p) = \frac{1}{2} \cdot (k_1(p) + k_2(p)). \quad (1.8)$$

1.6 Curvatura Normal

Uma curva $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é dita parametrizada pelo comprimento de arco, se para cada $t_o, t_1 \in I$, $t_o \leq t_1$ o comprimento do arco da curva α de t_o a t_1 é igual a $t_1 - t_o$. Isto é,

$$\int_{t_o}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = t_1 - t_o.$$

ou seja, $\|\alpha'(t)\| = 1 \quad \forall t \in I$.

Seja $\alpha :]a, b[\longrightarrow S$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. A curvatura normal de α em $\alpha(s)$ é a componente de $\alpha''(s)$ segundo a normal a S nesse ponto, e é dada por $K_n(\alpha, s) = \langle \alpha''(s), N \circ \alpha(s) \rangle$. Se a curva não estiver parametrizada pelo comprimento de arco, a fórmula para o cálculo da curvatura normal é

$$K_n(\alpha, s) = \langle \frac{1}{v(s)^2} \alpha''(s), N \circ \alpha(s) \rangle, \text{ onde } v(s) = |\alpha'(s)|.$$

Agora observe que, sendo $\langle \alpha'(s_o), N(\alpha(s_o)) \rangle = 0$ temos

$$\langle \alpha''(s_o), N(\alpha(s_o)) \rangle + \langle \alpha'(s_o), N'(\alpha(s_o)) \rangle = 0$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \langle \alpha''(s_o), N(\alpha(s_o)) \rangle &= -\langle \alpha'(s_o), N'(\alpha(s_o)) \rangle \\ &= \langle \alpha'(s_o), -\frac{d}{ds}(N \circ \alpha)(s_o) \rangle. \end{aligned}$$

Seja $p = \alpha(s_o)$ e $\alpha'(s_o) = w$. Assim

$$\begin{aligned} K_n &= \frac{1}{v^2} \langle \alpha'(s_o), -dN_p(\alpha'(s_o)) \rangle \\ &= \langle w, -dN_p(w) \rangle \\ &= \frac{\Pi_p(w)}{I_p(w)}. \end{aligned}$$

Proposição 1.3. *i) A curvatura normal $K_n(\alpha, s)$ em $\alpha(s)$ só depende da direção tangente à curva no instante s : mais precisamente se α e β forem curvas em S tangentes uma à outra em $\alpha(s_o) = \beta(s_o) = p_o$ então $K_n(\alpha, s_o) = K_n(\beta, s_o)$.*

ii) O conjunto das curvaturas normais em p_o é o intervalo $[k_1(p_o), k_2(p_o)]$ e, se for $k_1(p_o) < k_2(p_o)$, o mínimo e o máximo dessas curvaturas normais são as curvaturas principais em p_o , as quais ocorrem precisamente nas direções principais associadas a $k_1(p_o)$ e $k_2(p_o)$.

Demonstração :

- i) É o que mostramos anteriormente.
- ii) Fixemos p_o e seja $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ uma base ortonormal de $T_{p_o}S$ constituída por autovetores de $-dN_{p_o}$. Pondo $\alpha'(s_o) = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2$, temos $a^2 + b^2 = 1$; e além disso,

$$\begin{aligned} k_n(\alpha, s_o) &= \langle a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2, -dN_{p_o}(a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2) \rangle \\ &= a^2 \langle \vec{v}_1, -dN_{p_o}(\vec{v}_1) \rangle + b^2 \langle \vec{v}_2, -dN_{p_o}(\vec{v}_2) \rangle \\ &= k_1 a^2 + k_2 b^2. \end{aligned}$$

Obtemos assim as desigualdades:

$$k_1 = k_1(a^2 + b^2) \leq k_n(\alpha, s_o) \leq k_2(a^2 + b^2).$$

Delas resulta que as curvaturas normais cobrem todo o intervalo $[k_1, k_2]$; e que se $k_1 < k_2$, o mínimo só é atingido para $\alpha'(s_o) = \pm\vec{v}_1$ e o máximo para $\alpha'(s_o) = \pm\vec{v}_2$. ■

Agora, dada uma parametrização $X(u, v)$, vamos determinar a matriz, $\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$ de $\Pi_{X(u,v)}$ relativamente à base (X_u, X_v) de $T_{X(u,v)}X$. As entradas e, f, g desta matriz que são funções de (u, v) , são os **coeficientes da segunda forma**

fundamental nas coordenadas (u, v) , e são calculadas pelas fórmulas

$$\begin{aligned}
e &= \langle X_u, -DN_{X_{(u,v)}}(X_u) \rangle \\
&= \langle X_u, -N_u \rangle \\
&= \langle X_{uu}, N \rangle \\
f &= \langle X_u, -DN_{X_{(u,v)}}(X_v) \rangle \\
&= \langle X_u, -DN_{X_{(u,v)}}(X_u) \rangle \\
&= \langle X_u, -N_v \rangle \\
&= \langle X_v, -N_u \rangle = \langle X_{uv}, N \rangle \\
g &= \langle X_v, -DN_{X_{(u,v)}}(X_v) \rangle \\
&= \langle X_v, -N_v \rangle \\
&= \langle X_{vv}, N \rangle.
\end{aligned}$$

Uma vez calculados e, f e g pode-se calcular a curvatura normal de uma curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ expressa em coordenadas locais : escrevendo

$$\alpha'(t) = u'(t)X_u + v'(t)X_v,$$

temos

$$\begin{aligned}
\Pi_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) &= \langle u'X_u + v'X_v, -dN_{\alpha(t)}(u'X_u + v'X_v) \rangle \\
&= u'^2 \langle X_u, -dN_{\alpha(t)}(X_u) \rangle + u'v'(\langle X_u, -dN_{\alpha(t)}(X_v) \rangle + \\
&\quad + \langle X_v, -dN_{\alpha(t)}(X_u) \rangle) + v'^2 \langle X_v, -dN_{\alpha(t)}(X_v) \rangle \\
&= eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2,
\end{aligned}$$

sendo e, f, g calculados em $(u(t), v(t))$; e a curvatura normal é então dada por

$$k_n(t) = \frac{eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2}{\|\alpha'(t)\|^2},$$

ou ainda

$$k_n = \frac{eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2}{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}. \quad (1.9)$$

1.7 Cálculo das Curvaturas Gaussiana e Média

Trataremos agora de encontrar fórmulas explícitas para o cálculo das curvaturas Gaussiana e Média de uma superfície parametrizada regular, em função dos coeficientes da primeira e da segunda forma quadrática fundamental.

Consideremos a matriz

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

de $-dN$ relativamente à base $\{X_u, X_v\}$ de $T_p S$. Temos então

$$-N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v$$

$$-N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v$$

Formemos o produto interno de cada uma das duas igualdades imediatamente acima com X_u e X_v para obtermos

$$\langle X_u, -N_u \rangle = a_{11}\langle X_u, X_u \rangle + a_{21}\langle X_u, X_v \rangle \quad (1.10)$$

$$\langle X_v, -N_v \rangle = a_{12}\langle X_v, X_u \rangle + a_{22}\langle X_v, X_v \rangle \quad (1.11)$$

$$\langle X_u, -N_v \rangle = a_{12}\langle X_u, X_u \rangle + a_{22}\langle X_u, X_v \rangle \quad (1.12)$$

$$\langle X_v, -N_u \rangle = a_{11}\langle X_v, X_u \rangle + a_{21}\langle X_v, X_v \rangle \quad (1.13)$$

Agora observando-se que $\langle X_u, N \rangle = 0$ e $\langle X_v, N \rangle = 0$ e com as devidas operações algébricas, resulta

$$\langle X_v, -N_u \rangle = \langle X_{uv}, N \rangle$$

$$\langle X_v, -N_v \rangle = \langle X_{vv}, N \rangle$$

$$\langle X_u, -N_u \rangle = \langle X_{uu}, N \rangle.$$

Utilizando a notação das equações (1.1), (1.2), (1.3), e denotando

$$\langle X_{uu}, N \rangle = e,$$

$$\langle X_{uv}, N \rangle = f,$$

$$\langle X_{vv}, N \rangle = g$$

e ainda substituindo, devidamente, nas equações (1.10), (1.11), (1.12) e (1.13) determinamos

$$\begin{aligned} e &= a_{11}E + a_{21}F & f &= a_{12}E + a_{22}F \\ f &= a_{11}F + a_{21}G & g &= a_{12}F + a_{22}G \end{aligned}$$

Em termos matriciais temos

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Agora , da equação (1.14) concluimos que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \cdot \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2} & a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2} & a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Assim , de acordo com as equações (1.7) e (1.8) e utilizando os resultados anteriores determinamos

$$K = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad (1.15)$$

$$H = \frac{1}{2} \text{tr}(a_{ij}) = \frac{Ge - Ff + Eg}{2(EG - F^2)}. \quad (1.16)$$

Lembramos aqui que as curvaturas principais k_1 e k_2 são os auto-valores da matriz $-dN = (a_{ij})$.

1.8 Classificação dos Pontos de uma Superfície

Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular. De acordo com os valores das curvaturas Gaussiana e Média, um ponto $p = (u, v)$ diz-se:

- **elíptico** se $K(p) > 0$ (isto é, se as curvaturas principais forem ambas positivas ou ambas negativas);
- **hiperbólico** se $K(p) < 0$ (as curvaturas principais tem sinais opostos)
- **parabólico** se $K(p) = 0$ e $H(p) \neq 0$ (uma das curvaturas principais é nula e a outra é não-nula);
- **planar** se $K(p) = H(p) = 0$ (as curvaturas principais são nulas)
- **umbílico** se $k_1(p) = k_2(p)$.

Uma maneira de caracterizar pontos umbílicos é através das curvaturas gaussianas e média, como mostra a seguinte proposição.

Proposição 1.4. *Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular. Então $k_1(p) = k_2(p)$ se, e somente se, $H(p)^2 - K(p) = 0$, onde $p \in U$.*

Demonstração : Suponhamos que $k_1(p) = k_2(p)$. Daí resulta que

$$\begin{aligned} H^2(p) - K(p) &= \left[\frac{1}{2}(k_1(p) + k_2(p)) \right]^2 - k_1(p) \cdot k_2(p) \\ &= k_1^2(p) - k_1^2(p) = 0. \end{aligned}$$

Reciprocamente, seja agora $H^2(p) - K(p) = 0$. Daí resulta que

$$\left[\frac{1}{2}(k_1 + k_2) \right]^2 - k_1 k_2 = 0,$$

ou seja,

$$\frac{1}{4}(k_1 + k_2)^2 = k_1 k_2 \implies k_1^2 + k_2^2 = 2k_1 k_2$$

Agora, da última igualdade acima, obtemos $(k_1 - k_2)^2 = 0$, donde resulta $k_1 = k_2$. ■

A proposição seguinte dá outra caracterização de um ponto umbílico, desta vez em termos dos coeficientes da primeira e segunda formas quadráticas.

Proposição 1.5. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Um ponto $q \in U$ é umbílico, se e só se, existe um número real λ tal que*

$$e_o = \lambda E_o, \quad f_o = \lambda F_o, \quad g_o = \lambda G_o,$$

onde $E_o, F_o, G_o, e_o, f_o, g_o$ indicam os coeficientes da primeira e segunda formas quadráticas em q . Neste caso, λ é igual às curvaturas principais de X em q .

Demonstração : Se q é um ponto umbílico, então $\forall w \in T_q X, w \neq 0$ temos que $k_n(w) = \lambda$ é constante. Isto é, $\Pi_q(w) = \lambda I_q(w)$.

Portanto , se $w = aX_u(q) + bX_v(q)$, então

$$a^2 e_o + 2ab f_o + b^2 g_o = a^2 \lambda E_o + 2ab \lambda F_o + b^2 \lambda G_o$$

Em particular, se $w = X_u(q)$ obtemos $e_o = \lambda E_o$. Analogamente, se $w = X_v(q)$ obtemos $g_o = \lambda G_o$ e finalmente, usando estas duas igualdades e considerando $w = X_u(q) + X_v(q)$, obtemos $f_o = \lambda F_o$.

Reciprocamente , se os coeficientes da primeira e segunda formas quadráticas em q são proporcionais então, para todo $w \in T_q X, w \neq 0$, temos

$$\Pi_q(w) = \lambda I_q(w),$$

consequentemente $k_n(w) = \lambda$, isto é, q é um ponto umbílico de X . ■

Capítulo 2

Superfícies Quádricas

Neste capítulo, objetivamos descrever as superfícies quádricas que estudaremos neste trabalho, dando ênfase na representação cartesiana, parametrização e representação geométrica.

O gráfico de uma equação do segundo grau em três variáveis é chamado uma superfície quádrica. Estas superfícies correspondem às cônicas do plano.

Uma superfície quádrica é um conjunto de pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ satisfazendo uma equação do tipo

$$\sum a_{ij}x_i x_j + \sum b_i x_i + c = 0.$$

Não temos interesse, aqui, em equações que não nos permitam, imediatamente, identificar o tipo de superfície quádrica que elas representam. Por esse motivo escolhemos os eixos coordenados de maneira que as equações estejam em sua forma mais simples.

Os gráficos das superfícies que estaremos estudando serão construídos utilizando-se o software Maple através de suas respectivas parametrizações.

As superfícies quádricas a serem estudadas são as seguintes:

1. Esfera

(a) Superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}.$$

(b) Parametrização

$X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < v < \pi\}$ e X é definida por

$$X(u, v) = (a \operatorname{sen} v \cos u, a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, a \cos v).$$

(c) Representação geométrica

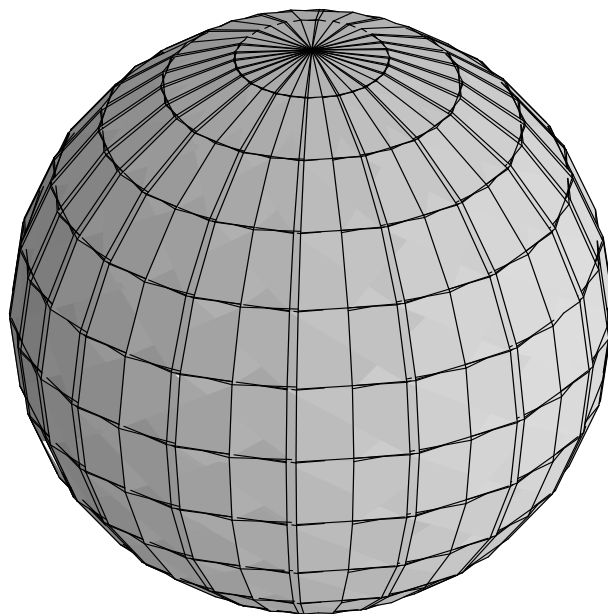


Figura 2.1: Esfera

2. Elipsóide

(a) Superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}.$$

(b) Parametrização

$X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < v < \pi\}$ e X é definida por

$$X(u, v) = (a \operatorname{sen} v \cos u, b \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, c \cos v).$$

(c) Representação geométrica.

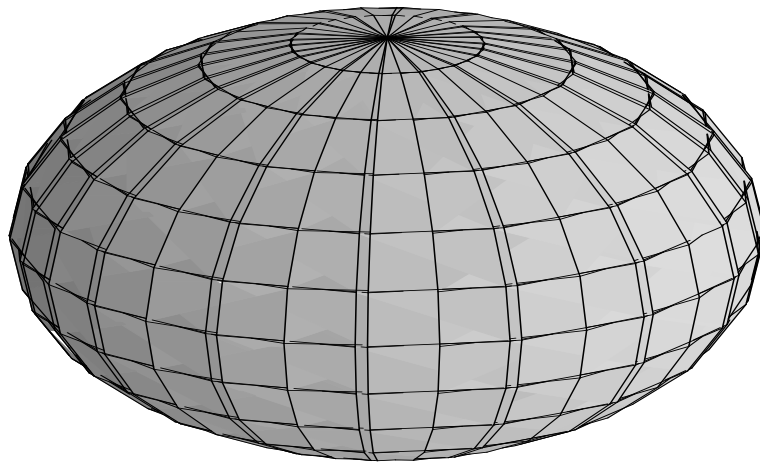


Figura 2.2: Elipsóide

3. Hiperbolóide Elíptico de uma Folha

(a) Superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\}.$$

(b) Parametrização

$X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < v < \pi\}$ e X é definida por

$$X(u, v) = (a \sqrt{u^2 + 1} \cos v, b \sqrt{u^2 + 1} \sin v, c u).$$

(c) Representação geométrica.

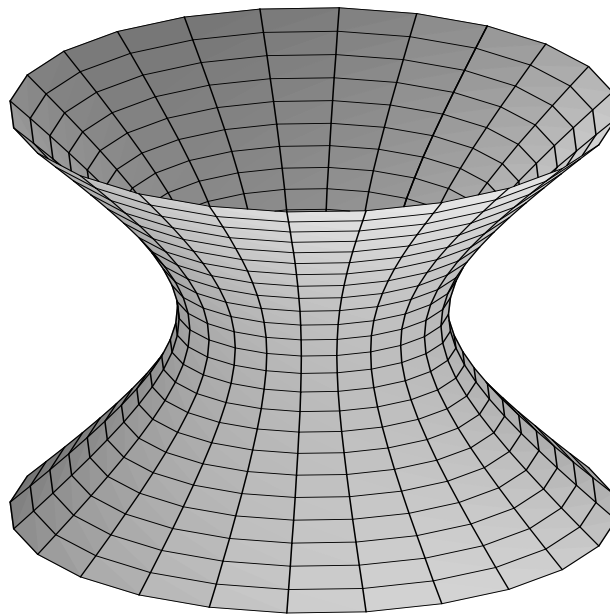


Figura 2.3: Hiperbolóide Elíptico de uma folha

4. Parabolóide Hiperbólico

(a) Superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{-x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz\}.$$

(b) Parametrização

$X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e X é definida por

$$X(u, v) = (u, v, \frac{v^2}{b^2} - \frac{u^2}{a^2}).$$

(c) Representação Geométrica.

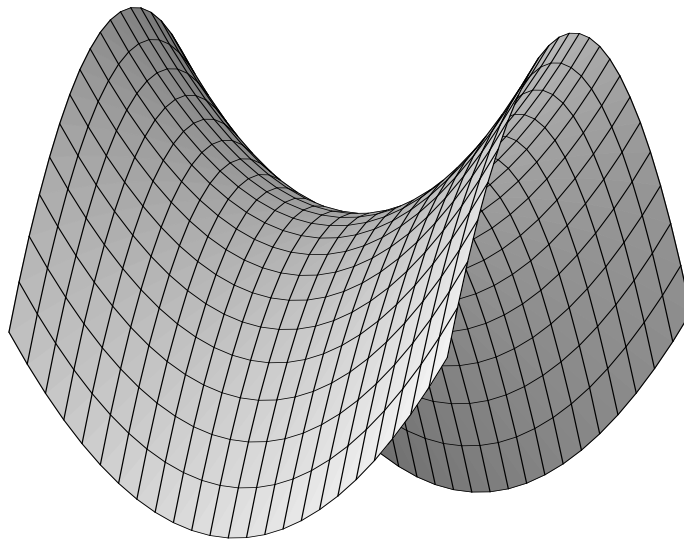


Figura 2.4: Parabolóide hiperbólico

5. Cilindro Elíptico

(a) Superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}.$$

(b) Parametrização

$X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi \text{ e } v \in \mathbb{R}\}$ e X é definida por

$$X(u, v) = (a \cos u, b \sin u, v).$$

(c) Representação geométrica

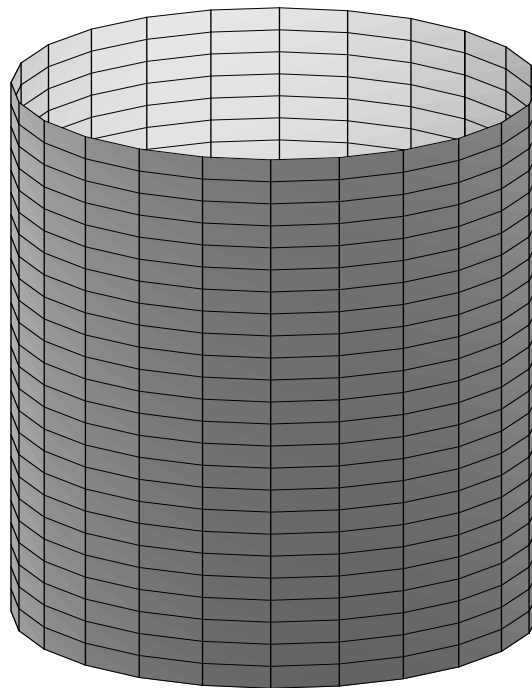


Figura 2.5: Cilindro Elíptico

6. Cone Quadrático

(a) Superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2\}.$$

(b) Parametrização

$X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < v < 2\pi\}$ e X é definida por

$$X(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, u).$$

(c) Representação geométrica

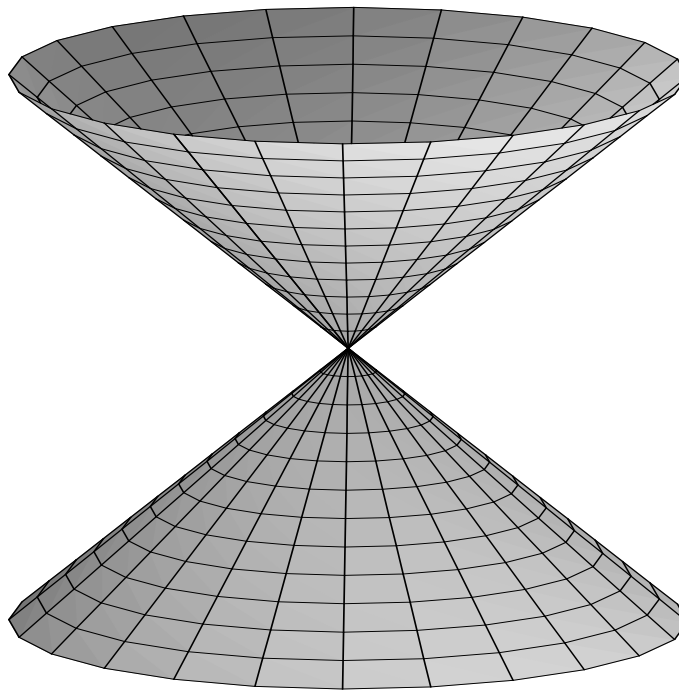


Figura 2.6: Cone quadrático

7. Parabolóide Elíptico

(a) Superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz\}.$$

(b) Parametrização

$X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e X é definida por

$$X(u, v) = (u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}).$$

(c) Representação geométrica

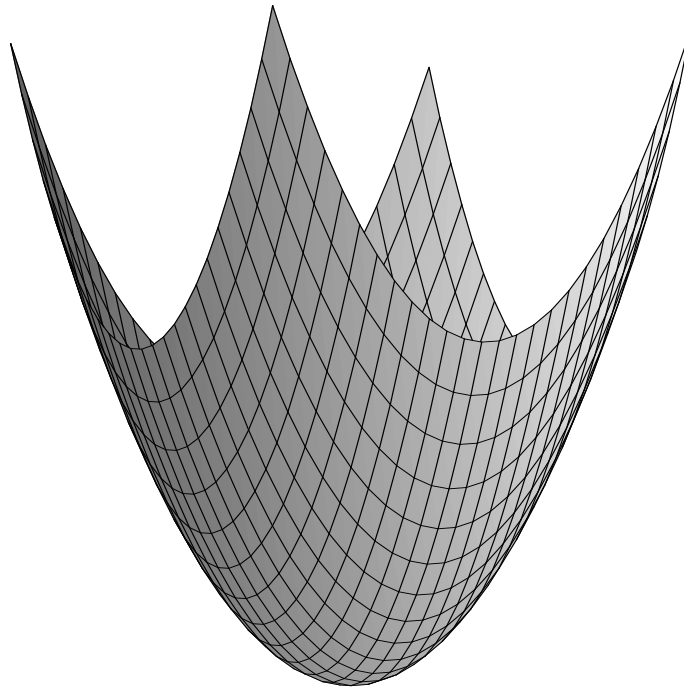


Figura 2.7: Parabolóide Elíptico

8. Cilindro Hiperbólico

(a) Superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\}.$$

(b) Parametrização

$X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e X é definida por

$$X(u, v) = (a \cosh u, b \sinh u, v).$$

Ressaltamos aqui que a parametrização $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cobre apenas uma folha do cilindro hiperbólico. O leitor poderá obter a outra folha através da aplicação $\bar{X} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ onde $\bar{X}(u, v) = (-a \cosh u, -b \sinh u, v)$. Pode-se verificar que se utilizarmos a parametrização $\bar{X}$ obteremos o mesmo resultado para as curvaturas gaussiana e média.

(c) Representação geométrica

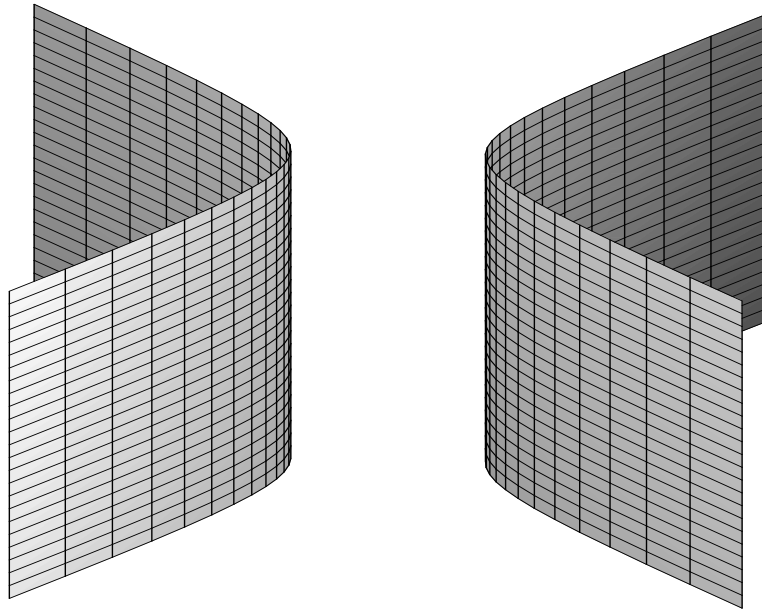


Figura 2.8: Cilindro Hiperbólico

9. Cilindro Parabólico

(a) Superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = ay^2\}.$$

(b) Parametrização

$X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e X é definida por

$$X(u, v) = (au^2, u, v).$$

(c) Representação geométrica

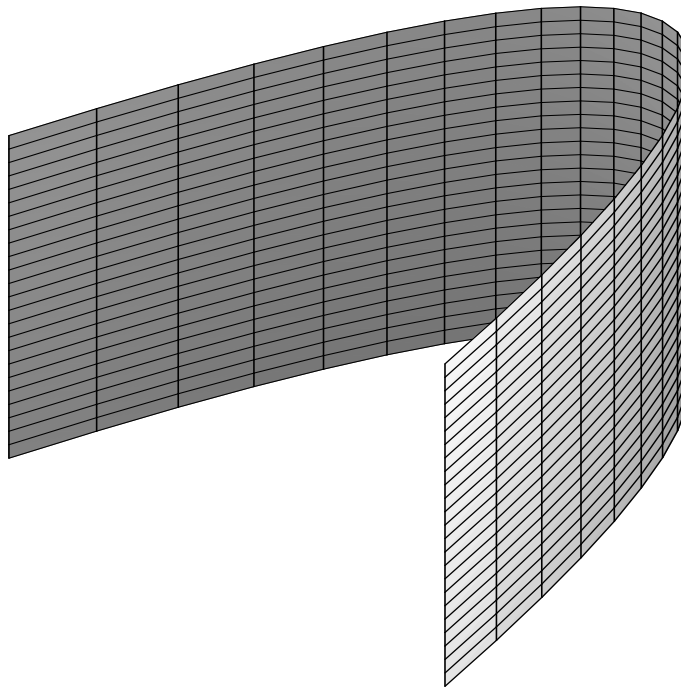


Figura 2.9: Cilindro Parabólico

10. Hiperbolóide Elíptico de duas folhas

(a) Superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\}.$$

(b) Parametrização

$X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, onde $u \in \mathbb{R}$ e $0 < v < \pi$ e X é definida por

$$X(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, c\sqrt{u^2 + 1}).$$

Ressaltamos ao leitor que a parametrização dada aqui cobre apenas uma folha do hiperbolóide elíptico de duas folhas.

(c) Representação geométrica

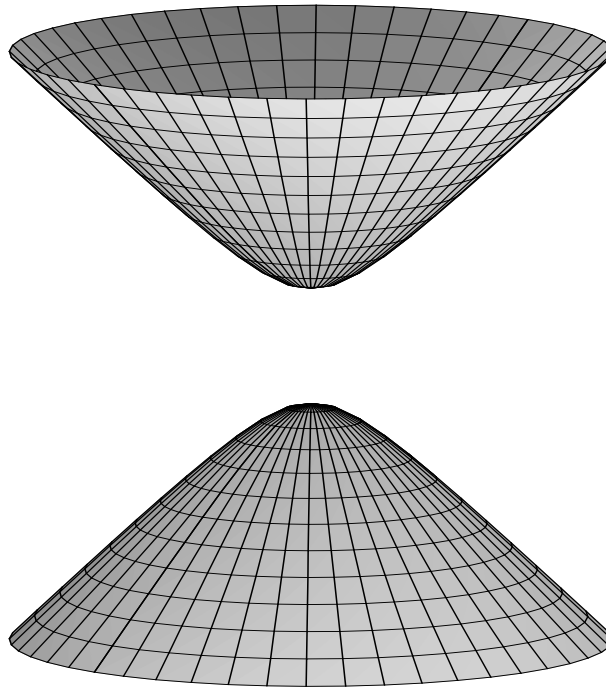


Figura 2.10: Hiperbolóide Elíptico de duas folhas

Capítulo 3

As curvaturas Gaussiana e Média de superfícies quádricas

Neste capítulo iremos calcular as curvaturas Gaussiana e Média das superfícies quádricas utilizando as fórmulas (1.15) e (1.16).

3.1 Elipsóide

Dada a parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$X(u, v) = (a \operatorname{sen} v \cos u, b \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, c \cos v),$$

onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < \pi \text{ e } v \in \mathbb{R}\}$, temos que:

$$X_u = (-a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, b \operatorname{sen} v \cos u, 0) \quad (3.1)$$

$$X_v = (a \cos v \cos u, b \cos v \operatorname{sen} u, -c \operatorname{sen} v) \quad (3.2)$$

Então,

$$N(u, v) = \left(\frac{-bc \operatorname{sen} v \cos u}{\sqrt{A}}, \frac{-ac \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u}{\sqrt{A}}, \frac{-ab \cos v}{\sqrt{A}} \right)$$

onde $A = (ac \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u)^2 + (bc \operatorname{sen} v \cos u)^2 + (ab \cos v)^2$

De (3.1) e (3.2) facilmente obtemos

$$X_{uu} = (-a \sen v \cos u, -b \sen v \sen u, 0),$$

$$X_{uv} = (-a \cos v \sen u, b \cos v \cos u, 0),$$

$$X_{vv} = (-a \sen v \cos u, -b \sen v \sen u, -c \cos v).$$

Então os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental são dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} E &= (a \sen v \sen u)^2 + (b \sen v \cos u)^2, \\ F &= (b^2 - a^2)[\sen v \sen u \cos v \cos u]^2, \\ G &= (a \cos v \cos u)^2 + (b \cos v \sen u)^2 + (c \sen v)^2, \\ e &= \frac{abc \sen^2 v}{\sqrt{B}}, \\ f &= 0, \\ g &= \frac{abc}{\sqrt{B}}, \end{aligned}$$

onde $B = (bc \sen v \cos u)^2 + (ac \sen v \sen u)^2 + (ab \cos v)^2$.

Com os resultados obtidos acima encontramos:

$$K(u, v) = \frac{1}{(abc)^2} \left[\frac{(a \sen v \cos u)^2}{a^4} + \frac{(b \sen v \sen u)^2}{b^4} + \frac{(c \cos v)^2}{c^4} \right]^{-2}$$

e

$$H(u, v) = \frac{abc[(a \cos v \cos u)^2 + (b \cos v \sen u)^2 + (a \sen u)^2(b \cos u)^2]}{2[(ab \cos v)^2 + (ac \sen u \sen v)^2 + (bc \cos u \sen v)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

3.2 Esfera

Dada a parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$X(u, v) = (a \sen v \cos u, a \sen v \sen u, a \cos v)$$

onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < v < \pi\}$, basta fazer $a = b = c$ nas curvaturas do elipsóide e obtemos para a esfera:

$$K(u, v) = \frac{1}{a^2} \quad \text{e} \quad H(u, v) = \frac{1}{a}$$

3.3 Parabolóide Elíptico

Dada a parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$X(u, v) = (u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}),$$

onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u, v \in \mathbb{R}\}$, obtemos os seguintes resultados

$$\begin{aligned} X_u &= (1, 0, \frac{2u}{a^2}), \\ X_v &= (0, 1, \frac{2v}{b^2}). \end{aligned}$$

Daí resulta que

$$\begin{aligned} X_{uu} &= (0, 0, \frac{2}{a^2}), \\ X_{uv} &= (0, 0, 0), \\ X_{vv} &= (0, 0, \frac{2}{b^2}), \end{aligned}$$

$$N(u, v) = (\frac{-2u}{a^2\sqrt{C}}, \frac{-2v}{b^2\sqrt{C}}, \frac{1}{\sqrt{C}}),$$

onde $C = \frac{4u^2}{a^4} + \frac{4v^2}{b^4} + 1$.

Então, os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental são dados,

respectivamente, por:

$$\begin{aligned} E &= \frac{4u^2}{a^4} + 1, \\ F &= \frac{4u^2}{(ab)^2}, \\ G &= \frac{4v^2}{b^4} + 1, \\ e &= \frac{2}{a^2\sqrt{C}}, \\ f &= 0, \\ g &= \frac{2}{b^2\sqrt{C}}. \end{aligned}$$

Utilizando os resultados anteriores, obtemos:

$$\begin{aligned} K(u, v) &= \frac{1}{4(ab)^2} \left[\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{4} \right]^{-2}, \\ H(u, v) &= \frac{a^2(b^4 + 4v^2) + b^2(a^4 + 4u^2)}{(ab)^4 \left(\frac{4u^2}{a^4} + \frac{4v^2}{b^4} + 1 \right)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

3.4 Cilindro Elíptico

Dada a parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$X(u, v) = (a \cos u, b \sin u, v)$$

onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; v \in \mathbb{R}, 0 < u < 2\pi\}$, determinamos :

$$X_u = (-a \sin u, b \cos u, 0), \quad (3.3)$$

$$X_v = (0, 0, 1). \quad (3.4)$$

Das equações (3.5) e (3.6) facilmente obtemos:

$$X_{uu} = (-a \cos u, -b \sin u, 0),$$

$$X_{uv} = (0, 0, 0),$$

$$X_{vv} = (0, 0, 0),$$

$$N(u, v) = \left(\frac{b \cos u}{\sqrt{(a \sin u)^2 + (b \cos u)^2}}, \frac{a \sin u}{\sqrt{(a \sin u)^2 + (b \cos u)^2}}, 0 \right).$$

Portanto, os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental são dados, respectivamente, por:

$$E = (a \sin u)^2 + (b \cos u)^2,$$

$$F = 0,$$

$$G = 1,$$

$$e = \frac{-ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}},$$

$$f = 0,$$

$$g = 0.$$

Utilizando os coeficientes E, F, G, e, f e g acima determinados encontramos:

$$K(u, v) = 0,$$

$$H(u, v) = \frac{-ab}{2[(a \sin u)^2 + (b \cos u)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

3.5 Parabolóide Hiperbólico

Dada a parametrização $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$X(u, v) = \left(u, v, \frac{v^2}{b^2} - \frac{u^2}{a^2} \right),$$

obtemos:

$$X_u = \left(1, 0, \frac{-2u}{a^2} \right) \tag{3.5}$$

$$X_v = \left(0, 1, \frac{2v}{b^2} \right) \tag{3.6}$$

Agora utilizando-se das equações (3.7) e (3.8) encontramos:

$$\begin{aligned}X_{uu} &= (0, 0, \frac{-2}{a^2}), \\X_{uv} &= (0, 0, 0), \\X_{vv} &= (0, 0, \frac{2}{b^2}), \\N(u, v) &= (\frac{2u}{a^2\sqrt{C}}, \frac{-2v}{b^2\sqrt{C}}, \frac{1}{\sqrt{C}}).\end{aligned}$$

Logo os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental são dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}E &= \frac{4u^2}{a^4} + 1, \\F &= \frac{-4uv}{(ab)^2}, \\G &= \frac{4v^2}{b^4} + 1,\end{aligned}$$

e por

$$\begin{aligned}e &= \frac{-2}{a^2\sqrt{C}}, \\f &= 0, \\g &= \frac{2}{b^2\sqrt{C}}.\end{aligned}$$

Donde resulta

$$\begin{aligned}K(u, v) &= \frac{-1}{4(ab)^2}(\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + 1)^{-2}, \\H(u, v) &= \frac{-a^2(b^4 + 4v^2) + b^2(a^4 + 4u^2)}{(ab)^4[\frac{4u^2}{a^4} + \frac{4v^2}{b^4} + 1]^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

3.6 Hiperbolóide Elíptico de duas folhas

Considerando a parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, c\sqrt{u^2 + 1}),$$

onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \neq 0, 0 < v < \pi\}$, temos que:

$$\begin{aligned} X_u &= (a \cos v, b \sin v, \frac{cu}{\sqrt{u^2 + 1}}) \\ X_v &= (-au \sin v, bu \cos v, 0) \end{aligned}$$

e também

$$N(u, v) = (\frac{-bcu \cos v}{\sqrt{D}}, \frac{-ac \sin v}{\sqrt{D}}, \frac{ab\sqrt{u^2 + 1}}{\sqrt{D}})$$

onde $D = (bcu \cos v)^2 + (acu \sin v)^2 + (ab)^2(u^2 + 1)$.

Além disso,

$$\begin{aligned} X_{uu} &= (0, 0, \frac{c}{(u^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}) \\ X_{uv} &= (-a \sin v, b \cos v, 0) \\ X_{vv} &= (-au \cos v, -bu \sin v, 0) \end{aligned}$$

Então, os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental são dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} E &= (a \cos v)^2 + (b \sin v)^2 + \frac{(cu)^2}{(u^2 + 1)}, \\ F &= -a^2 u \sin v \cos v + b^2 u \sin v \cos v, \\ G &= (au \sin v)^2 + (bu \cos v)^2, \end{aligned}$$

e por

$$\begin{aligned} e &= \frac{abc}{(u^2 + 1)\sqrt{D}}, \\ f &= 0, \\ g &= \frac{abcu^2}{\sqrt{D}}. \end{aligned}$$

Com os resultados outrora obtidos resulta que

$$\begin{aligned} K(u, v) &= \frac{1}{(abc)^2} \left[\frac{(au \cos v)^2}{a^4} + \frac{(bu \sin v)^2}{b^4} + \frac{(c\sqrt{u^2 + 1})^2}{c^4} \right]^{-2}, \\ H(u, v) &= \frac{abc[(u^2 + 1)(a^2 + b^2) + (cu)^2]}{2[(ab)^2(u^2 + 1) + (acu \sin v)^2 + (bcu \cos v)^2]^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

3.7 Cilindro Hiperbólico

Considerando a parametrização $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(u, v) = (a \cosh u, b \sinh u, v)$$

determinamos:

$$X_u = (a \sinh u, b \cosh u, 0), \quad (3.7)$$

$$X_v = (0, 0, 1). \quad (3.8)$$

Das equações (3.9) e (3.10) temos

$$X_{uu} = (a \cosh u, b \sinh u, 0),$$

$$X_{uv} = (0, 0, 0),$$

$$X_{vv} = (0, 0, 0)$$

e também

$$N(u, v) = \left(\frac{b \cosh u}{\sqrt{(b \cosh u)^2 + (a \sinh u)^2}}, \frac{-a \sinh u}{\sqrt{(b \cosh u)^2 + (a \sinh u)^2}}, 0 \right).$$

Logo, seguem-se os coeficientes da primeira forma fundamental

$$E = (a \operatorname{sen} hu)^2 + (b \operatorname{cosh} u)^2,$$

$$F = 0,$$

$$G = 1,$$

e da segunda forma fundamental

$$e = \frac{ab}{\sqrt{E}},$$

$$f = 0,$$

$$g = 0.$$

Com as operações devidas e os resultados anteriores resulta

$$K(u, v) = 0$$

$$H(u, v) = \frac{ab}{2[(a \operatorname{sen} hu)^2 + (b \operatorname{cosh} u)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

3.8 Hiperbolóide Elíptico de uma folha

Considerando a parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(u, v) = (a\sqrt{u^2 + 1} \cos v, b\sqrt{u^2 + 1} \operatorname{sen} v, cu)$$

onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \in \mathbb{R}, 0 < v < \pi\}$, obtemos:

$$X_u = \left(\frac{au \cos v}{\sqrt{u^2 + 1}}, \frac{bu \operatorname{sen} v}{\sqrt{u^2 + 1}}, c \right),$$

$$X_v = (-a\sqrt{u^2 + 1} \operatorname{sen} v, b\sqrt{u^2 + 1} \cos v, 0),$$

donde encontramos

$$X_{uu} = \left(\frac{a \cos v}{(u^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}, \frac{b \operatorname{sen} v}{(u^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}, 0 \right),$$

$$X_{uv} = \left(\frac{-au \operatorname{sen} v}{\sqrt{u^2 + 1}}, \frac{bu \cos v}{\sqrt{u^2 + 1}}, 0 \right),$$

$$X_{vv} = (-a\sqrt{u^2 + 1} \cos v, -b\sqrt{u^2 + 1} \operatorname{sen} v, 0).$$

Agora fazendo $D = (bc)^2(u^2 + 1)\cos^2 v + (ac)^2(u^2 + 1)\operatorname{sen}^2 v + (abu)^2$ encontramos

$$N(u, v) = \left(\frac{-b\sqrt{u^2 + 1} \cos v}{\sqrt{D}}, \frac{-ac\sqrt{u^2 + 1} \operatorname{sen} v}{\sqrt{D}}, \frac{abu}{\sqrt{D}} \right).$$

Então, os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental são dados, respectivamente por,

$$\begin{aligned} E &= \frac{(a \cos(v))^2 + (b \operatorname{sen}(v))^2}{(u^2 + 1)}, \\ F &= u \cos(v) \operatorname{sen}(v) (b^2 - a^2), \\ G &= (u^2 + 1)[(b \cos(v))^2 + (a \operatorname{sen}(v))^2] \end{aligned}$$

e por

$$\begin{aligned} e &= \frac{-abc}{(u^2 + 1)\sqrt{D}}, \\ f &= 0, \\ g &= \frac{abc(u^2 + 1)}{\sqrt{D}}. \end{aligned}$$

Agora, utilizando as equações anteriores e com as devidas operações obtemos, respectivamente, as curvaturas gaussianas e média,

$$K(u, v) = \frac{-1}{(abc)^2} \left[\frac{(a\sqrt{u^2 + 1} \cos v)^2}{a^4}, \frac{(b\sqrt{u^2 + 1} \operatorname{sen} v)^2}{b^4}, \frac{(cu)^2}{c^4} \right]^{-2},$$

$$H(u, v) = \frac{-abc[\cos^2 v(b^2 + a^2 u^2) + \operatorname{sen}^2 v(a^2 + b^2 u^2) + c^2(u^2 + 1)]}{2[(abu)^2 + (ac)^2(u^2 + 1)\operatorname{sen}^2 v + (bc)^2(u^2 + 1)\cos^2 v]^{\frac{3}{2}}}.$$

3.9 Cone Quadrático

Considerando a parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, u)$$

onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \in \mathbb{R}, 0 < v < 2\pi\}$, obtemos:

$$X_u = (a \cos v, b \sin v, 1),$$

$$X_v = (-au \sin v, bu \cos v, 0)$$

donde encontramos também

$$X_{uu} = (0, 0, 0),$$

$$X_{uv} = (-a \sin v, b \cos v, 0),$$

$$X_{vv} = (-au \cos v, -bu \sin v, 0),$$

$$N(u, v) = \left(\frac{-b \cos v}{\sqrt{E}}, \frac{a \sin v}{\sqrt{E}}, \frac{ab}{\sqrt{E}} \right)$$

onde $E = (b \cos v)^2 + (a \sin v)^2 + (ab)^2$.

Daí, os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental são dados, respectivamente, por

$$E = (a \cos v)^2 + (b \sin v)^2 + 1,$$

$$F = (b^2 - a^2)u \cos v \sin v,$$

$$G = u^2[(a \sin v)^2 + (b \cos v)^2]$$

e por

$$e = 0,$$

$$f = 0,$$

$$g = \frac{abu}{\sqrt{(a \sin v)^2 + (b \cos v)^2 + (ab)^2}}.$$

Dos coeficientes E, F, G, e, f e g acima determinados encontramos:

$$K(u, v) = 0$$

e

$$H(u, v) = \frac{ab[(a \cos v)^2 + (b \sin v)^2 + 1]}{2u[(ab)^2 + (a \sin v)^2 + (b \cos v)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

3.10 Cilindro Parabólico

Considerando a parametrização $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(u, v) = (au^2, u, v),$$

temos que:

$$X_u = (2au, 1, 0),$$

$$X_v = (0, 0, 1),$$

resultando, portanto

$$X_{uu} = (2a, 0, 0),$$

$$X_{uv} = (0, 0, 0),$$

$$X_{vv} = (0, 0, 0),$$

$$N(u, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{(2au)^2 + 1}}, \frac{-2au}{\sqrt{(2au)^2 + 1}}, 0 \right).$$

Então os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental são dados, respectivamente, por

$$E = (2au)^2 + 1,$$

$$F = 0,$$

$$G = 1,$$

e por

$$\begin{aligned}e &= \frac{-2a}{\sqrt{(2au)^2 + 1}}, \\f &= 0, \\g &= 0.\end{aligned}$$

Dos coeficientes E, F, G, e, f , e g acima encontrados resulta

$$K(u, v) = 0$$

e

$$H(u, v) = \frac{a}{[(2au)^2 + 1]^{\frac{3}{2}}}.$$

Capítulo 4

Classificação de pontos em superfícies quádricas.

Vejamos agora a classificação dos pontos das superfícies quádricas que estamos estudando.

4.1 Esfera

Sabemos que $K(u, v) = \frac{1}{a^2} > 0$ para todo (u, v) com $u \in \mathbb{R}$ e $0 < v < 2\pi$. Logo concluímos que todos os pontos da esfera são elípticos.

Observamos ainda que $H^2 = K$, portanto, pela proposição 1.4, todos os pontos da esfera são umbílicos.

4.2 Elipsóide

A curvatura Gaussiana do elipsóide é dada por

$$K(u, v) = \frac{1}{(abc)^2} \left[\frac{(a \operatorname{sen} v \cos u)^2}{a^4} + \frac{(b \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u)^2}{b^4} + \frac{(c \cos v)^2}{c^4} \right]^{-2} > 0$$

para todo (u,v) onde $u \in \mathbb{R}$ e $0 < v < 2\pi$. Então concluímos que todos os pontos do elipsóide são elípticos.

Pela propopsição (1.5) , um ponto é umbílico, se e só se,

$$e = \lambda E \quad (4.1)$$

$$f = \lambda F \quad (4.2)$$

$$g = \lambda G, \quad (4.3)$$

onde λ é igual às curvaturas principais de X em (u,v) . No caso do elipsóide, como $K(u,v) > 0$, temos que $\lambda \neq 0$.

Agora $f = 0$ implica $F = 0$ e das equações (4.1) e (4.3) devemos ter $eG = gE$, ou seja, (u,v) é umbílico , se e só se,

$$(\sin u \sin v \cos u \cos v)^2 = 0 \quad (4.4)$$

e

$$(a \cos v \cos u)^2 + (b \cos v \sin u)^2 + (c \sin v)^2 = (a \sin u)^2 + (b \cos u)^2 \quad (4.5)$$

Vamos nos deter aqui apenas no caso em que $a > b > c > 0$. Assim é fácil ver que se $\cos u = 0$ ou $\cos v = 0$, não existe (u,v) satisfazendo as equações acima. Portanto devemos considerar $\sin u = 0$. Substituindo $\sin u = 0$ na equação (4.5) resulta

$$b^2 = (a \cos v)^2 + (c \sin v)^2 \quad (4.6)$$

Resolvendo a equação (4.6) obtemos

$$\cos^2 v = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}$$

e

$$\sin^2 v = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}.$$

Desta forma, considerando $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, os pontos umbílicos no elipsóide resumem-se a quatro pontos, ou seja, aqueles cujas coordenadas são descritas por

$$x(u, v) = \pm a \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad y(u, v) = 0, \quad z(u, v) = \pm c \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

4.3 Parabolóide Elíptico

Como

$$K(u, v) = \frac{1}{4(ab)^2} \left(\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{4} \right)^{-2} > 0$$

para todo (u, v) onde $u \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}$, concluímos que todos os pontos do parabolóide elíptico são elípticos.

Para determinarmos os pontos umbílicos do parabolóide elíptico vamos utilizar novamente a proposição (1.5). Neste caso, como $K > 0$, devemos ter $\lambda \neq 0$ e como $f = 0$, temos $F = 0$, ou seja,

$$\frac{4u^2}{(ab)^2} = 0$$

donde resulta necessariamente $u = 0$.

Necessitamos também que $eG = gE$ com $u = 0$, ou seja,

$$4v^2 = a^2b^2 - b^4. \quad (4.7)$$

Portanto (u, v) é ponto umbílico do parabolóide elíptico, se e só se,

$$u = 0 \quad \text{e} \quad v = \pm \frac{b}{2} \sqrt{a^2 - b^2}.$$

4.4 Cilindro Elíptico

Sabemos que

$$K(u, v) = 0$$

e

$$H(u, v) = \frac{-ab}{2[(a \operatorname{sen} u)^2 + (b \cos u)^2]^{\frac{3}{2}}} \neq 0.$$

Logo concluímos que todos os pontos do cilindro elípticos são parabólicos.

Observamos ainda que, $H^2 - K = H^2 \neq 0$ e portanto esta superfície não possui pontos umbílicos.

4.5 Parabolóide Hiperbólico

Vejamos que

$$K(u, v) = \frac{-1}{4(ab)^2} \left(\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + 1 \right)^{-2} < 0,$$

para todo $u, v \in \mathbb{R}$. Portanto, concluímos que todos os pontos do parabolóide hiperbólico são hiperbólicos.

Como $K < 0$, não existem pontos umbílicos no parabolóide elíptico.

4.6 Hiperbolóide Elíptico de duas folhas

Já sabemos que aqui a curvatura Gaussiana é dada por

$$K(u, v) = \frac{1}{(abc)^2} \left[\frac{(au \cos v)^2}{a^4} + \frac{(bu \operatorname{sen} v)^2}{b^4} + \frac{(c\sqrt{u^2 + 1})^2}{c^4} \right]^{\frac{3}{2}} > 0$$

para todo (u, v) onde $u \neq 0$ e $0 < v < \pi$. Portanto todos os pontos do hiperbolóide elíptico de duas folhas são elípticos.

Vamos agora utilizar a proposição (1.5) para encontrarmos os pontos umbílicos do hiperbolóide elíptico de duas folhas. Observemos que $K > 0$ implica $\lambda \neq 0$ e como $f = 0$, temos necessariamente $F = 0$, ou seja, (u, v) é ponto umbílico se, e somente se,

$$(b^2 - a^2)u \operatorname{sen} v \cos v = 0 \quad \text{e} \quad eG = gE. \quad (4.8)$$

Veremos apenas o caso em que $a > b > c > 0$. Veja que se $\sin v = 0$, não existe (u, v) que satisfaça as equações acima. Logo devemos ter $u \cos v = 0$ e como $u \neq 0$ temos que $\cos v = 0$ que substituindo-se na segunda equação de (4.8), obtemos

$$a^2 = (u^2 + 1)b^2 + c^2u^2.$$

Desta última equação encontramos

$$u = \pm \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + c^2}}.$$

Desta forma, considerando $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, concluímos que os pontos umbílicos do hiperbolóide elíptico de duas folhas são aqueles cujas coordenadas são

$$x(u, v) = 0, \quad y(u, v) = \pm b \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + c^2}} \quad z(u, v) = c \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2}}.$$

4.7 Cilindro Hiperbólico

Como

$$K(u, v) = 0$$

e

$$H(u, v) = \frac{ab}{2((a \sinh u)^2 + (b \cosh u)^2)^{\frac{3}{2}}} \neq 0,$$

concluimos que todos os pontos do cilindro hiperbólicos são parabólicos.

Além disso $H^2 - K = H^2 \neq 0$ e portanto o cilindro hiperbólico não possui pontos umbílicos.

4.8 Hiperbolóide Elíptico de uma folha

Aqui a curvatura Gaussiana é dada por

$$K(u, v) = \frac{-1}{(abc)^2} \left[\frac{(a\sqrt{u^2 + 1} \cos v)^2}{a^4} + \frac{(b\sqrt{u^2 + 1} \sin v)^2}{b^4} + \frac{(cu)^2}{c^4} \right] < 0,$$

para todo (u, v) onde $u \in \mathbb{R}$ e $0 < v < \pi$. Portanto todos os pontos do hiperbolóide elíptico de uma folha são hiperbólicos. Como $K < 0$, concluímos que esta superfície não possui pontos umbílicos.

4.9 Cone Quadrático

Sabendo que, aqui, as curvaturas Gaussiana e Média são tais que

$$K(u, v) = 0 \quad e \quad H(u, v) = \frac{ab((a\cos(v))^2 + (b\sin(v))^2 + 1)}{2u((ab)^2 + (a\sin(v))^2 + (b\cos(v))^2)^{\frac{3}{2}}} \neq 0,$$

para todo (u, v) com $u \in \mathbb{R}$ e $0 < v < \pi$, concluímos que todos os pontos do cone quadrático são parabólicos. É fácil ver também que esta superfície não possui pontos umbílicos.

4.10 Cilindro Parabólico

As curvaturas Gaussiana e Média do cilindro parabólico são

$$K(u, v) = 0$$

e

$$H(u, v) = \frac{a}{(4(au)^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \neq 0$$

para todo (u, v) com $u, v \in \mathbb{R}$. Logo todos os seus pontos são parabólicos.

Como $H^2 - K = H^2 \neq 0$, concluímos que o cilindro parabólico não possui pontos umbílicos.

Apêndice A

A.1 O teorema espectral

O teorema espectral para operadores auto-adjuntos é um dos resultados mais relevantes da Álgebra Linear. Neste trabalho destaca-se sua aplicação no cálculo das curvaturas de superfícies. Além do teorema acima mencionado, ressaltamos aqui outro resultado importante, que trata dos valores máximo e mínimo de uma forma quadrática.

Lembramos aqui que um operador linear $A : E \longrightarrow E$, num espaço vetorial munido de produto interno, chama-se **auto-adjunto** quando $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$ para quaisquer $u, v \in E$.

Teorema A.1. (*spectral*)- Para todo operador auto-adjunto $A : E \longrightarrow E$, num espaço vetorial de dimensão finita munido de produto interno, existe uma base ortonormal $\{u_1, \dots, u_n\} \subset E$ formada por autovetores de A .

Demonstração :Vamos usar indução na dimensão de E .

Caso seja $\dim E = 1$, nada temos a fazer. Consideremos então $\dim E = n$ e suponhamos que o teorema seja válido em dimensão $n - 1$. Como A é auto-adjunto, A possui um autovetor unitário u_n . Assim existe um subespaço $F \subset E$ de dimensão 1, invariante por A . Sabemos que o complemento ortogonal $F^\perp$ é também invariante por A .

Como $\dim F = 1$ temos que $\dim F^\perp = n - 1$ e então pela hipótese de indução existe uma base ortonormal $\{u_1, \dots, u_n\} \subset F^\perp$ formada por autovetores de $A : F^\perp \longrightarrow F^\perp$. Portanto $\{u_1, \dots, u_{n-1}, u_n\} \subset E$ é uma base ortonormal formada por autovetores de A . ■

Sejam E, F espaços vetoriais. Uma **forma bilinear** $B : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função $B(u, v)$ linear em cada uma das duas variáveis $u \in E, v \in F$. Mais precisamente, para quaisquer $u, w \in E, v, v' \in F$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ devem valer:

$$B(u + w, v) = B(u, v) + B(w, v) \quad \text{e} \quad B(\alpha u, v) = \alpha B(u, v).$$

$$B(u, v + v') = B(u, v) + B(u, v') \quad \text{e} \quad B(u, \alpha v) = \alpha B(u, v).$$

Uma forma bilinear $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se **simétrica** quando $B(u, v) = B(v, u)$ para quaisquer $u, v \in E$.

Teorema A.2. *Seja E um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno. Para cada forma bilinear $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ existe um único operador linear $A : E \longrightarrow E$ tal que $\langle u, Av \rangle = B(u, v)$ para $u, v \in E$ quaisquer. A correspondência $B \longrightarrow A$, assim definida, é um isomorfismo entre os espaços vetoriais $\mathbb{B}(E \times E)$ e $\mathbb{L}(E)$. A forma bilinear B é simétrica se, e somente se, o operador A é auto-adjunto.*

Demonstração : Para cada $v_o \in E$, a função $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(u) = B(u, v_o)$, é um funcional linear. Sabemos que existe um único vetor em E , que indicaremos com Av_o , tal que $f(u) = \langle u, Av_o \rangle$, ou seja, $\langle u, Av_o \rangle = B(u, v_o)$ para todo $u \in E$. Como $v_o \in E$ é arbitrário, acabamos de mostrar que existe uma única função $A : E \longrightarrow E$ tal que $\langle u, Av \rangle = B(u, v)$ para quaisquer $u, v \in E$. Dados $v, v' \in E$, tem-se

$$\begin{aligned} \langle u, A(v + v') \rangle &= B(u, v + v') \\ &= B(u, v) + B(u, v') \\ &= \langle u, Av \rangle + \langle u, Av' \rangle \\ &= \langle u, Av + Av' \rangle \end{aligned}$$

para todo $u \in E$, logo $A(v + v) = Av + Av$. De modo análogo se verifica que $A(\alpha v) = \alpha(Av)$ para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in E$ quaisquer, portanto $A : E \longrightarrow E$ é linear. Em relação a uma base ortonormal $\mathbb{U} = \{u_1, \dots, u_m\} \subset E$, o ij -ésimo elemento da matriz de A é $\langle e_i, Ae_j \rangle = B(e_i, e_j) = ij$ -ésimo da matriz de B . Assim a forma bilinear B e o operador A que a ela correspondem, têm a mesma matriz na base $\mathbb{U}$. Daí decorre que a correspondência $B \longrightarrow A$ é um isomorfismo entre $\mathbb{B}(E \times E)$ e $\mathbb{L}(E)$ e que A é auto adjunto se, e somente se, B é simétrica. ■

Uma função $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se uma **forma quadrática** quando existe uma forma bilinear $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(v) = B(v, v) \quad \text{para todo} \quad v \in E.$$

Corolário A.3. *Seja E um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno. Dada uma forma bilinear simétrica $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ se $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_m$, são os autovalores da forma quadrática $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ onde $\varphi(u) = B(u, u)$, então para todo vetor unitário $u \in E$ tem-se $\lambda_1 \leq \varphi(u) \leq \lambda_m$. Consequentemente, o menor autovalor λ_1 eo maior autovalor λ_m são também o valor mínimo e o valor máximo assumidos pela forma quadrática φ entre os vetores unitários de E .*

Demonstração : Consideremos $W = \{u_1, \dots, u_m\}$ uma base ortonormal . Assim se $u = \sum x_i u_i$, então $\sum x_i^2 = 1$. Logo

$$\lambda_1 = \sum_i \lambda_1 x_i^2 \leq \sum_i \lambda_i x_i^2 = \varphi(u) \leq \sum_i \lambda_m x_i^2 = \lambda_m.$$

Além disso $\lambda_1 = \varphi(u_1) \leq \varphi(u) \leq \varphi(u_m) = \lambda_m$. ■

Referências Bibliográficas

- [1] ARAUJO, Paulo Ventura *Geometria Diferencial*. Rio de Janeiro: IMPA, CNPq, 1998.
- [2] BOLDRINI, José L.. *Álgebra Linear*. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.
- [3] CARMO, Manfredo P. do. *Elementos de Geometria Diferencial*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A, 1971.
- [4] LIMA, Elon Lages. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: IMPA, CNPq, 2000
- [5] LANG, Serge. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: Ciência moderna, 2003
- [6] TENENBLAT, keti. *Introdução à geometria diferencial*. Brasília: Universidade de Brasília, 1990.
- [7] SPIVAK, Michael. *A comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Houston, Texas: Publish or Perish, Inc., 1979
- [8] FEDENKO, A.S. *Problemas de Geometría diferencial*. Traducion al español por A.I. Samojválov. Moscú, URSS: Mir. Moscú, 1981.