Ensino & Informação Revista®
Prof: Altamir A. R. Araldi

Sejam **A** e **B** duas **Matrizes** tais que o produto (a notação para este produto sendo "**.**") destas resulta na **Matriz Nula** "**0**" (todos os elemento iguais a **ZERO**). Isto é, suponhamos que **A.B = 0**.

Nos Números Naturais ($\mathbb{N}$), Inteiros ($\mathbb{Z}$), Racionais ($\mathbb{Q}$), Reais ($\mathbb{R}$) e Complexos ($\mathbb{C}$), dados dois números **x** e **y** com **x.y=0**, então podemos afirmar que **x =0** ou **y=0**.

Mas aqui em se tratando de Matrizes é diferente, isto é, se duas matrizes são tais que **A.B =0**, não é verdade que se deve ter **A = 0** ou **B = 0**. Para ver isto, mostremos o seguinte **CONTRA-EXEMPLO**:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Note-se que **A ≠ 0** e **B ≠ 0**. Mas **A.B = 0**=$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$.

Isto acontece no Conjunto das Matrizes porque o Conjunto das Matrizes munido das duas Operações Internas "Adição (**+**)" e "Multiplicação (**.**)" de matrizes,[1] mesmo possuindo um elemento chamado de **Elemento Neutro da Multiplicação de Matrizes ou Matriz Identidade I**=$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (isto é, para toda matriz **M**, tem-se **M.I=I.M=M**), porque o Conjunto das matrizes munido destas operações não é um **DOMÍNIO DE INTEGRIDADE**.

Definição: Seja X≠Ø um Conjunto (diferente do Conjunto Vazio). Um **Anel**[2] (**X**,**+**,**.**) com **Identidade ou Elemento Neutro** "**e**" (**e.a=a.e**, para todo **a ϵ X**) – aqui em se tratando de Matrizes, o Elemento Neutro é a **Matriz Identidade I** tal que **I.A=A.I**, para toda Matriz **A** - é denominado de Domínio de Integridade **se, e somente se (⇔)**, dados dois elementos **a ϵ X** e **b ϵ X**, tem-se:

a.b = 0 ⇔ a = 0 ou **b=0**.

Proposição: Em um Domínio de Integridade vale a **Lei do Cancelamento**, isto é: Dados dois elementos **a ϵ X** e **b ϵ X**, tem-se:

Se **a.b = a.c**, então se deve ter obrigatoriamente **b=c**.

Ou dito em linguagem mais formal,

a.b* = *a.c* ⇒ *b*=*c (lê-se**: a.b=a.c "IMPLICA QUE" b=c**).

Demonstração: Usaremos a **Demonstração por Contradição**. Isto é, suponhamos **a≠0** e que tenhamos **a.b = a.c com b≠c**. Assim,

a.b = a.c ⇔ a.b – a.c = 0 ⇔ a.(b-c) = 0. Como **X** é um Domínio de Integridade e **a≠0 (por hipótese)**, então (⇒) se deve ter obrigatoriamente **b-c = 0**, ou **Equivalente (⇔)**, **b=c**.

Vejamos que no Conjunto das Matrizes (**X**, **+**, **.**) **não** é um Domínio de Integridade – e assim, que neste Conjunto **não** vale a Lei do Cancelamento. Vejamos o seguinte **CONTRA-EXEMPLO.** Sejam as matrizes A, B e C como abaixo:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix};$$

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$C=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podemos verificar que $A.B=A.C=\begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 15 & 0 & -5 \\ -3 & 15 & 0 & -5 \end{bmatrix}$, mas B≠C.

____

[1] Uma **Operação Binária** (Operação Interna, no caso) no Conjunto **X** é uma **Função F** que leva um elemento do **Produto Cartesiano X** x **X** [**M** x **N** igual ao Conjunto de todos os **pares ordenados (m,n)** onde **m ϵ M** e **n ϵ N**] no Conjunto **X**, isto é, **F:X** x **X →X**.

[2] Um Anel (**X,+,.**) é um Conjunto **X** munido de duas Operações Internas uma de Adição denotada por "**+**" e outra de Multiplicação denotada por "**.**" onde (**X,+**) é um **Grupo Comutativo** e (**X,.**) é um **Grupo** com **Elemento Neutro** "e" (**e.a=a.e**, para todo **a ϵ X**) e onde vale a **Lei Distributiva da**

Adição em Relação a Multiplicação, isto é, **a.(b+c)=a.b+a.c**, para todo **a**, **b** e **c** pertencentes a **X**)

OBSERVAÇÃO: Resolvemos reproduzir aqui a definição de ANEL, senão vejamos:

DEFINIÇÃO: Sejam **(x,y) → x + y** e **(x,y) → x.y** leis de composição internas num conjunto X.

Suponhamos que

I)Em relação à primeira dessas leis (Adição) **X** tem uma estrutura de Grupo Comutativo, isto é

i)∀ **a**, **b**, **c** em **X**, então **a + (b + c) = (a + b) + c** (Propriedade Associativa da adição);
ii)∀ **a**, **b**, então **a + b = b + a** (Propriedade Comutativa da adição);
iii)∃ o (artigo definido "o", pois é único) Elemento Neutro para esta lei. Será indicado pelo símbolo $\mathbf{0_X}$ ou apenas **0** quando não houver possibilidade de confusão;
iv)Todo elemento **a ∊ X** possui o Elemento Simétrico para esta lei. Ou seja: ∀ **a ∊ X** ⇒ **∃!** (existe um único) elemento em **X**, denotado por **(-a)** tal que **a + (-a) = 0**.

II)A segunda dessas leis (Multiplicação) possui a Propriedade Associativa, isto é, ∀ **a**, **b**, **c** em **X**, então **a . (b . c) = (a . b) . c**;
III)A multiplicação possui a Propriedade Distributiva em relação a Operação de Adição, isto é, ∀ **a**, **b**, **c** em **X**, então **a . (b + c) = a . b + a . c**;
IV)∃ o (artigo definido "o", pois é único) Elemento Neutro para esta lei. Será indicado pelo símbolo $\mathbf{1_X}$ ou apenas **1** quando não houver possibilidade de confusão, tal que ∀ **a ∊ X** ⇒ **a . 1 = 1 . a = a**.

Nas condições explicitadas acima, dizemos que a **terna ordenada (X, Adição, Multiplicação)** ou, resumidamente, **(X, +, .)** é um **ANEL**.

Por abuso de linguagem é comum dizer-se apenas "**X é um Anel**" para expressar a Definição acima apresentada. Isto naturalmente pressupõe que as duas Leis de Composição Internas tenham sido fixadas "*a priori*".