

Como $u - U = \operatorname{Re}(f - L)$ e $v - V = \operatorname{Im}(f - L)$, temos:

$$|u - U| \leq |f - L| \quad \text{e} \quad |v - V| \leq |f - L|.$$

Daqui e de (2.6) segue-se que $z \in D \cap V_\delta(z_0)$ implica

$$|u(x, y) - U| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |v(x, y) - V| < \varepsilon,$$

o que estabelece a condição (2.5).

Reciprocamente, supondo satisfeita a condição (2.5), dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $z \in D \cap V_\delta(z_0)$ implica

$$|u(x, y) - U| < \varepsilon/2 \quad \text{e} \quad |v(x, y) - V| < \varepsilon/2. \quad (2.7)$$

Combinando estas desigualdades com a desigualdade do triângulo, obtemos:

$$|f - L| = |(u - U) + i(v - V)| \leq |u - U| + |v - V|$$

Daqui e de (2.7) segue-se que $z \in D \cap V_\delta(z_0)$ implica

$$|f(z) - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

que é a condição (2.4). Isto completa a demonstração.

2.13. Corolário. *Uma função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é contínua num ponto $z_0 = x_0 + iy_0$ se e somente se suas partes real e imaginária forem contínuas nesse ponto.*

EXERCÍCIOS

1. Prove que se as funções $f(z)$ e $g(z)$ têm limites finitos com $z \rightarrow z_0$ (ou $z \rightarrow \infty$), então $\lim[f(z) - g(z)] = \lim f(z) - \lim g(z)$.
2. Prove que se $f(z)$ tem limite finito com $z \rightarrow z_0$ (ou $z \rightarrow \infty$), então $\lim cf(z) = c \lim f(z)$, qualquer que seja a constante c .
3. Prove, por indução, que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{j=1}^n c_j f_j(z) = \sum_{j=1}^n c_j \lim_{z \rightarrow z_0} f_j(z),$$

onde os coeficientes c_j são constantes quaisquer.

4. Prove a propriedade (2.2) do Teorema 2.8.
5. Prove a propriedade (2.3) do Teorema 2.8.
6. Prove que se $f(z) \rightarrow 0$ com $z \rightarrow z_0$ e $g(z)$ é limitada numa vizinhança de z_0 , então $f(z)g(z) \rightarrow 0$ com $z \rightarrow z_0$. Enuncie e prove proposição análoga no caso $z \rightarrow \infty$ em vez de $z \rightarrow z_0$.
7. Prove que se $f(z) \rightarrow \infty$ com $z \rightarrow z_0$ e $|g(z)| > c > 0$ numa vizinhança de z_0 , então $f(z)g(z) \rightarrow \infty$ com $z \rightarrow z_0$. Enuncie e prove proposição análoga no caso $z \rightarrow \infty$ em vez de $z \rightarrow z_0$.
8. Construa dois contra-exemplos, em ambos dos quais $f(z) \rightarrow \infty$ e $f(z)g(z) \rightarrow \infty$ com $z \rightarrow z_0$, porém num dos quais $g(z) \rightarrow 0$ e no outro $g(z)$ não tem limite com $z \rightarrow z_0$. Faça o mesmo com $z \rightarrow \infty$ em vez de $z \rightarrow z_0$.
9. Prove que um polinômio é uma função contínua em todos os pontos; e que uma função racional (quociente de dois polinômios) também é contínua, exceto nos zeros do denominador.

Calcule os limites indicados nos Exercs. 10 a 14.

$$10. \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^3 - 27}{z - 3}. \quad 11. \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{z^3 - 8i}{z + 2i}. \quad 12. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h}.$$

$$13. \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(1+z)^{1/4} - 1}{z}. \quad 14. \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(1+z)^{1/3} - (1-z)^{1/3}}{z}.$$

15. Prove o Teorema 2.11.
16. Prove o Teorema 2.8, valendo-se de propriedades análogas para funções reais de duas variáveis reais e do Teorema 2.12.

SUGESTÕES E SOLUÇÕES

4. Observe que

$$\begin{aligned} |f(z)g(z) - FG| &= |f(z)(g(z) - G) + G(f(z) - F)| \\ &\leq |f(z)||g(z) - G| + |G||f(z) - F|. \end{aligned}$$

Seja D o domínio comum de f e g , ou $D = D_f \cap D_g$. Existem números positivos M , δ_1 , δ_2 e δ_3 tais que

$$z \in D \cap V'_{\delta_1}(z_0) \Rightarrow |f(z)| < M;$$

$$z \in D \cap V'_{\delta_2}(z_0) \Rightarrow |f(z) - F| < \varepsilon/2|G|;$$

$$z \in D \cap V'_{\delta_3}(z_0) \Rightarrow |g(z) - G| < \varepsilon/2M.$$

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ para obter:

$$z \in D \cap V'_{\delta}(z_0) \Rightarrow |f(z) + g(z) - (F + G)| < \varepsilon.$$

5. Considere primeiro o caso $f(z) \equiv 1$. Observe que

$$\left| \frac{1}{g(z)} - \frac{1}{G} \right| = \frac{|g(z) - G|}{|G||g(z)|}$$

e que numa vizinhança $V_{\delta_1}(z_0)$, $|g(z)| > |G|/2$.

12. Use $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ com $a = \sqrt{1+h}$, $b = 1$.
 13. Use $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$ com $a = (1+z)^{1/4}$, $b = 1$.
 16. Escreva $f = u + iv$, $g = U + iV$, $F = u_0 + iv_0$ e $G = U_0 + iV_0$. Então,

$$f + g - (F + G) = u + U - (u_0 + U_0) + i[v + V - (v_0 + V_0)], \quad fg - FG = \text{etc.}$$

FUNÇÃO ANALÍTICA

A definição de derivada de uma função de variável complexa é formalmente a mesma que no caso de função de variável real. Seja f uma função cujo domínio é uma região R (conjunto aberto e conexo) e seja z um ponto de R . Diz-se que f é *derivável* no ponto z se existe o limite

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

ou, o que é equivalente, se existe

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}.$$

Quando esse limite existe, ele define uma nova função de z , a *derivada* ou *função derivada* da função f , denotada por f' . Assim,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Observe que, para a existência da derivada, o limite acima não pode depender do modo como Δz tende a zero ou w tende a z . Em particular, w pode tender a z ao longo de diferentes raios, todos com origem no ponto z (Fig. 2.6) e o limite deve ser o mesmo.

Como exemplo, vamos mostrar que a função $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ só é derivável em $z = 0$. Com efeito, pondo $\Delta z = re^{i\theta}$ (Fig. 2.7), temos:

$$\begin{aligned}\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{(z + \Delta z)(\bar{z} + \bar{\Delta z}) - z\bar{z}}{\Delta z} \\ &= \frac{z\bar{\Delta z} + \bar{z}\Delta z + \Delta z\bar{\Delta z}}{\Delta z} = ze^{-2i\theta} + \bar{z} + re^{-i\theta}.\end{aligned}$$

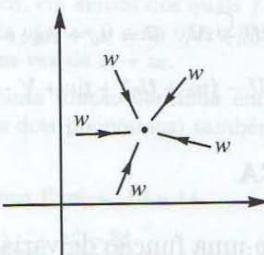


Fig. 2.6

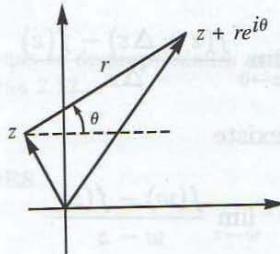


Fig. 2.7

Passando ao limite com $r \rightarrow 0$ e denotando este limite com $f'_\theta(z)$, obtemos:

$$f'_\theta(z) = ze^{-2i\theta} + \bar{z}.$$

Esta é a expressão da *derivada direcional* de f no ponto z . Ela depende do ângulo θ para todo $z \neq 0$, de forma que f não possui derivada ordinária nesses pontos. A derivada de f só existe para $z = 0$: $f'(0) = 0$.

2.14. Definição. Diz-se que uma função f é analítica numa região R se ela é derivável em cada ponto de R ; f é analítica num ponto z_0 se f é

analítica numa região contendo z_0 , por exemplo, numa vizinhança $V_\delta(z_0)$.

As expressões *função holomorfa* e *função regular* são usadas como sinônimas de “função analítica”.

De acordo com essa definição, uma função que só possua derivadas em certos pontos isolados não é analítica; assim, a função $f(z) = |z|^2$ considerada há pouco não é analítica, mesmo em $z = 0$, onde ela é derivável.

O conceito de analiticidade requer a existência da derivada em todos os pontos de um conjunto aberto. Sem dúvida, essa condição impõe fortes restrições à função f e tem como consequência uma série de resultados surpreendentes, como veremos gradualmente no decorrer do nosso estudo.

Regras de derivação

Como veremos progressivamente em nosso estudo, todas as funções com que o leitor se familiarizou em seu curso de Cálculo são analíticas, quando convenientemente estendidas ao plano complexo. De verificação imediata é o fato de que uma função constante é analítica e sua derivada é zero. A função $f(z) = z^n$, onde n é um inteiro positivo, é analítica e sua derivada é $f'(z) = nz^{n-1}$; isto se demonstra exatamente como no caso real; por exemplo, usando a fórmula do binômio de Newton, segundo a qual

$$f(z + \Delta z) = (z + \Delta z)^n = z^n + nz^{n-1} \Delta z + \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2} (\Delta z)^2 + \dots + (\Delta z)^n.$$

Daqui segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} \\ &= nz^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2} \Delta z + \dots + (\Delta z)^{n-1}. \end{aligned}$$

Fazendo $\Delta z \rightarrow 0$, obtemos o resultado desejado.

Do mesmo modo, a soma e o produto de um número finito de funções analíticas são funções analíticas e as derivadas se calculam de acordo com as regras conhecidas; o quociente de funções analíticas é função analítica nos pontos onde o denominador não se anula e a derivada é dada pela conhecida regra de derivação de um quociente. Vale também a regra de derivação da

função composta ou derivação em cadeia: se g é derivável no ponto z e f é derivável no ponto $g(z)$, então $f(g(z))$ é derivável no ponto z .

$$\frac{d}{dz} f(g(z)) = f'(g(z))g'(z).$$

Todos esses teoremas e outros mais se demonstram como no caso de variáveis reais. A título de ilustração, vamos demonstrar que *se uma função f é derivável num ponto z_0 , então f é contínua nesse ponto*.

Como f é derivável no ponto z_0 , a expressão

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) = g$$

tende a zero com $z \rightarrow z_0$. Em consequência, o último termo da expressão

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)g$$

tende a zero com $z \rightarrow z_0$. Como o penúltimo termo também tende a zero, passando ao limite obtemos o resultado desejado: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Chama-se *função inteira* a toda função que é analítica em todo o plano. Os polinômios são os exemplos mais simples de funções analíticas. Eles são funções inteiras. A seguir vêm as funções racionais, definidas como o quociente de dois polinômios. Estas são analíticas em todos os pontos que não anulam o denominador. Por exemplo, a função

$$f(z) = \frac{(z+2)(3z-1)^2}{z(z-3)(z+i)^2}$$

é analítica em todo o plano, excetuados os zeros do denominador, isto é, $z = 0, 3, -i$.

EXERCÍCIOS

1. Prove que a soma de um número finito de funções analíticas é analítica e a derivada da soma é a soma das derivadas das parcelas.
2. Prove que o produto de duas funções analíticas f e g é função analítica, com derivada $(fg)' = f'g + fg'$. Prove, por indução, a regra de derivação de Leibniz:

$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + nf^{(n-1)}g' + \frac{n(n-1)}{2}f^{(n-2)}g'' + \dots + fg^{(n)} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f^{(n-j)}g^{(j)}$$

3. Prove que o quociente de duas funções analíticas f e g num ponto z , onde $g(z) \neq 0$, é função analítica e $(f/g)' = (gf' - fg')/g^2$.
4. Estabeleça a regra de derivação da função composta, ou regra da cadeia: se g é derivável no ponto z e f é derivável no ponto $g(z)$, então $f(g(z))$ é derivável no ponto z e $\frac{d}{dz} f(g(z)) = f'(g(z))g'(z)$.

Calcule as derivadas das funções dadas nos Exercs. 5 a 7.

5. $f(z) = 1 - z^2 + 4iz^5$; 6. $f(z) = (z^2 - i)^3(iz + 1)^2$; 7. $f(z) = \frac{z - 3i}{z + 3i}$.

8. Prove, por indução, que $(z^n)' = nz^{n-1}$, para todo inteiro positivo n .

9. Prove que $(z^n)' = nz^{n-1}$ vale também para os inteiros negativos n .

10. Sendo $z \neq 0$, prove que $(1/z)' = -1/z^2$.

11. Prove, por indução, que

$$\frac{d^n}{dz^n} \frac{1}{z} = \frac{(-1)^n n!}{z^{n+1}}.$$

SUGESTÕES

10. É preciso provar que a expressão

$$\frac{1}{h} \left(\frac{1}{z+h} - \frac{1}{z} \right) + \frac{1}{z^2} = \frac{h}{z^2(z+h)}$$

tende a zero com $h \rightarrow 0$. Dado $\varepsilon > 0$, é preciso encontrar $\delta > 0$ etc. Observe que $|z+h| \geq |z| - |h| > |z|/2$, desde que se tome $|h| < |z|/2$.

AS EQUAÇÕES DE CAUCHY-RIEMANN

Seja $f = u + iv$ uma função derivável num ponto $z = x + iy$. Então, o quociente

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

tem limite $f'(z)$ com $\Delta z \rightarrow 0$, independentemente do modo como Δz tende a zero. Em particular, podemos fazer Δz tender a zero por valores reais $\Delta z = k$ e, separadamente, por valores imaginários $\Delta z = it$ (Fig. 2.8). Obtemos, respectivamente,

$$f'(z) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(x+k, y) - u(x, y) + i[v(x+k, y) - v(x, y)]}{k}$$

e

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, y+t) - u(x, y) + i[v(x, y+t) - v(x, y)]}{it}.$$

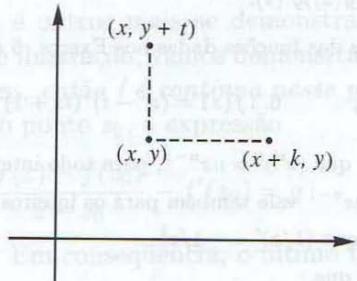


Fig. 2.8

De acordo com o Teorema 2.9 (p. 45), a existência desses limites implica a existência, separadamente, dos limites das partes reais e das partes imaginárias das expressões sob limites, isto é,

$$f'(z) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(x+k, y) - u(x, y)}{k} + i \lim_{k \rightarrow 0} \frac{v(x+k, y) - v(x, y)}{k}$$

e

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x, y+t) - v(x, y)}{t} - i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, y+t) - u(x, y)}{t}.$$

Em consequência, as funções u e v possuem derivadas parciais no ponto (x, y) , e valem nesse ponto as seguintes relações:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}; \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Igualando as partes reais e as partes imaginárias, obtemos daqui as chamadas *equações de Cauchy-Riemann*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.8)$$

A análise acima mostra que as equações de Cauchy-Riemann são uma condição necessária para a existência da derivada de uma função f . Mas

elas não são suficientes para garantir a existência dessa derivada. Como exemplo disto, consideremos a função

$$f(z) = \sqrt{|xy|},$$

onde, como sempre, $z = x + iy$. Temos aqui $v = 0$, portanto, $v_x = v_y = 0$. Por outro lado, $u = \sqrt{|xy|}$, donde $u(k, 0) = u(0, 0) = 0$, logo,

$$u_x(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(k, 0) - u(0, 0)}{k} = 0.$$

Analogamente, $u_y(0, 0) = 0$. Vemos então que as equações de Cauchy-Riemann estão satisfeitas no ponto $z = 0$. Não obstante isto, f não é derivável em $z = 0$. De fato, pondo $\Delta z = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, obtemos:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \frac{\sqrt{|\cos \theta \sin \theta|}}{e^{i\theta}} = [(\sin 2\theta)/2]^{1/2} e^{-i\theta}.$$

Esta é a expressão da derivada de f na direção $(\cos \theta, \sin \theta)$. Como se vê, ela depende de θ ; logo, $f'(0)$ não existe.

Condição necessária e suficiente

Como acabamos de ver, as equações de Cauchy-Riemann são uma condição necessária, porém não suficiente, para que uma função f tenha derivada. Entretanto, se a elas juntarmos a condição de que as derivadas de u e v sejam contínuas numa região R , obtemos uma caracterização muito importante das funções analíticas em termos dessas equações. É o que vamos considerar no teorema seguinte.

2.15. Teorema. *Sejam $u(x, y)$ e $v(x, y)$ funções reais com derivadas parciais contínuas numa região R . Então, uma condição necessária e suficiente para que a função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ seja analítica em R é que as equações de Cauchy-Riemann estejam aí satisfeitas.*

Demonstração. A necessidade da condição foi demonstrada acima, de forma que só nos resta provar que a condição é suficiente. Para isto vamos considerar um ponto $z = x + iy \in R$ e um número $\delta > 0$ tal que a vizinhança

$V_\delta = \{(x+k+i(y+t)): k^2+t^2 < \delta^2\}$ esteja toda contida em R , como ilustra a Fig. 2.9; em particular, os segmentos zz_1 e z_1z_2 , onde $z_1 = (x+k, y)$ e $z_2 = (x+k, y+t)$, também estão contidos em R . Isto nos permite aplicar o conhecido teorema da média, segundo o qual,

$$u(x+k, y) - u(x, y) = ku_x(x + \theta_1 k, y)$$

$$u(x+k, y+t) - u(x+k, y) = tu_y(x+k, y + \theta_2 t)$$

onde θ_1 e θ_2 são números convenientes do intervalo $(0, 1)$. Somando essas duas igualdades membro a membro, obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta u &= u(x+k, y+t) - u(x, y) \\ &= ku_x(x + \theta_1 k, y) + tu_y(x+k, y + \theta_2 t) \end{aligned} \quad (2.9)$$

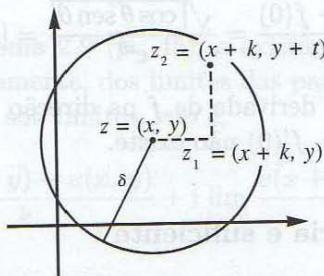


Fig. 2.9

Como as funções u_x e u_y são contínuas, podemos escrever:

$$u_x(x + \theta_1 k, y) = u_x(x, y) + \delta_1$$

e

$$u_y(x+k, y + \theta_2 t) = u_y(x, y) + \delta_2,$$

onde δ_1 e δ_2 tendem a zero com $k^2 + t^2 \rightarrow 0$. Substituindo (2.10) em (2.9), obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta u &= u(x+k, y+t) - u(x, y) \\ &= ku_x + tu_y + k\delta_1 + t\delta_2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

De modo inteiramente análogo, deduzimos:

$$\Delta v = v(x+k, y+t) - v(x, y) = kv_x + tv_y + k\delta_3 + t\delta_4, \quad (2.11)$$

onde δ_3 e δ_4 tendem a zero com $k^2 + t^2 \rightarrow 0$.

Introduzindo a notação $\Delta z = h = k + it$ e usando (2.10) e (2.11), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{\Delta u + i\Delta v}{h} = \frac{(ku_x + itv_y) + i(kv_x - itu_y)}{h} \\ &+ \frac{k}{h}(\delta_1 + i\delta_3) + \frac{t}{h}(\delta_2 + i\delta_4). \end{aligned}$$

Usamos agora as equações de Cauchy-Riemann para substituir v_y e u_y por u_x e v_x , respectivamente. Assim,

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = (u_x + iv_x) + \frac{k}{h}(\delta_1 + i\delta_3) + \frac{t}{h}(\delta_2 + i\delta_4). \quad (2.12)$$

Finalmente, observamos que $|k/h| \leq 1$ e $|t/h| \leq 1$, enquanto $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ e δ_4 tendem a zero com $\Delta z = h \rightarrow 0$, de forma que, passando ao limite em (2.12) com $h \rightarrow 0$, concluímos que a derivada $f'(z)$ existe e é dada por $u_x + iv_x$. Isto completa a demonstração.

Deixamos para os exercícios a tarefa de demonstrar o corolário seguinte. (Exerc. 1 adiante.)

2.16. Corolário. *Uma função com derivada zero em toda uma região é constante; e é também constante uma função que só assume valores reais em toda uma região; ou ainda, uma função cujo módulo seja constante numa região.*

Cauchy-Riemann em coordenadas polares

Veremos agora que as equações de Cauchy-Riemann, quando escritas em coordenadas polares, assumem a seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad (2.13)$$

que é uma forma muito útil em várias aplicações.

Um modo de justificar essa forma das equações de Cauchy-Riemann baseia-se no fato seguinte: em cada ponto $P = (x, y)$ de coordenadas polares

(r, θ) introduzimos um sistema cartesiano PXY , de eixos PX e PY como indica a Fig. 2.10. Neste novo sistema, as equações de Cauchy-Riemann assim se escrevem:

$$\frac{\partial u}{\partial X} = \frac{\partial v}{\partial Y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial Y} = -\frac{\partial v}{\partial X}.$$

Como se vê, $\partial X = \partial r$ e $\partial Y = r \partial \theta$. Substituindo acima, vem:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}.$$

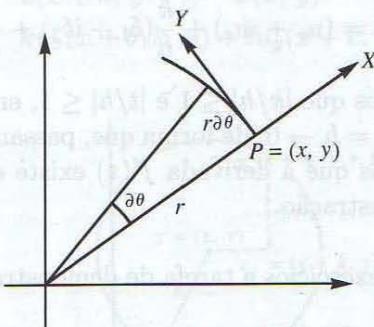


Fig. 2.10

Para a demonstração analítica das equações (2.13), utilizamos as fórmulas de transformação,

$$x = r \cos \theta \quad \text{e} \quad y = r \sin \theta, \quad (2.14)$$

que definem implicitamente r e θ como funções de x e y . Derivando-as com relação a x , obtemos:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial r}{\partial x} \cos \theta - r \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial r}{\partial x} \sin \theta + r \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x}. \end{aligned}$$

Daqui segue-se que

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta \quad \text{e} \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}.$$

De modo análogo, derivando (2.14) em relação a y , e resolvendo em relação a $\partial r/\partial y$ e $\partial\theta/\partial y$, encontramos:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \operatorname{sen} \theta \quad \text{e} \quad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r},$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial\theta} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen} \theta}{r} \frac{\partial}{\partial\theta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial\theta} = \operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial\theta}. \end{aligned}$$

Substituindo em (2.8), obtemos:

$$\cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen} \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial\theta} = \operatorname{sen} \theta \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial v}{\partial\theta}$$

e

$$\operatorname{sen} \theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial\theta} = -\cos \theta \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\operatorname{sen} \theta}{r} \frac{\partial v}{\partial\theta}.$$

Multiplicando a primeira destas equações por $\cos \theta$ e a segunda por $\operatorname{sen} \theta$ e somando-as, obtemos a primeira equação em (2.13). Analogamente, multiplicando a primeira equação acima por $\operatorname{sen} \theta$ e a segunda por $-\cos \theta$, e somando-as, obtemos a segunda equação em (2.13).

Interpretação geométrica

As equações de Cauchy-Riemann têm um significado geométrico interessante, expresso no teorema seguinte.

2.17. Teorema. *Se $f=u+iv$ é analítica numa região R , então as curvas das famílias*

$$u(x, y) = \operatorname{const.} \quad \text{e} \quad v(x, y) = \operatorname{const.}$$

se cruzam em ângulo reto em todo ponto $z_0 = x_0 + iy_0$ onde $f'(z_0) \neq 0$.

Demonstração. De fato, como o vetor $\operatorname{grad} u = (u_x, u_y)$ é normal à curva $u(x, y) = u(x_0, y_0)$ no ponto (x_0, y_0) , o vetor $(u_y, -u_x)$ é tangente, pois esses dois vetores são ortogonais (Fig. 2.11):

$$(u_x, u_y) \cdot (u_y, -u_x) = u_x u_y - u_y u_x = 0.$$

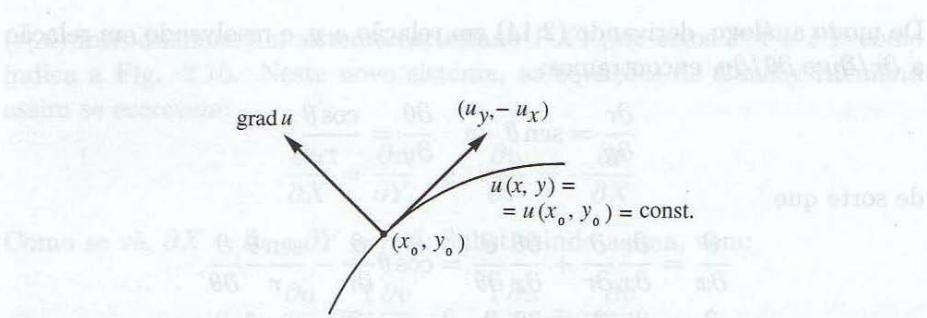


Fig. 2.11

De modo análogo, $(v_y, -v_x)$ é tangente à curva $v(x, y) = \text{const.}$, como ilustra a Fig. 2.12. Fazendo o produto escalar desses dois vetores e usando as equações de Cauchy-Riemann, obtemos:

$$(u_y, -u_x) \cdot (v_y, -v_x) = u_y v_y + u_x v_x = u_y u_x - u_x u_y = 0,$$

que estabelece o resultado desejado.

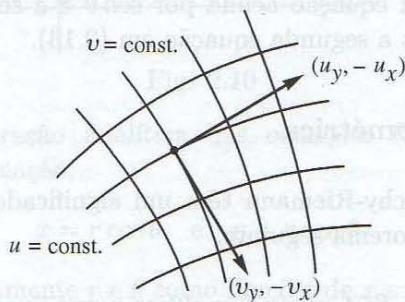


Fig. 2.12

Observe que o resultado anterior se refere a famílias de curvas do plano z que são levadas pela função $w = f(z)$ nas famílias de retas do plano w paralelas ao eixo dos v e ao eixo dos u respectivamente (faça uma figura). Um resultado análogo é verdadeiro para famílias de curvas do plano w que são imagens das famílias de retas coordenadas do plano z , isto é, as famílias de retas paralelas ao eixo dos x e ao eixo dos y respectivamente. (Veja o Exerc. 13 adiante.)

A função exponencial

A função $w = e^z$ é analítica em todo o plano. Para vermos isso, lembramos que, sendo $z = x + iy$, a exponencial se escreve

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y,$$

o que permite verificar a validade das equações de Cauchy-Riemann para todo z . Verifica-se também que as derivadas parciais das partes real e imaginária de e^z são contínuas em todo o plano. Portanto, e^z é analítica, isto é, tem derivada para todo z . Essa derivada é simplesmente $\partial e^z / \partial x$, que resulta ser a própria função e^z , como segue facilmente da expressão acima. Assim,

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z \quad \text{para todo } z.$$

Vamos estudar a transformação do plano $z = x + iy$ no plano $w = u + iv$ pela função exponencial $w = e^z$. Para isso, é conveniente escrever w em forma polar:

$$w = e^x e^{iy} = \rho e^{i\varphi}, \quad \text{isto é, } \rho = e^x, \varphi = y.$$

Mantendo y constante e variando x , w permanece num raio pela origem. Quando x varia de zero a $+\infty$, ρ varia de 1 a $+\infty$ ao longo desse raio; e quando x varia de zero a $-\infty$, ρ varia de 1 a zero (Fig. 2.13).

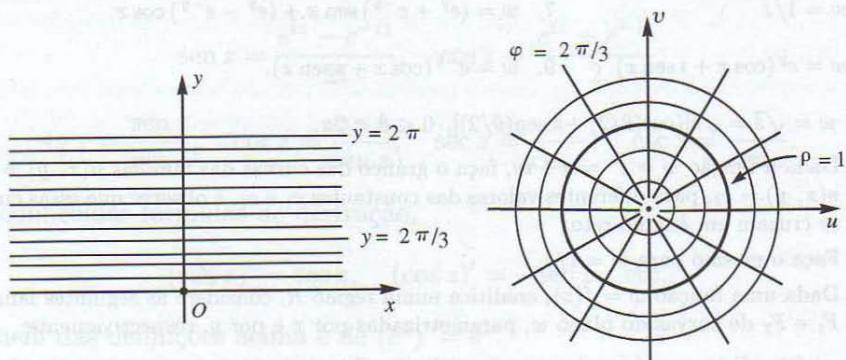


Fig. 2.13

Suponhamos agora que x permaneça constante e y varie no intervalo

$[0, 2\pi)$. Então, ρ permanecerá fixo e o ponto w descreverá um círculo de raio ρ , centrado na origem. Para $x = 0$ esse círculo tem raio unitário; para $x > 0$, ele é exterior ao círculo unitário, e para $x < 0$, ele é interior.

Essas observações comprovam, no caso da função exponencial, o que dissemos ao final da subseção anterior (veja o Exerc. 13 adiante): as imagens das famílias de retas coordenadas $x = \text{const.}$ e $y = \text{const.}$ são ortogonais. Vemos também que toda a faixa do plano complexo z , dada por $0 \leq y < 2\pi$, é levada, de maneira biunívoca (Exerc. 14 adiante) sobre o plano complexo w , excluída a origem deste plano. Como e^z é periódica de período $2\pi i$, qualquer outra faixa $2k\pi \leq y < 2(k+1)\pi$ é transformada exatamente como a faixa $0 \leq y < 2\pi$, no plano w com a origem excluída.

EXERCÍCIOS

- Prove o Corolário 2.16.
- Mostre que as equações de Cauchy-Riemann são equivalentes a cada uma das formas seguintes:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}.$$
- Use as equações de Cauchy-Riemann para verificar, no caso de cada uma das funções dadas nos Exercs. 3 a 10, qual é analítica e em que domínio. Em caso positivo, calcule a derivada $f'(z)$. (Observe que esta derivada, quando existe, é dada por $\partial f / \partial x$.)
- $w = z^3$.
- $w = \overline{e^z}$.
- $w = \overline{z}$.
- $w = 1/z$.
- $w = (e^y + e^{-y}) \operatorname{sen} x + (e^y - e^{-y}) \cos x$.
- $w = e^y (\cos x + i \operatorname{sen} x)$.
- $w = e^{-y} (\cos x + i \operatorname{sen} x)$.
- $w = \sqrt{z} = \sqrt{r}[(\cos(\theta/2) + i \operatorname{sen}(\theta/2))]$, $0 < \theta < 2\pi$.
- Dada a função $w = z^2 = u + iv$, faça o gráfico das curvas das famílias $u(x, y) = c_1$ e $v(x, y) = c_2$, para diferentes valores das constantes c_1 e c_2 , e observe que essas curvas se cruzam em ângulo reto.
- Faça o mesmo para $w = 1/z$.
- Dada uma função $w = f(z)$, analítica numa região R , considere as seguintes famílias F_1 e F_2 de curvas do plano w , parametrizadas por x e por y , respectivamente:

$$F_1: u = u(x, y_0), v = v(x, y_0) \quad \text{e} \quad F_2: u = u(x_0, y), v = v(x_0, y).$$

Prove que em cada ponto $f(z_0)$, onde $f'(z_0) \neq 0$, essas curvas se cruzam ortogonalmente. Faça um gráfico.

14. Mostre que a função e^z é injetiva em qualquer faixa horizontal do plano, dada por $\alpha \leq y < \alpha + 2\pi$.
15. Vimos que a exponencial é uma função $w = f(z) = u + iv$, analítica em todo o plano e tal que $f'(z) = f(z)$ e $f(0) = 1$. Prove que existe uma e uma só função satisfazendo estas condições, de forma que a função exponencial pode ser por elas definida. (Sugestão: $u_x = u$ e $v_x = v$ são equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem em x , cujas soluções são $u = ge^x$ e $v = he^x$, onde g e h são constantes em relação a x , portanto, podem depender de y . Use as equações de Cauchy-Riemann e obtenha $g'' + g = 0$ e $h'' + h = 0$. Daqui e de $f(0) = 1$, segue-se que $g(y) = \cos y$ e $h(y) = \sin y$.)

AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E HIPERBÓLICAS

Vamos introduzir agora as funções trigonométricas e hiperbólicas. Começamos observando que das relações

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad \text{e} \quad e^{-iy} = \cos y - i \sin y$$

decorrem as seguintes *fórmulas de Euler*:

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \quad \text{e} \quad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}.$$

Elas são usadas para estender as funções trigonométricas a todo o plano complexo. Assim, definimos:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{cot} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}.$$

As conhecidas fórmulas de derivação,

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z \quad \text{etc.},$$

seguem das definições acima e de $(e^z)' = e^z$.

As identidades trigonométricas familiares permanecem todas válidas no campo complexo. Assim,

$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z,$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$

$$\sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) \quad \text{e} \quad \cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right).$$

As duas primeiras dessas identidades são consequências imediatas das definições de seno e co-seno, e as demais seguem dessas definições e das propriedades da função exponencial (Exercs. 4 a 7 adiante).

As funções hiperbólicas, seno e co-seno, são definidas, como no caso de variáveis reais, pelas seguintes expressões:

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Como se vê, seus valores são reais para valores reais de z . Elas surgem naturalmente quando se procura separar as partes real e imaginária das funções $\sin z$ e $\cos z$ (Exercs. 9 e 10 adiante). É fácil ver que $(\operatorname{senh} z)' = \cosh z$ e $(\cosh z)' = \operatorname{senh} z$.

EXERCÍCIOS

- Mostre que os zeros de $\sin z$ e $\cos z$ são dados, respectivamente, pelas expressões $z = n\pi$ e $z = (n + 1/2)\pi$, n inteiro. Determine os domínios máximos de definição das funções $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{cot} z$, $\sec z$ e $\operatorname{csc} z$.
- Mostre que $\sin z$ e $\cos z$ são funções periódicas de período 2π , como no caso real.
- Prove que $\cosh z$ e $\operatorname{senh} z$ são funções periódicas de período $2\pi i$.

Estabeleça as identidades dadas nos Exercs. 4 a 16.

- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

- $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$. *Sugestão:* comece pelo 2º membro.

- $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$.

- $\sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) \quad \text{e} \quad \cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$.

8. $\operatorname{sen} iz = i \operatorname{senh} z$ e $\cos iz = \cosh z$.
9. $\operatorname{sen}(x + iy) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$.
10. $\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$.
11. $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$.
12. $|\operatorname{senh}(x + iy)|^2 = \operatorname{senh}^2 x + \operatorname{sen}^2 y$ e $|\cosh(x + iy)|^2 = \operatorname{senh}^2 x + \cos^2 y$.
13. $|\cosh(x + iy)|^2 - |\operatorname{senh}(x + iy)|^2 = \cos 2y$.
14. $\operatorname{senh}(z_1 + z_2) = \operatorname{senh} z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \operatorname{senh} z_2$.
15. $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \operatorname{senh} z_1 \operatorname{senh} z_2$.
16. $\operatorname{senh}(z + i\pi) = -\operatorname{senh} z$; $\cosh(z + i\pi) = -\cosh z$; $\operatorname{tgh}(z + i\pi) = \operatorname{tgh} z$.
17. Prove que $|\operatorname{senh} x| \leq |\cosh(x + iy)| \leq \cosh x$.

O LOGARITMO

O *logaritmo* de um número complexo $z = re^{i\theta} \neq 0$, é definido assim:

$$\log z = \log r + i\theta,$$

onde $\log r$ denota o logaritmo real do número $r > 0$. O logaritmo está definido para todo número complexo $z \neq 0$, e se reduz ao logaritmo real quando $\theta = 0$. Usa-se também a notação $\ln z$.

Na realidade, a fórmula acima permite atribuir ao logaritmo vários valores distintos, dependendo do argumento usado para o número z . Por causa disso costuma-se dizer que o logaritmo é uma *função multivalente*.

2.18. Observação. É claro que o valor de uma função tem de ser determinado univocamente, de forma que a expressão “função multivalente”, a rigor, é imprópria, mas é usada por ser conveniente: sabemos do que estamos falando. Em contraposição, para enfatizar, ou evitar qualquer dúvida, às vezes usa-se também a expressão “função univalente”. Em breve encontraremos outros exemplos de “funções multivalentes” e veremos como torná-las univalentes.

Voltando ao logaritmo, para fazê-lo univale, lembramos que o argumento de um número complexo $z \neq 0$ só é determinado a menos de múltiplos inteiros de 2π . Seja, pois, θ_0 o valor particular do argumento que esteja no intervalo $[0, 2\pi)$, isto é, $0 \leq \theta_0 < 2\pi$. Então, o argumento genérico é dado por

$$\theta = \theta_0 + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Assim, temos de restringir o argumento de z a um intervalo do tipo

$$2k\pi \leq \theta < 2(k+1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

para que o logaritmo fique bem definido como “função univale”. Cada valor de k conduz ao que chamamos uma *determinação* ou *ramo* do logaritmo. Denotando com $\log_k z$ tal ramo, teremos:

$$\log_k z = \log r + i\theta, \quad 2k\pi \leq \theta < 2(k+1)\pi.$$

Costuma-se dizer também que o logaritmo fica “especificado” com um determinado valor de k . O ponto $z = 0$ é chamado *ponto de ramificação* de $\log z$, justamente porque, quando um ponto z descreve um círculo centrado na origem e volta ao ponto inicial, a função $\log z$ retorna aumentada de $2\pi i$, isto é, passa de um de seus ramos ao *ramo* seguinte.

Com o valor $k = 0$ obtemos o que chamamos *valor principal*, *ramo principal*, ou *determinação principal* do logaritmo. Mas convém observar que nada há de especial na escolha do intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$ para especificar o valor principal. Podemos tomar $0 < \theta \leq 2\pi$, $-\pi \leq \theta < \pi$, ou qualquer outro intervalo de comprimento 2π , como $\alpha < \theta \leq \alpha + 2\pi$ (ou $\alpha \leq \theta < \alpha + 2\pi$) (Fig. 2.14). Em qualquer desses casos, a restrição do argumento a um intervalo de comprimento 2π introduz descontinuidades na função $\log z$ ao longo do raio pela origem e de argumento α . Esse raio é freqüentemente designado um *corte* do plano complexo. Ao considerarmos as restrições $\alpha < \theta \leq \alpha + 2\pi$, $\alpha \leq \theta < \alpha + 2\pi$, ou $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$, dizemos que o plano foi *cortado* ao longo do raio $z = re^{i\alpha}$.

lado binário é trivial, devido ao fato de $\log z = (v, \alpha)$ se e só se $(u, v) = (u, \alpha)$ se e só se

Propriedades do logaritmo

A fórmula

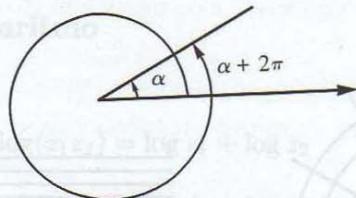


Fig. 2.14

Usando as equações de Cauchy-Riemann na forma polar, é fácil verificar que qualquer ramo do logaritmo é uma função analítica em seu domínio (do qual se exclui o raio que produz o corte, para que o domínio seja um conjunto aberto). Vamos calcular sua derivada:

$$\frac{d \log z}{dz} = \frac{\partial}{\partial x} (\log r + i\theta) = \left(\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (\log r + i\theta).$$

Substituindo os valores $\partial r / \partial x = \cos \theta$ e $\partial \theta / \partial x = -\operatorname{sen} \theta / r$ (já obtidos na p. 58), efetuando os cálculos e simplificando, obtemos:

$$\frac{d \log z}{dz} = \frac{1}{z}. \quad (2.17)$$

O logaritmo como transformação e sua inversa

É fácil ver que qualquer ramo do logaritmo é uma função univale e injetiva, definida em todo o plano z , exceto $z = 0$, e tendo como imagem toda uma faixa horizontal do plano w ; e a totalidade dos ramos,

$$z = re^{i\theta}, \quad w = u + iv = \log z = \log r + i\theta,$$

cobre todo o plano w . Os raios $\theta = \operatorname{const.}$ do plano z vão nas retas horizontais $v = \operatorname{const.}$ do plano w ; e os círculos $r = \operatorname{const.}$ são levados nas retas verticais $u = \operatorname{const.}$ (Fig. 2.15). (Compare esta figura com a Fig. 2.13, p. 61.) O círculo $r = 1$ tem por imagem o eixo imaginário $u = 0$; os círculos com $r < 1$ vão nas verticais à esquerda desse eixo, e os círculos com $r > 1$ vão nas verticais à direita do mesmo eixo. Note que a ortogonalidade das

curvas $u(x, y) = \text{const.}$ e $v(x, y) = \text{const.}$ era de se esperar, de acordo com a interpretação geométrica das equações de Cauchy-Riemann (p. 59).

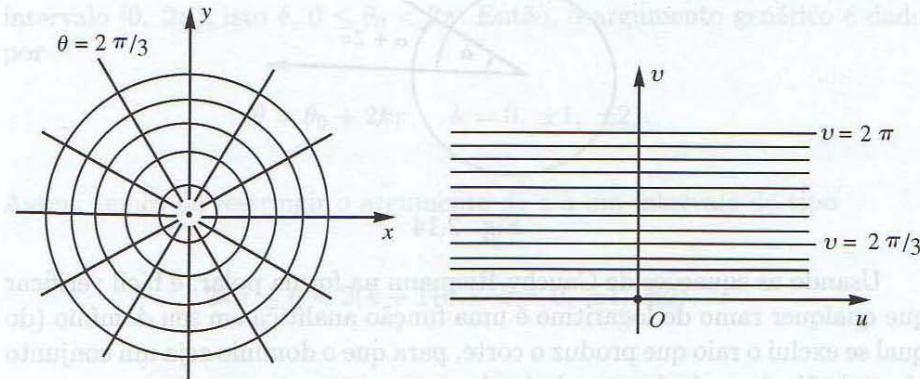


Fig. 2.15

Observe que o ramo principal leva o plano complexo $z \neq 0$ na faixa $0 \leq v < 2\pi$ do plano w ; e, em geral, o ramo k -ésimo leva o plano $z \neq 0$ na faixa $2k\pi \leq v < 2(k+1)\pi$ do plano w . Assim, qualquer ramo do logaritmo é uma função univalente e injetiva, definida em todo o plano, exceto $z = 0$, e tendo como imagem uma faixa horizontal do plano w .

Mostremos, finalmente, que a função exponencial e qualquer ramo do logaritmo são funções inversas uma da outra, desde que o domínio da exponencial seja a faixa horizontal de largura 2π que é imagem do logaritmo. (Veja o que dissemos na p. 62 e a Fig. 2.13.) Para isso, consideremos o ramo

$$w = \log_k z = \log r + i(\theta + 2k\pi), \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Pondo $z = re^{i\theta}$, teremos:

$$e^{\log_k z} = e^w = e^{\log r + i(\theta + 2k\pi)} = re^{i\theta} = z.$$

e

$$\log_k e^w = \log_k \exp[\log r + i(\theta + 2k\pi)]$$

$$= \log_k (re^{i\theta}) = \log_k z = \log r + i(\theta + 2k\pi) = w.$$

Isso prova o resultado desejado.

Propriedades do logaritmo

A fórmula

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2 \quad (2.15)$$

permanece válida, desde que corretamente interpretada. Com efeito, sendo $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, temos:

$$\begin{aligned} \log z_1 + \log z_2 &= [\log r_1 + i(\theta_1 + 2k_1\pi) + \log r_2 + i(\theta_2 + 2k_2\pi)] \\ &= \log(r_1 r_2) + i[(\theta_1 + \theta_2) + 2(k_1 + k_2)\pi], \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde k_1 e k_2 são inteiros arbitrários. Esta última expressão é a forma geral de $\log(z_1 z_2)$, se k_1 e k_2 forem independentes um do outro. Neste caso, a Eq. 2.15 é válida com o seguinte significado: *o conjunto dos valores possíveis de $\log(z_1 z_2)$ coincide com o conjunto dos valores possíveis de $\log z_1 + \log z_2$.*

Se k_1 e k_2 não forem independentes, como é o caso em que $z_1 = z_2 = z = re^{i\theta}$ e a (2.15) se reduz a

$$\log z^2 = 2 \log z, \quad (2.17)$$

então o segundo membro de (2.17) se reduz a

$$\log r^2 + i[(2\theta) + 2(2k)\pi]$$

onde k é arbitrário. Neste caso, qualquer valor do segundo membro de (2.17) é um valor do primeiro membro, mas não reciprocamente, como é fácil ver.

Observações análogas se aplicam nos casos

$$\log(z_1 \dots z_n) = \log z_1 + \dots + \log z_n \quad \text{e} \quad \log z^n = n \log z,$$

cujas demonstrações ficam a cargo do leitor nos exercícios. Esta última relação, por exemplo, significa que todo valor de $n \log z$ é um valor possível de $\log z^n$, mas não reciprocamente.

Definição de z^α

Dados os números complexos z e α , sendo $z \neq 0$, definimos z^α pela equação

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}. \quad (2.18)$$

Isto significa que $\alpha \log z$ é um dos logaritmos de z^α , de sorte que

$$\log z^\alpha = \alpha \log z + 2k\pi i, \quad (2.19)$$

que, para $z > 0$, α real e $k = 0$, é uma fórmula familiar do logaritmo real. A definição (2.18) é então uma extensão natural da noção de potência real de números positivos.

Como o logaritmo é uma função multivalente, z^α é, em geral, multivalente, com o mesmo ponto de ramificação $z = 0$ que $\log z$. Para evidenciar este fato, seja $z = re^{i\theta} = re^{i(\theta_0+2k\pi)}$, com $0 \leq \theta_0 < 2\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Substituindo $\log z = (\log r + i\theta_0) + 2k\pi i$ em (2.18), teremos:

$$z^\alpha = e^{\alpha(\log r + i\theta_0)} e^{2\pi(k\alpha)i} = P(z^\alpha) e^{2\pi(k\alpha)i}, \quad (2.20)$$

onde $P(z^\alpha)$ denota o assim chamado *valor principal* da função z^α , obtido com o valor principal de $\log z$ em (2.18). A Eq. 2.20 nos mostra que os possíveis valores z^α são obtidos multiplicando-se o valor principal $P(z^\alpha)$ pelo fator $e^{2\pi(k\alpha)i}$.

Procuremos determinar diferentes valores de k , digamos, k e k' , que resultem no mesmo valor desse fator:

$$e^{2\pi(k\alpha)i} = e^{2\pi(k'\alpha)i}.$$

Isto é equivalente a $e^{2\pi(k-k')\alpha i} = 1$, ou seja, $(k - k')\alpha$ deve ser inteiro; ou ainda, α deve ser racional. Vemos então que, sendo α um número (real ou complexo) não-racional, a função z^α admite infinitos ramos.

Suponhamos agora que α seja racional, digamos $\alpha = p/q$, com p e q primos entre si e $q > 0$. Então o fator $e^{2\pi(kp/q)i}$ assume apenas q valores distintos, dados por $k = 0, 1, \dots, q - 1$; e, em consequência, a função

$$z^{p/q} = P(z^{p/q}) e^{2\pi(kp/q)i}$$

também assume apenas q valores distintos para um mesmo $z \neq 0$.

Quando fixamos um ramo do logaritmo em (2.18), z^α torna-se uma função univalente e analítica. Calculamos sua derivada pela regra da cadeia, assim:

$$\begin{aligned}(z^\alpha)' &= (e^{\alpha \log z})' = e^{\alpha \log z} (\alpha \log z)' = \frac{\alpha e^{\alpha \log z}}{z} \\ &= \frac{\alpha e^{\alpha \log z}}{e^{\log z}} = \alpha e^{(\alpha-1) \log z} = \alpha z^{\alpha-1}\end{aligned}$$

Em particular,

$$(\sqrt{z})' = \frac{1}{2} z^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{z}}.$$

2.19. Observação. Quando $\alpha = 1/n$, com n inteiro positivo, a fórmula (2.18) nos dá as raízes n -ésimas do número $z = re^{i\theta}$, como era de se esperar. Com efeito, fazendo $\alpha = 1/n$ em (2.18), obtemos:

$$z^{1/n} = e^{(1/n)[\log r + i(\theta + 2q\pi)]} = r^{1/n} e^{i(\theta + 2q\pi)/n}, \quad (2.21)$$

onde q varia no conjunto dos inteiros. Mas isto não é necessário; basta q variar de zero a $n - 1$ para obtermos todas as determinações possíveis de $z^{1/n}$, como em (1.4), p. 16, as quais são precisamente as raízes n -ésimas de z .

2.20. Observação. Nesse mesmo caso $\alpha = 1/n$, com n inteiro positivo, a fórmula (2.19) dispensa o termo $2k\pi i$, e deve ser escrita assim:

$$\log z^{1/n} = \frac{1}{n} \log z.$$

Com efeito, de (2.21) obtemos:

$$\log z^{1/n} = \frac{1}{n} \log r + i \left[\frac{\theta}{n} + \left(\frac{q}{n} + k \right) 2\pi \right],$$

onde q varia de zero a $n - 1$ e k varia no conjunto dos inteiros. Mas então o número $nk + q = k'$ também estará variando no conjunto dos inteiros. Assim,

$$\log z^{1/n} = \frac{1}{n} [\log r + i(\theta + 2\pi k')] = \frac{1}{n} \log z.$$

As funções trigonométricas inversas

As funções inversas das funções trigonométricas exprimem-se facilmente em termos do logaritmo. Consideremos, por exemplo, a função

$$w = \arccos z,$$

definida por $z = \cos w$, ou seja

$$z = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}.$$

Multiplicando por e^{iw} , reduzimos esta equação à forma

$$(e^{iw})^2 - 2z(e^{iw}) + 1 = 0,$$

onde

$$e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1},$$

e, finalmente,

$$w = \arccos z = -i \log(z + i\sqrt{1 - z^2}).$$

Temos aqui uma função multivalente, cujos ramos particulares são obtidos considerando ramos particulares de $\sqrt{z^2 - 1}$ e do logaritmo que aí aparece.

A derivada da função $\arccos z$ pode ser calculada facilmente a partir da expressão acima, com a ajuda da regra da cadeia. Temos:

$$(\arccos z)' = -i \frac{(z + i\sqrt{1 - z^2})'}{z + i\sqrt{1 - z^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

As demais funções inversas, trigonométricas e hiperbólicas, são obtidas de maneira análoga.

Observamos que as notações $\cos^{-1} z$, $\sin^{-1} z$ etc. são freqüentemente usadas em lugar de $\arccos z$, $\arcsen z$ etc. Elas não devem ser confundidas com $(\cos z)^{-1}$, $(\sen z)^{-1}$ etc.

EXERCÍCIOS

- Demonstre que $\log \frac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2$, no sentido de igualdade de conjuntos de valores, como em (2.15).
- Defina os ramos do logaritmo a partir de um corte ao longo do semi-eixo real negativo, $-\pi \leq \theta < \pi$, e identifique as imagens do plano z pelos vários ramos obtidos.
- Mostre que $\log(-1) = (2k+1)\pi i$ e $\log i = \frac{4k+1}{2}\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- Mostre que, sendo $x \neq 0$,

$$\log(x+iy) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + (\theta_0 + 2k\pi)i,$$

onde θ_0 é uma das determinações de $\operatorname{arctg}(y/x)$. Se $x = 0$, então $y \neq 0$ e θ_0 pode ser tomado igual a $\pm\pi/2$, conforme seja $y > 0$ ou $y < 0$, respectivamente.

Determine todas as raízes das equações dadas nos Exercs. 5 a 10.

- $e^z = -1$;
- $e^{2z} = -e$.
- $e^z = -\sqrt{3} + 3i$.
- $e^z + 6e^{-z} = 5$.
- $e^{3z-4} = -1$.
- $\log z = \pi i/2$.

- Mostre que, uma vez fixado o argumento da constante $c \neq 0$, a função $w = c^z$ é analítica, com derivada $(c^z)' = c^z \log c$.
- Estabeleça as seguintes propriedades das potências:

$$z^a z^b = z^{a+b}, \quad z^{-a} = \frac{1}{z^a}, \quad (z^a)^b = z^{ab},$$

onde $z \neq 0$ e a e b são números complexos quaisquer.

- Demonstre que $|z^r| = |z|^r$, onde $z \neq 0$ e r é um número real qualquer.
- Mostre que todas as determinações de i^i são reais e dadas por

$$i^i = \exp \frac{-(4k+1)\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- Calcule todas as determinações das seguintes potências:

$$(1+i)^i; \quad (1-i)^i; \quad (\sqrt{3}+i)^i; \quad (1-i\sqrt{3})^i.$$

- Mostre que $\operatorname{arc sen} z = -i \log(iz + \sqrt{1 - z^2})$, e que $(\operatorname{arc sen} z)' = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$.
- Mostre que $\operatorname{arc tg} z = \frac{i}{2} \log \frac{i+z}{i-z}$, e que $(\operatorname{arc tg} z)' = \frac{1}{1+z^2}$.
- Determine todas as raízes da equação $\cos z = 3$.
- Determine todas as raízes da equação $\operatorname{sen} z = 3$.

RESPOSTAS E SUGESTÕES

1. $z = z_1/z_2 \Leftrightarrow z_1 = zz_2$.
8. Equação do 2º grau para e^z .
18. $z = 2k\pi - i \log(3 \pm 2\sqrt{2})$, onde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Capítulo 3

TEORIA DA INTEGRAL

ARCOS E CONTORNOS

Definimos *arco contínuo* ou simplesmente *arco* como um conjunto C de pontos, dado parametricamente assim:

$$C = \{z(t) = x(t) + iy(t): a \leq t \leq b\}, \quad (3.1)$$

onde $z(t)$ é uma função contínua de t — ou, o que é equivalente, $x(t)$ e $y(t)$ são funções contínuas de t , t variando no intervalo $[a, b]$.

A representação paramétrica $z = z(t)$ ordena os pontos de C de acordo com os valores crescentes de t , de forma que C é um conjunto ordenado ou orientado (Fig. 3.1a). O mesmo conjunto com orientação oposta é o arco que designamos por $-C$ (Fig. 3.1b), e que possui representação paramétrica

$$z_1(t) = z(-t), \quad -b \leq t \leq -a.$$

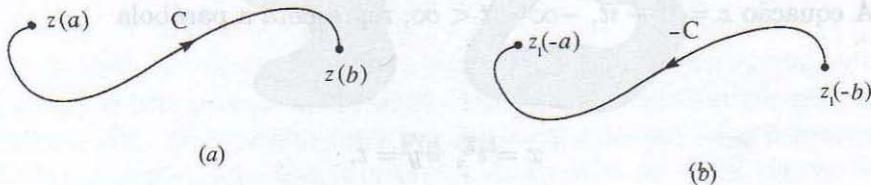


Fig. 3.1

Chama-se *arco de Jordan* ou *arco simples* aquele em que cada ponto

$z(t)$ corresponde a um único valor de t . Intuitivamente, isto significa que, à medida que t varia de a até b , o ponto $z(t)$ percorre a curva C , passando uma só vez por cada um de seus pontos. Quando o arco não é simples, ele contém ao menos um *ponto múltiplo*, assim designado todo ponto proveniente de dois ou mais valores distintos do parâmetro t : $z(t_1) = z(t_2)$, com $t_1 \neq t_2$. Chama-se *curva fechada* a todo arco cujas extremidades $z(a)$ e $z(b)$ coincidem; e *curva fechada simples* ou *curva de Jordan* a toda curva fechada cujos pontos, à exceção das extremidades, sejam todos simples (Fig. 3.2).

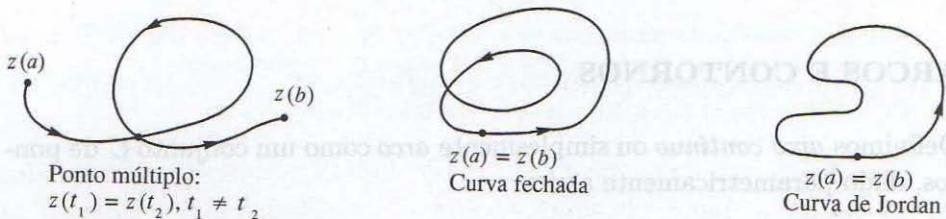


Fig. 3.2

Às vezes teremos necessidade de considerar um arco ou curva como conjunto fechado do plano, no sentido da definição (topológica) que demos à p. 27. Isto não deve ser confundido com o conceito “arco fechado” que acabamos de introduzir.

Vejamos alguns exemplos: a equação $z = 1 - it$, para $0 \leq t \leq 2$, representa um arco simples, que é o segmento $[1, 1 - 2i]$, orientado de 1 para $1 - 2i$. (Faça uma figura.)

A equação $z = t^2 + it$, $-\infty < t < \infty$, representa a parábola

$$x = t^2, \quad y = t,$$

ou seja, $x = y^2$, orientada como indica a Fig. 3.3.

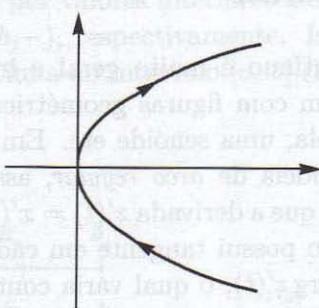


Fig. 3.3

Teorema de Jordan e conectividade simples

De acordo com o chamado teorema de Jordan, toda curva fechada simples C divide o plano em duas regiões, tendo C como fronteira comum, uma das quais, chamada o *interior de C* , é limitada. O teorema afirma também que o interior de C possui uma propriedade adicional, chamada *conectividade simples*. Intuitivamente, diz-se que uma região R é *simplesmente conexa* se qualquer curva fechada simples contida em R pode ser deformada continuamente até reduzir-se a um ponto, sem sair de R . A Fig. 3.4 ilustra duas regiões conexas A e B , das quais A é simplesmente conexa, mas não B ; esta possui um “buraco” que destrói a conectividade simples. Chamaremos de *multiplamente conexa* toda região conexa que não for simplesmente conexa.

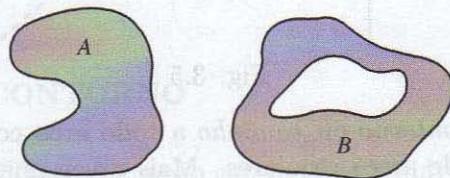


Fig. 3.4

O teorema de Jordan é de fácil compreensão, mas seu tratamento rigoroso é delicado e está fora de nossos objetivos.

Arco regular e contornos

O conceito de arco contínuo é muito geral e inclui objetos complicados, que em nada se parecem com figuras geométricas simples, como um arco de círculo, uma parábola, uma senóide etc. Em nossas considerações, não necessitamos senão da idéia de *arco regular*, assim entendido o arco cuja representação (3.1) é tal que a derivada $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ existe, é contínua e não se anula. Tal arco possui tangente em cada ponto, cujo ângulo com o eixo Ox é dado por $\arg z'(t)$, o qual varia continuamente com t . Mesmo um arco regular pode exibir comportamento surpreendente; consideremos, como exemplo, o arco regular dado por

$$z(0) = 0, \quad z(t) = t + it^3 \operatorname{sen} \frac{1}{t}, \quad 0 < t \leq 1.$$

Este arco secciona o eixo Ox numa infinidade de pontos tendo a origem como ponto de acumulação (Fig. 3.5).

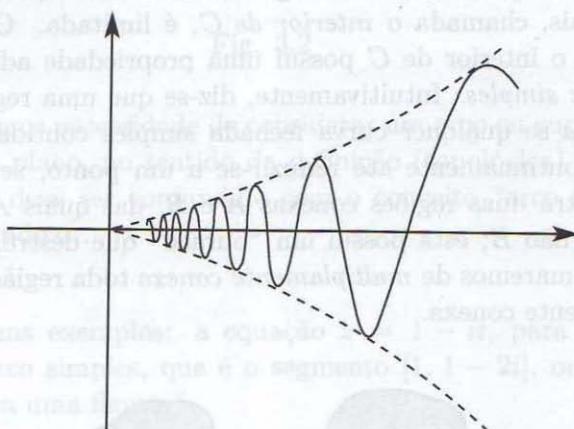
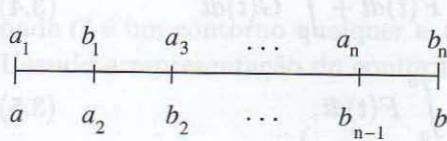


Fig. 3.5

Chamaremos *contorno* ou *caminho* a todo arco contínuo formado por um número finito de arcos regulares. Mais precisamente, um contorno C tem representação paramétrica dada por uma função $z = z(t)$, contínua num intervalo $[a, b]$, união finita de subintervalos $[a_j, b_j]$, $j = 1, \dots, n$, tais que $a_1 = a$, $b_1 = a_2$, $b_2 = a_3, \dots$, $b_{n-1} = a_n$, $b_n = b$ (Fig. 3.6a); e em cada um dos intervalos abertos (a_j, b_j) a derivada $z'(t)$ é contínua, diferente de zero e tem limites laterais finitos e diferentes de zero com t tendendo aos

extremos de cada intervalo por valores interiores a ele, limites esses que coincidem com $z'(a_j+)$ e $z'(b_j-)$, respectivamente. Isto significa que $z'(t)$ é função seccionalmente contínua no intervalo $[a, b]$ (Fig. 3.6b).

de contorno



(a)



(b)

Fig. 3.6

EXERCÍCIOS

Identifique as curvas ou arcos de equações dadas nos exercícios seguintes.

1. $z = 3t + it^2$, $-\infty < t < \infty$.
2. $z = 3t^2 + 5it$, $-\infty < t < \infty$.
3. $z = r(\cos t + i \operatorname{sen} t)$, $-\frac{\pi}{4} \leq t \leq \pi$, $r > 0$.
4. $z = \frac{1}{t} + it$, $1 \leq t < \infty$.
5. $z = t + \frac{2i}{t}$, $-\infty < t < 0$.
6. $z = t + i\sqrt{1-t^2}$, $-1 \leq t \leq 1$.
7. $z = t - i\sqrt{1-t^2}$, $-1 \leq t \leq 1$.
8. $z = t + i\sqrt{1+t^2}$, $-\infty < t \leq 0$.
9. $z = \sqrt{1+t^2} + t$, $0 \leq t < \infty$.

INTEGRAL DE CONTORNO

Seja $F(t) = U(t) + iV(t)$ uma função contínua da variável real t num intervalo $[a, b]$. Sua integral é definida em termos das integrais das funções reais U e V , mediante a expressão

$$\int_a^b F(t)dt = \int_a^b U(t)dt + i \int_a^b V(t)dt. \quad (3.2)$$

Desta definição seguem imediatamente as seguintes propriedades:

$$\operatorname{Re} \int_a^b F(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re} F(t)dt; \quad \operatorname{Im} \int_a^b F(t)dt = \int_a^b \operatorname{Im} F(t)dt. \quad (3.3)$$

As propriedades de linearidade,

$$\int_a^b [F(t) + G(t)]dt = \int_a^b F(t)dt + \int_a^b G(t)dt \quad (3.4)$$

e

$$\int_a^b cF(t)dt = c \int_a^b F(t)dt, \quad (3.5)$$

onde c é uma constante (complexa, em geral), são também de fácil verificação e ficam a cargo do leitor.

A integral (3.2) goza também da seguinte propriedade:

$$\left| \int_a^b F(t)dt \right| \leq \int_a^b |F(t)|dt, \quad (3.6)$$

onde, evidentemente, $a < b$. Esta propriedade é imediata se a integral que aparece no primeiro membro for nula. Caso contrário, seja

$$\int_a^b F(t)dt = re^{i\theta} \quad (r > 0)$$

sua representação polar. Daqui e de (3.5), obtemos:

$$r = e^{-i\theta} \int_a^b F(t)dt = \int_a^b e^{-i\theta} F(t)dt;$$

ou ainda, usando (3.3),

$$r = \operatorname{Re} \int_a^b e^{-i\theta} F(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re} [e^{-i\theta} F(t)] dt.$$

Portanto, tendo em conta que $|e^{-i\theta}| = 1$,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b F(t)dt \right| &= r = \int_a^b \operatorname{Re} [e^{-i\theta} F(t)] dt \leq \int_a^b |\operatorname{Re} [e^{-i\theta} F(t)]| dt \\ &\leq \int_a^b |e^{-i\theta} F(t)| dt = \int_a^b |F(t)| dt, \end{aligned}$$

onde a desigualdade (3.6).

Integral curvilínea ou de contorno

Estamos agora em condições de definir a *integral curvilínea* ou *integral de contorno*

$$\int_C f(z) dz,$$

onde C é um contorno qualquer e $f = u + iv$ é uma função contínua em C . Usando a representação do contorno C , $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, definimos

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt, \quad (3.7)$$

onde o segundo membro é uma integral do tipo (3.2), com

$$U(t) = u[x(t), y(t)] x'(t) - v[x(t), y(t)] y'(t),$$

$$V(t) = u[x(t), y(t)] y'(t) + v[x(t), y(t)] x'(t).$$

O integrando em (3.7), $f(z(t)) z'(t) = U(t) + iV(t)$, pode não ser uma função contínua em todo o intervalo $[a, b]$, devido ao fator $z'(t)$. Mas, como vimos na seção anterior, esse intervalo é constituído de um número finito de subintervalos $I_j = [a_j, b_j]$, em cada um dos quais $z'(t)$ é contínua; e a integral em (3.7) deve ser interpretada como a soma das integrais nesses subintervalos I_j .

Invariância da integral

A integral (3.7) é invariante com uma mudança de parâmetro dada por uma função crescente $t = t(\tau)$, que transforme um intervalo $\alpha \leq \tau \leq \beta$ no intervalo $a \leq t \leq b$ e cuja derivada $t'(\tau)$ seja seccionalmente contínua. De fato, pondo $z_1(\tau) = z(t(\tau))$, e usando a regra de mudança de variável de integração nas integrais reais, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(z_1(\tau)) z'_1(\tau) d\tau &= \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t(\tau))) z'(t(\tau)) t'(\tau) d\tau \\ &= \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt. \end{aligned} \quad (3.8)$$

É devido a essa invariância que se torna desnecessário explicitar a representação paramétrica do contorno C : a notação do primeiro membro de (3.7) tem significado único e preciso.

Convém observar também que as integrais curvilíneas tratadas na teoria das funções reais das variáveis reais x e y podem ser definidas de modo análogo a (3.7). Assim, temos:

$$\int_C P(x, y)dx = \int_a^b P(x(t), y(t))x'(t)dt,$$

$$\int_C Q(x, y)dy = \int_a^b Q(x(t), y(t))y'(t)dt,$$

e, em geral,

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_a^b [P(x(t)), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt,$$

Vemos então que a integral definida em (3.7) pode ser escrita em termos de integrais curvilíneas, assim:

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i \int_C vdx + udy.$$

Propriedades da integral

A linearidade da integral, expressa por

$$\int_C [f_1(z) + f_2(z)]dz = \int_C f_1(z)dz + \int_C f_2(z)dz, \quad (3.9)$$

e

$$\int_C cf(z)dz = c \int_C f(z)dz, \quad (3.10)$$

onde c é uma constante (complexa, em geral), é de fácil verificação e fica a cargo do leitor.

É fácil verificar também que se um contorno C é formado por um contorno C_1 seguido de um contorno C_2 — escrevemos $C = C_1 \cup C_2$ —, então a integral sobre C é a soma das integrais sobre C_1 e C_2 . Esta propriedade se generaliza facilmente para um número finito de contornos:

$$\int_{C_1 \cup \dots \cup C_r} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \dots + \int_{C_r} f(z)dz. \quad (3.11)$$

Daqui segue-se que a integral ao longo de um contorno fechado é invariante por translação do parâmetro. De fato, uma tal translação apenas muda o ponto inicial (e final) de uma posição z_1 para uma posição z_2 , como se vê na Fig. 3.7; designando por C_1 o trecho de C que vai de z_1 a z_2 e por C_2 o trecho restante, teremos:

$$\int_{C_1 \cup C_2} f(z) dz = \int_C f(z) dz = \int_{C_2 \cup C_1} f(z) dz,$$

que prova a invariância da integral.

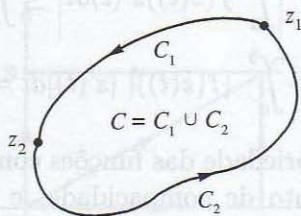


Fig. 3.7

A propriedade

$$\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz$$

é demonstrada assim: começamos observando que

$$-C = \{z = z_1(t) = z(-t) : -b \leq t \leq -a\},$$

onde obtemos:

$$z'_1(t) = -z'(-t);$$

portanto,

$$\int_{-C} f(z) dz = \int_{-b}^{-a} f(z_1(t)) z'_1(t) dt = - \int_{-b}^{-a} f(z(-t)) z'(-t) dt.$$

Finalmente, pondo $\tau = -t$, teremos:

$$\int_{-C} f(z) dz = \int_b^a f(z(\tau)) z'(\tau) d\tau = - \int_a^b f(z(\tau)) z'(\tau) d\tau = - \int_C f(z) dz,$$

que é o resultado desejado.

Outra propriedade de importância fundamental é a desigualdade

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz|, \quad (3.12)$$

onde a integral do segundo membro significa $\int_a^b |f(z(t))| |z'(t)| dt$. (Note que $a < b$.) Essa propriedade segue de (3.6), pois

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(z(t)) z'(t)| dt \\ &= \int_a^b |f(z(t))| |z'(t)| dt = \int_a^b |f(z)| |dz|. \end{aligned}$$

Uma importante propriedade das funções contínuas, cuja demonstração depende de um argumento de compacidade, e que é feita em cursos de Análise, afirma que se f é uma função contínua sobre um arco C , então existe uma constante M tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in C$. Daqui e de (3.12) obtemos a seguinte desigualdade, de grande importância nas aplicações:

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq M \int |dz| = ML,$$

onde L é o comprimento do contorno C , isto é,

$$L = \int_C |dz| = \int_a^b |z'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

3.1. Exemplo. Vamos calcular a integral de $f(z) = \bar{z}$ ao longo dos três contornos indicados na Fig. 3.8: OC , OAC e BOC , onde $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$, $B = (0, m)$, $C = (1, m)$, e m é um número real qualquer, digamos, $m > 0$. O contorno OC é dado por $z(t) = t + imt$, $0 \leq t \leq 1$, de forma que

$$\int_{OC} \bar{z} dz = \int_0^1 (t - imt)(1 + im) dt = \frac{1 + m^2}{2}.$$

O contorno OAC pode ser representado por $z(t) = t$, com $0 \leq t \leq 1$ e $z(t) = 1 + im(t - 1)$, com $1 \leq t \leq 2$; ou, ainda, podemos considerar OAC

como constituído de dois contornos: OA , dado por $z(t) = t$, seguido de AC , dado por $z(t) = 1 + imt$, em ambos t variando de zero a 1. Num caso ou no outro a integral tem o mesmo valor, dado por

$$\int_{OAC} \bar{z} dz = \int_0^1 t dt + \int_0^1 (1 - imt)im dt = \frac{1 + m^2 + 2im}{2}.$$

De maneira análoga, temos:

$$\int_{OBC} \bar{z} dz = \int_0^1 (-imt)im dt + \int_0^1 (t - im)dt = \frac{1 + m^2 - 2im}{2}.$$

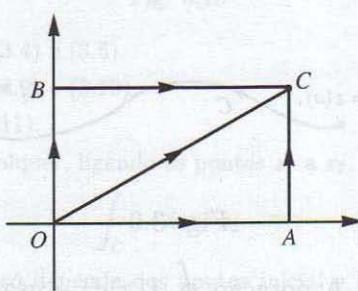


Fig. 3.8

Nesse exemplo obtemos um valor diferente para cada um dos três casos considerados; a integral depende não somente das extremidades do contorno, mas também do contorno que se considere em cada caso.

3.2. Exemplo. Em contraste com esse fenômeno, vamos mostrar agora que a integral curvilínea da função $f(z) = z$ só depende das extremidades do contorno e não do contorno particular que se considere. Para isso, seja C um contorno qualquer, ligando o ponto z_1 ao ponto z_2 , de forma que em qualquer representação paramétrica de C ($z = z(t)$, $a \leq t \leq b$) valem as relações $z(a) = z_1$ e $z(b) = z_2$ (Fig. 3.9). Temos, então,

$$\begin{aligned} \int_C z dz &= \int_a^b z(t)z'(t)dt = \int_a^b [xx' - yy' + i(xy' + yx')]dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} (x^2 - y^2 + 2ixy)dt = \frac{x(t)^2 - y(t)^2 + 2ix(t)y(t)}{2} \Big|_a^b \\ &= \frac{z(b)^2 - z(a)^2}{2} = \frac{z_2^2 - z_1^2}{2}, \end{aligned}$$

e esta expressão mostra que a integral considerada só depende mesmo dos pontos extremos z_1 e z_2 e não do contorno C que liga esses pontos. Em particular, sendo C um contorno fechado, teremos $z_1 = z_2$; portanto,

$$\int_C z dz = 0. \quad (3.13)$$

Esta propriedade é verdadeira não somente para a função $f(z) = z$, mas para toda função analítica; conhecido como “teorema de Cauchy”, esse resultado é, como veremos, a chave de toda a teoria das funções analíticas.



Fig. 3.9

3.3. Observação. A notação $\oint_C f(z) dz$ é usada com freqüência para denotar a integral de $f(z)$ ao longo de um contorno fechado C .

EXERCÍCIOS

Nos Exercs. 1 a 10, calcule a integral de f ao longo do contorno C , onde f e C são especificados em cada caso.

- $f(z) = |z|$, $C = \{z = re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$.
- $f(z) = |z|$, $C = \{z = re^{i\theta} : -\pi/2 \leq \theta \leq \pi\}$.
- $f(z) = z^2$, $C = \{z = re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$.
- $f(z) = z^2$, $C = \{z = re^{i\theta} : -\pi \leq \theta \leq \pi\}$.
- $f(z) = \sqrt{z}$, $C = \{z = re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.
- $f(z) = \sqrt{z}$, $C = \{z = re^{i\theta} : -\pi \leq \theta \leq \pi\}$.
- $f(z) = 2x - y + ix^2$, ao longo do segmento retilíneo de zero a $1 + i$.
- $f(z) = |z|$, ao longo do segmento retilíneo de zero a $-2 + 3i$.
- $f(z) = x^2 - y^2 + i(x - y^2)$, ao longo do segmento retilíneo de zero a $3 + 2i$.

10. $f(z) = y - x^2$, ao longo do segmento da origem ao ponto $(2, 0)$, seguido do segmento de $(2, 0)$ a $(2, 1)$; depois ao longo de $(0, 0)$ a $(0, 1)$, seguido do segmento de $(0, 1)$ a $(2, 1)$ (Fig. 3.10). Verifique que os resultados são diferentes.

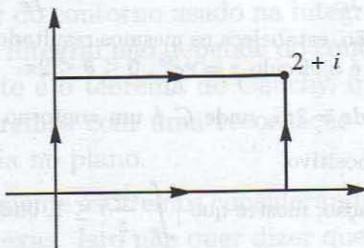


Fig. 3.10

11. Prove as propriedades (3.4) e (3.5).
 12. Prove as propriedades (3.9) e (3.10).
 13. Prove a propriedade (3.11).
 14. Seja C um contorno qualquer, ligando os pontos z_1 a z_2 . Mostre que

$$\int_C 1 \cdot dz = z_2 - z_1;$$

portanto, esta integral só depende dos pontos inicial e final, e não do caminho de integração que liga esses dois pontos. Em particular,

$$\oint_C 1 \cdot dz = 0,$$

qualquer que seja o contorno fechado C .

15. Utilizando a definição (3.2), mostre que

$$\int_a^b e^{it} dt = i(e^{ia} - e^{ib}) \quad \text{e} \quad \int_a^b e^{ikt} dt = \frac{i}{k}(e^{ika} - e^{ikb}),$$

onde k é um número real não-nulo.

16. Seja C um arco de círculo parametrizado por $z = z(\theta) = re^{i\theta}$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$. Prove que

$$\int_C f(z) dz = ir \int_{\alpha}^{\beta} f(z(\theta)) e^{i\theta} d\theta.$$

17. Sejam F e f funções analíticas numa região simplesmente conexa contendo um contorno C , e tais que $f = F'$. Use as equações de Cauchy-Riemann e as definições (3.2) e (3.7) para provar que

$$\int_C f(z) dz = F(z_2) - F(z_1),$$

onde z_1 e z_2 são os pontos inicial e final do contorno C , por onde se vê que a integral só depende dos pontos inicial e final, e não de C .

18. Use o resultado anterior para provar que, se n for inteiro e C um contorno fechado envolvendo a origem uma vez no sentido anti-horário, então

$$\oint_C z^n dz = 0 \text{ se } n \neq -1 \quad \text{e} \quad \oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

19. Efetuando a integração, estabeleça os mesmos resultados do exercício anterior no caso particular em que C é o círculo $z = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

20. Mostre que $\oint_C \log z dz = 2\pi i$, onde C é um contorno fechado envolvendo a origem uma vez no sentido positivo.

21. Sem efetuar a integração, mostre que $\left| \int_C \frac{dz}{z} \right| \leq 1$, onde C é o segmento retilíneo que une 1 a $1+i$.

22. Mostre que $\int_C \frac{dz}{z^2 + 1} \leq \frac{3\pi}{16}$, onde C é o arco de círculo situado no primeiro quadrante, centrado na origem e de raio 3.

23. Mostre que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} (\log z)^c dz = 0,$$

onde C_ε é o contorno $z = \varepsilon e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e c é um número real qualquer.

24. Seja C_r o contorno $z = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e f uma função contínua na origem. Prove que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \oint_{C_r} \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i f(0).$$

RESPOSTAS E SUGESTÕES

- | | | | |
|----------------------|----------------------|-----------------|--------------------------|
| 1. $-2r^2$. | 2. $(i-1)r^2$. | 3. $-2r^3/3$. | 4. Zero. |
| 5. $-4r\sqrt{r}/3$. | 6. $4r\sqrt{r}/3i$. | 7. $(1+5i)/6$. | 8. $\sqrt{13}(3i-2)/2$. |

17. Pondo $F = U + iV$, observe que

$$\begin{aligned} F'(z)z'(t) &= (U_x + iV_x)(x' + iy') = U_x x' - V_x y' + i(V_x x' + U_x y') \\ &= U_x x' + U_y y' + i(V_x x' + V_y y') = \frac{d}{dt}(U + iV). \end{aligned}$$

21. Use (3.12).
 22. $|z^2 + 1| \geq |z^2| - 1 = 8$ para $z \in C$.
 23. $|\log \varepsilon + i\theta| \leq 2|\log \varepsilon|$, para ε suficientemente pequeno.
 24. Escreva $f(z) = f(0) + [f(z) - f(0)]$ e observe que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|z| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(0)| < \varepsilon$.

TEOREMA DE CAUCHY

Como vimos na seção anterior, a integral de uma função entre dois pontos z_0 e z pode ou não depender do contorno usado na integração. Se o integrando é uma função analítica, a integral não depende do contorno, mas apenas dos pontos inicial e final. Este é o teorema de Cauchy, que estudaremos nesta seção. Para isso começaremos com uma recordação do teorema de Green ou teorema da divergência no plano.

Doravante, freqüentemente estaremos considerando funções definidas em regiões simplesmente conexas. Isto não quer dizer que os domínios originais de nossas funções tenham de ser assim; basta notar que as funções podem sempre ser restritas a subdomínios que sejam regiões simplesmente conexas, e é nelas que estaremos fazendo nossas considerações.

Teorema de Green

Quando tratarmos de integrais sobre contornos fechados, teremos de distinguir entre as duas orientações possíveis do contorno, uma das quais é escolhida como a orientação positiva. Não vamos nos ocupar de como a noção de orientação positiva pode ser introduzida rigorosamente, sem apelo à intuição geométrica. O importante aqui é acentuar que isto pode ser feito, e que, em consequência, dado um contorno fechado simples C , de representação paramétrica $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, a idéia de que C está orientado positivamente corresponde exatamente ao fato intuitivo de que, para z_0 interior a C , o argumento de $z(t) - z_0$ cresce de 2π com t variando de $t = a$ a $t = b$. Em linguagem sugestiva, um observador localizado em $z(t)$ percorrerá o contorno C de maneira a deixar o interior de C sempre à sua esquerda (Fig. 3.11).

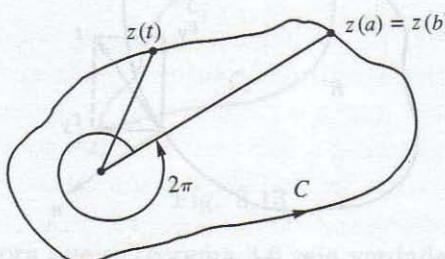


Fig. 3.11

3.4. Teorema de Green. Sejam $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ funções definidas numa região simplesmente conexa R , com derivadas primeiras contínuas. Então, para qualquer contorno fechado simples C em R ,

$$\iint_{R'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C P dx + Q dy,$$

onde R' é a região interior a C .

O leitor encontrará a demonstração desse teorema em livros de cálculo de várias variáveis (veja, por exemplo, a Seç. 6.5 de [A3]). Note que a integração do segundo membro significa integração no sentido positivo de percurso sobre C .

Denotando com $\mathbf{t} = (t_x, t_y)$ o vetor tangente a C num ponto (x, y) , com $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ o vetor unitário normal exterior e com ds o elemento de arco, então, como explicamos na Seç. 6.5 de [A3], $(dx, dy) = \mathbf{t} ds$ e $(dy, -dx) = \mathbf{n} ds$ (Fig. 3.12). Pondo então $\mathbf{F} = (Q, -P)$, a fórmula anterior assume a seguinte forma:

$$\iint_{R'} \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds,$$

que é uma forma familiar do teorema da divergência.

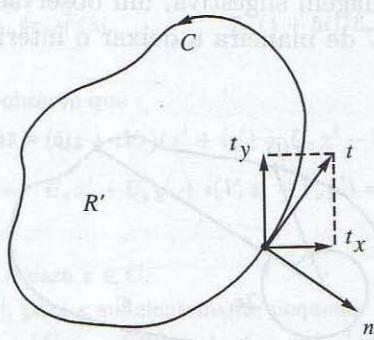


Fig. 3.12

Teorema de Cauchy

Vamos considerar agora o teorema de Cauchy, que apresentamos sob as seguintes formulações equivalentes:

3.5. Teorema. *Seja f uma função analítica numa região simplesmente conexa R . Então,*

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

para todo contorno fechado C contido em R .

3.6. Teorema. *Seja f uma função analítica numa região simplesmente conexa R . Então, a integral de f ao longo de um contorno ligando z_0 a z só depende destes pontos, e não do contorno de integração.*

Vamos verificar a equivalência desses dois teoremas. Suponhamos que o Teorema 3.5 seja verdadeiro e sejam C_1 e C_2 dois contornos arbitrários em R , ligando z_0 a z (Fig. 3.13). Então, $C_1 \cup (-C_2)$ é um contorno fechado em R ; logo,

$$0 = \iint_{C_1 \cup (-C_2)} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz,$$

ou seja,

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz.$$

Isto prova o Teorema 3.6.

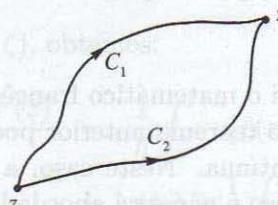


Fig. 3.13

Suponhamos agora que o Teorema 3.6 seja verdadeiro e seja C um contorno fechado em R . Tomando dois pontos z_0 e z_1 em C , obtemos os con-

tornos C_1 de z_0 a z_1 e C_2 de z_1 a z_0 (Fig. 3.14). Pelo Teorema 3.6,

$$\int_{C_1} f(z) dz = - \int_{C_2} f(z) dz,$$

onde

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz = 0.$$

Isto prova o Teorema 3.5.

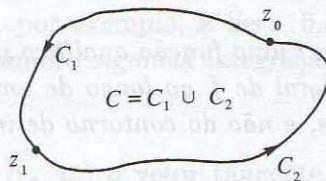


Fig. 3.14

O teorema de Cauchy, na primeira formulação, pode ser demonstrado facilmente com a ajuda do teorema de Green, supondo que a derivada f' seja contínua em R . De fato, com a notação $z = x + iy$, $f = u + iv$, temos:

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \oint_C u dx - v dy + i \oint_C v dx + u dy = \\ &= - \int \int_{R'} (v_x + u_y) dx dy + i \int \int_{R''} (u_x - v_y) dx dy. \end{aligned}$$

Mas $v_x + u_y = u_x - v_y = 0$, pelas equações de Cauchy-Riemann, donde o Teorema 3.5.

3.7. Observações. Foi o matemático francês Édouard Goursat (1858-1936) quem descobriu que o teorema anterior pode ser demonstrado sem a hipótese de que f' seja contínua. Neste caso, a demonstração requer um tratamento bem mais extenso e não será abordada aqui. (Veja [A1] ou [L].) Por causa dessa demonstração de Goursat, o teorema é também conhecido como “teorema de Cauchy-Goursat”.

Como veremos adiante, uma função analítica tem derivadas de todas as ordens; portanto, todas essas derivadas são contínuas, em particular a

primeira delas. Assim, a demonstração de Goursat tem interesse apenas teórico.

Integrais de contorno e primitivas

Como já tivemos oportunidade de assinalar, o teorema de Cauchy-Goursat é o teorema fundamental da teoria das funções analíticas. Os resultados mais relevantes que obteremos daqui por diante são consequências diretas ou indiretas desse teorema. Como primeiro passo nessa direção, vamos estudar agora a forma geral da primitiva de uma função analítica.

Dizemos que uma função F é uma *primitiva* de f se $F' = f$.

3.8. Teorema. *Seja f uma função analítica numa região simplesmente conexa R . Então, a forma geral da primitiva de f é dada por*

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta + C, \quad (3.13)$$

onde z_0 é um ponto qualquer de R , porém fixo, C é uma constante arbitrária e a integração é feita ao longo de qualquer contorno de R , ligando z_0 a z .

Demonstração. Observamos, de início, que a integral em (3.13) está bem definida, pois, de fato, ela não depende do caminho de integração.

Vamos provar que F é analítica em R e que $F' = f$. Temos (Fig. 3.15):

$$F(z+h) - F(z) = \left(\int_{z_0}^{z+h} - \int_{z_0}^z \right) f(\zeta) d\zeta = \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta.$$

Pondo $f(\zeta) = f(z) + \eta(z, \zeta)$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \frac{1}{h} \int_z^{z+h} [f(z) + \eta(z, \zeta)] d\zeta \\ &= f(z) + \frac{1}{h} \int_z^{z+h} \eta(z, \zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Como f é contínua, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\eta(z, \zeta)| = |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon \text{ para } |\zeta - z| < \delta.$$

Fazendo então $|h| < \delta$ e integrando ao longo do segmento $[z, z+h]$, teremos:

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int_z^{z+h} \eta(z, \zeta) d\zeta \right|$$

$$\leq \frac{1}{|h|} \int_z^{z+h} |\eta(z, \zeta)| |d\zeta| < \frac{\varepsilon}{|h|} \int_z^{z+h} |d\zeta| = \varepsilon.$$

Isto prova que $F' = f$; logo, F é uma primitiva de f .

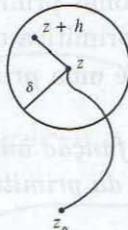


Fig. 3.15

Falta mostrar que toda primitiva é da forma (3.13). Para isto, se G é uma primitiva qualquer, teremos:

$$\frac{d}{dz} \left(G(z) - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \right) = G'(z) - \frac{d}{dz} \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = f(z) - f(z) = 0.$$

Então, a função $G(z) - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$, tendo derivada nula, é constante (cf. Corolário 2.16, p. 57), donde segue-se que (3.13) é a forma geral das primitivas de f .

3.9. Observações. Deste teorema segue imediatamente que a integral de f ao longo de um caminho ligando z_0 a z_1 é dada por

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0),$$

onde F é uma primitiva qualquer de f . Essa diferença, $F(z_1) - F(z_0)$, é a variação de F ao longo do caminho C e também costuma ser denotada com o símbolo $[F(z)]_C$. Assim,

$$\int_C f(z) dz = F(z_1) - F(z_0) = [F(z)]_C.$$

Em se tratando de um contorno fechado que seja um círculo de centro z_0 e raio r , a integral sobre C costuma ser denotada com os símbolos

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z)dz \quad \text{e} \quad \oint_{|z-z_0|=r} f(z)dz,$$

ficando subentendido que o contorno tem orientação positiva.

Vemos então que o cálculo de uma integral curvilínea de uma função analítica é equivalente ao cálculo de uma primitiva da função. Este resultado e o teorema seguinte são de importância fundamental no cálculo das integrais de contorno.

3.10. Teorema. *Sejam C_0, C_1, \dots, C_n contornos fechados simples, tais que C_1, \dots, C_n jazem no interior de C_0 e são dois a dois exteriores um ao outro (Fig. 3.16). Suponhamos que a região compreendida entre C_0 e C_1, \dots, C_n , juntamente com esses contornos, esteja contida numa região de analiticidade de uma função f . Então,*

$$\int_{C_0} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \dots + \int_{C_n} f(z)dz,$$

desde que os contornos tenham todos a mesma orientação.

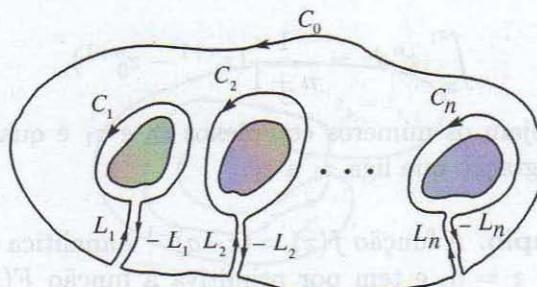


Fig. 3.16

Justificação. Um tratamento completo deste teorema requer o uso de conceitos topológicos que não estão à nossa disposição. Em casos simples, como ilustra a Fig. 3.16, justifica-se o teorema introduzindo certos cortes L_1 e $-L_1$, L_2 e $-L_2$, ..., L_n e $-L_n$, ligando C_0 a C_1, C_2, \dots, C_n ,

respectivamente, todos contidos em R . O contorno que assim obtemos, $C_0 \cup L_1 \cup (-C_1) \cup (-L_1) \cup \dots \cup L_n \cup (-C_n) \cup (-L_n)$, envolve uma região simplesmente conexa, de forma que a integral de f ao longo dele deve ser nula. Observando que as integrais ao longo de L_1 e $-L_1$, L_2 e $-L_2$, ..., L_n e $-L_n$ cancelam aos pares, obtemos:

$$\left(\int_{C_0} - \int_{C_1} - \int_{C_2} - \dots - \int_{C_n} \right) f(z) dz = 0,$$

onde

$$\int_{C_0} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz.$$

Em particular, quando $n = 1$, temos:

$$\int_{C_0} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz.$$

Neste caso, dizemos que estamos *deformando o caminho de integração C_0 no caminho C_1* .

3.11. Exemplo. A função $f(z) = z^n$, onde n é um inteiro não-negativo, é analítica em todo o plano e $F(z) = z^{n+1}/(n+1)$ é uma de suas primitivas. Então,

$$\int_{z_0}^{z_1} z^n dz = \frac{1}{n+1} (z_1^{n+1} - z_0^{n+1}),$$

quaisquer que sejam os números complexos z_0 e z_1 e qualquer que seja o contorno de integração que liga z_0 a z_1 .

3.12. Exemplo. A função $f(z) = (z-a)^{-1}$ é analítica em todo o plano, exceto no ponto $z = a$, e tem por primitiva a função $F(z) = \log(z-a)$. Portanto,

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{z-a} = \log(z_1-a) - \log(z_0-a),$$

desde que a integração seja feita ao longo de qualquer contorno C ligando z_0 a z_1 e todo contido numa região simplesmente conexa que exclua o ponto $z = a$. Em particular, é fácil ver que se o contorno voltar ao ponto inicial

sem circundar o ponto $z = a$, então $z_0 - a$ e $z_1 - a$ coincidem em módulo e argumento e o valor da integral acima é zero (Fig. 3.17).

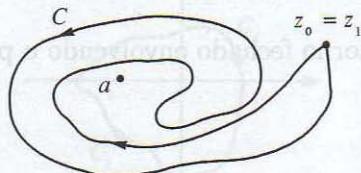


Fig. 3.17

Suponhamos que C envolva o ponto $z = a$ uma vez no sentido positivo, como mostra a Fig. 3.18. Então, qualquer região simplesmente conexa que contenha C conterá o ponto $z = a$, onde f não é analítica e não podemos concluir que a integral se anula. Mas, mesmo neste caso, a fórmula anterior se aplica, desde que propriamente interpretada. Um modo de justificá-la consiste em considerar primeiro a integração ao longo de um contorno parcial C' , unindo z_0 a um ponto z' , ilustrado na Fig. 3.18. Tal contorno está todo contido numa região simplesmente conexa R que não contém o ponto $z = a$, de forma que

$$\int_{C'} \frac{dz}{z - a} = \log(z' - a) - \log(z_0 - a).$$

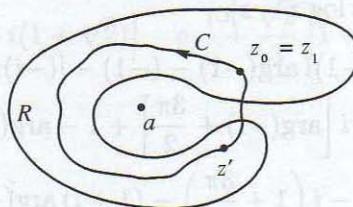


Fig. 3.18

Passando ao limite com $(z' - a) \rightarrow (z_1 - a) = (z_0 - a)e^{2\pi i}$, obtemos $2\pi i$ para o valor da integral. Este raciocínio é equivalente a considerar z_1 como se fosse distinto de z_0 (Fig. 3.19), devido a que $\arg(z_1 - a) = \arg(z_0 - a) + 2\pi$. Assim,

$$\log(z_1 - a) = \log(z_0 - a) + 2\pi i;$$

portanto,

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{z - z} = 2\pi i = \oint_C \frac{dz}{z - z},$$

onde C é qualquer contorno fechado envolvendo o ponto a uma vez no sentido positivo.

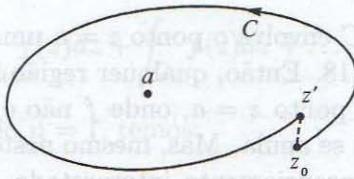


Fig. 3.19

3.13. Exemplo. Vamos calcular a integral da função $\log z$ ao longo de um contorno C_1 contido nos 4° , 1° e 2° quadrantes, com ponto inicial $z = -i$ e ponto final $z = -1$, como ilustra a Fig. 3.20. Lembramos que $(z \log z - z)' = \log z$, e que, qualquer que seja o ramo escolhido para o logaritmo, $\arg(-1) = \arg(-i) + 3\pi/2$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \log z dz &= [z \log z - z]_{C_1} \\ &= (-1)i \arg(-1) - (-1) - [(-i)i \arg(-i) - (-i)] \\ &= -i \left[\arg(-i) + \frac{3\pi}{2} \right] + 1 - \arg(-i) - i \\ &= 1 - i \left(1 + \frac{3\pi}{2} \right) - (1 + i) \arg(-i). \end{aligned}$$

Esta expressão nos mostra que o resultado depende de $\arg(-i)$, ou seja, depende do ramo escolhido para o logaritmo. Costuma-se fazer essa escolha dizendo, simplesmente, como deve ser $\log z$ para certo valor de z . Por exemplo, basta dizer que $\log z$ é real quando z for positivo (ou que $\log 1 = 0$) para fixar o argumento de $-i$ em $-\pi/2$; ou, se dissermos que $\log 1 = 2\pi i$,

então $\arg(-i) = 3\pi/2$; e assim por diante.

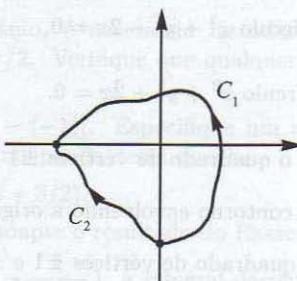


Fig. 3.20

Deixamos ao leitor a tarefa de calcular a integral da mesma função ao longo de um contorno C_2 ilustrado na Fig. 3.20.

3.14. Exemplo. Ainda com referência à Fig. 3.20, vamos calcular a integral de \sqrt{z} ao longo do contorno C_2 . Obtemos:

$$\int_{C_2} \sqrt{z} dz = \frac{2}{3} [z\sqrt{z}]_{C_2} = \frac{2}{3} \left(-\sqrt{-1} + i\sqrt{-i} \right).$$

Para efetuar o cálculo desta última expressão é preciso especificar um ramo da raiz quadrada. Se tomarmos $\sqrt{-1} = i$, teremos $\sqrt{-i} = (-1+i)/\sqrt{2}$, ao passo que se tomarmos $\sqrt{-1} = -i$, teremos $\sqrt{-i} = (1-i)/\sqrt{2}$. O resultado da integração será

$$-\frac{\sqrt{2}}{3} \left[1 + i(1 + \sqrt{2}) \right] \quad \text{e} \quad + \frac{\sqrt{2}}{3} \left[1 + i(1 + \sqrt{2}) \right],$$

respectivamente.

EXERCÍCIOS

Nos Exercs. 1 a 11, mostre que são nulas as integrais das funções dadas sobre os contornos C dados. Observe que a orientação de C é irrelevante.

1. $f(z) = \frac{z+1}{z-3}$ e C é o círculo $|z| = 2$.

2. $f(z) = \frac{3z^2}{z+2i}$ e C é o círculo $|z| = 3/2$.

3. $f(z) = \frac{3ze^z}{z^2+3}$ e C é o círculo $|z| = 5/4$.

4. $f(z) = \frac{\log(z-2i)}{z+2}$ e C é o quadrado de vértices $\pm 1 \pm i$.
5. $f(z) = \frac{\log(z+1)}{z^2-9}$ e C é o círculo $x^2 + y^2 - 2x = 0$.
6. $f(z) = \frac{\log(z+i)}{z^2-9}$ e C é o círculo $x^2 + y^2 + 2x = 0$.
7. $f(z) = \frac{\log(z-1+i)}{z^2+9}$ e C é o quadrado de vértices ± 1 e $\pm i$.
8. $f(z) = 1/z^2$ e C é qualquer contorno envolvendo a origem.
9. $f(z) = \frac{ze^z}{\log(2z+3)}$ e C é o quadrado de vértices ± 1 e $\pm i$.
10. $f(z) = \frac{\cos z}{\sin^2 z}$ e C é o círculo $|z| = 1$.
11. $f(z) = \frac{\sin z}{\cos^3 z}$ e C é o círculo $|z| = 1$.

Nos Exercs. 12 a 15, calcule as integrais das funções dadas sobre os contornos C dados.

12. $f(z) = 1/z$ e C vai de $-i$ a $+i$, passando pelo semiplano $\operatorname{Re} z > 0$.
13. $f(z) = 1/z$ e C vai de $-i$ a $+i$, passando pelo semiplano $\operatorname{Re} z < 0$.
14. $f(z) = \log z$ e C é qualquer arco que vai de -1 a i e que, à exceção dos extremos, está situado no segundo quadrante. Especifique o logaritmo tomando $\log(-1) = -i\pi$.
15. $f(z) = \sqrt{z+1}$ e C é qualquer arco que vai de $-1-4i$ a $-1+9i$, passando à direita do ponto -1 . Especifique a raiz quadrada tomando $f(0) = -1$.
16. Combinando os resultados dos Exercs. 12 e 13, calcule a integral de $f(z) = 1/z$ sobre qualquer contorno fechado simples C envolvendo a origem positivamente.
17. Seja f uma função analítica numa região simplesmente conexa R contendo o ponto z_0 . Prove que

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0),$$

onde C é qualquer contorno fechado que envolva a origem uma vez no sentido positivo.

18. Mostre que $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1} = 0$.
19. Mostre que $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1} = 0$.
20. Mostre que $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-z+iz-i} = 0$.

SUGESTÕES

4. Para especificar o logaritmo, é necessário introduzir algum corte; por exemplo, $-3\pi/2 < \arg(z - 2i) < \pi/2$. Verifique que qualquer outro ramo conduz ao mesmo resultado.
5. Veja: $\log(z + 1) = \log[z - (-1)]$. Especifique um ramo adequado do logaritmo e verifique que o resultado independe dessa escolha.
9. $\log(2z + 3) = \log 2 + \log(z + 3/2)$.
17. Utilize o Teorema 3.10 e adapte o resultado do Exerc. 24 da p. 88.
18. Como $\frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right)$, a integral decompõe-se em duas. Outro modo: utilize o Teorema 3.10 e interprete o integrando como $\frac{f(z)}{z-1}$ e como $\frac{f(z)}{z+1}$; o que é $f(z)$ em cada caso?

FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY

3.15. Teorema. *Seja f uma função analítica numa região simplesmente conexa R . Então,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

onde $z \in R$ e C é qualquer contorno fechado simples de R , que envolve z uma vez no sentido positivo e cujo interior está todo contido em R .

Demonstração. O resultado aqui enunciado, conhecido como “fórmula integral de Cauchy”, é corolário imediato do Exerc. 17 atrás. Para vermos isso, basta trocar a variável z que lá aparece por ζ e trocar z_0 por z .

No entanto, dada a importância dessa fórmula, vamos demonstrá-la detalhadamente. Seja $\delta > 0$ tal que o disco $|\zeta - z| \leq \delta$ não contenha pontos de C , como ilustra a Fig. 3.21. Designando por C_δ o contorno desse disco, o Teorema 3.10 permite escrever:

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \oint_{C_\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Vamos escrever esta última integral como soma de duas outras, de acordo com a decomposição

$$f(\zeta) = f(z) + [f(\zeta) - f(z)];$$

assim obtemos:

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \oint_{C_\delta} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \oint_{C_\delta} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta.$$

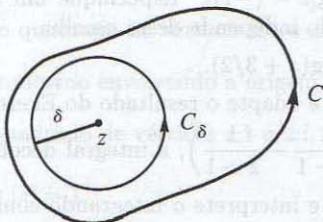


Fig. 3.21

A primeira integral do segundo membro é $2\pi i$, como já vimos; portanto,

$$2\pi i f(z) = \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \oint_{C_\delta} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (3.14)$$

Esta última integral também é zero. De fato, como f é contínua, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar δ tão pequeno que

$$|\zeta - z| \leq \delta \Rightarrow |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon.$$

Nestas condições,

$$\left| \oint_{C_\delta} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \oint_{C_\delta} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|} |d\zeta| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \oint_{C_\delta} |d\zeta| = 2\pi\varepsilon.$$

Portanto, a integral sobre C_δ em (3.14) tem limite zero com $\delta \rightarrow 0$, limite este que é o próprio valor da integral. Isto completa a demonstração do teorema.

A fórmula integral de Cauchy é instrumento básico no estudo das funções analíticas. Ela revela, de imediato, alguns resultados surpreendentes e de importância fundamental. Por exemplo, uma simples inspeção dessa fórmula nos mostra que basta o conhecimento de f nos pontos ζ do contorno C para que possamos calcular f em qualquer ponto z do interior de C . Isto já nos diz que a condição de analiticidade é muito restritiva: os valores

da função f estão todos interligados e não podem ser alterados, seja numa região, ao longo de arcos ou mesmo em conjuntos mais restritos de pontos, sem que isto viole a condição de analiticidade. Veremos, no Capítulo 6, que a interdependência dos valores de uma função analítica é ainda mais forte do que, à primeira vista, nos mostra a fórmula de Cauchy.

Derivadas de todas as ordens

Como importante consequência da fórmula de Cauchy, vamos provar agora que uma função analítica possui derivadas de todas as ordens.

3.16. Teorema. *Uma função analítica numa região R possui derivadas de todas as ordens, as quais, por sua vez, são também analíticas em R e podem ser obtidas da fórmula de Cauchy por derivação sob o sinal de integração.*

Demonstração. Sejam z um ponto qualquer de R e C um contorno fechado simples todo contido em R , cujo interior seja simplesmente conexo, contenha o ponto z e esteja todo contido em R . Vale então a fórmula de Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Admitindo, por um momento, a derivação sob o sinal de integração, e derivando sucessivamente, obtemos:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta, \quad f''(z) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} d\zeta;$$

e, em geral,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta,$$

onde n é um inteiro positivo qualquer.

Essas fórmulas, depois de demonstradas, não só estabelecerão o resultado desejado como nos darão ainda expressões para as derivadas de f em termos de seus valores sobre C .

Para demonstrar a fórmula da primeira derivada f' , devemos mostrar que

$$F = \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

tende a zero com $h \rightarrow 0$. Para isso usamos a fórmula de Cauchy da função f :

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2\pi i h} \oint_C f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z - h} - \frac{1}{\zeta - z} - \frac{h}{(\zeta - z)^2} \right) d\zeta \\ &= \frac{h}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2(\zeta - z - h)} d\zeta \end{aligned}$$

Como $z \notin C$ e C é um conjunto (topologicamente) fechado, um resultado elementar de topologia métrica (demonstrado como Lema 6.1 na p. 179) garante que existe uma vizinhança de z , de raio d , que não contém pontos de C , como ilustra a Fig. 3.22. Em outras palavras, $|\zeta - z| \geq d$ para todo $\zeta \in C$; e tomando $|h| < d/2$, teremos também: $|\zeta - z - h| \geq |\zeta - z| - |h| > d/2$. Daqui e da expressão anterior de F , obtemos:

$$|F| \leq \frac{|h|}{2\pi} \oint_C \frac{|f(\zeta)|}{d^2 \cdot d/2} d\zeta.$$

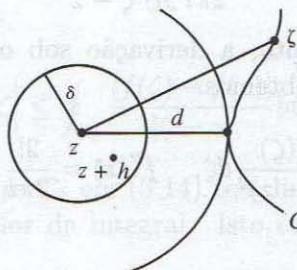


Fig. 3.22

Finalmente, sejam L o comprimento de C e $M = \max_{\zeta \in C} |f(\zeta)|$ (este máximo existe por ser f função contínua sobre o conjunto limitado e fechado C). Então, $|F| \leq |h|ML/\pi d^2$. Isto prova que $F \rightarrow 0$ com $h \rightarrow 0$ e conclui a demonstração do teorema no que diz respeito à derivada f' .

Resta provar a segunda parte do teorema, referente às derivadas $f^{(n)}$, com $n > 1$. Faremos isto provando um resultado mais geral, objeto do teorema seguinte, que contém, como corolário, o teorema anterior.

3.17. Teorema. *Sejam C um caminho qualquer, fechado ou não, $g(z)$ uma função definida e contínua para $z \in C$, e n um inteiro positivo. Então, a função*

$$f(z) = \int_C \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^n} d\zeta$$

é regular em todo ponto $z \notin C$, e possui derivada dada por

$$f'(z) = n \int_C \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Demonstração. Sendo F como antes, a fórmula que define a função f nos dá:

$$F = \int_C G g d\zeta, \quad (3.15)$$

onde

$$G = \frac{1}{h} \left[\frac{1}{(\zeta - z - h)^n} - \frac{1}{(\zeta - z)^n} \right] - \frac{n}{(\zeta - z)^{n+1}}.$$

Vamos mostrar que podemos fazer esse G arbitrariamente pequeno, desde que $|h|$ seja feito suficientemente pequeno. Por conveniência, pomos $a = \zeta - z - h$ e $b = \zeta - z$. Então,

$$G = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{a^n} - \frac{1}{b^n} \right) - \frac{n}{b^{n+1}} = \frac{b^n - a^n}{(b - a)a^n b^n} - \frac{n}{b^{n+1}}.$$

A demonstração no caso $n = 1$ é idêntica à que fizemos anteriormente para a função f' . Portanto, a partir de agora suporemos $n \geq 2$. Então,

$$\begin{aligned} G &= \frac{a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + ab^{n-1} + b^n - na^n}{a^n b^{n+1}} \\ &= \frac{a^{n-1}(b - a) + a^{n-2}(b^2 - a^2) + \dots + a(b^{n-1} - a^{n-1}) + (b^n - a^n)}{a^n b^{n+1}}. \end{aligned}$$

Como na demonstração anterior, existe uma vizinhança de z , de raio d , que não contém pontos de C (Fig. 3.22). E tomado $|h| < d/2$, teremos $|\zeta - z| \geq d$ e $|\zeta - z - h| > d/2$. Daqui e da expressão anterior de G , obtemos:

$$|G| \leq \frac{2^n}{d^{2n+1}} \left[|a^{n-1}(b - a)| + |a^{n-2}(b^2 - a^2)| + \dots + |(b^n - a^n)| \right].$$

O importante a observar agora é que a expressão entre colchetes que aí aparece contém como fator comum $|b - a| = |h|$; o outro fator é limitado por uma constante K que não depende de $\zeta \in C$ e de h . Assim, $|G| \leq 2^{n+1}|h|K/d^{2(n+1)}$. Agora é só levar esta estimativa em (3.15) e terminar a demonstração como no caso já tratado anteriormente.

3.18. Observação. O Teorema 3.16 nos mostra que a condição de analiticidade é bastante restritiva, pois nos diz que uma função analítica numa região R tem derivadas de todas as ordens nessa região, as quais, portanto, são também analíticas. No fundo, isto é mais uma consequência do Teorema 3.5 (p. 91), via a fórmula integral de Cauchy, dada no Teorema 3.15.

3.19. Teorema de Morera. *Seja f uma função contínua numa região R , tal que*

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

para todo contorno fechado $C \subset R$. Então f é analítica em R .

Demonstração. Seja z_0 um ponto qualquer de R , porém fixo. A expressão

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta$$

independe do caminho de integração. Como na demonstração do Teorema 3.8, F é uma função analítica em R e sua derivada é a função $F' = f$. Pelo Teorema 3.16, F' também é analítica em R , isto é, f é analítica em R , o que completa a demonstração.

É interessante observar que esta demonstração baseia-se inteiramente no teorema de Cauchy. Em outras palavras, a recíproca do teorema de Cauchy é consequência dele mesmo!

3.20. Teorema de Liouville. *Uma função inteira (isto é, analítica em todo o plano) e limitada é necessariamente constante.*

Demonstração. Seja f a referida função, e M uma constante tal que

$|f(z)| \leq M$ para todo z . De acordo com a fórmula integral da derivada,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta,$$

onde z é um ponto qualquer e C um contorno arbitrário envolvendo z uma vez no sentido positivo. Em particular, tomando para C o círculo $|\zeta - z| = r$, obtemos:

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|\zeta-z|=r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^2} d\zeta \leq \frac{M}{2\pi r^2} \oint_{|\zeta-z|=r} |d\zeta| = \frac{M}{r}.$$

Como r é arbitrário, fazendo $r \rightarrow \infty$, obtemos $f'(z) = 0$; isto sendo verdade para todo z , concluímos que f é constante, como queríamos demonstrar.

3.21. Teorema fundamental da Álgebra. O teorema de Liouville permite fazer uma demonstração simples do teorema fundamental da Álgebra, que diz: *todo polinômio de grau $n \geq 1$ possui ao menos uma raiz.* De fato, seja

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

onde $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$. Suponhamos, por absurdo, que P não se anule, de forma que

$$f(z) = \frac{1}{P(z)} = \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}$$

é uma função inteira. Como $f(z) \rightarrow 0$ com $z \rightarrow \infty$ e f é contínua, portanto, limitada em qualquer parte finita do plano, concluímos que f é limitada em todo o plano. Pelo teorema de Liouville segue-se, então, que f é constante, o que acarreta que $P(z)$ também é constante. Logo, f é identicamente nula (pois é igual a seu limite no infinito). Isto é absurdo, visto que $P(z)$ é finito para todo z , donde a veracidade do teorema.

EXERCÍCIOS

Use a fórmula integral de Cauchy para calcular as integrais descritas nos Exercs. 1 a 13, onde os contornos são todos percorridos no sentido anti-horário.

1. $\oint_{|z-1|=2} \frac{zdz}{z-2}$.
2. $\oint_{|z+1|=2} \frac{zdz}{z+2}$.
3. $\oint_{|z-2i|=2} \frac{\sin z}{z-i} dz$.
4. $\oint_{|z|=2} \frac{z \cos z}{z-i} dz$.
5. $\oint_{|z-1|=2} \frac{e^{iz} dz}{z+i}$.
6. $\oint_{|z|=1} \frac{iz dz}{1-2z} dz$.
7. $\oint_{|z-1|=2} \frac{e^{iz} dz}{\pi-2z}$.
8. $\oint_{|z-1|=2} \frac{e^z dz}{z^2-4}$.
9. $\oint_{|z|=1} \frac{\sqrt{z+5}}{1+2z} dz$.
10. $\oint_C \frac{dz}{z^2+1} dz$, onde C é o quadrado de vértices zero, $2i$, e $\pm 1+i$.
11. $\oint_C \frac{dz}{z^2+1} dz$, onde C é o quadrado de vértices zero, $-2i$, e $\pm 1-i$.
12. $\oint_C \frac{ze^z}{z^2-2z-3} dz$, onde C é o losango de vértices ± 2 , e $\pm i$.
13. $\oint_{|z|=2} \frac{\log(z+5)}{z^2-2iz+3} dz$, onde o logaritmo é fixado por $\log 5 > 0$.
14. Use a fórmula da derivada para calcular $\oint_{|z|=3} \frac{\cos(z^2+3z-1)}{(2z+3)^2} dz$.
15. Calcule $\oint_{|z|=1} \frac{z^2+z+i}{(4z-i)^3} dz$.
16. Calcule $\oint_{|z|=1} \frac{\log(z^2+2)}{(3z-2)^2} dz$. Observe que esta integral independe do ramo particular do logaritmo.

Calcule as integrais dos Exercs. 17 a 20, fixando o ramo da função $\sqrt{z^2+4}$ pela condição $\sqrt{4} = -2$ e tomando para C o quadrado de vértices $\pm 1 \pm i$.

17. $\oint_C \frac{\sqrt{z^2+4}}{4z^2+4z-3} dz$.
18. $\oint_C \frac{\sqrt{z^2+4}}{4z^2-4iz-1} dz$.
19. $\oint_C \frac{\sqrt{z^2+4}}{z^2-2(1+i)z+4i} dz$.
20. $\oint_C \frac{z}{(2z^2+1)\sqrt{z^2+4}} dz$.
21. Seja f uma função analítica numa região simplesmente conexa R , e seja C um contorno fechado simples contido em R . Prove que, para z interior a C ,

$$\oint_C \frac{f'(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\zeta.$$

Prove, mais geralmente, que

$$\oint_C \frac{f^{(n)}(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = n! \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta.$$

RESPOSTAS E SUGESTÕES

1. $4\pi i$.

2. $-4\pi i$.

3. $\pi(1 - e^2)/e$.

4. $\pi(e^2 + 1)/e$.

5. $2\pi ie$.

6. $\pi/2$.

7. π .

8. $i\pi e^2/2$.

9. $3\pi i/\sqrt{2}$.

10. π .

11. $-\pi$.

12. $\pi i/2e$.

17. Observe que $\sqrt{z^2 + 4} = \sqrt{z - 2i}\sqrt{z + 2i}$, de sorte que essa função será negativa em todo o eixo real se pusermos

$$\frac{\pi}{2} < \arg(z - 2i) < \frac{\pi}{2} + 2\pi \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} < \arg(z + 2i) < \frac{3\pi}{2}.$$

Isto corresponde a fazer dois cortes ao longo do eixo imaginário, um de $+2i$ a $+i\infty$ e o outro de $-2i$ a $-i\infty$. (Faça uma figura para entender bem o que se passa.) Escreva o integrando na forma

$$\frac{\sqrt{z^2 + 4}/2(2z + 3)}{z - 1/2}$$

e aplique a fórmula de Cauchy.

FUNÇÕES HARMÔNICAS

Diz-se que uma função $u(x, y)$ é *harmônica* numa região R se nesta região ela possui derivadas de segunda ordem e satisfaz a seguinte equação, conhecida como “equação de Laplace”:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ uma função analítica numa região R . Pelo Teorema 3.16, f possui derivadas de todas as ordens em R . Como $d/dz = \partial/\partial x = \partial/\partial(iy)$, as derivadas sucessivas de f podem ser calculadas derivando repetidamente em relação a x ou em relação a iy . Vemos assim que as funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ possuem derivadas contínuas de todas as ordens em R . Podemos então derivar as equações de Cauchy-Riemann,

$$u_x = v_y \quad \text{e} \quad u_y = -v_x,$$

um número arbitrário de vezes. Em particular, derivando a primeira delas em relação a x e a segunda em relação a y , e somando os resultados membro a membro, obtemos:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (3.16)$$

Com o mesmo procedimento, porém derivando a primeira em relação a y e a segunda em relação a x , vem:

$$v_{xx} + v_{yy} = 0. \quad (3.17)$$

Podemos ver também, por derivações sucessivas de (3.16) e (3.17), que quaisquer derivadas parciais de u e v — digamos $\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m \partial y^n}$, $\frac{\partial^{p+q}v}{\partial x^p \partial y^q}$ — são também harmônicas em R .

A questão que se põe naturalmente é a de saber se qualquer função harmônica pode ser considerada parte real ou parte imaginária de uma função analítica. A resposta a esta questão é afirmativa, como veremos a partir de agora. Existe então uma ligação íntima entre a teoria das funções analíticas e a teoria das funções harmônicas.

A título de ilustração, seja

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad (3.18)$$

que é harmônica em todo o plano, como se verifica prontamente. Vamos determinar a função v correspondente, usando as equações de Cauchy-Riemann. Temos:

$$v_x = -u_y = 2y;$$

integrando em relação a x , obtemos:

$$v = 2xy + g,$$

onde g é uma função arbitrária de y — a “constante da integração” em relação a x . Derivando esta última equação em relação a y e usando $v_y = u_x = 2x$, obtemos $g'(y) = 0$; logo, g é uma constante arbitrária e $v = 2xy + g$. Daqui e de (3.18) segue-se que

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = x^2 + 2ixy - y^2 + \text{const.} = (x + iy)^2 + \text{const.},$$

ou seja,

$$f(z) = z^2 + \text{const.}$$

Função harmônica determina função analítica

Vamos considerar o problema na sua generalidade. Seja $u(x, y)$ uma função harmônica numa região R , que supomos, por enquanto, ser simplesmente conexa. Vamos determinar $v(x, y)$ de forma que $f = u + iv$ seja analítica em R . A função v assim determinada é chamada a função *harmônica conjugada* da função u . Como no exemplo acima, v é determinada pelas equações de Cauchy-Riemann. Devemos ter:

$$dv = v_x dx + v_y dy = -u_y dx + u_x dy.$$

Isto nos leva a procurar a função v na forma

$$v(x, y) = v_0 + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (-u_y dx + u_x dy), \quad (3.19)$$

onde $v_0 = v(x_0, y_0)$ e (x_0, y_0) é um ponto de R fixado arbitrariamente.

Se a integral acima for independente do caminho de integração, a função v que ela define possui derivadas contínuas em R , satisfazendo, juntamente com u , as equações de Cauchy-Riemann; logo, $f = u + iv$ é analítica em R . O problema se reduz, então, a provar que a expressão $-u_y dx + u_x dy$ é uma diferencial exata; mas isto equivale a verificar que a integral desta expressão ao longo de qualquer contorno fechado C em R é nula. Designando por R' o interior de C e tendo em conta o Teorema 3.4 (teorema de Green, p. 90), obtemos:

$$\oint_C (-u_y dx + u_x dy) = \iint_{R'} (u_{xx} + u_{yy}) dx dy = 0,$$

onde usamos o fato de que u é harmônica. Isto conclui a demonstração da existência da função v , a qual é determinada pela função u , a menos de uma constante aditiva arbitrária v_0 , como mostra a expressão (3.19).