Equações Diferenciais e campos de inclinação

Objetivo

As equações diferenciais expressar a velocidade à qual uma função cresce. Se a população de sua cidade cresce 10% ao ano, você poderia expressar isso pela equação diferencial $dP/dt = 0{,}10\ P$ (onde P é a população e t é o tempo em anos). Cada equação diferencial descreve uma família inteira de funções relacionadas: uma pequena aldeia rural, com apenas algumas dezenas de habitantes e uma metrópole urbana em expansão pode cada experiência de 10% de crescimento, mas é claro que as suas populações reais e as funções que descrevem deles será? diferente.

Nesta atividade, você vai investigar a família de funções descritas por uma equação diferencial único pela construção da equação diferencial *campo de inclinação* . Este campo? Uma foto? Sugere a inclinação ou a direção das funções descritas por uma equação diferencial comum em todos os pontos no plano. Você pode usar campos de inclinação para encontrar soluções particulares para equações diferenciais graficamente.

Escolhendo uma equação diferencial

Nesta atividade ea próxima atividade, você vai trabalhar com uma única equação diferencial.A escolha da equação é com você? Você pode querer escolher um da lista abaixo, ou faça a sua própria. Em qualquer caso, não se esqueça de indicar a equação diferencial que você escolheu, circulando-a abaixo ou escrevê-lo no topo da sua folha de atribuição.

? $dy / dx = 2x$? $dy / dx = 3y^2$

? $dy / dx = 3 (x / y)$? $dy / dx = 0{,}5x + y$

? $dy / dx = 2x (1 - x$?) $dy / dx =$ _____

(Se você escolher a sua própria equação, evite expressões constantes, como $dy / dx = 3$. Enquanto estes são certamente equações diferenciais válidos, eles não são muito interessantes para o gráfico!)

Parte I: Representação gráfica da inclinação em um ponto

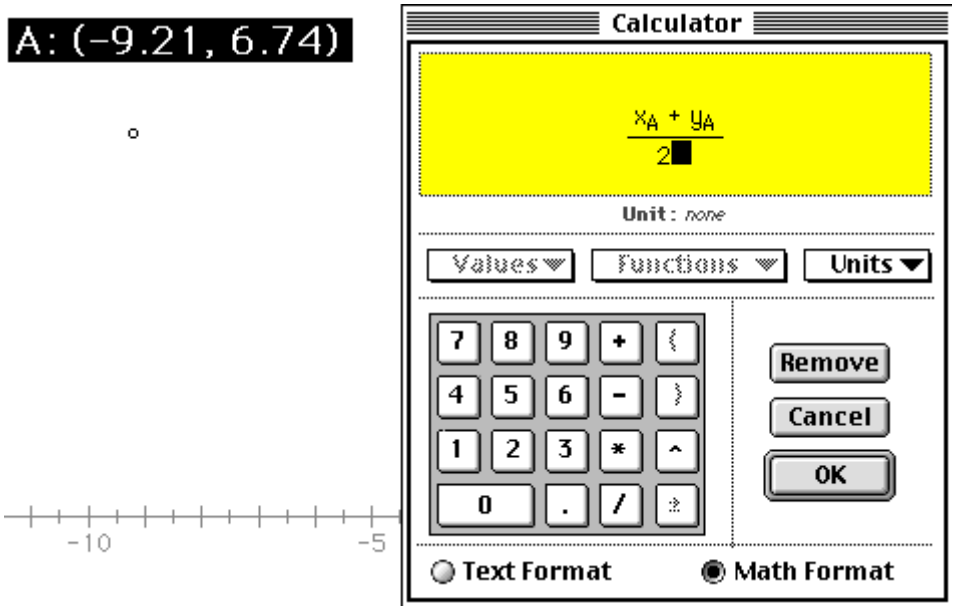
Passo 1: Escolha uma equação diferencial da lista acima para exploração durante esta atividade.

Passo 2: Abra um novo desenho e coloque um ponto em qualquer lugar nele. Use a ferramenta de texto para identificar o ponto P . Porque este ponto podem ser arrastados livremente, ele representa algum? Ou todos? Ponto no plano.

Passo 3: Medir as coordenadas de P.

Passo 4: Utilizar a calculadora para avaliar o lado direito da equação diferencial em termos de medidas coordenadas de $X\ A$ e Y A . Aqui está um exemplo passo-a-passo para a equação diferencial $dy / dx = (x + y) / 2$:

- Escolha **Calcular** no menu Medir.
- Use o teclado na tela ou o teclado para inserir um parêntese aberto.
- Com o mouse, pressione as coordenadas medidas de P que são visíveis no desenho por trás da calculadora. Um menu pop-up irá oferecer-lhe opções de **X** ou **Y** . Escolha **X**.
- No teclado, digite o símbolo disso.
- Volte ao menu de coordenar pop-up e escolha **Y.**
- Conclua o cálculo usando o teclado para digitar um parêntese de fechamento, o símbolo de divisão, e **2** . Em seguida, clique **em OK** . O resultado de seu cálculo representa a inclinação de uma função descrita por sua equação diferencial que passa através do ponto P .



Passo 5: Escolha a ferramenta Texto na caixa de ferramentas, e clique duas vezes o seu valor calculado. Na caixa de diálogo que aparece, renomeie o cálculo de "dy / dx."
Passo 6: Construir uma linha que passa pelo ponto *P* com a inclinação *dy* / *dx* que você acabou de calcular.
Há muitas maneiras que você poderia construir uma tal linha. Aqui está um, o que primeiro determina o ângulo da linha de base em sua inclinação, e depois usa esse ângulo para encontrar um segundo ponto da linha:

- Use a calculadora e suas funções sub-menu para calcular **ArcTan [*dy* / *dx*]** , que é o ângulo da linha cuja inclinação (*dy* / *dx*) que você acabou de calcular.
- Selecione seu ponto inicial *P* e escolha **Traduzir** no menu Transform.
- Na caixa de diálogo resultante, clique **por Vector Polar** , e em seguida, clique sobre o cálculo do arco-tangente exibida por trás do diálogo. No campo Distância, digite uma distância razoável, como 1 polegada, 1 cm, ou 100 pixels. Clique **em OK** .

O ponto resultante *P '* é a tradução de *P* por sua distância especificada na direção do ângulo do arco-tangente. Use a ferramenta de linha na caixa de ferramentas para desenhar uma linha entre *P* e *P '*.

- Por fim, selecione e esconder o arco-tangente de cálculo e ponto *P '* , os quais você criou só para construir a linha através de *P* .

Ao concluir, você vai ter uma linha que passa por *P* e que tem uma inclinação igual ao valor de sua equação diferencial em *P*.

Parte II: Explorando a taxa de mudança

Arraste o ponto *P* em torno do seu desenho e observar a mudança na inclinação de sua linha. Em seguida, responda às seguintes perguntas:
Q1. Onde está *P* quando a linha é horizontal, ou mais próximo para horizontal? Onde está a sua linha mais próxima de vertical?

Q2. Explique sua resposta à pergunta anterior algebricamente em termos de sua equação diferencial. Porque é que a linha horizontal ou quase vertical nos casos que você encontrou no 1 º trimestre?

Q3. Imagine que você virou-se para o computador do seu colega e descobriu que, quando você arrastou ponto *P* em que esboço, a linha através de *P* não alterou encosta. Que declaração (s) que você poderia fazer sobre equação diferencial do seu colega?

Parte III: Construindo o Slope local

Por definição, a linha através da *P* é infinitamente longo, e tem a mesma inclinação em todos os pontos na linha. Infelizmente, as soluções para a equação diferencial tem que encosta directamente apenas a *P* ? e *não* ao longo de todo o comprimento da linha!

Nesta parte, você vai substituir a sua linha com um pequeno segmento da mesma inclinação centrado em *P* . Este segmento curto dá-lhe uma melhor representação da encosta como "local de" *P* .

Passos:

Passo 1. Continuando no mesmo esboço, use a ferramenta Segmento de desenhar um segmento de cerca de 1 cm de comprimento no canto superior direito do seu esboço.

Passo 2. Escolha **Renomei segmento** no menu Exibir e, em nome do segmento *Delta* .

Passo 3. Usando a Seleção ferramenta Seta, selecione ambos *Delta* e seu ponto *P* e escolher**Círculo por Centro + Radius** no menu Construct.

Apoiador cria um círculo centrado em *P* com um raio igual ao comprimento de segmento *Delta.* Você pode fazer este círculo maior ou menor, alterando o comprimento do *Delta* .

Passo 4. Construa os dois pontos de intersecção entre o círculo ea linha através de *P* . Em seguida, ocultar a linha eo círculo, e conectar as duas interseções com um segmento (usando a ferramenta Segmento ou o menu Construct). Esconder as interseções, portanto, apenas o ponto original *P* eo segmento permanecem.

Neste ponto, você substituiu sua linha através de *P* com um segmento colineares através de*P* . O comprimento do segmento é controlada pela *Delta* ? o raio do círculo de que o novo segmento é um diâmetro. Alterar o comprimento de *Delta* e observar o efeito no segmento através de *P* . Arraste *P* sobre o esboço de confirmar que o segmento de mudanças de inclinação, assim como sua linha fez.

Parte IV: Desenvolvimento do campo de inclinação

O segmento de *P* mostra a inclinação em um único ponto. Arrastando *P* mostra a inclinação em *cada* ponto do arrasto. Um *campo de inclinação* diagrama descreve a inclinação em muitos pontos ao mesmo tempo, dando uma "grande figura" da forma de todas as soluções para a equação diferencial.

Passo 1: Selecione o segmento através de *P* e escolher **Segmento rastreamento** a partir do menu Exibir.

Segmentos traçados deixar para trás as imagens como eles são arrastados. Usando rastreamento aqui permite que você veja a forma do segmento em várias posições de *P*simultaneamente.

Passo 2: No menu Gráfico, escolha **Ajustar à grelha** .

Tirando a grade causas arrastado pontos para manter o "grid grade" (coordenadas inteiro) do seu sistema de coordenadas. Usando tirando aqui permite que você arraste *P* para uniformemente espaçados posições no avião.

Passo 3: Drag *P* .

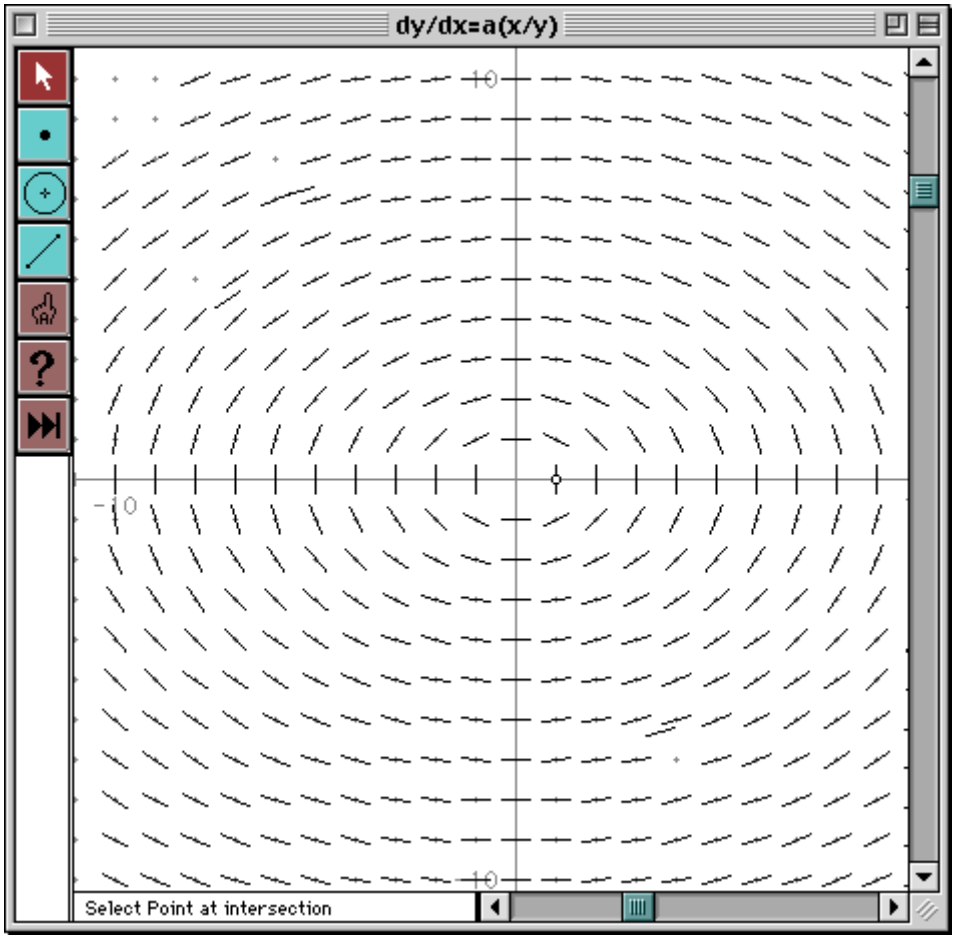
À medida que você arrasta, o segmento traçado mostra a inclinação local para cada ponto da grade grades. Tente arrastar *P* para que você preencha toda a estrutura.

Se você achar que as imagens do seu segmento de traçado são sobrepostos uns aos outros, você pode querer parar e fazer o segmento mais curto (mudando *da Delta*comprimento), ou fazer a sua rede maior (arrastando o ponto em (1, 0) a partir da origem).

Em seguida, retomar arrastando até que tenha preenchido os segmentos para o campo de inclinação inteiro.

Parte V: Investigando campos de inclinação

Depois de diagramado o campo de inclinação para a sua equação diferencial, imprima o seu esboço, se você tem acesso a uma impressora.(Você pode querer escolher**Visualizar Impressão** no menu Arquivo, em primeiro lugar, e pedir para**Ajustar à página**para que a impressão se encaixa uma folha de papel exatamente.) Na impressão ou na tela, identificar padrões em seu campo de inclinação. O campo de inclinação à esquerda, por exemplo, contém padrões sugerindo uma série de elipses aninhados.

Quando você é feito com as perguntas abaixo, não se esqueça de salvar o seu esboço para que você possa continuar a explorar a sua própria equação diferencial na próxima seção.

Q4. Descrevem a forma ea localização dos padrões que ocorrem no campo de inclinação da sua equação diferencial.