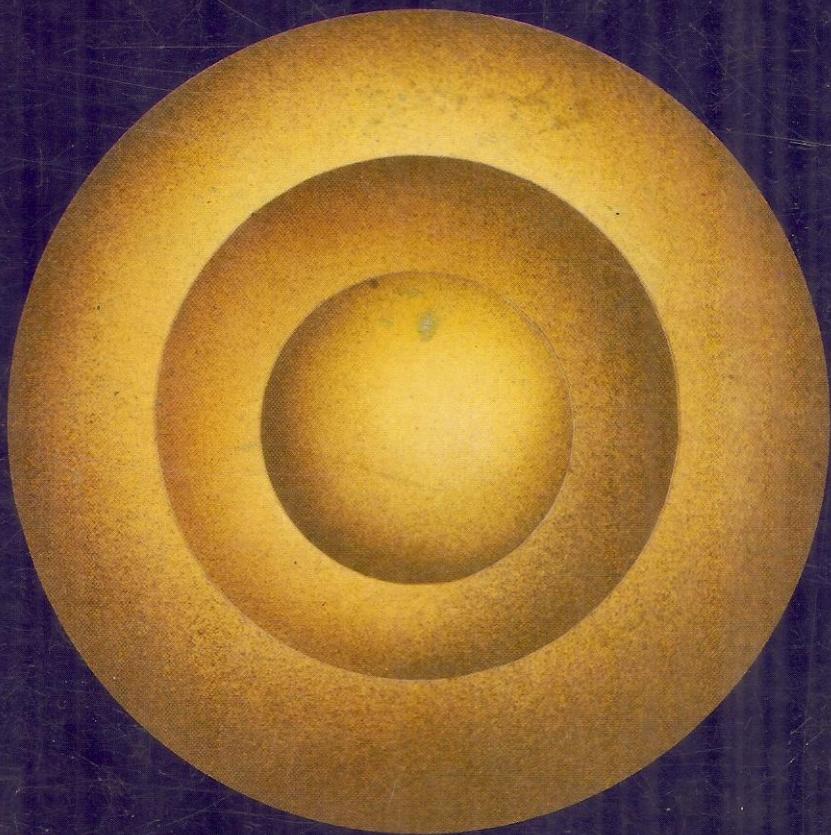


**Elementos  
de  
Análise Real**

**Robert G.  
BARTLE**



**EDITORA CAMPUS**

**Elementos  
de  
Análise Real**

# Elementos de Análise Real

Robert G.  
**BARTLE**

Professor de Matemática  
University of Illinois  
Urbana – Champaign

TRADUÇÃO

*Alfredo A. de Farias*

Professor do Instituto de Ciências Exatas  
UFMG

**EDITORAS CAMPUS LTDA.**

Rio de Janeiro

# SUMÁRIO

## PREFÁCIO, 13

## INTRODUÇÃO. UM ESBOÇO DA TEORIA DOS CONJUNTOS

1. A Álgebra dos Conjuntos, 16  
Igualdade de conjuntos, interseção, união, produto cartesiano
2. Funções, 24  
Representação tabular, transformações, restrições e extensões, composição, funções injetiva e inversa, funções sobrejetiva e bijetiva, imagens direta e inversa
3. Conjuntos Finito e Infinito, 33  
Conjuntos finitos, numeráveis e não-numeráveis, a inumerabilidade de  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{I}$

## CAPÍTULO 1. OS NÚMEROS REAIS

4. As Propriedades Algébricas de  $\mathbb{R}$ , 38  
Propriedades de corpo de  $\mathbb{R}$ , irracionalidade de  $\sqrt{2}$
5. Propriedades de Ordem de  $\mathbb{R}$ , 42  
Propriedades de ordem, valor absoluto
6. A Propriedade de Completeza de  $\mathbb{R}$ , 47  
Supremos e ínfimos, propriedade arquimediana, a existência de  $\sqrt{2}$
7. Cortes, Intervalos e o Conjunto de Cantor, 54  
Propriedade do corte, celas e intervalos, propriedades das celas encaixantes, o conjunto de Cantor, modelo para  $\mathbb{R}$

## CAPÍTULO 2. A TOPOLOGIA DOS ESPAÇOS CARTESIANOS

8. Espaços Vetoriais e Cartesianos, 59  
Espaços vetoriais, espaços com produto interno, espaços normados, a desigualdade de Schwarz, o espaço cartesiano  $\mathbb{R}^p$
9. Conjuntos Abertos e Conjuntos Fechados, 68  
Conjuntos abertos, conjuntos fechados, vizinhanças
10. Celas Encaixantes e o Teorema de Bolzano-Weierstrass, 73  
O teorema das celas encaixantes, pontos de acumulação, o teorema de Bolzano-Weierstrass
11. O Teorema de Heine-Borel, 77  
Capacidade, o teorema de Heine-Borel, o teorema da interseção de Cantor, o teorema da cobertura de Lebesgue

12. Conjuntos Conexos, 84  
A conexidade de intervalos em  $\mathbf{R}$ , conjuntos abertos poligonalmente conexos são conexos, conjuntos conexos em  $\mathbf{R}$  são intervalos
13. O Sistema dos Números Complexos, 88  
Definição e propriedades elementares

### CAPÍTULO 3. CONVERGÊNCIA

14. Introdução às Seqüências, 92  
Convergência, unicidade do limite, exemplos
15. Subseqüências e Combinações. 99  
Subseqüências, combinações algébricas de seqüências
16. Dois Critérios para Convergência, 104  
Teorema da convergência monotônica, o teorema de Bolzano-Weierstrass, seqüências de Cauchy, o critério de Cauchy
17. Seqüências de Funções, 112  
Convergência, convergência uniforme, a norma uniforme, critério de Cauchy para convergência uniforme
18. O Limite Superior, 121  
Limite superior e limite inferior de uma seqüência em  $\mathbf{R}$ , seqüências não-limitadas, limites infinitos
19. Outros Tópicos, 125  
Ordem de grandeza, somação de Cesáro, seqüências duplas, limites iterados

### CAPÍTULO 4. FUNÇÕES CONTÍNUAS

20. Propriedades locais das Funções Contínuas, 132  
Continuidade em um ponto e em um conjunto, o critério de descontinuidade, combinações de funções
21. Funções Lineares, 141  
Funções lineares, representação matricial, a norma
22. Propriedades Globais das Funções Contínuas, 144  
Teorema da continuidade global, preservação da compacidade, preservação da conexão, teorema da continuidade da função inversa, funções contínuas limitadas
23. Continuidade Uniforme e Pontos Fixos, 151  
Continuidade uniforme, condição de Lipschitz, teorema do ponto fixo para contrações, teorema de ponto fixo de Brower
24. Seqüências de Funções Contínuas, 156  
Permuta de limite e continuidade, aproximação por funções escada e por funções parcialmente lineares, polinômios de Bernstein, teoremas de aproximação de Bernstein e Weierstrass
25. Limites de Funções, 164  
Limites restritos e não-restritos, limite inferior restrito e não-restrito, semicontinuidade
26. Outros Resultados, 171  
Teoremas de aproximação de Stone e de Stone-Weierstrass, teorema

da aproximação polinomial, teorema da extensão de Tietze, teorema de Arzelà-Ascoli

## CAPÍTULO 5. FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL

- 27. O Teorema do Valor Médio, 180  
A derivada, teorema do máximo interior, teorema de Rolle, teorema do valor médio
- 28. Outras Aplicações do Teorema do Valor Médio, 186  
Aplicações, regras de l'Hôpital, permuta de limite e derivada, teorema de Taylor
- 29. A Integral de Riemann-Stieltjes, 196  
Somas e integral de Riemann-Stieltjes, critério de integrabilidade de Cauchy, propriedades da integral, integração por partes, modificação da integral
- 30. Existência da Integral, 205  
Critério de integrabilidade de Riemann, integrabilidade das funções contínuas, teoremas do valor médio, teorema da diferenciação, teorema fundamental do cálculo integral, teorema da mudança de variável
- 31. Outras Propriedades da Integral, 221  
Permuta de limite e integral, teorema da convergência limitada, teorema da convergência monotônica, forma integral do resto, integrais que dependem de um parâmetro, fórmula de Leibniz, teorema da permuta, teorema da representação de Riesz
- 32. Integrais Impróprias e Infinitas, 236  
Integrais impróprias de funções não-limitadas, integrais infinitas, critério de Cauchy, critério da comparação, critério limite da comparação, critério de Dirichlet, convergência absoluta
- 33. Convergência Uniforme e Integrais Infinitas, 245  
Critério de Cauchy para a convergência uniforme, o teste- $M$  de Weierstrass, o teste de Dirichlet, integrais infinitas que dependem de um parâmetro, teorema da convergência dominada, integrais infinitas iteradas

## CAPÍTULO 6. SÉRIES INFINITAS

- 34. Convergência de Séries Infinitas, 262  
Convergência de séries, critério de Cauchy, convergência absoluta, teorema de reagrupamento
- 35. Testes de Convergência Absoluta, 268  
Teste da comparação, teste limite da comparação, teste da raiz, teste da razão, teste de Raabe, teste da integral
- 36. Outros Resultados sobre Séries, 278  
Lema de Abel, teste de Dirichlet, teste de Abel, teste das séries alternadas, séries duplas, multiplicação de Cauchy
- 37. Séries de Funções, 286  
Convergência absoluta e uniforme, critério de Cauchy, o teste- $M$  de Weierstrass, o critério de Dirichlet, critério de Abel, séries de potênc-

cias, teorema de Cauchy-Hadamard, teorema da diferenciação, teorema da unicidade, teorema da multiplicação, teorema de Bernstein, teorema de Abel, teorema da Tauber

38. Séries de Fourier, 298

Desigualdade de Bessel, lema de Riemann-Lebesgue, teorema da convergência pontual, teorema da convergência uniforme, teorema da convergência em norma, igualdade de Parseval, teorema de Fejér, teorema da aproximação de Weierstrass

## CAPÍTULO 7. DIFERENCIACÃO EM $\mathbb{R}^p$

39. A derivada em  $\mathbb{R}^p$ , 314

Derivadas parciais, derivadas direcionais, a derivada de  $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ , o jacobiano

40. A Regra da Cadeia e os Teoremas de Valor Médio, 324

Regra da cadeia, teorema do valor médio, permuta da ordem de diferenciação, derivada de ordem superior, teorema de Taylor

41. Teoremas de Aplicação e Funções Implícitas, 337

Classe  $C^1$ , lema da aproximação, teorema da aplicação injetiva, teorema da aplicação sobrejetiva, teorema da aplicação aberta, teorema da inversão, teorema da função implícita, teorema da parametrização, teorema do posto

42. Problemas de Extremo, 355

Extremos relativos, teste da derivada segunda, problemas de extremos com vínculos, teorema de Lagrange, vínculos de desigualdade

## CAPÍTULO 8. INTEGRAÇÃO EM $\mathbb{R}^p$

43. A Integral em  $\mathbb{R}^p$ , 369

Conteúdo zero, somas de Riemann e a integral, teste de Cauchy, propriedades da integral, teorema da integrabilidade

44. Conteúdo e a Integral, 377

Conjuntos com conteúdo, caracterização da função conteúdo, outras propriedades da integral, teorema do valor médio, integrais iteradas

45. Transformações de Conjuntos e Integrais, 390

Imagens de conjuntos com conteúdo por aplicações  $C^1$ , transformações por aplicações lineares, transformações por aplicações não-lineares, teorema do jacobiano, teorema da mudança de variáveis, coordenadas polares e esféricas, forma forte do teorema da mudança de variáveis

## REFERÊNCIAS, 407

## SUGESTÕES PARA EXERCÍCIOS SELECIONADOS, 409

## ÍNDICE ANALÍTICO, 423

---

## PREFÁCIO

---

Até algum tempo atrás, exigia-se do estudante de matemática a técnica na resolução de problemas e no manejo do cálculo, sem, entretanto, se dar ênfase a “sutilezas teóricas” tais como convergência uniforme e continuidades uniforme. Pressupunha-se a aplicação do teorema da função implícita sem o conhecimento de suas hipóteses básicas. Essa situação se modificou; hoje considera-se indispensável que todo estudante de matemática – seja ele um futuro matemático ou um técnico em computação, ou físico, ou engenheiro, ou economista – assimile o aspecto teórico fundamental do assunto, de modo a compreender não só o alcance, como as limitações da teoria geral.

Este livro é o resultado de minha experiência no ensino de análise real na Universidade de Illinois desde 1955. Minhas turmas variaram de calouros excepcionalmente bem preparados a estudantes de pós-graduação. A maioria deles não era constituída de bacharéis em matemática, mas havia estudado pelo menos três semestres de cálculo, inclusive derivadas parciais, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e séries infinitas. A fim de preparar o terreno para o presente curso, em que se demonstram teoremas de caráter analítico, seria conveniente que todo estudante tivesse cursado um semestre de álgebra linear ou álgebra moderna. Como, entretanto, isto nem sempre ocorre, resolvi prececer o estudo da análise por algumas demonstrações algébricas.

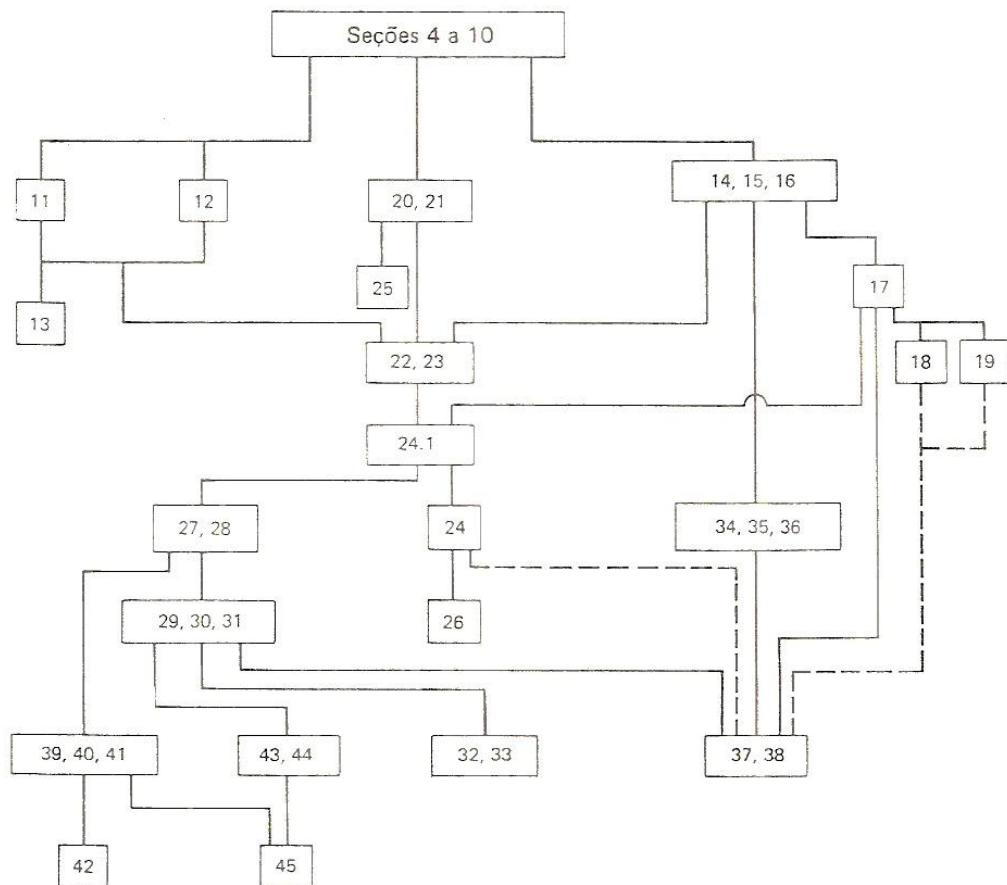
Nesta edição, as propriedades algébricas e de ordem do sistema de números reais são introduzidas de maneira mais simples do que na primeira edição. Introduzem-se, além disso, na seção 8, as definições de espaço vetorial e espaço normado – de aplicação freqüente na matemática moderna. Por outro lado, diversas seções foram reduzidas, de forma não só a tornar o livro mais acessível, como para permitir maior flexibilidade em sua utilização como livro-texto. Muitos exercícios e projetos novos foram incluídos, muito embora não nos tenhamos afastado do nível de sofisticação da primeira edição. Na primeira seção foram feitas apenas modificações de pequena monta. Quanto à diferenciação e à integração em  $\mathbf{R}^p$ , entretanto, a experiência mostrou que seu estudo ficou demasiadamente abreviado na primeira edição. Assim é que, nesta edição, resolvi condensar a teoria das funções de uma variável em um único capítulo, desenvolvendo consideravelmente o tratamento das funções de várias variáveis.

Nas seções 1 a 3 introduzimos a terminologia e a notação da teoria dos conjuntos empregadas subsequentemente, bem como alguns conceitos básicos. É preciso notar, entretanto, que essas seções *não* constituem uma apresentação sistemática da teoria dos conjuntos (apresentação, de resto, desnecessária nesta altura dos acontecimentos). Essas seções devem ser estudadas rapidamente, para consulta posterior, quando necessário. O texto começa efetivamente na seção 4; a seção 6 introduz a “análise”. É possível estudar em um semestre as seções 4 a 12, 14 a 17, 20 a 24.1 e a maior parte de 27 a 31. O professor poderá introduzir alguns outros tópicos (tais como séries) em troca da redução (ou mes-

mo omissão) de resultados que não são essenciais para o estudo ulterior. Como o livro, em sua totalidade, contém mais tópicos do que os que poderiam ser normalmente estudados em um ano, o professor provavelmente limitará a discussão de algumas seções. É, entretanto, conveniente que o estudante disponha desse material adicional para referência futura. A maioria dos tópicos abordados em cursos de “cálculo avançado” é tratada aqui; a principal exceção são as integrais curvilíneas e de superfícies e o teorema de Stokes; este assunto foi excluído porque um estudo intuitivo pertence mais propriamente aos cursos de cálculo, ao passo que o estudo rigoroso exigiria discussão bastante extensa para atender a sua finalidade.

O diagrama abaixo indica a dependência lógica das diversas seções do livro. Uma linha cheia indica dependência direta da seção precedente; uma linha tracejada indica dependência mais fraca. Todas as definições, teoremas, corolários, lemas são numerados de acordo com o número da seção. Sempre que apropriado, associei nomes aos teoremas mais importantes. As demonstrações são iniciadas pela palavra “DEMONSTRAÇÃO” e terminam com a expressão “Q. E. D.” (*quod erat demonstrandum*).

Não se pode subestimar a grande importância dos exercícios e projetos; só mediante sério e concentrado esforço na sua resolução é que o estudante poderá dominar o assunto. Os projetos desenvolvem um tópico específico em uma seqüência de exercícios e constituem característica particularmente valiosa do livro; esperamos que eles contribuam para incutir no estudante o sentido de prazer na realização de pesquisas matemáticas.



Na confecção deste livro, fui influenciado não só pela minha experiência didática, como por várias outras fontes. Foram extremamente benéficas as discussões com colegas e estudantes, e desde o aparecimento da primeira edição mantive extensa correspondência com estudantes e professores de outras universidades e instituições. Agradeço a todos quantos ofereceram comentários e sugestões. Seu interesse em melhorar o livro encorajou-me a empreender a revisão. Os professores K. W. Anderson, W. G. Bade e A. L. Peressini leram o manuscrito da primeira edição e fizeram interessantes sugestões. Agradeço particularmente ao meu colega Prof. B. C. Berndt por seus extensos e incisivos comentários e sugestões. Sou grato ainda a Carolyn J. Bloemker por sua paciência e zelo na datilografia do manuscrito revisado. Finalmente, fica aqui minha apreciação pela assistência e cooperação do pessoal da Wiley.

*Robert G. Bartle*

---

## *REFERÊNCIAS*

---

Esta relação inclui livros e artigos citados no texto, bem como algumas referências adicionais, úteis para estudo posterior.

- Apostol, T. M., *Mathematical Analysis*, Second Edition, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974.
- Bartle, R. G., *The Elements of Integration*, Wiley, New York, 1966.
- Boas, R. P., Jr., *A Primer of Real Functions*, Carus Monograph Number 13, Math. Assn. of America, 1960.
- Bruckner, A. M., "Differentiation of Integrals," *Amer. Math. Monthly*, Vol. 78, No. 9, Part II, 1-51 (1971). (H. E. Slaught Memorial Paper, Number 12.)
- Burkill, J. C., and H. Burkill, *A Second Course in Mathematical Analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1970.
- Cartan, H. P., *Cours de Mathématiques*, I. *Calcul Différentiel*; II. *Formes Différentielles*, Hermann, Paris, 1967. (English translation, Houghton-Mifflin, Boston, 1971.)
- Cheney, E. L., *Introduction to Approximation Theory*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- Dieudonné, J., *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York, 1960.
- Dunford, N., and J. T. Schwartz, *Linear Operators*, Part I, Wiley-Interscience, New York, 1958.
- Finkbeiner, D. T., II, *Introduction to Matrices and Linear Transformations*, Second Edition, W. H. Freeman, San Francisco, 1966.
- Gelbaum, B. R., and J. M. H. Olmsted, *Counterexamples in Analysis*, Holden-Day, San Francisco, 1964.
- Halmos, P. R., *Naive Set Theory*, Van Nostrand, Princeton, 1960. (Republished by Springer-Verlag, New York, 1974.)
- Hamilton, N. T., and J. Landin, *Set Theory*, Allyn-Bacon, Boston, 1961.
- Hardy, G. H., J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1959.
- Hewitt, E., and K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1965.
- Hoffman, K., and R. Kunze, *Linear Algebra*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1961.
- Kelley, J. L., *General Topology*, Van Nostrand, New York, 1955.
- Knopp, K., *Theory and Application of Infinite Series* (English translation), Hafner, New York, 1951.

- Lefschetz, S., *Introduction to Topology*, Princeton University Press, Princeton, 1949.
- Luxemburg, W. A. J., "Arzelà's Dominated Convergence Theorem for the Riemann Integral," *Amer. Math. Monthly*, Vol. 78, 970–979 (1971).
- McShane, E. J., "A Theory of Limits," published in *MAA Studies in Mathematics*, Vol. 1, R. C. Buck, editor, Math. Assn. America, 1962.
- , "The Lagrange Multiplier Rule," *Amer. Math. Monthly*, Vol. 80, 922–925 (1973).
- Royden, H. L., *Real Analysis*, Second Edition, Macmillan, New York, 1968.
- Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, Second Edition, McGraw-Hill, New York, 1964.
- Schwartz, J., "The Formula for Change of Variables in a Multiple Integral," *Amer. Math. Monthly*, Vol. 61, 81–85 (1954).
- Simmons, G. F., *Introduction to Topology and Modern Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1963.
- Spivak, M., *Calculus on Manifolds*, W. A. Benjamin, New York, 1965.
- Stone, M. H., "The Generalized Weierstrass Approximation Theorem," *Mathematics Magazine*, Vol. 21, 167–184, 237–254 (1947/48). (Reprinted in *MAA Studies in Mathematics*, Vol. 1, R. C. Buck, editor, Math. Assn. America, 1962.)
- Suppes, P., *Axiomatic Set Theory*, Van Nostrand, Princeton, 1961.
- Titchmarsh, E. C., *The Theory of Functions*, Second Edition, Oxford University Press, London, 1939.
- Varberg, D. E., "Change of Variables in Multiple Integrals," *Amer. Math. Monthly*, Vol. 78, 42–45 (1971).
- Woll, J. W., Jr., *Functions of Several Variables*, Harcourt, Brace and World, New York, 1966.
- Wilder, R. L., *The Foundations of Mathematics*, Wiley, New York, 1952.

# **Elementos de Análise Real**

**Robert G.  
BARTLE**

Texto para um primeiro curso de análise matemática em seguida ao curso de cálculo. Embora rigoroso e preciso, procura explicar e ilustrar os conceitos e resultados através de exemplos. São sobretudo características a exemplificação dos novos conceitos, o apelo conveniente à intuição, o amplo número de exercícios, as várias notas biográficas e a constante preocupação didática. Livro de grande êxito em nossas escolas em sua versão original significa certamente uma excelente contribuição à bibliografia sobre a matéria.

## **OUTROS TÍTULOS TAMBÉM DE INTERESSE**

**ÁLGEBRA LINEAR**

Anton, H.

**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E SUAS APLICAÇÕES**

Braun, M.

**INTRODUÇÃO À PROGRAMAÇÃO LINEAR**

Bregalda, P. F. et al.

**CÁLCULO NUMÉRICO COM ESTUDOS DE CASOS EM**

**FORTRAN IV, 2<sup>a</sup> impressão**

Dorn, W. S. e McCracken, D. D.

em co-edição com a EDUSP

**ESPAÇOS VETORIAIS DE DIMENSÃO FINITA**

(Álgebra Linear)

Halmos, P. R.

**ÁLGEBRA VETORIAL E GEOMETRIA**

Medeiros, L. A. et al.

ISBN 85-7001-113-X

(Edição original: ISBN 0-471-05464-X, John Wiley & Sons.,  
New York.)