INTRODUÇÃO À TEORIA DAS FUNÇÕES COMPLEXAS

Carlos A. A. Florentino

Junho 2011

Conteúdo

Prefácio

"O completo conhecimento da natureza de uma função analítica deve também incluir a indicação do seu comportamento para valores imaginários dos argumentos. Muitas vezes, isto é indispensável inclusivé para a correcta apreciação do comportamento da função para argumentos reais."
(C. F. Gauss, Carta a F. W. Bessel, 1811).

A teoria das funções complexas de variável complexa, usualmente designada por *Análise Complexa*, é uma área da Matemática cujos fundamentos remontam ao século XVIII, estando intimamente ligada a muitos matemáticos de renome, tais como Euler, Gauss, Riemann, Cauchy e Weierstrass. É igualmente um assunto de grande utilidade noutras áreas tanto na Matemática Pura como na Matemática Aplicada, na Física e noutras ciências experimentais, sendo por isso, parte integrante de cursos de Engenharia, Física ou Matemática, um pouco por todo o mundo.

Sendo um assunto que sempre mereceu uma vasta literatura, ainda não tem, curiosamente, a desejada correspondência em publicações na língua portuguesa. Recentemente, esta lacuna tem vindo a ser gradualmente preenchida, com alguns livros em que se abordam funções elementares, expansões em série de Taylor e Laurent, e os teoremas de Cauchy e dos resíduos em algumas das suas versões. Esses livros destinam-se essencialmente a alunos dos primeiros dois anos de uma licenciatura de Matemática, Física ou Engenharia.

Prosseguindo esta tendência, este livro pretende abordar aspectos complementares, mas ainda clássicos e fundamentais, da teoria das funções de variável complexa, de grande relevo para inumeras aplicações a outras áreas da Matemática e afins. Assim, este pode ser visto como texto de apoio a uma disciplina dedicada aos fundamentos matemáticos da Análise Complexa, sendo por isso destinado a estudantes de final de Licenciatura ou início de Mestrado em Matemática Pura, Matemática Aplicada ou Física.

CAPíTULO 1

Diferenciabilidade: Funções Holomorfas e Funções Analíticas

Neste capítulo, vamos estudar o conceito de derivada de uma função complexa de variável complexa. Veremos que, apesar da definição de derivada ser inteiramente análoga à da derivada de uma função real de variável real, muitas das propriedades fundamentais das funções diferenciáveis de variável complexa não têm equivalente no caso real.

Como exemplo notável deste fenómeno, temos o teorema de Taylor, central na teoria das funções diferenciáveis de variável complexa, segundo o qual uma função que admite derivada numa vizinhança de um ponto, tem nesse ponto derivadas de todas as ordens e a correspondente série de Taylor tem raio de convergência positivo.

Deste modo, a teoria local das funções diferenciáveis é essencialmente a teoria das funções analíticas, que se resume, por sua vez, à teoria das séries de potências. Esta situação está em grande contraste com o que se passa na análise real e permite a demonstração de resultados fortes e elegantes, como o teorema de Liouville, o princípio dos zeros isolados, ou o princípio do módulo máximo, que veremos em capítulos posteriores.

Vamos aqui definir e relacionar três conceitos diferentes: diferenciabilidade, holomorfia e analiticidade. Todos eles estão ligados ao conceito de derivada de uma função f num ponto do plano complexo ou num subconjunto do plano complexo.

Como sabemos, o conceito de derivada de uma função num ponto é um conceito "local" que envolve a consideração de uma vizinhança desse ponto, sendo insensível ao comportamento da função fora dessa vizinhança. É assim natural considerar funções definidas em conjuntos abertos e conexos.

Definição. Pela sua importância, e de acordo com a literatura usual, chamaremos região a qualquer subconjunto aberto, conexo e não vazio de $\mathbb{C}$.

Por exemplo, um disco aberto e o semiplano superior são regiões em $\mathbb{C}$. Como vão aparecer com grande frequência, usaremos as seguintes notações:

- Disco aberto de raio $r > 0$ e centrado em $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$\mathbb{D}(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < r\}$$

- Semiplano superior:

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \ \Im z > 0\}$$

Em todo este livro, Ω designará uma região arbitrária em $\mathbb{C}$.

1.1. Funções Diferenciáveis e Funções Holomorfas

Definição de função diferenciável e de função holomorfa. Começamos por definir diferenciabilidade de forma inteiramente análoga ao caso de funções de variável real.

Definição. Uma função $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ diz-se diferenciável em $z_0 \in \Omega$ se o limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existe em $\mathbb{C}$. Neste caso, o limite acima chama-se a derivada de f em z_0 e denota-se por $f'(z_0)$. A função f diz-se diferenciável em Ω se é diferenciável em todos os pontos $z_0 \in \Omega$.

Como exemplos de funções diferenciáveis numa região, temos:

- Polinómios: $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, para quaisquer $a_0, ..., a_n \in \mathbb{C}$ é uma função diferenciável em $\mathbb{C}$;
- Funções racionais: $f(z) := p(z)/q(z)$, onde p e q são polinómios sem raízes comuns, é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus Z$, onde Z é o conjunto (finito) das raízes de $q(z)$.
- Funções trigonométricas e exponencial: Por exemplo, $\sin(z)$, $\cos(z)$, e^z são funções diferenciáveis em $\mathbb{C}$; $f(z) := \cot(z)$ é diferenciável em $\mathbb{C} \setminus \{k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}$.
- Funções inversas das anteriores: Por exemplo, $\arcsin(z)$ é diferenciável em $\{x+iy : x \in]-\pi, \pi[\}$; e $\log(z)$ é diferenciável em $\Omega = \{x + iy : \ y \in]-\pi, \pi[\}$.
- Séries de funções convergentes: qualquer série convergente num disco aberto $\mathbb{D}(z_0, r)$, com $r > 0$, é holomorfa nesse mesmo disco.

Vamos desenvolver cada um dos exemplos acima com mais detalhe nos próximos capítulos. Por agora, estudaremos a relação entre diferenciabilidade e outras noções análogas.

Usando a identificação entre o plano complexo $\mathbb{C}$ e o plano real $\mathbb{R}^2$, a cada função de variável complexa $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ pode associar-se a função $f_{\mathbb{R}^2} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por:

$$f_{\mathbb{R}^2}(x, y) := (u(x, y), v(x, y)), \quad \text{onde} \quad \begin{cases} u(x, y) = \Re\left(f(x + iy)\right) \\ v(x, y) = \Im\left(f(x + iy)\right). \end{cases}$$

Aqui, u e v são funções reais, chamadas naturalmente, a parte real e imaginária (respectivamente) de f. Graficamente, podemos representar da seguinte forma a relação entre f e $f_{\mathbb{R}^2}$:

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \| & & \| \\ \Omega & \xrightarrow{f_{\mathbb{R}^2}} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

É natural questionar-se sobre a relação entre a diferenciabilidade de f e a diferenciabilidade de $f_{\mathbb{R}^2}$. Como sabemos, a derivada de $f_{\mathbb{R}^2}$ em $(x_0, y_0) \in \Omega$ é representada pela matriz:

$$Df_{\mathbb{R}^2}(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \Big|_{(x_0, y_0)} \tag{1.1.1}$$

que nos fornece uma aplicação linear do espaço vectorial $\mathbb{R}^2$ nele próprio. Esta aplicação linear depende de 4 números reais, em contraste com os 2 números reais que compõem a derivada $f'(z_0)$. A "resolução" deste diferendo está em que devemos considerar apenas as matrizes 2×2 que correspondem a aplicações $\mathbb{C}$-lineares de $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ em si mesmo.

PROPOSIÇÃO. *Usando a identificação natural entre vectores de $\mathbb{R}^2$ e números complexos, as matrizes 2×2 que representam transformações $\mathbb{C}$-lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ são da forma:*

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Qualquer transformação $\mathbb{C}$-linear entre $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}$ é da forma $z \mapsto \lambda z$, para um certo $\lambda \in \mathbb{C}$. Sendo $z = x + iy$, $\lambda = a + bi$, temos $\lambda z = ax - by + i(bx + ay)$. Assim, uma aplicação entre $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^2$ é $\mathbb{C}$-linear se e só se transforma o vector (x, y) no vector $(ax - by, bx + ay)$ para certos números reais a, b, transformação esta que é precisamente representada pela matriz acima. $\square$

DEFINIÇÃO. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ diz-se holomorfa em $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ se $f_{\mathbb{R}^2}$ é de classe C^1 em (x_0, y_0) e $Df_{\mathbb{R}^2}(x_0, y_0)$ é uma transformação $\mathbb{C}$-linear. f diz-se holomorfa em Ω, se f é holomorfa em todos os pontos $z \in \Omega$.

Por outras palavras, escrevendo $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, f é holomorfa em z_0 se $f_{\mathbb{R}^2}$ é de classe C^1 em (x_0, y_0) e a transformação linear dada pela matrix (1.1.1) é $\mathbb{C}$-linear, ou seja, as funções u, v verificam

$$(*)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

no ponto $(x_{0,}y_0)$. Estas famosas equações chamam-se as equações de Cauchy-Riemann.

Outra forma de definir holomorfia é através dos seguintes operadores diferenciais lineares. Considerando as combinações lineares de derivadas parciais definidas por:

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

é fácil verificar que as equações de Cauchy-Riemann (no ponto (x_0, y_0)) podem escrever-se como uma singela equação:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0,$$

onde $z_0 = x_0 + iy_0$. Além disso, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = f'(z_0),$$

se f é diferenciável em z_0. Deixamos estas verificações para o leitor.

Equivalência entre diferenciabilidade e holomorfia. A noção de holomorfia coincide com a de diferenciabilidade. De facto, f é holomorfa num ponto se e só se é diferenciável nesse ponto.

PROPOSIÇÃO. *Seja Ω é uma região em $\mathbb{C}$ e $f(x+iy) = u(x, y)+iv(x, y)$ com u e v de classe C^1 em Ω, e $z_0 \in \Omega$. Então, f é diferenciável em z_0 se e só se f é holomorfa em z_0. Uma fórmula para a derivada em z_0 em termos de u e v é:*

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Se f é diferenciável em z_0, então podemos calcular o limite $f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ nas direcções horizontal e vertical e comparar o resultado. Na direcção horizontal, fazemos $h = s \in \mathbb{R}$ e assim:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{s\to 0} \frac{f(x_0 + iy_0 + s) - f(x_0 + iy_0)}{s} = \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{u(x_0 + s, y_0) - u(x_0, y_0) + iv(x_0 + s, y_0) - iv(x_0, y_0)}{s} = \\ &= \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{(x_0,y_0)}. \end{aligned}$$

Fazendo o mesmo limite na direcção vertical $h = it$, $(t \in \mathbb{R})$ obtemos $f'(z_0) = \left[\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{(x_0,y_0)}$; como, por hipótese, o limite é único obtemos as equações de Cauchy-Riemann.

Para provar o recíproco, usamos as fórmulas de Taylor usuais para funções de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$. Sendo f é holomorfa em $z_0 = x_0 + iy_0$ e $h = s + it$, temos:

$$\begin{aligned}
f(z_0+h) - f(z_0) =& u(z_0+h) - u(z_0) + i\,[v(z_0+h) - v(z_0)] = \\
=& \bigtriangledown u(x_0,y_0)\cdot(s,t) + o(\|(s,t)\|) + i[\bigtriangledown v(x_0,y_0)\cdot(s,t)] + o(\|(s,t)\|) = \\
=& \frac{\partial u}{\partial x}s - \frac{\partial v}{\partial x}t + i\frac{\partial v}{\partial x}s + i\frac{\partial u}{\partial x}t + o(\|(s,t)\|) = \\
=& \left(\frac{\partial u}{\partial u} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(s+it) + o(\|(s,t)\|).
\end{aligned}$$

onde as derivadas parciais são calculadas em (x_0, y_0) e $o(\|(s,t)\|)$ designa um termo que tende para zero quando $\|(s,t)\| \to 0$. Asim, o limite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot h + o(|h|)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

existe, o que prova que f é diferenciável em z_0, e nos dá a fórmula pretendida. $\square$

Primeiras propriedades das funções holomorfas. Sendo Ω uma região em $\mathbb{C}$, é fácil ver que a soma e o produto de funções holomorfas são também holomorfas.

Vamos designar por $H(\Omega)$ o conjunto das funções holomorfas (ou diferenciáveis) numa região Ω.

De acordo com o que foi dito, é fácil verificar o seguinte.

Proposição. *$H(\Omega)$ é um anel comutativo com identidade.*

Este anel contem estritamente o anel dos polinómios.

1.2. Séries de Potências

De modo a definir a noção de analiticidade, também de modo análogo ao caso real, vamos primeiro introduzir a teoria básica das séries de potências.

Série de potências formais e convergentes. Começamos por definir série de potências (não negativas), que podem considerar-se como "polinómios de grau infinito".

$\mathbb{D}(z_0, r)$ e $C(z_0, r)$ designam, respectivamente o disco aberto e a circunferência de centro em z_0 e raio r; quando z_0 é omitido assume-se que z_0 é a origem, e o disco unitário $\mathbb{D}(1)$ designa-se simplesmente por $\mathbb{D}$.

Definição. Uma série de potências (não negativas)[1] centrada em $z_0 \in \mathbb{C}$ é qualquer expressão da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots$$

onde a_n são números complexos, chamados os coeficientes da série. Convém distinguir dois casos fundamentalmente distintos de séries de potências: o das séries formais, em que a série apenas converge no seu centro z_0 (não podendo por isso definir uma função numa região), e o das séries convergentes, em que a série converge para algum $z \in \mathbb{C}$ distinto do centro.

Vamos agora provar que qualquer série de potências convergente define uma *função diferenciável num certo disco.*

[1]A palavra "não negativas", lembrando que o índice n toma valores em $\mathbb{N}_0$, é normalmente omitida. Mais tarde consideraremos também séries de potências onde n ser pode ser qualquer inteiro, mas que serão chamadas séries de Laurent, como habitualmente.

Raio e disco de convergência.

DEFINIÇÃO. O raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ é o número

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R} : a_n r^n \text{ é uma sucessão limitada}\} \in [0, \infty]$$

e o disco de convergência é $\mathbb{D}(z_0; R)$.

Note-se que $R = 0$ se e só se a série dada é formal (converge apenas em z_0). A definição de raio e disco de convergência é motivada pelo seguinte resultado.

TEOREMA. *(Abel) Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ uma série convergente com disco de convergência $\mathbb{D}(z_0, R)$ e seja $K \subset \mathbb{D}(z_0; R)$ um subconjunto compacto. Então, a série é* uniformemente convergente em K *e* diverge para $|z - z_0| > R$.

DEMONSTRAÇÃO. Como a série é convergente, podemos assumir que $R > 0$. Seja $0 < s < r < R$ tal que $a_n r^n$ é uma sucessão limitada, pelo que existe $M > 0$ que verifica $|a_n| r^n \leq M$. Temos então que $\max\{|a_n(z-z_0)^n| : z \in \overline{\mathbb{D}(z_0, s)}\} \leq |a_n| s^n \leq M(\frac{s}{r})^n$, pelo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max\{|a_n(z-z_0)^n| : z \in \overline{\mathbb{D}(z_0, s)}\} \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{s}{r}\right)^n < \infty,$$

e portanto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ é uma série uniformemente convergente no disco compacto $\overline{\mathbb{D}(z_0, s)}$. Como qualquer compacto $K \subset \mathbb{D}(z_0, R)$ está contido dentro de algum destes discos compactos, concluimos a primeira parte. □

Determinação do raio de convergência.

PROPOSIÇÃO. *(Fórmula de Cauchy-Hadamard) O raio de convergência da série pode ser calculado através de:*

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$\liminf \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \leq R \leq \limsup \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

Exemplos. A série $\sum n! z^n$ tem raio de convergência nulo, pelo que é uma série formal e por isso, não representa nunhuma função: só está definida quando $z = 0$, onde vale 0. A série $\sum \frac{z^n}{n!}$ tem raio de convergência $+\infty$ pelo que define uma função em todo o plano complexo. Esta função é, como sabemos, a função exponencial.

Diferenciabilidade das séries de potências. O último caso do exemplo acima é válido em geral no sentido em que as séries de potências convergentes representam sempre funções difereciáveis nalguma região.

PROPOSIÇÃO. *Uma série convergente $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ define uma função diferenciável no seu disco de convergência e a sua derivada*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1},$$

é uma série convergente com o mesmo disco de convergência.

DEMONSTRAÇÃO. O facto de que estas séries definem funções contínuas é uma consequência da convergência uniforme em compactos. Para provar que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ é diferenciável em z_0 podemos assumir que $z_0 = 0 \in \Omega$, pois podemos substituir f por $\tilde{f}(z) = f(z+z_0)$. A ideia é simplesmente calcular o limite que define diferenciabilidade.

Consideremos então $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ para z contido num disco $\mathbb{D}(0,r)$, $r>0$ contido por sua vez em Ω (dado que Ω é aberto).

Sejam $s_n(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$, $R_n(z)=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kz^k$ e $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nnz^{n-1}$, que representam respectivamente a sucessão de somas parciais, os restos e a derivada formal da série $f(z)$. Temos, para $z,w\in\mathbb{D}\,(0,r)$

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w}-g(w)=\left[\frac{s_n(z)-s_n(w)}{z-w}-s_n'(w)\right]+\left[s_n'(w)-g(w)\right]+\left[\frac{R_n(z)-R_n(w)}{z-w}\right]$$

Seja $\varepsilon>0$. $\exists N_1\in\mathbb{N}$ tal que $|s_n'(w)-g(w)|<\frac{\varepsilon}{3}$ para $n\geq N_1$ porque, dado que os s_n são polinómios, para w fixo: $\lim_{n\to\infty}s_n'(w)=g(w)$.

Existe $\delta>0$ tal que $\left|\frac{s_n(z)-s_n(w)}{z-w}-s_n'(w)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$ para $|z-w|<\delta$ pois o polinómio $s_n(w)$ tem derivada. Finalmente, existe $N_2\in\mathbb{N}$ tal que para $n\geq N_2$:

$$\begin{aligned}\left|\tfrac{R_n(z)-R_n(w)}{z-w}\right|&=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k\tfrac{(z^k-w^k)}{z-w}\right|\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|\left|\tfrac{z^k-w^k}{z-w}\right|=\\&=\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|\left|z^{k-1}+z^{k-2}w+\cdots+zw^{k-2}+w^{k-1}\right|\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|kr_1^{k-1}<\tfrac{\varepsilon}{3}\end{aligned}$$

A última desigualdade resulta do facto que $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|kr_1^k$ é a série dos módulos de $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|kz^k$ para $|z|=r_1$, que converge para $r_1<r$ por hipótese, logo a sua cauda tende para zero. Assim para qualquer $\varepsilon>0$, existe $N\in\mathbb{N}$ e $\delta>0$ tal que

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}-g(w)\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

o que prova que f é diferenciável em qualquer ponto $w\in\mathbb{D}(0,r)$, e que a derivada é dada pela fórmula usual. O cálculo do raio de convergência da derivada é elementar. □

Corolário. *Uma série de potências convergente define uma função de classe C^∞ no seu disco de convergência.*

Exemplo. Exemplos:

Série geométrica $\dfrac{1}{1-z}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}z^n=1+z+z^2+...,$ converge para $|z|<1$.

$\sin z=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-...,$ converge em $\mathbb{C}$.

1.3. Funções Analíticas

Definição. Diz-se que $f:\Omega\to\mathbb{C}$ é *analítica em* $z_0\in\Omega$, se f coincide com uma série de potências convergente num disco centrado em z_0. Por outras palavras, se existe $r>0$ e uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$, com raio de convergência $r>0$, tal que $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ para todo $z\in\mathbb{D}(z_0,r)$. Diz-se que f *é analítica em* Ω se é analítica em todos os pontos de Ω.

O seguinte resultado é uma consequência imediata do Corolário anterior.

Proposição. *Se f é analítica numa região Ω, então f é holomorfa em Ω. Além disso f é infinitamente diferenciável em todos os pontos de Ω.*

Como exemplos de funções analíticas em $\mathbb{C}$ temos os polinómios e as funções trigonométricas seno, cosseno e exponencial. Se $q(z)$ não se anula num aberto U, é também fácil de provar que as funções racionais da forma $\frac{p(z)}{q(z)}$ são analíticas em U.

As séries de potências convergentes são analíticas. Vimos que as séries definem funções diferenciáveis no disco de convergência (se este fôr não vazio). Uma série é trivialmente analítica no seu centro se e só se tem raio de convergência positivo. Também se mostra facilmente a sua analiticidade em toda a região de convergência.

TEOREMA. *[Lema de Abel] Se* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *tem* $\mathbb{D}(z_0, r)$, $r > 0$ *como disco de convergência, então* f *e analítica em* $\mathbb{D}(z_0, r)$.

DEMONSTRAÇÃO. A ideia é modificar a série dada (usando a série geométrica) para determinar o desenvolvimento em série em torno de qualquer outro ponto do disco. $\square$

Para resumir os resultados desta secção, utilizamos as seguintes notações. Seja $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ e $D = \mathbb{D}(z_0, r)$. Denotemos por $\mathcal{S}(D)$ o conjunto das séries de potências convergentes em D e por $\mathcal{A}(D)$ o conjunto das funções analíticas em D. Assim, nesta secção provámos que

$$\mathcal{S}(D) \subset \mathcal{A}(D) \subset H(D).$$

De seguida mostraremos que, de facto, estes 3 conjuntos coincidem. Iremos igualmente provar que, com o produto usual de séries, estas igualdades tornam-se isomorfismos de anéis.

1.4. Séries e o teorema de Taylor

DEFINIÇÃO. Se f é infinitamente diferenciável em z_0 a sua série de Taylor em z_0 é a série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n .$$

PROPOSIÇÃO. *Se* f *é analítica em* $\mathbb{D}(z_0, r)$, $r > 0$, *então* f *coincide com a sua série de Taylor, e o raio de convergência desta série é maior ou igual a* r.

DEMONSTRAÇÃO. Observe-se que no decorrer da demonstração da Proposição 1.2 provou-se que a derivada da série $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ se pode escrever como $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(z-z_0)^{n-1}$, série que tem o mesmo raio de convergência que $f(z)$. Note-se ainda que $f(z_0) = a_0$, $f'(z_0) = a_1$ e derivando mais uma vez $f''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)(z-z_0)^{n-2}$ logo $f''(z_0) = 2a_2$. Continuando desta forma obtemos a seguinte proposição cuja demonstração é deixada ao leitor. $\square$

1.4.1. Analiticidade das funções holomorfas. A ideia da prova do próximo teorema envolve cálculo integral, mas apenas ao longo de circunferências, que são fáceis de parametrizar, pelo que apenas teremos que usar resultados elementares da teoria do integral de Riemann em intervalos compactos de $\mathbb{R}$.

TEOREMA. *Se* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *é holomorfa em* Ω, *então* f *é analítica em* Ω.

DEMONSTRAÇÃO. Seja f diferenciável em $z_0 \in \Omega$. Para provar que f é analítica em z_0 podemos supor novamente que $z_0 = 0$. Seja $R > 0$ tal que o disco $\mathbb{D}(0, R)$ está contido em Ω e seja $r \in]0, R[$. Vamos definir, para $z \in \mathbb{D}(0, r)$ fixo, a função $g : [0, 1] \to \mathbb{C}$ através da expressão seguinte.

$$g(s) = \int_0^{2\pi} \frac{f\left((1-s)z + sre^{it}\right) - f(z)}{re^{it} - z} re^{it} dt.$$

A função integranda é diferenciável em s e $t \in [0, 2\pi]$, por hipótese. Logo g é uma função diferenciável em $[0, 1]$ e, para $s \neq 0$:

$$g'(s) = \int_0^{2\pi} f'\left((1-s)z + \lambda re^{it}\right) re^{it} dt = \int_0^{2\pi} F_s'(t) dt = F_s(2\pi) - F_s(0) = 0,$$

onde $F_s(t) = \frac{1}{si} f\left((1-s)z + sre^{it}\right)$ para $s \neq 0$. Como $g(0) = 0$, e $g'(s) = 0$ para $s \neq 0$, conclui-se que $g(s) \equiv 0$ no intervalo $s \in [0,1]$. Assim $g(1) = 0$ o que implica:

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it}) \frac{re^{it}}{re^{it} - z} dt = f(z) \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it} - z} dt. \tag{1.4.1}$$

O quociente em ambos os membros pode-se desenvolver em série geométrica

$$\frac{re^{it}}{re^{it} - z} = \frac{1}{1 - \frac{z}{re^{it}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(re^{it})^n},$$

válida porque $|z| < r$. Assim:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{(re^{it})^n} dt \right) z^n &= \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} f(re^{it}) \frac{z^n}{(re^{it})^n} dt = \int_0^{2\pi} f(re^{it}) \frac{re^{it}}{re^{it} - z} dt = \\ &= f(z) \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it} - z} dt = f(z) \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(re^{it})^n} dt = \\ &= f(z) \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(re^{it})^n} = 2\pi f(z). \end{aligned}$$

Aqui, a troca do integral com o somatório é justificada pelo facto de f ser limitada em $[0, 2\pi]$ e todas as funções $f(re^{it})(re^{it})^{-n}$ serem integráveis neste intervalo. Como o últmo integral é nulo para $n > 0$ e é igual a 2π se $n = 0$, a última série reduz-se ao primeiro termo: $f(z)2\pi$. Concluimos, portanto que f é analítica pois para $z \in \mathbb{D}(0, r)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{em que} \qquad a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{(re^{it})^n} dt.$$

□

1.4.2. O teorema de Taylor. Os resultados anteriores podem assim ser resumidos no seguinte enunciado, o célebre Teorema de Taylor. Note-se que sendo Ω um aberto em $\mathbb{C}$, o seu complemento é um fechado $C := \mathbb{C} \setminus \Omega$. Assim, se C é não vazio, a distância de um ponto $z_0 \in \Omega$ a C tem um mínimo global (sendo a distância uma função contínua num compacto não vazio da forma $\overline{\mathbb{D}(z_0, R)} \cap C$). Essa distância define o maior disco aberto $\mathbb{D}(z_0, R)$ contido em Ω.

Teorema. *[Taylor] Seja f diferenciável numa região Ω, $z_0 \in \Omega$ e seja $\mathbb{D}(z_0, R)$ o maior disco aberto contido em Ω. Então f é analítica em $\mathbb{D}(z_0, R)$. Alem disso, $f(z)$ coincide com a sua série de Taylor, em $\mathbb{D}(z_0, R)$,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n .$$

Em particular, o raio de convergência desta série é R. Temos também a seguinte representação integral das derivadas de f:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{(re^{it})^n} dt.$$

Note-se que este resultado não tem análogo no caso de funções diferenciáveis de uma variável real. Estes 2 últimos teoremas completam as identificações prometidas, isto é, temos:

$$\mathcal{S}(D) = \mathcal{A}(D) = H(D),$$

para qualquer disco $D = \mathbb{D}(z_0, r)$.

Exemplo. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

É fácil de verificar que f é infinitamente diferenciável em $\mathbb{R}$, e que no ponto $x = 0$, todas as derivadas de f se anulam. Assim, a sua série de Taylor é zero. Portanto, f não coincide com a sua série de Taylor em nenhuma vizinhança da origem. Esta "patologia" pode entender-se, do ponto de vista da análise complexa, verificando simplesmente que a função $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$ não é holomorfa em $z = 0$ (mais precisamente, não se pode extender de forma a ser holomorfa em $z = 0$).

1.4.3. Fórmulas de Cauchy.

Corolário. *As derivadas de todas as ordens de uma função $f \in H(\mathbb{D}(z_0, R))$ podem ser calculadas através de*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it} + z_0)}{(re^{it})^n} dt \qquad (\text{ com } n \geq 0 \text{ e } r \in]0, R[)$$

Em particular, para $n = 0$ obtemos:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it} + z_0) dt$$

o que mostra que o valor de uma função holomorfa depende somente dos seus valores numa circunferência $z_0 + re^{it}$ contida na sua região de holomorfia.

1.4.4. Desigualdades de Cauchy.

Corolário. *Se $f \in H(\Omega)$ e $\mathbb{D}(z_0, R) \subset \Omega$, então*

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{n!}{R^n} M_R$$

onde $M_R = \max_{t \in [0, 2\pi]} \left| f(z_0 + Re^{it}) \right|$.

Demonstração. O resultado segue da estimativa:

$$\begin{aligned} \left| f^{(n)}(z_0) \right| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it} + z_0)}{(Re^{it})^n} dt \right| &\leq \frac{n!}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} \left| f(Re^{it} + z_0) \right| dt \\ &\leq \frac{n!}{2\pi R^n} 2\pi M_R = \frac{n!}{R^n} M_R. \end{aligned}$$

□

Exemplo. Finalizamos esta subsecção com duas consequências importantes do Teorema de Taylor, que manifestam claras diferenças em relação à análise real.

1.4.5. O teorema de Liouville. A primeira é o teorema de Liouville, sem dúvida um resultado que contraria a intuição adquirida com funções de variável real.

DEFINIÇÃO. Uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ diz-se inteira se é holomorfa em todo $\mathbb{C}$, isto é, se $f \in H(\mathbb{C})$.

TEOREMA. ***(Liouville):*** *Uma função inteira e limitada é constante.*

DEMONSTRAÇÃO. Por hipótese $f \in H(\mathbb{C})$ e $|f| \leq M$. Pelas desigualdades de Cauchy, temos $\left|f^{(n)}(0)\right| \leq \frac{n!}{R^n}M$, mas $f \in H(\mathbb{D}(0,R))$ para todo $R > 0$. Logo podemos fazer R tão grande quanto quisermos o que implica $f^{(n)}(0) = 0 \; \forall n \geq 1$. Como $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$, $\forall z \in \mathbb{C}$, concluimos que $f(z) = f(0)$, $\forall z \in \mathbb{C}$. □

A segunda é o teorema das singularidades de Riemann, passo essencial para a classificação de singularidades levada a cabo no próximo capítulo.

1.4.6. O teorema da remoção das singularidades de Riemann.

TEOREMA. *Seja Ω uma região, $z_0 \in \Omega$ uma singularidade isolada de $f(z)$. Se f é holomorfa e limitada em $\Omega \setminus \{z_0\}$ então f pode ser extendida a uma função holomorfa em toda a região Ω.*

DEMONSTRAÇÃO. Podemos assumir que $z_0 = 0 \in \Omega$ e escrevemos $f(z) = \sum a_n z^n$ de acordo com o Teorema de Taylor, num certo disco D. Como $f(z)$ é limitada em D a função $g(z) = zf(z)$ tem limite igual a zero quando $z \to 0$. Pelo que g é contínua em Ω. Isto significa que a função $h(z) = z^2 f(z) = zg(z)$ é holomorfa em Ω porque, sendo naturalmente holomorfa em $\Omega \setminus \{z_0\}$ temos que $h'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{zg(z)-0}{z} = g(0) = 0$. Uma vez que $h(0) = h'(0) = 0$, podemos escrever $h(z) = a_0 z^2 + a_1 z^3 + \cdots$, sendo uma uma série convergente em D, ou seja, $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ em D, o que implica que f é holomorfa também em $z = 0$. □

Em conclusão, neste capítulo definimos funções diferenciáveis, holomorfas e analíticas, e mostrámos que estas noções são equivalentes em qualquer região do plano complexo. Em particular, podemos ver os elementos do anel $H(\Omega)$ como funções ou como séries, de acordo com as necessidades. Vimos também alguns exemplos de funções diferenciáveis (nalguma região) e relacionámos raio de convergência com domínio de diferenciabilidade.

1.5. Exercícios

1.1 Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa tal que $\Im f(z) = 4$. Mostre que f é constante. Se o domínio de f fôr $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, a mesma conclusão é válida? Justifique.

1.2 (a) Determine uma função f, analítica em $\mathbb{C}$, tal que

$$\Re f(x+iy) = e^{2x}\cos 2y + x^2 - y^2 + 1$$

(b) Determine $f'(\frac{\pi i}{2})$.

CAPíTULO 2

Cálculo Integral no Plano Complexo

Neste capítulo, vamos introduzir o cálculo integral no plano complexo e desenvolver os seus métodos fundamentais. Em particular, abordamos os teoremas de Cauchy e o conhecido teorema dos resíduos, bem como algumas das suas aplicações. Começamos com as séries de Laurent e classificação de singularidades isoladas.

2.1. Séries de Laurent e Singularidades Isoladas

Tal como as funções polinomiais se generalizam para séries de potências, as funções racionais têm uma generalização: as séries de Laurent.

Definição de série de Laurent. Como vimos, uma série de potências convergente está naturalmente associada a um disco, o seu disco de convergência. Mais geralmente, a uma série de Laurent convergente podemos naturalmente associadar um anel, como veremos.

Definição. Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r_1 < r_2 \in [0, \infty]$. Um anel centrado em z_0 e de raios r_1 e r_2 é o conjunto

$$\mathbb{A}(z_0; r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}.$$

Como casos particulares temos $\mathbb{A}(z_0; 0, r)$, que é um disco perfurado, também denotado por $\mathbb{D}^*(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$ e $\mathbb{A}(0, 0, \infty) = \mathbb{C}^*$.

Definição. Uma série de Laurent centrada em z_0 é uma série da forma:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

Assim, uma série de Laurent é a soma da sua parte regular $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ com a sua parte principal $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$. Como anteriormente, convém distinguir o caso das séries de Laurent formais, em que a região de convergência é no máximo um ponto, do caso contrário, que serão chamadas séries de Laurent convergentes.

Convergência das séries de Laurent.

Teorema. *Seja $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ uma série de Laurent convergente. Então, existem $r_1 < r_2 \in [0, +\infty]$ tais que a série é uniformemente convergente em $\mathbb{A}(z_0; r_1, r_2)$ e diverge em $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{A}(z_0; r_1, r_2)}$. Além disso, esta série define uma função diferenciável no anel $\mathbb{A}(z_0; r_1, r_2)$.*

Demonstração. De acordo com o Teorema 1.2, a parte regular $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge num certo disco $\mathbb{D}(z_0, r_2)$ com $r_2 \in]0, +\infty]$. Por outro lado, a parte principal $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ é uma série de potências positivas na variável $w = \frac{1}{z-z_0}$. Logo, converge quando $w \in \mathbb{D}(0, \frac{1}{r_1})$ para certo $r_1 \in]0, +\infty]$, ou seja, para $|w| < \frac{1}{r_1}$ que equivale a $|z - z_0| > r_1$, o complemento de um disco fechado no plano z. Uma vez que a soma das duas partes converge para algum valor de z, temos que $r_2 > r_1$. Assim, a série dada converge na intersecção das duas regiões, isto é, para $r_1 < |z - z_0| < r_2$. A demonstração que a série define uma função diferenciável é análoga ao caso analítico. □

Tal como no caso das séries de potências não negativas, o recíproco também se verifica.

TEOREMA. *Dada uma função $f(z)$ diferenciável num anel $\mathbb{A}(z_0; r_1, r_2)$, existe uma série de Laurent centrada em z_0, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$, tal que*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad \text{em } \mathbb{A}(z_0; r_1, r_2).$$

Alem disso, temos:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

para qualquer $r \in [r_1, r_2]$.

Singularidades isoladas.

DEFINIÇÃO. Seja f uma função diferenciável num disco perfurado $\mathbb{D}^*(z_0, r)$ centrado em z_0. Então diz-se que f tem uma singularidade isolada em z_0 ou que z_0 é uma singularidade isolada de f.

Classificação das singularidades isoladas. Se uma função $f(z)$ é holomorfa num disco perfurado $\mathbb{D}^*(z_0, r)$, podemos escrever a sua série de Laurent na seguinte forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n},$$

onde $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$ é a sua parte principal.

DEFINIÇÃO. A singularidade z_0 é chamada:

- Removível se a parte principal é 0,
- Pólo de ordem m, se a parte principal é $\sum_{n=1}^{m} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$, com $b_m \neq 0$,
- Essencial, se a parte principal não é uma série finita, ou seja, se para qualquer $N > 0$ existe $m > N$ com $b_m \neq 0$.

Note-se que a definição de singularidade removível é consistente com o teorema das singularidades removíveis de Riemann.

Os pólos e as singularidades essenciais têm comportamentos fundamentalmente distintos. Mais precisamente, consideremos $f \in H(\mathbb{D}^*(z_0, r))$ e a seguinte função auxiliar, para $n \geq 0$ inteiro, $\varphi_n(z) = (z - z_0)^n f(z)$. Assim, temos o seguinte resultado de classificação:

TEOREMA. *Seja f diferenciável num disco perfurado $\mathbb{D}^*(z_0, r)$, e $\varphi_n(z)$ a família de funções definidas acima, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Então, temos:*
(1) z_0 é uma singularidade removível se e só se $\lim_{z\to z_0} \varphi_0$ existe,
(2) z_0 é um pólo de ordem n se e só se $\lim_{z\to z_0} \varphi_n(z)$ existe e é não nulo,
(3) z_0 é uma singularidade essencial se e só se $\lim_{z\to z_0} \varphi_n(z)$ não existe para nenhum $n \in \mathbb{N}$.

DEMONSTRAÇÃO. ... □

2.2. Integração no plano complexo

Seja $[a, b]$ um intervalo na recta real ($a < b$).

DEFINIÇÃO. Um caminho (no plano complexo) é uma aplicação $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ seccionalmente regular, isto é, tal que $\gamma'(t)$ existe excepto para um número finito de valores de $t \in [a, b]$, e rectificável, isto é, verificando $\int_a^b |\gamma'(t)|\ dt < +\infty$. Note-se que, sendo $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, temos $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ e $|\gamma'(t)|^2 = x'(t)^2 + y'(t)^2$. Uma curva $\Gamma \subset \mathbb{C}$ é a imagem de um caminho, isto é um conjunto tal que existe um caminho $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ com $\gamma([a, b]) = \Gamma$. Neste caso, diz-se que γ é uma parametrização de Γ.

OBSERVAÇÃO. Naturalmente, existem múltiplas parametrizações de uma única curva Γ. No entanto, para simplificar alguns enunciados, frequentemente abusaremos terminologia e identificaremos um caminho com a respectiva curva.

DEFINIÇÃO. Os dois extremos de um caminho $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ são o seu ponto inicial $\gamma(a)$ e o seu ponto final $\gamma(b)$. Um caminho (ou a respectiva curva) diz-se fechado se os seus extremos coincidem. O caminho inverso a um dado caminho $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, é o caminho $\tilde{\gamma} : [-b, -a] \to \mathbb{C}$ definido por $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(-t)$, pelo que ambos definem a mesma curva, mas percorrida em sentido contrário. Em particular, o ponto inicial de $\tilde{\gamma}$ é o ponto final de γ e vice-versa.

OBSERVAÇÃO. Muitas vezes, ao considerarmos uma dada curva Γ, indicamos os seus extremos de forma explícita, dizendo por exemplo: "Γ é uma curva com ponto inical z_0 e ponto final z_1"; neste caso, uma parametrização de Γ, para além de ser um caminho $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ tal que $\gamma([a, b]) = \Gamma$, deve verificar adicionalmente $\gamma(a) = z_0$ e $\gamma(b) = z_1$. Da mesma forma, podemos falar da curva inversa a uma dada curva.

EXEMPLO. 2.2 Um caminho que parametriza a circunferência unitária $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, é, por exemplo $\gamma(t) = e^{it}$ com $t \in [0, 2\pi]$. Naturalmente, $\sigma(t) = e^{2\pi it}$, $t \in [0, 1]$; $\eta(t) = e^{it}$, $t \in [-\pi, \pi]$, e $\nu(t) = e^{-2\pi it}$, $t \in [0, 1]$ parametrizam a mesma circunferência, o último caminho sendo o único percorrido no sentido horário. Estes exemplos ilustram a importância de indicar sempre o domínio de definição do caminho.

2.2 Seja $\gamma : [0, 1]$ definida por $\gamma(t) = \cos\left(\frac{1}{t}\right)$, $\gamma(0) = 0$. Temos que γ é seccionalmente regular, pois é contínua para $t \neq 0$, mas não é rectificável, como o leitor poderá verificar.

DEFINIÇÃO. Dado um caminho $\gamma : [a, b] \to \Omega$ e uma função contínua $f : \Omega \to \mathbb{C}$ (ou seccionalmente contínua e limitada), definimos o integral de f ao longo de γ (ou integral de f em γ) como

$$\int_\gamma f := \int_a^b f(\gamma(t))\ \gamma'(t)\ dt.$$

Por vezes, e de modo a recordar os termos envolvidos nesta definição, escrevemos também $\int_\gamma f(z)dz$ em lugar de $\int_\gamma f$.

OBSERVAÇÃO. Note-se que o integral do segundo membro é um integral de Riemann uma vez que a função integranda $f(\gamma(t))\gamma'(t)$ é seccionalmente contínua e limitada e a região de integração é o intervalo compacto $[a, b]$.

Algumas operações em curvas são especialmente relevantes. Um caminho constante da forma $\gamma(t) = z_0$ para todo $t \in [a, b]$, representa uma curva que consiste num só ponto: z_0. Sendo $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ um caminho com ponto inicial $\gamma(a)$ e ponto final $\gamma(b)$, o caminho

PROPOSIÇÃO. *O integral verifica as seguintes propriedades:*
(1) Linearidade relativa à função integranda;
(2) Aditividade relativa à concatenação de curvas;
(3) Independência da parametrização;
(4) Troca de sinal ao inverter o caminho.

DEMONSTRAÇÃO. ... □

2.3. O teorema fundamental do cálculo

TEOREMA. *Seja $F \in H(\Omega)$. Então, para qualquer curva $\gamma \subset \Omega$, temos:*

$$\int_\gamma F'(z)\ dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

DEMONSTRAÇÃO. Usamos essencialmente o teorema fundamental do cálculo para funções de uma variável real. □

DEFINIÇÃO. Seja Ω uma região em $\mathbb{C}$. Uma função contínua $f : \Omega \to \mathbb{C}$ diz-se primitivável em Ω se existe uma outra função F, diferenciável em Ω, tal que $F' = f$ em Ω. Neste caso, a função F chama-se uma primitiva de f em Ω.

É fácil de verificar que, sendo Ω um conjunto conexo, quaisquer duas primitivas F_1 e F_2, da mesma função f diferem por uma constante aditiva.

Como consequência do teorema de Taylor, vemos que se f é primitivável em Ω, então é diferenciável (e analítica) em Ω. Vejamos que o recíproco também é válido, mas apenas localmente.

Comecemos por verificar que qualquer função contínua cujos integrais em curvas fechadas suficientemente pequenas se anulam, é uma função primitivável. Se R é um rectângulo fechado, designamos por ∂R a curva que define a sua fronteira, percorrida no sentido directo.

Para abreviar, dizemos que γ é uma curva rectangular se é a composição de curvas horizontais ou verticais.

TEOREMA. *[Morera] Seja f contínua numa região Ω. Se para todo rectângulo fechado $R \subset \Omega$, contido em Ω, temos $\int_{\partial R} f(z)\ dz = 0$, então f é primitivável em Ω. Em particular, $f \in H(\Omega)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Basta considerar rectângulos suficientemente pequenos, pois diferenciabilidade é uma propriedade local. Assim, podemos supor que $\Omega = \mathbb{D}(z_0, r)$ é um disco em torno de $z_0 \in \Omega$, e definimos

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(z)\ dz,$$

onde γ_z é qualquer curva rectangular com início em z_0 e fim em $z \in \mathbb{D}(z_0, r)$. Uma vez que $\int_{\partial R} f(z)\ dz = 0$ para qualquer rectângulo $R \subset \mathbb{D}(z_0, r)$, esta função está bem definida. Assim, calculamos, para $h \in \mathbb{C}$,

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(w)\ dw,$$

em que o integral acima é calculado ao longo de uma curva rectangular entre z e $z+h$. Assim, temos a estimativa

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_{[z,z+h]}[f(w)-f(z)]\;dw\right| \\ &\leq \frac{1}{|h|}|h|\max_{w\in[z,z+h]}|f(w)-f(z)|,\end{aligned}$$

pelo que o limite que define $F'(z)$ existe e iguala $f(z)$, como pretendido. Assim, f é primitivável em Ω, pelo que também é holomorfa em Ω. □

Corolário. *Se $f(z)$ é contínua em Ω e $\int_\gamma f(z)\;dz=0$ para toda a curva fechada $\gamma\subset\Omega$, então f é holomorfa em Ω.*

Demonstração. Se $\int_\gamma f(z)\,dz=0$ para toda a curva fechada $\gamma\subset\Omega$, então $\int_{\partial R} f(z)\,dz=0$ para qualquer rectângulo fechado $R\subset\Omega$. □

Podemos assim, resumir a relação entre primitivas e integrais.

Teorema. *Seja f contínua em Ω. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(1) f é primitivável em Ω.
(2) $\int_\gamma f(z)\;dz$ só depende dos pontos inicial e final de γ em Ω.
(3) $\oint_\gamma f(z)\;dz=0$ para qualquer curva fechada γ em Ω.
Qualquer uma das condições implica $f\in H(\Omega)$.

Demonstração. Supondo que f é primitivável em Ω e que $F(z)$ é uma sua primitiva, e que γ é uma qualquer curva de z_0 a z_1 temos, pelo teorema fundamental do cálculo:

$$\int_\gamma f(z)\;dz=F(z_1)-F(z_0),$$

pelo que (1) implica (2) e (3). Supondo agora que $z_0\in\Omega$ e que os integrais de f se anulam para todas as curvas fechadas, defina-se para cada $z\in\Omega$:

$$F(z):=\int_{\gamma_z}f(z)\;dz,$$

onde γ_z é uma curva qualquer em Ω, com início em z_0 e fim em z. Para provar que F está bem definida, seja κ_z uma outra curva em Ω com início em z_0 e fim em z. Assim, a composição de uma com a inversa da outra, $\kappa_z^{-1}*\gamma_z$ é uma curva com início e fim em z_0 pelo que é uma curva fechada e temos:

$$\int_{\kappa_z^{-1}*\gamma_z}f(z)\;dz=\int_{\gamma_z}f(z)\;dz-\int_{\kappa_z}f(z)\;dz=0,$$

pelo que o valor de $F(z)$ está bem definido. Finalmente, calculamos, para $h\in\mathbb{C}$,

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=\frac{1}{h}\int_z^{z+h}f(w)\;dw$$

em que o integral acima pode ser considerado como um integral ao longo de $[z,z+h]$, o segmento de recta entre z e $z+h$ (pois fazendo h suficientemente pequeno, este segmento está em Ω). Assim, a mesma estimativa do teorema de Morera, permite concluir que o limite que define $F'(z)$ existe e é igual a $f(z)$, como pretendido. Assim, f é primitivável em Ω, terminando a demonstração de que (3) implica (1). É também fácil provar que (2) implica (3), pois podemos decompor uma curva fechada em duas, obtendo o resultado. □

Este teorema está em perfeita analogia com o que se passa em análise real.

Por outro lado, podemos perguntar: sendo $f \in H(\Omega)$ é verdade que $f(z)$ tem primitiva em Ω?

A resposta é não. Notavelmente, consideremos o caso $f(z) = \frac{1}{z}$. Como sabemos, $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, mas esta função não é primitivável em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Há pelo menos duas formas de ver isto: se existisse primitiva, ela seria dada localmente, pela função $F(z) = \log(z)$, no entanto, como sabemos, esta função não é contínua em $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Outra forma de verificar esta situação é através do cálculo:

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0,$$

o que, usando o Teorema 2.3, mostra que $f(z)$ não admite primitiva.

Na próxima secção, estudando o Teorema de Cauchy, estamos interessados em saber, dada uma região Ω e uma função holomorfa $f \in H(\Omega)$ em que condições temos $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ para curvas fechadas γ em Ω.

2.4. O Teorema de Cauchy-Goursat

Vamos aqui demonstrar uma versão fraca do teorema de Cauchy, válida apenas para regiões convexas, mas que já é extremamente útil para múltiplas aplicações da análise complexa. Para aplicações do cálculo integral convém por vezes considerar funções holomorfas em conjuntos fechados.

Definição. Seja $Q \subset \mathbb{C}$ um conjunto fechado. Dizemos que f é holomorfa em Q se existe uma região Ω, que contém Q, onde podemos definir f (mais precisamente, uma extensão de f) de forma a que $f \in H(\Omega)$.

Começamos por um lema.

Lema. *(Goursat) Seja f holomorfa num rectângulo R. Então $\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0$.*

Demonstração. Decompor o rectângulo em rectângulos cada vez mais pequenos. □

Teorema. *(De Cauchy) Seja Ω uma região convexa, de forma a que a sua fronteira é uma curva fechada γ (regular por troços). Se f é holomorfa em $\overline{\Omega}$, então $\int_\gamma f(z)dz = 0$.*

Demonstração. Seguir o Lang. Primeiro mostra-se para curvas próximas e para curvas rectangulares, usando o Teorema de Goursat. □

2.5. O Teorema dos Resíduos

Quando uma função tem apenas um número finito de singularidades isoladas, podemos encontrar o valor dos integrais ao longo de curvas de Jordan (simples e fechadas). Para o cálculo destes integrais contam apenas as singularidades na componente interior.

Teorema. *(dos resíduos) Seja γ uma curva de Jordan com componente interior D. Se f é uma função holomorfa em γ e em D, à excepção de um número finito de singularidades isoladas $z_1, ..., z_n$ em D, então:*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathsf{Res}(f, z_k)$$

2.6. Exercícios

2.1 Determine todos os possíveis desenvolvimentos de $\frac{1}{z^3+i}$ em série de potências de z (isto é, centrados em $z_0 = 0$), indicando o anel em que cada um é válido.

2.2 Considere a função $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1} + \dfrac{-1+\cos z}{z^2}$.

(a) Determine e classifique todas as singularidades de f, calculando os respectivos resíduos.

(b) Determine o desenvolvimento de Laurent de f na região definida por $|z| > 1$.

(c) Calcule os integrais

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)\ dz \quad \text{e} \quad \oint_{|z-\frac{i}{2}|=2} f(z)\ dz,$$

onde as curvas são percorridas uma vez no sentido negativo.

2.3 Calcule $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{\cos z}{z+3i}\ dz$, onde $\Gamma(t) = 1 + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

2.4 Seja $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x + 0i : x \leq 0\}$. Calcule o integral

$$\int_\gamma \log z\ dz$$

onde γ é um caminho em Ω com início em 1 e fim em i.

2.5 Seja $D_R = \{z \in \mathbb{C} : \Im z \geq 0, |z| \leq R\}$, com $R > \sqrt{2}$. Calcule os integrais

$$\oint_{\partial D_R} \frac{e^{iz}}{z^2+2}\ dz, \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+2}\ dx.$$

2.6 Aplique convenientemente o teorema dos resíduos para mostrar que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(3+2\sin(\theta))^2}\ d\theta = \frac{6\pi}{5^{3/2}}.$$

CAPíTULO 3

Funções Meromorfas e a Esfera de Riemann

Neste capítulo, vamos definir e estudar as funções meromorfas. Esta é uma classe de funções muito importante, e consiste nas funções numa dada região Ω que são holomorfas em todos os pontos de Ω à excepção de um conjunto discreto de singularidades, que são todas pólos.

Um exemplo fundamental de funções meromorfas consiste nas funções racionais, que são quocientes de funções polinomiais. Assim, começaremos pelo estudo dos polinómios e de algumas das suas propriedades algébricas.

3.1. Funções Meromorfas

Seja Ω uma região de $\mathbb{C}$, isto é, um subconjunto aberto, conexo e não vazio de $\mathbb{C}$.

Definição. Uma função f diz-se meromorfa em Ω se f é holomorfa em Ω à excepção de singularidades isoladas que são todas pólos ou singularidades removíveis de f. Mais precisamente, f é meromorfa em Ω se f é holomorfa em $\Omega \setminus S$ onde S é um subconjunto *discreto* de Ω e $z \in S$ se e só se z é um pólo ou uma singularidade removível de f. Usamos a notação $M(\Omega)$ para indicar o conjunto das funções meromorfas na região Ω.

Recorde que S é um subconjunto discreto de Ω se para cada ponto $z_0 \in S$, existe um disco centrado em z_0, $D = \mathbb{D}(z_0, r)$ suficientemente pequeno, de tal forma que $S \cap D = \{z_0\}$, ou seja $S \cap \mathbb{D}^*(z_0, r)$ é vazio. Assim, qualquer singularidade de uma função meromorfa é isolada.

Exemplo. (1) Qualquer função holomorfa em Ω é meromorfa em Ω (Aqui o conjunto S é vazio).

(2) Para qualquer $z_0 \in \mathbb{C}$, a função dada por $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n}$, para $z = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ e $n \in \mathbb{N}$, é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Uma vez que z_0 é um pólo de ordem n, temos que $f(z)$ é meromorfa em $\mathbb{C}$, isto é $f \in M(\mathbb{C})$.

(3) Se $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ onde $p(z)$ é um polinómio não identicamente nulo é meromorfa em $\mathbb{C}$, e holomorfa se e só se $p(z)$ é não constante.

3.1.1. O corpo das funções meromorfas. O conjunto das funções meromorfas numa região Ω denota-se por $M(\Omega)$. Pelo exemplo (1) acima, temos $H(\Omega) \subset M(\Omega)$.

Anteriormente, vimos que $H(\Omega)$ é um anel, com a operações usuais de soma e produto de funções. Também em $M(\Omega)$ podemos somar, subtrair e multiplicar funções. Além disso, dadas duas funções meromorfas $f, g \in M(\Omega)$, sendo $g(z)$ não indenticamente nula, o quociente $f(z)/g(z)$ é uma função meromorfa em Ω.

Proposição. *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ uma região. $M(\Omega)$ é um corpo que contém o anel $H(\Omega)$.*

Demonstração. Basta ver o caso do quociente f/g, com $f, g \in M(\Omega)$ e com $g \neq 0$. Neste caso, basta verificar que, quando f e g são representados por séries de Laurent, válida num certo disco perfurado, então podemos escrever $f(z)/g(z)$ também como série de Laurent, válida num certo disco perfurado, eventualmente menor que o inicial, mas certamente não vazio. □

3.1.2. Definição de ordem de um ponto.

Definição. Seja f uma função meromorfa (não identicamente nula) em Ω e $z_0 \in \Omega$. A ordem de f em z_0, que se denota por $\mathrm{ord}_{z_0}(f)$, é o índice do primeiro termo não nulo da expansão em série de Laurent num disco perfurado em torno de z_0. Mais precisamente se $f(z) = \sum_{k \geq m} a_k(z - z_0)^k$ é a expansão referida, onde $a_m \neq 0$, então $\mathrm{ord}_{z_0}(f) := m \in \mathbb{Z}$.

Proposição. *Seja $f \in M(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ e $k = \mathrm{ord}_{z_0} f$. Temos:*
(1) $k > 0$ se e só se f é holomorfa em z_0 e $f(z_0) = 0$
(2) $k = 0$ se e só se f é holomorfa em z_0 e $f(z_0) \neq 0$
(3) $k < 0$ se e só se z_0 é pólo de f de ordem $-k$.

Demonstração. Exercício. □

Proposição. *Sejam $f, g \in M(\Omega)$ e $z_0 \in \Omega$. Então:*
(1) $\mathrm{ord}_{z_0}(fg) = \mathrm{ord}_{z_0}(f) + \mathrm{ord}_{z_0}(f)$
(2) $\mathrm{ord}_{z_0}(\frac{f}{g}) = \mathrm{ord}_{z_0}(f) - \mathrm{ord}_{z_0}(f)$
(3) $\mathrm{ord}_{z_0}(f \pm g) \geq \min\{\mathrm{ord}_{z_0}(f), \mathrm{ord}_{z_0}(g)\}$

Demonstração. Exercício. □

3.2. Polinómios e o Teorema Fundamental da Álgebra

Definição. Como sabemos, um polinómio de grau n é uma função p que se pode escrever na forma

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0,$$

onde $a_i \in \mathbb{C}$ e $a_n \neq 0$. Os polinómios podem-se somar e multiplicar, pelas regras usuais, formando assim um anel comutativo designado usualmente por $\mathbb{C}[z]$. Uma raíz do polinómio p é um número complexo z_0, tal que $p(z_0) = 0$. Vamos denotar por $\deg p \in \mathbb{N}_0$ o grau de um polinómio não nulo $p(z) \in \mathbb{C}[z]$.[1]

3.2.1. Teorema fundamental da Álgebra. O resultado mais importante sobre polinómios de váriavel complexa é o chamado teorema fundamental da álgebra, que afirma que qualquer polinómio não constante possui uma raíz em $\mathbb{C}$.

Teorema. *[Gauss] Qualquer polinómio complexo não constante tem uma raíz complexa. Por outras palavras, dado um polinómio de grau $n \geq 1$, $p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) = 0$.*

Para provar este teorema vamos usar duas propriedades simples dos polinómios que também são válidas, como veremos mais tarde, para as funções analíticas.

3.2.2. Polinómios não constantes são ilimitados. Intuitivamente, os polinómios não constantes são ilimitados, facto que se verifica igualmente para os polinómios com coeficientes reais. Mais precisamente temos:

Lema. *Se $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ é um polinómio de grau $n > 0$, então $|p(z)| \to \infty$ quando $|z| \to \infty$.*

Demonstração. Basta usar a desigualdade triangular, e o facto de que a função $\frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}$ tende para zero quando $z \to \infty$. Em particular, existe um $R > 0$ tal que $|\frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}| < \frac{|a_n|}{2}$, sempre que $|z| > R$ (note-se que $a_n \neq 0$). Assim, temos:

[1]Por consistência com certos resultados, ao polinómio nulo atribui-se grau -1.

$$\begin{aligned}|p(z)| &= |z^n|\left|a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right| \geq |z^n|\left(|a_n| - \left|\frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right|\right) \geq \\ &\geq |z^n|\left(|a_n| - \frac{1}{2}|a_n|\right) = \frac{1}{2}|a_n||z|^n \text{ para todo o } z \text{ tal que } |z| > R.\end{aligned}$$

Isto é suficiente para concluir o pretendido. □

Este lema pode ser reescrito numa forma análoga à do teorema de Liouvile (2.10).

Corolário. *Se $p(z)$ é um polinómio limitado então ele é constante.*

3.2.3. Princípios do módulo máximo e mínimo para polinómios. Os polinómios verificam também os princípios do módulo máximo e do módulo mínimo, outra propriedade que embora seja simples de demonstrar, já não é tão intuitiva, dado que não é válida para os polinómios reais.

Definição. Seja Ω uma região. Dizemos que uma função $h : \Omega \to \mathbb{R}$, tem um máximo (resp. mínimo) local em $z_0 \in \Omega$, se existe uma vizinhança $V \subset \Omega$ de z_0 tal que $h(z_0) \geq h(z)$ (resp. $h(z_0) \leq h(z)$) para todo $z \in V$.

Proposição. *Dado um polinómio não constante p, a função $h(z) := |p(z)|$, $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ não tem máximos locais, e não tem mínimos locais em pontos z_0 onde $p(z_0) \neq 0$.*

Demonstração. Podemos supor, sem perda de generalidade, que o máximo ou mínimo local é atingido em $z_0 = 0$ (porque se $|p(z)|$ tem máximo/mínimo em z_0 então $|p(z+z_0)|$ tem máximo/mínimo em 0). Assim, seja $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_m z^m + a_0$, $a_k = |a_k| e^{i\alpha_k}$ (onde a_m, $0 < m \leq n$, é o primeiro coeficiente não nulo a seguir ao a_0) e $z = re^{i\theta}$. O caso $m = n$, sendo mais simples, é deixado ao leitor. Supondo $m < n$, dado que $a_{m+1} z + \cdots + a_n z^{n-m}$ tende para zero quando $z \to 0$, existe um certo $\varepsilon > 0$ tal que $|a_{m+1} z + \cdots + a_n z^{n-m}| < |a_m|$ para todo z com $|z| < \varepsilon$. Isto equivale a ter $|a_{m+1} z^{m+1} + \cdots + a_n z^n| < |a_m z^m|$ sempre que $0 < |z| < \varepsilon$.

Esta desigualdade permite provar ambos os princípios, pelo que vamos somente deduzir o princípio do mínimo. Assim, para $0 < |z| < \varepsilon$, e assumindo $a_0 \neq 0$,

$$\begin{aligned}&|a_0 + a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1} + \cdots + a_n z^n| \leq |a_0 + a_m z^m| + |a_{m+1} z^{m+1} + \cdots + a_n z^n| < \\ &< |a_0 + a_m z^m| + |a_m z^m| = \left||a_0| e^{i\alpha_0} + |a_m| r^m e^{i\alpha_m} e^{mi\theta}\right| + |a_m z^m| = \\ &= |a_0| - |a_m| r^m + |a_m| r^m = |a_0| = |p(z_0)|\end{aligned}$$

desde que agora tomemos θ de tal modo a que $\alpha_0 = \alpha_m + m\theta + \pi$. Assim, em qualquer vizinhança de 0, $|p(z)|$ não atinge um mínimo, a menos que $a_0 = 0$. Neste último caso o ponto $z_0 = 0$ é uma raíz de $p(z)$, a função $|p(z)|$ não tem mínimos locais, excepto nas raízes de $p(z)$. □

Como consequência destes princípios, vemos que, para qualquer polinómio não constante, a função $h(z) = |p(z)|$ não apresenta nenhum máximo em nenhuma região $\Omega \subset \mathbb{C}$, e só apresenta mínimos quando essa região contém uma ou mais raízes de $p(z)$. Por outro lado, como consequência do teorema de Weierstrass para funções contínuas em conjuntos compactos, temos o seguinte enunciado, cuja demonstração se deixa ao leitor (note-se que um polinómio é uma função contínua).

Corolário. *Se $p(z)$ é um polinómio não constante, e $K \subset \mathbb{C}$ é um subconjunto compacto, então os máximos da função $h(z) = |p(z)|$ (restringida a K) encontram-se na fronteira ∂K de K; os mínimos de h encontram-se também em ∂K quando $p(z)$ não tem raízes no interior de K.*

3.2.4. Demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra. Podemos agora provar o teorema fundamental da álgebra, que foi demonstrado por primeira vez por Gauss:

TEOREMA. *Qualquer polinómio não constante possui pelo menos uma raíz em* $\mathbb{C}$.

DEMONSTRAÇÃO. De acordo com o Lema 3.2.2, seja R tal que $|p(z)| > |a_0|$, sempre que $|z| \geq R$. Assim, se por exemplo considerarmos o disco fechado $\overline{\mathbb{D}(R)}$, sabemos, pelo teorema de Weierstrass que a função *contínua* $h(z) = |p(z)| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, tem um mínimo em $\overline{\mathbb{D}(R)}$. Este mínimo não está na circunferência fronteira, porque $|p(z)| > |a_0| = p(0)$, sempre que $z \in C(R)$. Assim, o mínimo estará no interior do disco, o que pelo princípio do mínimo (Proposição 3.2.3), implica que existe um z_0, tal que $p(z_0) = 0$. $\square$

3.2.5. Factorização de polinómios. Outra propriedade bem conhecida dos polinómios é o chamado algoritmo de divisão de polinómios, ou algoritmo de Euclides. Dados dois polinómios $p(z)$ e $q(z)$, verificando $\deg p > \deg q$, existem outros dois polinómios $d(z)$ (o divisor) e $r(z)$ (o resto), de forma a que se verifique

$$p(z) = d(z)q(z) + r(z).$$

Os polinómios $d(z)$ e $r(z)$ são únicos se impusermos que $\deg r < \deg q$. Dizemos que um polinómio $q(z)$ divide $p(z)$ se o resto da divisão de $p(z)$ por $q(z)$ é zero.

Usando o algoritmo de divisão de polinómios, existe uma forma alternativa de escrever o Teorema Fundamental da Álgebra. Seja $p(z)$ um polinómio de grau $n > 0$, que admite um zero em z_0. Então, pelo algoritmo de divisão de polinómios, podemos escrever $p(z) = (z - z_0)q(z)$, onde $q(z)$ é um polinómio de grau $n - 1$. Assim, podemos demonstrar por indução, o seguinte resultado:

TEOREMA. *Qualquer polinómio de grau* $n > 0$ *pode se escrever na forma:*

$$p(z) = a(z - z_1) \dots (z - z_n),$$

onde $z_1, \cdots, z_n$ *são raízes de* $p(z)$, *(não necessáriamente distintas) e* $a \in \mathbb{C}^*$. *Em alternativa podemos escrever*

$$p(z) = a(z - w_1)^{n_1} \cdots (z - w_k)^{n_k}$$

onde $a \in \mathbb{C}^*$, $w_1, ..., w_k$ *são as* $k \leq n$ *raizes distintas de* p *e* $n_1 + ... + n_k = n$.

Outra propriedade importante dos polinómios é o facto de que, dados quaisquer polinómios $p(z)$ e $q(z)$, existe um polinómio (único, se insistirmos em que o coeficiente de maior grau seja igual a 1), chamado o maior divisor comum de $p(z)$ e $q(z)$, denotado por $\gcd(p, q)$ que verifica as seguintes propriedades.

PROPOSIÇÃO. *Seja* $d(z) = gcd(p(z), q(z))$. *Então,* $d(z)$ *é o único polinómio mónico (coeficiente de maior grau igual a 1) que verifica: (i)* $d(z)$ *divide* $p(z)$ *e* $q(z)$*; (2) Se* $h(z)$ *divide* $p(z)$ *e* $q(z)$ *então* $h(z)$ *divide* $d(z)$.

3.2.6. Teorema de Gauss-Lucas. Vamos agora provar o teorema de Gauss-Lucas que relaciona, de uma forma interessante, a localização dos zeros de $p(z)$ com os zeros da sua derivada. Como sabemos os polinómios são funções inteiras e a derivada do produto de duas funções é dada pela regra usual: $(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$. Assim, prova-se por indução que, para um polinómio de grau n escrito na forma $p(z) = a(z-z_1) \dots (z-z_n)$, (com os pontos z_i não necessariamente distintos) $p'(z)$ é um polinómio de grau $n-1$ e que

$$p'(z) = a \sum_{i=1}^{n} (z - z_1) \cdots (z - z_i)' \cdots (z - z_n) = a \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} (z - z_j) = p(z) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z - z_i} \right)$$

Recorde-se que e $\mathbb{H} = \{z : \Im(z) > 0\}$ designam o semiplano superior formado pelos complexos com parte imaginária positiva.

LEMA. *Se os zeros de $p(z)$ se encontram no fecho do semiplano superior $\overline{\mathbb{H}}$, então os zeros de $p'(z)$ também estão em $\overline{\mathbb{H}}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $p(z) = a(z - z_1) \cdots (z - z_n)$ com $z_k \in \overline{\mathbb{H}}(\mathrm{Im} z_k \geq 0)$. Temos, então: $\dfrac{p'(z)}{p(z)} = \dfrac{1}{z - z_1} + \cdots + \dfrac{1}{z - z_n}$. Se $\mathrm{Im} z < 0$ temos $\mathrm{Im}(z - z_k) = \mathrm{Im} z - \mathrm{Im} z_k < 0$, logo $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z - z_k}\right) > 0$ e portanto $\mathrm{Im}\left(\frac{p'(z)}{p(z)}\right) > 0$ o que implica $p'(z) \neq 0$ para todo o $z \in \mathbb{C} \backslash \overline{\mathbb{H}}$. □

O resultado anterior tem uma interessante interpretação geométrica, que se deixa como exercício ao leitor. (Exercício **??**)

TEOREMA. *(Teorema de Gauss-Lucas): Os zeros de $p'(z)$ estão no menor polígono convexo e fechado que contém os zeros de $p(z)$.*

EXERCÍCIO. Prove que um polinómio não constante define uma função aberta.

3.3. Funções Racionais

3.3.1. Definição de função racional. Vamos agora considerar as funções mais simples a seguir aos polinómios.

DEFINIÇÃO. Uma função racional é o quociente de dois polinómios em que o denominador não é o polinómio identicamente nulo. Assim, uma função racional é da forma

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

onde q tem grau ≥ 0 [2]. Note-se que f não define unicamente p e q, pois podemos multiplicar p e q pelo mesmo polinómio não nulo, obtendo a mesma função racional. Assim, sem perda de generalidade, e salvo expressa menção em contrário, *assumiremos sempre que f é uma fracção irredutível, ou seja, p e q não contém raizes em comum.*

Uma vez que o conjunto dos zeros de $q(z)$ é finito, este forma um subconjunto discreto de $\mathbb{C}$. Desta forma, temos.

PROPOSIÇÃO. *Uma função racional é uma função meromorfa em todo o plano complexo.*

DEMONSTRAÇÃO. De facto, as singularidades de $f(z) = p(z)/q(z)$ são as raizes de q, um conjunto finito, e qualquer uma delas é um pólo de f, como facilmente se verifica. □

3.3.2. Polinómios e funções racionais. Naturalmente os polinómios, sendo funções inteiras, são casos muito particulares de funções racionais. Reciprocamente, é igualmente fácil de verificar que uma função racional $f(z) = p(z)/q(z)$ escrita na forma irredutível, é holomorfa se e só se $q(z)$ é constante, ou seja se e só se é um polinómio.

LEMA. *Uma função racional é holomorfa em $\mathbb{C}$ (ie, não tem singularidades) se e só se é um polinómio.*

DEMONSTRAÇÃO. Exercício. □

[2]Como mencionado antes, convenciona-se que o polinómio nulo tem grau -1.

3.3.3. Definição de Função racional própria e simples.

DEFINIÇÃO. Uma função racional própria é uma função racional $p(z)/q(z)$ em que $\delta p < \delta q$. Uma função racional simples é uma função racional própria da forma $p(z)/(z-z_0)^k$, para certos $z_0 \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{N}$ ($\delta p < k$), ou seja, uma função racional própria que é holomorfa em $\mathbb{C}$ excepto num único ponto. Por vezes, usam-se também as expressões *fracção própria* e *fracção simples*, respectivamente.

LEMA. *(1) Se $f(z)$ é uma fracção própria, então $|f(z)| \to 0$ quando $|z| \to +\infty$.*
(2) Se $f_1(z)$ e $f_2(z)$ são fracções próprias, então $f_1(z)f_2(z)$ e $f_1(z) \pm f_2(z)$ também são fracções próprias.

DEMONSTRAÇÃO. Exercício. □

3.3.4. Decomposição das funções racionais. As funções racionais podem decompor-se usando o algoritmo de divisão dos polinómios.

PROPOSIÇÃO. *Qualquer função racional se pode escrever como a soma de um polinómio e de uma função racional própria.*

DEMONSTRAÇÃO. Algoritmo de divisão de polinómios. □

3.3.5. Decomposição das funções racionais próprias. Um resultado muito importante, que permite a simplificação de muitos problemas que envolvem funções racionais é o da decomposição em fracções simples.

PROPOSIÇÃO. *Seja $f(z) = \frac{q(z)}{p(z)}$ uma função racional própria e seja $p(z) = (z - z_1)^{k_1} \cdots (z - z_l)^{k_l}$ a decomposição do denominador em factores (sem perda de generalidade). Então podemos escrever $f(z)$ como soma de funções racionais simples*

$$f(z) = \frac{q_1(z)}{(z-z_1)^{k_1}} + \cdots + \frac{q_l(z)}{(z-z_l)^{k_l}}.$$

Assim, para cada $j = 1, ..., l$ o grau de q_j é estritamente inferior a k_j. Em particular, $\frac{q_j(z)}{(z-z_j)^{k_j}}$ é a parte principal de $f(z)$ num disco perfurado em torno de z_j.

DEMONSTRAÇÃO. Há duas demonstrações que vale a pena apresentar: uma é puramente algébrica e outra usa a análise complexa. Primeiro, vejamos a demonstração algébrica para o caso de $p(z)$ com duas raízes distintas. O caso geral é análogo. Assim, seja $p(z) = (z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}$, $\deg p = k_1 + k_2$, em que z_1 e z_2 são pontos distintos de $\mathbb{C}$ e $q(z)$ um polinómio de grau $< \deg p$. Como $z_1 \neq z_2$, os polinómios $(z-z_1)^{k_1}$ e $(z-z_2)^{k_2}$ têm gcd igual a 1, pelo que, aplicando a identidade de Bézout (ver Apêndice) existem polinómios $q_1(z)$ e $q_2(z)$ tais que

$$q_1(z)(z-z_2)^{k_2} + q_2(z)(z-z_1)^{k_1} = q(z). \tag{3.3.1}$$

Uma vez que $q(z)$ não tem raízes em comum com $p(z)$, z_j não é raíz de $q_j(z)$, $j = 1, 2$. Dividindo por $p(z)$ obtemos uma soma de fracções irredutíveis:

$$\frac{q(z)}{p(z)} = \frac{q_1(z)}{(z-z_1)^{k_1}} + \frac{q_2(z)}{(z-z_2)^{k_2}}. \tag{3.3.2}$$

Note-se, no entanto, que os polinómios $q_1(z)$ e $q_2(z)$ que satisfazem a Equação (3.3.1) não são únicos, podendo-se efectuar as substituições seguintes, para qualquer polinómio $r(z)$:

$$\begin{aligned} q_1(z) &\mapsto q_1(z) + r(z)(z-z_1)^{k_1} \\ q_2(z) &\mapsto q_2(z) - r(z)(z-z_2)^{k_2} \end{aligned}$$

Desta forma, tomando o resto da divisão de q_1 por $(z-z_1)^{k_1}$, podemos assumir que temos uma solução da Equação (3.3.1) com $\deg q_1 < k_1$. Finalmente, como $\deg q < \deg p$, temos na Equação (3.3.2) duas fracções próprias, pelo que a terceira também o é (ver o Lemma 3.3.3(2)).

Façamos agora a demonstração analítica, que identifica imediatamente cada termo com a parte principal correspondente. Uma vez que nenhum das raízes $z_1, ..., z_l$ de $p(z)$ é raíz de $q(z)$, vemos que $\mathrm{ord}_{z_j} f = -k_j$, pelo que podemos escrever a parte principal de $f(z)$ em torno de z_j como $\frac{q_j(z)}{(z-z_j)^{k_j}}$. Seja

$$h(z) = f(z) - \frac{q_1(z)}{(z-z_1)^{k_j}} - \cdots - \frac{q_l(z)}{(z-z_l)^{k_l}}.$$

É fácil de ver que $h(z)$ é holomorfa em todos os pontos (nos pontos z_j tem singularidades removíveis) pelo que é inteira. Por outro lado, $h(z)$ é uma fracção própria, pois é soma de fracções próprias. Mas uma fracção própria que é holomorfa tem que ser zero, como se verifica facilmente. □

Exemplo. Represente em frações simples

$$\frac{z^2}{(z^2+4)(z-3)}$$

O seguinte enunciado resume o essencial dos resultados nesta secção.

Teorema. *Qualquer função racional própria $q(z)/p(z)$ se pode escrever como a soma de fracções simples. Cada uma destas fracções simples é a parte principal do desenvolvimento em série de Laurent em torno de uma das raízes de $p(z)$.*

3.4. A esfera de Riemann

Há uma interpretação geométrica do conceito de função meromorfa que torna esta definição mais natural. Para isso, introduzimos a esfera de Riemann.

3.4.1. A esfera de Riemann.

Definição. A esfera de Riemann é o conjunto $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ com a topologia em que uma base para as vizinhanças de ∞ são os complementos de $\overline{\mathbb{D}(0,R)}$. Usando a notação $\mathbb{D}(\infty, r) = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}(0, \frac{1}{r})}$, podemos então dizer, como habitualmente, que $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ é aberto se e só se para todo o ponto $z_0 \in \Omega$ existe $R > 0$ tal que $\mathbb{D}(z_0, R) \subset \Omega$.

Observação. Isto significa que $f : \Omega \to \mathbb{C}_\infty$ é contínua em z_0 se f é contínua no aberto $\Omega \setminus f^{-1}(\infty)$ e se $\lim_{z \to z_0} |f(z_0)| = \infty$ sempre que $f(z_0) = \infty$.

3.4.2. Equivalência entre funções meromorfas e funções com valores na esfera de Riemann.

Proposição. *Uma função meromorfa f em Ω define uma função contínua $\Omega \to \mathbb{C}_\infty$. Reciprocamente, uma função contínua $f : \Omega \to \mathbb{C}_\infty$ com $f \in H(\Omega \setminus f^{-1}(\infty))$ e $f^{-1}(\infty)$ discreto em Ω, define uma função meromorfa em Ω.*

Demonstração. Exercício. □

3.4.3. Funções meromorfas no infinito. Como vimos, as funções racionais são meromorfas em $\mathbb{C}$. Uma vez que as fracções próprias tendem para 0 no infinito, é natural extender o domínio deste tipo de funções para conter o ponto do infinito na esfera de Riemann.

DEFINIÇÃO. Seja f holomorfa numa região do tipo $\{z \in \mathbb{C} : \; |z| > R\}$. Diz-se que f tem uma singularidade removível, um pólo de ordem k ou uma singularidade essencial em ∞ se a função $g(z) := f(\frac{1}{z})$ tem uma singularidade removível, um pólo de ordem k ou uma singularidade essencial, respectivamente, em 0.

Desta forma, podemos extender a noção de função meromorfa a este tipo de funções.

DEFINIÇÃO. Uma função f diz-se meromorfa no infinito se a função $g(z) := f(1/z)$ é meromorfa no ponto $z = 0$. Analogamente, a ordem de f no infinito define-se como $\mathrm{ord}_\infty f = \mathrm{ord}_0 g$. Uma função f diz-se meromorfa na esfera de Riemann se é meromorfa em $\mathbb{C}$ e é meromorfa também no ponto $\infty \in \mathbb{C}_\infty$.

Podemos ver que as funções racionais, sendo funções meromorfas em $\mathbb{C}$, podem considerar-se, de forma natural, como aplicações da esfera de Riemann em si mesma.

LEMA. *Uma função racional é meromorfa em* $\mathbb{C}_\infty$.

DEMONSTRAÇÃO. Exercício (use a Proposição 3.4.2). □

3.4.4. Funções meromorfas na esfera de Riemann. Vamos agora classificar as funções meromorfas em $\mathbb{C}_\infty$. Para isso, o seguinte resultado topológico é fundamental.

LEMA. *A esfera de Riemann é um conjunto compacto.*

DEMONSTRAÇÃO. Exercício. □

A compacidade da esfera de Riemann permite mostrar o recíproco do Lema 3.4.3.

PROPOSIÇÃO. *Qualquer função meromorfa em* $\mathbb{C}_\infty$ *é uma função racional.*

DEMONSTRAÇÃO. Exercício. □

3.4.5. Projecção estereográfica. A esfera de Riemann pode ser obtida de três formas distintas, todas elas relevantes. Anteriormente, definimos a esfera de Riemann como $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dando uma topologia a este conjunto.

Podemos caracterizá-la como a esfera usual em $\mathbb{R}^3$, à qual demos uma noção de estrutura complexa.

LEMA. *A aplicação* $\phi : S^2 \to \mathbb{C}_\infty$ *é um homeomorfismo.*

3.4.6. A recta projectiva. Podemos também caracterizar a esfera de Riemann como o espaço dos subespaços vectoriais de dimensão 1 em $\mathbb{C}^2$, ou seja, como a "recta projectiva complexa".

LEMA. *A aplicação* $\eta : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{C}_\infty$ *é um homeomorfismo (biholomorfismo).*

3.5. Transformações de Möbius

3.5.1. Definição de transformação de Möbius.

DEFINIÇÃO. Uma transformação de Möbius é uma função racional da forma $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $ad - bc \neq 0$.

Note-se que a condição $ad - bc \neq 0$ é equivalente à condição de que pelo menos um dos polinómios $az + b$ e $cz + d$ é não constante, e que não têm nenhuma raíz em comum. Desta forma, uma transformação de Möbius é uma função holomorfa em todo o plano complexo, à excepção do ponto $z_0 = -\frac{d}{c}$. No entanto, é fácil extender esta função a uma aplicação $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, que denotamos com a mesma letra, não havendo perigo de confusão. Para esta extensão, definimos $T(-\frac{d}{c}) = \infty$ e $T(\infty) = \frac{a}{c}$, onde se pode convencionar, de forma não ambígua, que quando $c = 0$, temos $\frac{d}{c} = \frac{a}{c} = \infty$.

As seguintes poropriedades são úteis na caracterização destas transformações.

Proposição. *Uma transformação de Möbius é uma aplicação bijectiva e contínua da esfera de Riemann nela própria.*

Demonstração. A fórmula para a transformação inversa é fácilmente obtida através de
$$w = \frac{az+b}{cz+d} \Longleftrightarrow z = \frac{1}{ad-bc}\frac{dz-b}{-cz+a}.$$
Para a bijectividade, resta provar que isto é ainda uma função de $\mathbb{C}_\infty$ para si próprio, o que se deixa ao leitor. A contínuidade em $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ é clara. Neste ponto e em ∞, o resultado segue dada a topologia que colocámos em $\mathbb{C}_\infty$. □

Como vimos, a fórmula da transformação inversa é bastante simples no caso em que $ad - bc = 1$. Assim, quando escrevemos $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $ad - bc = 1$, dizemos que T está escrita na forma normalizada. Multiplicando numerador e denominador pelo mesmo coeficiente apropriado, vemos que qualquer transformação de Möbius se pode escrever na forma normalizada.

Proposição. *Uma transformação de Möbius é uma aplicação conforme de $\mathbb{C}_\infty$ em $\mathbb{C}_\infty$.*

Demonstração. Uma vez mais, para pontos de $\mathbb{C}\setminus\{-\frac{d}{c}\}$ o resultado segue da fórmula da derivada:
$$T'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0.$$
Nos restantes pontos é também fácil verificar, mediante definição apropriada de aplicação conforme (ver exercício). □

Denotamos o conjunto das aplicações de Möbius por Mob e vamos caracterizá-lo.

3.5.2. A aplicação canónica $GL(2, \mathbb{C}) \to Mob$. Seja $GL(2, \mathbb{C})$ o grupo das matrizes 2×2 invertíveis de entradas complexas, e $SL(2, \mathbb{C})$ o subgrupo das matrizes invertíveis que têm determinante igual a 1. Seja
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}),$$
e seja τ_A a transformação de Möbius dada por $\tau_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

3.5.3. O grupo das transformações de Möbius.

Teorema. *O conjunto das transformações de Möbius forma um grupo, isomorfo a $PSL(2, \mathbb{C})$ (ou $PGL(2, \mathbb{C})$) que é, por definição, o quociente de $SL(2, \mathbb{C})$ pelo seu centro.*

Demonstração. Consideremos a aplicação τ definida em $SL(2, \mathbb{C})$, por $\tau(A) := \tau_A$, para $A \in SL(2, \mathbb{C})$. Podemos provar que $\tau : SL(2, \mathbb{C}) \to Mob$ é sobrejectiva, que é um homomorfismo de grupos e que o seu núcleo é
$$\ker(\tau) = \pm I$$

onde I é a matriz identidade. Assim, pelo teorema do isomorfismo em grupos, temos que $Mob = SL(2, \mathbb{C})/\pm I$ grupo este que é, por definição $PSL(2, \mathbb{C})$. □

3.5.4. Acção de Mob na esfera de Riemann. Este grupo actua na esfera de Riemann, $\mathbb{C}_\infty$ de forma natural. Podemos ver que esta acção preserva a união das rectas com as circunferências do plano.

Definição. Uma circunferência de $\mathbb{C}_\infty$ é uma circunferência em $\mathbb{C}$ ou uma recta em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Assim, uma circunferência de $\mathbb{C}_\infty$ é um conjunto compacto, sendo um conjunto fechado em $\mathbb{C}_\infty$.

Proposição. *A imagem de uma circunferência de $\mathbb{C}_\infty$ por uma transformação de Möbius é novamente uma circunferência de $\mathbb{C}_\infty$.*

Demonstração. Basta provar que qq transformação de Möbius é a composição de transformações de 3 tipos: translacções, dilatações e inversão. Todas estas preservam circunferências de $\mathbb{C}_\infty$.

Supor $c = 0$. Então $T(z) = \frac{az+b}{d}$. Supor $c \neq 0$. Então, $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}z + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{\beta}{z + \frac{d}{c}} + \alpha$, pela decomposição em fracções simples (de facto, $\alpha = \frac{a}{c}$ e $\beta = \frac{bc-ad}{c^2} \neq 0$). □

3.5.5. Pontos fixos. Qualquer transformação de Möbius não trivial tem apenas 1 ou 2 pontos fixos.

Teorema. *Seja $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ uma tranformação de Möbius distinta da identidade, escrita na forma normalizada. Então T tem um ponto fixo, caso $a + d = \pm 2$, ou dois pontos fixos, no caso contrário.*

3.5.6. Tripla transitividade. Este resultado permite mostrar que a acção de Mob em $\mathbb{C}_\infty$ é transitiva, e além disso, uma transformação de Möbius é completamente determinada pela acção em triplos de pontos distintos.

Proposição. *A acção de Mob em $\mathbb{C}_\infty$ é 3-transitiva; isto é, dados dois triplos (z_1, z_2, z_3) e (w_1, w_2, w_3) de pontos distintos ($z_i \neq z_j$ e $w_i \neq w_j$, sempre que $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$) existe uma única transformação de Möbius $M(z)$ tal que $M(z_1) = w_1$, $M(z_2) = w_2$ e $M(z_3) = w_3$.*

Teorema. *Dados três pontos distintos da esfera de Riemann, z_1, z_2, z_3, existe uma única transformação de Möbius que envia z_1 em ∞, z_2 em 0 e z_3 em 1.*

Demonstração. Essa transformação de Möbius é dada por $T(z) = \frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\frac{z_2-z}{z_1-z} = [z_1, z_2; z_3, z] = [z_3 \ {z_1 \atop z_2} \ z]$. Para ver que só há uma transformação que fixa ∞, 0 e 1, usa-se a proposição da tripla transitividade. □

3.5.7. A razão cruzada.

Definição. A razão cruzada dos complexos z_1, z_2, z_3, z_4 é o número $[z_1, z_2; z_3, z_4] = \frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\frac{z_2-z_4}{z_1-z_4}$. É fácil de ver que a razão cruzada está bem definida sempre que z_1, z_2 e z_3 são pontos distintos em $\mathbb{C}_\infty$ (mas z_4 pode ser igual a um desses três pontos).

Proposição. *A razão cruzada é invariante pelas tranformações de Möbius.*

Demonstração. Façamos a demonstração para $T(z) = az + b \in Mob$. Assim,

$$[T(z_1), T(z_2); T(z_3), T(z_4)] = \frac{T(z_1) - T(z_3)}{T(z_2) - T(z_3)} \frac{T(z_2) - T(z_4)}{T(z_1) - T(z_4)} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} = [z_1, z_2; z_3, z_4].$$

Para $J(z) = 1/z$, temos

$$[J(z_1), J(z_2); J(z_3), J(z_4)] = \frac{\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_3}}{\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_3}} \frac{\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_4}}{\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_4}} = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} = [z_1, z_2; z_3, z_4].$$

Como qualquer transformação de Möbius é composição destas, o resultado segue. □

3.5.8. Famílias interesantes de transformações de Möbius.

Lema. *As transformações de Möbius que preservam apenas o ∞ são da forma $T(z) = az + b$ com $a \neq 0$. As transformações que preservam 0 e ∞ são da forma $T(z) = \lambda z$ com $\lambda \neq 0$.*

Demonstração. Fácil. □

Proposição. *As transformações de Möbius que preservam o "equador da esfera de Riemann", isto é $\mathbb{R}_\infty := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, são da forma $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com a, b, c, d reais (e claro, $ad - bc \neq 0$).*

Demonstração. Seja $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ uma transformação de Möbius com coeficientes a, b, c, d reais. Então $f(x) \in \mathbb{R}_\infty$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, e $f(\infty) = \frac{a}{c} \in \mathbb{R}_\infty$, donde f preserva $\mathbb{R}_\infty$. Reciprocamente, se f preserva $\mathbb{R}_\infty$, também f^{-1} preserva $\mathbb{R}_\infty$ (pela bijectividade), pelo que existem $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}_\infty$ distintos tais que $f(x_1) = \infty$, $f(x_2) = 0$, $f(x_3) = 1$. Assim, usando a razão cruzada, f tem coeficientes reais. □

3.6. Exercícios

3.1 Sejam $p(z)$ e $q(z)$ polinómios.
  (a) Assumindo $\deg p < \deg q$, prove que o limite $\frac{p(z)}{q(z)}$, quando z tende para ∞, existe e é 0.
  (b) Mostre que $\deg(pq) = \deg(p) + \deg(q)$ e que $\deg(p \pm q) \leq \max\{\deg p, \deg q\}$.

3.2 Determine os pontos de máximo e de mínimo de $|p(z)|$ em $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ nos casos: (a) $p(z) = z - \frac{1}{2}$; (b) $p(z) = z^3 - z$.

3.3 Seja $p(z)$ um polinómio de grau $n \geq 2$ e $z_0 \in \mathbb{C}$.
  (a) Mostre que $p(z)$ tem n raízes distintas se e só se $p(z)$ e $p'(z)$ não têm uma raíz em comum.
  (b) Defina $I_{z_0} = \{q(z) \in \mathbb{C}[z] : \ q(z) \text{ tem uma raíz em } z_0\}$. Prove que I_{z_0} é um ideal maximal do anel $\mathbb{C}[z]$.

3.4 [Teorema de Lucas] Dado um polinómio $p(z)$, demonstre que os zeros de $p'(z)$ estão contidos no menor polígono convexo e fechado que contém os zeros de $p(z)$.

3.5 Mostre que, se $p(z)$ é um polinómio cujos zeros são todos reais, então o mesmo se passa com a sua derivada $p'(z)$. Prove que se os zeros de $p(z)$ têm módulo menor que 1, o mesmo se passa com $p'(z)$.

3.6 Sejam $p(z)$ e $q(z)$ dois polinómios de grau ≥ 1, cujos conjuntos de raízes R_p e R_q não se intersectam. Mostre que existem polinómios $r(z)$ e $s(z)$ tais que $r(z)p(z) + s(z)q(z) = 1$.

3.7 Sejam $z_1, ..., z_n$ pontos da esfera de Riemann e $m_1, ..., m_n$ números inteiros cuja soma é zero. Mostre que existe uma função racional $f(z)$ cujos zeros ou polos estão no conjunto $\{z_1, ..., z_n\}$ e tal que a ordem de $f(z)$ em z_j é precisamente m_j. É possível existir uma tal função se a soma dos m_j não for nula?

3.8 Mostre que a esfera de Riemann é um espaço topológico compacto. Prove que qualquer função meromorfa em $\mathbb{C}_\infty$ é uma função racional.

3.9 Se $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ é uma transformação de Möbius diferente da identidade, mostre que $T \circ T(z) = z$, para todo z, se e só se $a + d = 0$.

3.10 Uma função meromorfa $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$ diz-se holomorfa no ponto $\infty \in \mathbb{C}_\infty$ se $\mathrm{ord}_\infty f = \mathrm{ord}_0 h \geq 0$ onde $h(w) := f(\frac{1}{w})$; neste caso, a sua derivada em ∞ é definida por $f'(\infty) = h'(0)$. Mostre que uma transformação de Möbius $T(z)$ é holomorfa no ∞ se e só se $T(\infty) \neq \infty$, e neste caso, verifique que $T'(\infty) \neq 0$.

3.11 Seja T uma transformação de Möbius com um único ponto fixo $\alpha \in \mathbb{C}$. Mostre que existe $\beta \in \mathbb{C}$, tal que $\frac{1}{T(z)-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha} + \beta$. Prove que T é conjugada[3] a uma translação da forma $S(z) = z + 1$.

3.12 Prove que se T é uma transformação de Möbius com dois pontos fixos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, então existe $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, tal que $\frac{T(z)-\alpha}{T(z)-\beta} = \lambda \frac{z-\alpha}{z-\beta}$. Prove também que T é conjugada a uma função da forma $S(z) = az$. $(a \in \mathbb{C}^*)$.

3.13 Considere a transformação de Möbius T, tal que $T(0) = 2$, $T(1) = 1$, $T(-1) = \frac{5}{3}$. Quantos pontos fixos tem T em $\mathbb{C}_\infty$? Determine $T(C)$ onde C é a circunferência unitária $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

3.14 Mostre que $[z_1, z_2; z_3, z_4]$ é um número real se e só se os pontos z_1, z_2, z_3 e z_4 se encontram numa circunferência de $\mathbb{C}_\infty$.

3.15 Mostre que as transformações que preservam o semi-plano superior $\mathbb{H}$ são da forma $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc > 0$.

3.16 Seja $T(z) = \dfrac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha} z}$ uma transformação de Möbius, com $\alpha \in \mathbb{C}$. Quais os valores que α não pode tomar? Mostre que T preserva a circunferência unitária $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ e que, para $|\alpha| < 1$, $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

[3] Recorde que duas transformações de Möbius S e T dizem-se conjugadas se existir uma transformação de Möbius F tal que $S = F^{-1} \circ T \circ F$.

CAPíTULO 4

Teoria Local das Funções Holomorfas e Meromorfas

Vamos agora demonstrar vários resultados importantes, que constituem as propriedades locais fundamentais das funções holomorfas ou diferenciáveis.

4.1. O Teorema da Função Inversa e Isomorfismos Locais

Em primeiro lugar, devemos recordar as noções de função diferenciável, holomorfa e analítica (Ver Capítulo 1).

4.1.1. Isomorfismos locais. Vamos também introduzir a noção de invertibilidade local de funções.

Definição. Diz-se que $f \in H(\Omega)$ é um isomorfismo (analítico) local em $z_0 \in \Omega$ se existem vizinhanças $U \subset \Omega$ de z_0 e V de $w_0 := f(z_0)$ tal que $f|_U : U \to V$ é bijectiva e a função inversa $g : V \to U$ é também holomorfa.

Observação. (1) Note-se que a noção de isomorfismo local coincide com a noção usual de isomorfismo na categoria em que os objectos são regiões em $\mathbb{C}$ e os morfismos são aplicações holomorfas entre regiões.
(2) Veremos abaixo que não é necessário exigir que a função inversa seja holormorfa!

4.1.2. Teorema da função inversa. Podemos enunciar o teorema da função inversa que é inteiramente análogo ao correspondente teorema no caso real.

Teorema. *(Teorema da função inversa). Se $f \in H(\Omega)$ é conforme em $z_0 \in \Omega$, então f é um isomorfismo local em z_0. Além disso, sendo $w_0 = f(z_0)$, temos $(f^{-1})'(w_0) = 1/f'(z_0)$.*

Demonstração. Usar o teorema da função inversa para funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$. $\square$

Vamos agora ver que o recíproco do teorema da função inversa também é verdade. Ou seja, se f é um isomorfismo local em z_0, então $f'(z_0) \neq 0$.

4.1.3. A série binomial. Vamos necessitar da expansão em série da função binomial. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lema. *A função binomial $(1+z)^\alpha$ admite a expansão*

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n,$$

em que

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!},$$

e esta série converge para $z \in \mathbb{D} = \mathbb{D}(0,1)$.

Demonstração. Para ver a convergência, basta fazer o teste da razão $|a_n|/|a_{n+1}| = |(n+1)/(\alpha-n)|$ que converge para 1 quando $n \to \infty$. Para verificar o desenvolvimento em série, basta fazer as derivadas em $z = 0$. $\square$

PROPOSIÇÃO. *Sejam $f(w) = \sum_{n\geq 0} a_n w^n$ e $g(z) = \sum_{n\geq 1} b_n z^n$ (note que $b_0 = 0$) séries convergentes (raio de convergência positivo). Então a série obtida por composição*

$$h(z) := a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n \left(\sum b_k z^k\right)^n$$

converge absolutamente para $z \in \mathbb{D}(0,s)$, para certo $s > 0$, e verifica-se nesse disco, $h(z) = f(g(z))$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver Lang. Fazemos aqui apenas a demonstração que a função composição é analítica em $z = 0$. Note-se que a composição de funções holomorfas é holomorfa; para provar analiticidade, precisamos apenas de verificar diferenciabilidade em abertos. Como $g \in H(\mathbb{D}(0,r))$ para algum $r > 0$ e $f \in H(\mathbb{D}(0,r'))$ para certo $r' > 0$ (pois $g(0) = 0$), temos que $h := f \circ g$ é holomorfa em $\mathbb{D}(0,r) \cap g^{-1}(\mathbb{D}(0,r'))$. Como isto é um aberto em $\mathbb{D}(0,r)$, temos que existe $s > 0$ tal que $\mathbb{D}(0,s) \subset \mathbb{D}(0,r) \cap g^{-1}(\mathbb{D}(0,r'))$ e portanto, pelo Teorema de Taylor, $h = f \circ g$ é analítica em $\mathbb{D}(0,s)$. $\square$

EXEMPLO. Seja m inteiro positivo. Sabemos que $f(z) = (1+z)^{\frac{1}{m}} = \sum \binom{\frac{1}{m}}{n} z^n$, converge em $\mathbb{D}$. Seja $g(z)$ qualquer série convergente com $g(0) = 0$. Então $H(z) = f \circ g(z) = (1 + g(z))^{\frac{1}{m}} = \sum \binom{\frac{1}{m}}{n} g(z)^n$ é representada por uma série convergente com $H(0) = 1$; e temos $H(z) = 1 + h(z)$ com $(1 + h(z))^m = 1 + g(z)$.

4.1.4. Forma local e multiplicidade. Para isso, vejamos como escrever uma função holomorfa em torno de um ponto, em termos de isomorfismos locais.

PROPOSIÇÃO. *(Forma local). Seja $f \in H(\Omega)$, não constante em qualquer disco centrado em $z_0 \in \Omega$. Então existe uma vizinhança $U \subset \Omega$ contendo z_0, um inteiro $m \geq 1$ e uma aplicação holomorfa $\varphi(z) \in H(U)$, com $\varphi(z_0) = 0$ e $\varphi'(z_0) \neq 0$ tal que, para z em U:*

$$f(z) = f(z_0) + \varphi(z)^m.$$

DEMONSTRAÇÃO. Podemos assumir $z_0 = 0$. Como $f(z)$ é holomorfa em $0 = z_0 \in \Omega$, pelo teorema de Taylor, existe uma expansão em série

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z_0) + \sum_{n\geq 1} a_n z^n$$

válida para certo disco $\mathbb{D}(0,r)$. Como $f(z)$ é não constante neste disco, existe o menor natural $m \geq 1$ tal que $a_m \neq 0$. Então, podemos escrever

$$f(z) = f(z_0) + a_m z^m (1 + g(z))$$

onde $g(z)$ é holomorfa em $\mathbb{D}(0,r)$ com $g(0) = 0$. Pelo exemplo anterior, podemos escrever, com $\alpha^m = a_m$

$$f(z) = f(z_0) + (\alpha z)^m (1 + h(z))^m$$

para certa função holomorfa $h(z)$. Pondo $\varphi(z) = \alpha z(1 + h(z))$ temos o pretendido, pois $\varphi(0) = 0$ e

$$\varphi'(0) = \alpha \neq 0.$$

$\square$

OBSERVAÇÃO. Note-se que a função $\varphi(z)$ da Proposição anterior, é um isomorfismo local, pelo TFI.

DEFINIÇÃO. O número natural m que aparece nesta Proposição chama-se a multiplicidade da função $f(z)$ em z_0, e escreve-se $m = \mathrm{mult}_{z_0} f$.

4.1.5. Equivalência entre isomorfismo local e invertibilidade local. A forma local permite mostrar o seguinte recíproco do teorema da função inversa.

TEOREMA. *Se $f \in H(\Omega)$ verifica $f'(z_0) = 0$, $z_0 \in \Omega$, então f não é localmente invertível em z_0, isto é, não existem vizinhanças $U \subset \Omega$ contendo z_0 e V contendo $f(z_0)$ tais que $f : U \to V$ seja bijectiva.*

DEMONSTRAÇÃO. Usemos a forma local. Se f é isomorfismo local, temos que $m = 1$ (pois se $m > 1$ a função f não tem inversa local em z_0). Logo $f'(z_0) = \varphi'(z_0) \neq 0$ como queriamos provar. $\square$

COROLÁRIO. *Se f é um isomorfismo local em z_0, então $f'(z_0) \neq 0$.*

Desta forma, o teorema da função inversa diz que uma função holomorfa é isomorfismo local em z_0 sse $\mathrm{mult}_{z_0} f = 1$.

4.1.6. O teorema da aplicação aberta. A forma local tem também uma consequência topológica importante. Uma função $f : A \to B$ entre dois espaços topológicos diz-se aberta se $f(U)$ é um conjunto aberto para todo conjunto U aberto em A. O seguinte Lema é útil.

LEMA. *Seja m inteiro positivo. A função $h(z) = z^m$ é aberta, e é localmente invertível no ponto 0 se e só se $m = 1$.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $m = 1$ é obviamente aberta e localmente invertível. Se $m > 1$, então não é invertível (pois há sempre m raízes distintas), mas é ainda aberta, pois a imagem de um disco $\mathbb{D}(0, r)$ é o disco $\mathbb{D}(0, r^m)$. $\square$

TEOREMA. *(Aplicação aberta). Se $f \in H(\Omega)$ é não constante em todos os discos $D \subset \Omega$, então é aberta.*

DEMONSTRAÇÃO. Uma função é aberta sse para todo z_0 em Ω existe vizinhança aberta $U \subset \Omega$, tal que $f(U)$ é aberto em $f(\Omega)$. Seja $z_0 \in \Omega$ e U a vizinhança do teorema da forma local. Então $f(z) = (p \circ \varphi)(z)$ onde $p(z) = f(z_0) + z^m$ é um simples polinómio e φ é o isomorfismo local em z_0. Como tanto p como φ são abertas, $f(U)$ é um aberto. $\square$

4.1.7. Isomorfismos locais e globais. Usando o teorema da função inversa, podemos finalmente concluir o seguinte.

COROLÁRIO. *Se $f \in H(\Omega)$ e f é bijectiva então define um isomorfismo entre Ω e $f(\Omega)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Se f é holomorfa em Ω e $f'(z_0) \neq 0$ para certo z_0, então f não é bijectiva em torno de z_0. Logo, temos que $f'(z_0) \neq 0$ para todo $z_0 \in \Omega$. Assim, f é um isomorfismo local em todos os pontos de Ω, pelo que é um isomorfismo global! $\square$

4.1.8. Funções conformes. Fazemos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO. Diz-se que $f \in H(\Omega)$ é conforme em $z_0 \in \Omega$ se preserva angulos.

Como conclusão do nosso estudo, obtemos o seguinte.

COROLÁRIO. *As seguintes condições são equivalentes para $f \in H(\Omega)$: (1) f é conforme em z_0; (2) $f'(z_0) \neq 0$ (3) f é um isomorfismo local em z_0. (4) f é localmente invertível.*

Note-se que este resultado não se verifica para funções reais de variável real. Por exemplo, a função diferenciável $f(x) = x^3$, não tem inversa diferenciável na origem, mas é localmente invertível.

4.2. Princípio dos zeros isolados

Outra propriedade que advém do comportamento local das funções holomorfas é que o conjunto dos seus zeros é discreto.

TEOREMA. ***(Princípio dos zeros isolados)****: Se $f \in H(\Omega)$ é não constante e $f(z_0) = 0$, $z_0 \in \Omega$, então existe uma vizinhança de z_0, $V \subset \Omega$, onde o único zero de f é z_0.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $f(z_0) = 0$ e $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ num disco $\mathbb{D}(z_0, r) \subset \Omega$, então $a_0 = 0$ e, dado que f é não constante seja $m = \mathrm{mult}_{z_0} f \geq 1$. Então

$$\begin{aligned} f(z) &= \textstyle\sum_{n=m}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_m(z-z_0)^m + a_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \cdots = \\ &= (z-z_0)^m \left(a_m + a_{m+1}(z-z_0) + \cdots\right) = (z-z_0)^m g(z) \end{aligned}$$

onde $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n}(z-z_0)^n$, $g(z_0) = a_m \neq 0$. Como $g \in H(\mathbb{D}(z_0, r))$, $g(z)$ é contínua e existe uma vizinhança V de z_0 tal que $g(z) \neq 0$,$\forall z \in V$. Como o único zero de $(z-z_0)^m$ é em z_0, obtemos o pretendido. □

TEOREMA. *: Para $f \in H(\Omega)$ as seguintes afirmações são equivalentes:*
(1) $f \equiv 0$ *em* Ω
(2) $\exists a \in \Omega$ *tal que* $f^{(n)}(a) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$
(3) $Z_f = f^{-1}(0) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ *tem um ponto de acumulação em* Ω.

DEMONSTRAÇÃO. É imediato que (1) implica (2) e (3). Para provar que (3) $\Rightarrow$ (2) vamos supor que z_0 é um ponto de acumulação de $Z_f = f^{-1}(0)$ e que $z_k \to z_0$ é uma sucessão de zeros de f em $\Omega \setminus \{z_0\}$: Seja $m \in \mathbb{N}$ o primeiro natural tal que $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. Então $f(z) = \displaystyle\sum_{n=m}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = (z-z_0)^m g(z)$ com $g(z_0) \neq 0$. Como $(z_k - z_0)^m \neq 0$ e $f(z_k) = 0$ obtemos $g(z_k) = 0$ o que contradiz o facto de g ser contínua; logo podemos por $a = z_0$.

Para provar que (2) $\Rightarrow$ (1) seja $A = \left\{z \in \Omega : f^{(n)}(z) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}_0\right\}$. Por hipótese $A \neq \emptyset$. A é fechado porque se $z_k \to z$ ($z_k \in A$) então $f^{(n)}(z_k) = 0 \ \forall n \geq 0$ o que implica $f^{(n)}(z) = 0$ pela continuidade da $n-$ésima derivada de f; logo $z \in A$. A é também aberto porque se $z_0 \in A$ então $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ num certo disco $\mathbb{D}(z_0, r)$, e como $a_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = 0$, temos que $f(z) = 0$ para todo o $z \in \mathbb{D}(z_0, r)$; assim $\mathbb{D}(z_0, r) \subset A$. Como A é aberto, fechado e não vazio e Ω é conexo, $A = \Omega$. □

Considerando a função $h(z) = f(z) - g(z)$ e aplicando este teorema obtemos o chamado princípio da igualdade:

TEOREMA. ***(Princípio da igualdade)****: Sejam $f, g \in H(\Omega)$. $f(z) = g(z)$ $\forall z \in \Omega$, se e só se o conjunto $\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ tem um ponto de acumulação.*

4.3. Princípio do módulo máximo

Podemos agora provar o princípio do módulo máximo e o dos zeros isolados que são, no fundo, resultados válidos para as séries de potências convergentes.

TEOREMA. ***(Princípio do módulo máximo)****: Se $f \in H(\Omega)$ e $|f(z)|$ tem um máximo local em $z_0 \in \Omega$, então f é constante em Ω.*

Demonstração. Se $D := \mathbb{D}(z_0, R) \subset \Omega$ então podemos escrever a expansão

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n = f(z_0) + \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n,$$

válida para $z \in D \subset \Omega$. Supondo que f não é constante em D ($f(z) \neq a_0 = f(z_0)$), como vimos atrás, f é aberta, pelo que $f(D)$, a imagem de D contém um disco aberto $D' := \mathbb{D}(a_0, s) \subset f(D)$ centrado em $a_0 = f(z_0)$. Assim, a função $h(z) := |f(z)|$ verifica $h(z_1) > h(z_0) = |a_0|$ para certo $z_1 \in D'$. Assim, z_0 não é máximo local de $h(z)$ em D.

Provámos que se $|f|$ tem máximo local em z_0 então é constante igual a $f(z_0)$ num certo disco $D \subset \Omega$. Finalmente, pelo princípio da igualdade (Teorema 4.2), temos que $f(z)$ é constante em todo Ω, pois D tem pontos de acumulação. □

Este teorema tem a seguinte formulação que é muitas vezes útil. Se Ω é uma região limitada, o seu fecho é compacto e portanto, pelo teorema de Weiesstrass $|f(z)|$ tem um máximo absoluto em $\overline{\Omega}$. Se o máximo estiver em Ω então é um máximo local, e pelo teorema anterior f é constante. Assim, obtemos:

Corolário. *Se f é holomorfa e não constante numa região limitada Ω, o máximo de $|f(z)|$ em $\overline{\Omega}$ é atingido na fronteira de Ω.*

4.4. O teorema de Casoratti-Weierstrass

Recordemos que $z_0 \in \mathbb{C}$ é uma singularidade essencial de uma função $f(z)$ se existe um disco $\mathbb{D}(z_0, r)$ onde $f(z)$ é representada por uma série de Laurent (convergente nesse disco) cuja parte principal é infinita.

Teorema. *Seja Ω uma região e $z_0 \in \Omega$. Se z_0 é uma singularidade essencial de $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$ então a imagem de f é densa em $\mathbb{C}$. Isto é, $\mathbb{C} = \overline{f(\Omega \setminus \{z_0\})}$.*

Demonstração. Supor por contradição que existe $w \in \mathbb{C}$ que não é ponto de acumulação de $f(\Omega \setminus \{z_0\})$. Assim, existe disco centrado em w que não contém números da forma $f(z)$ com $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$. Ou seja, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - w| > \delta, \quad \forall z \in \Omega \setminus \{z_0\}.$$

Seja $g(z) = \frac{1}{f(z)-w}$ que é holomorfa em $\Omega \setminus \{z_0\}$. Por hipótese $|g(z)| = \frac{1}{|f(z)-w|} < \frac{1}{\delta}$ pelo que g é limitada em qualquer vizinhança de z_0. Assim, pelo teorema das singularidades removíveis de Riemann, g pode ser extendida a uma função $g \in H(\Omega)$. Podemos então escrever, num disco $\mathbb{D}(z_0, r)$

$$g(z) = (z - z_0)^m h(z)$$

com $h(z_0) \neq 0$ e $h \in H(\Omega)$. Assim, $\lim_{z\to z_0} \frac{(z_0-z)^m}{g(z)} = \frac{1}{h(z)}$ existe, o que implica que $\frac{1}{g(z)}$ tem um pólo de ordem m em z_0. Por outro lado, $\frac{1}{g(z)} = f(z) - w$ tem por hipótese uma singularidade essencial em z_0. □

Mais tarde veremos o teorema de Picard que afirma que muito mais é verdade: $f(\Omega \setminus \{z_0\})$ é de facto todo $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C} \setminus \{w\}$, se z_0 é singularidade essencial.

4.5. Exercícios

4.1 Seja f holomorfa em Ω, e $z_0 \in \Omega$. Suponha que $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ é uma expansão válida num certo disco $D \subset \Omega$. Mostre que $f^{(n)}$ é um isomorfismo local em z_0 se e só se $a_{n+1} \neq 0$.

4.2 Seja $f \in H(\Omega)$ e $z_0 \in \Omega$. Define-se a multiplicidade de f em z_0, $mult_{z_0} f$, pela igualdade $mult_{z_0} f = ord_{z_0}(f(z) - f(z_0))$. Mostre que $mult_{z_0} f \geq 1$ e que $mult_{z_0}(g \circ f) = mult_{z_0} f \cdot mult_{f(z_0)} g$, sempre que g é holomorfa numa região contendo $f(z_0)$.

4.3 Seja $F(z, w)$ uma função holomorfa de duas variáveis em Ω, isto é $F(z, w)$ é holomorfa, como função de $z \in \Omega$ quando $w \in \Omega$ está fixo, e o mesmo se passa com z e w trocados. Seja $A \subset \Omega$ um conjunto com um ponto de acumulação e suponha que $F(z, w) = 0$ para todo $z, w \in A$. Mostre que $F(z, w) = 0$ para todo $z, w \in \Omega$.

4.4 Seja Ω uma região em $\mathbb{C}$ e $f \in H(\Omega)$. Prove que se $\Re f$ ou $\Im f$ (partes reais e imaginárias de f) têm um máximo local num ponto $z_0 \in \Omega$, então $f(z)$ é constante em Ω.

4.5 (Lema de Schwarz) Seja f uma função holomorfa no disco unitário $\mathbb{D}$, com $f(0) = 0$ e $|f(z)| < 1$, para todo o $z \in \mathbb{D}$. Mostre que $g(z) = f(z)/z$ é uma função holomorfa em $\mathbb{D}$ e prove que $|f(z)| \leq |z|$ para todo o $z \in \mathbb{D}$.

4.6 Sejam f e g duas funções inteiras tais que $|f(z)| \leq |g(z)|$. Prove que existe uma constante $c \in \mathbb{C}$, com $|c| \leq 1$, tal que $f(z) = cg(z)$. (Sugestão: use o teorema das singularidades removíveis de Riemann).

4.7 Seja f uma função inteira e sejam A e a números reais positivos tais que $|f(z)| \leq A|z|^a$, para todo o z com módulo suficientemente grande. Prove que f é um polinómio de grau $n < a + 1$.

CAPíTULO 5

Transformações conformes e o Teorema de Riemann

Neste capítulo mudamos um pouco a nossa perspectiva. O objecto central são agora as regiões do plano, e aqui as funções holomorfas serão consideradas como aplicações de uma região para outra (ou seja, o respectivo contradomínio é igualmente importante).

5.1. Definição e Exemplos de Transformações Conformes

Neste capítulo, Ω_1, Ω_2, etc, designam regiões no plano complexo.

5.1.1. Definição de tranformação conforme.

Definição. Um isomorfismo entre Ω_1 e Ω_2, também designado por transformação conforme entre Ω_1 e Ω_2, é uma aplicação $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ holomorfa e bijectiva. Dito de outra forma, $f \in H(\Omega_1)$ é injectiva e $f(\Omega_1) = \Omega_2$.

Recorde-se que estas condições implicam que a função inversa $f^{-1} : \Omega_2 \to \Omega_1$ é também holomorfa, o que justifica que este tipo de aplicações se chame isomorfismo, dado que consistem em morfismos invertíveis na categoria cujos objectos são regiões e cujos morfismos entre Ω_1 e Ω_2 são funções $f \in H(\Omega_1)$ com $f(\Omega_1) = \Omega_2$.

Note-se que, devido ao teorema da aplicação aberta, todas as transformações conformes são não-constantes.

O nome transformação conforme justifica-se também porque uma aplicação $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ holomorfa e bijectiva verifica necessáriamente $f'(z) \neq 0$ para qualquer ponto $z \in \Omega_1$. Sendo assim, localmente, f preserva ângulos, de acordo com o capítulo 1. O seguinte exemplo mostra que o recíproco não é verdade.

Exemplo. A seguinte aplicação $f : \mathbb{D}^* \to \mathbb{D}^*$, $z \mapsto f(z) = z^2$ é holomorfa e verfica $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{D}^*$, mas não é transformação conforme entre $\mathbb{D}^*$ e $\mathbb{D}^*$ porque não é bijectiva neste conjunto. No entanto, a mesma expressão $f(z) = z^2$ representa uma transformação conforme entre o primeiro quadrante de $\mathbb{C}$ e o semiplano superior $\mathbb{H}$. Ilustrámos assim, a importância de considerar os conjuntos, para além da expressão de $f(z)$.

Se considerarmos a categoria $\mathcal{C}$ cujos objectos são regiões em $\mathbb{C}$ e cujos morfismos são transformações conformes entre duas dessas regiões, obtemos o seguinte enunciado.

Proposição. *A categoria $\mathcal{C}$ é um grupóide.*

Demonstração. Qualquer morfismo de $\mathcal{C}$, $f : \Omega_1 \to \Omega_2$, sendo transformação conforme, tem inverso (que é outro morfismo em $\mathcal{C}$), pelo que f é um isomorfismo. □

5.1.2. Exemplos de transformações conformes.

Exemplo. As seguintes aplicações são transformações conformes: $z \mapsto z^2$, $z \mapsto \sqrt{z}$, $z \mapsto e^z$, $z \mapsto \log z$. Naturalmente, para cada caso, temos que escolher regiões apropriadas para que estas aplicações sejam bijectivas.

Por exemplo, a aplicação $f(z) = \sqrt{z}$ (que é inversa de $z \mapsto z^2$) representa uma transformação conforme entre o semiplano superior $\mathbb{H}$ e o primeiro quadrante de $\mathbb{C}$.

Deixamos ao leitor a tarefa de encontrar regiões para as quais as funções acima são transformações conformes. Pelo que vimos, para uma dada aplicação f, a resposta está bem longe de ser única.

Exemplo. Uma transformação de Möbius é também uma transformação conforme, só que neste caso as regiões domínio e contradomínio coincidem com toda a esfera de Riemann $\mathbb{C}_\infty$.

Note-se que, como $T'(z) \neq 0$ para qualquer transformação de Möbius T e ponto $z \in \mathbb{C}$, se fizermos a restrição de T a qualquer região $\Omega_1 \subset \mathbb{C}$ (com $T(\Omega_1) \subset \mathbb{C}$) temos também transformações conformes. Por exemplo $T(z) = \frac{z-i}{z+i}$ é uma transformação conforme entre $\mathbb{H}$ e $\mathbb{D}$.

5.1.3. Isomorfismos e homeomorfismos. Uma pergunta natural é a seguinte. Dadas duas regiões Ω_1 e Ω_2, existirá alguma transformação conforme entre Ω_1 e Ω_2, isto é $f \in H(\Omega_1)$, injectiva com $f(\Omega_1) = \Omega_2$?

Outra forma de apresentar esta pergunta é usando uma relação de equivalência: dizemos que Ω_1 e Ω_2 são conformemente equivalentes ou isomorfas se existe uma transformação conforme $f : \Omega_1 \to \Omega_2$. É imediato verificar que esta noção de isomorfismo é, de facto, uma relação de equivalência.

Usando esta noção podemos reformular a nossa pergunta da seguinte forma: Dada uma região Ω_1, quais as regiões Ω_2 que são isomorfas a Ω_1? É possível caracterizar todas as regiões isomorfas a uma região dada?

Neste capítulo veremos como dar uma resposta a esta pergunta no caso em que $\Omega_1 = \mathbb{D}$. Esta resposta é dada pelo célebre teorema da aplicação de Riemann. Para isso, comecemos por determinar os automorfismos do disco $\mathbb{D}$.

Para começar, podemos rapidamente concluir que nem todas as regiões do plano são isomorfas. Recorde-se que um homeomorfismo entre Ω_1 e Ω_2 é uma função contínua e bijectiva, com inversa também contínua.

Proposição. *Se Ω_1 e Ω_2 não são homeomorfas, não existe nenhuma tranformação conforme entre Ω_1 e Ω_2.*

Demonstração. Vamos supor, por absurdo, que $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ é uma transformação conforme. Então, f é um homeomorfismo, uma vez que f é contínua, bijectiva e que $f^{-1} : \Omega_2 \to \Omega_1$ é também contínua. □

Exemplo. As regiões $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^*$ não são isomorfas. De facto, como existem caminhos não homotopicamente triviais em $\mathbb{C}^*$, mas $\mathbb{C}$ é simplesmente conexo, estas duas regiões não podem ser homeomorfas, nem conformemente equivalentes.

Apesar de tudo, as funções holomorfas são mais rígidas que as contínuas, pelo que o recíproco da proposição acima não é válido: há regiões que são homeomorfas, mas que não são isomorfas.

Proposição. *As regiões $\mathbb{C}$ e $\mathbb{D}$, embora sejam homeomorfas, não são isomorfas.*

Demonstração. Suponha-se que existe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ conforme. Então f é inteira, mas também é limitada, pois $|f(z)| < 1$ para todo o $z \in \mathbb{C}$. Assim, pelo Teorema de Liouville, temos que f é constante, o que contraria a hipótese de f ser conforme. Por outro lado, temos um homeomorfismo explícito entre $\mathbb{D}$ e $\mathbb{C}$ que pode ser dado por

$$z \mapsto \tan\left(\frac{|z|}{2}\pi\right).$$

Naturalmente, esta função não é holomorfa. □

5.2. Lema de Schwarz e Automorfismos do disco

Definição. Dada uma região $\Omega \subset \mathbb{C}$, uma transformação conforme $f : \Omega \to \Omega$ (ou isomorfismo) é também designada um automorfismo de Ω.

Seja $\mathbb{D}$ o disco unitário. A caracterização dos automorfismos do disco pode ser feita usando este importante Lema.

Teorema. *(Lema de Schwarz) Seja $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ uma função holomorfa com $f(0) = 0$. Então, $|f(z)| \leq |z|$ para todo o $z \in \mathbb{D}$; além disso, se $|f(z_0)| = |z_0|$ para certo $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ então f é uma rotação, isto é, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $f(z) = e^{i\theta} z$.*

Demonstração. Sendo

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

a expansão em série de potências de f, temos $a_0 = 0$, porque $f(0) = 0$. Assim, $g(z) = f(z)/z = a_1 + a_2 z + \cdots$ é uma função holomorfa em $\mathbb{D}$, e verifica, para $|z| \leq r < 1$,

$$|g(z)| = \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{r} \leq \frac{1}{r},$$

pelo princípio do módulo máximo. Como isto é válido para qualquer $r < 1$ e $g(z)$ é contínua, segue que $|g(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

No caso em que

$$|g(z_0)| = |\frac{f(z_0)}{z_0}| = 1$$

para algum ponto $z_0 \in \mathbb{D}$ no disco unitário, então a função holomorfa $g(z)$ atinge o máximo do seu módulo no interior do disco, pelo que $g(z)$ é igual a uma constante α de módulo 1, $\alpha = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, como queriamos provar. □

Teorema. *Seja $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ uma função holomorfa com $f(0) = 0$ e $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ a sua expansão em série. Então, $|f'(0)| = |a_1| \leq 1$, e se $|a_1| = 1$ então $f(z) = a_1 z$.*

Demonstração. A primeira parte decorre de $f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z}$. Para a segunda parte consultar Lang. □

Podemos agora determinar os automorfismos do disco.

Teorema. *Seja $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ uma função holomorfa e bijectiva. Por outras palavras, f é um automorfismo do disco. Então, escrevendo $\alpha := f^{-1}(0) \in \mathbb{D}$, existe um real θ tal que*

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha} z}.$$

Demonstração. Seja $g_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha} z}$. Como g_α e f são automorfismos, a composição $F = f \circ g_\alpha^{-1}$ é também um automorfismo de $\mathbb{D}$, e verifica $F(0) = 0$. Pelo lemma de Schwarz $|F(z)| \leq |z|$, para todo $z \in \mathbb{D}$. Da mesma forma, para o automorfismo inverso $F^{-1} = g_\alpha \circ f$ temos a desigualdade $|F^{-1}(z)| \leq |z|$ ou seja $|w| \leq |F(w)|$, para todo $w \in \mathbb{D}$. Assim, temos $|F(z)| = |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ o que implica, pelo lemma de Scwharz, que $F(z) = e^{i\theta} z$. □

5.3. Automorfismos do Plano

As aplicações da forma $z \mapsto az + b$, com $a, b \in \mathbb{C}$ são automorfismos do plano, quando $a \neq 0$. De facto, para $a \neq 0$ as funções da forma $f(z) = az + b$ são holomorfas e bijectivas entre $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}$. É interessante verificar que estas são as únicas transformações do plano em si mesmo com esta propriedade.

Proposição. *Os únicos automorfismos do plano são da forma $z \mapsto az+b$, com $a \neq 0$.*

Demonstração. Usa o teorema de Casoratti-Weierstrass. □

5.4. O espaço métrico $H(\Omega)$

De modo a caracterizar todas as regiões conformemente equivalentes a Ω, vamos necessitar de estudar a convergência de funções em $H(\Omega)$, dotando este espaço vectorial de uma métrica.

Seja Ω uma região e seja $C(K)$ o espaço vectorial das funções contínuas $f : K \to \mathbb{C}$, onde K é um compacto em $\mathbb{C}$. Para ver $H(\Omega)$ como espaço métrico, recordemos primeiro que $C(K)$ é um espaço métrico com a distância dada pela norma do máximo:

$$||f||_K := \max_{z \in K}\{|f(z)|\}.$$

Uma métrica ou distância num conjunto X, verifica $d(x, y) = d(y, x) \geq 0$, $d(x, y) = 0$ sse $x = y$ e a desigualdade triângular $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$, para todo $x, y, z \in X$. Uma métrica num conjunto X induz nele uma topologia, pelo que podemos considerar X como espaço topológico e falar de subconjuntos abertos, fechados e compactos de X.

Comecemos pelo seguinte:

Lema. *Dada uma região $\Omega \subset \mathbb{C}$, existe uma sequência de subconjuntos compactos $\{K_n\}$ tal que:*
(1) $K_n \subset int(K_{n+1})$
(2) $\Omega = \cup_n K_n$
(3) Se $K \subset \Omega$ é compacto, então $K \subset K_n$ para algum n.

A uma sucessão de compactos $K_n \subset \Omega$ verificando as propriedades acima chamaremos uma exaustão de Ω por conjuntos compactos.

Proposição. *Seja Ω uma região e K_n uma exaustão de Ω por conjuntos compactos. O espaço das funções contínuas $C(\Omega)$ é um espaço métrico com a distância definida por:*

$$d(f, g) := \sum_n \frac{1}{2^n} \frac{||f - g||_n}{1 + ||f - g||_n}, \tag{5.4.1}$$

onde $||h||_n := ||h||_{K_n} = \max_{z \in K_n} |h(z)|$. Além disso, a topologia em $C(\Omega)$ (definida por esta métrica) não depende da escolha da exaustão K_n.

Teorema. *O espaço métrico $C(\Omega)$ é completo.*

Demonstração. Ver Conway. □

Agora vejamos os teoremas de convergência de funções holomorfas. Nesta secção assumimos familiaridade com a noção de convergência uniforme em compactos, que é revista no Apêndice. A noção de convergência mais natural para regiões (conjuntos abertos e conexos) é a seguinte.

Definição. Seja Ω uma região em $\mathbb{C}$ e $\{f_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, uma sucessão de funções contínuas em Ω. Dizemos que $\{f_n\}$ *converge uniformemente em compactos* de Ω, se para todo subconjunto compacto $K \subset \Omega$, a convergência de $\{f_n\}$ em K é uniforme, isto é, existe uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ que verifica: para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que $||f_n - f||_K < \varepsilon$ para todo $n > N$. Neste caso dizemos que o limite uniforme de f_n é f.

Sabemos, pelo teorema da convergência uniforme, que o limite uniforme de uma sucessão de funções contínuas num compacto K é uma função contínua em K, o que implica o mesmo resultado para regiões em $\mathbb{C}$.

EXEMPLO. Seja $f_n(x) = x^{\frac{1}{n}}$ uma sucessão de funções definidas no intervalo $[0, 1]$. O limite desta sucessão não é contínuo, e de facto a convergência não é uniforme em $[0, 1]$. No entanto, a restrição de f_n a qualquer subconjunto compacto de $]0, 1[$ tem um limite uniforme (a função nula nesse compacto).

TEOREMA. *Se $f_n(z)$ é uma sucessão em $H(\Omega)$ e $f(z) := \lim_n f_n(z)$ é contínua, então f é holomorfa em Ω. Além disso, para cada $k \geq 1$, $f_n^{(k)}$ converge uniformemente para $f^{(k)}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Usar o Teorema de Morera. □

COROLÁRIO. *Se $f_n \in H(\Omega)$ é uma sucessão de funções holomorfas tal que a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ tem um limite uniforme f, então, para todo o $z \in \Omega$,*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z).$$

Uma vez que uma função holomorfa é contínua, $H(\Omega) \subset C(\Omega)$, podemos considerar (e é o que faremos, sem mais comentários) uma métrica em $H(\Omega)$ dada pela mesma fórmula que a métrica em $C(\Omega)$ (ou seja, a equação (5.4.1) para uma dada exaustão de Ω).

COROLÁRIO. *O espaço métrico $H(\Omega)$ é fechado em $C(\Omega)$ e portanto, também completo.*

DEMONSTRAÇÃO. O Teorema diz-nos que quando uma sucessão de funções $f_n \in H(\Omega)$ tem limite em $C(\Omega)$, esse limite está em $H(\Omega)$. Isto significa que $H(\Omega)$ é fechado em $C(\Omega)$. □

DEFINIÇÃO. Uma família (subconjunto) $A \subset H(\Omega)$ chama-se *normal* ou *relativamente compacta* se qualquer sequência em A tem uma subsucessão que converge uniformemente em qualquer compacto $K \subset \Omega$ para um elemento não necessariamente em A (mas necessariamente holomorfo de acordo com o teorema acima).

Mostra-se que esta noção corresponde ao fecho de A ser compacto no espaço métrico $H(\Omega) \subset C(\Omega)$, justificando a nomenclatura "relativamente compacto".

DEFINIÇÃO. Uma família $A \subset H(\Omega)$ diz-se uniformemente limitada em compactos (ou localmente limitada) se para todo subconjunto compacto $K \subset \Omega$ existe uma constante C_K tal que

$$|f(z)| \leq C_K$$

para todo $f \in A$ e todo $z \in K$.

A próxima definição é também útil.

DEFINIÇÃO. Seja $K \subset \mathbb{C}$ um compacto. Uma família $A \subset H(K)$ diz-se equicontínua em K se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|z_1 - z_2| < \delta$, $z_1, z_2 \in K$ implica que $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ para todo $f \in A$.

5.5. O teorema da aplicação de Riemann

O teorema da aplicação de Riemann diz-nos que qualquer região simplesmente conexa de $\mathbb{C}$, com excepção do próprio plano complexo, é isomorfa a $\mathbb{D}$. Esta excepção é necessária, como vimos na Proposição 5.1.3.

TEOREMA. *(Teorema da Aplicação de Riemann) Seja Ω uma região simplesmente conexa do plano complexo distinta de $\mathbb{C}$. Então Ω é isomorfa ao disco unitário $\mathbb{D}$. Mais precisamente, dado $z_0 \in \Omega$, existe uma única transformação conforme*

$$f : \Omega \to \mathbb{D}$$

que verifica $f(z_0) = 0$ e $f'(z_0) > 0$.

Para a demonstração, recordemos o Teorema de Arzelà-Ascoli:

TEOREMA. *(Arzelà-Ascoli). Seja $A \subset C(K)$ uma família de funções contínuas. Se a sequência for uniformemente limitada e equicontínua, então A é relativamente compacta.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver Conway. □

No caso de famílias de funções holomorfas, temos um resultado um pouco melhor.

TEOREMA. *Seja $A \subset H(\Omega)$ uma família uniformemente limitada em compactos. Então:*
(1) A é equicontínua em cada subconjunto compacto de Ω.
(2) A é relativamente compacta.

DEMONSTRAÇÃO. (1) Seja $K \subset \Omega$ e seja $3r$ a distância entre K e o complemento de Ω. Sendo $z_1, z_2 \in K$ com $|z_1 - z_2| < r$, temos

$$f(z_1) - f(z_2) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_C \frac{f(w)}{w - z_1}dw - \int_C \frac{f(w)}{w - z_2}dw\right) = \frac{z_1 - z_2}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w - z_1)(w - z_2)}dw,$$

onde $C = \partial\mathbb{D}(z_1, 2r)$. Para $w \in C$ temos $|w - z_1||w - z_2| > 2r^2$, pelo que

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \frac{|z_1 - z_2|}{2\pi}\frac{\|f\|_{K^{+2r}}}{2r^2}4\pi r = \frac{1}{r}|z_1 - z_2|\,\|f\|_{K^{+2r}}\,,$$

onde $K^{+2r} \subset \Omega$ é o compacto $\left\{z + 2re^{i\theta} : z \in \Omega, \theta \in \mathbb{R}\right\}$. Esta desigualdade implica a equicontinuidade em K.

(2) Pelo teorema de Arzelà-Ascoli, dada uma família uniformemente limitada e equicontínua A, qualquer sucessão em A tem uma subsucessão convergente em qualquer compacto.

Seja $\{f_n\}$ uma sucessão em A, $K \subset \Omega$ um compacto, e $\{z_j\}$ uma sucessão de pontos densa em K. Como $\{f_n(z_1)\}_n$ é limitada, tem uma subsucessão $\left\{f_n^1(z_1)\right\}_n$ convergente. Como $\left\{f_n^1(z_2)\right\}$ é também limitada, existe uma subsucessão $\left\{f_n^2(z_2)\right\}$ convergente. Continuando desta forma, obtemos a subsucessão $\{f_n^n\}$ tal que $\{f_n^n(z_j)\}$ converge para todo $j \in \mathbb{N}$. □

Demonstração da unicidade no Teorema de Riemann: Seja $f_1, f_2 : \Omega \to \mathbb{D}$ com $f_1(z_0) = f_2(z_0) = 0$. Então, $f_1 \circ f_2^{-1}$ é um automorfismo do disco que fixa a origem $z = 0$, logo $f_1(f_2^{-1}(w)) = e^{i\theta}w$, para certo $\theta \in \mathbb{R}$ e para todo o $w \in \mathbb{D}$, pelo Lema de Schwarz. Escrevendo $w = f_2(z)$ temos

$$f_1(z) = e^{i\theta}f_2(z), \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Assim, temos também $f_2'(z_0) = e^{i\theta}f_1'(z_0)$. Sendo ambos $f_1'(z_0)$ e $f_2'(z_0)$ reais e positivos por hipótese, temos que $e^{i\theta} = 1$, pelo que $f_1(z) = f_2(z)$, $\forall z \in \mathbb{D}$ como pretendido.

A demonstração da existência é mais complicada...

5.6. Exercícios

5.1 Mostre que a função theta de Riemann, definida por

$$\theta(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i\tau n^2 + 2\pi i n z}$$

é holomorfa para $z \in \mathbb{C}$ e para $\tau \in \mathbb{H} = \{z : \Im(z) > 0\}$.

5.2 Seja $\{f_n\}$ uma sucessão de funções holomorfas numa região Ω que converge, uniformemente em subconjuntos compactos $K \subset \Omega$ para uma função não constante f. Mostre que, se cada f_n é injectiva, então f também é injectiva.

5.3 Seja f holomorfa no disco unitário $\mathbb{D} = \mathbb{D}(0,1)$ verificando $|f(z)| < 1$. Supondo que f tem dois pontos fixos distintos a e b em $\mathbb{D}$, $f(a) = a$ e $f(b) = b$, prove que $f(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

5.4 Mostre que qualquer função injectiva e holomorfa $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ é da forma $f(z) = az$ ou $f(z) = \frac{a}{z}$ para certo $a \in \mathbb{C}^*$.

5.5 Determine explicitamente uma transformação conforme entre o conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z > 0, -\pi < \mathrm{Im} z < \pi\}$ e o disco unitário $\mathbb{D}$.

5.6 Seja f uma transformação conforme do conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z > 0, \mathrm{Im} z > 0\}$ no disco unitário $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, com a propriedade $f(i+1) = 0$. Determine uma expressão para f. Existirá outra função com tais propriedades? Justifique.

5.7 Seja $\{f_n\}$ uma sucessão de funções holomorfas numa região Ω, uniformemente limitada em compactos de Ω. Mostre que, se $\lim_{n\to\infty} f_n(z)$ existe para todo $z \in \Omega$, então $\{f_n\}$ converge uniformemente em subconjuntos compactos de Ω. (Sugestão, use o facto de que $\{f_n\}$ é equicontínua em compactos).

5.8 Seja $B = \{z \in \mathbb{C} : |Im\ z| < 1,\ |Re\ z| < 1\}$. Mostre que existe uma transformação conforme entre o conjunto $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}$ e o conjunto $\mathbb{C}\backslash\overline{B}$.

CAPíTULO 6

Funções Harmónicas

Neste capítulo, estudaremos as funções harmónicas, que podem ser vistas, em muitos aspectos, como o análogo de valores reais, das funções holomorfas.

6.1. Definição e primeiras propriedades

Definição. Seja Ω uma região em $\mathbb{C}$. Uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ diz-se harmónica em Ω se é de classe C^2 em Ω e verifica a equação de Laplace $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, em todos os pontos de Ω.

Como o operador de Laplace é linear, o conjunto das funções harmónicas numa dada região Ω é um espaço vectorial que vamos denotar por $\mathcal{H}(\Omega)$. Note-se que o produto de funções harmónicas não é necessariamente uma função função harmónica, pelo que não consideramos $\mathcal{H}(\Omega)$ como anel, em contraste com o anel das funções holomorfas $H(\Omega)$.
Usando os operadores diferenciais $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$, vemos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\Delta u.$$

Assim, uma outra forma de escrever a equação de Laplace $\Delta u = 0$ é:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial \bar{z}} = 0.$$

6.1.1. Funções harmónicas e funções holomorfas. A relação mais simples entre funções harmónicas e funções holomorfas é a seguinte.

Proposição. *As partes real e imaginária de uma função holomorfa são ambas harmónicas.*

Demonstração. Usar as equções de Cauchy-Riemann, ou alternativamente, sendo $f \in H(\Omega)$ e $u = \Re f$ temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 \Re f}{\partial z \partial \bar{z}} = \Re\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}\right) = \Re\left(\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}})\right) = 0,$$

uma vez que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0$. O mesmo se aplica a $v = \Im f$. $\square$

O recíproco deste resultado é apenas válido localmente, e em regiões simplesmente conexas. Para verificar isto, usamos a seguinte construção.

Lema. *Seja Ω uma região arbitrária. Se $u \in \mathcal{H}(\Omega)$, então $g := \frac{\partial u}{\partial z}$ é uma função holomorfa em Ω.*

Demonstração. Basta ver que

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\frac{\partial u}{\partial z}) = \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z} \partial z} = 0.$$

$\square$

TEOREMA. *Se Ω é simplesmente conexa, e u é harmónica em Ω, então existe uma função holomorfa $f \in H(\Omega)$ cuja parte real é u. A diferença de duas tais funções é uma constante imaginária pura.*

DEMONSTRAÇÃO. Usar $g = \frac{\partial u}{\partial z}$ e o facto de que g tem uma primitiva holomorfa em Ω. $\square$

6.2. Propriedades locais das funções harmónicas

Uma função harmónica verifica a propriedade do valor médio:

TEOREMA. *(Teorema do valor médio) Seja u harmónica em Ω e $\bar{D} \subset \Omega$ um disco fechado centrado em z_0. Então:*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta,$$

onde r é o raio do disco $\bar{D}$.

DEMONSTRAÇÃO. Usar a fórmula integral de Cauchy para f tal que $f = \Re u$. $\square$

Temos também:

TEOREMA. *(Princípios do módulo máximo e mínimo). Seja u uma função harmónica em Ω.*

(1) Se u atinge um máximo local em $z_0 \in \Omega$, então u é constante em Ω.

(2) Se u atinge um mínimo local em $z_0 \in \Omega$, então u é constante em Ω.

(3) Se $\overline{\Omega}$ é compacto e u é contínua em $\overline{\Omega}$, então o máximo e o mínimo global de u estão em $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$, a fronteira de Ω.

DEMONSTRAÇÃO. ... $\square$

O princípio da identidade para funções holomorfas permite mostrar o seguinte "princípio da extensão".

PROPOSIÇÃO. *Se u é harmónica em Ω e $f \in H(\Omega)$ tal que $u = \Re f$ num pequeno disco, então $u = \Re f$ em Ω.*

DEMONSTRAÇÃO. Exercício. $\square$

6.3. Propriedades globais de funções harmónicas

Para estudarmos algumas propriedades globais das funções harmónicas, começamos por uma representação local de uma função harmónica numa região anelar. Este resultado pode considerar-se o análogo da representação em série de Laurent das funções holomorfas.

TEOREMA. *Seja $A = \mathbb{A}(0, r_1, r_2)$ um anel e $u \in \mathcal{H}(A)$. Então existem $\alpha \in \mathbb{R}$ e $g \in H(A)$ tal que*

$$u(z) = \Re(g(z)) + \alpha \log |z|$$

DEMONSTRAÇÃO. A ideia é usar duas regiões simplesmente connexas cuja união é A. $\square$

Temos também a seguinte generalização ao caso de vários pontos isolados.

TEOREMA. *Seja Ω uma região simplesmente conexa e $\Omega^* = \Omega \setminus \{z_1, \cdots, z_n\}$. Se u é harmónica em Ω^* então existem constantes reais $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ e uma função $f \in H(\Omega)$ tais que*

$$u(z) = \Re(f(z)) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \log |z - z_j|$$

Este estudo permite mostrar o análogo do teorema das singularidades removíveis de Riemann para funções harmónicas.

TEOREMA. *Seja $u(z)$ harmónica e limitada no disco perfurado $\mathbb{D}^*(z_0, r) = \mathbb{D}(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Então u pode estender-se a uma função harmónica em $\mathbb{D}(z_0, r)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $D^* = \mathbb{D}^*(z_0, r)$. Sabemos que $u(z) = \Re(g(z)) + \alpha \log |z - z_0|$ para certa função $g \in H(D^*)$. Assim, podemos escrever a série de Laurent de $g(z)$:

$$g(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n.$$

Para mostrar o teorema, basta ver que u limitada implica que g se estende a $g \in H(\mathbb{D}(z_0, r))$, pois isto implicaria que $\alpha = 0$. Suponhamos que 0 é singularidade essencial de $g(z)$, e que $\alpha > 0$. Então, existe $M > 0$ tal que para $|z - z_0|$ suficientemente pequeno, $\Re g(z) = u(z) - \alpha \log |z - z_0| < -M$, pelo que $g(z)$ evita um conjunto aberto de $\mathbb{C}$. O caso $\alpha < 0$ é análogo, donde g não pode ter uma singularidade essencial, pelo teorema de Casoratti-Weierstrass. Os pólos também podem ser excluídos, usando estimativas para $|u|$ perto de z_0, pelo que a série de g só tem parte regular. □

6.4. O problema de Dirichlet no disco

Como vimos, as funções harmónicas verificam a propriedade do valor médio. Na realidade, veremos agora que esta propriedade caracteriza as funções harmónicas. Para chegar a este resultado, vamos primeiro considerar um problema em equações diferenciais parciais de valor fronteira. Este problema muito relevante é o problema de Dirichlet no disco. Trata-se de considerar uma função contínua $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ e de resolver o seguinte problema de valor fronteira (também chamado EDP com condições de Dirichlet):

$$\begin{cases} \Delta u(z) = 0, & z \in \mathbb{D} \\ u(z) = \varphi(z), & z \in \partial\mathbb{D}. \end{cases}$$

Consideremos em primeiro lugar a seguinte função, chamada o núcleo de Poisson. Para $r \in [0, 1[$ e $\theta \in]-\pi, \pi[$, definimos:

$$P_r(\theta) := \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2} = \frac{1}{2\pi} \Re \left(\frac{e^{i\theta} + r}{e^{i\theta} - r} \right).$$

TEOREMA. *Seja $\varphi : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ uma função contínua (e $\varphi(\pi) = (-\pi)$). Então existe $u \in C(\bar{\mathbb{D}})$ e harmónica em $\mathbb{D}$ tal que $u(e^{i\theta}) = \varphi(\theta)$. Precisamente, esta função é dada por $u(z) := P_r * \varphi$, ou explicitamente*

$$u(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - \tau)\varphi(\tau)\, d\tau.$$

DEMONSTRAÇÃO. Esta demonstração é longa e usa técnicas de teoria das distribuições. Consulte-se o Lang. □

TEOREMA. *Se uma função contínua satisfaz a propriedade do valor médio em Ω então é harmónica em Ω.*

DEMONSTRAÇÃO. Basta mostrar que u é harmónica num qualquer disco $D = \mathbb{D}(z_0, R) \subset \Omega$. Suponha-se que $u(z_0) \geq u(z_0 + re^{i\theta})$ para todo $r \leq R$, então u é constante numa vizinhança de z_0. Isto porque, se $u(z_1) < u(z_0)$ então existe uma vizinhança de z_1 e $\varepsilon > 0$ tal que $u(z) \leq u(z_0) - \varepsilon$, contrariando a propriedade do valor médio, pois

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(z_0) - u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta > 0.$$

Assim, temos a propriedade do máximo, e analogamente, a propriedade do mínimo. Para provar que u é harmónica, seja v a solução (função harmónica) do problema de Dirichelet no disco $\mathbb{D}(z_0, r)$ cujo fecho está em Ω, e cujos valores na fronteira coincidem com os de u. Assim, $u - v = 0$ nesta fronteira, e também satisfaz a propriedade de mínimo e máximo em $\mathbb{D}(z_0, r)$, pelo que $u - v$ tem o máximo e o mínimo na fronteira, pelo que $u = v$, neste disco. □

6.5. Exercícios

6.1 Seja $P_r(\theta)$ o núcleo de Poisson, defiido para $0 \le r < 1$ e $\theta \in [0, 2\pi]$, através de

$$P_r(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$

Seja $u \ge 0$ uma função harmónica em $\mathbb{D}(0,1)$ e contínua em $\overline{\mathbb{D}}$. Mostre as desigualdades

$$\begin{aligned} \frac{1-r}{1+r} \le & \quad 2\pi P_r(\theta) & \le \frac{1+r}{1-r} \\ \frac{1-r}{1+r} u(0) \le & \quad u(re^{i\theta}) & \le \frac{1+r}{1-r} u(0). \end{aligned}$$

6.2 Considere uma região $\Omega \subset \mathbb{C}$, uma função u harmónica em Ω e $f \in H(\Omega)$. Supondo que $u = \Re f$ num certo disco aberto (não vazio) $D \subset \Omega$, mostre que $u = \Re f$ em todo Ω.

6.3 (Teorema de Harnak) Seja u_n uma sucessão de funções harmónicas no disco unitário $\mathbb{D}$ que converge uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$. Prove que o limite é uma função harmónica.

6.4 Prove que uma função u é harmónica na região Ω se e só se satisfaz a propriedade do valor médio em discos de Ω, isto é se, para qualquer $z \in \Omega$ e disco $\mathbb{D}(z, r)$ centrado em z e totalmente contido em Ω, se verifica:

$$u(z) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{\mathbb{D}(z,r)} u \, dx \, dy.$$

CAPíTULO 7

Representação de Funções Inteiras

Neste capítulo, vamos considerar mais uma generalização dos polinómios, e descrever uma classe de funções inteiras que admite um número infinito de zeros mas com crescimento controlado no infinito.

Por exemplo, a função $f(z) = \sin z$, que é inteira, tem zeros apenas nos pontos $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e gostariamos de saber se admite uma factorização por "primos" da forma $(z - z_0)$. Para responder a esta questão, temos primeiro que definir e estudar convergência de produtos infinitos e veremos que, por exemplo, podemos escrever,

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n\in\mathbb{N}} (1 - \frac{z^2}{n^2}).$$

Esta fórmula, escrita pela primeira vez por Euler, para além da sua elegância, permitiu-lhe resolver um problema importante na época, o cálculo da série $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

7.1. Convergência de produtos infinitos de números complexos e de funções

Definição. Seja $\{z_n\}$ uma sucessão de números complexos não nulos. Dizemos que $\prod_{n\in\mathbb{N}} z_n$ converge absolutamente se $\lim z_n = 1$ e se a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \log z_n$ converge absolutamente. Neste caso definimos

$$\prod_{n\in\mathbb{Z}} z_n = e^{\sum_{n\in\mathbb{N}} \log z_n}.$$

Observação. (1) Note-se que pela condição $\lim z_n = 1$, sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ implica $|z_n - 1| < 1$. Assim, o logarítmo principal $\log z_n = \log |z_n| + i \arg z_n$ está bem definido, para $n > N$ e podemos atribuir-lhe uma parte imaginária $\arg z_n \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(2) Se um produto de números complexos $\prod_{n\in\mathbb{N}} z_n$ converge absolutamente, então qualquer reordenação de termos levará ao mesmo resultado. Isto segue do resultado análogo para séries absolutamente convergentes.

Lema. *Se $\{z_n\}$ é uma sucessão de números complexos não nulos e $\sum_{n\in\mathbb{N}}(1 - z_n)$ converge absolutamente, então $\prod_{n\in\mathbb{N}} z_n$ converge absolutamente.*

Demonstração. Para n suficientemente grande $|1 - z_n| < \frac{1}{2}$, pelo que $|\log z_n| \le C|1 - z_n|$ para uma certa constante C. □

Proposição. *Seja $\{f_n\}$ uma sucessão de funções holomorfas numa região Ω tal que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(z)$ converge uniformemente e absolutamente em compactos $K \subset \Omega$. Então o produto $\prod_{n\in\mathbb{N}}(1 - f_n)$ converge uniformemente e absolutamente em compactos de Ω e define uma função holomorfa $F(z)$ em Ω.*

Demonstração. ... □

O seguinte resultado é uma consequência.

COROLÁRIO. *Sempre que $\{h_n\}$ não tenha zeros num compacto $K \subset \Omega$, para todo o n, e $F(z) = \prod_{n\in\mathbb{N}} h_n(z)$ podemos escrever, para $z \in K$*

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{h_n'(z)}{h_n(z)}.$$

7.2. O teorema de Weierstrass para funções inteiras

Consideremos uma função inteira $f \in H(\mathbb{C})$. Para encontrar uma representação para $f(z)$ como produto, notemos em primeiro lugar que o princípio dos zeros isolados impóe que os zeros de $f(z)$ são no máximo numeráveis. Mais precisamente temos.

PROPOSIÇÃO. *Seja $f \in H(\mathbb{C})$ e seja $Z_f = f^{-1}(0)$ o seu conjunto de zeros. Então, ou Z_f é um conjunto finito, ou $\#Z_f = \#\mathbb{Z}$. Além disso podemos ordenar os elementos de Z_f de modo a escrever*

$$Z_f = \{z_1, z_2, \cdots\},$$

com $|z_1| \leq |z_2| \leq \cdots$. Em particular, se Z_f não é finito, temos $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$.

DEMONSTRAÇÃO. Relativamente simples, considerando que cada compacto $\overline{\mathbb{D}(0,R)}$ tem um número finito de zeros. □

Seja $f(z)$ uma função inteira com zeros nos pontos $z_1, z_2 ....$ De acordo com a Proposição. vamos sem mais comentários, ordenar os seus zeros não nulos de modo a ter $|z_1| \leq |z_2| \leq ....$ Tentemos então uma representação da forma:

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right).$$

Este produto não converge necessariamente, por isso necessitamos de um factor de convergência.

DEFINIÇÃO. Um factor elementar é $E_n(z) = (1-z)e^{z+\frac{z}{2}+\ldots+\frac{z^{n-1}}{n-1}}$ $(E_1(z) = 1 - z)$.
Uma vez que

$$\log(1-z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k},$$

temos $\log E_n(z) = -\sum_{k=n}^{\infty} \frac{z^k}{k}$, o que permite demonstrar:

LEMA. *Se $|z| \leq \frac{1}{2}$ então $|\log E_n(z)| \leq 2|z|^n$.*

DEMONSTRAÇÃO. Fácil. □

PROPOSIÇÃO. *Se $\{p_n\}$ é uma sucessão de inteiros tais que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{p_n}$ converge para todo $r > 0$, então o produto infinito*

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

converge uniformemente em qualquer disco $|z| \leq R$ e define uma função inteira com zeros nos pontos $\{z_n\}$ e sem outros zeros.

DEMONSTRAÇÃO. Fixamos R. Seja N tal que $2R < |z_{N+1}|$. Então, para $|z| \leq R$ e $n > N$ temos $|z/z_n| < 1/2$. □

Esta proposição permite-nos garantir a existência de uma função inteira com zeros em pontos predeterminados, e com ordens prefixadas nesses pontos. Se $Z = \{z_n\}$ é um subconjunto de $\mathbb{C}$ para que ele seja o conjunto de zeros de uma função inteira é necessário que seja um subconjunto discreto de $\mathbb{C}$. Assim, sabemos que é numerável. Vamos tentar encontrar uma função inteira $f \in H(\Omega)$ apenas com zeros em Z e de tal forma que, para cada $z_k \in Z$ a ordem de f em z_k seja um natural $m(k)$. Por exemplo, se quisermos uma função $f(z)$ com zeros duplos em todos os pontos inteiros, podemos definir estes dados através do conjunto $Z = \mathbb{Z}$ e da função $m : Z \to \mathbb{N}$ dada por $m(z) = 2$ para todo o $z \in Z$.

TEOREMA. *(Weierstrass). Seja $Z = \{z_n\}$ um conjunto discreto e seja $m : Z \to \mathbb{N}$ uma função com valores inteiros. Então existe uma função inteira $f \in H(\Omega)$ tal que $\mathrm{ord}_{z_k} f = m(k)$, para todo o $k \in \mathbb{N}$ e com $\mathrm{ord}_z f = 0$ sempre que $z \notin Z$.*

DEMONSTRAÇÃO. Usar os produtos canónicos, cada qual levantado à potência $m(k)$. □

COROLÁRIO. *Qualquer função meromorfa é o quociente de funções inteiras.*

DEMONSTRAÇÃO. ... □

7.3. O teorema de Hadamard

O teorema de Weierstrass permite mostrar a convergência de certos produtos canónicos, mas não nos dá informação sobre qual é o produto canónico que representa uma dada função. Nesta secção veremos um resultado muito mais pormenorizada, que establece uma representação em termos de produto infinito para uma grande classe de funções: as funções que não crescem no infinito mais que a exponencial de um polinómio.

DEFINIÇÃO. A ordem (de crescimento polinomial) de uma função $f \in H(\mathbb{C})$ é o número

$$\rho(f) = \lim_{R\to\infty} \frac{\log\log ||f||_R}{\log R} \in [0, +\infty]$$

onde $||f||_R := ||f||_{\overline{\mathbb{D}(0,R)}} = \max_{|z|=R} |f(z)|$. Quando $\rho(f) < +\infty$ diz-se que f tem ordem finita.

TEOREMA. *(Teorema da factorização de Hadamard). Seja f uma função inteira de ordem finita ρ, e seja $f^{-1}(0)\setminus\{0\} = \{z_1, z_2, \cdots\}$ o conjunto dos seus zeros (com a excepção de $z = 0$) repetidos de acordo com as suas multiplicidades e ordenados de acordo com*

$$0 < |z_1| \le |z_2| \le \cdots .$$

Então podemos escrever

$$f(z) = z^{\mathrm{ord}_0 f}\ e^{h(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_k(\frac{z}{z_n}),$$

onde k é o menor inteiro $> \rho$ e $h(z)$ é um polinómio de grau $\le \rho$.

Note-se que, uma vez assegurado que o produto converge absolutamente, podemos escrever, de forma algo mais intrínseca:

$$f(z) = z^{\mathrm{ord}_0 f}\ e^{h(z)} \prod_{w\in Z_f^*} \Big(E_k(\frac{z}{w})\Big)^{\mathrm{ord}_w f},$$

onde $Z_f^* = Z_f \setminus \{0\}$, onde $h(z)$ e k são como no enunciado acima.

DEMONSTRAÇÃO. ... □

7.4. Exercícios

7.1 Considere a função $f(z) = e^{2z} + e^{-2z} + 2$. Verifique que f tem zeros nos pontos $z_n = \frac{i\pi}{2}(2n+1)$, e calcule a sua ordem. Determine a factorização de Hadamard de f.

7.2 Seja f uma função inteira de ordem 1 cujos zeros são simples e estão localizados nos inteiros impares. Supondo que f é par, e que $\lim_{z\to 0} f(z) = 1$, determine a factorização de Hadamard de f. Relacionando f com uma função conhecida mostre que

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{4}{(2n-1)^2}\right) = \frac{1}{3}.$$

7.3 Seja f uma função inteira e n um inteiro positivo. Prove que existe uma função inteira g tal que $g^n = f$ se e só se as ordens dos zeros de f são divisíveis por n.

7.4 Seja g uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ com pólos de ordem ≤ 1 e resíduos inteiros. Mostre que existe $f \in M(\mathbb{C})$ tal que $g = f'/f$.

CAPíTULO 8

Funções Elípticas

Neste capítulo vamos estudar uma classe de funções que generaliza as funções trigonométricas e que tem imensas aplicações tanto em outras áreas da matemática, nomeadamente em teoria dos números, geometria, etc, bem como em matemática aplicada a sistemas dinâmicos e mecânica analítica. Estas funções, chamadas funções elípticas, são duplamente periódicas, isto é periódicas em relação a dois períodos não colineares no plano complexo.

8.1. Recticulados e Funções invariantes

DEFINIÇÃO. Um *recticulado* Λ em $\mathbb{C}$ é um subgrupo discreto do grupo abeliano $(\mathbb{C},+)$.

EXEMPLO. (0) $\{0\}$ é o recticulado trivial
(1) $\mathbb{Z}$ é um recticulado em $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
(2) $\mathbb{Z} \oplus i\,\mathbb{Z} = \{m + ni : m, n \in \mathbb{Z}\}$ é o recticulado dos chamados inteiros de Gauss.

Como subgrupo abeliano, qualquer recticulado é um módulo sobre $\mathbb{Z}$. Isto significa que qualquer elemento $\lambda \in \Lambda$ se pode escrever como $\lambda = \sum c_i v_i$ com $c_i \in \mathbb{Z}, \quad v_i \in \mathbb{C}$. Os elementos v_i são chamados geradores de Λ. Do facto de que Λ é discreto resulta que qualquer recticulado em $\mathbb{C}$ pode ser gerado por um número finito n de geradores. De facto, pode-se mesmo provar que basta ter $n \leq 2$. Se Λ é gerado por $v_1, ..., v_n \in \mathbb{C}^*$ escrevemos frequentemente, $\Lambda = \mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2 \oplus ... \oplus \mathbb{Z}v_n$ ou, abreviadamente, $\Lambda = \langle v_1, v_2, ..., v_n \rangle$.

PROPOSIÇÃO. *Sejam $v_1, v_2 \in \mathbb{C}$ não nulos e $\tau = v_1/v_2$. Então, τ é um número complexo não real se e só se v_1 e v_2 são linearmente independentes como elementos de $\mathbb{R}^2$. Se $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ então*

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \{m_1 v_1 + m_2 v_2 : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$$

é um recticulado em $\mathbb{C}$. Por outro lado, se τ é real, então o conjunto definido acima é um recticulado se e só se τ é racional. Finalmente, qualquer recticulado em $\mathbb{C}$ pode ser gerado por n geradores, com $n \leq 2$.

A primeira frase é imediata. A demonstração destes factos sobre recticulados pode ser encontrada no livro do Ahlfors, capítulo 7. Isto motiva a seguinte definição.

DEFINIÇÃO. A dimensão de um recticulado é o número geradores que são linearmente independente sobre $\mathbb{R}$. Um recticulado maximal em $\mathbb{C}$ é um recticulado de dimensão 2.

Assim, qualquer recticulado maximal em $\mathbb{C}$ se pode escrever na forma:

$$\Lambda = \langle v_1, v_2 \rangle = \{m_1 v_1 + m_2 v_2 : \ m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\},$$

com $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^*$ linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$, isto é, $\tau = v_1/v_2 \notin \mathbb{R}$.

DEFINIÇÃO. Seja Λ um recticulado em $\mathbb{C}$. Dois números complexos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ dizem-se congruentes módulo Λ se $z_1 - z_2 \in \Lambda$. Um polígono fundamental P do recticulado maximal $\Lambda = \langle v_1, v_2 \rangle$ é um conjunto da forma

$$P_{z_0} = \{z_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2 : t_1, t_2 \in [0, 1[\},$$

para certo $z_0 \in \mathbb{C}$.

É imediato verificar que a relação de congruência (módulo Λ) é uma relação de equivalência. É igualmente claro que, fixando um polígono findamental P_{z_0} para Λ, para todo $w \in \mathbb{C}$, existe um único z em P_{z_0} que é congruente a w módulo Λ. Desta forma, podemos dizer que P_{z_0} parametriza as classes de congruência módulo Λ.

Definição. Uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é dita *invariante* em relação ao recticulado Λ, se $f(z_1) = f(z_2)$, sempre que $z_1 - z_2 \in \Lambda$, isto é se z_1 e z_2 são congruentes módulo Λ.

Exemplo. (1) Como exemplos de funções invariantes em relação a recticulados unidimensionais temos as funções trigonométricas. Por exemplo, sen$z$ e cos$z$ são invariantes em relação a $\Lambda = 2\pi\mathbb{Z}$. Outro exemplo é a função exponencial, que é invariante em relação a $2\pi i\mathbb{Z}$.

(2) As funções anteriores são inteiras. Também temos exemplos conhecidos de funções meroformas em $\mathbb{C}$ e invariantes em relação a recticulados. Por exemplo a função tangente $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ é meromorfa e invariante relativamente a $\pi\mathbb{Z}$.

A seguinte proposição é imediata e deixada ao leitor:

Proposição. *Se Λ é um recticulado maximal gerado por v_1, v_2, uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é invariante em relação a Λ se e só se $f(z) = f(z + v_1) = f(z + v_2)$, para todo o $z \in \mathbb{C}$.*

8.2. Funções elípticas

Definição. Uma *função elíptica* é uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ meromorfa invariante em relação a um recticulado maximal (de dimensão 2).

Como vimos acima, um polígono fundamental para Λ parametriza as classes de congruência módulo Λ, e portanto uma função elíptica é determinada pelos valores que assume num único polígono fundamental. Podemos então provar o seguinte.

8.2.1. Os teoremas de Liouville.

Teorema. *(1º teorema de Liouville) Qualquer função elíptica holomorfa é constante.*

Demonstração. Se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é elíptica relativamente a Λ e holomorfa, então é contínua em $\mathbb{C}$ e portanto limitada num polígono fundamental P_{z_0} e no seu fecho. De facto, tanto $\Re f$ como $\Im f$ são funções contínuas que atingem máximos e mínimos em $\overline{P_{z_0}}$. Isto implica que f é limitada em todo o $\mathbb{C}$, uma vez que a sua invariância relativamente a Λ impõe $f(\mathbb{C}) = f(P_{z_0})$. Logo, pelo teorema de Liouville, f é constante. $\square$

Este resultado mostra que, para obtermos funções analíticas (em alguma região) que sejam duplamente periódicas e minimamente interessantes, não nos podemos restringir às funções holomorfas. Por outro lado, não é nada óbvio, à partida, que existam funções elípticas não constantes. Na próxima secção vamos construir explicitamente um exemplo, a chamada função $\wp$ de Weierstrass, de uma função elíptica não trivial, para qualquer recticulado maximal.

Por agora, vamos assumir que as funções elípticas não constantes (e portanto meromorfas em $\mathbb{C}$) existem, e vejamos que propriedades podem ter. Em primeiro lugar, não é difícil provar que o conjunto das funções elípticas invariantes em relação a um recticulado maximal fixo Λ, formam um corpo. Vamos designar este corpo por $E(\Lambda)$ e chamar aos seus elementos funções elípticas relativas a Λ.

Teorema. *Para toda a função elíptica $f \in E(\Lambda)$ existe um polígono fundamental P para Λ, tal que f não tem zeros nem polos na sua fronteira ∂P.*

Naturalmente, o mesmo resultado é válido se substituirmos a expressão "zeros nem pólos" por apenas "pólos".

Fixemos, de agora em diante, um recticulado maximal Λ.

TEOREMA. *(2º teorema de Liouville) Seja f uma função elíptica relativa a Λ, e seja $P = P_{z_0}$ um polígono fundamental tal que f não tem pólos na sua fronteira ∂P. Então a soma dos resíduos de f no interior de P é zero.*

DEMONSTRAÇÃO. Como $\overline{P}$ é compacto, só existe um número finito de polos z_k no interior de P. Assim, pelo teorema dos resíduos, temos

$$\sum_{k=1}^{n} \text{Res}(f, z_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P} f(z)\, dz = 0,$$

onde se usou o facto de que os valores de f na fronteira de P, são os mesmos em lados opostos de ∂P. $\square$

Como primeira consequência, temos.

COROLÁRIO. *Uma função elíptica não constante tem pelo menos 2 pólos (contados de acordo com as suas multiplicidades) num polígono fundamental.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $f \in E(\Lambda)$ tem apenas um pólo simples z_0 num polígono fundamental, então $\text{Res}_{z_0} f \neq 0$, contrariando o teorema. $\square$

TEOREMA. *Seja novamente $f \in E(\Lambda)$, e $P = P_{z_0}$ um polígono fundamental tal que f não tem zeros nem pólos na sua fronteira ∂P. Então, o número de zeros de f no interior de P é igual ao número de polos de f no interior de P, contados de acordo com as respectivas multiplicidades.*

DEMONSTRAÇÃO. Começamos por notar que, se f é elíptica relativamente a Λ, f' e f'/f também o são. Assim, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$ pelo teorema anterior, onde P é um polígono fundamental cuja fronteira não tem zeros nem pólos de f (pelo que não tem pólos de f'/f). O resultado é então uma consequência directa do principio do argumento. $\square$

A seguinte propriedade é agora fácil de concluir.

COROLÁRIO. *Uma função elíptica não constante f toma qualquer valor complexo, isto é a imagem de f é $\mathbb{C}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam dados $f \in E(\Lambda)$ não constante e $w \in \mathbb{C}$. Definimos $g(z) = f(z) - w$ que é meromorfa e tem os mesmos polos (com mesmas multiplicidades) que f. Como g tem pelo menos dois pólos em P, g tem pelo menos dois zeros (contados com multiplicidades). Logo, existe um zero de g, que é um ponto $z \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = w$. $\square$

TEOREMA. *(3º teorema de Liouville) Se z_k, w_k são os zeros e polos de f e as multiplicidades são $m_k = ord_{z_k} f$ e $n_k = -ord_{w_k} f$, respectivamente, então:*

$$\sum m_k z_k \quad = \quad \sum n_k w_k \quad (\text{mod}\Lambda)$$

DEMONSTRAÇÃO. Temos $\int_{\partial P} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \left[\sum_{k=1}^{n} n_k w_k + \sum_{k=1}^{n} m_k z_k\right]$, pelo príncipio do argumento generalizado aplicado à função $g(z) = z$. Integrando ao longo de ∂P, obtemos 4 integrais, dois dos quais dão o valor:

$$\int_{x}^{x+v_1} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \int_{x+v_2}^{x+v_1+v_2} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{x}^{x+v_1} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \int_{x}^{x+v_1} (z + v_2) \frac{f'(z)}{f(z)} dz =$$

$$-v_2 \int_x^{x+v_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -v_1 I(f \circ \gamma, 0) = k_1 v_1,$$

onde γ é o caminho recto entre x e $x + v_1$. $f \circ \gamma$ é então uma curva fechada, logo $k_1 \in \mathbb{Z}$. Da mesma forma, os restantes dois integrais dão o valor $k_2 v_2$ onde $k_2 \in \mathbb{Z}$. $\square$

8.2.2. Os geradores de um recticulado. Vamos agora, só a título de curiosidade, abordar a seguinte questão. Dado um recticulado maximal, como encontrar os seus dois geradores. Mais concretamente, se $\Lambda = \langle v_1, v_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle$, qual a relação entre os pares de geradores $\{v_1, v_2\}$ e $\{w_1, w_2\}$. Recordemos então a seguinte definição. Uma matriz ou transformação linear é chamada unimodular se as entradas da matriz forem inteiras e tiver determinante igual a ± 1.

TEOREMA. *Quaisquer dois pares de geradores de um recticulado maximal Λ estão relacionadas por uma transformação unimodular.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $\Lambda = \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1', v_2' \rangle$ então, exprimindo v_1', v_2' em relação a v_1, v_2 temos $\begin{bmatrix} w_2' \\ w_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ w_1 \end{bmatrix}$ com $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Mat_{2x2}(\mathbb{Z})$. Da mesma forma, $\begin{bmatrix} w_1' \\ w_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1' \\ w_2' \end{bmatrix}$; logo $\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e portanto $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \pm 1$. $\square$

TEOREMA. *Qualquer recticulado Λ é gerado por vectores w_1, w_2, tais que $\tau = w_2/w_1$ pertence ao seguinte conjunto $A = \left\{\tau \in \mathbb{H} : -\frac{1}{2} < \Re\tau \leq \frac{1}{2};\ |\tau| \leq 1;\ \ e\ \Re\tau \leq 0,\ \ se\ \ |\tau| = 1\right\}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Como w_1 e w_2 são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$, temos $\mathrm{Im}\tau \neq 0$. Se $\mathrm{Im}\,\tau = \mathrm{Im}\left(\frac{w_2}{w_1}\right) < 0$ podemos trocar w_1 com w_2 e obter $\mathrm{Im}\,\tau > 0$. Podemos também assumir $|w_1| \leq |w_2|$ pois em caso contrário substituimos w_1 por w_2 e w_2 por $-w_1$ (isto preserva o sinal de $\mathrm{Im}\,\tau$). Finalmente, podemos substituir w_2 por $w_2 + nw_1$ para certo $n \in \mathbb{Z}$ de tal modo que $\left|\mathrm{Re}\left(\frac{w_2}{w_1}\right)\right| \leq \frac{1}{2}$. Se $\mathrm{Re}\left(\frac{w_2}{w_1}\right) = -\frac{1}{2}$ substuitui-se w_2 por $w_2 + w_1$, e se $|\tau| = 1$ faz-se novamente a troca $w_1 \to w_2$, $w_2 \to -w_1$. Após estas substituições $\tau \in A$. $\square$

OBSERVAÇÃO. Também se pode verificar que a escolha de τ em A é única, o que é equivalente a provar que o grupo $PSL(2, \mathbb{Z})$ é gerado por $\tau \mapsto \tau + 1$ e $\tau \mapsto= -\frac{1}{\tau}$, isto é, pelas matrizes $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

8.3. A função $\wp$ de Weierstrass de um recticulado Λ.

Vamos agora construir uma função elíptica com um único pólo duplo em pontos congruentes relativamente a $\Lambda = \langle w_1, w_2 \rangle$. Por simplicidade, tomemos este pólo na origem. Como um factor multiplicativo não interessa, a parte singular será $\frac{1}{z^2} + \frac{a}{z}$. Seja então

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + ...$$

Assim, a parte singular da função $f(z) = \wp(z) - \wp(-z)$ é igual a $\frac{1}{z^2} + \frac{a}{z} - \left(\frac{1}{z^2} - \frac{a}{z}\right) = \frac{2a}{z}$. Como $f(z)$ é claramente uma função elíptica em relação a Λ, e tem um pólo simples na origem, pelo corolário do teorema 1, f é constante; além disso, como $f\left(\frac{w_1}{2}\right) = \wp\left(\frac{w_1}{2}\right) - \wp\left(-\frac{w_1}{2}\right) = \wp\left(\frac{w_1}{2}\right) - \wp\left(\frac{w_1}{2}\right) = 0$, vemos que necessáriamente $f \equiv 0$, isto é, $\wp$ é uma função par, logo a sua expansão em torno da origem só tem potências pares e a sua parte singular é $\frac{1}{z^2}$. Em torno de qualquer ponto do recticulado $w \in \Lambda$, a parte singular será então

$\frac{1}{(z-w)^2}$ o que nos leva a considerar a expressão $\sum_{w\in\Lambda}\frac{1}{(z-w)^2}$. Infelizmente, esta série não converge na região $\mathbb{C}\setminus\Lambda$ (ver exercícios). Para resolver este problema, Weierstrass notou que, mediante a inclusão de um certo termo neste somatório a convergência fica assegurada. Defina-se então, a função $\wp$ de Weierstrass pela fórmula:

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{w\in\Lambda*}\left[\frac{1}{(z-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right],$$

onde $\Lambda^*=\Lambda\setminus\{0\}$ é o conjunto dos pontos não nulos do recticulado $\Lambda\subset\mathbb{C}$. Esta série converge em $\mathbb{C}\setminus\Lambda$ porque:

$$\left|\frac{1}{(z-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right|=\left|\frac{z(2w-z)}{w^2(z-w)^2}\right|\leq\frac{10|z|}{|w|^3}\qquad\text{para}\qquad|z|\leq\left|\frac{w}{2}\right|.$$

Portanto, para verificar que $\wp$ está bem definida, basta ver que $\sum_{w\in\Lambda^*}=\sum\frac{1}{|w|^3}<\infty$. Isto decorre do facto de que existe $k>0$ tal que $|w_1w_1+n_2w_2|\geq k(|n_1|+|n_2|)\ \forall_{n_1,n_2}\in\mathbb{Z}$. Logo

$$\sum_{w\in\Lambda^*}\frac{1}{|w|^3}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{|n_1|+|n_2|=n}\frac{1}{k^3(|n_1|+|n_2|)^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{k^3n^3}<\infty.$$

Proposição. *(Propriedades das funções $\wp$ e $\wp'$ de Weierstrass)*
(1) *$\wp$ é duplamente periódica $\wp(z)=\wp(z+w_1)=\wp(z+w_2)$*
(2) *$\wp$ é par,*
(3) *$\wp'$é também uma função eliptíca e $\wp'(z)=-2\sum_{w\in\Lambda^*}\frac{1}{(z-w)^3}$,*
(4) *$\wp'(z)$ é ímpar e tem zeros apenas nos pontos que verificam $2z\equiv 0$ mod Λ.*
(5) *$\wp'(z)^2=4\wp(z)^3-g_z\wp(z)-g_3$, onde $g_2=60\sum_{w\in\Lambda^*}\frac{1}{w^4}$ e $g_3=140\sum_{w\in\Lambda^*}\frac{1}{w^6}$.*

Demonstração. A propriedade 2 é simples e a 3 decorre do facto que se pode derivar uma série uniformemente convergente termo a termo. Para provar 1, partimos da fórmula de 3; como $\wp'(z)$ é impar e claramente períodica, temos que existe uma constante c tal que $\wp(w_1+z)=\wp(z)+c$ mas com $z=-\frac{w_1}{2}$ vem $\wp\left(\frac{w_1}{2}\right)=\wp\left(-\frac{w_1}{2}\right)+c$ o que implica $c=0$ pois $\wp$ é par. A derivada de uma função par é ímpar, e o cáclulo dos zeros segue de

$$\wp'(\frac{w_1}{2})=-\wp'(-\frac{w_1}{2})=-\wp'(\frac{w_1}{2}),$$

por imparidade e invariância. Daqui decorre a propriedade (4) (detalhes deixados ao leitor). Para provar 5, considera-se a função zeta de Weierstrass (não confundir com a função zeta de Riemann):

$$\zeta(z)=\frac{1}{z}+\sum_{w\in\Lambda^*}\left[\frac{1}{z-w}+\frac{1}{w}+\frac{z}{w^2}\right]$$

verifica-se que $\zeta(z)$ é meromorfa em $\mathbb{C}$ e $-\zeta'(z)=\wp(z)$. Escrevendo:

$$\frac{1}{z-w}+\frac{1}{w}+\frac{z}{w^2}=\frac{-1/w}{1-z/w}+\frac{1}{w}+\frac{z}{w^2}=-\frac{1}{w}\left(1+\frac{z}{w}+\frac{z^2}{w^2}+...\right)+\frac{1}{w}+\frac{z}{w^2}=-\frac{z^2}{w^3}-\frac{z^3}{w^4}-\cdots$$

e notando que $\sum_{w\in\Lambda^*}\frac{1}{w^k}=0$ para k impar, por simetria em relação à origem, obtemos:

$$\zeta(z)=\frac{1}{z}+\sum_{w\in\Lambda^*}\left(-\frac{z^2}{w^3}-\frac{z^3}{w^4}-\cdots\right)=\frac{1}{z}-\sum_{w\in\Lambda^*}\left(\frac{z^3}{w^4}+\frac{z^5}{w^6}+\cdots\right)=\frac{1}{z}-\sum_{k=2}^{\infty}g_kz^{2k-1}$$

onde $g_k=\sum_{w\in\Lambda^*}\frac{1}{w^{2k}}$.

Assim $\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{k=2}^{\infty}(2k-1)g_kz^{2k-2}=\frac{1}{z^2}+3g_2z^2+5g_3z^4+\cdots$

$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6g_2 z + 20g_3 z^3 + \cdots$
$\wp'(z)^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{24g_2}{z^2} - 80g_3 + \cdots$
$\wp(z)^3 = \frac{1}{z^6} + \frac{9g_2}{z^2} + 15g_3 + \cdots$
onde as reticências indicam termos regulares não constantes (holomorfos). Concluimos que $h(z) = \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 60g_2\wp(z) + 140g_3$ é uma função holomorfa elíptica logo ela é necessáriamente constante. Como o desenvolvimento em série de $h(z)$ tem o termo constante nulo, $h(0) = 0$ pelo que $h(z) \equiv 0$, que é a relação pretendida. □

A relação entre $\wp$ e a sua derivada é muito importante na resolução de certas equações diferenciais não lineares. Por exemplo, uma aplicação da função $\wp$ é a resolução explicita da equação de Korteweg-de Vries (KdV), que descreve ondas em água pouco profunda:

$$4\frac{\partial u}{\partial t} = 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

em que a incógnita é a função $u = u(x,t)$, onde x e t são a coordenada espacial e temporal, respectivamente. Para encontrar uma solução desta equação consideremos somente funções $u(x,t)$ que só dependem da quantidade $x - ct$, em que c é constante, e faç amos a mudanç a de variável: $u(x,t) = v(X) = v(x-ct)$. Nesta nova variável v, obtemos a equação $-4cv' = 6vv' + v'''$ (onde $'$ designa derivação em relação a X) e fazendo uma primitivação elementar obtemos $-4cv = 3v^2 + v'' + c_1$. Multiplicando por v', vem $-4cvv' = 3v^2v' + v''v' + c_1v'$ e fazendo outra primitiva vem: $-2cv^2 = v^3 + \frac{1}{2}(v')^2 + c_1v + c_2$, o que é equivalente a

$$\left(\frac{dv}{dX}\right)^2 = -2v^3 - 4cv^2 - 2c_1v - c_2$$

Comparando esta equação com a propriedade 4 da função $\wp$ de Weierstrass, obtemos uma solução explícita !!!

$$u(x,t) = -2\wp(x - ct) + c_3$$

onde $\wp$ é a função $\wp$ de Weierstrass associada a um recticulado que depende das constantes de integração c_1 e c_2.

Este tipo de soluções que dependem de $x - ct$ são soluções que possuem uma forma fixa e se movem com velocidade c. Assim, são chamadas solitões. Note-se que, fazendo $c_1 = c_2 = 0$, obtemos: $\left(\frac{dv}{dX}\right)^2 = -2v^3 - 4cv^2$. Esta equação mais simples pode ser resolvida por uma função do tipo:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}c\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{c}\,(x - ct - x_0)\right)$$

o que indica, mais uma vez que as funções elípticas são uma generalização das funções trigonométricas.

Voltando ao caso geral, note-se que temos uma relação implícita:

$$X = x - ct = \int_{-\infty}^{v} = \frac{ds}{\sqrt{-2s^3 - 4cs^2 - 2c_1s - c_2}} + c_4.$$

Este integral, tal como outros integrais da forma $\int \frac{p(x)}{\sqrt{q(x)}}dx$, onde $p(x)$ e $q(x)$ são polinómios, e $q(x)$ tem grau 3 ou 4, é chamado um integral elíptico, pois podem ser descritos em termos de funções elípticas, através de relações semelhantes à propriedade 4 da função $\wp$.

Foram precisamente os integrais deste tipo que motivaram inicialmente o estudo das funções elípticas; de facto, o comprimento de arco de uma elí pse no plano é dado por um integral deste tipo e é precisamente por esta razão que se resolveu dar às funções duplamente periódicas (que como vimos estão relacionadas com os integrais elí pticos) o nome de funções elípticas.

Finalmente, podemos acrescentar que, no caso em que $q(x)$ é um polinómio de grau superior a 4 os integrais $\int \frac{p(x)}{\sqrt{q(x)}}dx$ são chamados integrais hiperelípticos e a mesma equação KdV tem muitas outras soluçõs solitónicas, obtidas a partir de funções hiperelípticas, associadas a estes integrais.

8.4. Exercícios

8.1 Recorde que a função $\wp$ de Weierstrass, relativa ao recticulado Λ gerado por dois períodos ω_1 e ω_2 é dada por:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right].$$

Prove que $\wp'(z)$ tem três zeros no polígono fundamental $P = \{t_1\omega_1 + t_2\omega_2 : 0 \leq t_1, t_2 < 1\}$, e que são todos simples.

8.2 Seja Λ um recticulado e $\sigma(z) = z \prod_{\omega \in \Lambda^*} E_3(\frac{z}{\omega})$, onde $E_3(w) = (1-w)e^{w + \frac{w^2}{2}}$. Mostre que σ é inteira, ímpar e que

$$\wp_\Lambda(z) = -\frac{d}{dz}\left(\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}\right).$$

8.3 Seja Λ um recticulado maximal em $\mathbb{C}$, e seja $\Lambda_2 := \{z \in \mathbb{C} : 2z \in \Lambda\}$. Mostre que se $f(z)$ tem zeros simples em $\Lambda_2 \setminus \Lambda$ e polos triplos em Λ então $f(z) = c\wp'(z)$, para uma certa constante $c \in \mathbb{C}$.

8.4 Seja τ um número complexo com parte imagnária positiva. Considere a função de Jacobi $\vartheta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n e^{2\pi i n z} e^{\pi i n(n+1)\tau}$ e assuma a convergência uniforme desta série em $\mathbb{C}$. (a) Mostre as relações:

$$\begin{aligned} \vartheta(z+1) &= \vartheta(z) \\ \vartheta(z+\tau) &= -e^{-2\pi i(z+\tau)}\vartheta(z) \\ \vartheta(-z) &= -e^{2\pi i z}\vartheta(z). \end{aligned}$$

(b) Use as relações acima para demonstrar que $\vartheta(z)$ tem zeros simples nos pontos do recticulado gerado por 1 e τ e que estes são os únicos zeros de $\vartheta(z)$ em $\mathbb{C}$.

8.5 Seja $\tau \in \mathbb{H}$, Λ o recticulado gerado por 1 e τ, e $\theta(z)$ uma função inteira ímpar que verifica

$$\begin{cases} \theta(z+1) = & \theta(z) \\ \theta(z+\tau) = & -e^{-2\pi i z - \pi i \tau}\,\theta(z), \qquad \forall z \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

(a) Mostre que $\frac{d}{dz}\left(\frac{\theta'(z)}{\theta(z)}\right)$ é uma função elíptica em relação a Λ. (b) Mostre que $\theta(z)$ tem zeros simples nos pontos de Λ, que estes são os únicos zeros de $\theta(z)$ e que existe uma constante $c \in \mathbb{C}$ tal que $\wp(z) = -\frac{d}{dz}\left(\frac{\theta'(z)}{\theta(z)}\right) + c$, onde $\wp(z)$ é a função $\wp$ de Weierstrass relativa ao recticulado Λ.

Bibliografia

[1] Lars V. Ahlfors. *Complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics.

[2] Joseph Bak and Donald J. Newman. *Complex analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, third edition, 2010.

[3] A. F. Beardon. *Complex analysis*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1979. The argument principle in analysis and topology, A Wiley-Interscience Publication.

[4] John B. Conway. *Functions of one complex variable. II*, volume 159 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[5] Theodore W. Gamelin. *Complex analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2001.

[6] Robert E. Greene and Steven G. Krantz. *Function theory of one complex variable*, volume 40 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2002.

[7] Serge Lang. *Complex analysis*, volume 103 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, fourth edition, 1999.

[8] Reinhold Remmert. *Theory of complex functions*, volume 122 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. Translated from the second German edition by Robert B. Burckel, Readings in Mathematics.

[9] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.