Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

SUPERFÍCIES DE ROTAÇÃO COM CURVATURA EXTRÍNSECA CONSTANTE EM UM ESPAÇO TRIDIMENSIONAL CONFORMEMENTE PLANO

BRUNO VASCONCELOS MENDES VIEIRA

Teresina - 2014

BRUNO VASCONCELOS MENDES VIEIRA

Dissertação de Mestrado:

SUPERFÍCIES DE ROTAÇÃO COM CURVATURA EXTRÍNSECA CONSTANTE EM UM ESPAÇO TRIDIMENSIONAL CONFORMEMENTE PLANO

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. BARNABÉ PESSOA LIMA

Teresina - 2014

Vieira, Bruno Vasconcelos Mendes.

Superficies de rotação com curvatura extrínseca constante em um espaço tridimensional conformemente plano.

Bruno Vasconcelos Mendes Vieira – Teresina: 2014.

Orientador: Prof. Dr. Barnabé Pessoa Lima.

1. Geometria Diferencial

CDD 516.36

Ao meu avô Francisco. (In memoriam).

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus por me ter concedido força, luz e determinação para a realização de mais um sonho. Por ter nascido em uma família que amo tanto, de pais maravilhosos, que sempre mesmo com dificuldades me ajudaram como podiam, ter posto em minha vida pessoas de moral e de grandeza espiritual nas quais procuro me espelhar. A minha família que teve um papel importante para conclusão desta etapa, em especial a meus pais: Eugênia e Aderaldo, pelo apoio e confiança. Agradeço também aos meus irmãos: Gustavo e Natália pela grande amizade e amor. Agradeço ao meu Tio Edmilson, que durante toda essa jornada foi como um pai para mim.

Um agradecimento muito especial a todos os meus amigos, em especial: Flávio e José Wallison, pelo apoio e também por terem se disponibilizado sempre para me ajudar, conversar quando estava aperriado ou preocupado com algo e também pelas brincadeiras, a meus amigos Edilson e Edimilson Lopes pelas ajudas e companheirismo. Um agradecimento muito especial ao meu amigo de graduação e Mestrado Italo que sempre trabalhou junto comigo, sofremos e vencemos juntos todas as diciplinas da graduação e do mestrado.

Agradeço Maria de Jesus, minha amada namorada, amiga e companheira, por estar sempre ao meu lado, me apoiando nos momentos em que mais precisei e compartilhando comigo os bons momentos! Por ser forte e perseverante, por me ajudar a levantar a cabeça nos momentos mais dificeis. Por querer e trabalhar sempre para prosperarmos. Por aprendermos tanto juntos... (Amo você!).

Agradeço a todos os professores do departamento de matemática da Universedade Federal do Piauí pelos ensinamentos aqui adiquidridos durante toda minha graduação e Mestrado em especial a professora Liane Feitosa pelos ótimos conselhos que me ajudaram e o professor Paulo Alexandre por ter me indicado ao professor Barnabé que é um exelente orientador, um pai acadêmico, um grande exemplo e um grande amigo.

Gostaria de agradecer a muitas pessoas que cruzaram o meu caminho, me dando força, coragem para seguir em frente, mas diante da impossibilidade de fazê-lo, peço desculpas àqueles cujos nomes não citei, mas saibam que estão em meu coração.
Agradeço (a CAPES) pelo apoio financeiro.

"O conhecimento torna a alma jovem e diminui a amargura da velhice. Colhe, pois, a sabedoria. Armazena suavidade para o amanhã. "

Leonardo da Vince.

Resumo

Esta disssertação tem como referencia principal o artigo Surfaces of Rotation with Constant extrinsic curvature in conformally flat 3-space de Armando V. Corro, Romildo Pina e Marcelo Sousa publicado no periódico Results Math em 2011 no qual eles mostram que existe uma família a um parâmetro de superfícies completas com curvatura extrínseca iguala uma constante negativa em um determinado espaço tridimensional conformemente plano.

Abstract

This work has as main reference the Surfaces of Rotation with Cons-tant extrinsic curvature in conformally flat 3-space by Armando V. Corro, Romildo Pina and Marcelo Sousa article published in the journal Math Results in 2011 in which they show that there is a family a parameter of complete surfaces with extrinsic curvature equal to a negative constant in give three-dimensional space corformaly plan.

Sumário

Resumo **v**

Abstract **vi**

1 Introdução **1**

2 Noções Preliminares **3**

2.1 Variedades 3

2.2 Conexões afins e Conexão Riemanniana 6

2.3 Curvaturas e a Segunda Forma Fundamental 10

2.4 Métricas Conformes 16

3 Superfícies de rotação com curvatura extrínseca constante em $\mathbb{E}_3$. **20**

3.1 Surperfícies em espaços conformemente plano 20

3.2 Superfícies de Rotação com Curvatura Extínseca constante em $\mathbb{E}_3$ 25

Referências Bibliográficas **37**

Capítulo 1

Introdução

As superfícies com curvatura Gaussiana constante no espaço tem sido estudadas por vários pesquisadores (ver [1],[2], [3], [5], [6],[13],[14]). Recentemente, o estudo de superfícies com curvatura extrínseca constante tem sido extensivamente incrementada, por exemplo em [8] os pesquisadores trabalham superfícies completas com curvatura extrínseca poisitiva em espaços produtos, e provaram que cada superfície completa conexa imersa com curvatura extrínseca positiva em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, é homeomorfa a uma esfera ou um plano, respectivamente, no último caso, foi estudado o comportamento dos fins.

O Seguinte teorema generaliza o conhecido Teorema de Hilbert.

Teorema 1. *(de Efimov)[9]: As superfícies* $(\sum, \sigma)$*, munido com uma métrica completa* $K < -\varepsilon < 0$ *não pode ser* C^2 *imersa isometricamente no espaço euclidiano.*

Schlenker [14] provou um teorema análogo ao de Efimov no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$, onde se mostra que não existe nenhuma superfície completa em $\mathbb{H}^3$ com curvatura Gaussiana $K \leqslant -1-\varepsilon < -1$. Temos que resultados semelhantes são válidas no $\mathbb{S}^3$ e no $\mathbb{H}^3_1$ A condição $K \leqslant -1-\varepsilon < -1$ para a curvatura Gaussiana garante que não existe qualquer superfície com curvatura extrínseca negativa em $\mathbb{H}^3$.

O estudo de superfícies em espaços que são conformes para o espaço euclidiano é natural, visto que incluem os espaços de curvatura constante $\mathbb{S}^3$ e $\mathbb{H}^3$. Então, é natural considerar superfícies em alguns espaços especiais com uma métrica conforme a métrica euclidiana. Neste trabalho, consideramos o espaço $\mathbb{E}_3 = (\mathbb{R}^3, g)$ munido de uma metrica

$$g := (g_{ij}) = \frac{1}{F^2}(\delta_{ij}),$$

onde $F(x) = e^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2}$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ em $\mathbb{R}^3$. Esta métrica particular aparece como uma solução de Equação de Einstein obtidas por Pina e Tenenblat [13], com um grande potencial de aplicações em física . O espaço ambiente $\mathbb{E}_3$ é completo, com curvatura seccional negativa. Como o espaço $\mathbb{E}_3$ é invariante sob as ações do grupo ortogonal, é natural estudar superfícies de rotação.

Dada uma superfície parametrizada regular iremos encontrar as curvaturas média, gussiana e extrínseca relativamente a métrica g. Considerando superfícies num espaço conforme ao euclidiano, relacionamos a curvatura extrínseca das superficíes com respeito à métrica euclidiana e a métrica conformemente plana. Faremos uso do seguinte Teorema da teoria de EDO para mostrar que existe uma família a um parâmetro de superfícies de rotação em $\mathbb{E}_3$, com curvatura extrínseca nula.

Teorema 2. *(Teorema de Picard) Seja* f *contínua e Lipschitziana com relação à segunda variável em* $\Omega = I_a \times B_b$*, onde* $I_a = \{t; |t - t_0| \leqslant a\}$*,* $B_b = \{x; |x - x_0| \leqslant b\}$*. Se* $|f| \leqslant M$ *em* Ω*, existe uma única solução de,*

$$x' = f(t, x), x(t_0) = x_0,$$

em I_α *onde* $\alpha = \min\{a, b/M\}$.

Capítulo 2

Noções Preliminares

Neste capítulo iremos estabelecer a notação a ser usada e recordar alguns conceitos e fatos básicos, necessários ao desenvolvimento dos capítulos seguintes. Sendo assim, a prova de alguns resultados não será feita, mas em todo o texto ficará clara a referência para obter tais justificativas.

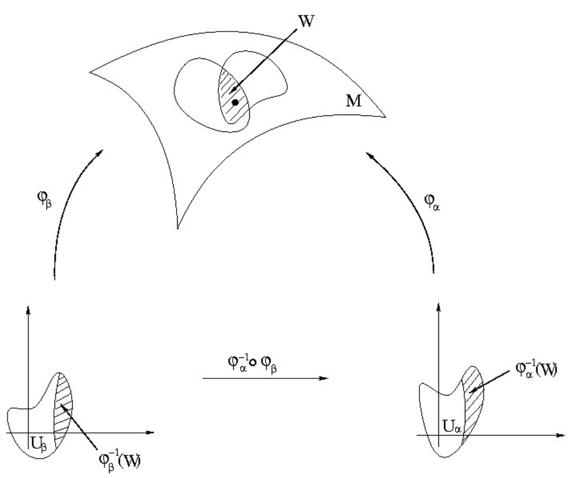
2.1 Variedades

Definição 1. *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas* $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ *de abertos* U_α *de* $\mathbb{R}^n$ *em* M *tais que:*

(i) $\bigcup_\alpha \varphi_\alpha(U_\alpha) = M$.

(ii)Para todo par α, β *com* $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$*, os conjuntos* $\varphi_\alpha^{-1}(W)$ *e* $\varphi_\beta^{-1}(W)$ *são abertos em* $\mathbb{R}^n$ *e as aplicações* $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ *são diferenciáveis.*

(iii) A família $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ *é máxima relativamente às condições (i) e (ii).*



Obs 1. *(1) Uma família* $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ *satisfazendo (i) e (ii) é chamada uma* ***estrutura diferenciável*** *em* M

(2) O par $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ *(ou aplicação* φ_α*) com* $p \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$ *é chamado uma parametrização (ou sistema local de coordenadas) de M em p;* $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ *é então chamada uma vizinhança coordenada em* p.

(3)Dada uma estrutura diferenciável em M, podemos completá-la a uma família máxima, agregando a ela todas as parametrizações que junto com alguma parametrização da estrutura satisfazem a condição (ii).

(4) Uma estrutura diferenciável em um conjunto M *induz de uma maneira natural uma topologia em* M*. Basta definir que* $A \subset M$ *é aberto de* M *se* $\varphi_\alpha^{-1}(A \cap \varphi_\alpha(U_\alpha))$ *é um aberto de* $\mathbb{R}^n$ *para todo* α*. Observe que a topologia é definida de tal modo que os conjuntos* $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ *são abertos e as aplicações* φ_α *são contínuas.*

Exemplo 2.1.1. *O espaço euclidiano* $\mathbb{R}^n$*, com a estrutura diferenciável dada pela identidade.*

Definição 2. *(Função Suave) Seja* M^n *uma variedade (suave) n-dimensional. Uma função* $f : U \subset M \to \mathbb{R}$*,* U *aberto em* M *é suave ou diferenciável de classe* C^∞ *se para cada* $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$*, com* $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ *e* $\varphi_\alpha(U_\alpha) \neq \emptyset$*, tivermos*

$$f \circ \varphi_\alpha : W \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \circ \varphi_\alpha \text{ de calsse } C^\infty,$$

com $W = \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap U) \neq \emptyset$ *e* $W \in \mathbb{R}^n$ *aberto. Indicaremos por* $C^\infty(M)$ *o anel das funções suaves de* M *em* $\mathbb{R}$.

Definição 3. *Sejam* M_1^n *e* M_2^m *variedades diferenciáveis.Uma aplicação* $f : M_1 \to M_2$ *é diferenciável em* $p \in M_1$ *se dada uma parametrização* $\psi_\beta : V \subset \mathbb{R}^m \to M_2$ *em* $f(p)$ *existe uma parametrização* $\varphi_\alpha : U \subset \mathbb{R}^n \to M_1$ *em* p *talque* $f(\varphi_\alpha(U)) \subset \psi_\beta(V)$ *e a aplicação*

$$\psi_\beta^{-1} \circ f \circ \varphi_\alpha : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

é diferenciável em $\varphi_\alpha^{-1}(p)$*. Dizemos que* f *é diferenciável em um aberto de* M_1 *se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.*

Definição 4. *Uma superfície parametrizada* $x : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *é uma aplicação deferenciável* x *de um conjunto aberto* $U \subset \mathbb{R}^2$ *em* $\mathbb{R}^3$*. O conjunto* $X(U)$ *é chamado traço de*

x. x *é regular se a diferencial* $dx_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *é injetiva para todo* $q \in U$ *(i.e. os vetores* $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}$ *são linearmente independentes para todo* $q \in U$*).*

Definição 5. *(Fibrado tangente) Seja* M^n *uma variedade diferenciável. O fribado tangente de* M *é o espaço* $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_P M\} = \bigcup_{p \in M} T_P M$*, onde* $\bigcup$ *é união disjunta.*

Obs 2. TM *possui estrutura de variedade diferenciável.*

Obs 3. $T_p M$ *é o espaço tangente de* M *em* p.

Definição 6. *(Campo de vetores diferenciável) Um campo de vetrores* X *em uma variedade diferenciável* M *é uma correspondência que a cada ponto* $p \in M$ *associa um vetor* $X(p) \in T_P M$*. Em termos de aplicações,* X *é uma aplicação de* M *no fibrado tangente* TM*. O campo é diferenciável se a aplicação* $X : M \to TM$ *é diferenciável.*
Considerando uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *é possível escrever*

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \ ,$$

onde cada $a_i : U \to \mathbb{R}$ *é uma função em* U *e* $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ *é a base do espaço tangente associada a* x, $i = 1, 2, ..., n$*. É claro que* X *é diferenciável se e só se as funções* a_i *são diferenciáveis para alguma parametrização.*

Indicamos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e por $C^\infty(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M.

Lema 1. *(Colchete de Lie) Sejam* $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$*. Então existe um único campo vetorial* $Z \in \mathfrak{X}(U)$ *tal que,* $\forall f \in C^\infty(M)$, $Zf = (XY - YX)f = X(Yf) - Y(Xf)$*.*

O campo vetrotial Z dado pelo lema é chamado o colchete de Lie de X e Y, e é denotado por $[X, Y] = XY - YX$ onde Z é diferenciável. A operação colchete possui as seguintes propriedades:

Proposição 1. *Se* X*,*Y *e* Z *são campos diferenciáveis em* M*,*a, b *são números reais,e* f, g *são funções diferenciáveis, então :*
(a) $[X, Y] = -[Y, X]$ *(anticomutatividade),*

(b) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ *(linearidade)*

(c) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ *(identidade de jacobi)*

(d) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$

Demonstração: Vide do Carmo [7], página 27. ∎

Definição 7. *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável* M *é uma correspondência que associa a cada* p *de* M *um produto interno* $\langle , \rangle_p$ *(isto é , uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente* T_pM*, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se* $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ *é um sistema de coordenadas locais em torno de* p*, com* $x(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = q \in x(U)$ *e* $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx_q(0, ..., 1, ..., 0)$*, então* $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle_q = g_{ij}(x_1, x_2, ..., x_n)$ *é uma função diferenciável em* U*.*

Obs 4. *Esta definição não depende da escolha do sistema de coordenadas.*

Definição 8. *Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma variedade Riemanniana.*

2.2 Conexões afins e Conexão Riemanniana

Definição 9. *Uma conexão afim* ∇ *em uma variedade diferenciável* M *é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $f, g \in D(M)$

Proposição 2. *Seja* M *uma variedade diferenciável com uma conexão afim* ∇*. Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial* V *ao longo da curva diferenciável* $c : I \to M$ *um outro campo vetorial* $\frac{DV}{dt}$ *ao longo de* c*, denominado derivada covariante de* V*, talque:*

a) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$

b) $\dfrac{D}{dt}(fV) = \dfrac{df}{dt}V + f\dfrac{DV}{dt}$, *onde* W *é um campo de vetores ao longo de* c *e* f *é uma função diferenciável em* I

c) Se V *é induzido por um campo de vetores* $Y \in \mathfrak{X}(M)$, *ou seja,* $V(t) = Y(c(t))$, *então* $\dfrac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$

Demonstração: Vide do Carmo [7]. ■

Definição 10. *Seja* M *uma variedade diferenciável com uma conexão afim* ∇ *e uma métrica Riemanniana* $\langle , \rangle$. *A conexão é dita compatível com a métrica* $\langle , \rangle$, *quando para toda curva diferenciável* c *e qualquer pares de campos de vetores paralelos* P *e* P' *ao longo de* c, *tivermos* $\langle P, P' \rangle = \text{constante}$.

Proposição 3. *Seja* M *uma variedade Riemanniana. Uma conexação* ∇ *em* M *é compatível com a métrica se e só se para todo par* V *e* W *de campos de vetores ao longo da curva diferenciável* $c : I \to M$ *tem-se*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \langle \frac{DV}{dt}, W \rangle + \langle V, \frac{DW}{dt} \rangle$$

com $t \in I$

Demonstração: Vide do Carmo [7]. ■

Corolário 1. *Uma conexão* ∇ *em uma veriedade Riemanniana* M *é compatível com a métrica se e só se*

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \tag{2.1}$$

com $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração: Suponha que ∇ é compátivel com a métrica. Seja $p \in M$ e seja $c : I \to M$ uma curva diferenciável com $c(t_0) = p$, $t_0 \in I$, e com $\dfrac{dc}{dt}(t_0) = X(p)$. Então

$$\begin{aligned} X(p)\langle X, Z \rangle &= \frac{d}{dt}\langle Y, Z \rangle(t_0) \\ &= \langle \frac{DY}{dt}, Z \rangle + \langle Y, \frac{DZ}{dt} \rangle \\ &= \langle \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_{\frac{dc}{dt}} Z \rangle \\ &= \langle \nabla_{X(p)} Y, Z \rangle_p + \langle Y, \nabla_{X(p)} Z \rangle \end{aligned}$$

como p é arbitrário, segue-se (2.1). A recíproca é obvia. ■

Definição 11. *Uma conexão afim* ∇ *em uma variedade diferenciável* M *é dita simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \tag{2.2}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

Obs 5. *Em um sistema de coordenadas* (U, x)*, o fato de* ∇ *ser simétrica implica que para todo* $i, j = 1, 2, ..., n$

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0$$

onde $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ *justificando assim o nome adotado.*

Teorema 3. *(Levi-Civita) Dada uma variedade Riemanniana* M*, existe uma única conexão afim* ∇ *em* M *satisfazendo as condições:*

a) ∇ *é simétrica.*

b) ∇ *é compatível com a métrica Riemanniana.*

Demonstração: Suponhamos inicialmente a existência da coneção ∇. Então

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \tag{2.3}$$

$$Y\langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle \tag{2.4}$$

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle. \tag{2.5}$$

asim somando (2.3) e (2.4) e subtraindo (2.5), teremos, usando a simetria de ∇, que

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \\ &+\langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle \\ &-\langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle \\ &= \langle \nabla_X Z - \nabla_Z X, Y\rangle + \langle \nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X\rangle \\ &+\langle \nabla_X Y - \nabla_Y X, Z\rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X\rangle \\ &= \langle [X, Z], Y\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle \\ &+2\langle Z, \nabla_Y X\rangle \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle Z, \nabla_Y X\rangle &= \frac{1}{2}\{X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ &-\langle [X, Z], Y\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle\}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Assim a expressão encontrada (2.6) mostra que ∇ está únivocamente determinado pela métrica $\langle , \rangle$. Assim caso exista, será única. Para verificar a existência, defina ∇ por (2.6). Assim é fácil verificar que ∇ está bem definida e que satisfaz às propriedades desejadas.■

Obs 6. *A conexão no teorema acima é chamada conexão de Levi-Civita(ou Riemanniana) de* M

Num sistema de coordenadas (U, x) podemos dizer que as funções Γ_{ij}^k definidas em U por $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ são os coeficientes da conexão ∇ em U ou ainda podemos dizer que são os símbolos de Christoffel da conexão. Por (2.6), notando que os colchetes de Lie são todos nulos, obtemos

$$\langle X_k, \nabla_{X_j} X_i \rangle = \frac{1}{2}\{X_i \langle X_j, X_k \rangle + X_j \langle X_k, X_i \rangle - X_k \langle X_i, X_j \rangle\}. \tag{2.7}$$

Observando as definições de métrica e os simbolos de Christoffel

$$g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle \quad , \nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k,$$

e substituindo em (2.7), temos

$$\langle X_k, \sum_l \Gamma_{ij}^l X_l \rangle = \frac{1}{2}\{X_i g_{jk} + X_j g_{ki} - X_k g_{ij}\}$$

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l \langle X_k, X_l \rangle = \frac{1}{2}\{\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}\}$$

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{kl} = \frac{1}{2}\{\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}\}$$

como a matriz (g_{km}) possui uma inversa (g^{km}), teremos

$$g^{km} \sum_l \Gamma_{ij}^l g_{kl} = \frac{1}{2}\{\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}\} g^{km}$$

$$\sum_{k,l} \Gamma_{ij}^l g_{kl} g^{km} = \frac{1}{2} \sum_k \{\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}\}$$

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l (\sum_k g_{kl} g^{km}) = \frac{1}{2} \sum_k \{\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}\}$$

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l (\delta_{lm}) = \frac{1}{2} \sum_k \{\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}\}$$

de onde temos,

$$\Gamma_{ij}^{m} = \frac{1}{2}\sum_{k}\{\frac{\partial}{\partial_{x_i}}g_{jk} + \frac{\partial}{\partial_{x_j}}g_{ki} - \frac{\partial}{\partial_{x_k}}g_{ij}\}g^{km}. \tag{2.8}$$

A equação (2.8) é a expressão clássica dos símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana em termos dos g_{ij} dados pela métrica.

2.3 Curvaturas e a Segunda Forma Fundamental

Definição 12. *Dada* M *uma variedade Riemanniana, uma correspondência que associa a cada par* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *uma aplicação* $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ *dada por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z$$

$\forall Z \in \mathfrak{X}(M)$*, onde* ∇ *é a conexão Riemanniana de* M*, chama-se curvatura de* M *e* $\mathfrak{X}(M)$ *o conjunto dos campos de vetores de classe* C^∞ *em* M*.*

Proposição 4. *A curvatura* R *de uma variedade Riemanniana* M *possui as seguintes propriedades:*

a) R *é bilinear em* $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$*, isto é,*

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1)$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2)$$

$\forall f, g \in D(M)$

b) $R(X,Y)$ *é linear em* $\mathfrak{X}(M)$*, isto é,*

$$R(X,Y)(Z+W) = R(X,Y)Z + R(X,Y)W$$

$$R(X,Y)fZ = fR(X,Y)Z$$

$f \in D(M)$, $Z, W \in \mathfrak{X}(M)$

Demonstração: Vide do Carmo [7], pagina 90. ■

Proposição 5. *(identidade de Biachi).*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$$

Demonstração: Vide do Carmo, pagina 91. ■

Proposição 6. *a)* $(X, Y, Z, T) + (Y, Z, X, T) + (Z, X, Y, T) = 0$

b) $(X, Y, Z, T) = -(Y, X, Z, T)$

c) $(X, Y, Z, T) = -(X, Y, T, Z)$

d) $(X, Y, Z, T) = (Z, T, X, Y)$

Demonstração: Vide do Carmo [7], pagina 91. ■

Considere um sistema de coordenadas (U, x) em torno de um ponto $p \in M$. Indicaremos $\frac{\partial}{\partial_{x_i}} = X_i$. Ponhamos

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_l R^l_{ijk} X_l,$$

asim temos que R^l_{ijk} são as componentes da curvatura R em (U, x). Tomando

$$X = \sum_i u^i X_i, \quad Y = \sum_j v^j X_j, \quad Z = \sum_k w^k X_k,$$

usando a linearidade de R, temos

$$R(X, Y)Z = \sum_{i,j,k,l} R^l_{ijk} u^i v^j w^k X_l,$$

com isso obteremos R^l_{ijk} em termos dos coeficientes de Γ^k_{ij} da conexão Riemanniana,

$$\begin{aligned} R(X_i, X_j)X_k &= \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_k - \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_k \\ &= \nabla_{X_j}(\sum_l \Gamma^l_{ik} X_l) - \nabla_{X_i}(\sum_l \Gamma^l_{jk} X_l). \end{aligned}$$

Logo

$$R^s_{ijk} = \sum_l \Gamma^l_{ik} \Gamma^s_{jl} - \sum_l \Gamma^l_{jk} \Gamma^s_{il} + \frac{\partial}{\partial_{x_j}} \Gamma^s_{ik} - \frac{\partial}{\partial_{x_i}} \Gamma^s_{jk}.$$

O conceito a seguir é uma generalização de curvatura gaussiana em superficies. Dado $p \in M$ e $\sigma \subset T_p M$ um subespaço bi-dimensional, denominamos curvatura seccional de σ em p, o número real

$$K(\sigma) = \frac{\langle R(u, v)u, v \rangle}{\|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2}$$

onde $\{u, v\}$ é uma base qualquer de σ. E temos ainda que a expressão acima não depende da escolha dos vetores u e v.

Lema 2. *Sejam* M *uma variedade Riemanniana e* p *um ponto de* M. *Defina uma aplicação trilinear* $R' : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$ *por*

$$\langle R'(X, Y, W), Z\rangle = \langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle - \langle Y, W\rangle\langle X, Z\rangle$$

para todo $X, Y, W, Z \in T_pM$. *Então* M *tem curvatura seccional constante igual a* K_0 *se e só se* $R = K_0R'$ *, onde* R *é a curvatura de* M.

Seja $f : M \to \overline{M}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M de dimensão n em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$ de dimensão $K = n + m$. A métrica Riemanniana de $\overline{M}$ induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em M. Dados $v_1, v_2 \in T_pM$, define-se $\langle v_1, v_2\rangle = \langle df_p(v_1), df_p(v_2)\rangle$. Neste caso, f passa a ser uma imersão isométrica de M em $\overline{M}$. Sendo f uma imersão, temos que $f(M)$ é uma subvariedade imersa em $\overline{M}$ de dimensão n. Para simplificar a notação identificaremos U aberto de M com $f(U)$ e cada vetor $v \in T_pM$, $p \in M$, com $df_pv \in T_{f(p)}\overline{M}$.
Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$.
Denotaremos por $\overline{\nabla}$ a conexão de $\overline{M}$. Se X e Y são campos locais de vetores em M, e $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ são extensões locais a $\bar{M}$, definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\top},$$

a conexão em M.

Definição 13. *Sejam* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *definidos localmente, então*

$$\alpha(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$$

é chamada de segunda forma fundamental.

Note que $\alpha(X, Y)$ está bem definido pois não depende das extensões $\overline{X}$ e $\overline{Y}$. De fato, temos que se $\overline{X}_1$ é uma extensão de X,

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y) - (\overline{\nabla}_{\overline{X}_1}\overline{Y} - \nabla_X Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}-\overline{X}_1}\overline{Y},$$

onde $\overline{\nabla}_{\overline{X}-\overline{X}_1} = 0$ em M, pois $\overline{X} - \overline{X}_1 = 0$. Se Y_1 é uma outra conexão de Y,

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y) - (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}_1 - \nabla_X Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}(\overline{Y} - \overline{Y}_1) = 0,$$

pois $\overline{Y} - \overline{Y}_1 = 0$ em M.

Seja $p \in M$ e $\eta \in (t_p M)^{\perp}$. A aplicação $H_p : t_p M \times T_p M \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x, y) = \langle \alpha(x, y), \eta \rangle, x, y \in T_p M,$$

é uma forma bililear simétrica.

Definição 14. *Aforma quadrática* II_η *definida em* $T_p M$ *por*

$$II_\eta = H_\eta(x, x),$$

é chamada segunda forma fundamental de f *em* p *segundo o vetor normal* η.

Obs 7. *À aplicação bilinear* H_η *fica associada uma aplicação linear auto-adjunta* S_η : $T_p M \to T_p M$ *por*

$$\langle S_\eta, y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle \alpha(x, y)\eta, \rangle.$$

Relacionaremos agora a curvatura de M com a curvatura de $\overline{M}$ e as segundas formas fundamentais. Se $x, y \in T_p M \subset T_p \overline{M}$, são linearmente independentes, indicaremos por $K(x, y)$ e $\overline{K}(x, y)$ as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$. Respectivamente, no plano gerado por x e y.

Teorema 4. *(Gauss) Sejam* $p \in M$ *e* x, y *vetores ortonormais de* $T_p M$. *Então*

$$K(x, y) - \overline{K}(x, y) = \langle \alpha(x, y), \alpha(x, y) \rangle - |\alpha(x, y)|^2. \tag{2.9}$$

Demonstração: Vide do Carmo [7]. ■

Obs 8. *No caso de hipersuperfícies* $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}$, *a fómula de Gauss (2.9) admite uma expressão mais simples. Sejam* $p \in M$ *e* $\eta \in (T_p M)^{\perp}$. *Seja* $\{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$ *uma base ortonormal de* $T_p M$ *para a qual* $S_\eta = S$ *é diagonal, isto é,* $S(e_i) = \lambda_i e_i$, $i = 1, 2, ..., n$, *onde* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *são os valores próprios de* S. *Então* $H(e_i, e_j) = \lambda_i$ *e* $H(e_i, e_j) = 0$ *se* $i \neq j$. *Portanto (2.9) se escreve como,*

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j \tag{2.10}$$

Definição 15. *A curvatura extrínseca é dada pela diferença entre a curvatura seccional do ambiente e a curvatura intríseca da superfície.*

Proposição 7. *As seguintes equações se verificam:*

a) Equação de Gauss

$$\begin{aligned}\langle \overline{R}(X,Y)Z,T\rangle &= \langle R(X,Y)Z,T\rangle \\ &-\langle \alpha(Y,T),\alpha(X,Z)\rangle + \langle \alpha(X,T),\alpha(Y,Z)\rangle.\end{aligned}$$

b) Equação de Ricci

$$\langle \overline{R}(X,Y)\eta,\zeta\rangle - \langle R^{\perp}(X,Y)\eta,\zeta\rangle = \langle [S_\eta,S_\zeta]X,Y\rangle,$$

onde $[S_\eta,S_\zeta]$ *indica o operador* $S_\eta\circ S_\zeta - S_\zeta\circ S_\eta$.

Demostração:

(a) Como $\overline{\nabla}_XY = \nabla_XY + \alpha(X,Y)$,temos que

$$\begin{aligned}\langle \overline{R}(X,Y)Z,T\rangle &= \langle \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_XZ - \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_YZ + \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z,T\rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_Y(\nabla_XZ+\alpha(X,Z) - \overline{\nabla}_X(\nabla_YZ+\alpha(Y,Z)) + \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z,T\rangle \\ &= \langle \nabla_Y\nabla_XZ - \nabla_X\nabla_YZ + \nabla_{[X,Y]}Z,T\rangle - \langle \alpha(X,Z),\overline{\nabla}_YT\rangle + \langle \alpha(Y,Z),\overline{\nabla}_XT\rangle \\ &= \langle R(X,Y)Z,T\rangle - \langle \alpha(X,Z),\nabla_YT+\alpha(Y,T)\rangle + \langle \alpha(Y,Z),\nabla_XT+\alpha(X,T)\rangle \\ &= \langle R(X,Y)Z,T\rangle - \langle \alpha(X,Z),\alpha(Y,T)\rangle + \langle \alpha(Y,Z),\alpha(X,T)\rangle.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y)\eta &= \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X\eta + \overline{\nabla}_{[X,Y]\eta} \\ &= \overline{\nabla}_Y(\nabla^{\perp}_X\eta - S_\eta X) - \overline{\nabla}_X(\nabla^{\perp}_Y\eta - S_\eta Y) + \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\eta - S_\eta[X,Y] \\ &= \overline{\nabla}_Y\nabla^{\perp}_X\eta - \overline{\nabla}_YS_\eta X - \overline{\nabla}_X\nabla^{\perp}_Y\eta + \overline{\nabla}_XS^{\perp}_\eta Y + \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\eta - S_\eta[X,Y] \\ &= \nabla^{\perp}_Y\nabla^{\perp}_X\eta + (\overline{\nabla}_Y\nabla^{\perp}_X\eta)^{\perp} - \overline{\nabla}_YS_\eta X - \nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y\eta - (\overline{\nabla}_X\nabla^{\perp}_Y\eta)\eta + \overline{\nabla}_XS_\eta Y + \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\eta \\ &-S_\eta[X,Y] \\ &= R^{\perp}(X,Y)\eta + S_{\nabla^{\perp}_X\eta}Y - \nabla_YS_\eta X - \alpha(Y,S_\eta X) - S_{\nabla^{\perp}_Y\eta} + \nabla_XS_\eta Y + \alpha(X,S_\eta Y) - S_\eta[X,Y].\end{aligned}$$

Daí fazendo o produto interno com ζ e notando que

$$\langle \alpha(X,Y),\eta\rangle = \langle S_\eta X,Y\rangle,$$

obtemos

$$\begin{aligned}\langle \overline{R}(X,Y)\eta,\zeta\rangle &= \langle R^{\perp}(X,Y)\eta,\zeta\rangle - \langle \alpha(S_\eta X, Y),\zeta\rangle + \langle \alpha(X, S_\eta Y),\zeta\rangle\\ &= \langle R^{\perp}(X,Y)\eta,\zeta\rangle - \langle S_\zeta S_\eta X, Y\langle + \langle S_\eta S_\zeta X, Y\rangle\\ &= \langle R^{\perp}(X,Y)\eta,\zeta\rangle - \langle (S_\eta S_\zeta - S_\zeta S_\eta)X, Y\rangle\\ &= \langle R^{\perp}(X,Y)\eta,\zeta\rangle - \langle [S_\eta, S_\zeta]X, Y\rangle.\end{aligned}$$

Assim concluimos a proposição. ■

Definição 16. *Uma variedade Riemanniana* M *é (geodesicamente) completa se para todo* $p \in M$*, a aplicação exponencial,* $\exp_p$*, está definida para todo* $v \in T_pM$*, ou seja, se as geodésicas* $\gamma(t)$ *que partem de* p *estão definidas para todos os valores do parâmetro* $t \in \mathbb{R}$*.*

Definição 17. *A distância* $d(p,q)$ *é definida como o ínfimo dos comprimentos de todas as curvas* $f_{p,q}$*, onde* $f_{p,q}$ *é uma curva diferenciável por partes ligando* p *a* q*.*

Teorema 5. *(Hopf e Rinow). Seja* M *uma variedade Riemanniana e seja* $p \in M$*. As seguintes afirmações são equivalentes :*

a) $\exp_p$ *está bem definida em todo o* T_pM*.*

b) Os limitados e fechados de M *são compactos.*

c) M *é completa como espaço métrico.*

d) M *é geodesicamente completa.*

e) Existe uma sequência de compactos $K_n \subset M$*,* $K_n \subset K_{n+1}$ *e* $\bigcup_n K_n = M$ *tais que se* $q_n \notin K_n$ *então* $d(p,q_n) \to \infty$*.*

f) Para todo $q \in M$ *existe uma geodésica* γ *ligando* p *a* q *com* $l(q) = d(p,q)$*.*

Definição 18. *Uma curva divergente em uma variedade Riemanniana* M *é uma aplicação diferenciável* $\beta : [0,\infty) \to M$ *tal que para todo compacto* $K \subset M$ *existe um* $t_0 \in (0,\infty)$ *com* $\beta(t) \notin K$ *para* $t > t_0$*(isto é,* β *¨sai¨ de qualquer compacto de M). O comprimeto de uma curva divergente é dado por*

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \mid \beta'(t) \mid dt. \tag{2.11}$$

Proposição 8. *Uma variedade Riemanniana* M *é completa se, e somente se, o comprimento de qualquer curva divergente é ilimitado.*

Demonstração De fato consideremos M uma variedade Riemanniana completa. Assim, pelo teorema de Hopf-Rinow existe uma sequência de compactos $K_n \subset K_{n+1}$ onde $\bigcup_n K_n = M$, tais que $q_n \notin K_n$ então $d(p,q_n) \to \infty$ para todo $p \in M$ fixado. Seja

$\beta : [0, \infty) \to M$ (Completa) curva divergente em M, tal que $\beta(t_n) = q_n$, ou seja, temos que $d(p, q_n) = d(p, \beta(t_n))$. Daí,

$$d(p, q_n) \leqslant \int_0^t \mid \beta'(t) \mid dt$$

$$\lim_{t\to\infty} d(p, q_n) \leqslant \lim_{t\to\infty} \int_0^t \mid \beta'(t) \mid dt$$

Como $d(p, q_n) \to \infty$, $l(\beta) = \lim\limits_{t\to\infty} \int_0^t \mid \beta'(t) \mid dt \to \infty$, ou seja, temos que a curva β é divergente e tem o comprimento ilimitado.

Reciprocamente, suponha M uma variedade Riemanniana não completa. Assim pelo teorema de Hopf-Rinow vai existir uma geodésica normalizada $\beta : [0, b) \to M$ que não se estende, ou seja, está definida para $t < b$ e não definida para b, com $l(\beta) = b$.

Afirmação: β sai de qualquer compacto.

De fato, caso contrário, existiria um compacto K tal que, para todo t_0 e algum $t > t_0$, $\beta(t) \in K$. Assim existe uma sequência $t_n \to b$, tal que $t_n < b$ e $\beta(t_n) \in K$ onde por construção podemos supor a menos de uma subsequêcia, que $\beta(t_0) \to q_0$, $q_0 \in K$. Seja (W, δ) uma vizinhança totalmente normal de q_0. Assim escolha n_1 tal que se $n, m > n_1$, então $\mid t_m - t_n \mid < \delta$ e $\beta(t_n)$, $\beta(t_m)$ pertencem a W. Logo existe uma única geodésica γ de comprimento menor do que δ ligando $\beta(t_n)$ a $\beta(t_m)$. É claro que γ coincide com β, onde β está definida. Como $\exp_{\beta(t_n)}$ é um difeomorfismo em $B_\delta(0)$ e $\exp_{\beta(t_n)}(B_\delta(0)) \supset W$, γ estende β além de q_0, o que é uma contradição pois por hipótese β não se estende.

Agora seja $\tilde{\beta} : [0, \infty) \to M$ uma reparametrização de β. Temos assim que $\tilde{\beta}$ é divergente e $l(\tilde{\beta}) = b$ pois o comprimento de arco é invariante por mudança de parâmetro. ■

2.4 Métricas Conformes

Definição 19. *Duas métricas* $\langle , \rangle$ *e* $\langle\langle , \rangle\rangle$ *em uma veriedade diferenciável* M *são conformes se existe uma função diferenciável* $f : M \to \mathbb{R}$*, positiva, tal que para todo* $p \in M$ *e todo* $u, v \in T_p(M)$ *tenhamos*

$$\langle u, v\rangle_p = f(p)\langle\langle u, v\rangle\rangle_p$$

.

Proposição 9. *(Conexões de métricas conformes) Seja* M *uma variedade diferenciável. Duas métricas Riemannianas* g *e* $\bar{g}$ *em* M *são conformes se existe uma função positiva* $\mu : M \to \mathbb{R}$ *tal que* $\bar{g}(X,Y) = \mu g(X,Y)$*, para todo par* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$*. Sejam* ∇ *e* $\bar{\nabla}$ *as coneções Riemannianas de* g *e* $\bar{g}$*, respectivamente. Então*

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + S(X,Y) \tag{2.12}$$

onde $S(X,Y) = \dfrac{1}{2\mu}\{(X\mu)Y + (Y\mu)X - g(X,Y)\mathrm{grad}\mu\}$ *e* $\mathrm{grad}\mu$ *é calculado na métrica* g *isto é,* $X(\mu) = g(X, \mathrm{grad}\mu)$*.*

Demonstração: Usando (2.6) temos que

$$\begin{aligned}
\bar{g}(Z, \bar{\nabla}_X Y) &= \frac{1}{2}\{X\bar{g}(Y,Z) + Y\bar{g}(Z,X) - Z\bar{g}(X,Y) \\
&-\bar{g}([X,Z],Y) - \bar{g}([Y,Z],X) - \bar{g}([X,Y],Z)\} \\
&\frac{1}{2}\{X(\mu g(Y,Z)) + Y(\mu g(Z,X)) - Z(\mu g(X,Y)) \\
&-\mu g([X,Z],Y) - \mu g([Y,Z],X) - \mu g([X,Y],Z)\}.
\end{aligned}$$

Asim segue que

$$\begin{aligned}
\mu g(Z, \bar{\nabla}_X Y) &= \frac{1}{2}\{X(\mu)g(Y,Z) + \mu X g(Y,Z) + Y(\mu)g(Z,X) \\
&+\mu Y g(X,Y) - Z(\mu)g(X,Y) - \mu Z g(X,Y) \\
&-\mu g([X,Z],Y) - \mu g([Y,Z],X) - \mu g([X,Y],Z)\} \\
&= \frac{\mu}{2}\{Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X) - g([X,Y],Z)\} \\
&+\frac{1}{2}\{X(\mu)g(Y,Z) + Y(\mu)g(Z,X) - Z(\mu)g(X,Y)\} \\
&= \mu g(Z, \nabla_X Y) + \frac{1}{2}\{(X(\mu)Y, Z) + (Y(\mu)X, Z) - g(\mathrm{grad}\mu, Z)g(X,Y)\} \\
&= \mu g(\nabla_X Y, Z) + \frac{1}{2}g(X(\mu)Y + Y(\mu)X - \mathrm{grad}\mu\ g(X,Y), Z)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mu g(\bar{\nabla}_X Y, Z) = \mu g(\nabla_X Y, Z) + \frac{1}{2}g(X(\mu)Y + Y(\mu)X - \mathrm{grad}\mu\ g(X,Y), Z)$$

$$g(\bar{\nabla}_X Y, Z) = g(\nabla_X Y + S(X,Y), Z)$$

De onde segue (2.12). ■

Considere em $\mathbb{H}^n$ a métrica

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{F^2}, \tag{2.13}$$

onde F é uma função positiva difereciável em $\mathbb{R}^n$, temos que esta métrica é conforme a métrica usual do $\mathbb{R}^n$. Seja $g^{ij} = F^2\delta_{ij}$ a matriz inversa de g_{ij} e considere $\log F = f$. Nestas condições indicando $\frac{\partial}{\partial_{x_j}} = f_j$, então

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial_{x_j}} = -\delta_{ik}\frac{2}{F^3}F_j = -2\frac{\delta_{ik}}{F^2}f_j.$$

Calculando agora os simbolos de Christoffel temos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2}\sum_m\{\frac{\partial}{\partial_{x_i}}g_{jm} + \frac{\partial}{\partial_{x_j}}g_{mi} - \frac{\partial}{\partial_{x_m}}g_{ij}\}g^{mk} \\
&= \frac{1}{2}\{\frac{\partial}{\partial_{x_i}}g_{jk} + \frac{\partial}{\partial_{x_j}}g_{ki} - \frac{\partial}{\partial_{x_k}}g_{ij}\}F^2 \\
&= \frac{1}{2}\{-2\frac{\delta_{jk}}{F^2}f_i - 2\frac{\delta_{ki}}{F^2}f_j + 2\frac{\delta_{ij}}{F^2}f_k\}F^2 \\
&= -\delta_{jk}f_i - \delta_{ki}f_j + \delta_{ij}f_k.
\end{aligned}$$

De onde concluimos que se os índices são todos distintos, então $\Gamma_{ij}^k = 0$ e se apenas dois índices iguais, temos

$\Gamma_{ij}^i = -f_j, \quad \Gamma_{ii}^j = f_j, \quad \Gamma_{ij}^j = -f_i, \quad \Gamma_{ii}^i = -f_i$

Lema 3. *A curvatura seccional* $K_{ij} = K(\frac{\partial}{x_i}, \frac{\partial}{x_j})$ *é dada por*

$$K_{ij} = (-\sum_l f_l^2 + f_i^2 + f_j^2 + f_{ii} + f_{jj})F^2 \tag{2.14}$$

Demonstração: De fato usando (2.13) temos,

$$\begin{aligned}
R_{ijij} &= \sum_l R_{iji}^l g_{lj} = R_{iji}^j g_{jj} = R_{iji}^j \frac{1}{F^2} \\
&= \frac{1}{F^2}\{\sum_l \Gamma_{ii}^l \Gamma_{jl}^j - \sum_l \Gamma_{ji}^l \Gamma_{il}^j + \frac{\partial}{\partial_{x_J}}\Gamma_{ii}^j - \frac{\partial}{\partial_{x_i}}\Gamma_{ji}^j\}.
\end{aligned}$$

Agora como $\frac{\partial}{\partial_{x_j}}\Gamma_{ii}^j = f_{jj}$ e $\frac{\partial}{\partial_{x_i}}\Gamma_{ji}^j = -f_{ii}$, teremos

$$\begin{aligned}
F^2 R_{ijij} &= -\sum_{l\neq i, l\neq j} f_l f_l + f_i^2 - f_j^2 - f_i^2 + f_j^2 + f_{jj} + f_{ii} \\
&= -\sum_l f_l^2 + f_i^2 + f_j^2 + f_{ii} + f_{jj}.
\end{aligned}$$

Assim temos que no plano gerado por $\frac{\partial}{\partial_{x_i}}, \frac{\partial}{\partial_{x_j}}$(note que $\frac{\partial}{\partial_{x_i}}, \frac{\partial}{\partial_{x_j}}$ são ortogonais)a curvatura seccional é dada por

$$
\begin{aligned}
K_{ij} = \frac{R_{ijij}}{g_{ii}g_{jj}} &= \frac{(-\sum\limits_{l} f_l^2 + f_i^2 + f_j^2 + f_{ii} + f_{jj})F^{-2}}{\frac{1}{F^2}\frac{1}{F^2}} \\
&= (-\sum_{l} f_l^2 + f_i^2 + f_j^2 + f_{ii} + f_{jj})F^{-2}F^4 \\
&= (-\sum_{l} f_l^2 + f_i^2 + f_j^2 + f_{ii} + f_{jj})F^2.
\end{aligned}
$$

■

Capítulo 3

Superfícies de rotação com curvatura extrínseca constante em $\mathbb{E}_3$.

Neste capítulo iremos trabalhar nossos principais resultados. Vamos considerar superfícies em um espaço conforme ao espaço euclidiano, e nos relacionamos com a curvatura extrínseca das superfícies com respeito à métrica euclidiana e a métrica conformemente plana.

3.1 Surperfícies em espaços conformemente plano

Lema 4. *Seja* $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$, *o espaço vetorial tridimensional com a métrica euclidiana canônica, e* $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle_g)$, *o espaço tridimensional com a métrica que é conforme à métrica euclidiana. As componentes das métricas são dadas por,*

$$g_{ij}(x) = \frac{\delta_{ij}}{F^2(x)}, \tag{3.1}$$

com $x = (x_1, x_2, x_3)$, $1 \leqslant i, j \leqslant 3$, *onde* $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ *é uma função diferenciável,* δ_{ij} *é o delta de Kronecker . Se* F *é limitada então* $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle_g)$ *é uma variedade Riemanniana completa.*

Demonstração: Seja $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ uma curva divergente em $\mathbb{R}^3$, note que $g_{11} = g_{22} = \dfrac{1}{F^2}$ e $g_{12} = g_{21} = 0$ então

$$g_{(x,y,z)} = ((u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3)) = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{F^2}.$$

Agora supondo sem perda de generalidade, que α' seja parametrizada pelo comprimento de arco no sentido euclidiano temos,

$$|\alpha'(t)| = \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}}{F} = \frac{1}{F}.$$

Como F é limitado, existe c tal que $|F| \leqslant c$ onde $\frac{1}{F} \geqslant \frac{1}{c}$ (F é positiva) logo temos que,

$$\int_0^1 |\alpha'(t)|dt = \int_0^t \frac{1}{F}dt \geqslant \frac{t}{c}.$$

Fazendo $t \to \infty$ na desigualdade acima temos que o comprimento da curva divergente α é limitado, pela Proposiçao 8, $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle_g)$ é uma variedade Riemanniana completa. ■

Considerando a conexão de Levi Civita $\bar{\nabla}$ de $(\mathbb{R}^3), \langle , \rangle_g)$ (ou seja é simétrica e compatível com a métrica)a base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ do $\mathbb{R}^3$ com $\frac{\partial}{\partial x_i} = e_i$, considerando o sistema de coordenada da identidade, nos temos,

$$\bar{\nabla}_{e_i}^{e_j} = \sum_{k=1}^{3} \Gamma_{ij}^k e_k \tag{3.2}$$

e $\bar{\nabla}_{e_i}^{e_j} = \bar{\nabla}_{e_j}^{e_i}$ (simetria).

Como, na equação (3.1) $g_{ij} = 0$ para $i \neq j$;

Considerando a métrica dada por (3.1) podemos escrever $(g^{ij}) = (F^2\delta_{ij})$ para indicar a matriz inversa de g_{ij} e consideremos $\log F = f$. Asim, nessas condições, temos, indicando $F_{,j} = \frac{\partial}{\partial_{x_j}}$ como a derivada parcial de F com respeito a x_j que os simbolos de Christoffel são dados por:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2}\sum_m \{\frac{\partial}{\partial_{x_i}} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial_{x_j}} g_{mi} - \frac{\partial}{\partial_{x_m}} g_{ij}\} g^{mk} \\
&= \frac{1}{2}\{\frac{\partial}{\partial_{x_i}} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial_{x_j}} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial_{x_k}} g_{ij}\} g^{kk} \\
&= \frac{1}{2}\{\frac{\partial}{\partial_{x_i}} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial_{x_j}} g_{ki} + \frac{\partial}{\partial_{x_k}} g_{ij}\} F^2\delta_{kk} \\
&= -\delta_{jk}\frac{F_{,i}}{F} - \delta_{ki}\frac{F_{,j}}{F} + \delta_{ij}\frac{F_{,k}}{F}.
\end{aligned}$$

Assim, teremos

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{ij}^k = 0, \quad i \neq j \neq k \neq i \\
&\Gamma_{ii}^j = \frac{F_{,j}}{F}, \qquad \forall i \neq j \qquad . \\
&\Gamma_{ij}^i = \frac{-F_{,j}}{F}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant 3
\end{aligned} \tag{3.3}$$

No teorema a seguir, iremos considerar uma superfície parametrizada regular em $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle_g)$ e calcularemos as curvaturas gaussiana, média e extrínseca respectivamente, com respeito a métrica $\langle , \rangle_g$.

Teorema 6. *Seja* $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *uma superfície parametrizada regular. Considere* $X(U)$ *como uma superfície em* $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$ *com a métrica euclidiana, seja* N *a aplicação* *normal de gauss, λ_i as curvaturas principais, H e K curvaturas médias e gaussiana, respectivamente. Analogamente, considere $X(U)$ como uma superfície em $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle_g)$ com um fator conforme F^{-2}, seja $\tilde{\lambda_i}$ as curvaturas principais, $\tilde{H}$ e $\tilde{K_E}$ as curvaturas média e extrínseca respectivamente, então*

$$\tilde{\lambda_i} = F\lambda_i - \langle N, \mathrm{grad}F\rangle$$

$$\tilde{H} = FH - \langle N, \mathrm{grad}F\rangle$$

$$\tilde{K_E} = F^2K - 2HF\langle N, \mathrm{grad}F\rangle + \langle N, \mathrm{grad}F\rangle^2$$

onde F denota o valor de F em $X(u,v)$, $(u,v) \in U$.

Demostração: Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular em $\mathbb{R}^3$ dada por,

$$X(U) = \sum_{j=1}^{3} x^j(u)e_j$$

onde $u = (u_1, u_2) \in U$. Seja N a aplicação normal de Gauss de X em $\mathbb{R}^3$ com métrica euclidiana

$$N(U) = \sum_{j=1}^{3} N^j(u)e_j,$$

e seja $\tilde{N}$ a aplicação normal de Gauss de X em $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle_g)$. Então $\tilde{N}(u) = F(u)N(u)$.
Usando as propriedades da conexão $\bar{\nabla}$ em $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle_g)$ temos
$\bar{\nabla}_{X_{,i}}\tilde{N} = \bar{\nabla}_{X_{,i}}FN = X_{,i}(F)N + F\bar{\nabla}_{X_{,i}}N \ \forall\ 1 \leqslant i \leqslant 3$
onde $X_{,i} = \dfrac{\partial X}{\partial x_i}$ assim temos,

$$\bar{\nabla}_{X_{,i}}\tilde{N} = X_{,i}(F)N + F(\bar{\nabla}_{X_{,i}}N). \tag{3.4}$$

Agora, usando a conexão (3.2) de Levi-Civita $\bar{\nabla}$ de $(\mathbb{R}^3, <, >_g)$ temos,

$$
\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{X_{,i}} N &= \bar{\nabla}_{X_{,i}}(\sum_{k=1}^{3} N^k e_k)\\
&= \sum_{k=1}^{3} \bar{\nabla}_{X_{,i}} N^k e_k\\
&= \sum_{k=1}^{3} [N^k_{,i} e_k + N^k \bar{\nabla}_{X_{,i}} e_k]\\
&= \sum_{k=1}^{3} [N^k_{,i} e_k + N^k \bar{\nabla}_{\sum_{j=1}^{3} X^j_{,i} e_j} e_k]\\
&= \sum_{k=1}^{3} N^k_{,i} e_k + \sum_{j,k=1}^{3} N^k X^j_{,i} \bar{\nabla}^{e_k}_{e_j}\\
&= N_{,i} + \sum_{j,k=1}^{3} N^k X^j_{,i} \sum_{s=1}^{3} \Gamma^s_{jk} e_s\\
&= N_{,i} + \sum_{j,k,s=1}^{3} N^k X^j_{,i} \Gamma^s_{jk} e_s\\
&= N_{,i} + \sum_{j\neq k} N^k X^j_{,i} \Gamma^j_{jk} e_j + \sum_{j\neq k} N^k X^j_{,i} \Gamma^k_{jk} e_k + \sum_{j,s} N^j X^j_{,i} \Gamma^s_{jj} e_s\\
&= N_{,i} + \sum_{j\neq k} N^k X^j_{,i} \Gamma^j_{jk} e_j + \sum_{j\neq k} N^k X^j_{,i} \Gamma^k_{jk} e_k + \sum_{j\neq s} N^j X^j_{,i} \Gamma^s_{jj} e_s + \sum_{j=1}^{3} N^j X^j_{,i} \Gamma^j_{jj} e_j.
\end{aligned}
$$

Agora, substituindo os simbolos de christoffel obtidos em (3.3) obteremos,

$$
\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{X_{,i}} N &= N_{,i} + \sum_{j\neq k} N^k X^j_{,i} (\frac{-F_{,k}}{F}) e_j + \sum_{j\neq k} N^k X^j_{,i} (\frac{-F_{,j}}{F}) e_k\\
&+ \sum_{j\neq s} N^j X^j_{,i} (\frac{F_{,s}}{F}) e_s + \sum_{j=1} N^j X^j_{,i} (\frac{-F_{,j}}{F}) e_j\\
&= N_{,i} - \sum_{j,k} N^k X^j_{,i} (\frac{F_{,k}}{F}) e_j - \sum_{j\neq k} N^k X^j_{,i} (\frac{F_{,j}}{F}) e_k - \sum_{s} N^s X^s_{,i} (\frac{F_{,s}}{F}) e_s\\
&= N_{,i} - \sum_{j,k} N^k X^j_{,i} (\frac{F_{,k}}{F}) e_j - \sum_{j,k} N^k X^j_{,i} (\frac{F_{,j}}{F}) e_k\\
&= N_{,i} - \sum_{k=1}^{3} N^k (\frac{F_{,k}}{F}) \sum_{j=1}^{3} X^j_{,i} e_j - \sum_{j=1}^{3} X^j_{,i} (\frac{F_{,j}}{F}) \sum_{k=1}^{3} N^k e_k\\
&= N_{,i} - [\sum_{k=1}^{3} N^k (\frac{F_{,k}}{F})] X_{,i} - [\sum_{j=1}^{3} X^j_{,i} (\frac{F_{,j}}{F})] N.
\end{aligned}
$$

Substituindo o resultado em (3.4), temos

$$
\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{X_{,i}}\tilde{N} &= X_{,i}(F)N + F\bar{\nabla}_{X_{,i}}N \\
&= X_{,i}(F)N + F(N_{,i} - [\sum_{k=1}^{3} N^k(\frac{F_{,k}}{F})]X_{,i} - [\sum_{j=1}^{3} X^j_{,i}(\frac{F_{,j}}{F})]N) \\
&= X_{,i}(F)N + FN_{,i} - (\sum_{k=1}^{3} N^k F_{,k})X_{,i} - (\sum_{j=1}^{3} X^j_{,i}F_{,j})N \\
&= FN_{,i} - (\sum_{k=1}^{3} N^k F_{,k})X_{,i} + [X_{,i}(F) - (\sum_{j=1}^{3} X^j_{,i}F_{,j})]N.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\bar{\nabla}_{X_{,i}}\tilde{N} = FN_{,i} - \langle N, gradF\rangle X_{,i}. \tag{3.5}$$

Como $N_{,i} = \lambda_i X_{,i}$ e $\bar{\nabla}_{X_{,i}}\tilde{N} = \tilde{\lambda_i}X_{,i}$ segue de (3.5) que

$$\tilde{\lambda_i}X_{,i} = F\lambda_i X_{,i} - \langle N, gradF\rangle X_{,i},$$

logo

$$\tilde{\lambda_i} = F\lambda_i - \langle N, gradF\rangle,$$

onde $\tilde{\lambda_i}$ são as curvaturas principais de $\tilde{H}$. Assim temos,

$$\tilde{\lambda_1} = F\lambda_1 - \langle N, gradF\rangle,$$

e

$$\tilde{\lambda_2} = F\lambda_2 - \langle N, gradF\rangle.$$

Segue-se,

$$
\begin{aligned}
\tilde{H} &= \frac{\tilde{\lambda_1} + \tilde{\lambda_2}}{2} \\
&= \frac{F\lambda_1 - \langle N, gradF\rangle + F\lambda_2 - \langle N, gradF\rangle}{2} \\
&= \frac{F\lambda_1 + F\lambda_2 - 2\langle N, gradF\rangle}{2} \\
&= F\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{2} - \langle N, gradF\rangle \\
&= FH - \langle N, gradF\rangle.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\tilde{H} = FH - \langle N, gradF\rangle.$$

Além disso a curvatura extrínseca é dada por

$$
\begin{aligned}
\tilde{K_E} &= \tilde{\lambda_1}\tilde{\lambda_2} \\
&= (F\lambda_1 - \langle N, gradF\rangle)(F\lambda_2 - \langle N, gradF\rangle) \\
&= F^2\lambda_1\lambda_2 - F\lambda_1\langle N, gradF\rangle - F\lambda_2\langle N, gradF\rangle + \langle N, gradF\rangle^2 \\
&= F^2\lambda_1\lambda_2 - F(\lambda_1 + \lambda_2)\langle N, gradF\rangle + \langle N, gradF\rangle^2 \\
&= F^2K - F2H\langle N, gradF\rangle + \langle N, gradF\rangle^2.
\end{aligned}
$$

Portanto temos

$$\tilde{K_E} = F^2K - F2H\langle N, gradF\rangle + \langle N, gradF\rangle^2$$

assim concluimos a prova do teorema 6. ■

3.2 Superfícies de Rotação com Curvatura Extínseca constante em $\mathbb{E}_3$

Nosso objetivo é o estudo de superfícies de rotação com curvatura extrínseca constante em $\mathbb{E}_3$. Nesse espaço temos o fator conforme dado por $F(x) = e^{-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Nós temos pelo Lema 4 que devido ao fato da função F ser limitada, o espaço $\mathbb{E}_3$ é uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccionais negativa dada por (2.14),

$$K_{ij} = (-\sum_{l} f_l^2 + f_i^2 + f_j^2 + f_{ii} + f_{jj})F^2.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
K_{12} &= (-4x_1^2 - 4x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1^2 + 4x_2^2 - 4)(e^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2})^2\\
&= (-4x_3^2 - 4)(e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2})^{-2}\\
&= \frac{-4(1+x_3^2)}{e^{2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}}\\
K_{13} &= (-4x_1^2 - 4x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1^2 + 4x_3^2 - 4)(e^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2})^2\\
&= (-4x_2^2 - 4)(e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2})^{-2}\\
&= \frac{-4(1+x_2^2)}{e^{2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}}\\
K_{23} &= (-4x_1^2 - 4x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4)(e^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2})^2\\
&= (-4x_1^2 - 4)(e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2})^{-2}\\
&= \frac{-4(1+x_1^2)}{e^{2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}}
\end{aligned}
$$

Assim das três igualdades acima podemos concluir:

$$K_{ij}(x) = \frac{-4(1+x_k^2)}{e^{2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}}$$

onde $1 \leqslant i \neq k \neq j \leqslant 3$.

Lema 5. *Seja* $X(u,v) = (\varphi(u)\cos v, \varphi(u)\mathrm{sen} v, u)$ *uma superfície de rotação em* $\mathbb{E}_3$. X *tem curvatura extrínseca constante* c_0 *se, e somente se,* φ *satisfaz a equação diferencial ordinária.*

$$[-1 + 2\varphi(-\varphi + u\varphi')][\varphi'' + 2a^2(-\varphi + u\varphi')] = c_0 a^4 \varphi e^{2(u^2+\varphi^2)} \tag{3.6}$$

onde $a^2 = 1 + \varphi'^2$.

Demonstração: Os coeficientes da primeira forma fundamental, com respeito a métrica euclidiana, são dados por $E = \langle X_u, X_u\rangle$, $G = \langle X_v, X_v\rangle$ e $F = \langle X_u, X_v\rangle$, e o vetor normal é dado por $N = \dfrac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}$ onde temos derivando X parcialmente com respeito a u e v que

$X_u = (\varphi'(u)\cos v, \varphi'(u)\mathrm{sen} v, 1)$

$X_v = (-\varphi(u)\mathrm{sen} v, \varphi(u)\cos v, 0)$

$X_{uu} = (\varphi''(u)\cos v, \varphi''(u)\mathrm{sen} v, 0)$

$X_{uv} = (-\varphi'(u)\mathrm{sen} v, \varphi'(u)\cos v, 0)$

$X_{vv} = (-\varphi(u)\cos v, -\varphi(u)\mathrm{sen} v, 0)$, usando essas expressões, temos

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u\rangle \\ &= \langle(\varphi'(u)\cos v, \varphi'(u)\operatorname{sen} v, 1), (\varphi'(u)\cos v, \varphi'(u)\operatorname{sen} v, 1)\rangle \\ &= (\varphi'(u))^2\cos^2 v, (\varphi'(u))^2\operatorname{sen}^2 v + 1 \\ &= (\varphi'(u))^2(\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) + 1 \\ &= (\varphi'(u))^2 + 1. \end{aligned}$$

Portanto temos $E = 1 + (\varphi'(u))^2$. Agora calculemos F e G

$$\begin{aligned} F &= \langle X_u, X_v\rangle \\ &= \langle(\varphi'(u)\cos v, \varphi'(u)\operatorname{sen} v, 1), (-\varphi(u)\operatorname{sen} v, \varphi(u)\cos v, 0)\rangle \\ &= -\varphi'(u)\varphi(u)\cos v\operatorname{sen} v + \varphi'(u)\varphi(u)\operatorname{sen} v\operatorname{cov} \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} G &= \langle X_v, X_v\rangle \\ &= \langle(-\varphi(u)\operatorname{sen} v, \varphi(u)\cos v, 0), (-\varphi(u)\operatorname{sen} v, \varphi(u)\cos v, 0)\rangle \\ &= \varphi^2(u)\operatorname{sen}^2 v + \varphi^2(u)\cos^2 v \\ &= \varphi^2(u). \end{aligned}$$

Assim temos que $G = \varphi^2(u)$, $F = 0$. Ainda os coeficientes da segunda forma fundamental são dados por

$$e = \langle \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}, X_{uu}\rangle = \frac{(X_u, X_v, X_{uu})}{\sqrt{EF - F^2}}, \quad f = \frac{(X_u, X_v, X_{uv})}{\sqrt{EF - F^2}} \ e \ \ g = \frac{(X_u, X_v, X_{vv})}{\sqrt{EF - F^2}}.$$

Note que,

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varphi'(u)\cos v & \varphi'(u)\operatorname{sen} v & 1 \\ -\varphi(u)\operatorname{sen} v & \varphi(u)\cos v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= -\varphi(u)\operatorname{sen} v\vec{j} + \varphi(u)\varphi'(u)\cos^2 v\vec{k} + \varphi(u)\varphi'(u)\operatorname{sen}^2 v\vec{k} - \varphi(u)\cos v\vec{i} \\ &= \varphi(u)\varphi'(u)(\operatorname{sen}^2 v + \cos^2 v)\vec{k} - \varphi(u)\operatorname{sen} v\vec{j} - \varphi(u)\cos v\vec{i} \\ &= (-\varphi(u)\cos v, -\varphi(u)\operatorname{sen} v, \varphi(u)\varphi'(u)). \end{aligned}$$

Então, como $|X_u \times X_v| = \sqrt{EG - F^2}$, temos $|X_u \times X_v| = \sqrt{(1 + \varphi'^2(u))\varphi^2(u)}$. Logo, podemos encontrar e,f e g. De fato,

$$\begin{aligned}
e &= \langle \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}, X_{uu}\rangle \\
&= \frac{\langle(-\varphi(u)cosv, -\varphi(u)senv, \varphi(u)\varphi'(u)), (\varphi''(u)cosv, \varphi''(u)senv, 0)\rangle}{\sqrt{1+\varphi'^2(u))\varphi^2(u)}} \\
&= \frac{-\varphi(u)\varphi''(u)(cos^2 v + sen^2 v)}{\sqrt{1+\varphi'^2(u)}\varphi(u)} \\
&= \frac{-\varphi(u)\varphi''(u)}{\varphi(u)\sqrt{1+\varphi'^2(u)}} \\
&= \frac{-\varphi''(u)}{a}, \\
g &= \langle \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}, X_{vv}\rangle \\
&= \frac{\langle(-\varphi(u)cosv, -\varphi(u)senv, \varphi(u)\varphi'(u)), (-\varphi(u)cosv, -\varphi(u)senv, 0)\rangle}{\sqrt{1+\varphi'^2(u)\varphi^2(u)}} \\
&= \frac{\varphi^2(u)(cos^2 v + sen^2 v)}{\varphi(u)\sqrt{1+\varphi'^2(u)}} \\
&= \frac{\varphi(u)}{a}, \\
f &= \langle \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}, X_{uv}\rangle \\
&= \frac{\langle(-\varphi(u)cosv, -\varphi(u)senv, \varphi(u)\varphi'(u)), (-\varphi'(u)senv, \varphi'(u)cosv, 0)\rangle}{\sqrt{1+\varphi'^2(u)\varphi^2(u)}} \\
&= \frac{0}{\sqrt{1+\varphi'^2(u)}\varphi} \\
&= \frac{0}{a\varphi} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\langle X, N\rangle &= \langle(\varphi(u)cosv, \varphi(u)senv, u), \frac{(-\varphi(u)cosv, -\varphi(u)senv, \varphi(u)\varphi'(u))}{\sqrt{1+\varphi'^2(u)\varphi^2(u)}}\rangle \\
&= \frac{-\varphi(u)(cos^2 v + sen^2 v) + \varphi(u)\varphi'(u)u}{\varphi\sqrt{1+\varphi^2(u)}} \\
&= \frac{-\varphi^2(u) + \varphi(u)\varphi'(u)u}{\varphi a}, \\
\langle X, X\rangle &= \langle(\varphi(u)cosv, \varphi(u)senv, u), (\varphi(u)cosv, \varphi(u)senv, u)\rangle \\
&= \varphi^2(u)(cos^2 v + sen^2 v) + u^2 \\
&= \varphi^2(u) + u^2.
\end{aligned}$$

Assim temos

$$\langle X, N\rangle = \frac{-\varphi(u) + \varphi'(u)u}{a}, \quad \langle X, X\rangle = \varphi^2(u) + u^2. \tag{3.7}$$

Logo,

$$\begin{aligned} F(X) &= F(\varphi(u)cosv, \varphi(u)senv, u) \\ &= e^{-\varphi^2(u)cos^2v-\varphi^2(u)sen^2v-u^2} \\ &= e^{-\varphi^2(u)(cos^2v+sen^2v)-u^2} \\ &= e^{-\varphi^2(u)-u^2}, \end{aligned}$$

Dai,

$$\begin{aligned} gradF &= (-2x_1F, -2x_2F, -2x_3F) \\ &= (-2\varphi(u)cosvF, -2\varphi(u)senvF, -2uF) \\ &= -2F(\varphi(u)cosv, \varphi(u)senv, u) \\ &= -2FX. \end{aligned}$$

Portanto, temos

$\langle N, gradF\rangle = \langle N, -2FX\rangle = -2F\langle N, X\rangle$. Então usando o teorema 6 e a equação (3.7)

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda_i} &= F\lambda_i - \langle N, gradF\rangle \\ &= F\lambda_i + 2F\langle N, X\rangle \\ &= F(X)(\lambda_i + 2\langle N, X\rangle) \\ &= e^{-u^2-\varphi^2(u)}[\lambda_i + 2(\frac{-\varphi(u)+u\varphi'(u)}{a})]. \end{aligned}$$

Para o cálculo das curvaturas principais, como a parametrização da superfície é tal que $F = f = 0$, então as curvaturas principais são dadas por,

$\lambda_1 = \dfrac{e}{E}$ e $\lambda_2 = \dfrac{g}{G}$, visto que $K = \dfrac{eg-f^2}{EG-F^2}$ teremos $K = \dfrac{eg}{EG}$, assim

$$\lambda_1 = \frac{e}{E} = \frac{\frac{-\varphi''(u)}{a}}{1+\varphi'^2(u)} = \frac{\frac{-\varphi''(u)}{a}}{a^2} = \frac{-\varphi''(u)}{a^3}$$

$\lambda_2 = \dfrac{g}{G} = \dfrac{\frac{\varphi(u)}{a}}{\varphi^2(u)} = \dfrac{1}{\varphi(u)a}$, assim podemos agora encontrar $\tilde{\lambda_1}$ e $\tilde{\lambda_2}$. De fato,

$$\tilde{\lambda_1} = e^{-u^2-\varphi^2(u)}[(\frac{\varphi''(u)}{a^3}) + 2\frac{(-\varphi(u)+u\varphi'(u))}{a}],$$

$$\tilde{\lambda_2} = e^{-u^2-\varphi^2(u)}[(\frac{-1}{\varphi(u)a}) + 2\frac{(-\varphi(u)+u\varphi'(u))}{a}].$$

Neste caso a curvatura extrínseca é,

$$\begin{aligned}
\tilde{K_E} &= \tilde{\lambda_1}\tilde{\lambda_2} \\
&= e^{-u^2-\varphi^2(u)}[(\frac{\varphi''(u)}{a^3}) + 2\frac{(-\varphi(u)+u\varphi'(u))}{a}]e^{-u^2-\varphi^2(u)}[(\frac{-1}{\varphi(u)a}) \\
&+2\frac{(-\varphi(u)+u\varphi'(u))}{a}] \\
&= e^{2(-u^2-\varphi^2(u))}(\frac{\varphi''(u)a + 2a^3(-\varphi(u)+u\varphi'(u))}{a^4})(\frac{-1+2\varphi(u)(-\varphi(u)+u\varphi'(u))}{\varphi(u)a}) \\
&= \frac{e^{2(-u^2-\varphi^2(u))}}{\varphi(u)a^5}[\varphi''(u)a + 2a^3(-\varphi(u)+u\varphi'(u))][-1+2\varphi(u)(-\varphi(u)+u\varphi'(u))].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\tilde{K_E}\varphi(u)a^5 &= e^{2(-u^2-\varphi^2(u))}[\varphi''(u)a + 2a^3(-\varphi(u)+u\varphi'(u))][-1+2\varphi(u)(-\varphi(u)+u\varphi'(u))] \\
\tilde{K_E}\varphi(u)a^5 &= e^{-2(u^2+\varphi^2(u))}a[\varphi''(u) + 2a^2(-\varphi(u)+u\varphi'(u))][-1+2\varphi(u)(-\varphi(u)+u\varphi'(u))] \\
\tilde{K_E}\varphi(u)a^4e^{2(u^2+\varphi^2(u))} &= [\varphi''(u) + 2a^2(-\varphi(u)+u\varphi'(u))][-1+2\varphi(u)(-\varphi(u)+u\varphi'(u))].
\end{aligned}$$

Concluimos que a curvatura extrínseca é contante igual c_0 se, e somente se, φ satisfaz a equação,

$$[-1+2\varphi(-\varphi+u\varphi')][\varphi''+2a^2(-\varphi+u\varphi')] = c_0a^4\varphi e^{2(u^2+\varphi^2)}. \qquad \blacksquare$$

Obs 9. *A curvatura extrínseca satisfaz* $\tilde{K_E} = 0$ *se, e somente se,* $\tilde{\lambda_1} = 0$ *ou* $\tilde{\lambda_2} = 0$*, isto é satisfaz a equação diferancial ordinária,*

$$\varphi''(u) + 2a^2(-\varphi(u)+u\varphi'(u)) = 0 \tag{3.8}$$

ou

$$\frac{-1}{\varphi(u)} + 2(-\varphi(u)+u\varphi'(u)) = 0 \tag{3.9}$$

onde $a^2 = 1+\varphi'^2(u)$.

Teorema 7. *Seja* C *uma constante não nula.*

(a)A família a um parâmetro de hiperbolóides de duas folhas, dado pela equação,

$$(Cx_3)^2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 = 1,$$

consiste de uma superfície completa com curvatura extrínseca zero em $\mathbb{E}_3$.

(b)A família a um parâmetro de cones,

$$(Cx_3)^2 = x_1^2 + x_2^2,$$

também descreve uma superfície com curvatura extrínseca zero.

(c)Existe uma família a um parâmetro de surperfícies de rotação no espaço $\mathbb{E}_3$, com curvatura extrínseca zero.

Demonstração: (a) Considere o caso $\tilde{\lambda}_2 = 0$ daí temos que esse caso é equivalente a equação (3.9),

$$\frac{-1}{\varphi(u)} + 2(-\varphi(u) + u\varphi'(u)) = 0.$$

Esta equação é equivalente a,

$$2u\varphi d\varphi = (1 + 2\varphi^2)du$$

$$\frac{2\varphi}{1 + 2\varphi^2} d\varphi = \frac{1}{u} du.$$

Integrando em ambos os lados da igualdade acima temos

$$\int \frac{2\varphi}{1 + 2\varphi^2} d\varphi = \int \frac{1}{u} du,$$
$$\frac{1}{2}\ln(1 + 2\varphi^2) = \ln u + k,$$

onde k é uma constante, daí aplicando a exponêncial em ambos os lados temos,

$$e^{\ln(1+2\varphi^2)^{\frac{1}{2}}} = e^{\ln u} e^k$$
$$(1 + 2\varphi^2)^{\frac{1}{2}} = ue^k.$$

Então existe uma constante $c = e^k \neq 0$ tal que

$1 + 2\varphi^2 = u^2c^2 \Longrightarrow u^2c^2 - 2\varphi^2 = 1$

Considerando agora a superfície $X(u,v) = (\varphi(u)cosv, \varphi(u)senv, \frac{c}{C}u)$, com

$x_1 = \varphi(u)cos$, $x_2 = \varphi(u)senv$ e $x_3 = \frac{c}{C}u$,
temos

$$C^2x_3^2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 = 1.$$

(b) Consideremos agora o caso $\tilde{\lambda_1} = 0$ nesse caso temos uma equação equivalente a (3.8),

$$\varphi''(u) + 2a^2(-\varphi(u) + u\varphi'(u)) = 0.$$

Afirmação : $\varphi(u) = cu$ com c =constante é solução da equação (3.8). De fato,

$\varphi'(u) = c$, $\varphi''(u) = 0$, daí $0 + 2a^2(-cu + uc) = 0$. Então considerando a parametrização,

$X(u,v) = (\varphi(u)cosv, \varphi(u)senv, u)$,
onde,

$x_1 = \varphi(u)cos$, $x_2 = \varphi(u)senv$ e $x_3 = u$, temos

$$\begin{aligned}(cu)^2 &= \varphi^2(u)\\ &= \varphi^2(u)(cos^2v + sen^2v)\\ &= \varphi^2(u)cos^2v + \varphi^2(u)sen^2v\\ &= x_1^2 + x_2^2.\end{aligned}$$
Assim,

$$(cx_3)^2 = x_1^2 + x_2^2.$$

(c) Usando o teorema de Picard, provamos que, dado as condições iniciais $\varphi(0) = b > 0$, $\varphi'(0) = 0$, exite uma solução φ que é simétrica ao eixo x_1 para equação diferencial

(3.8). Seja $\dot{X}$=$h(X, u)$, onde $X = (x_1, x_2)$ com $x_1 = \varphi(u)$, $x_2 = \varphi'(u)$. Então temos que $\dfrac{dx_2}{du} = \varphi''(u)$, onde

$$\varphi''(u) = -2a^2(-\varphi(u) + u\varphi'(u)) = 2(1 + x_2^2)(x_1 - ux_2).$$

Essa equação diferencial de segunda ordem é equivalente ao sistema de equações diferenciais de primeira ordem $\dot{X}$=$h(u, X)$, onde

$$h(u, x_1, x_2) = (x_2, 2(1 + x_2^2)(x_1 - ux_2)) \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}).$$

A função $h : \Omega \subset \mathbb{R} \times E \to \mathbb{R}^2$ é C^∞. A simetria é mostrada considerando $\tilde{\varphi}(u) := \varphi(-u)$ e notando que a equação (3.8) é também satisfeita por $\tilde{\varphi}$. Então podemos concluir as seguintes propriedades a respeito da solução:

i) φ é sempre convexa. Com efeito, pela equação (3.8) com $t = 0$ temos

$$\varphi''(0) + 2(1 + \varphi'(0)^2)(-\varphi(0) + 0\varphi'(0)) = 0$$

$$\varphi''(0) - 2b = 0.$$

Logo $\varphi''(0) = 2b > 0$, é suficiente provar que $\varphi''(u) > 0\ \forall u$. De fato, suponha que existe $u_0 > 0$ tal que $\varphi''(u_0) = 0$ e seja $T(s) = \varphi(u_0) + \varphi'(u_0)(s - u_0)$ a reta tangente no ponto $(u_0, \varphi(u_0))$, daí $T(0) = -\varphi(u_0) + u_0\varphi'(u_0) = 0$ pois de (3.8) $-\varphi(u_0) + u_0\varphi'(u_0) = 0$. Assim temos que $T(s)$ passa pela origem no ponto $(u_0, \varphi(u_0))$, note que $T''(0) = 0 \neq \varphi''(0) = 2b > 0$ e T e φ estão definidas no intervalo $[0, u_0]$. Por (b) T é também solução de (3.8) contradizendo assim o Teorema de Picard.

ii) O intervalo $(\omega_-, \omega_+) = \mathbb{R}$ é maximal. De fato, se o intervalo maximal é um intevalo finito, digamos, $\omega_+ < \infty$, então temos que a solução satisfaz

$$\lim_{u \to \omega_+} \varphi(u) = +\infty$$

assim a curva solução adimite uma tangente linear que passa pela origem. Seja $T(s) = \varphi(u_0) + \varphi'(u_0)(s - u_0) = \varphi(u_0) + \varphi'(u_0)s - \varphi'(u_0)u_0$, temos que $T(0) = 0$ se, e somente se, existe u_0 tal que $-\varphi(u_0) + u_0\varphi'(u_0) = 0$. Então seja $f(u) = \varphi(u) - u\varphi'(u)$ daí $f(0) = b > 0$, suponha que $\varphi(u) - u\varphi'(u) > 0$, assim $\varphi(u) > \varphi'(u)u$ e

$$\frac{1}{u} > \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)},$$

integrando a desigualdade acima teremos $\ln u + k > \ln \varphi(u) + k$, aplicando a exponêncial temos $\varphi(u)e^k < ue^k$, daí passando o limite com $u \to \omega_+$ segue que $\lim\limits_{u \to \omega_+} \varphi(u) \leqslant \lim\limits_{u \to \omega_+} u$ contradição. Logo existe uma tangente passando pela origem, chegando assim novamente numa contradição da unicidade de soluções. ■

Teorema 8. *Existe uma família a uma pramêtro de superfícies completas com curvatura extrínseca constante negativa em* $\mathbb{E}_3$*.*

Demostração: Temos que $\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2 = c_0$ se, e somente se, $\varphi = \varphi(u)$ satisfaz a equação diferencial ordinária de segunda ordem,

$$[-1 + 2\varphi(-\varphi + u\varphi')][\varphi'' + 2a^2(-\varphi + u\varphi')] = c_0 a^4 \varphi e^{2(u^2+\varphi^2)}.$$

Dado as condições iniciais $\varphi(0) = b > 0$ e $\varphi'(0) = 0$ para equação diferencial ordinária, existe uma solução φ que é uma função par.

Observe que

$$\begin{aligned}
[-1 + 2\varphi(0)(-\varphi(0))][\varphi''(0) + 2a^2(-\varphi(0))] &= c_0 a^4 \varphi(0) e^{2\varphi^2(0))}[-1 + 2b(-b)][\varphi''(0) + 2a^2(-b)] \\
&= c_0 a^4 b e^{2b^2)} - (1 + 2b^2)\varphi''(0) + 2b(1 + 2b^2) \\
&= c_0 b e^{2b^2}.
\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\varphi''(0) = -\frac{c_0 b e^{2b^2}}{1 + 2b^2} + 2b$$

$$\varphi''(0) = -\frac{c_0 b e^{2b^2}}{1 + 2b^2} + 2b,$$

como $c_0 < 0$, temos

$$\varphi''(0) = 2b - \frac{c_0 b e^{2b^2}}{1 + 2b^2} > 0,$$

isto implica que, numa vizinhança de zero, a segunda derivada é positiva. Nós provaremos que, onde $4c_0 b^2 e^{2b^2} < -1$, então φ é convexa. Suponha por contradição que existe $u_0 > 0$ com $\varphi''(u_0) = 0$, como $\varphi_0 = \varphi(u_0) > \varphi(0) = b > 0$, se $\varphi''(u_0) = 0$ então, $u_0 > 0$, $\varphi_0 > 0$ satisfaz a equação.

$$2(\varphi_0 - u_0\varphi'(u_0)) + 4\varphi_0(-\varphi_0 + u_0\varphi'(u_0))^2 = c_0(1 + \varphi'(u_0)^2)\varphi_0 e^{2(\varphi_0^2 + u_0^2)}$$

$2\varphi_0 - 2u_0\varphi'(u_0) + 4\varphi_0(\varphi_0^2 - 2\varphi_0 u_0\varphi'(u_0) + u_0^2\varphi'(u_0)^2) = c_0\varphi_0 e^{2(\varphi_0^2+u_0^2)} + c_0\varphi'(u_0)^2\varphi_0 e^{2(\varphi_0^2+u_0)}$

$2\varphi_0 - 2u_0\varphi'(u_0) + 4\varphi_0^3 - 8\varphi_0^2 u_0\varphi'(u_0) + 4\varphi_0 u_0^2\varphi'(u_0)^2 = c_0\varphi_0 e^{2(\varphi_0^2+u_0^2)} + c_0\varphi'(u_0)^2\varphi_0 e^{2(\varphi_0^2+u_0)}$

$[4\varphi_0 u_0^2 - c_0\varphi_0 e^{2(\varphi_0^2+u_0^2)}]\varphi'(u_0)^2 + [-2u_0\varphi'(u_0) - 8\varphi_0^2 u_0]\varphi'(u_0) + 2\varphi_0 + 4\varphi_0^3 - c_0\varphi_0 e^{2(\varphi_0^2+u_0^2)} =$
0

então consideramos a seguinte equação quadrática

$$\tilde{a}\varphi'(u_0)^2 + \tilde{b}\varphi'(u_0) + \tilde{c} = 0, \tag{3.10}$$

onde

$\tilde{a} = \varphi_0(4u_0^2 - c_0 e^{2(\varphi_0^2+u_0^2)})$, $\tilde{b} = -2u_0(1+4\varphi_0^2)$, $\tilde{c} = \varphi_0(2+4\varphi_0^2 - c_0 e^{2(\varphi_0^2+u_0^2)})$

então o discriminante é dado por $\Delta = \tilde{b}^2 - 4\tilde{a}\tilde{c}$ assim teremos,

$$\Delta = [-2u_0(1+4\varphi_0^2)]^2 - 4\varphi_0(4u_0^2 - c_0 e^{2(\varphi_0^2+u_0^2)})\varphi_0(2+4\varphi_0^2 - c_0 e^{2(\varphi_0^2+u_0^2)})$$
$$\Delta = 4u_0^2(1+4\varphi_0^2)^2 - 4\varphi_0^2(4u_0^2 - A)(2+4\varphi_0^2 - A)$$

assim

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta}{4} &= u_0^2(1+4\varphi_0^2)^2 - [(4u_0^2\varphi_0^2 - A\varphi_0^2)(2+4\varphi_0^2 - A)] \\
&= u_0^2(1+4\varphi_0^2)^2 - [8u_0^2\varphi_0^2 + 16u_0^2\varphi_0^4 - 4u_0^2\varphi_0^2 A - 2A\varphi_0^2 - 4\varphi_0^4 A + \varphi_0^2 A^2] \\
&= u_0^2(1+8\varphi_0^2+16\varphi_0^4) - 8u_0^2\varphi_0^2 - 16u_0^2\varphi_0^4 + 4u_0^2\varphi_0^2 A + 2A\varphi_0^2 + 4\varphi_0^4 A - \varphi_0^2 A^2 \\
&= u_0^2 + 8u_0^2\varphi_0^2 + 16u_0^2\varphi_0^4 - 8u_0^2\varphi_0^2 - 16u_0^2\varphi_0^4 + 4u_0^2\varphi_0^2 A + 2A\varphi_0^2 + 4\varphi_0^4 A - \varphi_0^2 A^2 \\
&= u_0^2 + 4u_0^2\varphi_0^2 A + 2A\varphi_0^2 + 4\varphi_0^4 A - \varphi_0^2 A^2 \\
&= u_0^2(1+4\varphi_0^2 A) + \varphi_0^2 A(2+4\varphi_0^2 - A)
\end{aligned}$$

onde $A = c_0 e^{2(u_0^2+\varphi_0^2)}$.

Daí, se $A\varphi_0^2 < -\frac{1}{4}$ então $\Delta < 0$ então temos que,

$c_0\varphi_0^2 e^{2(u_0^2+\varphi_0^2)} < -\frac{1}{4}$ assim segue que,

$$c_0 < -\frac{1}{4}[\frac{1}{\varphi_0^2 e^{2(u_0^2+\varphi_0^2)}}]$$

como $\varphi(0) = b$ e $\varphi_0 > b$ nós obtemos

$$-\frac{1}{4b^2e^{2b^2}} < -\frac{1}{4\varphi_0^2 e^{2(u_0^2+\varphi_0^2)}},$$

então para toda contante $c_0 < 0$ fixada nós podemos escolher b talque $c_0 < -\frac{1}{4b^2e^{2b^2}}$, assim temos

$$4c_0b^2e^{2b^2} < -1$$

assim não existe $\varphi'(u_0)$ satisfazendo a equação (3.10)(contradição)

Em analogia para o estudo de soluções para equações diferenciais ordinárias (3.8) nos temos que,

•φ é definida em $\mathbb{R}$

• Ou φ é definida em um intervalo $]\omega_-, \omega_+[$,

então $\varphi(u) \to \infty$ onde $u \to \omega_{\pm}^{+}$.

Então a solução dada acima é uma família de superfícies completas com parâmetro b. ■

Corolário 2. *Existe uma família a um parâmetro de superfícies completas em $\mathbb{E}_3$ com curvatura gaussiana $K_g \leqslant -\varepsilon < 0$, onde $\varepsilon > 0$ é constante.*

Demostração: No teorema 8 nós provamos a existência de uma família de superfícies com curvatura extrínseca negativa $\tilde{K_E} = c_0$. Como a curvatura seccional K_{sec} de $\mathbb{E}_3$ é negativa, segue da equação de Gauss $K_g - K_{sec} = \tilde{K_E}$ que acurvatura gaussiana K_g da superfície, dada pelo teorema 8 satisfaz $K_g < c_0 < 0$. Isto prova que o teorema de Efimov e Schelenker respectivamente, não são validos no espaço $\mathbb{E}_3$. ■

Referências Bibliográficas

[1] Alencar,H., do Carmo, M.P.,Tribuzy,R.: A theorem of H. Hopf and the Cauchy-Riemann in equality(Available at http:// www.pos.mat.ufal.br/AlencarCarmoTrib.pdf).

[2] Aledo, J.A., Espinar, J.M., Gálvez, J.A.: Complete surfaces of constant curvature in $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$. Calc. Var.**29**, 347-363 (2007).

[3] Beneki, C., Kaimakamis, G., Papantoniou, B. J.: A classification os surfaces of revolution with cosntant Gauss curvature in a 3-dimensional Minkowiski space. Bull. Calcutta Math. Soc.**90**(6), 441-458 (1998).

[4] Corro, A. V.: Generalized Weingarten surfaces of Bryant type in hyperbolic 3-space. Mat. Contemp. **30**, 71-89 (2006).

[5] Corro, A. V., Martinez, A., Milán, F.: Complete flat surfaces with two isolated singularities in hyperbolic 3-space. J. Math. Anal. Appl. **366**, 582-592 (2010).

[6] Caddeo, R., Piu, P., Ratto, A.: Rotacional surfaces in H_3 with constant Gauss curvature. Boll. Un. Mat. Ital. B (7), 341-357 (1996).

[7] do Carmo, M. P.: Geometria Riemanniana.Projeto Euclides,IMPA (2008).

[8] Espinar, J. M., Gálvez, J. A., Rosenberg, H.: Complete surfaces with positive extrinsic curvature in product spaces. Comm. Math. Helv.**84**(2), 351-386 (2009).

[9] Enfimov, N. V.: Surfaces with a slowly changing negative curvature. Russian Math. Surv. **5**(131), 1-56 (1966).

[10] Fernández, I., Mira, P.:Harmonic maps and constant mean curvature surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Am. J. Math. **129**(4), 1145-1181 (2007).

[11] Montaldo, S., Onnis, I.I.: Invariant surfaces of a three-dimensional manifold with constant Gauss curvature. J. Geom. Phys. **55**,440-449 (2005).

[12] Pina,R., Sousa, M.,Corro, A. V.: Surfaces of Rotation With Constant Extrinsic Curvature in a Conformally Flat 3-Space. Results Math **60**,225-234 (2011).

[13] Pina, R., Tenenblat, K.: On solutions of the Ricci curvature equation and the Einstein equation. Israel J. Math. **171** (1) , 61-76 (2009).

[14] Schlenker, J.M.: Surfaces à courbure extrinsèque négative dans l'espace hyperbolique. Ann. Scient.Éc.Norm. Sup. 4ª série **34**,79-130 (2001).

[15] Stephani, H., Kramer, D., MacCallum, M., Hoenselaers, C., herlt, E.: Exact solutions of Einstein field equations. Cambridge University Press, Cambridge(2003).