Desenhe e conecte os pontos, e coloque setas nas duas extremidades – aí está a sua reta.

Isso é muito fácil com uma calculadora gráfica. Apenas digite $y = 3x + 5$ e sua calculadora irá desenhar o gráfico da reta e produzir uma tabela como a Tabela 5-1.

Equação de uma reta na forma inclinação-interseção (ou forma reduzida) e forma ponto-inclinação

Você pode ver que a reta na Figura 5-9 cruza o eixo y no ponto 5 – esse é o ponto onde a reta intercepta o eixo y. Visto que tanto a inclinação de 3 como a interseção no eixo y de 5 aparecem na equação $y = 3x + 5$, essa equação é dita estar na forma *inclinação-interseção*. Aqui está a forma escrita de maneira geral:

$$y = mx + b$$

(onde m é a inclinação e b é o ponto de interseção no eixo y)

(Se isso não te faz lembrar de nada – nem mesmo uma lembrança distante – vá diretamente ao departamento de matrícula e abandone o cálculo, mas de maneira alguma devolva esse livro).

Todas as retas, com exceção das retas *verticais*, podem ser escritas dessa forma. Retas verticais sempre se parecem com $x = 6$. O número diz a você onde a reta vertical cruza o eixo x.

A equação de uma reta *horizontal* também parece diferente, $y = 10$, por exemplo. Mas ela tecnicamente se encaixa na forma $y = mx + b$ — somente porque a inclinação da reta horizontal é igual à zero, e porque zero multiplicado por x é zero, não há um termo x na equação.

DICA

Uma reta é o tipo mais simples de função, e uma reta horizontal (chamada de função *constante*) é o tipo de reta mais simples. É, todavia, razoavelmente importante em cálculo, então se certifique de saber que a reta horizontal tem uma equação do tipo $y = 10$ e que sua inclinação é igual a zero.

Se $m = 1$ e $b = 0$, você tem a função $y = x$. Essa reta passa pela *origem* (0,0) e faz um ângulo de 45° com ambos os eixos. É chamada de função *identidade* porque os inputs são iguais aos outputs.

Em adição à forma inclinação-intercepto para a equação da reta, você deve saber a forma do *ponto-inclinação*:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Para usar essa forma, você precisa saber – você adivinhou – um *ponto* na reta e a *inclinação* da reta. Você pode usar qualquer ponto da reta. Considere novamente a reta na Figura 5-9. Escolha qualquer ponto, digamos (2,11), depois coloque as coordenadas x e y do ponto em x_1 e y_1, e coloque o coeficiente angular, 3, em m.

$$y - 11 = 3\,(x - 2)$$

Com um pouquinho de álgebra você pode transformar essa equação em uma que nós já conhecemos, $y = 3x + 5$. Tente.

Função de 2° grau e modular – mesmo trabalho

Você deve estar familiarizado com as duas funções mostradas na Figura 5-10: a função de 2º grau, $f(x) = x^2$, e a funçãomodular, $g(x) = |x|$.

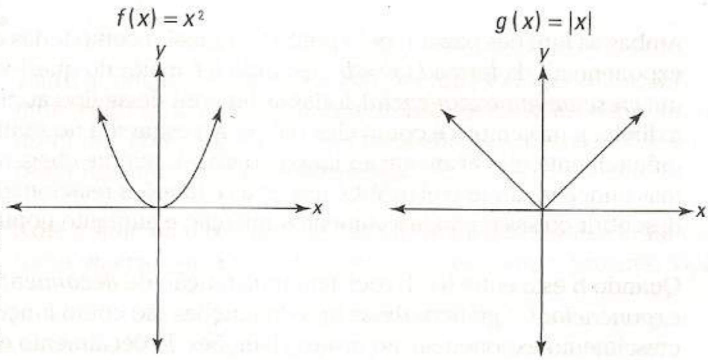


Figura 5-10: Os gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = |x|$.

Note que ambas as funções são simétricas com respeito ao eixo y. Em outras palavras, os lados direito e esquerdo de cada gráfico são reflexos um do outro. Isso os torna funções *pares*. Uma função *polinomial* do tipo $y = 9x^4 - 4x^2 + 3$, onde todas as potências de x são pares (com ou sem um termo constante), é um tipo de função par. Outro tipo de função par é $y = cos\,(x)$ (veja o Capítulo 6).

Algumas funções esquisitas

Faça o gráfico das funções $f(x) = x^3$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$ na sua calculadora gráfica. Essas duas funções ilustram uma simetria ímpar. Funções ímpares são simétricas com relação à origem o que significa que se você as girar em 180° sobre a origem, elas vão aterrissar nelas mesmas. Uma função polinomial do tipo $y = 4x^5 - x^3 + 2x$, onde todas as potências de x são ímpares, é um tipo de função ímpar. Outra função ímpar é $y = sen(x)$ (veja o Capítulo 6).

Muitas funções não são nem pares e nem ímpares, por exemplo, $y = 3x^2 - 5x$. Minha professora do ensino médio disse que um parágrafo nunca deveria ter apenas uma sentença, então voilà, agora ele tem duas.

Funções exponenciais

Uma função exponencial é uma com uma potência que contém uma variável, como $f(x) = 2^x$ *ou* $g(x) = 10^x$. A Figura 5-11 mostra os gráficos dessas duas funções no mesmo sistema de coordenadas *x-y*.

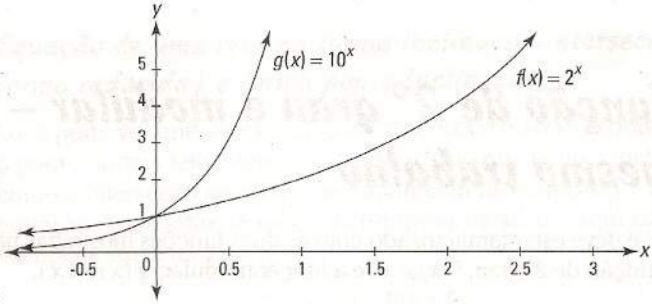


Figura 5-11: Os gráficos de $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 10^x$.

Ambas as funções passam pelo ponto (0,1), assim como todas as funções exponenciais da forma $f(x) = b^x$. Quando b é maior do que 1 você tem um *crescimento exponencial*. Todas as funções desse tipo aumentam para a direita para sempre, e como elas vão para a esquerda no sentido negativo infinitamente, elas avançam ao longo do eixo *x*, sempre chegando perto, mas nunca tocando o eixo. Você usa essas e funções relacionadas para descobrir coisas como investimentos, inflação e aumento populacional.

Quando b está entre 0 e 1, você tem uma função de *decaimento exponencial*. Os gráficos desse tipo de funções são como funções de crescimento exponencial ao inverso. Funções de decaimento exponencial também cruzam o eixo *y* no ponto (0,1), mas elas sobem para a *esquerda* para sempre, e avançam ao longo do eixo *x* para a *direita*. Essas funções exemplificam coisas que encolhem ao longo do tempo, como o decaimento radiativo do urânio.

Funções logarítmicas

Uma função logarítmica é simplesmente uma função exponencial com o eixo *x* e *y* trocado. Em outras palavras, a direção para cima e para baixo em um gráfico exponencial corresponde à direção direita e esquerda em um gráfico logarítmico, e a direção direita e esquerda em um gráfico exponencial corresponde à direção para cima e para baixo em um gráfico logarítmico (Se você quiser uma revisão sobre logs, veja o Capítulo 4). Você pode ver essa relação na Figura 5-12, na qual ambas as funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$ são desenhadas no mesmo conjunto de eixos.

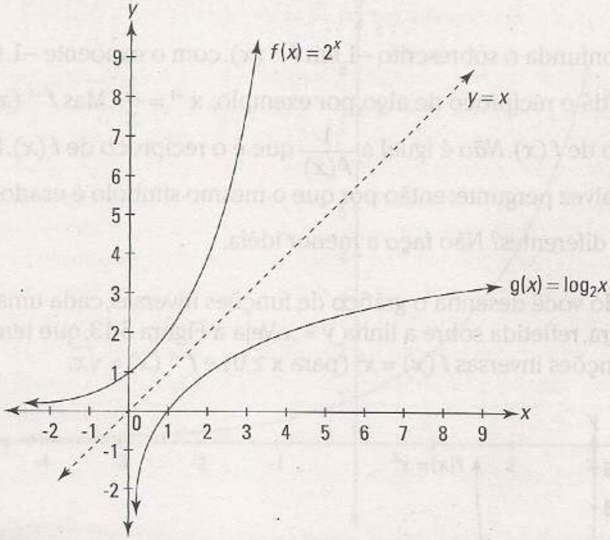


Figura 5-12: Os gráficos de $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$.

Tanto a função exponencial como a função logarítmica são monotônicas. Uma função monotônica pode subir sobre todo o seu domínio (chamada de função *crescente*) ou descer sobre todo o seu domínio (uma função *decrescente*).

Note a simetria das duas funções na Figura 5-12 sobre a linha $y = x$. Isso as torna *inversas* uma da outra, o que nos leva para o próximo tópico.

Funções inversas

As funções $f(x) = x^2$ (para $x \geq 0$) e a função $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ (lê-se como "*f* inversa de *x é igual a raiz de x*") são funções inversas porque cada uma desfaz o que a outra fez. Em outras palavras, $f(x) = x^2$ recebe uma entrada de 3 e produz uma saída de 9 (porque $3^2 = 9$); $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ recebe uma entrada de 9 e torna isso de volta ao número 3 (porque $\sqrt{9} = 3$). Note que $f(3) = 9$ e $f^{-1}(9) = 3$. Você pode escrever tudo isso em um passo como $f^{-1}\left(f(3)\right) = 3$. Funciona da mesma maneira se você começar com $f^{-1}(x)$. $f^{-1}(16) = 4$ (porque $\sqrt{16} = 4$), e $f(4) = 16$ (porque $4^2 = 16$). Se você escreve esse único passo, você tem $f\left(f^{-1}(16)\right) = 16$ (Note que lemos $f^{-1}(x)$ como "*f* inversa de *x*", não temos o inverso de *x*, mas as funções são inversas uma da outra).

BOBAGEM MATEMÁTICA

A maneira sofisticada de somar tudo isso é dizer que $f(x)$ e $f^{-1}(x)$ são funções inversas se, e somente se, $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$ e $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$.

ATENÇÃO!

Não confunda o sobrescrito –1 em $f^{-1}(x)$ com o expoente –1. O expoente –1 lhe dá o recíproco de algo, por exemplo, $x^{-1} = \frac{1}{x}$. Mas $f^{-1}(x)$ é o inverso de $f(x)$. *Não* é igual a $\frac{1}{f(x)}$ que é o recíproco de $f(x)$. É claro que você talvez pergunte: então por que o mesmo símbolo é usado para duas coisas diferentes? Não faço a menor idéia.

Quando você desenha o gráfico de funções inversas, cada uma é o reflexo da outra, refletida sobre a linha $y = x$. Veja a Figura 5-13, que tem os gráficos das funções inversas $f(x) = x^2$ (para $x \geq 0$) e $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

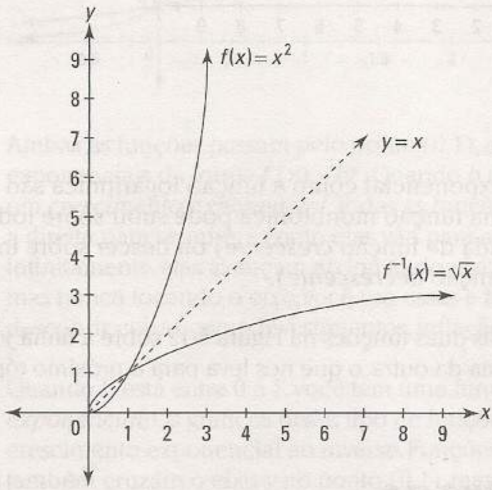


Figura 5-13: Os gráficos de $f(x) = x^2$ (para $x \geq 0$) e $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Se você rotacionar o gráfico na Figura 5-13 no sentido anti-horário para que a linha $y = x$ fique vertical, você pode ver facilmente que $f(x)$ e $f^{-1}(x)$ são reflexos uma da outra. Uma conseqüência dessa simetria é que se um ponto como (2,4) estiver em uma das funções, o ponto (4,2) vai estar na outra. E também, o domínio de f é o contradomínio de f^{-1} e o contradomínio de f é o domínio de f^{-1}.

Deslocamentos, reflexos, esticamentos e reduções

Qualquer função pode ser transformada em uma função correspondente, deslocando-a horizontalmente ou verticalmente, virando (refletindo) horizontalmente ou verticalmente, ou esticando ou reduzindo horizontalmente ou verticalmente. Eu faço os deslocamentos horizontais primeiro. Considere a função exponencial $y = 2^x$. Veja a Figura 5-14.

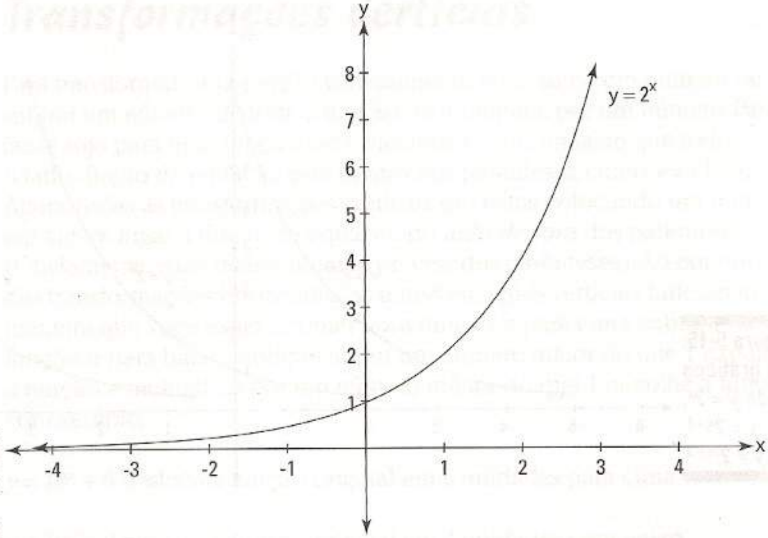


Figura 5-14: O gráfico de $y = 2^x$.

Transformações horizontais

Transformações horizontais são feitas somando um número ou diminuindo um número da variável de entrada x ou multiplicando x por qualquer número. Todas as transformações horizontais, exceto o reflexo, funcionam da maneira *oposta* que você espera: Somando um valor a x faz a função se deslocar para a esquerda, subtraindo um valor de x faz a função se deslocar para a direita, multiplicando x por um número maior do que 1 reduz a função, e multiplicando x por um número menor do que 1 estica a função. Por exemplo, o gráfico de $y = 2^{x+3}$ tem a mesma forma e orientação do que o gráfico da Figura 5-14; é apenas deslocado em três unidades para a esquerda. Em vez de passar pelos pontos (0,1) e (1,2), a função deslocada passa por (–3,1) e (–2,2). E o gráfico de $y = 2^{x-3}$ está a três unidades à direita de $y = 2^x$. A função original e as transformações são mostradas na Figura 5-15.

Se você multiplicar o x em $y = 2^x$ por 2, a função reduz horizontalmente por um fator de 2. Então todo ponto na nova função é metade da sua distância original do eixo y. A coordenada y de cada ponto continua a mesma; a coordenada x é cortada pela metade. Por exemplo, $y = 2^x$ passa por (1,2), então $y = 2^{2x}$ passa por $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$; $y = 2^x$ passa por $\left(-4, \frac{1}{16}\right)$, então $y = 2^{2x}$ passa por $\left(-2, \frac{1}{16}\right)$. Multiplicando x por um número menor do que 1 tem um efeito oposto. Quando $y = 2^x$ é transformado em $y = 2^{\frac{1}{4}x}$, cada ponto em $y = 2^x$ é afastado do eixo y por uma distância 4 vezes maior do que era. Para visualizar o gráfico de $y = 2^{\frac{1}{4}x}$, imagine que você tem o gráfico de $y = 2^x$ em um sistema de coordenadas elástico. Agarre o sistema de coordenadas na esquerda e na direita e estique por um fator de 4, afastando tudo do eixo y, mas mantendo o eixo y no centro. Agora você tem o gráfico de $y = 2^{\frac{1}{4}x}$.

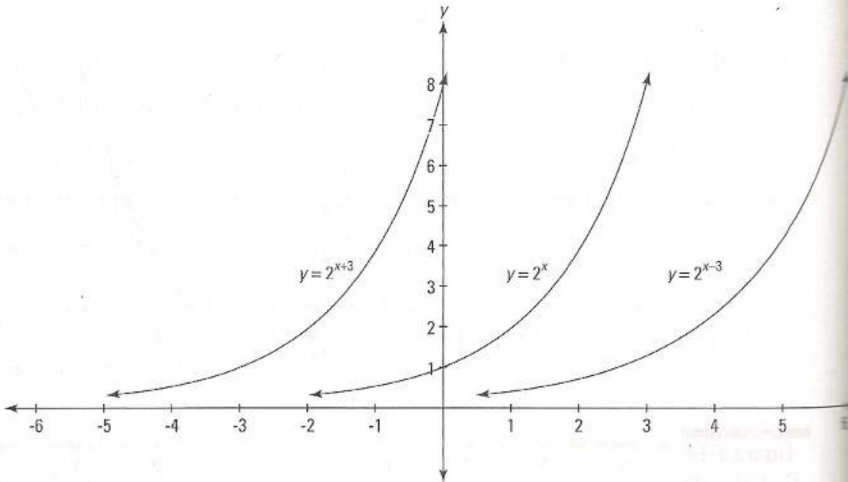


Figura 5-15: Os gráficos de $y = 2^x$, $y = 2^{x+3}$, $y = 2^{2x+3}$.

O último deslocamento horizontal é um reflexo sobre o eixo *y*. Multiplicando o *x* em $y = 2^x$ por -1 vai refletir ou virar em torno do eixo *y*. Por exemplo, o ponto (1,2) se torna (–1,2) e $\left(-2,\frac{1}{4}\right)$, se torna $\left(2,\frac{1}{4}\right)$. Veja a Figura 5-16.

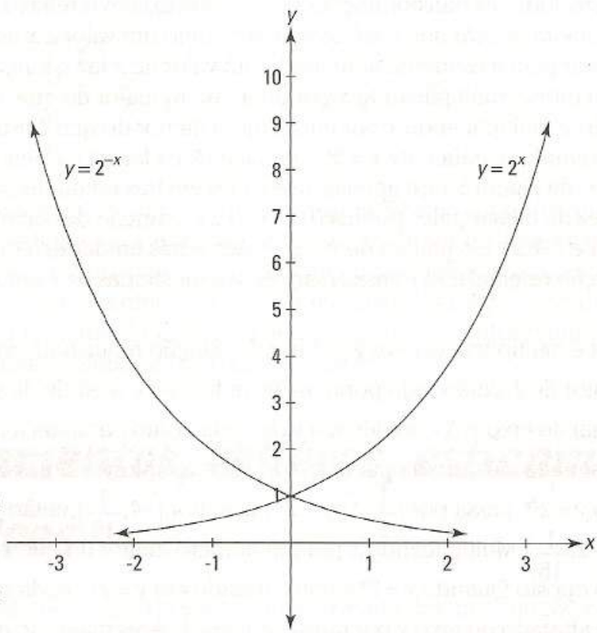


Figura 5-16: Os gráficos de $y = 2^x$ e $y = 2^{-x}$.

Transformações verticais

Para transformar uma função verticalmente, você soma um número ou subtrai um número de toda a função ou multiplica por um número. Para fazer algo para uma função toda, digamos $y = 10^x$, imagine que todo o lado direito da equação está dentro dos parênteses, como $y = (10^x)$. Agora, todas as transformações verticais são feitas colocando um número em algum lugar à direita da equação do *lado de fora* dos parênteses (Obviamente, você realmente não precisa dos parênteses). Ao contrário das transformações horizontais, as transformações verticais funcionam da maneira que você espera: Somar faz a função ir para cima, subtrair faz a função ir para baixo, multiplicar por um número maior do que 1 expande a função, e multiplicar por um número menor do que 1 encolhe a função. Por exemplo,

$y = 10^x + 6$ desloca a função original em 6 unidades para cima

$y = 10^x - 2$ desloca a função original em 2 unidades para baixo

$y = 5 \cdot 10^x$ expande a função original verticalmente por um fator igual à 5

$y = \frac{1}{3} \cdot 10^x$ reduz a função original horizontalmente por um fator igual à 3.

Ao multiplicar a função por -1, ela vai refletir sobre o eixo x, ou, em outras palavras, virar de cabeça para baixo.

Capítulo 6

A dança da trigonometria

Neste capítulo

- Arremessando para eles com SohCahToa
- Todo mundo tem um ângulo: 30°, 45°, 60°
- Circunavegando um círculo unitário
- Fazendo o gráfico de funções trigonométricas
- Investigando funções trigonométricas inversas

Muitos problemas de cálculo envolvem trigonometria, e o cálculo por si só é um desafio suficiente se tivermos que reaprender a trigonometria ao mesmo tempo. Então, se sua trigonometria estiver enferrujada – eu estou chocado – revise essas noções básicas, ou faça outra coisa.

Estudando trigonometria no acampamento SohCahToa

O estudo da trigonometria começa com o triângulo retângulo. As três funções mais importantes da trigonometria (seno, cosseno e tangente) e seus recíprocos (co-secante, secante e co-tangente) dizem a você algo sobre as medidas dos lados de um triângulo que contém um ângulo agudo dado – como o ângulo x na Figura 6-1. O maior lado desse triângulo retângulo (ou de qualquer triângulo retângulo), o lado diagonal, é chamado de *hipotenusa*. O lado que mede 3 unidades é chamado de lado *oposto* porque está no lado oposto ao ângulo x, e a medida do lado é 4 e é chamado de lado *adjacente* porque é adjacente a, ou tocando, o ângulo x.

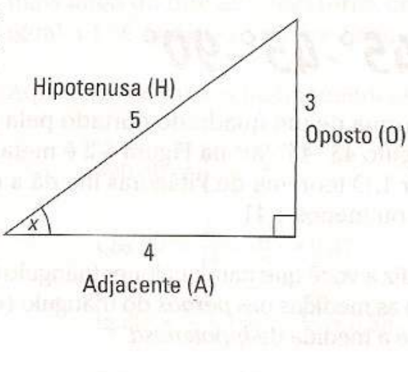


Figura 6-1: Sentado ao redor da fogueira, estudando um triângulo retângulo.

SohCahToa é um mnemônico sem sentido que ajuda você a se lembrar as definições das funções seno, cosseno, e tangente. *SohCahToa* usa as letras iniciais de *seno*, *cosseno*, e *tangente*, e as letras iniciais de *hipotenusa*, *oposto*, e *adjacente* para ajudar você a se lembrar das definições a seguir (Para lembrar como se soletra *SohCahToa*, note a sua pronuncia e o fato de que contém três grupos de letras em cada sílaba).

Soh	**Cah**	**Toa**
$\text{sen}\,\theta = \dfrac{\mathbf{O}}{\mathbf{H}}$	$\cos\theta = \dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{H}}$	$\text{tg}\,\theta = \dfrac{\mathbf{O}}{\mathbf{A}}$

Para o triângulo na Figura 6-1,

$$\text{sen}\,x = \frac{O}{H} = \frac{3}{5} \qquad \cos x = \frac{A}{H} = \frac{4}{5} \qquad \text{tg}\,x = \frac{O}{A} = \frac{3}{4}$$

As outras três funções são recíprocas dessas: co-secante (csc) é o recíproco do seno, secante (sec) é o recíproco do cosseno, e a co-tangente (cot) é o recíproco da tangente.

$$\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta} = \frac{1}{\frac{O}{H}} = \frac{H}{O}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{A}{H}} = \frac{H}{A}$$

$$\text{cotg}\,\theta = \frac{1}{\text{tg}x} = \frac{1}{\frac{O}{A}} = \frac{A}{O}$$

Então para o triângulo na Figura 6-1,

$$\text{cosec}\,x = \frac{H}{O} = \frac{5}{3} \qquad \sec x = \frac{H}{A} = \frac{5}{4} \qquad \text{cotg}\,x = \frac{A}{O} = \frac{4}{3}$$

Dois triângulos retângulos especiais

Visto que muitos problemas básicos de cálculo envolvem ângulos de 30°, 45°, e 60°, é uma boa idéia decorar os dois triângulos retângulos na Figura 6-2.

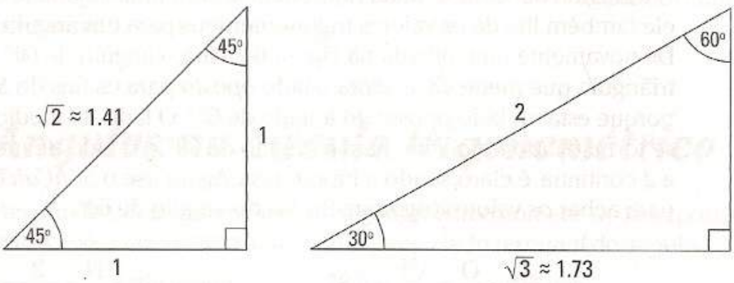
O triângulo 45°-45°-90°

Todo 45°-45°-90° tem a forma de um quadrado cortado pela metade na sua diagonal. O triângulo 45°-45°-90° na Figura 6-2 é metade de um quadrado de lados 1 por 1. O teorema de Pitágoras lhe dá a medida da hipotenusa, $\sqrt{2}$, ou mais ou menos 1,41.

LEMBRE-SE

Oteorema de Pitágoras diz a você que para qualquer triângulo retângulo, $a^2 + b^2 = c^2$, onde a e b são as medidas das *pernas* do triângulo (os lados que tocam o ângulo reto) e c é a medida da *hipotenusa*.

Figura 6-2: O triângulo 45°-45°-90° e o triângulo 30°-60°90°.



Quando você aplica as funções trigonométricas *SohCahToa* e seus recíprocos ao triângulo 45°-45°-90°, você tem os seguintes valores trigonométricos:

$$\text{sen } 45° = \frac{H}{O} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71 \qquad \text{cosec } 45° = \frac{H}{O} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$$

$$\cos 45° = \frac{A}{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71 \qquad \sec 45° = \frac{H}{A} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$$

$$\text{tg } 45° = \frac{O}{A} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \text{cotg } 45° = \frac{A}{O} = \frac{1}{1} = 1$$

O triângulo 30°-60°-90°

Todo triângulo 30°-60°-90° é metade de um triângulo eqüilátero.

O triângulo 30°-60°-90° na Figura 6-2 é metade de um triângulo eqüilátero de 2-por-2-por-2. Ele tem pernas que medem 1 e $\sqrt{3}$ (mais ou menos 1,73), e uma hipotenusa de medida igual a 2.

ATENÇÃO!

Não cometa o erro comum de trocar o 2 pela $\sqrt{3}$ em um triângulo 30°-60°-90°. Lembre-se que o 2 é maior que $\sqrt{3}$ ($\sqrt{4}$ é igual a 2, então $\sqrt{3}$ deve se menor do que 2) e que a hipotenusa é sempre o maior lado de um triângulo retângulo.

DICA

Quando você amplia um triângulo 30°-60°-90°, exagere o fato de que é mais largo do que alto. Isso torna óbvio que o menor lado (de medida igual a 1) é oposto ao menor ângulo (30°).

Aqui estão os valores trigonométricos para o triângulo 30°-60°-90°.

$$\text{sen } 30° = \frac{H}{O} = \frac{1}{2} \qquad \text{cosec } 30° = \frac{H}{O} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\cos 30° = \frac{A}{H} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87 \qquad \sec 30° = \frac{H}{A} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}15$$

$$\text{tg } 30° = \frac{O}{A} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58 \qquad \text{cotg } 30° = \frac{A}{O} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$$

O triângulo 30°-60°-90° mata dois coelhos com uma cajadada só porque ele também lhe dá os valores trigonométricos para um ângulo de 60°. Dê novamente uma olhada na Figura 6-2. Para o ângulo de 60°, o lado do triângulo que mede $\sqrt{3}$ é agora o lado *oposto* para os fins do *SohCahToa* porque está no lado oposto do ângulo de 60°. O lado de medida igual a 1 se torna o lado *adjacente* para o ângulo de 60°, e o lado de medida igual a 2 continua, é claro, sendo a hipotenusa. Agora use o *SohCahToa* de novo para achar os valores trigonométricos do ângulo de 60°.

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{O}{H} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87 \qquad \text{cosec } 60^\circ = \frac{H}{O} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}15$$

$$\cos 60^\circ = \frac{A}{H} = \frac{1}{2} \qquad \sec 60^\circ = \frac{H}{A} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{O}{A} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \approx 1{,}73 \qquad \text{cotg } 60^\circ = \frac{A}{O} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58$$

O mnemônico *SohCahToa*, junto com os dois triângulos retângulos muito fáceis de serem lembrados na Figura 6-2, te dão a resposta para 18 problemas trigonométricos!

Circulando o inimigo com o círculo unitário

SohCahToa somente funciona com triângulos retângulos, e assim só pode lidar com ângulos *agudos* – ângulos menores que 90° (Os ângulos em um triângulo devem somar 180° porque um triângulo retângulo tem um ângulo de 90°, e os outros dois ângulos devem ser menores do que 90°). Com o *círculo trigonométrico (unitário)*, no entanto, você pode achar valores trigonométricos para qualquer tamanho de ângulo. O *círculo trigonométrico* tem um raio de *uma unidade* e é fixado em um sistema de coordenadas *x-y* com o seu centro na origem. Veja a Figura 6-3.

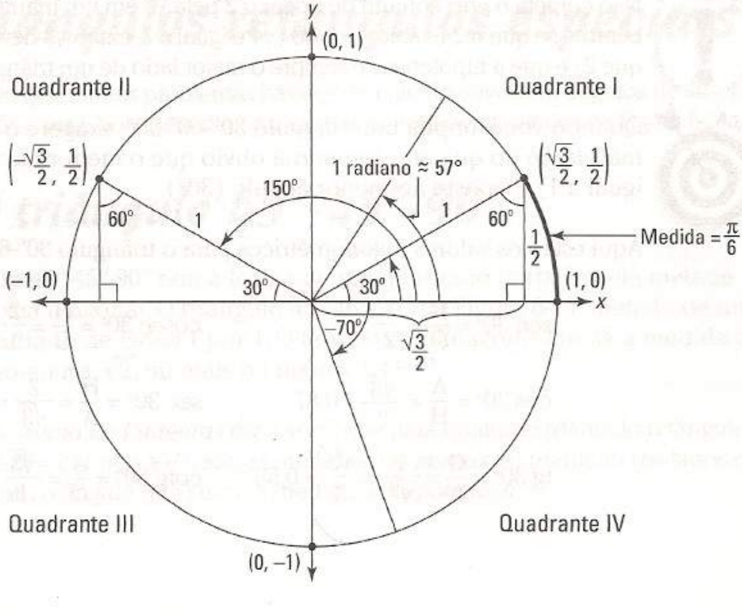


Figura 6-3: O tão falado círculo trigonométrico.

A Figura 6-3 tem bastante informação, mas não entre em pânico; tudo vai fazer sentido em um minuto.

Ângulos no círculo trigonométrico

LEMBRE-SE

Para medir um ângulo no círculo trigonométrico, comece no lado positivo do eixo x e siga em sentido anti-horário para o lado *terminal* do ângulo.

Por exemplo, o ângulo de 150° na Figura 6-3 começa no lado positivo do eixo x e termina no segmento que toca o círculo unitário no ponto $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Se, em vez disso, você seguir no sentido horário, você pode obter um ângulo com medida *negativa*.

Medindo ângulos com radianos

Você sabe tudo sobre *graus*. Você sabe como são ângulos de 45° e de 90°; você sabe que *meia volta* significa uma volta de 180° e que voltando até onde você começou é uma volta de 360°.

Mas graus não é a única maneira de medir ângulos. Você também pode usar *radianos*. Graus e radianos são apenas duas maneiras diferentes de medir ângulos, como polegadas e centímetros são duas maneiras de medir o comprimento.

LEMBRE-SE

A medida em *radiano* de um ângulo é o comprimento do arco ao longo da circunferência do círculo unitário cortado pelo ângulo.

Olhe para o ângulo de 30° no quadrante I na Figura 6-3. Você vê a seção em negrito da circunferência do círculo que é cortada por esse ângulo? Visto que o círculo todo tem 360°, o ângulo de 30° é um doze avos do círculo. Então o comprimento do arco em negrito é um doze avos da circunferência do círculo. A circunferência é dada pela fórmula $C = 2\pi r$. Esse círculo tem um raio igual a 1, então sua circunferência é igual a 2π. Posto que o arco em negrito seja um doze avos disso, seu comprimento é $\frac{\pi}{6}$, que é a medida em radiano do ângulo de 30°.

DICA

A circunferência do círculo trigonométrico de 2π torna mais fácil se lembrar que 360° é igual a 2π radianos. Metade da circunferência tem uma medida igual a π, então 180° é igual a π radianos.

Se você focar no fato de que 180° é igual a π radianos, outros ângulos serão fáceis:

- $90°$ é metade de $180°$, então $90°$ é igual a metade de π, ou $\frac{\pi}{2}$ radianos.
- $60°$ é um terço de $180°$, então $60°$ é igual a um terço de π, ou $\frac{\pi}{3}$ radianos.
- $45°$ é um quarto de $180°$, então $45°$ é igual a um quarto de π, ou $\frac{\pi}{4}$ radianos.
- $30°$ é um sexto de $180°$, então $30°$ é igual a um sexto de π, ou $\frac{\pi}{6}$ radianos.

LEMBRE-SE

Aqui estão as fórmulas para converter de graus para radianos e vice versa.

- Para transformar de graus para radianos, multiplique a medida do ângulo por $\frac{\pi}{180°}$.
- Para transformar de radianos para graus, multiplique a medida do ângulo por $\frac{180°}{\pi}$

Por sinal, a palavra *radiano* vem de *raio*. Olhe a Figura 6-3 novamente. Um ângulo medindo 1 radiano (mais ou menos $57°$) corta um arco ao longo da circunferência desse círculo de mesma medida do raio do círculo. Isso é verdade não apenas para círculos unitários, mas para círculos de qualquer tamanho. Em outras palavras, pegue o raio de qualquer círculo, coloque-o ao longo da circunferência do círculo, e esse arco cria um ângulo de 1 radiano.

DICA

Nesse ou em qualquer outro livro de cálculo, algumas problemas usam graus e outros usam radianos, mas radianos é a unidade preferível. Se um problema não especificar a unidade, faça o problema em radianos.

Querida, eu encolhi a hipotenusa

Olhe novamente o círculo unitário na Figura 6-3. Viu o triângulo de $30°$- $60°$ - $90°$ no quadrante I? É a mesma figura, porém metade do tamanho do triângulo da Figura 6-2. Cada um dos seus lados é igual à metade do da Figura 6-2. Visto que a hipotenusa tem agora uma medida de 1, e porque quando H é 1, $\frac{O}{H}$ é igual a O, o seno do ângulo de $30°$, que é igual a $\frac{O}{H}$, termina se igualando à medida do lado oposto. O lado oposto é igual a $\frac{1}{2}$, então isso é o seno de $30°$. Note que a medida do lado oposto é a mesma que a coordenada y do ponto $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Se você descobre o cosseno de $30°$ nesse triângulo, ele acaba se igualando à medida do lado adjacente, que é o mesmo que a coordenada x do ponto $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Note que esses valores para o sen $30°$ e cos $30°$ são os mesmos que os dados pelo triângulo de $30°$- $60°$ - $90°$ na Figura 6-2. Isso mostra a você, a propósito, que encolhendo um triângulo retângulo (ou aumentando) não tem efeito nos valores trigonométricos para os ângulos no triângulo.

Agora olhe para o triângulo de 30°- 60° - 90° no quadrante II na Figura 6-3. Visto que é do mesmo tamanho que o triângulo de 30°- 60° - 90° no quadrante I, que toca o círculo no ponto $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, o triângulo no quadrante II toca o círculo no ponto que está do outro lado e é simétrico ao ponto $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. As coordenadas do ponto no quadrante II são $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Mas lembre-se que os ângulos no círculo unitário são todos medidos a partir do eixo x, assim a hipotenusa desse triângulo indica um ângulo de 150°; e esse é o ângulo, e não 30°, associado com o ponto $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. O cosseno de 150° é dado pela coordenada x desse ponto, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, e o seno de 150° é igual a coordenada y, $\frac{1}{2}$.

O lado terminal de um ângulo no círculo unitário toca o círculo em um ponto cuja coordenada x é o cosseno do ângulo e cuja coordenada y é o seno do ângulo. Aqui está um mnemônico: x e y estão em ordem alfabética assim como estão o *cosseno* e o *seno*.

Colocando tudo junto

Olhe a Figura 6-4. Agora que você sabe tudo sobre o triângulo de 45°- 45° - 90°, você pode facilmente resolver – ou acreditar no que eu digo – que um triângulo de 45°- 45°- 90° no quadrante I toca o círculo unitário no ponto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. E se você vira o triângulo de 30°-60°-90° no quadrante I, você tem um ângulo de 60° que toca o círculo no ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Esse ponto tem as mesmas coordenadas que as do ângulo de 30°, mas invertidas.

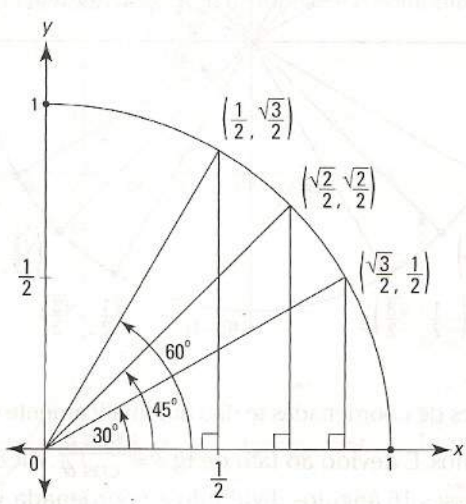


Figura 6-4: Quadrante I do círculo trigonométrico com três ângulos e suas coordenadas.

LEMBRE-SE

Toda vez que você desenhar um triângulo retângulo no círculo unitário, coloque o ângulo agudo, que será o *imput* das funções trigonométricas, na origem – ou seja, (0,0) – e depois coloque o ângulo reto no eixo x – nunca no eixo y.

DICA

Para evitar misturar os números $\frac{1}{2}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ao lidar com um ângulo de 30° ou com um ângulo de 60°, note que $\frac{1}{2}$ é igual a 0,5 e que $\frac{\sqrt{3}}{2}$ é igual a mais ou menos 0,87. Então, devido ao fato de um ângulo de 30° tocar o círculo mais para a direita do que para cima, a coordenada x dever ser maior que a coordenada y. Assim, o ponto deve ser $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, e não o contrário.

Agora para todo o processo. Por causa da simetria nos quatro quadrantes, os três pontos no quadrante I na Figura 6-4 têm equivalentes nos outros três quadrantes, dando a você 12 pontos conhecidos. Some a esses os quatro pontos nos eixos, (1,0), (0,1), (-1,0), e (0,-1), e você tem um total de 16 pontos, cada um com um ângulo correspondente, como mostrado na Figura 6-5.

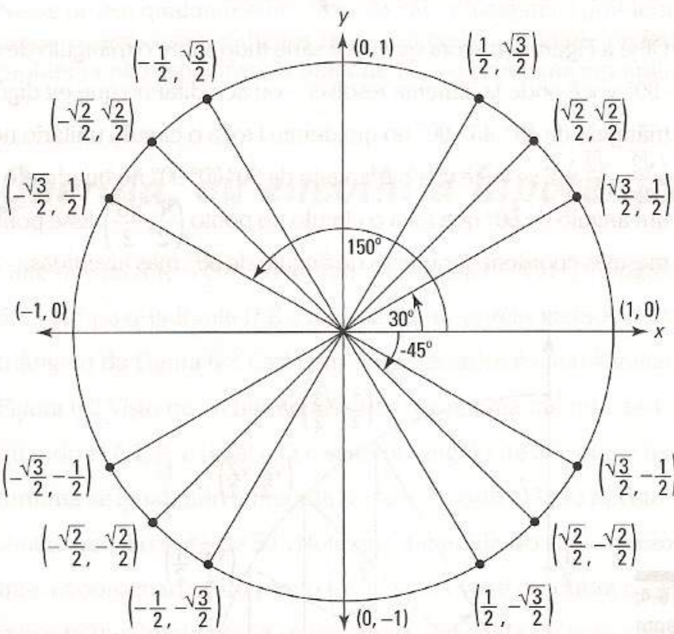


Figura 6-5: O círculo unitário com 16 ângulos e suas coordenadas.

Esses 16 pares de coordenadas te dão automaticamente o cosseno e o seno dos 16 ângulos. E devido ao fato de tg $\theta = \frac{\text{sen }\theta}{\cos\theta}$, você pode obter a tangente desses 16 ângulos dividindo a coordenada y do ângulo pela coordenada x do mesmo (Note que a tg θ também é igual à inclinação do lado terminal do ângulo). Finalmente, você pode encontrar a co-secante, secante, e co-tangente dos 16 ângulos porque essas funções trigonométricas são apenas os recíprocos do seno, cosseno, e tangente. Agora você tem, na ponta dos seus dedos – ok, talvez eu esteja exagerando – a resposta para 96 questões trigonométricas.

DICA

Saber os valores trigonométricos para o círculo unitário é muito importante em cálculo. Então faça um teste com você mesmo. Comece memorizando os triângulos de 45°- 45°- 90° e de 30°- 60°- 90°. Depois imagine como esses triângulos cabem dentro dos quatro quadrantes do círculo unitário. Use a simetria dos quadrantes como ajuda. Com alguma prática, você pode produzir os valores pra as seis funções trigonométricas dos 16 ângulos na sua cabeça. Tente fazer isso com radianos e também com graus. Isso vai aumentar o seu total para 192 fatos trigonométricos! Rápido – qual é a secante de 210°, e qual é o cosseno de $\frac{2\pi}{3}$? Aqui estão as respostas (sem olhar): $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ e $-\frac{1}{2}$.

Desenhando o gráfico do seno, cosseno e da tangente

A Figura 6-6 mostra os gráficos do seno, cosseno e da tangente, os quais você pode, naturalmente, produzir em uma calculadora gráfica.

LEMBRE-SE

O seno, cosseno e a tangente – e seus recíprocos, co-secante, secante e co-tangente – são funções *periódicas*, o que significa que seus gráficos contêm uma forma básica que se repete indefinidamente para a esquerda e para a direita. O *período* desse tipo de função é o comprimento de um de seus ciclos.

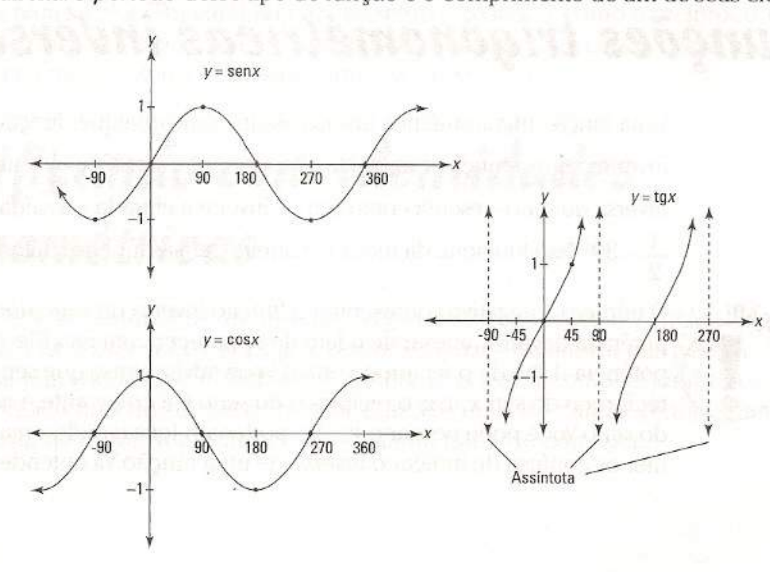


Figura 6-6: Os gráficos das funções seno, cosseno e tangente.

Se você conhece o círculo unitário, você pode facilmente reproduzir esses três gráficos manualmente. Primeiro, note que os gráficos do seno e do cosseno têm a mesma forma – cosseno é o mesmo que seno, apenas deslize em 90° para a esquerda. Também, note que sua forma de onda simples vai até 1 e até -1 e segue para esquerda e para direita eternamente, se repetindo a cada 360°. Esse é o *período* de ambas as funções, 360° (Não é coincidência, por sinal, que 360° é também uma volta ao redor do círculo). O círculo unitário diz a você que sen $0^o = 0$, sen $90^o = 1$, sen $180^o = 0$, sen $270^o = -1$, e que o sen $360^o = 0$. Se você começa com esses cinco pontos, você pode esboçar um círculo. O ciclo então se repete para a esquerda e para a direita. Você pode usar o círculo unitário da mesma maneira para esboçar a função cosseno.

Note na Figura 6-6 que o período da função tangente é 180°. Se você se lembrar disso e do padrão básico de repetir o formato em S para trás, esboçar não é tão difícil. Devido ao fato de a tg $\theta = \frac{x}{y}$, você pode usar o círculo unitário para determinar que a tg $(-45^o) = -1$, tg $0^o = 0$ e tg $45^o = 1$. Isso dá a você os pontos (-45°,-1), (0,0), e (45°,1). Visto que a tg (-90^o) e a tg 90^o são indefinidas ($\frac{x}{y}$ nesses pontos te dão um zero no denominador), você desenha *assíntotas* em -90° e 90°.

LEMBRE-SE

Uma *assíntota* é uma linha imaginária com a qual a curva vai se aproximando cada vez mais, mas nunca toca.

As duas assíntotas em -90° e em 90° e os três pontos em (-45°,-1), (0,0), e (45°,1) mostram a você onde esboçar um S para trás. Os formatos em S se repetem a cada 180° para a esquerda e para a direita.

Funções trigonométricas inversas

Uma função trigonométrica inversa, assim como qualquer função inversa, inverte o que a função original faz. Por exemplo, sen $30^o = \frac{1}{2}$, então a função inversa do seno – escrita como sen^{-1} – inverte a entrada e a saída. Assim, $\text{sen}^{-1} \frac{1}{2} = 30^o$. Isso funciona da mesma maneira para as funções trigonométricas.

ATENÇÃO!

O número 1 negativo sobrescrito na função inversa do seno *não* é uma potência negativa, apesar de o fato de se parecer com isso. Elevar algo a potência -1 lhe dá o recíproco, então você talvez pense que $\text{sen}^{-1}\,x$ é o recíproco do sen x, mas o recíproco do seno é a co-secante, e *não* o inverso do seno. Você pode pensar que eles poderiam ter sugerido uma maneira menos confusa de indicar o inverso de uma função. Vá entender.

O único truque com funções trigonométricas inversas é memorizar seus *intervalos* – ou seja, o intervalo das suas entradas. Devido ao fato de sen $30^\circ = \frac{1}{2}$ e sen $150^\circ = \frac{1}{2}$, não há como saber se o $\text{sen}^{-1} \frac{1}{2}$ é igual a 30° ou a 150° a não ser que você saiba como o intervalo das entradas é definido. E lembre-se, para que algo seja uma função, não pode haver nenhum mistério sobre a entrada de uma dada saída. Se você reflete a função seno sobre a linha $y = x$ para criar o seu inverso, você tem uma onda vertical que não é uma função porque não passa no teste da linha vertical. (Veja a definição do teste da linha vertical no Capítulo 5). Para tornar o inverso do seno uma função, você tem que pegar um pequeno pedaço da onda vertical que passa pelo teste da linha vertical. Aqui estão os intervalos:

O intervalo do $\text{sen}^{-1} x$ é $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ou $[-90^\circ, 90^\circ]$

O intervalo do $\cos^{-1} x$ é $[0, \pi]$ ou $[0^\circ, 180^\circ]$

O intervalo da $\text{tg}^{-1} x$ é $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ou $[-90^\circ, 90^\circ]$

O intervalo da $\text{cotg}^{-1} x$ é $[0, \pi]$ ou $[0^\circ, 180^\circ]$

Note o padrão: o intervalo do $\text{sen}^{-1} x$ é o mesmo da $\text{tg}^{-1} x$, e o intervalo do $\cos^{-1} x$ é o mesmo da $\text{cotg}^{-1} x$.

Acredite se quiser, mas os autores de cálculo não concordam com o intervalo para as funções do inverso da secante e da co-secante. Você pensou que eles concordavam sobre isso assim como concordam com quase completamente todo o resto em matemática. Tolice. Use os intervalos dados no seu livro em particular. Se você não tem um livro, use o intervalo do $\text{sen}^{-1} x$ para o seu primo $\text{cosec}^{-1} x$, e use o intervalo do $\cos^{-1} x$ para $\sec^{-1} x$ (Por sinal, eu não me refiro a $\text{cosec}^{-1} x$ como o recíproco do $\text{sen}^{-1} x$ porque não é o seu recíproco – mesmo que cosec x seja o recíproco de sen x. O mesmo para $\cos^{-1} x$ e $\sec^{-1} x$).

Identificando com identidades trigonométricas

Você se lembra das identidades trigonométricas $\text{sen}^2 x + \text{sen}^2 x = 1$ e sen $2x$ = 2sen x cos x? Diga a verdade agora – a maioria das pessoas se lembra das identidades trigonométricas assim como se lembra dos presidentes do século dezenove. Elas são úteis no cálculo, então uma lista de outras identidades úteis está na folha de consulta.

Parte III

Limites

A 5ª onda

por Rich Tennant

Nesta parte...

A matemática dos limites fundamenta todo o cálculo. De certa forma, limites nos permitem ampliar um gráfico de uma curva – mais e mais e mais até o infinito – até que se torne reto. Uma vez reto, a boa e velha álgebra e geometria podem ser usadas. Essa é a mágica do cálculo.

Capítulo 7
Limites e continuidade

Neste capítulo

- Dando uma olhada em limites
- Avaliando funções com intervalos abertos – quebrando as bolas de naftalina
- Explorando a continuidade e a descontinuidade (desprezar a continuidade é extremamente proibido)

Limites são fundamentais para o cálculo diferencial e integral. A definição formal de uma derivada envolve limite assim como a definição de uma integral definida (Se você é realmente uma pessoa empreendedora e não pode esperar para ler as definições reais, dê uma olhada nos Capítulos 9 e 13). Agora, constata-se que depois de você aprender os atalhos para calcular derivadas e integrais, você não vai mais precisar usar os métodos de limite longos. Mas entender a matemática dos limites é, todavia, importante porque forma a base na qual a vasta arquitetura do cálculo está construída (Ok, então eu exagerei um pouco). Nesse capítulo, eu mostro a base para diferenciação e integração ao explorar limites e o tópico intimamente relacionado, continuidade.

Leve ao limite – NÃO

Limites podem ser complicados. Mas não se preocupe se você não compreender o conceito de uma vez.

CONCEITO CRÍTICO DE CÁLCULO

O *limite* de uma função (se ele existir) para algum valor de x, a, é a altura da qual a função cada vez mais se aproxima à medida que x se aproxima de a pela esquerda e pela direita.

Entendeu? Você está brincando! Deixe-me dizer de outra maneira. Uma função tem um limite para um dado valor de x se a função zera em algum ponto à medida que x se aproxima ao dado valor pela esquerda e pela direita. Isso ajudou? Eu achei que não. É muito mais fácil entender limites através de exemplos do que através dessa bobagem, então dê uma olhada em alguns.

Usando três funções para ilustrar o mesmo limite

Considere a função $f(x) = 3x + 1$ na Figura 7-1. Quando nós dizemos que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de 2 é 7, escrito como $\lim_{x \to 2} f(x) = 7$, nós queremos dizer que à medida que x se aproxima de 2 pela esquerda ou pela direita, $f(x)$ se aproxima de uma altura igual a 7. Por sinal, até onde eu sei, o número 2 nesse exemplo não tem um nome formal, mas eu o chamo de número x. Com o x em seu nome, você não vai confundi-lo com a *resposta* para o problema de limite ou simplesmente *limite*, ambos se referem a um valor y ou altura da função (7 nesse exemplo). Agora, olhe a Tabela 7-1.

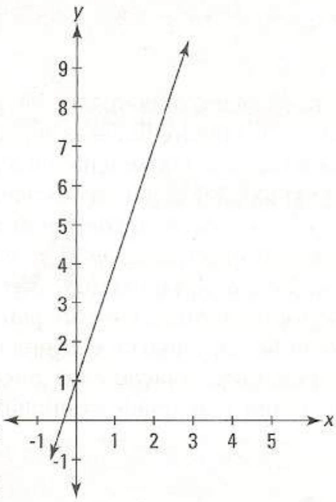


Figura 7-1: O gráfico de $f(x) = 3x + 1$.

Tabela 7-1s **Valores de entrada e saída de f (x) = 3x + 1 à medida que x se aproxima de 2**

x se aproxima de 2 pela esquerda → ← *x* se aproxima de 2 pela direita

x	1	1,5	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1	2,5	3
$f(x)$	4	5,5	6,7	6,97	6,997	7,003	7,03	7,3	8,5	10

y se aproxima de 7 → ← *y* se aproxima de 7

A partir da Tabela 7-1, você pode ver que y está cada vez mais perto de 7 em ambos os lados. Se você estiver pensando sobre porque todo o alvoroço – porque não colocar o número 2 no lugar de x e obter uma resposta igual a 7 – eu tenho certeza que você tem muita companhia. Aliás, se todas as funções fossem *contínuas* (sem descontinuidades, sem "quebras") como a da Figura

7-1, você poderia apenas colocar o número x para ter a resposta, e não haveria necessidade desse tipo de problema sobre limite. Nós precisamos de limites em cálculo por causa das importantes funções que têm buracos.
A função na Figura 7-2 é idêntica à função na Figura 7-1 exceto pelo buraco no ponto (2,7) e o ponto em (2,5).

Na verdade, essa função, $g(x)$, nunca apareceria em um problema de cálculo simples – Eu apenas uso para ilustrar como os limites funcionam (Continue lendo, eu tenho mais coisas essenciais para mostrar antes de você ver porque eu as coloquei aqui).

As funções importantes são as funções como as da Figura 7-3, que aparecem com freqüência no estudo das derivadas. A terceira função, $h(x)$, é idêntica a $f(x)$ exceto pelo fato de o ponto (2,7) ter sido arrancado, deixando um buraco em (2,7) e nenhum outro ponto onde x seja igual a 2.

Imagine que a tabela de valores de entrada e saída seja parecida para $g(x)$ e $h(x)$. Você pode ver que os valores seriam idênticos aos valores na Tabela 7-1 para $f(x)$? Tanto para $g(x)$ como para $h(x)$, à medida que x se aproxima de 2 pela esquerda e pela direita, y se aproxima cada vez mais de uma altura igual a 7. Para todas as três funções, o limite à medida que x se aproxima de 2 é 7. Isso nos leva a um ponto crítico: quando determinamos o limite de uma função à medida que x se aproxima, digamos que de 2, o valor de $f(2)$ – ou mesmo se $f(2)$ realmente existe – é totalmente irrelevante. Dê uma olhada nas três funções novamente na Figura 7-4.

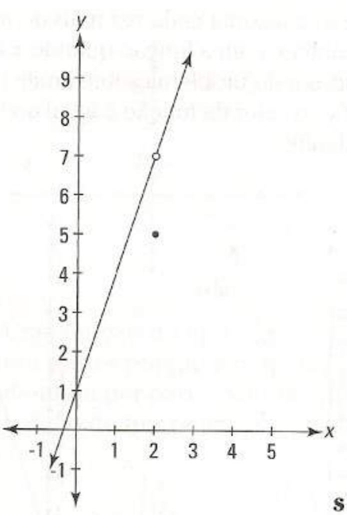


Figura 7-2: O gráfico de $g(x)$, que é $f(x)$ com o ponto (2,7) movido para (2,5).

s

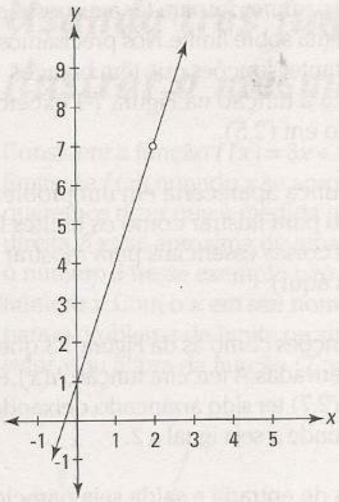


Figura 7-3: O gráfico de $h(x)$: a função $f(x)$ com um buraco em (2,7).

Considere as três funções onde $x = 2$: $f(2)$ é igual a 7, $g(2)$ é 5, e $h(2)$ não existe (ou, como os matemáticos dizem, é *indefinida*). Mas quando você está calculando o limite dessas funções à medida que x se aproxima de 2, o que realmente acontece em $x = 2$ é irrelevante. "E se em $x = 2$ a função fizer assim e assado?" você talvez pergunte. Não importa – não há se, e, ou, mas.

CONCEITO CRÍTICO DE CÁLCULO

Em um problema sobre limite, x se aproxima cada vez mais do número x, mas *nunca chega lá*, e o que acontece com a função quando x é igual ao número x *não tem efeito* na resposta do problema sobre limite (embora para funções contínuas como f(x), o valor da função é igual ao limite e pode ser usado para calcular o limite).

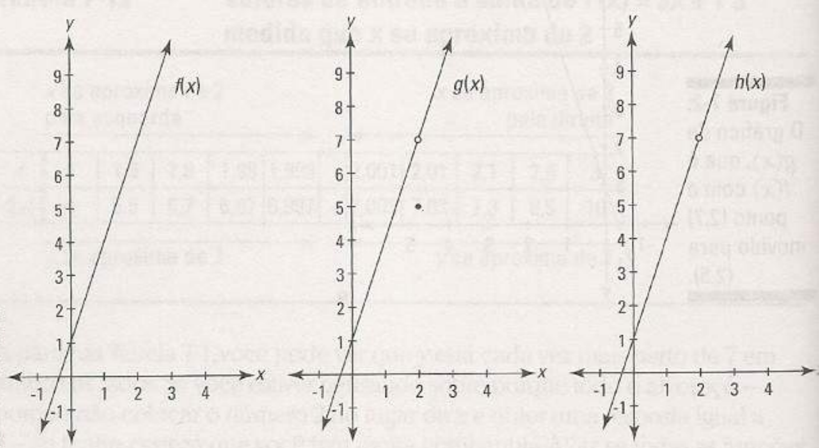


Figura 7-4: Os gráficos de $f(x)$, $g(x)$, e $h(x)$.

Andando de lado com limites laterais

Limites laterais funcionam como limites bilaterais regulares com exceção do x se aproximar do número x apenas pela esquerda ou pela direita. O objetivo mais importante para esses tipos de limites é que eles são usados na definição formal de um limite regular (veja o próximo tópico sobre definição formal de um limite).

Para indicar um limite lateral, você coloca um pequeno sinal de subtração sobrescrito no número x quando x se aproxima do número x pela esquerda ou um sinal de adição sobrescrito quando o x se aproxima do número x pela direita. Dessa maneira:

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to 0^+} g(x)$$

Olhe a Figura 7-5. A resposta para um problema sobre limite regular, $\lim_{x \to 3} p(x)$z é que o limite não existe porque x se aproxima de 3 pela esquerda *e* pela direita, $p(x)$ não tende a zero em nenhum ponto.

No entanto, ambos os limites laterais existem. À medida que x se aproxima de 3 pela esquerda, os zeros de $p(x)$ estão a uma altura igual a 6, e quando x se aproxima de 3 pela direita, os zeros de $p(x)$ estão a uma altura igual a 2. Assim como os limites regulares, o valor de $p(3)$ não tem efeito na resposta de nenhum desses problemas de limites laterais. Assim,

$$\lim_{x \to 3^-} p(x) = 6 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to 3^+} p(x) = 2$$

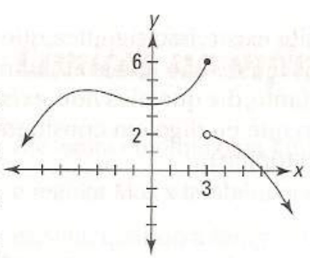


Figura 7-5: $p(x)$: uma ilustração de um limite lateral.

Uma função do tipo p(x) na Figura 7-5 é chamada de função definida por partes porque tem pedaços separados. Cada pedaço de uma função definida por partes tem sua própria equação – como, por exemplo, a função de três pedaços a seguir:

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{para} \quad x \le 1 \\ 3x - 2 & \text{para} \quad 1 < x \le 10 \\ x + 5 & \text{para} \quad x > 10 \end{cases}$$

Algumas vezes um pedaço de uma função definida por partes se conecta com o pedaço vizinho, e nesse caso a função é contínua nesse pedaço. E algumas vezes, assim como $p(x)$, um pedaço não se conecta com o pedaço adjacente – isso resulta em uma descontinuidade.

A definição formal de limite – o que você estava esperando

Agora que você sabe sobre limites laterais, eu posso dar a você a definição matemática de um limite. Aqui vai:

Definição de limite: Deixe que f seja uma função e deixe que a seja um número real.

$$\lim_{x \to a} f(x) \text{ existe se, e somente se}$$

1. $\lim_{x \to a^-} f(x)$ existir

2. $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existir

3. $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$

Livros de cálculo sempre apresentam isso como um teste de três partes para a existência de um limite, mas a condição 3 é a única que você precisa se preocupar porque 1 e 2 estão inseridas na 3. Apenas lembre que você não pode satisfazer a condição 3 se o lado esquerdo e o direito da equação forem ambos indefinidos ou inexistentes; em outras palavras, *não* é verdade que *indefinido* = *indefinido* ou que *inexistente* = *inexistente*. Desde que você tenha entendido isso, a condição 3 é tudo o que você precisa verificar.

Quando nós dizemos que um limite existe, isso significa que o limite é igual a um número *finito*. Alguns limites são iguais ao infinito ou ao infinito negativo, mas você, no entanto, diz que eles *não existem*. Isso pode parecer estranho, mas leve o que eu digo em consideração (Mais sobre limites infinitos no próximo tópico).

Limites infinitos e assíntotas verticais

Uma função *racional* como $f(x) = \dfrac{(x+2)\,(x-5)}{(x-3)\,(x+1)}$ tem assíntotas verticais no ponto $x = 3$ e $x = -1$. Você se lembra das assíntotas? Elas são linhas imaginárias das quais uma função se aproxima cada vez mais à medida que sobe, desce, vai para a esquerda, ou para a direita em direção ao infinito. Veja a Figura 7-6.

Considere o limite da função na Figura 7-6 à medida que x se aproxima de 3. À medida que x se aproxima de 3 pela esquerda, $f(x)$ sobre para ∞; e à medida que x se aproxima de 3 pela direita, $f(x)$ desce para $-\infty$. Algumas vezes é informativo indicar isso escrevendo,

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$$

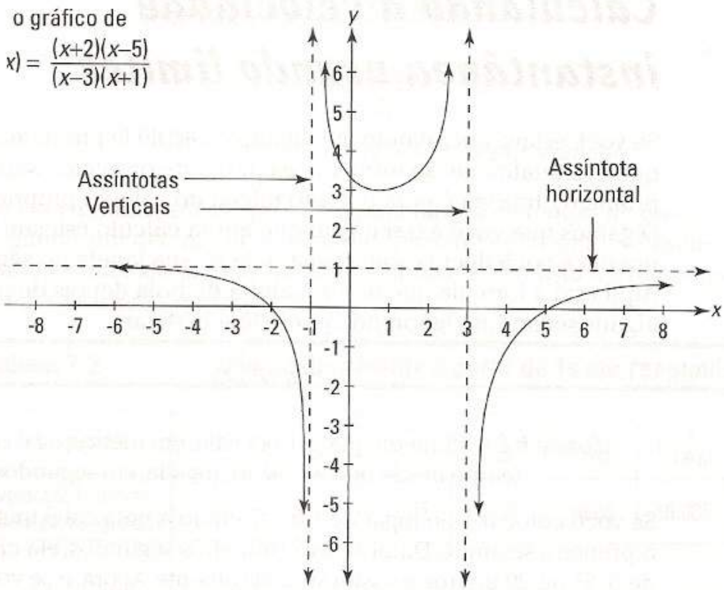


Figura 7-6: Uma função racional típica.

Mas também é correto dizer que ambos os limites acima *não existem* porque o infinito não é um número real. Se pedirem a você para determinar um limite bi-lateral regular, $\lim_{x\to 3} f(x)$, você não tem escolha a não ser dizer que ele não existe porque os limites da esquerda e da direita são desiguais.

Limites no infinito – bem distantes, cara!

Até agora eu olhei para limites onde o x se aproxima de um número finito e regular. Mas x também pode se aproximar de ∞ ou $-\infty$. Limites no infinito existem quando a função tem uma assíntota horizontal. Por exemplo, a função na Figura 7-6, $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-5)}{(x-3)(x+1)}$, tem uma assíntota horizontal em $y = 1$, no qual a função se move à medida que segue na direção do ∞ para a direita e $-\infty$ para a esquerda (Indo para a esquerda, a função cruza a assíntota horizontal em $x = -7$ e depois vai gradualmente descendo em direção a assíntota). Os limites são iguais à altura da assíntota horizontal e escritos como:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$$

Você verá mais sobre limites no infinito no Capítulo 8.

Calculando a velocidade instantânea usando limites

Se você estava cochilando até agora, ACORDE! O problema a seguir, que eventualmente se torna um exemplo de problema sobre limite (eu prometo), traz você para o ponto inicial do cálculo propriamente dito. Digamos que você e o seu gato que adora cálculo estejam passeando um dia e você decida soltar uma bola da sua janela do segundo andar. Aqui está a fórmula que te diz a altura da bola depois de passados alguns segundos (ignorando a resistência do ar):

$$h\,(t) = 5t^2$$

(onde h é a altura da qual a bola caiu, em metros, e t é o valor do tempo desde que a bola foi jogada, em segundos)

Se você colocar 1 no lugar de t, h é 5; então a bola cai 5 metros durante o primeiro segundo. Durante os 2 primeiros segundos, ela cai um total de $5 \cdot 2^2$, ou 20 metros, e assim sucessivamente. Agora, e se você quisesse determinar a velocidade da bola a exatamente 1 segundo depois que você a jogou? Você pode começar usando essa velha e confiável fórmula:

LEMBRE-SE

Distância = velocidade · tempo, então *velocidade = distância/tempo*

Usando a fórmula da *velocidade*, você pode descobrir facilmente a velocidade média da bola no 2° segundo da sua queda. Devido ao fato de a bola ter caído 5 metros depois de 1 segundo e um total de 20 metros depois de 2 segundos, ela caiu 20 – 5, ou 15 metros de t = 1segunto até t = 2 segundos. A fórmula a seguir lhe dá a velocidade média:

$$\begin{aligned}\text{Velocidade média} &= \frac{\text{distância total}}{\text{tempo total}}\\ &= \frac{20-5}{2-1}\\ &= \frac{15}{1}\\ &= \textit{15 metros por segundo}\end{aligned}$$

Mas essa não é a resposta que você quer porque a bola cai cada vez mais rápido à medida que ela cai, e você quer saber a sua velocidade a exatamente 1 segundo depois que você a joga. A bola acelera entre 1 e 2 segundos, então a sua velocidade *média* de 15 *metros por segundo* durante os 2 segundos é certamente mais rápida do que a velocidade *instantânea* no final do 1° segundo. Para uma melhor aproximação, calcule a velocidade média entre t = 1 e t = 1,5 segundos. Depois de 1,5 segundos, a bola caiu $5 \cdot 1{,}5^2$, ou 11,25 metros, então de t = 1 até t = 1,5, ela cai 11,25 – 5, ou 6,25 metros. Sua velocidade média é assim:

$$\begin{aligned}\text{Velocidade média} &= \frac{11{,}25-5}{1{,}5-1}\\ &= \frac{6{,}25}{0{,}5}\\ &= 12{,}5 \textit{ metros por segundo}\end{aligned}$$

Se você continuar esse processo para lapsos de tempo de um quarto de segundo, um décimo de segundo, depois um centésimo, milésimo, e dez milionésimos de um segundo, você chega a uma lista de velocidade média mostrada na Tabela 7-2.

Tabela 7-2 velocidades média a partir de 1s até *t* segundos

t segundos	2	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{10}$	$1\frac{1}{100}$	$1\frac{1}{1.000}$	$1\frac{1}{10.000}$
velocidade média de 1s até t segundos	15	12,5	11,25	10,5	10,05	10,005	10,0005

À medida que *t* se aproxima cada vez mais de 1 segundo, a velocidade média aparenta se aproximar cada vez mais de 10 *metros por segundo*.

Aqui está a fórmula que nós usamos para gerar os números na Tabela 7-2. Ela lhe dá a velocidade média entre 1 segundo e *t* segundos.

$$\begin{aligned}\textit{Velocidade média} &= \frac{5t^2-5\cdot 1}{t-1}\\ &= \frac{5\,(t^2-1)}{t-1}\\ &= \frac{5\,(t-1)(t+1)}{t-1}\\ &= 5t+5(t\neq 1)\end{aligned}$$

A Figura 7-7 mostra o gráfico dessa função.

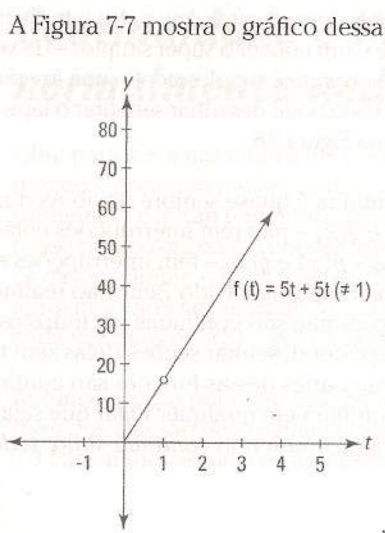


Figura 7-7: A função da velocidade média

Esse gráfico é idêntico ao gráfico da linha $g(t) = 16t + 16$, exceto pelo buraco em (1,10). Há um buraco lá porque se você colocar 1 no lugar de t na função da velocidade média, você tem

$$\textit{Velocidade média} = \frac{5\,(1^2 - 1)}{1 - 1}$$
$$= \frac{0}{0}$$

que é indefinido. E por que você obteve $\frac{0}{0}$? Porque você estava tentando determinar a velocidade média – que é igual à *distância total* dividida pelo *tempo decorrido* – de $t = 1$ a $t = 1$. Mas de $t = 1$ até $t = 1$ *não* é, é claro, tempo, e "durante" esse ponto no tempo, a bola não percorre nenhuma distância, então você tem $\frac{\text{zero metros}}{\text{zero segundo}}$ como a velocidade média entre $t = 1$ e $t = 1$.

Obviamente, há um problema aqui. Segure o seu chapéu, você chegou a um dos grandes momentos "A-ha!" no desenvolvimento de cálculo diferencial.

CONCEITO CRÍTICO DE CÁLCULO

Velocidade instantânea é definida como o limite da velocidade média à medida que o tempo decorrido se aproxima do zero.

O fato de que o tempo decorrido nunca chega a zero não afeta a precisão da resposta para esse problema sobre limite – a resposta é exatamente 10 *metros por segundo*, a altura do buraco na Figura 7-7. O que é incrível sobre limites é que eles permitem que você calcule a velocidade instantânea exata em um *determinado* ponto no tempo achando o limite de uma função que está baseado no tempo *decorrido*, um período entre *dois* pontos no tempo.

Unindo limites e continuidade

Antes que eu amplie o material incrivelmente maravilhoso sobre limites que apresentei nas seções anteriores desse capítulo, eu quero introduzir uma idéia correlata – *continuidade*. Esse é um conceito super simples – de verdade, confie em mim. Uma função *contínua* é simplesmente uma função sem intervalos – uma função que você pode desenhar sem tirar o lápis do papel. Considere as quatro funções na Figura 7-8.

Se uma função é ou não contínua é quase sempre óbvio. As duas primeiras funções na Figura 7-8 – $f(x)$ e $g(x)$ – não tem interrupções então elas são contínuas. As próximas duas – $p(x)$ e $q(x)$ – têm interrupções em x=3, então elas não são contínuas. Pronto, resolvido. Bem, não realmente. As duas funções com interrupções não são contínuas em todos os lugares, mas devido ao fato de você poder desenhar seções delas sem tirar o lápis do papel, você pode dizer que partes dessas funções são contínuas. E algumas vezes a função é contínua em qualquer lugar que seja definida. Esse tipo de função é descrita como sendo *contínua sobre todo o seu* *domínio*, e significa que seu intervalo ou intervalos acontecem em valores de x onde a função é indefinida. A função $p(x)$ não é contínua sobre todo o seu domínio porque não é contínua em $x = 3$, que está no domínio da função. Muitas vezes, o importante é se uma função é contínua em um dado valor de x. E ela é a não ser que haja uma interrupção naquele x.

LEMBRE-SE

Todas as funções polinomiais são contínuas em todas as partes.

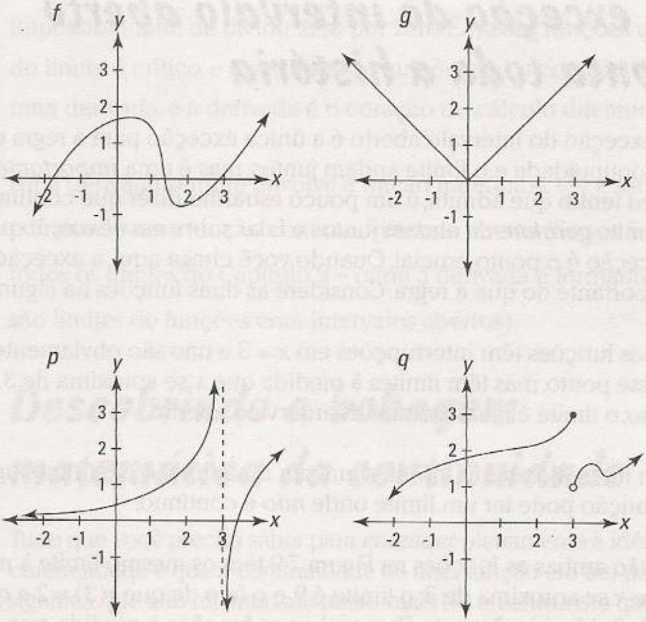


Figura 7-8: Os gráficos de $f(x)$, $g(x)$, $p(x)$, e $q(x)$.

LEMBRE-SE

Todas as funções racionais – uma função racional é o quociente de duas funções polinomiais – são contínuas sobre todo o seu domínio.

Continuidade e limites normalmente andam juntos

Olhe para $x = 3$ nas quatro funções na Figura 7-8. Considere se cada função é contínua nesse ponto e se existe um limite no valor de x. As duas primeiras, f e g, não têm interrupções em $x = 3$, então elas são contínuas nesse ponto. Ambas as funções também têm limites em $x = 3$, e em ambos os casos, o limite é igual à altura da função em $x = 3$, porque o x se aproxima cada vez mais de 3 pela esquerda e pela direita, y se aproxima cada vez mais de $f(3)$ e $g(3)$, respectivamente.

As funções p e q, por outro lado, não são contínuas em $x = 3$ – ou você pode dizer que elas são descontínuas nesse ponto – e nenhuma tem limite em $x = 3$. Para ambas as funções, as interrupções em $x = 3$ não apenas quebram a continuidade, mas também fazem com que elas não tenham limites nesse ponto porque, à medida que você move em direção a $x = 3$ pela esquerda ou pela direita, você não tende a um valor específico de y.

Então aqui está. Continuidade em um valor de x significa que há um limite para esse valor de x. Descontinuidade em um valor de x significa que não há limite nesse lugar. Bem, quase. Continue lendo para saber a exceção.

A exceção do intervalo aberto conta toda a história

A exceção do intervalo aberto é a única exceção para a regra que diz que a continuidade e o limite andam juntos, mas é uma *importante* exceção. E, eu tenho que admitir, é um pouco estranho dizer que continuidade e limite *geralmente* andam juntos e falar sobre essa *exceção* porque a exceção é o ponto crucial. Quando você chega aqui, a exceção é mais importante do que a regra. Considere as duas funções na Figura 7-9.

Essas funções têm interrupções em $x = 3$ e não são obviamente contínuas nesse ponto, mas têm limites à medida que x se aproxima de 3. Em cada caso, o limite é igual à altura do intervalo aberto.

Um intervalo aberto infinitesimal em uma função é o único lugar em que a função pode ter um limite onde *não* é contínuo.

Então ambas as funções na Figura 7-9 têm os mesmo limite à medida que x se aproxima de 3; o limite é 9, e o fato de que $r(3) = 2$ e que $s(3)$ é indefinido é irrelevante. Para ambas as funções, à medida que x tende a 3 pela direita e pela esquerda, a altura da função tende a nove na altura do intervalo aberto – esse é o limite. Isso tolera repetição – e até um ícone:

O limite de um intervalo aberto é a altura do mesmo

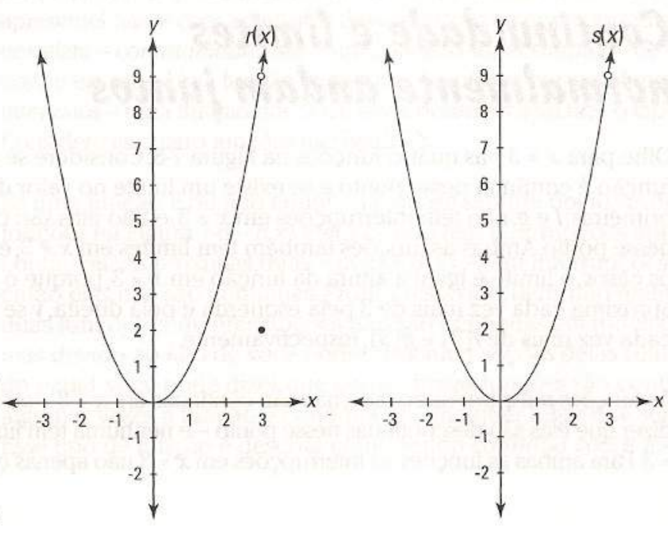


Figura 7-9: Os gráficos de $r(x)$ e $s(x)$.

"Isso é ótimo", você deve estar pensando. "Mas por que você deveria se preocupar?". Bem continue comigo por apenas um minuto. No exemplo da bola caindo no tópico "Calculando a velocidade instantânea usando limites" no começo do capítulo, eu tentei calcular a velocidade média durante o intervalo de tempo igual a zero. Isso me deu $\frac{\text{zero metros}}{\text{zero segundo}}$. Devido ao fato de $\frac{0}{0}$ ser indefinido, o resultado foi um intervalo aberto na função. Intervalos abertos nas funções freqüentemente vêm da impossibilidade de dividir zero por zero. É nessas funções que o processo do limite é crítico, e esses tipos de funções são o coração do significado de uma derivada, e a derivada é o coração do cálculo diferencial.

CONCEITO CRÍTICO DE CÁLCULO

Uma derivada sempre envolve a fração indefinida $\frac{0}{0}$ e sempre envolve o limite de uma função com um intervalo aberto (Se você está curioso, todos os limites do Capítulo 9 – onde a derivada é formalmente definida – são limites de funções com intervalos abertos).

Descobrindo a bobagem matemática da continuidade

Tudo que você precisa saber para *entender* plenamente a idéia de continuidade é que a continuidade de uma função em um dado valor de x significa que não há intervalo nesse valor. No entanto, visto que você pode ser testado na definição formal a seguir, eu suponho que você vá querer saber.

BOBAGEM MATEMÁTICA

Definição de continuidade: Uma função $f(x)$ é contínua em um ponto $x = a$ se as três condições a seguir forem satisfeitas:

1. $f(a)$ é definido,

2. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *existe, e*

3. $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Assim como a definição formal de limite, a definição de continuidade está sempre presente como um teste de 3 partes, mas a condição 3 é a única com a qual você precisa se preocupar porque as condições 1 e 2 estão inseridas na 3. Você deve se lembrar, no entanto, que a condição 3 *não* é satisfeita quando tanto o lado esquerdo como o lado direito da equação forem indefinidos ou inexistentes.

O mnemônico 33333 do limite[1]

Aqui está um ótimo dispositivo de memória que coloca um bocado de informação junta em uma tacada de mestre. Isso talvez pareça forçado ou bobo, mas com dispositivos mnemônicos, forçado e bobo funcionam. O mnemônico 33333 do limite ajuda você a se lembrar de duas coisas sobre limites, duas coisas sobre continuidade e uma coisa sobre derivadas (eu sei que ainda não chegamos a derivadas, mas este é o melhor lugar para apresentar esse mnemônico. Acredite no que eu digo – nada é perfeito).

Primeiro, note que a palavra "*limit*" tem cinco letras e há cinco 3s nesse mnemônico. Depois, escreva *limit* com um *l* minúsculo e tire o traço do "*t*" para que ele se torne um "*l*" – assim:

limil

Agora, os dois "*l*"s são para limite, os dois "*i*"s são para continuidade (note que a letra "*i*" tem um buraco nela, não sendo, dessa forma, contínuo), e o "*m*" é para inclinação (você se lembra de $y = mx + b$?), que é sobre o que as derivadas falam (você verá isso daqui a algumas páginas no Capítulo 9).

Cada uma das cinco letras ajuda você a se lembrar de três coisas – dessa maneira:

l i m i l
3 3 3 3 3

- 3 partes para a definição de um limite:

  Veja a definição de limite no tópico "Definição formal de limite". Lembrando-se que ela tem três partes que ajudam você a lembrar das partes – confie em mim.
- 3 casos onde o limite não existe:
  - Em uma assíntota vertical – chamada de *descontinuidade infinita* – como em $x = 3$ na função p na Figura 7-8.
  - *Pulos de descontinuidades*, como em $x = 3$ na função q na Figura 7-8.
  - Com um limite no infinito de uma *função oscilante* como $\lim_{x \to \infty} f(x)$ sen x, onde a função sobe e desce para sempre, nunca tendendo a um valor definido.
- 3 partes para a definição de continuidade:

  Assim como a definição de limite, lembrar que a definição de continuidade tem 3 partes ajuda você a lembrar as 3 partes (veja o tópico "Descobrindo a bobagem matemática da continuidade" abordado anteriormente no capítulo).

- 3 tipos de descontinuidade:
  - · Uma *descontinuidade removível* – esse é um termo mais sofisticado para um *intervalo aberto* – como os intervalos na função *r* e *s* na Figura 7-9.
  - · Uma *descontinuidade infinita* como em $x = 3$ na função *p* na Figura 7-8.
  - · *Pulos de descontinuidades*, como em $x = 3$ na função *q* na Figura 7-8.
- 3 casos onde a derivada não existe:
  (Eu explico isso no Capítulo 9 – fique calmo)
  - · Em qualquer tipo de *descontinuidade*.
  - · Em um ponto acentuado de uma função – chamado de inflexão.
  - · Em uma *tangente vertical* (porque a inclinação é indefinida nesse lugar).

Bem, aí está.

Você provavelmente notou que a outra maneira que esse mnemônico funciona é que ele lhe dá 3 casos onde um limite não existe, 3 casos onde a continuidade não existe, e 3 casos onde a derivada não existe. *Santo triplo trio de inexistência Batman, isto ainda é outro 3 – os 3 tópicos do mnemônico: limites, continuidade, e derivadas!*

Capítulo 8

Avaliando limites

Neste capítulo

- Calculando limites com uma calculadora
- Multiplicando conjugados
- Resolvendo limites com um sanduíche
- Encontrando limites no infinito

O Capítulo 7 introduziu o conceito de limite. Esse capítulo fala dos elementos básicos e apresenta muitas técnicas para calcular as respostas para problemas sobre limites. E enquanto eu suspeito que você esteja extremamente extasiado e totalmente horrorizado pelo material no Capítulo 7 – e, não me entenda mal, isso é coisa importante – são os métodos de resolução de problemas nesse capítulo que realmente pagam as contas.

Limites fáceis

Alguns problemas de limites são *muito* fáceis. Tão fáceis que eu não preciso tomar seu tempo com comentários introdutórios desnecessários e palavras dispensáveis que ocupam espaço e não fazem nada para aprofundar o seu conhecimento da matéria – em vez disso, eu posso apenas dizer o que é importante e lhe dar apenas os fatos críticos e ir direto ao ponto e começar a trabalhar e... Ok, você está pronto?

Limites para memorizar

Você deve memorizar os limites a seguir. Se você fracassar em decorar os três últimos, você pode perder *muito* tempo tentando descobri-los. Leve o que eu digo em consideração.

- $\lim_{x \to a} c = c$
- ($y = c$ é uma linha horizontal, então o limite – que é a altura da função – deve ser igual a c não importando o número x).
- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$
- $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
- $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$
- $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Pegue e Leve

Os problemas "pegue e leve" fazem parte da segunda categoria de limites fáceis. Apenas plugue um número na função limite, e se o cálculo resultar em um número, essa é a sua resposta. Por exemplo,

$$\lim_{x \to 3} (x^2 - 10) = -1$$

Esse método funciona pra limites envolvendo funções contínuas e funções que são contínuas sobre todo o seu domínio. Esses são problemas sobre limite bobos, e, para ser sincero, eles não têm nexo. O limite é simplesmente o valor da função.

ATENÇÃO!

O método plug-and-chug funciona para qualquer tipo de função, incluindo funções definidas por partes, *a não ser* que haja uma descontinuidade no número x que você plugou (Veja o Capítulo 7 para uma descrição sobre funções definidas por partes).

DICA

Se você plugar o número x em um limite do tipo $\lim_{x \to 5} \frac{10}{x-5}$ e obtiver qualquer número (exceto zero) dividido por zero – como $\frac{10}{0}$ – então você sabe que esse limite não existe.

Os "verdadeiros" problemas sobre limites

Nenhum dos métodos rápidos que eu apresentei no tópico anterior funciona para a maioria dos problemas sobre limites. Se você plugar o número x e o resultado for indefinido, em geral $\frac{0}{0}$, você tem um problema sobre limite "verdadeiro" – e um pouco de trabalho para fazer. Esse é o foco principal desse tópico. Esses são os problemas sobre limites interessantes, os que provavelmente têm buracos infinitesimais, e os que são importantes para o cálculo diferencial – você verá mais sobre eles no Capítulo 9.

Quando você pluga um número x e o resultado é indefinido, você pode tentar quatro coisas: sua calculadora, a álgebra, fazer um sanduíche de limite, e a regra de L'Hôspital (que será vista no Capítulo 16).

Descobrindo o limite com a sua calculadora

Digamos que você queira avaliar o seguinte limite: $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$. O método plug-and-chug não funciona porque plugando 5 no lugar de x produz o resultado indefinido de $\frac{0}{0}$, mas assim como a maioria dos problemas sobre limites, você pode resolver esse problema na sua calculadora.

Método 1

O primeiro método é pegar um número extremamente perto de 5 e plugar no lugar de x. Se você tiver uma calculadora como a Texas Instruments TI-83, digite o seu número, digamos 4,9999, na página inicial, pressione o botão *Sto* (armazenar), depois o botão x, e por fim o botão *Enter* (isso guarda o número em x). Depois introduza a função $\frac{x^2 - 25}{x - 5}$, e aperte *Enter*. O resultado, 9,9999, é extremamente perto de um número inteiro, 10, então essa é a sua resposta. Em adição a isso, armazene 4,999999 em x, depois suba a barra de rolagem de volta para a função teclando *2nd*, *Enter*, *2nd*, *Enter*. Teclando *Enter* mais uma vez lhe dá 9,999999 – muito mais perto de 10. Se você ainda tiver dúvidas, tente mais um número. Armazene 4,99999999 em x, volte para a função, e aperte *Enter*. O resultado, 10, aparece (O valor da função em 4,99999999 não é exatamente 10, mas é tão perto que a calculadora arredonda para 10). A propósito, se você estiver usando um modelo de calculadora diferente, é bem provável que você encontre o mesmo resultado com a mesma técnica ou algo bem parecido.

Método 2

O segundo método usando uma calculadora é produzir uma tabela de valores. Digite $y = \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$ no modo de desenhar gráficos na sua calculadora. Depois vá para "configurar tabela" e digite o número do limite, 5, como o número "inicial da tabela", e digite um número pequeno, digamos 0,01, para ΔTbl – esse é o tamanho dos incrementos de x na tabela. Aperte o botão *Table* para produzir a tabela. Agora suba a barra de rolagem para que você veja alguns números menores do que 5, e você deve ver uma tabela de valores como os da Tabela 8-1.

Tabela 8-1 Tabela TI-83 para $\dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$ depois de subir a barra de rolagem até 4,998

x	y
4,998	9,998
4,999	9,999
5	*erro*
5,001	10,001
5,002	10,002
5,003	10,003

Devido ao fato de y chegar bem perto de 10 à medida que x se aproxima de 5 por cima e por baixo, 10 é o limite.

Essas técnicas em calculadoras são úteis por várias de razões. Sua calculadora pode lhe dar as respostas para problemas sobre limites que são impossíveis de serem feitos algebricamente. E ela pode resolver problemas sobre limite que você poderia fazer com papel e lápis a menos que você esteja confuso. Também, para problemas que você faz no papel, você pode usar a calculadora para verificar suas respostas. E mesmo quando você escolhe resolver um limite algebricamente – ou é obrigado a fazer dessa maneira – é uma boa idéia criar uma tabela como a Tabela 8-1 não apenas para confirmar sua resposta, mas para ver como a função se comporta perto do número x. Isso dá a você uma compreensão numérica sobre o problema, o que aumenta seu entendimento algébrico. Se você olhar o gráfico da função na sua calculadora, você tem uma terceira maneira *gráfica* ou *visual* de pensar sobre o problema.

DICA

Muitos problemas de cálculo podem ser feitos *algebricamente*, *graficamente* e *numericamente*. Quando possível, use duas ou três dessas abordagens. Cada abordagem dá a você uma entrada diferente no problema e aumenta o seu entendimento sobre os conceitos relevantes.

Use os métodos da calculadora para complementar os métodos algébricos, mas não confie muito neles. Para começo de conversa, as técnicas da calculadora não vão lhe dar uma resposta exata a não ser que os números que a sua calculadora lhe dá estejam se aproximando de um número que você reconhece – como 9,99998 está perto de 10, ou 0,333332 está perto de 1/3; ou talvez você reconheça que 1,414211 está bem perto de $\sqrt{2}$. Mas se a resposta para um problema sobre limites é algo do tipo $\frac{1}{2\sqrt{3}}$, você provavelmente não vai reconhecer isso. O número $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ é aproximadamente igual a 0,288675. Quando você vê números na sua tabela perto desse decimal, você não vai reconhecer $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ como o limite – a não ser que você seja um Arquimedes, um Gauss, ou um Ramanujan (membros da Galeria da Fama da matemática). No entanto, mesmo quando você não reconhece a resposta *exata* nesses casos, você ainda pode descobrir uma resposta aproximada, na forma decimal, para a questão do limite.

ATENÇÃO!

A segunda limitação da calculadora é que ela não vai funcionar com algumas funções peculiares como $\lim_{x \to 5} \sqrt[25]{x-5} \cdot \sin\left(\frac{1}{x-5}\right)$. Esse limite é igual a zero, mas você não pode achar essa resposta com a sua calculadora.

A propósito, mesmo quando o método da calculadora funciona, as calculadoras podem fazer algumas coisas esquisitas de tempos em tempos. Por exemplo, se você está resolvendo um problema sobre limite onde x se aproxima de 3, e você coloca números na sua calculadora que são muito perto de 3 (como 3,0000000001), você pode chegar bem perto do alcance decimal máximo da calculadora. Isso pode resultar em respostas que se *distanciam* da resposta do limite, mesmo quando você coloca números cada vez mais perto do número x.

A moral da história é que você deve pensar na sua calculadora como uma das muitas ferramentas à sua disposição para resolver limites – e não como uma substituta para as técnicas algébricas.

Resolvendo problemas sobre limite com a álgebra

Você usa duas técnicas algébricas importantes para problemas "reais" sobre limite: fatoração e multiplicação conjugada. Eu agrego outras técnicas da álgebra na seção "Álgebra diversa". Todos os métodos algébricos envolvem a mesma idéia básica. Quando a substituição não funciona na função original – geralmente por causa do intervalo aberto na função – você pode usar a álgebra para manipular a função até que a substituição funcione (ela funciona porque a manipulação tampa o intervalo aberto).

Se divertindo com a fatoração

Aqui está um exemplo. Avalie $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$, o mesmo problema que você fez com uma calculadora no tópico anterior.

1. Tente plugar 5 no lugar de x – você deve sempre tentar primeiro a substituição.

Você obtém $\frac{0}{0}$ – não é bom, vá para o plano B.

2. x^2 – 25 pode ser fatorado, então faça isso.

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)}{x-5}$$

3. Cancele o (x – 5) do numerador e do denominador.

$$=\lim_{x\to 5}(x+5)$$

4. Agora a substituição vai funcionar.

$$=5+5$$

$$=10$$

Então, $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}=10$, confirmando a resposta da calculadora.

A propósito, a função que você obteve depois de cancelar o $(x-5)$, a saber, $(x+5)$, é idêntica à função original, $\frac{x^2-25}{x-5}$, exceto pelo fato de o intervalo aberto na função original em (5,10) ter sido plugado. E note que o limite à medida que x se aproxima de 5 é 10, que é a altura do intervalo aberto em (5,10).

Multiplicação conjugada – Não, isso não tem nada a ver com produção

Tente esse método para funções racionais que contenham raízes quadradas. A multiplicação conjugada *racionaliza* o numerador ou o denominador de uma fração, o que significa se livrar das raízes quadradas.

Tente esse aqui: Avalie $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

1. Tente a substituição.

Insira o número 4: isso lhe dá $\frac{0}{0}$ – vá para o plano B.

2. Multiplique o numerador *e* o denominador pelo conjugado de $\sqrt{x}-2$, que é $\sqrt{x}+2$.

LEMBRE-SE

O *conjugado* de uma expressão de dois termos é a mesma expressão com a subtração trocada pela adição e vice-versa. O produto de conjugados é sempre igual ao primeiro termo ao quadrado menos o segundo termo ao quadrado.

Agora faça a racionalização.

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{(x-4)} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x})^2 - 2^2}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

3. Cancele o (x – 4) do numerador e do denominador.

$$= \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

4. Agora a substituição funciona.

$$= \frac{1}{\sqrt{4}+2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

Então, $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{1}{4}$.

Assim como o exemplo da fatoração, esse processo de racionalização plugou o intervalo aberto na função original. Nesse exemplo, 4 é o número x, $\frac{1}{4}$ é a resposta, e a função $\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ tem um intervalo aberto em $(4, \frac{1}{4})$.

Álgebra diversa

Ao fatorar e fazer a multiplicação conjugada não tenha trabalho, tente outra álgebra básica para somar ou subtrair frações, multiplicar ou dividir frações, cancelar, ou outra forma de simplificação. Aqui está um exemplo:

Avalie $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x+4} - \frac{1}{4}}{x}$.

1. Tente a substituição.

Insira o número 0: isso lhe dá $\frac{0}{0}$ – não é bom.

2. Simplifique a fração complexa (essa é uma fração grande que contém pequenas frações) multiplicando o numerador e o denominador pelo menor denominador comum das pequenas frações, a saber, 4(x + 4).

Nota: Somar as pequenas frações no numerador também funcionaria, mas é mais demorado do que o método descrito aqui.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x+4} - \frac{1}{4}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{4}\right)}{x} \cdot \frac{4\,(x+4)}{4(x+4)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{4 - (x+4)}{4x(x+4)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-x}{4x(x+4)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-1}{4(x+4)}$$

3. Agora a substituição funciona.

$$= \frac{-1}{4(0+4)}$$

$$= -\frac{1}{16}$$

Esse é o limite.

Faça uma pausa e prepare um sanduíche de limite

Quando a álgebra não funciona, tente fazer um sanduíche de limite. A melhor maneira de entender o método do *sanduíche* ou da *espremedura*[1] é olhando um gráfico. Veja a Figura 8-1.

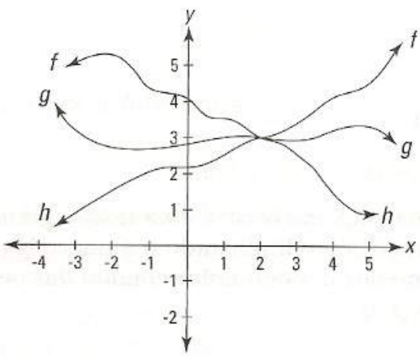


Figura 8-1: O método do sanduíche para resolver um limite. As funções *f* e *h* são o pão, e *g* é o salame.

Olhe as funções *f*, *g*, e *h* na Figura 8-1: *g* é o sanduíche entre *f* e *h*. Se perto do número *x* – nesse exemplo o número 2 – *f* é sempre maior ou da mesma altura que *g*, e *g* é sempre maior ou da mesma altura que *h*, e se o $\lim_{x \to 2} f(x) =$

$\lim_{x \to 2} h(x)$, então $g(x)$ deve ter o mesmo limite porque está sendo espremido ou apertado entre f e h. O limite de f e h à medida que x se aproxima 2 é 3. Então, 3 também tem que ser o limite de g. Não há nenhum outro lugar pra ir.

Aqui está outro exemplo: Avalie $\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

1. **Tente a substituição.**

   Coloque 0 em x. Isso lhe dá uma sen $\frac{1}{0}$ – não é bom, não pode dividir por zero. Vamos para o plano B.

2. **Tente os métodos algébricos ou qualquer outro truque que você tenha na manga.**

   Vá nessa. Você não pode fazer. Plano C.

3. **Tente a calculadora.**

   É sempre uma boa idéia ver o que sua calculadora diz mesmo que esse seja um problema para "mostrar o seu trabalho". Para desenhar o gráfico dessa função, ajuste o modo da sua calculadora para *radiano* e a janela para:

   x min = –0,4

   x max = 0,4

   y min = –0,3

   y max = 0,3

   A Figura 8-2 mostra como o gráfico se parece:

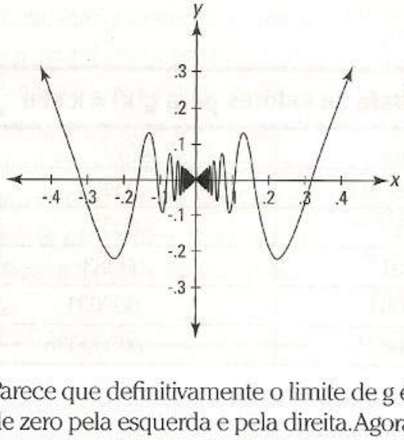


Figura 8-2: O gráfico de $g(x) = x\operatorname{sen}\frac{1}{x}$.

Parece que definitivamente o limite de g é zero à medida que x se aproxima de zero pela esquerda e pela direita. Agora, verifique a tabela de valores na sua calculadora (ajuste o *TblStart* para 0 e Δ*Tbl* para 0,001). A Tabela 8-2 dá alguns dos valores para a tabela. **Nota:** Mova a barra de rolamento para baixo para ver todos os números da Tabela 8-2 na sua calculadora.

Tabela 8-2 Tabela de valores para $g(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

x	$g(x)$
0	erro
.001	.0008269
.002	-.000936
.003	.0009565
.004	-.003882
.005	-.004366
.006	-.000969
.007	-.006975
.008	-.004928
.009	-.008234

Esses números se parecem mais ou menos como se estivessem chegando cada vez mais perto de zero à medida que x se aproxima de zero, mas eles não são convincentes. Esse tipo de tabela não funciona tão bem para funções oscilantes como o seno e o cosseno (Note que alguns valores da função na tabela, por exemplo – 0.000969 para $x = 0.006$, estão mais perto de zero do que outros valores maiores na tabela onde x é menor. Isso é o oposto do que o que nós queremos ver).

Uma melhor maneira de ver que o limite de g é zero é usar o primeiro método da calculadora que eu mencionei no tópico "Descobrindo o limite com a sua calculadora". Digite a função na tela inicial e insira sucessivamente os valores de x listados na Tabela 8-3 para obter os valores da função correspondentes.

Tabela 8-3 Tabela de valores para $g(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

x	$g(x)$
.1	-.054
.01	-.0051
.001	.00083
.0001	-.000031
.00001	.00000036

Agora você pode definitivamente ver que g tende para zero.

A longa e tortuosa estrada

Considere a função, $g(x) = x \text{ sen } \frac{1}{x}$, mostrada nas Figuras 8-2 e 8-3 e discutida no tópico sobre fazer um sanduíche de limite. Ela é definida em todo lugar exceto em zero. Se nós agora a alterarmos um pouco – definindo que $f(0)$ é 0 – nós criamos uma função com propriedades bizarras. A função é agora contínua em todo lugar; em outras palavras, ela não tem intervalos abertos. Mas em (0,0), ela parece contradizer a idéia básica da continuidade que diz que você pode traçar a função sem tirar o lápis do papel.

Imagine começando em qualquer lugar em $g(x)$ para a esquerda do eixo y e dirigir ao longo da estrada tortuosa na origem, (0,0). Veja isso. Você pode começar sua viagem o mais perto que você quiser da origem – o que você acha da largura de um próton longe de (0,0) – e o comprimento da estrada entre você e (0,0) é *infinitamente* longa! Isso mesmo. Ela se enrosca para cima e para baixo com tal freqüência crescente à medida que você se aproxima cada vez mais de (0,0), que a duração do seu passeio é na verdade infinita apesar de o fato de cada "reta" estar ficando cada vez menor. Nessa longa e tortuosa estrada, você nunca vai chegar à porta dela.

Essa função alterada é claramente contínua em todos os pontos 0 com a possível exceção do (0,0) – porque é uma estrada tortuosa calma e conectada. E porque o $\lim\limits_{x \to 0} x \text{ sen } \frac{1}{x} = 0$ (veja o tópico do sanduíche de limite para prova), e porque $f(0)$ é definido como sendo 0, o teste de três partes para continuidade em 0 é satisfeito. A função é então contínua em todo lugar.

Mas me diga, como pode a curva alguma vez tocar (0,0) ou se conectar a (0,0) pela esquerda (ou pela direita)? Supondo que você possa atravessar uma distância infinita dirigindo infinitamente rápido, quando você finalmente passa pela origem, você está em uma das pernas da rua que estão para cima ou uma das pernas que estão para baixo? Nenhum dos dois parece possível porque não importa a distância que você esteja da origem, você tem um número infinito de pernas e um número infinito de curvas na sua frente. Não há uma última curva antes de chegar a (0,0). Então parece que a função não pode se conectar à origem e isso, conseqüentemente, não pode ser contínuo nesse lugar – apesar de a matemática nos dizer que ela é contínua.

Aqui está outra maneira de olhar para isso. Imagine uma linha vertical desenhada no topo da função em $x = -0.2$. Agora deslize vagarosamente a linha para a direita ao longo da função até que você passe por (0,0). Não há intervalos abertos na função, então em cada instante, a linha vertical cruza a função em algum lugar. Pense no ponto onde a linha vertical se intercepta com a função. À medida que você puxa a linha para a direita, esse ponto viaja ao longo da função, se enroscando para cima e para baixo ao longo da estrada, e, à medida que você puxa a linha sobre a origem, o ponto chega e depois passa (0,0). Agora me diga o seguinte: quando o ponto atingiu (0,0), ele estava subindo ou descendo? Como você pode comparar tudo isso? Eu gostaria de saber.

Coisas como essa realmente bagunçam a sua cabeça.

4. Agora você precisa provar o limite matematicamente, mesmo que você já tenha resolvido na calculadora. Para fazer isso, você precisa fazer um sanduíche de limite (Enganei você – aposto que você pensava que o passo 3 era o último passo).

A parte difícil sobre usar o método do sanduíche é produzir as funções dos "pães" (As funções *f* e *h* são o pão e a *g* é o salame). Não há uma maneira automática de fazer isso. Você tem que pensar sobre o formato da função do salame, e depois usar o seu conhecimento sobre funções e sua imaginação para produzir alguns bons prospectos para as funções dos pães.

Devido ao fato de a imagem da função seno ser do 1 negativo até o 1 positivo, toda vez que você multiplicar um número pelo seno de alguma coisa, o resultado ou fica à mesma distância de zero ou se aproxima de zero. Assim, x sen $\frac{1}{x}$ nunca vai chegar acima de $|x|$ ou abaixo de $-|x|$. Então tente desenhar o gráfico das funções $f(x) = |x|$ e $h(x) = -|x|$ junto com $g(x)$ para ver se *f* e *h* são funções de pão adequadas para *g*. A Figura 8-3 mostra que elas são.

Nós mostramos – apesar de talvez não ser a satisfação de um matemático, *por Deus*! – que $f(x) \geq g(x) \geq h(x)$. E devido ao fato de o $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = 0$, se segue que $g(x)$ dever ter o mesmo limite: voilà – $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

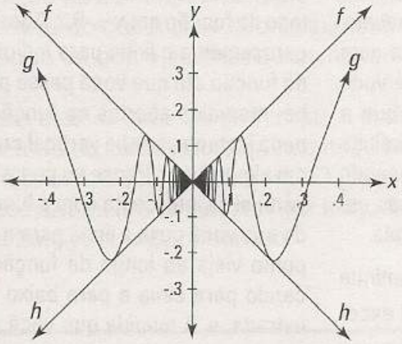


Figura 8-3: O gráfico de $f(x) = |x|$, $h(x) = -|x|$ e $g(x) = x\text{sen}\,\frac{1}{x}$. É uma gravata borboleta!

Avaliando limites no infinito

Nos tópicos anteriores, eu olhei os limites à medida que x se aproximava de um número finito, mas você também pode ter limites onde x se aproxima do infinito ou do infinito negativo. Considere a função $f(x) = \frac{1}{x}$ e dê uma olhada no seu gráfico na Figura 8-4.

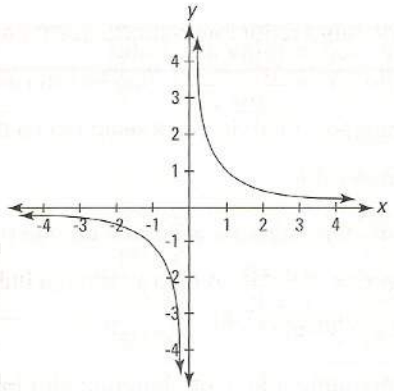


Figura 8-4: O gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Você pode ver no gráfico que à medida que x aumenta cada vez mais – em outras palavras, à medida que *x* se aproxima do infinito – a altura da função fica cada vez menor, mas nunca chega à zero. Isso é confirmado considerando o que acontece quando você insere números cada vez maiores em $\frac{1}{x}$. Os outputs se tornam cada vez menores. Esse gráfico dessa forma tem uma assíntota horizontal de $y = 0$ (o eixo *x*), e nós dizemos que o $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$. O fato de *x* nunca realmente tocar o infinito e de *f* nunca chegar a zero não tem relevância. Quando nós dizemos que $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, queremos dizer que à medida que *x* fica cada vez maior sem fim, *f* se aproxima cada vez mais de zero – *f* tende à zero para sempre. A função *f* também se aproxima de zero à medida que *x* se aproxima do infinito negativo, o que é escrito como $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Limites no infinito e assíntotas horizontais

Assíntotas horizontais e os limites no infinito sempre andam de mãos juntas. Você não pode ter um sem o outro. Se você tem uma função racional como $f(x) = \dfrac{3x-7}{2x+8}$, determinar o limite no infinito ou no infinito negativo é o mesmo que encontrar o local da assíntota horizontal.

Aqui está o que você faz. Primeiro, preste atenção no grau do numerador (esse é a maior potência para *x* no numerador) e o grau do denominador. Agora, você tem três casos:

- Se o grau do numerador for maior do que o grau do denominador, por exemplo, $f(x) = \frac{6x^4 + x^3 - 7}{2x^2 + 8}$, não há uma assíntota horizontal e o limite da função à medida que x se aproxima do infinito (ou infinito negativo) não existe.
- Se o grau do denominador for maior do que o grau do numerador, por exemplo, $g(x) = \frac{4x^2 - 9}{x^3 + 12}$, o eixo x (isto é, a linha $y = 0$) é a assíntota horizontal e o $\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$.
- Se o grau do numerador e do denominador for igual, pegue o coeficiente da maior potência de x no numerador e divida pelo coeficiente da maior potência de x no denominador. Esse quociente dá a resposta para o problema sobre limite e para a altura da assíntota. Por exemplo, se $h(x) = \frac{4x^3 - 10x + 1}{5x^3 + 2x^2 - x}$, o $\lim_{x \to \infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} h(x) = \frac{4}{5}$ e h tem uma assíntota horizontal em $y = \frac{4}{5}$.

Para impressionar seus amigos, aponte o seu dedo indicador para cima, levante uma sobrancelha, e diga em tom profissional: "Em uma função racional onde o numerador e o denominador têm graus iguais, o limite da função à medida que x se aproxima do infinito ou do infinito negativo é igual ao quociente dos coeficientes dos termos principais."

A substituição não funciona para os problemas desse tópico. Se você tentar inserir ∞ no lugar de x em qualquer uma das funções racionais nesse tópico, você obtém $\frac{\infty}{\infty}$, mas isso *não* é igual a 1. Um resultado de $\frac{\infty}{\infty}$ não te diz nada sobre a resposta para um problema sobre limite.

Resolvendo problemas no infinito com uma calculadora

Aqui está um problema que não pode ser feito pelo método do tópico anterior porque não é uma função racional: $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x\right)$. Mas é muito fácil com uma calculadora. Digite a função no modo de gráficos, depois vá para *table setup* e configure *TblStart* para 100.000 e Δ*Tbl* para 100.000. A Tabela 8-4 mostra os resultados.

Tabela 8-4 **Tabela de valores para $y = (\sqrt{x^2 + x} - x)$**

x	y
100.000	.4999988
200.000	.4999994
300.000	.4999996
400.000	. 4999997
500.000	. 4999998
600.000	. 4999998
700.000	. 4999998
800.000	. 4999998
900.000	. 4999999

Você pode ver que y está chegando bem perto de 0,5 à medida que x fica cada vez maior. Então 0,5 é o limite da função à medida que x se aproxima do infinito, e há uma assíntota horizontal em $y = 0,5$. Se você tem alguma dúvida sobre o limite ser igual a 0,5, volte para *table setup* e insira um número extremamente grande para *TblStart* e para Δ*Tbl*, digamos, 1.000.000.000, e verifique os resultados da tabela de novo. Tudo que você vê é uma coluna de 0,5s. Esse é o limite (A propósito, ao contrário das duas funções racionais nos tópicos anteriores, o limite dessa função à medida que x se aproxima do infinito negativo não é igual ao limite à medida que x se aproxima do infinito: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x\right) = \infty$ porque quando você coloca $-\infty$ você tem $\infty + \infty$ que é igual a ∞). Mais uma coisa: Assim como com limites regulares, usar uma calculadora para limites infinitos não lhe dá uma resposta exata a não ser que os números na tabela estejam se aproximando de um número que você reconheça como, por exemplo, 0,5.

ATENÇÃO!

A substituição não funciona no problema acima, $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x\right)$. Se você coloca ∞ no lugar de x, você obtém $\infty - \infty$ que *não* é igual a zero. Um resultado de $\infty - \infty$ não diz nada sobre a resposta para um problema sobre limite.

Usando a álgebra para limites no infinito

Agora tente um pouco de álgebra para o problema $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x\right)$. Você obteve a resposta com a calculadora, mas em igualdade de circunstâncias, é melhor resolver o problema algebricamente porque assim você tem uma resposta matemática incontestável. A resposta da calculadora nesse caso é *bem* convincente, mas não é matematicamente rigorosa, então se você parar aqui, a polícia da matemática pode te pegar.

1. Tente a substituição – sempre uma boa idéia.

Nada bom. Você obtém $\infty - \infty$, que não te diz nada – veja o ícone "Atenção!" no tópico anterior. Vá para o plano B.

Devido ao fato de $(\sqrt{x^2+x}-x)$ conter uma raiz quadrada, o método da multiplicação conjugada seria uma opção natural, exceto pelo fato desse método ser usado para funções fracionárias. Bem, apenas coloque $(\sqrt{x^2+x}-x)$ sobre o número 1 e, voilà, você tem uma fração: $\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{1}$. Agora faça a multiplicação conjugada.

2. **Multiplique o numerador e o denominador pelo conjugado de $(\sqrt{x^2+x}-x)$ e simplifique.**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{1}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}+x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2}{(\sqrt{x^2+x}+x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} \quad \text{(Fatore } x \text{ para fora do denominador)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}$$

3. **Agora a substituição funciona.**

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}+1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1} \quad \text{(Lembre-se que } \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \text{ no tópico "Limites para memorizar)}$$

$$=\frac{1}{1+1}$$

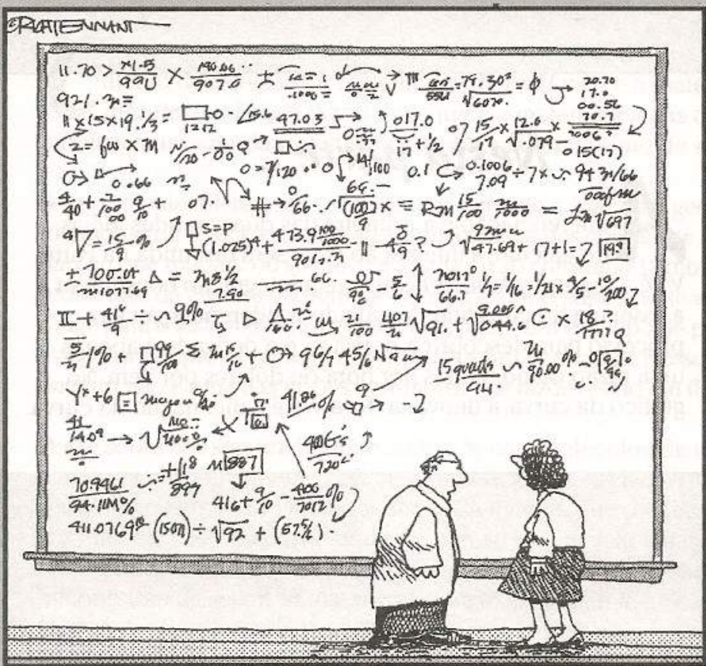
$$=\frac{1}{2}$$

Assim, $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\frac{1}{2}$, que confirma a resposta da calculadora.

Parte IV

Diferenciação

A 5ª onda   por Rich Tennant



"O QUE NÓS ESTAMOS REALMENTE DIZENDO AQUI?"

Nesta parte...

A diferenciação é a primeira das duas grandes idéias do cálculo; a integração (que será discutida na Parte V) é a segunda. A diferenciação e a integração constituem a essência do currículo do cálculo. A diferenciação é o processo para descobrir a derivada, e a derivada é apenas uma razão como milhas por hora ou dólares por item. No gráfico da curva, a derivada diz a você a inclinação da curva.

Capítulo 9
Orientação da diferenciação

Neste capítulo

- Descobrindo a álgebra básica por trás do cálculo
- Entendendo os símbolos estranhos do cálculo
- Fazendo a diferenciação com Laurel e Hardy
- Encontrando as derivadas de equações lineares e quadráticas
- Lidando com problemas sobre tangente e o quociente da diferença

Cálculo diferencial é a matemática da *mudança* e a matemática do *infinitesimal*. Você talvez diga que é a matemática das mudanças infinitesimais – mudanças que ocorrem a cada milésimo de segundo.

Sem o cálculo diferencial – se você tem somente a álgebra, a geometria e a trigonometria – você está limitado à matemática das coisas que mudam ou não, ou que mudam ou se movem à uma razão *constante*. Lembra-se daqueles problemas da álgebra? O trem sai da estação indo para o norte a 90km/h, você dirige para o leste a 80km/h... Você pode lidar com esse tipo de problema com a álgebra porque as velocidades ou razões são constantes. Nosso mundo, no entanto, não é uma das razões constantes – as razões estão em fluxo constante.

Pense sobre colocar um homem na lua. Apollo 11 decolou de uma plataforma de lançamento *móvel* (a terra está tanto rodando em torno do seu eixo como girando ao redor do sol). À medida que o Apollo subia cada vez mais alto, o atrito provocado pela atmosfera e o efeito da gravidade da terra estavam mudando não apenas a todo segundo, não apenas a cada milionésimo de segundo, mas a cada fração infinitesimal de segundo. O peso da nave espacial também estava constantemente mudando à medida que queimava combustível. Todas essas coisas influenciaram a mudança de velocidade do foguete. E além disso, o foguete tinha que atingir um alvo *móvel*, a lua. Todas essas coisas estavam mudando, e suas razões de mudança estavam mudando. Digamos que o foguete estava a uma velocidade de 2000km/h em um segundo e a 2020km/h um segundo depois – durante esse segundo, a velocidade do foguete passou literalmente através do número infinito de velocidades diferentes entre 2000 e 2020km/h. Como fazer as contas para essas coisas efêmeras que mudam a cada parte *infinitesimal* de segundo? Você não pode fazer isso sem a diferenciação.

O cálculo diferencial é também usado para todo tipo de coisa terrestre. Grande parte da teoria da economia moderna seria impossível sem a diferenciação. Em economia, tudo está em um fluxo constante. Preços sobem e descem, suprimentos e demanda flutuam, e a inflação está constantemente mudando. Essas coisas estão constantemente mudando, e as maneiras que elas afetam cada um estão constantemente mudando. Você precisa do cálculo para isso.

O cálculo diferencial é uma das invenções mais práticas e poderosas na história da matemática. Então, vamos logo começar.

Fazendo a diferenciação: É somente encontrar a inclinação

A diferenciação é a primeira das duas maiores idéias em cálculo – a outra é a integração, que eu abordo na Parte V. A diferenciação é o processo de encontrar a derivada de uma função do tipo $y = x^2$. A *derivada* é apenas um termo sofisticado do cálculo para uma simples idéia que você sabe da álgebra – a inclinação. A *inclinação*, como você sabe, é o termo sofisticado da álgebra para declive. E *declive* é a palavra sofisticada para... Não! Declive é a palavra usual que você conhece desde criança, como em, "Ei, essa rua é realmente íngreme". Tudo que você estuda em cálculo diferencial é relacionado à simples idéia de declive.

No cálculo *diferencial*, você estuda a *diferenciação*, que é o processo de *derivar* – isto é, encontrar – *derivadas*. Essas são grandes palavras para uma simples idéia: Encontrar a *inclinação* de uma reta ou de uma curva. Use alguns desses termos para impressionar os seus amigos. A propósito, a raiz das palavras *diferencial* e *diferenciação* é *diferença* – eu explico a conexão no final desse capítulo no tópico sobre o *quociente da diferença*.

Considere a Figura 9-1. Uma inclinação de ½ significa que à medida que o homem palito anda um metro para a direita, ele some ½ metro; onde a inclinação for 3, ele sobe 3 metros à medida que anda 1 metro para a direita. Onde a inclinação for zero, ele está no topo, nem subindo e nem descendo; e onde a inclinação for negativa, ele está descendo. Uma inclinação de -2, por exemplo, significa que ele *desce* 2 metros para cada metro para a direita. Isso é mostrado com mais precisão na Figura 9-2.

Para lembrar que subir e descer para a direita (ou para cima à esquerda) é uma inclinação *negativa*, imagine um "N" maiúsculo como mostrado na Figura 9-3.

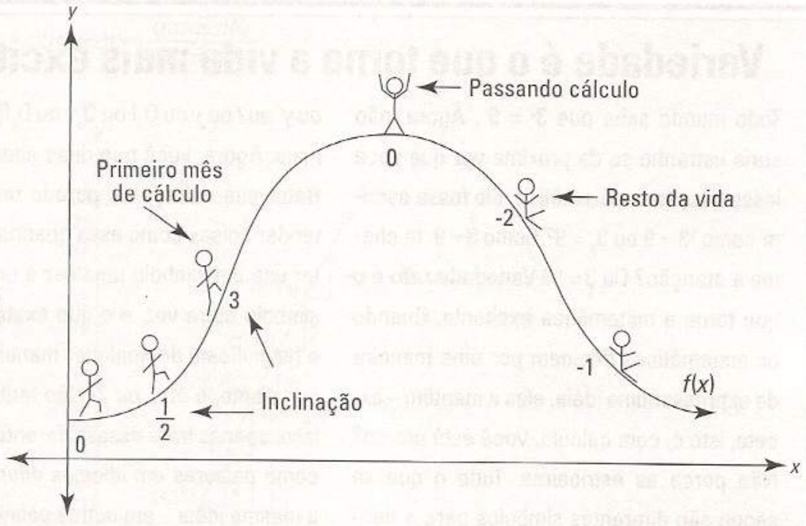
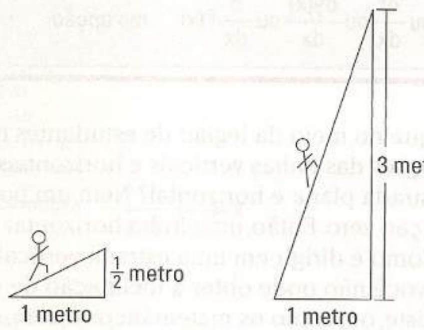


Figura 9-1: Fazer a diferenciação apenas significa encontrar a inclinação.



Português:	declive = $\frac{1}{2}$	declive = 3
Álgebra:	inclinação = $\frac{1}{2}$	inclinação = 3
Cálculo:	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$	$\frac{dy}{dx} = 3$

($\frac{dy}{dx}$, lido como /dê y, dê x/, é um dos muitos símbolos para a derivada – veja o texto complementar).

Figura 9-2: A derivada = inclinação = declive

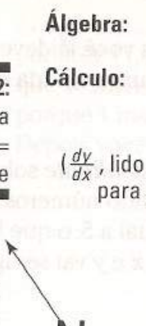


Figura 9-3: Esse N tem uma inclinação negativa.

Variedade é o que torna a vida mais excitante

Todo mundo sabe que $3^2 = 9$. Agora, não seria estranho se da próxima vez que você lesse esse fato matemático, ele fosse escrito como $^{2}3 = 9$ ou $3_2 = 9$? Como $\overset{2}{3} = 9$ te chama a atenção? Ou $\underset{2}{3} = 9$? Variedade *não* é o que torna a matemática excitante. Quando os matemáticos decidem por uma maneira de expressar uma idéia, eles a mantêm – exceto, isto é, com cálculo. Você está pronto? Não perca as estribeiras. Tudo o que se segue são diferentes símbolos para a derivada – todos eles significam exatamente a mesma coisa: $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{df}{dx}$ ou $\frac{dy(x)}{dx}$ ou $\frac{d}{dx}f'(x)$ ou y' ou f ou y ou $D_x f$ ou $D_x y$ ou $D_x f(x)$. Existem mais. Agora, você tem duas alternativas: 1) Bater sua cabeça na parede tentando entender coisas como essa quando algum autor usa um símbolo uma vez e um diferente símbolo outra vez, e o que exatamente o d e f significam de qualquer maneira, e assim por diante, e etc., ou 2) Não tente entender isso; apenas trate esses diferentes símbolos como palavras em idiomas diferentes para a mesma idéia – em outras palavras, não se preocupe. Eu recomendo fortemente a última opção.

ATENÇÃO!

Não fique no meio da legião de estudantes que confundem as inclinações das linhas verticais e horizontais. Qual a inclinação de uma estrada plana e horizontal? Nem um pouco inclinada, é claro. Inclinação zero. Então, uma linha horizontal tem uma inclinação igual à *zero*. Como é dirigir em uma estrada vertical? Você não consegue fazer isso. E você não pode obter a inclinação de uma linha vertical – ela não existe, ou, como os matemáticos dizem, é *indefinida*.

A inclinação de uma reta

Continue com a idéia da inclinação – a esta altura você já deve saber que a inclinação é do que se trata a diferenciação. Dê uma olhada no gráfico da reta, $y = 2x + 3$, na Figura 9-4.

Você se lembra da álgebra – eu estou *totalmente confiante* sobre isso – que você pode encontrar pontos nessa reta inserindo números no lugar de x e calculando y: coloque 1 no lugar de x e y é igual a 5, o que lhe dá um ponto localizado em (1,5); coloque 4 no lugar de x e y vai ser igual a 11, te dando o ponto (4,11), e assim por diante.

Eu tenho certeza que você também se lembra como calcular a inclinação dessa reta. Eu percebo que nenhum cálculo é necessário aqui – você sobe 2 à medida que passa por 1, então a inclinação é automaticamente 2. Você também pode simplesmente notar que $y = 2x + 3$ está na forma inclinação-intercepta ($y = mx + b$) e que, desde que $m = 2$, a inclinação é 2 (Veja o Capítulo 5 se você quiser revisar $y = mx + b$). Mas fique firme comigo porque você precisa do que se segue. Primeiro, lembre-se que:

LEMBRE-SE

$$inclinação = \frac{aumento}{distância}$$

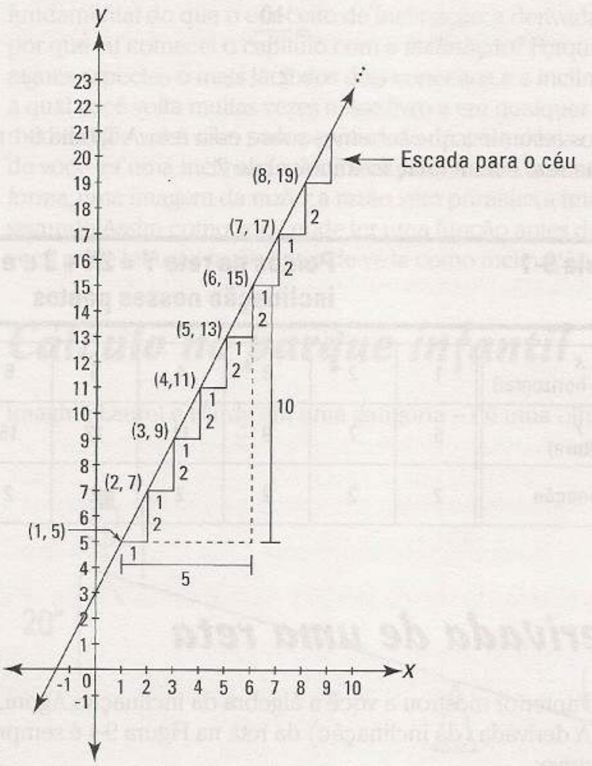


Figura 9-4: O gráfico de y = 2x + 3.

O *aumento* é a distância que você sobe (a parte vertical de um degrau da escada), e a *distância* é o espaço que você passa através (a parte horizontal do degrau da escada). Agora, pegue quaisquer dois pontos na reta, digamos, (1,5) e (6,15), e descubra o aumento e a distância. Você aumenta em 10 a partir de (1,5) para (6,15) porque 5 mais 10 é igual a 15 (ou você pode dizer que 15 menos 5 é igual a 10). E você encontra 5 a partir de (1,5) até (6,15) porque 1 mais 5 é igual a 6 (ou em outras palavras, 6 menos 1 é igual a 5). Depois, você divide para ter a inclinação.

$$\begin{aligned} inclinação &= \frac{aumento}{distância} \\ &= \frac{10}{5} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Aqui está como você faz o mesmo problema usando a fórmula da inclinação:

$$inclinação = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Insira os pontos (1,5) e (6,15):

$$\begin{aligned} inclinação &= \frac{15-5}{6-1} \\ &= \frac{10}{5} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Ok, vamos resumir o que sabemos sobre essa reta. A Tabela 9-1 mostra seis pontos na reta e a inclinação imutável de 2.

Tabela 9-1 **Pontos na reta Y = 2X + 3 e a inclinação nesses pontos**

x (posição horizontal)	1	2	3	4	5	6	etc.
y (altura)	5	7	9	11	13	15	etc.
inclinação	2	2	2	2	2	2	etc.

A derivada de uma reta

O tópico anterior mostrou a você a álgebra da inclinação. Agora, aqui está o cálculo. A derivada (da inclinação) da reta na Figura 9-4 é sempre 2, então você escreve:

$$\frac{dy}{dx} = 2$$

(Lê-se: *d y, d x igual a* 2)

Outra forma comum de escrever a mesma coisa é

$$y' = 2$$

(Lê-se *y linha é igual a* 2)

E você diz,

A derivada da função, $y = 2x + 3$, é 2.

(Lê-se *a derivada da função*, $y = 2x + 3$, é 2. Isso é uma piada.)

A derivada: É apenas uma razão

Aqui está outra maneira de entender a idéia de uma derivada que é mais fundamental do que o conceito de inclinação: a derivada é uma *razão*. Então por que eu comecei o capítulo com a *inclinação*? Porque a inclinação é em alguns aspectos o mais fácil dos dois conceitos, e a inclinação é a idéia para a qual você volta muitas vezes nesse livro e em qualquer livro de cálculo à medida que você olha para o gráfico de dúzias e dúzias de funções. Mas antes de você ter uma inclinação, você tem uma razão. Uma inclinação é, de certa forma, uma imagem da razão; a razão vem primeiro, a imagem dela vem em segundo. Assim como você pode ter uma função antes de ver o seu gráfico, você pode ter uma razão antes de vê-la como inclinação.

Cálculo no parque infantil

Imagine Laurel e Hardy em uma gangorra – dê uma olhada na Figura 9-5.

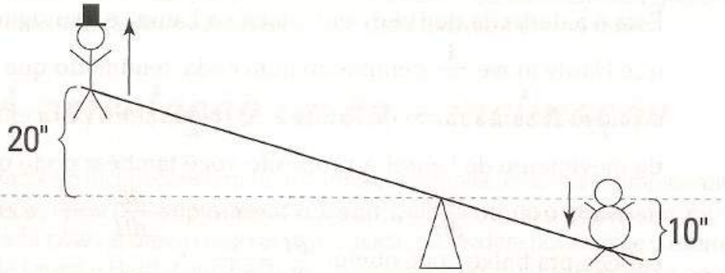


Figura 9-5: Laurel e Hardy – alegremente alheios das implicações do cálculo.

Supondo que Hardy pese duas vezes mais do que Laurel, Hardy tem que sentar duas vezes mais perto do centro do que Laurel para que eles se equilibrem. E para cada centímetro que Hardy desce, Laurel sobe dois centímetros. Então Laurel se move duas vezes mais do que Hardy. Voilà, você tem uma derivada!

CONCEITO CRÍTICO DE CÁLCULO

A *derivada* é simplesmente a medida de quanto uma coisa muda comparada com outra – e isso é uma *razão*.

Laurel se move duas vezes mais do que Hardy, então com os símbolos do cálculo você escreve:

$$dL = 2dH$$

Vagamente falando, dL pode ser pensado como sendo a mudança na posição de Laurel e dH como sendo a mudança na posição de Hardy. Você pode ver que se Hardy descer 10 centímetros então dH é 10, e devido ao fato de dL ser igual a 2 vezes dH, dL é igual a 20 – então Laurel sobe em 20 centímetros. Dividindo ambos os lados dessa equação por dH, você tem

$$\frac{dL}{dH} = 2$$

E essa é a derivada de Laurel em relação à Hardy (É lida como,"$d\,L$, $d\,H$", ou como,"a derivada de L em relação a H"). O fato de $\frac{dL}{dH} = 2$ simplesmente significa que Laurel está se movendo 2 vezes mais do que Hardy. A *razão* de movimento de Laurel é de 2 *centímetros por centímetro* do movimento de Hardy.

Agora vamos olhar para isso do ponto de vista de Hardy. Hardy se move a metade de Laurel, então você também pode escrever:

$$dH = \frac{1}{2}\,dL$$

Dividindo por dL, você tem

$$\frac{dH}{dL} = \frac{1}{2}$$

Essa é a derivada de Hardy em relação a Laurel, e isso significa, é claro, que Hardy move $\frac{1}{2}$ centímetro para cada centímetro que Laurel se move. Assim, a razão de Hardy é $\frac{1}{2}$ *centímetro por centímetro* de movimento de Laurel. A propósito, você também pode obter essa derivada usando $\frac{dL}{dH} = 2$, que é o mesmo que $\frac{dL}{dH} = \frac{2}{1}$, e colocando de cabeça pra baixo você obtém $\frac{dH}{dL} = \frac{1}{2}$.

Essas razões de 2 *centímetros por centímetro* e $\frac{1}{2}$ *centímetro por centímetro* podem parecer um pouco estranhas porque nós normalmente pensamos em razões como se referindo a algo por unidade de tempo, como *quilômetros por hora*. Mas uma razão pode ser *qualquer coisa por qualquer coisa*. Então, toda vez que você tiver *isso por aquilo*, você tem uma razão; e se você tem uma razão, você tem uma derivada.

Velocidade – a razão mais familiar

Falando em *quilômetros por hora*, digamos que você esteja dirigindo a uma velocidade constante de 60 *quilômetros por hora*. Essa é a *razão* do seu carro, e 60 *quilômetros por hora* é a derivada da posição do seu carro (p) em relação ao tempo (t). Com os símbolos do cálculo, você escreve:

$$\frac{dp}{dt} = 60\,\frac{\textit{quilômetros}}{\textit{hora}}$$

Isso diz a você que a posição do seu carro muda a cada 60 quilômetros para cada hora que o tempo muda. Ou você pode dizer que a posição do seu carro (em quilômetros) muda 60 vezes até que o tempo mude uma vez (em horas). Novamente, a derivada apenas diz a você quanto uma coisa muda comparada à outra.

E assim como o exemplo de Laurel e Hardy, essa derivada, como todas as derivadas, pode ser colocada de cabeça para baixo:

$$\frac{dt}{dp} = \frac{1}{60} \frac{horas}{quilômetro}$$

A razão *horas por quilômetro* é muito menos familiar do que a razão *quilômetros por hora*, mas é uma razão válida mesmo assim. Ela diz a você que para cada quilômetro que você anda, o tempo muda em $\frac{1}{60}$ da hora, que é um minuto. Ou seja, a cada quilômetro de estrada é percorrido, um minuto que passa.

CONCEITO CRÍTICO DE CÁLCULO

Não há fim para as diferentes razões que você talvez veja: *quilômetros por galão* (para o consumo de combustível), *litros por minuto* (para a torneira mal fechada), *produção por funcionário* (para a produtividade de uma fábrica), e etc. Razões podem ser constantes ou mutáveis. Em qualquer caso, toda razão é uma derivada, e toda derivada é uma razão.

A correlação razão – inclinação

Razões e inclinações têm uma correlação simples. Todos os exemplos anteriores sobre razão podem ser desenhados em um sistema de coordenadas *x-y*, onde cada razão aparece como uma inclinação. Considere novamente o exemplo de Laurel e Hardy. Laurel se move duas vezes mais do que Hardy. Isso pode ser representado pela seguinte equação:

$$L = 2H$$

A Figura 9-6 mostra o gráfico dessa função.

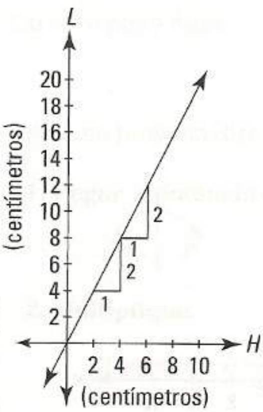


Figura 9-6: O gráfico de L = 2H.

As centímetros no eixo *H* indicam a distância que Hardy se moveu para cima ou para baixo a partir da posição inicial da gangorra; as centímetros no eixo L mostram a distância que Laurel se moveu para cima ou para baixo. A reta sobe 2 centímetros para cada centímetro que vai para a direita, e assim sua inclinação é $\frac{2}{1}$, ou 2. Essa é a representação visual de $\frac{dL}{dH} = 2$, e mostra que a posição de Laurel muda 2 vezes mais que a de Hardy.

Um último comentário antes de seguirmos em frente. Você sabe que a $inclinação = \frac{aumento}{distância}$. Bem, você pode pensar em dL como o *aumento* e dH como a *distância*. Isso amarra tudo junto muito bem.

CONCEITO CRÍTICO DE CÁLCULO

$$inclinação = \frac{aumento}{distância} = \frac{dL}{dH} = razão$$

Lembre-se, uma derivada é apenas uma inclinação, e a derivada é apenas uma razão.

A derivada de uma curva

O tópico anterior nesse capítulo envolveu funções *lineares* – linhas retas com inclinações *constantes*. Mas se todas as funções e gráficos fossem retas com inclinações constantes, não haveria necessidade para o cálculo. A derivada da função de Laurel e Hardy desenhada no gráfico acima é 2, mas você não precisa do cálculo para determinar a inclinação de uma reta. Cálculo é a matemática da mudança, então agora é uma boa hora para irmos para as *parábolas*, curvas com inclinações *variáveis*. A Figura 9-7 é o gráfico da parábola, $y = \frac{1}{4}, x^2$.

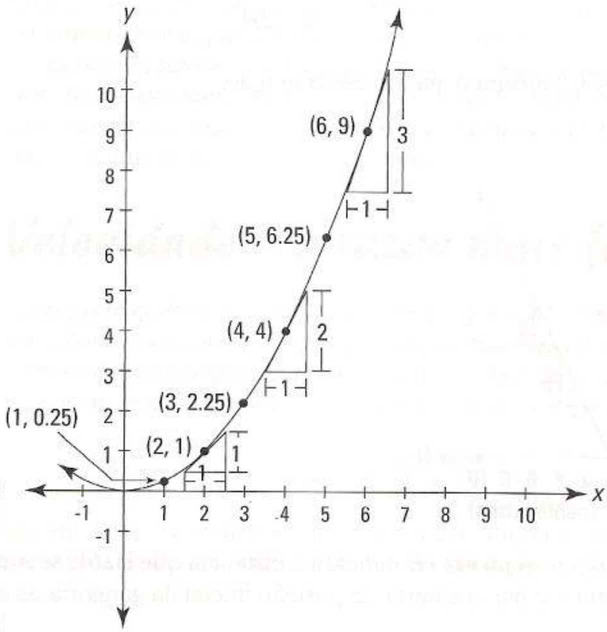


Figura 9-7: O gráfico de $y = \frac{1}{4}, x^2$.

Note como a parábola fica cada vez mais inclinada à medida que vai para a direita. Você pode ver a partir do gráfico que no ponto (2,1), a inclinação é igual a 1; em (4,4), a inclinação é igual a 2; em (6,9), a inclinação é igual a 3, e assim por diante. No fim das contas, a derivada dessa função é igual a $\frac{1}{2}x$ (eu mostro a você como cheguei a isso em um minuto). Para encontrar a inclinação da curva em qualquer ponto, você apenas insere a coordenada x do ponto na derivada, $\frac{1}{2}x$, e você tem a inclinação. Por exemplo, se você quiser a inclinação no ponto (3,2.25), coloque 3 no lugar de x, e a inclinação será $\frac{1}{2}$ vezes 3, ou 1,5. A Tabela 9-2 mostra alguns pontos na parábola e a inclinação nesses pontos.

Tabela 9-2 Pontos na parábola $y = \frac{1}{4}x^2$ e as inclinações nesses pontos

x (posição horizontal)	1	2	3	4	5	6	etc.
y (altura)	0.25	1	2,25	4	6,25	9	etc.
$\frac{1}{2}x$ (inclinação)	0.5	1	1,5	2	2.5	3	etc.

Aqui está o cálculo. Você escreve:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \text{ ou } y' = \frac{1}{2}x$$

E você diz,

A derivada da função $y = \frac{1}{4}x^2$ é $\frac{1}{2}x$.

Ou você pode dizer,

A derivada de $\frac{1}{4}x^2$ é $\frac{1}{2}x$.

Agora, eu prometo dizer a você como *fazer* essa derivada de $y = \frac{1}{4}x^2$.

1. Pegue a potência e coloque na frente do coeficiente[1].

$$2 \cdot \frac{1}{4}x^{2}$$

2. Multiplique.

2 vezes $\frac{1}{4}$ é $\frac{1}{2}$ então isso lhe dá $\frac{1}{2}x^2$.

3. Reduza a potência em 1.

$\frac{1}{2}x^1$ ou apenas $\frac{1}{2}x$.

Essa e muitas outras técnicas de diferenciação serão discutidas no Capítulo 10.

O quociente da diferença

Soem as trombetas! Você chega agora ao que talvez seja a pedra fundamental do cálculo diferencial: o quociente da diferença, a ponte entre limites e a derivada. Eu continuo repetindo – você notou? – o importante fato de a derivada ser apenas uma inclinação. Você aprendeu como encontrar a inclinação de uma reta em álgebra. Na Figura 9-7, eu dei a inclinação da parábola em diversos pontos, e depois eu mostrei o método do atalho para encontrar a derivada – porém eu deixei de fora a matemática importante no meio. Essa matemática envolve limites, e nos leva para o limiar do cálculo. Não perca a calma.

LEMBRE-SE

A *inclinação* é definida como $\frac{\textit{aumento}}{\textit{distância}}$, e

$$\textit{inclinação} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Para calcular a inclinação, você precisa de dois pontos para inserir na fórmula. Para uma reta, isso é fácil. Você apenas escolher quaisquer dois pontos na reta e os insere. Mas digamos que você queira a inclinação da parábola abaixo no ponto (2,4) como mostrado na Figura 9-8.

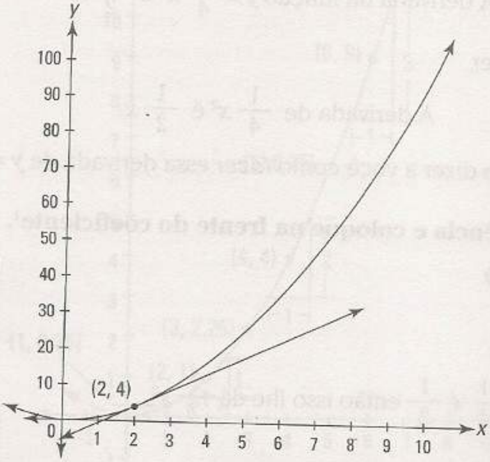


Figura 9-8: O gráfico de $y = x^2$ com uma reta tangente em (2,4).

Você pode ver a reta desenhada tangente à curva em (2,4), e devido ao fato de a inclinação da reta tangente ser igual à inclinação da parábola em (2,4), tudo o que você precisa é a inclinação da reta tangente. Mas você não sabe a equação da reta tangente, então você não pode pegar o segundo ponto – em adição a (2,4) – que você precisa para a fórmula da inclinação.

Aqui está como os inventores do cálculo contornaram essa barreira. A Figura 9-9 mostra a reta tangente novamente e uma reta secante interceptando a parábola em (2,4) e em (10,100).

LEMBRE-SE

Uma *reta secante* é uma linha que intercepta a curva em dois pontos. Isso é um pouco simplificado demais, mas vai servir.

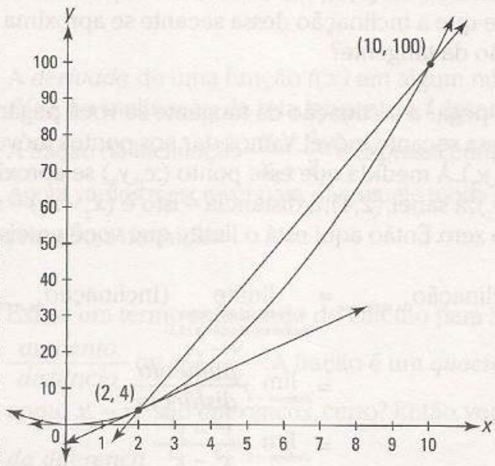


Figura 9-9: O gráfico de $y = x^2$ com uma reta tangente e uma reta secante.

A inclinação dessa reta secante é dada pela fórmula da inclinação:

$$\begin{aligned} inclinação &= \frac{aumento}{distância} \\ &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{100 - 4}{10 - 2} \\ &= \frac{96}{8} \\ &= 12 \end{aligned}$$

Você pode ver que essa reta secante é mais inclinada do que a reta tangente, e assim a inclinação da secante, 12, é maior do que a inclinação que você está procurando.

Agora adicione mais um ponto em (6,36) e desenhe outra secante usando esse ponto e (2,4) novamente. Veja a Figura 9-10.

Calcule a inclinação dessa segunda secante: