

*Ensino & Informação*

*Prof. Altamir A. R. Araldi*

*Revista®*

A. MARKUSHEVICH

TEORIA  
DE LAS  
FUNCIONES  
ANALITICAS

TOMO I



EDITORIAL



MIR



PROLOGO  
DEL  
TRADUCTOR

Es sabido que las funciones analíticas se emplean con frecuencia en distintas disciplinas teóricas y aplicadas: en la teoría analítica de los números, ecuaciones diferenciales, geometría, hidromecánica, mecánica celeste, etc. El conocimiento de los principios fundamentales de la teoría de las funciones analíticas es una premisa indispensable en la educación matemática moderna. Actualmente esta teoría se ha desarrollado tanto que resulta difícil abarcar en un solo libro todas sus múltiples ramificaciones. Entre las diversas obras que se han escrito sobre esta disciplina, la «Teoría de las funciones analíticas» de A. I. Markushévich posee una serie de méritos particulares. En primer lugar, abarca un amplio material, debido a lo cual se edita en dos tomos. Por otra parte, es accesible para aquel que no conozca aún los elementos de la teoría de las funciones de variable compleja y desee emprender un estudio individual de la misma. Además, consideramos que es una de las obras más completas y mejores de la teoría en cuestión. Para poder comprenderla basta con tener los conocimientos que se exigen en los dos primeros cursos de la Facultad de Matemáticas de la Universidad. Puede ser útil también para los que preparan la tesis doctoral y deseen especializarse en teoría de funciones. Posiblemente, para algunos lectores esta obra servirá de punto de partida para ampliar sus investigaciones sobre algún tema.

El autor expone en este curso tanto los elementos de la teoría de las funciones analíticas como sus secciones modernas. Las demostraciones de los teoremas y, en ge-

neral, las cuestiones más difíciles, se analizan con todo detalle y de manera muy razonada.

El libro contiene numerosos ejemplos que, frecuentemente, ilustran los temas que son objeto de estudio. En muchos casos estos ejemplos desempeñan un papel decisivo, comprobando que el teorema estudiado pierde su valor en condiciones más moderadas.

Al final del segundo tomo y como apéndice, se incluye un artículo del mismo autor «Sobre la base en el espacio de las funciones analíticas». Los enunciados y teoremas expuestos en él se deben también al profesor Markushévich.

Al final de cada tomo se inserta una amplia bibliografía sobre los distintos problemas estudiados.

Esperamos que la edición española de esta obra sea bien acogida. Al final del primer tomo de la presente edición española incluimos un apéndice del traductor—«Seudopolinomios ortogonales»—en el que se hace una generalización de los polinomios de Legendre, expuestos en el libro.

Quedaremos muy agradecidos a todos aquellos que deseen darnos su opinión acerca de la traducción.



# INDICE

---

## CAPITULO PRIMERO

### CONCEPTOS FUNDAMENTALES

§ 1. El objeto de la teoría	11
§ 2. Los números complejos	16
§ 3. Conjuntos y funciones. Teoría de límites. Las funciones continuas	24
§ 4. Conexividad de los conjuntos. Curvas y recintos	51
§ 5. El infinito. Proyección estereográfica y plano ampliado	68

## CAPITULO SEGUNDO

### LA DERIVABILIDAD Y SU SIGNIFICADO GEOMETRICO. LAS FUNCIONES ELEMENTALES

§ 1. La derivada. Condiciones de D'Alembert — Euler	85
§ 2. Significado geométrico de la derivada. Transformación conforme	96
§ 3. Polinomios. Función exponencial. Seno y coseno	103
§ 4. Funciones racionales. Función homográfica. Geometría de Lobachevski. Funciones trigonométricas	128
§ 5. Funciones multiformes elementales	175

## CAPITULO TERCERO

### INTEGRALES Y SERIES DE POTENCIAS

§ 1. Curvas rectificables. Integrales	206
§ 2. Teorema integral de Cauchy	216
§ 3. Integral de Cauchy. Fórmulas de Y. Sojotski	250
§ 4. Series de funciones y productos infinitos	271
§ 5. Series de potencias. Relación con las series de Fourier. Desarrollo de una función analítica en serie de potencias	292
§ 6. Unicidad. A-puntos de una función analítica. Principio del módulo máximo. Puntos singulares del elemento de una función analítica	315
§ 7. Métodos de desarrollo de las funciones en series de potencias. Comportamiento de la serie de potencias en la frontera del círculo de convergencia	347

## CAPITULO CUARTO

DIVERSAS SERIES. RESIDUOS. FUNCIONES INVERSAS  
E IMPLICITAS

§ 1. Principio de compacidad	380
§ 2. Serie de Laurent. Series de Dirichlet. Teorema de Runge	392
§ 3. Puntos singulares aislados. Residuos. Principio del argumento	416
§ 4. Aplicación de la teoría de los residuos al desarrollo de las funciones en series. Interpolación	450
§ 5. Funciones inversas e implícitas	476
Apéndice del traductor	499
Bibliografía	502
Indice alfabético	507

# BIBLIOGRAFIA

---

## I. TRATADOS Y LIBROS DE PROBLEMAS DE TEORIA DE LAS FUNCIONES ANALITICAS DE UNA VARIABLE

1. Behnke H., und Sommer F., Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen veränderlichen, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1962.
2. Bieberbach L., Lehrbuch der Funktionentheorie, B. I. Elemente der Funktionentheorie, 3 Aufl., Leipzig — Berlin, 1930.
3. Carathéodory C., Funktionentheorie, B. I., Basel, 1950.
4. Courant R., Geometrische Funktionentheorie, Springer, Berlin, 3<sup>a</sup> ed., 1929.
5. Dienes P., The Taylor series. An introduction to the theory of functions of a complex variable, Oxford, 1931.
6. Dinghas A., Vorlesungen über Funktionentheorie, Berlin — Göttingen — Geidelberg, 1961.
7. Evgráfov M., Funciones analíticas.  
(Евграфов М. А., Аналитические функции, М., 1965.)
8. Favard J., Cours d'analyse de l'École polytechnique, t. II. Représentations. Fonctions analytiques, Paris, 1960.
9. Fuks B. y Shabat B., Funciones de variable compleja y algunas aplicaciones.  
(Фукс Б. А. и Шабат Б. В., Функции комплексного переменного и некоторые их приложения, изд. 3-е, М., 1964.)
10. Goursat E., Cours d'analyse mathématique, Vol II, 7<sup>a</sup> ed., 1949.
11. Hermite C., Cours d'analyse.
12. Hurwitz A., Allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, Springer, Berlin, 3<sup>a</sup> ed., 1929.
13. Jordan C., Cours d'analyse de l'École polytechnique, 3 éd, t. II, Calcul intégral, Paris, 1913 (ch. VI—VIII).
14. Knopp K., 1) Funktionentheorie, T. I., Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen, 6 Aufl., Berlin, 1944; 2) lo mismo T. II. Anwendungen und Weiterführung der allgemeinen Theorie, 6 Aufl., Berlin, 1944; 3) Aufgabensammlung zur Funktionentheorie, T. I, Aufgaben zur elementaren Funktionentheorie, 3 Aufl., Berlin, 1944; 4) lo mismo T. II. Aufgaben zur höheren Funktionentheorie, 3 Aufl., Berlin, 1944.
15. Lavrentiev M. y Shabat B. Métodos de la teoría de funciones de variable compleja.  
(Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, изд. 3-е, испр., М., 1965.)



16. Littlewood J. E., Lectures on the theory of functions Oxford, 1944.
17. Markushévich A., Elementos de la teoría de funciones analíticas. (Маркушевич А. И., Элементы теории аналитических функций, М., 1944.)
18. Markushévich A., Curso breve de la teoría de funciones analíticas. (Маркушевич А. И., Краткий курс теории аналитических функций, 3 изд., испр. и доп., М., 1966.)
19. Milloux H., Principes methodes générales, t. I, F. 1 [Traité de théorie des fonctions publié sous la direction de M. Gaston Julia], Paris, 1953.
20. Osgood W. F., Lehrbuch der Funktionentheorie, B. I, 4 Aufl Leipzig — Berlin, 1923.
21. Picard E., Traité d'analyse, t. II, Fonctions harmoniques et fonctions analytiques, Introduction à la théorie des équation différentielles, Intégrales abéliennes et surfaces de Riemann, 3 éd., Paris, 1927.
22. Pólya C. und Szegő G., Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Erster band., Berlin, Verlag von Julius Springer, 1925.
23. Priválov I., Introducción a la teoría de funciones de variable compleja. (Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, изд. 10-е, М., 1960.)
24. Saks S. and Zygmund A., Analytic Functions, transl. by E. J. Scott, Warszawa — Wrocław, 1952.
25. Smirnov V., Curso de matemáticas superiores, t. III, 2ª parte. (Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, ч. 2, изд. 6-е, М., 1956.)
26. Stoilow S., Teoria functiilor de o variabila complexa, vol. I, Ed. Acad. Rep. Popul., Române, 1954.
27. Titchmarsh E., The theory of functions. 2ª ed., Univ. de Oxford, 1939.
28. Valiron G., Cours d'analyse mathématique, t. I, Théorie des fonctions, 2 éd., Paris, 1948.
29. Volkowiski L., Lunts G., Aramanóvich I., Problemas de teoría de funciones de variable compleja. (Волковьский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г., Сборник задач по теории функций комплексного переменного, М., 1961.)
30. Whittaker E. and Watson G., A course of modern analysis. 4ª ed., Universidad de Cambridge, 1927.

## II. MONOGRAFIAS SOBRE CUESTIONES ESPECIALES

### A. Historia de la teoría de las funciones analíticas

- Markushévich A., Bosquejo de historia de la teoría de las funciones analíticas.  
(Маркушевич А. И., Очерки по истории теории аналитических функций, М.—Л., 1951)

### B. Transformaciones homográficas

1. Fatou P. Fonctions automorphes (Théorie des fonctions algébriques d'une variable et des transcendentes qui s'y rattachent, par MM. P. Appell, É. Goursat, 2 éd., t. II), Paris, 1930 (ch. XIII, ch. XIV).
2. Ford L. Automorphic functions, Mcgraw — Hill Book Company, 1929.
3. Julia G., Principes géométriques d'analyse, t. I, Paris, 1932.



*C. Práctica de las transformaciones conformes*

1. K a n t o r ó v i c h L. y K r i l o v V., Métodos aproximados del análisis superior.  
(Approximate methods of higher analysis, Interscience, Nueva York, 1958.)  
(К а н т о р о в и ч Л. В. и К р ы л о в В. И., Приближенные методы высшего анализа, изд. 5-е, М.—Л., 1962.)
2. W. K o r p e n f e l s und F. S t a l l m a n n, Praxis der Konformen Abbildung, Springer — Vorlag, Berlin, Göttingen Heidelberg, 1959.

*D. Integral de tipo Cauchy*

1. G ó l u b i e v V., Funciones uniformes analíticas, Funciones automorfas.  
(Г о л у б е в В. В., Однозначные аналитические функции, Автоморфные функции, М., 1961.)
2. M u s j e l i s h v i l i N., Singular integral equations. Boundary problems of function theory and their application to mathematical physics. (Dep. of Supply and Development, Aer. Res. Lab., Melbourne, Australia, 1949; Noordhoff, Groningen, 1953.)  
(М у с х е л и ш в и л и Н. И., Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике, изд. 2-е, М., 1962.)
3. P r i v á l o v I., Propiedades de frontera de las funciones analíticas.  
(П р и в а л о в И. И., Граничные свойства аналитических функций, изд. 2-е, М.—Л., 1950.)

*E. Series de potencias. Series de Dirichlet*

1. B e r n s t e i n V., Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, Paris, 1933.
2. H a d a m a r d J. et M a n d e l b r o j t S., La série de Taylor et son prolongement analytique, 2 éd., Paris, 1926.
3. L a n d a u E., Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, 2 Aufl., Berlin, 1929.
4. Z y g m u n d A., Trigonometric series. 2<sup>a</sup> ed., 2 vols., Cambridg Univ. Press., 1959.

*F. Principio de compacidad*

M o n t e l P., Familles normales de fonctions analytiques, Paris, 1927.

*G. Teorema de Runge*

1. M o n t e l P., Leçons sur les séries de pôlynomes à une variable complexe, Paris, 1926.
2. P a i n l e v é P., Sur le développement des fonctions analytiques (Note I al libro: É. B o r e l, Leçons sur les fonctions de variables réelles et le développement en séries de polynomes, 2 éd., Paris, 1928.)
3. S m i r n o v V. y L i é b e d i e v N., Teoría constructiva de las funciones de variable compleja.  
(С м и р н о в В. И. и Л е б е д е в Н. А., Конструктивная теория функций комплексного переменного, М.—Л., 1964.)
4. W a l s c h J., Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain. Publ. by the American Mathem. Society, Second ed., 1960.



*H. Teoría de los residuos*

*Lindelöf E.*, Le calcul de résidus et ses applications à la théorie des fonctions, Paris, 1905.

*I. Interpolación*

1. *Guelfond A.*, Calcul des differences finies, Paris, Dunod, 1963 (Coll. Univ. Math.) (Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, изд. 3-е, М., 1966.)
2. *Goncharov V.*, Teoría de interpolación y aproximación de las funciones. (Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, М., 1954.)

*J. Funciones de varias variables*

1. *Böjner S.* y *Martin U.*, Funciones de varias variables complejas. (Бохнер С. и Мартин У. Т., Функции многих комплексных переменных, М., 1951.)
2. *Hervey M.*, Several complex variables, Oxford Univ. Press. Bombay, 1963.
3. *Fuks B.*, Teoría de funciones analíticas de varias variables complejas. (Фукс Б. А., Теория аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1962.)
4. *Osgood W. F.*, Lehrbuch der Funktionentheorie, B. II, 1-e Lieferung, 2 Aufl., 1929, Leipzig und Berlin.
5. *Vladimirov V.*, Métodos de la teoría de las funciones de varias variables complejas. (Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964.)

En el primer volumen del tratado didáctico de teoría de las funciones analíticas de A. I. Markushévich se estudian detalladamente los siguientes temas:

Conceptos fundamentales, la derivación y su significado geométrico, las funciones elementales, integrales y series de potencias, diversas series, residuos, funciones inversas e implícitas.

Además del material que forma parte del curso fundamental university o de teoría de las funciones analíticas, el autor expone también la teoría de las transformaciones conformes, problemas de la aproximación uniforme de las funciones mediante polinomios, funciones armónicas y subarmónicas, fundamentos de la teoría de las funciones enteras y meromorfas, superficies de Riemann.

El libro está destinado para los estudiantes de las facultades de matemáticas de los Centros de Enseñanza Superior. Es útil también para los aspirantes (posgraduados). Es de interés particular para todos aquellos que se dedican al estudio de las matemáticas.