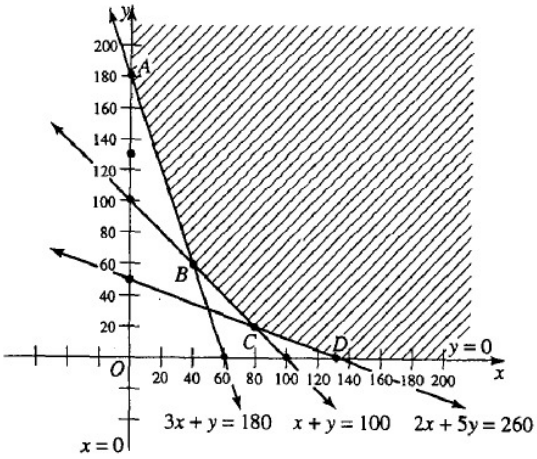

Fig. 19-5

Problemas Resolvidos

19.1 Se $a > b$ e $c > d$, prove que $a + c > b + d$.

SOLUÇÃO

Como $(a - b)$ e $(c - d)$ são positivos, $(a - b) + (c - d)$ é positivo.
Então $(a-b)+(c-d)>0$, $(a+c)-(b+d)>0$ e $(a+c)>(b+d)$.

19.2 Encontre o erro no seguinte raciocínio.

(*a*)	Se $a = 3$ e $b = 5$;	então	$a < b$
(*b*)	Multiplique por a:		$a^2 < ab$
(*c*)	Subtraia b^2:		$a^2 - b^2 < ab - b^2$
(*d*)	Fatore:		$(a + b)(a - b) < b(a - b)$
(*e*)	Divida por $a - b$:		$a + b < b$
(*f*)	Substitua $a = 3, b = 5$:		$8 < 5$

SOLUÇÃO

Não há nada errado nos passos (*a*), (*b*), (*c*) e (*d*). O erro é cometido no passo (*e*), em que a desigualdade é dividida por $a - b$, um número negativo, sem a correspondente troca de sinal da desigualdade.

19.3 Encontre os valores de x para os quais são as desigualdades verdadeiras.

(*a*) $4x + 5 > 2x + 9$. Temos $4x - 2x > 9 - 5$, $2x > 4$ e $x > 2$.

(*b*) $\frac{x}{2} - \frac{1}{3} < \frac{2x}{3} + \frac{1}{2}$. Multiplicando por 6, obtemos

$$3x - 2 < 4x + 3,\ 3x - 4x < 2 + 3,\ -x < 5,\ x > -5$$

(*c*) $x^2 < 16$.

Método 1. $x^2 - 16 < 0$, $(x - 4)(x + 4) < 0$. O produto dos fatores $(x - 4)$ e $(x + 4)$ é negativo.
São possíveis dois casos.

(1) $x - 4 > 0$ e $x + 4 < 0$ simultaneamente. Então, $x > 4$ e $x < -4$. Isto é impossível, porque x não pode ser maior que 4 e menor que -4 simultaneamente.

(2) $x - 4 < 0$ e $x + 4 > 0$ simultaneamente. Então, $x < 4$ e $x > -4$. Isto é possível se e somente se $-4 < x < 4$. Então, $-4 < x < 4$.

By Possuidão

Método 2. $(x^2)^{1/2} < (16)^{1/2}$. Agora $(x^2)^{1/2} = x$ se $x \geq 0$, e $(x^2)^{1/2} = -x$ se $x \leq 0$.

Se $x \geq 0$, $(x^2)^{1/2} < (16)^{1/2}$ pode ser escrita $x < 4$. Então, $0 \leq x < 4$.

Se $x \leq 0$, $(x^2)^{1/2} < (16)^{1/2}$ pode ser escrita $-x < 4$ or $x > -4$. Assim, $-4 < x \leq 0$.

Então, $0 \leq x < 4$ e $-4 < x \leq 0$, ou $-4 < x < 4$.

19.4 Prove que $a^2 + b^2 > 2ab$ se a e b são números reais e distintos.

SOLUÇÃO

Se $a^2 + b^2 > 2ab$, então $a^2 - 2ab + b^2 > 0$ ou $(a - b)^2 > 0$. Esta última afirmação é verdadeira porque o quadrado de qualquer número real diferente de zero é positivo.

O parágrafo acima fornece uma pista para o método de prova. Começando com $(a - b)^2 > 0$, que sabemos ser verdadeira se $a \neq b$, obtemos $a^2 - 2ab + b^2 > 0$ ou $a^2 + b^2 > 2ab$.

Observe que a prova é essencialmente uma reversão dos passos do primeiro parágrafo.

19.5 Prove que a soma de qualquer número positivo com seu inverso nunca é inferior a 2.

SOLUÇÃO

Devemos provar que $(a + 1/a) \geq 2$ se $a > 0$.

Se $(a + 1/a) \geq 2$, então $a^2 + 1 \geq 2a$, $a^2 - 2a + 1 \geq 0$, e $(a - 1)^2 \geq 0$, o que é verdadeiro.

Para provar o teorema, iniciamos com $(a - 1)^2 \geq 0$, que sabemos ser é verdadeira.

Então, $a^2 - 2a + 1 \geq 0$, $a^2 + 1 \geq 2a$ e $a + 1/a \geq 2$ após uma divisão por a.

19.6 Mostre que $a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$ para todos os valores reais de a, b e c, a menos que $a = b = c$.

SOLUÇÃO

Como $a^2 + b^2 > 2ab$, $b^2 + c^2 > 2bc$, $c^2 + a^2 > 2ca$ (veja o Problema 19.4), temos, por adição

$$2(a^2 + b^2 + c^2) > 2(ab + bc + ca) \quad \text{ou} \quad a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$$

(Se $a = b = c$, então $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.)

19.7 Se $a^2 + b^2 = 1$ e $c^2 + d^2 = 1$, demonstre que $ac + bd < 1$.

SOLUÇÃO

$a^2 + c^2 > 2ac$ e $b^2 + d^2 > 2bd$; assim, por adição,

$$(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) > 2ac + 2bd \quad \text{ou} \quad 2 > 2ac + 2bd, \text{ i.e., } 1 > ac + bd$$

19.8 Prove que $x^3 + y^3 > x^2y + y^2x$, se x e y são números reais, positivos e distintos.

SOLUÇÃO

Se $x^3 + y^3 > x^2y + y^2x$, então $(x + y)(x^2 - xy + y^2) > xy(x + y)$. Dividindo por $x + y$, que é positivo,

$$x^2 - xy + y^2 > xy \quad \text{ou} \quad x^2 - 2xy + y^2 > 0, \text{ i.e., } (x - y)^2 > 0, \text{ o que é verdadeiro se } x \neq y.$$

Os passos são reversíveis e fornecem a prova. Iniciando com $(x - y)^2 > 0$, $x \neq y$, obtemos

$$x^2 - xy + y^2 > xy$$

Multiplicando ambos lados por $x + y$, temos $(x + y)(x^2 - xy + y^2) > xy(x + y)$ ou $x^3 + y^3 > x^2y + y^2x$

19.9 Prove que $a^n + b^n \geq a^{n-1}b + ab^{n-1}$, desde que a e b sejam positivos e distintos e que $n > 1$.

SOLUÇÃO

Se $a^n + b^n > a^{n-1}b + ab^{n-1}$, então $(a^n - a^{n-1}b) - (ab^{n-1} - b^n) > 0$ ou

$$a^{n-1}(a - b) - b^{n-1}(a - b) > 0, \quad \text{i.e., } (a^{n-1} - b^{n-1})(a - b) > 0$$

A expressão é verdadeira quando os fatores são ambos positivos ou ambos negativos.

A reversão dos passos, que são reversíveis, fornece a prova.

By Possuidão

19.10 Prove que

$$a^3+\frac{1}{a^3}>a^2+\frac{1}{a^2} \quad \text{se} \quad a>0 \quad \text{e} \quad a\neq 1$$

SOLUÇÃO

Multiplicando ambos os lados da desigualdade por a^3 (que é positivo, pois $a > 0$), temos

$$a^6+1>a^5+a, \quad a^6-a^5-a+1>0 \quad \text{e} \quad (a^5-1)(a-1)>0$$

Se $a > 1$, ambos os fatores são positivos, enquanto se $0 < a < 1$, ambos os fatores são negativos. Em ambos os casos, o produto é positivo. (Se $a = 1$, o produto é nulo.)

A reversão dos passos fornece a prova.

19.11 Se a, b, c e d são números positivos e

$$\frac{a}{b}>\frac{c}{d},$$

prove que

$$\frac{a+c}{b+d}>\frac{c}{d}$$

SOLUÇÃO

Método 1. Se

$$\frac{a+c}{b+d}>\frac{c}{d},$$

então, multiplicando por $d(b + d)$, obtemos

$$(a+c)d>c(b+d), \quad ad+cd>bc+cd, \quad ad>bc$$

e, dividindo por bd,

$$\frac{a}{b}>\frac{c}{d},$$

o que, por hipótese, é verdadeiro. A reversão dos passos fornece a prova.

Método 2. Como

$$\frac{a}{b}>\frac{c}{d},$$

então

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}>\frac{c}{d}+\frac{c}{b}, \quad \frac{a+c}{b}>\frac{c(b+d)}{bd} \quad \text{e} \quad \frac{a+c}{b+d}>\frac{c}{d}$$

19.12 Prove:

(*a*) $x^2-y^2>x-y$ se $x+y>1$ e $x>y$

(*b*) $x^2-y^2<x-y$ se $x+y>1$ e $x<y$

SOLUÇÃO

(*a*) Como $x > y$, $x - y > 0$. Multiplicando ambos os lados de $x + y > 1$ pelo número positivo $x - y$, obtemos

$$(x+y)(x-y)>(x-y) \quad \text{ou} \quad x^2-y^2>x-y$$

(*b*) Como $x < y$, $x - y < 0$. A multiplicação de ambos os lados de $x + y > 1$ pelo número negativo $x - y$ reverte o sentido da desigualdade; então

$$(x+y)(x-y)<(x-y) \quad \text{ou} \quad x^2-y^2<x-y$$

19.13 A média aritmética de dois números a e b é $(a + b)/2$, a média geométrica é $\sqrt{ab}$ e a média harmônica é $2ab/(a + b)$. Prove que

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>\frac{2ab}{a+b}$$

se a e b são positivos e distintos.

By Possuidão

SOLUÇÃO

(*a*) Se $(a+b)/2 > \sqrt{ab}$, então $(a+b)^2 > (2\sqrt{ab})^2$, $a^2+2ab+b^2 > 4ab$, $a^2-2ab+b^2 > 0$ e $(a-b)^2 > 0$, o que é verdadeiro se $a \neq b$. Revertendo os passos, temos $(a+b)/2 > \sqrt{ab}$.

(*b*) Se

$$\sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b},$$

então

$$ab > \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2}, \qquad (a+b)^2 > 4ab \qquad \text{e} \qquad (a-b)^2 > 0,$$

o que é verdadeiro se $a \neq b$. Revertendo os passos, temos $\sqrt{ab} > 2ab/(a+b)$.

De (*a*) e (*b*),

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$$

19.14 Determine os valores de x para os quais (*a*) $x^2-7x+12=0$, (*b*) $x^2-7x+12>0$ e (*c*) $x^2-7x+12>0$.

SOLUÇÃO

(*a*) $x^2-7x+12=(x-3)(x-4)=0$ quando $x=3$ ou 4.

(*b*) $x^2-7x+12>0$ ou $(x-3)(x-4)>0$ quando $(x-3)>0$ e $(x-4)>0$ simultaneamente, ou quando $(x-3)<0$ e $(x-4)<0$ simultaneamente.

$(x-3)>0$ e $(x-4)>0$ simultaneamente quando $x>3$ e $x>4$, i.e., quando $x>4$.

$(x-3)<0$ e $(x-4)<0$ simultaneamente quando $x<3$ e $x<4$, i.e., quando $x<3$.

Conseqüentemente, $x^2-7x+12>0$ é satisfeita quando $x>4$ ou $x<3$.

(*c*) $x^2-7x+12<0$ ou $(x-3)(x-4)<0$ quando $(x-3)>0$ e $(x-4)<0$ simultaneamente, ou quando $(x-3)<0$ e $(x-4)>0$ simultaneamente.

$(x-3)>0$ e $(x-4)<0$ simultaneamente quando $x>3$ e $x<4$, i.e., quando $3<x<4$.

$(x-3)<0$ e $(x-4)>0$ simultaneamente quando $x<3$ e $x>4$, o que é absurdo.

Conseqüentemente, $x^2-7x+12<0$ é satisfeita quando $3<x<4$.

19.15 Determine graficamente o conjunto de valores de x definido por

(*a*) $x^2+2x-3=0$

(*b*) $x^2+2x-3>0$

(*c*) $x^2+2x-3<0$

SOLUÇÃO

A Fig. 19-6 mostra o gráfico da função definida por $y=x^2+2x-3$. Do gráfico, é flagrante que

(*a*) $y=0$ quando $x=1$, $x=-3$

(*b*) $y>0$ quando $x>1$ ou $x<-3$

(*c*) $y<0$ quando $-3<x<1$

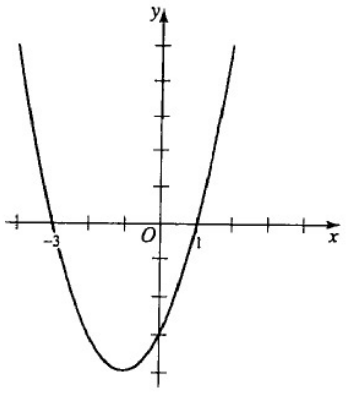

Fig. 19-6

By Possuidão

19.16 Solucione para x: (*a*) $|3x-6|+2>9$ (*b*) $|7x-1|-6<2$

SOLUÇÃO

(*a*) $|3x-6|+2>9$

$$|3x-6|>7$$
$$3x-6>7 \quad \text{ou} \quad 3x-6<-7$$
$$3x>13 \quad \text{ou} \quad 3x<-1$$
$$x>13/3 \quad \text{ou} \quad x<-1/3$$

A solução de $|3x-6|+2>9$ é a união de intervalos $(-\infty, -1/3) \cup (13/3, \infty)$.

(*b*) $|7x-1|-6<2$

$$|7x-1|<8$$
$$-8<7x-1<8$$
$$-7<7x<9$$
$$-1<x<9/7$$

A solução de $|7x-1|-6<2$ é o intervalo $(-1, 9/7)$.

19.17 Solucione para x:

(*a*) $\dfrac{2x-1}{x+1} \le 1$ (*b*) $\dfrac{x^2-10x+21}{x^2-5x+6} \le 0$

SOLUÇÃO

(*a*) $\dfrac{2x-1}{x+1} \le 1$

$$\frac{2x-1}{x+1}-1 \le 0$$
$$\frac{2x-1}{x+1}-\frac{x+1}{x+1} \le 0$$
$$\frac{x-2}{x+1} \le 0$$

Os valores críticos são $x=-1$ e $x=2$. Montamos uma tabela de sinais (veja Fig. 19-7), com uma linha contínua passando por $x=2$, uma vez que este valor torna a fração igual a 0, e 0 está incluído na solução, e uma linha tracejada passando por $x=-1$, uma vez que este valor que torna a fração indefinida. A seguir, determinamos o sinal de cada fator nos três intervalos. Finalmente, em intervalos onde a quantidade de fatores negativos for par, o problema é positivo; naqueles onde a quantidade de fatores negativos for ímpar, o problema é negativo.

A solução de

$$\frac{2x-1}{x+1} \le 1$$

é o intervalo $(-1, 2]$.

(*b*) $\dfrac{x^2-10x+21}{x^2-5x+6} \le 0$

$$\frac{(x-3)(x-7)}{(x-3)(x-2)} \le 0$$

Os valores críticos são $x=2$, $x=3$ e $x=7$. Montamos uma tabela de sinais (veja Fig. 19-8), com linhas tracejadas passando por $x=2$ e $x=3$ e uma linha contínua através de $x=7$. Como $x=3$ torna o denominador da fração igual a zero, é excluído, mesmo que torne o numerador também igual a zero. Os sinais para os fatores são determinados para cada intervalo e então utilizados para determinar o sinal do problema

By Possuidão

em cada intervalo. O fator $x - 3$ é utilizado uma quantidade par de vezes no problema e poderia ser omitido da tabela, já que qualquer fator elevado a uma potência par é sempre não-negativo.

A solução de

$$\frac{x^2 - 10x + 21}{x^2 - 5x + 6} \leq 0$$

é o intervalo $(2, 3) \cup (3, 7]$.

Observação 1. Se tivéssemos cancelado o fator comum $x - 3$, poderíamos ter desconsiderado o fato de que o problema não é definido para $x = 3$, que não pode estar no conjunto solução.

Observação 2. Quando um fator aparece no problema uma quantidade par de vezes, pode ser excluído da tabela de sinais e geralmente é omitido. Quando um fator aparece no problema uma quantidade ímpar de vezes, deve ser incluído na tabela de sinais uma quantidade ímpar de vezes, sendo que costuma-se incluir tal fator uma única vez.

		−1		2	
$x-2$	−		−		+
$x+1$	−		+		+
Problema	+		−		+

Fig. 19-7

		2		3		7	
$x-3$	−		−		+		+
$x-3$	−		−		+		+
$x-7$	−		−		−		+
$x-2$	−		+		+		+
Problema	+		−		−		+

Fig. 19-8

19.18 Determine a solução para o sistema de desigualdades $-2x + y \geq 2$ e $2x - y \leq 6$.

SOLUÇÃO

Lançamos em um gráfico as equações correspondentes $-2x + y \geq 2$ e $2x - y \leq 6$. As duas linhas são contínuas, já que ambas pertencem à solução.

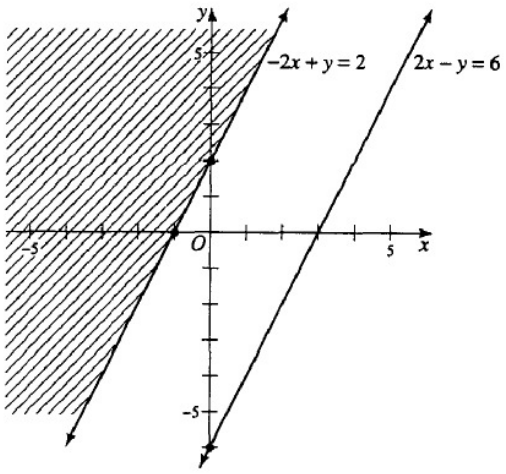

Fig. 19-9

Usando (0, 0) como o ponto de teste, obtemos $-2(0) + 0 \geq 2$, que é falsa, e $2(0) - 0 \leq 6$, que é verdadeira.

Como o ponto de teste (0, 0) torna $-2x + y \leq 2$ falsa, a solução encontra-se do lado da reta $-2x + y = 2$ oposto à região do ponto (0, 0). Então, hachuramos a região acima e à esquerda da reta $-2x + y = 2$.

Como o ponto de teste (0, 0) torna $2x - y \leq 6$ verdadeira, a solução está no lado da reta $2x - y = 6$ onde está o ponto (0, 0). Então, hachuramos a região acima e à esquerda da reta $2x - y = 6$.

A solução comum é a região acima e à esquerda de $-2x + y = 2$, a região hachurada da Fig. 19-9.

By Possuidão

19.19 A Companhia Close Shave fabrica dois tipos de barbeadores elétricos. Um é sem fio, requer 4 horas de produção e é vendido a $ 40,00. O outro modelo possui fio, consome 2 horas de produção e é vendido por $ 30,00. A empresa dispõe somente de 800 horas diárias para produção, e o setor de expedição consegue embalar e despachar somente 300 barbeadores por dia. Quantas unidades diárias de cada tipo a empresa deve produzir para maximizar sua receita diária de vendas?

SOLUÇÃO

Denotemos por x a quantidade de barbeadores sem fio produzidos por dia e por y a quantidade de barbeadores com fio produzidos diariamente.

A função objetivo é $R(x, y) = 40x + 30y$.
Os condicionantes são $4x + 2y \leq 800$ e $x + y \leq 300$.
Os condicionantes naturais são $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Na Fig. 19-10, vemos que os vértices da região formada pelos condicionantes são $A(0, 0)$, $B(200, 0)$, $C(100, 200)$ e $D(0, 300)$.

$$R(0, 0) = 40(0) + 30(0) = 0 + 0 = 0$$
$$R(200, 0) = 40(200) + 30(0) = 8000 + 0 = 8000$$
$$R(100, 200) = 40(100) + 30(200) = 4000 + 6000 = 10\,000$$
$$R(0, 300) = 40(0) + 30(300) = 0 + 9000 = 9000$$

A Companhia Close Shave alcança uma receita diária máxima de $ 10 000,00 produzindo 100 barbeadores sem fio e 200 barbeadores com fio por dia.

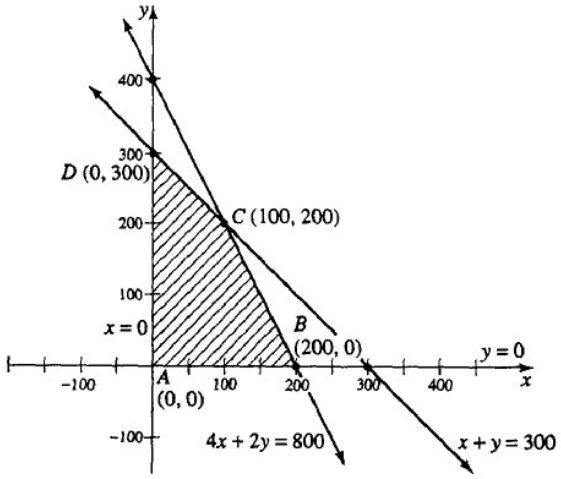

Fig. 19-10

Problemas Complementares

19.20 Se $a > b$, prove que $a - c > b - c$, onde c é qualquer número real.

19.21 Se $a > b$ e $k > 0$, prove que $ka > kb$.

19.22 Encontre os valores de x para os quais as seguintes desigualdades são verdadeiras.

(*a*) $2(x + 3) > 3(x - 1) + 6$ (*b*) $\frac{x}{4} + \frac{2}{3} < \frac{2x}{3} - \frac{1}{6}$ (*c*) $\frac{1}{x} + \frac{3}{4x} > \frac{7}{8}$ (*d*) $x^2 > 9$

By Possuidão

19.23 Para quais valores de a a expressão $(a + 3) < 2\,(2a + 1)$ é verdadeira?

19.24 Prove que $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \geq b$ para todos os valores reais de a e b, se e somente se $a = b$.

19.25 Prove que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{2}{x+y}$$

se x e y são positivos e distintos.

19.26 Prove que

$$\frac{x^2 + y^2}{x+y} < x + y \qquad \text{se} \qquad x > 0,\ y > 0$$

19.27 Prove que $xy + 1 \geq x + y$ se $x \geq 1$ e $y \geq 1$ ou se $x \leq 1$ e $y \leq 1$.

19.28 Se $a > 0$, $a \neq 1$ e n é qualquer inteiro positivo, prove que

$$a^{n+1} + \frac{1}{a^{n+1}} > a^n + \frac{1}{a^n}$$

19.29 Demonstre que $\sqrt{2} + \sqrt{6} < \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

19.30 Determine os valores de x para os quais as seguintes desigualdades são verdadeiras.

$$(a)\ x^2 + 2x - 24 > 0 \qquad (b)\ x^2 - 6 < x \qquad (c)\ 3x^2 - 2x < 1 \qquad (d)\ 3x + \frac{1}{x} > \frac{7}{2}$$

19.31 Determine graficamente o conjunto de valores de x para os quais

$$(a)\ x^2 - 3x - 4 > 0,\ (b)\ 2x^2 - 5x + 2 < 0$$

19.32 Determine o conjunto solução das desigualdades, utilizando a notação de intervalos.

$$(a)\ |3x + 3| - 15 \geq -6 \qquad (b)\ |2x - 3| < 7$$

19.33 Determine o conjunto solução das desigualdades, utilizando a notação de intervalos.

$$(a)\ x^2 \geq 10x - 21 \qquad (c)\ (x-1)(x-2)(x+3) > 0 \qquad (e)\ \frac{x-5}{x+1} \leq 3$$

$$(b)\ \frac{(x+1)(x-1)}{x} < 0 \qquad (d)\ \frac{x-1}{x+2} \leq 0 \qquad (f)\ \frac{(x-6)(x-3)}{x+2} \geq 0$$

19.34 Esboce o gráfico para as desigualdades e hachureie a região solução.

$$(a)\ 4x - y \leq 5 \qquad (b)\ y - 3x > 2$$

19.35 Esboce o gráfico dos sistemas de desigualdades e hachureie a região solução.

$$(a)\ x + 2y \leq 20 \quad \text{e} \quad 3x + 10y \leq 80$$

$$(b)\ 3x + y \geq 4,\quad x + y \geq 2,\quad -x + y \leq 4 \quad \text{e} \quad x \leq 5$$

By Possuidão

19.36 Use a programação linear para solucionar aos problemas.

(*a*) Raul constrói almoxarifados portáteis para obras. Ele utiliza 10 chapas de compensado e 15 parafusos em um prédio pequeno e 15 chapas de compensado e 45 parafusos em um prédio grande. Ele dispõe de 60 chapas de compensado e 135 parafusos para uso. Se Raul obtém um lucro de $ 400,00 por prédio pequeno e $ 500,00 por prédio grande, quantos de cada tipo ele deve construir para maximizar seu lucro?

(*b*) Júlio e Wagner fabricam carrilhões e casas para passarinhos em sua oficina de artesanato. Cada carrilhão requer 3 horas de trabalho de Júlio e 1 hora de trabalho de Wagner. Cada casa para passarinho requer 4 horas de trabalho de Júlio e 2 horas de trabalho de Wagner. Júlio não pode trabalhar mais do que 48 horas por semana e Wagner não pode trabalhar mais do que 20 horas por semana. Se cada carrilhão é vendido a $ 12,00 e cada casa para passarinho a $ 20,00, quantas unidades de cada item eles devem produzir para maximizar a receita?

Respostas dos Problemas Complementares

19.22 (*a*) $x<3$ (*b*) $x>2$ (*b*) $0<x<2$ (*d*) $x<-3$ ou $x>3$

19.23 $a>\frac{1}{3}$

19.30 (*a*) $x>4$ ou $x<-6$ (*b*) $-2<x<3$ (*c*) $-\frac{1}{3}<x<1$ (*d*) $x>\frac{2}{3}$ ou $0<x<\frac{1}{2}$

19.31 (*a*) $x>4$ ou $x<-1$ (*b*) $\frac{1}{2}<x<2$

19.32 (*a*) $(-\infty,-4)\cup[2,\infty)$ (*b*) $(2,5)$

19.33 (*a*) $(-\infty,3]\cup[7,\infty)$ (*b*) $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ (*c*) $(-3,1)\cup(2,\infty)$ (*d*) $(-2,1]$ (*e*) $(-\infty,-4)\cup(-1,\infty)$ (*f*) $(-6,3)\cup(6,\infty)$

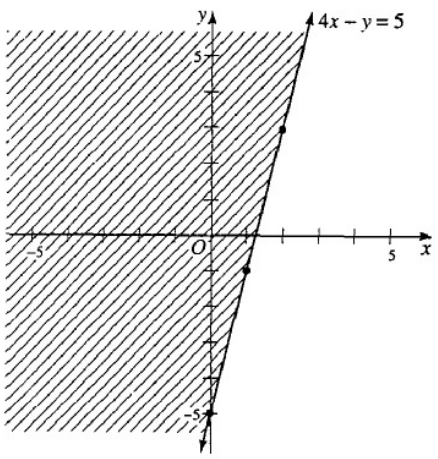

Fig- 19-11

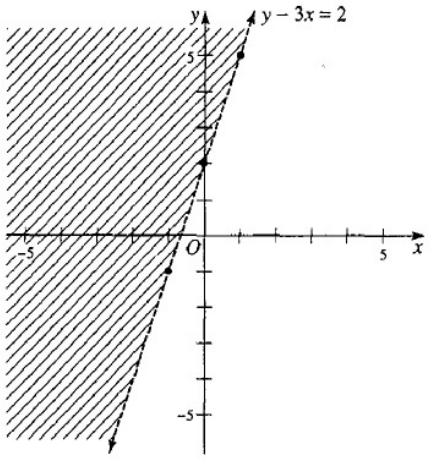

Fig. 19-12

By Possuidão

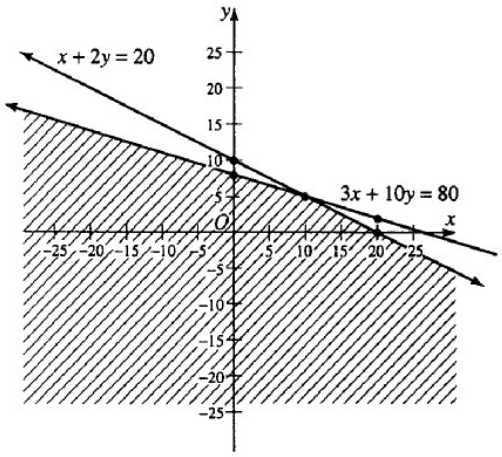

Fig- 19-13

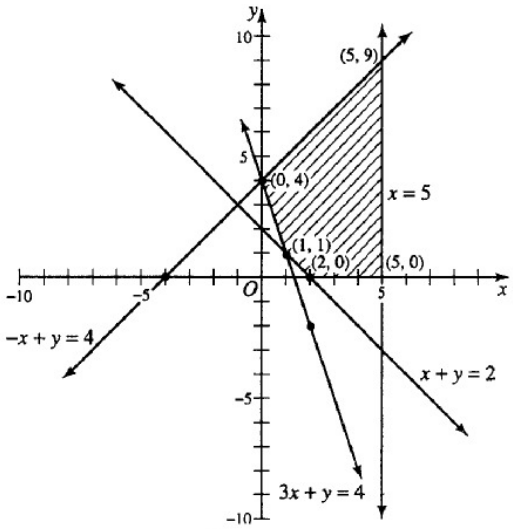

Fig. 19-14

19.34 (*a*) Figura 19-11
(*b*) Figura 19-12

19.35 (*a*) Figura 19-13
(*b*) Figura 19-14

19.36 (*a*) Raul maximiza seu lucro construindo 6 prédios pequenos e nenhum prédio grande.
(*b*) Júlio e Wagner maximizarão sua receita fabricando 6 carrilhões e 8 casas para passarinhos.

By Possuidão

Capítulo 20

Funções Polinomiais

20.1 EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Uma equação racional inteira de grau n na variável x é uma equação que pode ser escrita na forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \qquad a_n \neq 0$$

onde n é um inteiro positivo e $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ são constantes.

Assim, $4x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$, $x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{4} = 0$ e $x^4 + \sqrt{-3}x - 8 = 0$ são equações racionais inteiras em x de grau 3, 2 e 4, respectivamente. Note que, em cada equação, os expoentes de x são positivos e inteiros, e os coeficientes são constantes (números reais ou complexos).

O coeficiente do termo de mais alto grau é denominado coeficiente líder e a_0 é denominado termo constante.

Neste capítulo, serão consideradas apenas equações racionais inteiras.

Um polinômio de grau n na variável x é uma função de x que pode ser escrita na forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0$$

onde n é um inteiro positivo e $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ são constantes. Então, $P(x) = 0$ é uma equação racional inteira de grau n em x.

Se $P(x) = 3x^3 + x^2 + 5x - 6$, então $P(-2) = 3(-2)^3 + (-2)^2 + 5(-2) - 6 = -36$.
Se $P(x) = x^2 + 2x - 8$, então $P(\sqrt{5}) = 5 + 2\sqrt{5} - 8 = 2\sqrt{5} - 3$.

Todo valor de x que anula $P(x)$ é denominado *raiz* da equação $P(x) = 0$. Assim, 2 é uma raiz da equação $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 5x - 6 = 0$, uma vez que $P(2) = 24 - 8 - 10 - 6 = 0$.

20.2 ZEROS DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS

A. Teorema do resto: Se r é uma constante qualquer e se um polinômio $P(x)$ é dividido por $(x - r)$, o resto é $P(r)$.

Por exemplo, se $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 8$ é dividido por $x + 1$, então $r = -1$ e o resto é $P(-1) = -2 - 3 + 1 + 8 = 4$. Ou seja,

$$\frac{2x^3 - 3x^2 - x + 8}{x + 1} = Q(x) + \frac{4}{x + 1}, \quad \text{onde } Q(x) \text{ é um polinômio em } x.$$

By Possuidão

B. Teorema do fator: Se r é uma raiz da equação $P(x) = 0$, i.e., se $P(r) = 0$, então $(x - r)$ é um fator de $P(x)$. Reciprocamente, se $(x - r)$ é um fator de $P(x)$, então r é uma raiz de $P(x) = 0$, ou $P(r) = 0$.

Assim, $1, -2, -3$ são as três raízes da equação $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$, uma vez que $P(1) = P(-2) = P(-3) = 0$. Então, $(x - 1)$, $(x + 2)$ e $(x + 3)$ são fatores de $x^3 + 4x^2 + x - 6$.

C. Divisão sintética: Divisão sintética é um método simplificado de divisão de um polinômio $P(x)$ por $(x - r)$, onde r é um número estabelecido. Por este método, determinamos valores dos coeficientes do quociente, e o valor do resto pode ser imediatamente determinado.

Exemplo 20.1 Divida $(5x + x^4 - 14x^2)$ por $(x + 4)$ usando a divisão sintética.

Escreva em uma linha os termos do dividendo em potências decrescentes da variável, preenchendo com coeficientes nulos os termos referentes a potências que não aparecem; escreva o divisor na forma $(x - a)$.

$$(x^4 + 0x^3 - 14x^2 + 5x + 0) \div (x - (-4))$$

Escreva o termo constante a do divisor na segunda linha, à esquerda da primeira coluna de coeficientes:

	1	0	−14	5	0
−4					

Desça o coeficiente da primeira coluna da primeira linha para a segunda linha.

	1	0	−14	5	0
−4	1				

Multiplique a pelo coeficiente recém posicionado na segunda linha e some o resultado ao próximo (segundo, no caso) coeficiente da primeira linha, colocando o resultado na segunda coluna da segunda linha, abaixo deste coeficiente.

	1	0	−14	5	0
−4	1	−4			

Repita o processo, multiplicando a pelo último número escrito na segunda linha, somando, a seguir, o resultado com o próximo coeficiente da primeira linha e colocando o resultado na segunda linha, e assim sucessivamente, até que não existam mais coeficientes com os quais operar.

	1	0	−14	5	0
−4	1	−4	2		

	1	0	−14	5	0
−4	1	−4	2	−3	12

	1	0	−14	5	0
−4	1	−4	2	−3	12

By Possuidão

Na segunda linha, teremos a constante a do divisor seguida de todos os coeficientes do quociente da divisão e, por último, do resto da divisão. O grau do polinômio quociente é uma unidade menor que o grau do polinômio dividendo, porque estamos dividindo por um fator linear. Aqui, o grau do polinômio quociente é 3.

O quociente com resto para $(5x + x^4 - 14x^2) \div (x + 4)$ é

$$1x^3 - 4x^2 + 2x - 3 + \frac{12}{x+4}$$

D. Teorema fundamental da álgebra: Toda equação polinomial $P(x) = 0$ tem pelo menos uma raiz, real ou complexa.

Assim, $x^7 - 3x^5 + 2 = 0$ tem pelo menos uma raiz.

Mas $f(x) = \sqrt{x} + 3 = 0$ não tem raiz, uma vez que não existe número r tal que $f(r) = 0$. Como esta equação não é racional, o teorema fundamental não se aplica.

E. Número de raízes em uma equação: Toda equação racional inteira $P(x) = 0$ de grau n tem exatamente n raízes.

Assim, $2x^3 + 5x^2 - 14x - 8 = 0$ tem exatamente 3 raízes, a saber, $2, -1/2, -4$.

Algumas das raízes n podem ser iguais. Assim, a equação de sexto grau $(x-2)^3(x-5)^2(x+4) = 0$ tem 2 para raiz tripla, 5 para raiz dupla e -4 para raiz simples, i.e., as seis raízes são $2, 2, 2, 5, 5, -4$.

20.3 RESOLVENDO EQUAÇÕES POLINOMIAIS

A. Raízes complexas e irracionais

(1) Se um número complexo $a + bi$ é uma raiz da equação racional inteira $P(x) = 0$ com *coeficientes reais*, então o número complexo conjugado $a - bi$ também é uma raiz.

Sendo assim, toda equação racional inteira de grau ímpar com coeficientes reais tem pelo menos uma raiz real.

(2) Se a equação racional inteira $P(x) = 0$ com *coeficientes racionais* tem $a + \sqrt{b}$ como raiz, onde a e b são racionais e $\sqrt{b}$ é irracional, então $a - \sqrt{b}$ também é uma raiz.

B. Teorema da raiz racional

Se b/c, uma fração racional irredutível, é uma raiz da equação

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \qquad a_n \neq 0$$

com coeficientes inteiros, então b é um fator de a_0 e c é um fator de a_n.

Assim, se b/c é uma raiz racional de $6x^3 + 5x^2 - 3x - 2 = 0$, os valores de b são limitados aos fatores de 2, que são $\pm 1, \pm 2$; e os valores de c são limitados aos fatores de 6, que são $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Assim, as únicas raízes racionais possíveis são $\pm 1, \pm 2, \pm 1/2, \pm 1/3, \pm 1/6, \pm 2/3$.

C. Teorema da raiz inteira

Segue-se que, se uma equação $P(x) = 0$ tem coeficientes inteiros e o coeficiente líder é 1:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

então toda raiz racional de $P(x) = 0$ é um inteiro e um fator de a_0.

Assim, as raízes racionais de $x^3 + 2x^2 - 11x - 12 = 0$, se existirem, estarão limitadas aos fatores inteiros de 12, que são $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$.

D. Teorema do valor intermediário

Se $P(x) = 0$ é uma equação polinomial com coeficientes reais, então os valores aproximados para as raízes reais de $P(x) = 0$ podem ser encontrados esboçando-se o gráfico de $y = P(x)$ e determinando-se os valores de x nos pontos onde o gráfico intercepta o eixo x ($y = 0$). Fundamental neste procedimento é o fato de que, se $P(a)$ e $P(b)$ têm sinais opostos, então $P(x) = 0$ tem pelo menos uma raiz entre $x = a$ e $x = b$. Este fato está baseado na continuidade do gráfico de $y = P(x)$ quando $P(x)$ é um polinômio com coeficientes reais.

Exemplo 20.2 Isole cada zero real de $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x^2 + 4$ entre dois inteiros consecutivos.

Como $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x^2 + 4$ tem grau 3, existem no máximo três raízes reais. Procuraremos estas raízes no intervalo -5 a 5. O intervalo é arbitrário e pode precisar ser expandido se os zeros reais não forem encontrados aí.

By Possuidão

Por divisão sintética, encontramos o valor de $P(x)$ para cada inteiro no intervalo selecionado. Os restos obtidos pela divisão sintética são os valores de $P(x)$ e estão apresentados na tabela abaixo.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$P(x)$	-341	-180	-77	-20	3	4	-5	-12	-5	28	99

Note que $P(-2) = -20$ e $P(-1) = 3$ têm sinais opostos, de modo que, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe um zero entre -2 e -1. Similarmente, como $P(0) = 4$ e $P(1) = -5$, existe um zero entre 0 e 1, e como $P(3) = -5$ e $P(4) = 28$, existe um zero entre 3 e 4. Três zeros reais foram isolados, de modo que localizamos todos os três zeros de $P(x)$.

Nem sempre é possível localizar todas as raízes reais deste modo, porque poderia haver mais de uma raiz entre dois inteiros consecutivos. Quando existe um número par de raízes entre dois inteiros consecutivos, o Teorema do Valor Intermediário não vai revelá-las quando utilizamos apenas valores inteiros para x. O Teorema do Valor Intermediário não nos diz quantas raízes reais existem no intervalo, mas apenas que existe pelo menos uma raiz no intervalo.

E. Cotas inferior e superior para as raízes reais.

Um número a é denominado *cota superior* ou *limite superior* para as raízes reais de $P(x) = 0$ se nenhuma raiz é maior que a. Um número b é denominado *cota inferior* ou *limite inferior* para as raízes reais de $P(x) = 0$ se nenhuma raiz é menor que b. O teorema a seguir é útil para determinar as cotas superior e inferior.

Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0 = 0$, onde $a_0, a_1 \ldots, a_n$ são reais e $a_n > 0$. Então:

(1) Se pela divisão sintética de $P(x)$ por $x - a$, com $a \geq 0$, todos os números obtidos na segunda linha são positivos ou nulos, então a é uma cota superior para todas as raízes reais de $P(x) = 0$.

(2) Se pela divisão sintética de $P(x)$ por $x - b$, com $b \leq 0$, todos os números obtidos na segunda linha são alternadamente positivos e negativos (ou nulos), então b é uma cota inferior para todas as raízes reais de $P(x) = 0$.

Exemplo 20.3 Encontre um intervalo que contenha todas as raízes de $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6$.

Vamos encontrar o inteiro b, que é a menor cota superior para todas as raízes de $P(x)$, e o inteiro a, que é a maior cota inferior para todas as raízes de $P(x)$. Todas as raízes reais estarão no intervalo $[a, b]$. Para encontrar a e b, usamos a divisão sintética para $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6$.

	2	−5	+0	+6
1	2	−3	−3	−3

	2	−5	+0	+6
2	2	−1	−2	+2

	2	−5	+0	+6
3	2	1	3	15

Quando dividimos usando 3, a linha do quociente é toda positiva, de modo que 3 é o menor inteiro que é uma cota superior para todas as raízes de $P(x)$. Assim, $b = 3$.

	2	−5	0	6
−1	2	−7	7	−1

Quando dividimos usando -1, a linha do quociente alterna o sinal, de modo que -1 é o maior inteiro que é uma cota inferior para as raízes de $P(x)$. Assim, $a = -1$.

As raízes reais de $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6$ estão no intervalo $(-1, 3)$, ou $-1 < x < 3$. Como $P(-1) \neq 0$ e $P(3) \neq 0$, usamos notação de intervalo para indicar que nenhum dos extremos é uma raiz.

By Possuidão

F. A Regra de Sinais de Descartes

Se os termos de um polinômio $P(x)$ com coeficientes reais forem listados em ordem decrescente das potências de x, dizemos que ocorre uma *variação de sinal* quando dois termos consecutivos diferem em sinal. Por exemplo, $x^3 - 2x^3 + 3x - 12$ tem 3 variações de sinal, e $2x^7 - 6x^5 - 4x^4 + x^2 - 2x + 4$ tem 4 variações de sinal.

A Regra de Sinais de Descartes diz que o número de raízes positivas de $P(x) = 0$ é igual ao número de variações de sinal de $P(x)$ ou menor que este número, diferindo deste por um número par. O número de raízes negativas de $P(x) = 0$ é igual ao número de variações de sinal de $P(-x)$ ou menor que este número, diferindo dele por um inteiro par.

Assim, em $P(x) = x^9 - 2x^5 + 2x^2 - 3x + 12 = 0$, existem quatro variações de sinal de $P(x)$; portanto, o número de raízes positivas de $P(x) = 0$ é 4, (4 − 2) ou (4 − 4). Como $P(-x) = (-x)^9 - 2(-x)^5 + 2(-x)^2 - 3(-x) + 12 = -x^9 + 2x^5 + 2x^2 + 3x + 12 = 0$ tem uma variação de sinal, $P(x) = 0$ tem exatamente uma raiz negativa. Assim, existem 4, 2 ou 0 raízes positivas, 1 negativa e no mínimo 9 − (4 + 1) = 4 raízes complexas. (Existem 4, 6 ou 8 raízes complexas. Por quê?)

20.4 APROXIMANDO RAÍZES REAIS

Ao resolvermos uma equação polinomial $P(x) = 0$, nem sempre é possível encontrarmos todas as suas raízes pelos métodos acima. Conseguimos determinar raízes irracionais e imaginárias quando somos capazes de encontrar fatores quadráticos, pois aí os encontramos fazendo uso da fórmula quadrática. Se não pudermos encontrar fatores quadráticos de $P(x) = 0$, então não conseguiremos descobrir as raízes imaginárias, mas geralmente podemos encontrar uma aproximação para algumas das raízes reais.

Para calcularmos uma aproximação para uma raiz real de $P(x) = 0$, precisamos primeiro encontrar um intervalo que contenha uma raiz real de $P(x) = 0$. Podemos obter este intervalo fazendo uso do Teorema do Valor Intermediário para localizar números a e b tais que $P(a)$ e $P(b)$ tenham sinais opostos. Continuamos fazendo uso do Teorema do Valor Intermediário até termos isolado a raiz real em um intervalo suficientemente pequeno, que nos garanta o grau de precisão desejado.

Exemplo 20.4 Encontre uma raiz real de $x^3 + 3x + 8 = 0$, com uma precisão de duas casas decimais.

Pela Regra de Sinais de Descartes, $P(x) = x^3 + 3x + 8 = 0$ não tem raízes reais positivas e tem uma raiz real negativa.

Usando a divisão sintética, encontramos $P(-2) = -6$ e $P(-1) = 4$, de modo que, pelo Teorema do Valor Intermediário, $P(x) = x^3 + 3x + 8$ tem uma raiz real entre -2 e -1.

Agora, usamos a divisão sintética e o Teorema do Valor Intermediário para determinar o intervalo de comprimento de um décimo que contém a raiz. Os resultados estão apresentados na tabela abaixo.

x	−1,0	−1,1	−1,2	−1,3	−1,4	−1,5	−1,6	−1,7	−1,8	−1,9	−2,0
$P(x)$	4	3,37	2,67	1,90	1,06	0,13	−0,80	−2,01	−3,23	−4,56	−6

Podemos ver que $P(-1,5)$ é positivo e $P(-1,6)$ é negativo, de modo que existe uma raiz real entre $-1,6$ e $-1,5$.

Agora, verificamos o dígito dos centésimos, usando a divisão sintética no intervalo entre $-1,6$ e $-1,5$. Não precisamos encontrar todos os valores centesimais, mas apenas uma mudança de sinal entre dois valores consecutivos.

x	−1,50	−1,51	−1,52
$P(x)$	0,13	0,03	−0,07

Podemos ver que $P(-1,51)$ é positivo e $P(-1,52)$ é negativo, de modo que, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe uma raiz real entre $-1,51$ e $-1,52$.

Como a raiz real está localizada entre $-1,51$ e $-1,52$, precisamos apenas determinar se vamos arredondá-la para $-1,51$ ou para $-1,52$. Para decidir isto, determinamos $P(-1,515)$, que vale aproximadamente $-0,02$. Este valor de $P(-1,515)$ é negativo e $P(-1,51)$ é positivo, de modo que sabemos que a raiz está entre $-1,515$ e $-1,510$ e todos os números dentro deste intervalo, arredondados para duas casas decimais, são iguais a $-1,51$.

Assim, a única raiz real de $x^3 + 3x + 8 = 0$, com precisão de duas casas decimais, é $-1,51$.

Para utilizarmos uma calculadora gráfica para aproximar as raízes reais de um polinômio, esboçamos o gráfico da função e utilizamos os recursos de traço e *zoom* da calculadora. Após usamos o traço para localizar um intervalo que contenha uma raiz real, usando também o Teorema do Valor Intermediário. Daí fazemos uso do *zoom*

By Possuidão

para focar neste intervalo. Alternamos o traço e o *zoom* até encontrarmos dois valores de x que, arredondados, nos dêem a precisão estipulada e que tenham imagens pela função com sinais opostos.

Problemas Resolvidos

20.1 Prove o teorema do resto: Se um polinômio $P(x)$ é dividido por $(x - r)$, o resto é $P(r)$.

SOLUÇÃO

Na divisão de $P(x)$ por $(x - r)$, denotemos por $Q(x)$ o quociente e por R, uma constante, o resto. Por definição, $P(x) = (x - r)\,Q(x) + R$, uma identidade para todos os valores de x. Fazendo $x = r$, obtemos $R(r) = R$.

20.2 Determine o resto R após realizadas as seguintes divisões.

(*a*) $(2x^3 + 3x^2 - 18x - 4) \div (x - 2)$ $\quad R = P(2) = 2(2^3) + 3(2^2) - 18(2) - 4 = -12$

(*b*) $(x^4 - 3x^3 + 5x + 8) \div (x + 1)$ $\quad R = P(-1) = (-1)^4 - 3(-1)^3 + 5(-1) + 8 = 1 + 3 - 5 + 8 = 7$

(*c*) $\left(4x^3 + 5x^2 - 1\right) \div \left(x + \frac{1}{2}\right)$ $\quad R = P\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 5\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{4}$

(*d*) $(x^3 - 2x^2 + x - 4) \div x$ $\quad R = P(0) = -4$

(*e*) $\left(\frac{8}{27}x^3 - \frac{4}{9}x^2 + x - \frac{3}{2}\right) \div (2x - 3)$ $\quad R = P\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{8}{27}\left(\frac{3}{2}\right)^3 - \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$

(*f*) $(x^8 - x^5 - x^3 + 1) \div (x + \sqrt{-1})$ $\quad R = P(-i) = (-i)^8 - (-i)^5 - (-i)^3 + 1 = i^8 + i^5 + i^3 + 1$
$= 1 + i - i + 1 = 2$

20.3 Prove o teorema do fator: Se r é uma raiz da equação $P(x) = 0$, então $(x - r)$ é um fator de $P(x)$; e, reciprocamente, se $(x - r)$ é um fator de $P(x)$, então r é uma raiz de $P(x) = 0$.

SOLUÇÃO

Na divisão de $P(x)$ por $(x - r)$, denotemos por $Q(x)$ o quociente e por R, uma constante, o resto. Então $P(x) = (x - r)\,Q(x) + R$ ou $P(x) = (x - r)Q(x) + P(r)$, de acordo com teorema do resto.

Se r é uma raiz de $P(x) = 0$, então $R(r) = 0$. Daí, $P(x) = (x - r)Q(x)$, ou $(x - r)$ é um fator de $P(x)$. Reciprocamente, se $(x - r)$ é um fator de $P(x)$, então o resto na divisão de $P(x)$ por $(x - r)$ é zero. Portanto, $P(r) = 0$, i.e., r é uma raiz de $P(x) = 0$.

20.4 Prove que $(x - 3)$ é um fator do polinômio $P(x) = x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 24$.

SOLUÇÃO

$P(3) = 81 - 108 - 63 + 66 + 24 = 0$. Portanto $(x - 3)$ é um fator de $P(x)$, 3 é um *zero* do polinômio $P(x)$ e 3 é uma *raiz* da equação $P(x) = 0$.

20.5 (*a*) -1 é uma raiz da equação $P(x) = x^3 - 7x - 6 = 0$?

(*b*) 2 é uma raiz da equação $P(y) = y^4 - 2y^2 - y + 7 = 0$?

(*c*) $2i$ é uma raiz da equação $P(z) = 2z^3 + 3z^2 + 8z + 12 = 0$?

SOLUÇÃO

(*a*) $P(-1) = -1 + 7 - 6 = 0$. Portanto, -1 é uma raiz da equação $P(x) = 0$ e $[x - (-1)] = x + 1$ é um fator do polinômio $P(x)$.

(*b*) $P(2) = 16 - 8 - 2 + 7 = 13$. Portanto, 2 não é uma raiz de $P(y) = 0$ e $(y - 2)$ não é um fator de $y^4 - 2y^2 - y + 7$.

(*c*) $P(2i) = 2(2i)^3 + 3(2i)^2 + 8(2i) + 12 = -16i - 12 + 16i + 12 = 0$. Portanto, $2i$ é uma raiz de $P(z) = 0$ e $(z - 2i)$ é um fator do polinômio $P(z)$.

20.6 Prove que $x - a$ é um fator de $x^n - a^n$, para n um inteiro positivo arbitrário.

SOLUÇÃO

$P(x) = x^n - a^n$; então $P(a) = a^n - a^n = 0$. Como $P(a) = 0$, $x - a$ é um fator de $x^n - a^n$.

By Possuidão

20.7 (*a*) Prove que $x^5 + a^5$ é divisível de forma exata por $x + a$.

(*b*) Qual é o resto da divisão de $y^6 + a^6$ é por $y + a$?

SOLUÇÃO

(*a*) $P(x) = x^5 + a^5$; daí $P(-a) = (-a)^5 + a^5 = -a^5 + a^5 = 0$. Como $P(-a) = 0$, $x^5 + a^5$ é divisível de forma exata por $x + a$.

(*b*) $P(y) = y^6 + a^6$. Resto $= P(-a) = (-a)^6 + a^6 = a^6 + a^6 = 2a^6$

20.8 Prove que $x + a$ é um fator de $x^n - a^n$ quando n é um inteiro positivo par, mas não é um fator quando n é um inteiro positivo ímpar. Suponha $a \neq 0$.

SOLUÇÃO

$$P(x) = x^n - a^n$$

Quando n é par, $P(-a) = (-a)^n - a^n = a^n - a^n = 0$. Como $P(-a) = 0$, $x + a$ é fator de $x^n - a^n$ quando n é par.

Quando n é ímpar, $P(-a) = (-a)^n - a^n = -a^n - a^n = -2a^n$. Como $P(-a) \neq 0$, $x^n - a^n$ não é divisível de forma exata por $x + a$ quando n é ímpar (sendo o resto igual a $-2a^n$).

20.9 Encontre os valores de p para os quais

(*a*) $2x^3 - px^2 + 6x - 3p$ é divisível de forma exata por $x + 2$,

(*b*) $(x^4 - p^2x + 3 - p) \div (x - 3)$ tem resto igual a 4.

SOLUÇÃO

(*a*) O resto é $2(-2)^3 - p(-2)^2 + 6(-2) - 3p = -16 - 4p - 12 - 3p = -28 - 7p = 0$. Logo, $p = -4$.

(*b*) O resto é $3^4 - p^2(3) + 3 - p = 84 - 3p^2 - p = 4$. Daí, $3p^2 + p - 80 = 0$, $(p - 5)(3p + 16) = 0$ e $p = 5, -16/3$.

20.10 Por divisão sintética, determine o quociente e o resto na seguinte divisão.

$$(3x^5 - 4x^4 - 5x^3 - 8x + 25) \div (x - 2)$$

SOLUÇÃO

	3	−4	−5	0	−8	25
2	3	2	−1	−2	−12	1

Quociente: $3x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x - 12$

Resto: 1

A linha superior contém os coeficientes do dividendo, sendo zero o coeficiente da potência de x que não aparece ($0x^2$). O 2 no extremo esquerdo da segunda linha é o segundo termo do divisor, com sinal trocado (uma vez que o coeficiente de x no divisor é 1).

O primeiro coeficiente da linha superior, 3, é também o segundo termo da segunda linha, e é multiplicado pelo 2 do divisor. O produto 6 é somado ao coeficiente -4 da primeira linha, e o resultado, 2, é o próximo número a ser colocado na segunda linha. A seguir, este 2 é multiplicado pelo 2 do divisor, e o produto, 4, é somado a -5, e o resultado, -1, é colocado na segunda linha, e assim sucessivamente. O último número da segunda linha é o resto. e os números da segunda linha, com exceção do primeiro e do último, são os coeficientes do quociente.

Como o dividendo é do quinto grau e o divisor é do primeiro grau, o quociente é de quarto grau.

A resposta pode ser escrita:

$$3x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x - 12 + \frac{1}{x - 2}$$

20.11 $(x^4 - 2x^3 - 24x^2 + 15x + 50) \div (x + 4)$

By Possuidão

SOLUÇÃO

	1	−2	−24	15	50
−4	1	−6	0	15	−10

Resposta: $x^3 - 6x^2 + 15 - \dfrac{10}{x+4}$

20.12 $(2x^4 - 17x^2 - 4) \div (x + 3)$

SOLUÇÃO

	2	0	−17	0	−4
−3	2	−6	1	−3	5

Resposta: $2x^3 - 6x^2 + x - 3 + \dfrac{5}{x+3}$

20.13 $(4x^3 - 10x^2 + x - 1) \div (x - 1/2)$

SOLUÇÃO

	4	−10	1	−1
1/2	4	−8	−3	−5/2

Resposta: $4x^2 - 8x - 3 - \dfrac{5}{2x-1}$

20.14 Dado $P(x) = x^3 - 6x^2 - 2x + 40$, calcule (*a*) $P(-5)$ e (*b*) $P(4)$, usando a divisão sintética.

SOLUÇÃO

	1	−6	−2	40
−5	1	−11	53	−225

	1	2	−23	−60
5	1	7	12	0

Resposta: $P(-5) = -225$ e $P(4) = 0$

20.15 Dado que uma raiz de $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$ é 5, resolva a equação.

By Possuidão

SOLUÇÃO

	1	2	−23	−60
5	1	7	12	0

Divida $x^3 + 2x^2 - 23x - 60$ por $x - 5$.

A equação derivada é $x^2 + 7x + 12 = 0$, cujas raízes são $-3, -4$. As três raízes são $5, -3, -4$.

20.16 Duas raízes de $x^4 - 2x^2 - 3x - 2 = 0$ são -1 e 2. Resolva a equação.

SOLUÇÃO

	1	0	−2	−3	−2
−1	1	−1	−1	−2	0

Divida $x^4 - 2x^2 - 3x - 2$ por $x + 1$.

A primeira equação derivada é $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$.

	1	−1	−1	−2
2	1	1	1	0

Divida $x^3 - x^2 - x - 2$ por $x - 2$.

A segunda equação derivada é $x^2 + x + 1 = 0$, cujas raízes são $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{3}$.

As quatro raízes são $-1,\ 2,\ -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{3}$.

20.17 Determine as raízes das seguintes equações:

(*a*) $(x-1)^2(x+2)(x+4) = 0$	*R*:	1 como raiz dupla, -2, -4
(*b*) $(2x+1)(3x-2)^3(2x-5) = 0$	*R*:	$-1/2$, $2/3$ como raiz tripla, $5/2$
(*c*) $x^3(x^2-2x-15) = 0$	*R*:	0 como raiz tripla, 5, -3
(*d*) $(x+1+\sqrt{3})(x+1-\sqrt{3})(x-6) = 0$	*R*:	$(-1-\sqrt{3})$, $(-1+\sqrt{3})$, 6
(*e*) $[(x-i)(x+i)]^3(x+1)^2 = 0$	*R*:	$\pm i$ como raízes triplas, -1 como raiz dupla
(*f*) $3(x+m)^4(5x-n)^2 = 0$	*R*:	$-m$ como raiz quádrupla, $n/5$ como raiz dupla

20.18 Escreva uma equação que tenha apenas as seguintes raízes:

(*a*) $5, 1, -3$; (*b*) $2, -1/4, -1/2$; (*c*) $\pm 2, 2 \pm \sqrt{3}$; (*d*) $0, 1 \pm 5i$

SOLUÇÃO

(*a*) $(x-5)(x-1)(x+3) = 0$ ou $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$

(*b*) $(x-2)\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) = 0$ ou $x^3 - \frac{5x^2}{4} - \frac{11x}{8} - \frac{1}{4} = 0$ ou $8x^3 - 10x^2 - 11x - 2 = 0$,

que tem coeficientes inteiros.

(*c*) $(x-2)(x+2)[x-(2-\sqrt{3})][x-(2+\sqrt{3})] = (x^2-4)[(x-2)+\sqrt{3}][(x-2)-\sqrt{3}]$

$= (x^2-4)[(x-2)^2-3] = (x^2-4)(x^2-4x+1) = 0$, ou $x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 16x - 4 = 0$

(*d*) $x[x-(1+5i)][x-(1-5i)] = x[(x-1)-5i][(x-1)+5i] = x[(x-1)^2+25]$

$= x(x^2-2x+26) = 0$, ou $x^3 - 2x^2 + 26x = 0$

By Possuidão

20.19 Determine uma equação com coeficientes inteiros que tenha apenas as seguintes raízes:

(*a*) $1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$; (*b*) $0, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, -1$; (*c*) $\pm 3i, \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$; (*d*) 2 como raiz tripla, -1.

SOLUÇÃO

(*a*) $(x-1)(2x-1)(3x+1)=0$ ou $6x^3-7x^2+1=0$

(*b*) $x(4x-3)(3x-2)(x+1)=0$ ou $12x^4-5x^3-11x^2+6x=0$

(*c*) $(x-3i)(x+3i)\left(x-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)=(x^2+9)\left(x^2-\frac{1}{2}\right)=0, \quad (x^2+9)(2x^2-1)=0,$
ou $2x^4+17x^2-9=0$

(*d*) $(x-2)^3(x+1)=0$ ou $x^4-5x^3+6x^2+4x-8=0$

20.20 Cada número abaixo é uma raiz de uma equação polinomial com *coeficientes reais*. Que outro número também é raiz?

(*a*) $2i$, (*b*) $-3\pm 2i$, (*c*) $-3-i\sqrt{2}$

SOLUÇÃO

(*a*) $-2i$, (*b*) $-3-2i$, (*c*) $-3+i\sqrt{2}$

20.21 Cada número abaixo é uma raiz de uma equação polinomial com *coeficientes racionais*. Que outro número também é raiz?

(*a*) $-\sqrt{7}$, (*b*) $-4+2\sqrt{3}$, (*c*) $5-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

SOLUÇÃO

(*a*) $\sqrt{7}$, (*b*) $-4-2\sqrt{3}$, (*c*) $5+\frac{1}{2}\sqrt{2}$

20.22 Decida sobre a validade das conclusões abaixo.

(*a*) $x^3+7x-6i=0$ tem $x=i$ como raiz; portanto $x=-i$ é uma raiz.

(*b*) $x^3+(1-2\sqrt{3})x^2+(5-2\sqrt{3})x+5=0$ tem $\sqrt{3}-i\sqrt{2}$ como raiz; portanto $\sqrt{3}-i\sqrt{2}$ é uma raiz.

(*c*) $x^4+(1-2\sqrt{2})x^3+(4-2\sqrt{2})x^2+(3-4\sqrt{2})x+1=0$ tem $x=-1+\sqrt{2}$ como raiz; portanto $x=-1+\sqrt{2}$ é uma raiz.

SOLUÇÃO

(*a*) $x=-i$ não é necessariamente uma raiz, uma vez que nem todos os coeficientes da equação são *reais*. Por substituição, descobrimos que, na verdade, $x=-i$ não é uma raiz.

(*b*) A conclusão é válida, uma vez que a equação tem coeficientes reais.

(*c*) $x=-1-2\sqrt{2}$ não é necessariamente uma raiz, uma vez que nem todos os coeficientes da equação são *racionais*. Por substituição, descobrimos que $x=-1-2\sqrt{2}$ não é uma raiz.

20.23 Escreva a equação polinomial de menor grau com coeficientes reais tendo 2 e $1-3i$ como duas de suas raízes.

SOLUÇÃO

$(x-2)[x-(1-3i)][x-(1+3i)]=(x-2)(x^2-2x+10)=0$ ou $x^3-4x^2+14x-20=0$

20.24 Escreva a equação polinomial de menor grau com coeficientes racionais tendo $-1+\sqrt{5}$ e -6 como duas de suas raízes.

SOLUÇÃO

$[x-(-1+\sqrt{5})][x-(-1-\sqrt{5})](x+6)=(x^2+2x-4)(x+6)=0$ ou $x^3+8x^2+8x-24=0$

By Possuidão

20.25 Escreva a equação polinomial quártica com coeficientes racionais tendo como duas de suas raízes *(a)* $-5i$ e $\sqrt{6}$, *(b)* $2+i$ e $1-\sqrt{3}$.

SOLUÇÃO

(*a*) $(x+5i)(x-5i)(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6}) = (x^2+25)(x^2-6) = 0$ ou $x^4+19x^2-150=0$

(*b*) $[x-(2+i)][x-(2-i)][x-(1-\sqrt{3})][x-(1+\sqrt{3})] = (x^2-4x+5)(x^2-2x-2) = 0$ ou $x^4-6x^3+11x^2-2x-10=0$

20.26 Encontre as quatro raízes de $x^4+2x^2+1=0$.

SOLUÇÃO

$x^4+2x^2+1=(x^2+1)^2=[(x+i)(x-i)]^2=0$. As raízes são $i, i, -i, -i$.

20.27 Resolva $x^4-3x^3+5x^2-27x-36=0$, sabendo que uma raiz é um número imaginário puro da forma bi, onde b é real.

SOLUÇÃO

Substituindo bi por x, $b^4+3b^3i-5b^2-27bi-36=0$.

Igualando as partes real e imaginária a zero, obtemos:

$$b^4-5b^2-36=0,\ (b^2-9)(b^2+4)=0 \text{ e } b=\pm 3 \text{ uma vez que } b \text{ é real;}$$
$$3b^3-27b=0,\ 3b(b^2-9)=0 \text{ e } b=0,\ \pm 3.$$

A solução comum é $b=\pm 3$; portanto, duas raízes são $\pm 3i$ e $(x-3i)(x+3i)=x^2+9$ é um fator de $x^4-3x^3+5x^2-27x-36$. Por divisão, o outro fator é $x^2-3x-4=(x-4)(x+1)$, e as outras duas raízes são 4, -1.

As quatro raízes são $\pm 3i$, 4, -1.

20.28 Escreva a equação polinomial de menor grau com *coeficientes racionais* que tem para uma das raízes

(*a*) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, (*b*) $\sqrt{2}+\sqrt{-1}$.

SOLUÇÃO

(*a*) Seja $x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

Elevando ambos os lados ao quadrado, $x^2=3-2\sqrt{6}+2=5-2\sqrt{6}$ e $x^2-5=-2\sqrt{6}$.

Elevando ao quadrado novamente, $x^4-10x^2+25=24$ e $x^4-10x^2+1=0$.

(*b*) Seja $x=\sqrt{2}+\sqrt{-1}$.

Elevando ambos os lados ao quadrado, $x^2=2+2\sqrt{-2}-1=1+2\sqrt{-2}$ e $x^2-1=2\sqrt{-2}$.

Elevando ao quadrado novamente, $x^4-2x^2+1=-8$ e $x^4-2x^2+9=0$.

20.29 (*a*) Escreva a equação polinomial de menor grau com coeficientes *constantes* (reais ou complexos) que tem para raízes 2 e $1-3i$. Compare com o Problema 20.23.

(*b*) Escreva a equação polinomial de menor grau com coeficientes *reais* que tem para raízes -6 e $-1+\sqrt{5}$. Compare com o Problema 20.24.

SOLUÇÃO

(*a*) $(x-2)[x-(1-3i)]=0$ ou $x^2-3(1-i)x+2-6i=0$

(*b*) $(x+6)[x-(-1+\sqrt{5})]=0$ ou $x^2+(7-\sqrt{5})x-6(\sqrt{5}-1)=0$

20.30 Obtenha as raízes racionais, se existirem, das seguintes equações polinomiais:

(*a*) $x^4-2x^2-3x-2=0$

As raízes racionais são limitadas aos fatores inteiros de 2, que são $\pm 1, \pm 2$. Testando estes valores para x em ordem, $+1, -1, +2, -2$, por divisão sintética ou por substituição, descobrimos que as únicas raízes racionais são -1 e 2.

(*b*) $x^3-x-6=0$

As raízes racionais são limitadas aos fatores inteiros de 6, que são $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Testando estes valores para x em ordem, $+1, -1, +2, -2, +3, -3, +6, -6$, a única raiz obtida é 2.

By Possuidão

(*c*) $2x^3 + x^2 - 7x - 6 = 0$

Se b/c (irredutível) é uma raiz racional, os únicos valores possíveis para b são $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$; e os únicos valores possíveis para c são $\pm1, \pm2$. Portanto, as possíveis raízes racionais são limitadas aos seguintes números: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm1/2, \pm3/2$.

Testando estes valores para x, obtemos $-1, 2, -3/2$ como raízes racionais.

(*d*) $2x^4 + x^2 + 2x - 4 = 0$

Se b/c é uma raiz racional, os valores de b são limitados a $\pm1, \pm2, \pm4$, e os valores de c são limitados a $\pm 1, \pm 2$. Portanto, as raízes racionais possíveis são limitadas aos números $\pm1, \pm2 \pm4, \pm1/2$. Testando estes valores para x, descobrimos que não existem raízes racionais.

20.31 Resolva a equação polinomial $x^3 - 2x^2 - 31x + 20 = 0$.

SOLUÇÃO

Qualquer raiz racional desta equação é um fator inteiro de 20. Assim, as possibilidades para raízes racionais são $\pm1, \pm2, \pm4, \pm5, \pm10, \pm20$.

Testando estes valores para x por divisão sintética, descobrimos que -5 é uma raiz.

	1	−2	−31	20
−5	1	−7	4	0

A equação derivada $x^2 - 7x + 4 = 0$ tem raízes irracionais $7/2 \pm \sqrt{33}/2$.

Portanto, as três raízes da equação dada são $-5, 7/2 \pm \sqrt{33}/2$.

20.32 Resolva a equação polinomial $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 - 8x + 6 = 0$.

SOLUÇÃO

Se b/c é uma raiz racional, os únicos valores possíveis para b são $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$, e os únicos valores possíveis para c são $\pm1, \pm2$. Portanto, as possibilidades para raízes racionais são $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm1/2, \pm3/2$.

Testando estes valores para x por divisão sintética, descobrimos que 3 é uma raiz.

	2	−3	−7	−8	6
3	2	3	2	−2	0

A primeira equação derivada $2x^3 + 3x^2 + 2x - 2 = 0$ é testada, e obtemos $1/2$ para raiz.

	2	3	2	−2
1/2	2	4	4	0

A segunda equação derivada $2x^2 + 4x + 4 = 0$, ou $x^2 + 2x + 2 = 0$, tem as raízes complexas $-1 \pm i$. As quatro raízes são $3, 1/2, -1 \pm i$.

20.33 Prove que $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ é um número irracional.

SOLUÇÃO

Seja $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$; então $x^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}$ e $x^2 - 5 = 2\sqrt{6}$.

Elevando ao quadrado novamente, $x^4 - 10x^2 + 25 = 24$ ou $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$. As únicas raízes racionais possíveis desta equação são ±1. Testando estes valores, descobrimos que não existem raízes racionais. Portanto, $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ é irracional.

By Possuidão

20.34 Esboce $P(x) = x^3 + x - 3$. A partir do gráfico, determine o número de raízes positivas, negativas e complexas de $x^3 + x - 3 = 0$.

SOLUÇÃO

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$P(x)$	-33	-13	-5	-3	-1	7	27	65

A partir do gráfico, vê-se que existe uma raiz positiva e nenhuma raiz real negativa (veja Fig. 20-1). Portanto, existem duas raízes complexas conjugadas.

20.35 Encontre as cotas superior e inferior para as raízes reais de:

(*a*) $x^3 - 3x^2 + 5x + 4 = 0$

(*b*) $x^3 + x^2 - 6 = 0$

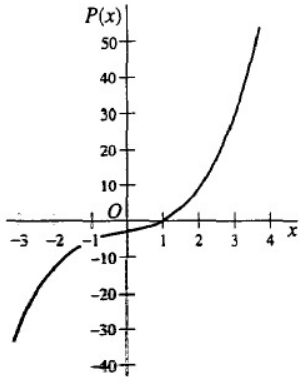

Fig. 20-1

SOLUÇÃO

(*a*) As raízes racionais possíveis são $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.

Teste para cota superior

	1	−3	5	4
1	1	−2	3	7

	1	−3	5	4
2	1	−1	3	10

	1	−3	5	4
3	1	0	5	19

Como todos os números da segunda linha da divisão sintética de $P(x)$ por $x - 3$ são positivos (ou nulos), uma cota superior para as raízes é 3, i.e., nenhuma raiz é maior do que 3.

Teste para cota inferior

	1	−3	5	4
−1	1	−4	9	−5

Como todos os números da segunda linha alternam-se entre positivos e negativos (ou zero), -1 é uma cota inferior para as raízes, i.e., nenhuma raiz é menor do que -1.

By Possuidão

(*b*) As raízes racionais possíveis são ±1, ±2, ±4.

Teste para cota superior

	1	1	0	−6
1	1	2	2	−4

	1	1	0	−6
2	1	3	6	6

Portanto, 2 é uma cota superior para as raízes.

Teste para cota inferior

	1	1	0	−6
−1	1	0	0	−6

Como todos os números da segunda linha alternam-se entre positivos e negativos (ou nulos), −1 é uma cota inferior para as raízes.

20.36 Determine as raízes racionais de $4x^3 + 15x - 36 = 0$ e daí resolva a equação completamente.

SOLUÇÃO

As raízes racionais possíveis são ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±9, ±12, ±18, ±36, ±1/2, ±3/2, ±9/2, ±1/4, ±3/4, ±9/4. Para evitarmos testar todas as possibilidades, achemos primeiro as cotas superior e inferior para as raízes.

Teste para cota superior

	4	0	15	−36
1	4	4	19	−17

	4	0	15	−36
2	4	8	31	26

Portanto, nenhuma raiz (real) é maior do que 2.

Teste para cota inferior

	4	0	15	−36
−1	4	−4	19	−55

Portanto, nenhuma raiz (real) é maior ou igual a −1.

As únicas raízes racionais possíveis maiores que −1 e menores que 2 são +1, ±1/2, ±3/2, ±1/4, ±3/4. Testando-as, descobrimos que 3/2 é a única raiz racional.

	4	0	15	−36
3/2	4	6	24	0

As outras raízes são soluções de $4x^2 + 6x + 24 = 0$ ou $2x^2 + 3x + 12 = 0$, i.e., $x = -\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{87}}{4}i$.

20.37 Empregando a Regra de Sinais de Descartes, o que podemos concluir sobre o número de raízes positivas, negativas e complexas das equações abaixo?

(*a*) $2x^3 + 3x^2 - 13x + 6 = 0$

(*b*) $x^4 - 2x^2 - 3x - 2 = 0$

(*c*) $x^2 - 2x + 7 = 0$

(*d*) $2x^4 + 7x^2 + 6 = 0$

(*e*) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

(*f*) $x^3 + 3x - 14 = 0$

(*g*) $x^6 + x^3 - 1 = 0$

(*h*) $x^6 - 3x^2 - 4x + 1 = 0$

By Possuidão

SOLUÇÃO

(*a*) Existem 2 variações de sinal em $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 13x + 6$. Existe variação de sinal em $P(-x) = -2x^3 + 3x^2 + 13x + 6$. Portanto, existem no máximo duas raízes positivas e uma raiz negativa.

As raízes podem ser: (1) 2 positivas, 1 negativa, 0 complexa; ou (2) 0 positiva, 1 negativa, 2 complexas (raízes complexas ocorrem aos pares conjugados).

(*b*) Existe 1 variação de sinal em $P(x) = x^4 - 2x^2 - 3x - 2$, e há 3 variações de sinal em $P(-x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 2$. Portanto, existem no máximo 1 raiz positiva e 3 raízes negativas.

As raízes podem ser: (1) 1 positiva, 3 negativas, 0 complexa; ou (2) 1 positiva, 1 negativa, 2 complexas.

(*c*) Existem 2 variações de sinal em $P(x) = x^2 - 2x + 7$, e não há variação de sinal em $P(-x) = x^2 + 2x + 7$.

Portanto, as raízes podem ser: (1) 2 positivas, 0 negativa, 0 complexa; ou (2) 0 positiva, 0 negativa, 2 complexas.

(*d*) Nem $P(x) = 2x^4 + 7x^2 + 6$ nem $P(-x) = 2x^4 + 7x^2 + 6$ têm variação de sinal. Portanto, as 4 raízes são complexas, uma vez que $P(0) \neq 0$.

(*e*) Existe 1 variação de sinal em $P(x) = x^4 - 3x^2 - 4 = 0$, e 1 variação de sinal em $P(-x) = x^4 - 3x^2 - 4$.

Portanto, as raízes são: 1 positiva, 1 negativa, 2 complexas.

(*f*) Existe 1 variação de sinal em $P(x) = x^3 + 3x - 14$, e não há variação em $P(-x) = -x^3 - 3x - 14$. Portanto, as raízes são: 1 positiva, 2 complexas.

(*g*) Existe 1 variação de sinal em $P(x) = x^6 + x^3 - 1$, e há 1 variação em $P(-x) = x^6 - x^3 - 1$. Portanto, as raízes são: 1 positiva, 1 negativa, 4 complexas.

(*h*) Existem 2 variações de sinal em $P(x) = x^6 - 3x^2 - 4x + 1$, e 2 variações de sinal em $P(-x) = x^6 - 3x^2 + 4x + 1$.

Portanto, as raízes podem ser:

(1) 2 positivas, 2 negativas, 2 complexas;
(2) 2 positivas, 0 negativa, 4 complexas;
(3) 0 positiva, 2 negativas, 4 complexas;
(4) 0 positiva, 0 negativa, 6 complexas.

20.38 Determine a natureza das raízes de $x^n - 1 = 0$, quando n é um inteiro positivo e (*a*) n é par, (*b*) n é ímpar.

SOLUÇÃO

(*a*) $P(x) = x^n - 1$ tem 1 variação de sinal, e $P(-x) = x^n - 1$ tem 1 variação de sinal. Portanto, as raízes são: 1 positiva, 1 negativa, $(n - 2)$ complexas.

(*b*) $P(x) = x^n - 1$ tem 1 variação de sinal, e $P(-x) = -x^n - 1$ não tem variação de sinal. Portanto, as raízes são: 1 positiva, 0 negativa, $(n - 1)$ complexas.

20.39 Obtenha as raízes racionais das equações, se existirem, fazendo uso da Regra de Sinais de Descartes.

(*a*) $x^3 - x^2 + 3x - 27 = 0$, (*c*) $2x^5 + x - 66 = 0$,
(*b*) $x^3 + 2x + 12 = 0$, (*d*) $3x^4 + 7x^2 + 6 = 0$.

SOLUÇÃO

(*a*) Pela Regra de Sinais de Descartes, a equação tem raízes positivas 3 ou 1 e nenhuma raiz negativa. Portanto, as raízes racionais estão limitadas aos fatores inteiros de 27, que são 1, 3, 9, 27.

Testando estes valores para x, a única raiz racional obtida é 3.

(*b*) Pela regra de sinais, a equação não tem raízes positivas e tem 1 raiz negativa. Portanto, as raízes racionais estão limitadas aos fatores inteiros negativos de 12, i.e., a -1, -2, -3, -4, -6, -12.

Testando estes valores para x, obtemos -2 a única raiz racional.

(*c*) Pela regra de sinais, a equação tem 1 raiz positiva e nenhuma raiz negativa. Portanto, as raízes racionais estão limitadas aos números racionais positivos da forma b/c, onde b é limitado aos fatores inteiros de 66 e c é limitado aos fatores inteiros de 2. As raízes racionais possíveis são, então, 1, 2, 3, 6, 11, 22, 33, 66, 1/2, 3/2, 11/2, 33/2.

Testando estes valores para x, obtemos 2 a única raiz racional.

(*d*) A equação não tem raízes reais, uma vez que nem $P(x) = 3x^4 + 7x^2 + 6$ nem $P(-x) = 3x^4 + 7x^2 + 6$ tem uma variação de sinal e $P(0) \neq 0$.

Portanto, todas as suas quatro raízes são complexas.

By Possuidão

20.40 Use o Teorema do Valor Intermediário para isolar os zeros reais de $P(x)$ entre dois inteiros consecutivos.

(*a*) $P(x) = 3x^3 - 8x^2 - 8x + 8$ (*b*) $P(x) = 5x^3 - 4x^2 - 10x + 8$

SOLUÇÃO

(*a*) Para $P(x) = 3x^3 - 8x^2 - 8x + 8$, encontramos as cotas inferior e superior dos zeros reais.

	3	−8	−8	8
0	3	−8	−8	8

	3	−8	−8	8
1	3	−5	−13	−5

	3	−8	−8	8
2	3	−2	−12	−16

	3	−8	−8	8
3	3	1	−5	−7

	3	−8	−8	8
4	3	4	8	40

Como a linha dos quocientes da divisão sintética feita com 4 é toda positiva, a cota superior para todos os zeros de $P(x)$ é 4.

	3	−8	−8	8
−1	3	−11	3	+5

	3	−8	−8	8
−2	3	−14	+20	−32

Como a linha dos quocientes da divisão sintética feita com −2 alterna sinais, a cota inferior para todos os zeros de $P(x)$ é −2.

Agora, examinamos o intervalo de −2 a 4 para isolar os zeros reais de $P(x)$ entre inteiros consecutivos.

Como $P(0) = 8$ e $P(1) = -5$, existe um zero real entre 0 e 1. Como $P(3) = -7$ e $P(4) = 40$, existe um zero real entre 3 e 4. Como $P(-1) = 5$ e $P(-2) = -32$, existe um zero real entre −2 e −1.

Os zeros reais de $P(x) = 3x^3 - 8x^2 - 8x + 8$ estão entre −2 e −1, 0 e 1, e 3 e 4.

(*b*) Para $P(x) = 5x^3 - 4x^2 - 10x + 8$, encontramos as cotas inferior e superior dos zeros reais.

	5	−4	−10	8
0	5	−4	−10	8

	5	−4	−10	8
1	5	1	−9	−1

	5	−4	−10	8
2	5	6	2	12

A cota superior para os zeros de $P(x)$ é 2.

	5	−4	−10	8
−1	5	−9	−1	9

	5	−4	−10	8
−2	5	−14	+18	−28

By Possuidão

A cota inferior para os zeros de $P(x)$ é -2.

Agora, examinamos o intervalo de -2 a 2 para isolar os zeros reais de $P(x)$. Como $P(0) = 8$ e $P(1) = -1$, existe um zero real entre 0 e 1. Como $P(1) = -1$ e $P(2) = 12$, existe um zero real entre 1 e 2. Como $P(-1) = 9$ e $P(-2) = -28$, existe um zero real entre -2 e -1.

Assim, os zeros reais de $P(x) = 5x^3 - 4x^2 - 10x + 8$ estão localizados entre -2 e -1, 0 e 1, e 1 e 2.

20.41 Aproxime um zero real de $P(x) = x^3 - x - 5$ a duas casas decimais.

SOLUÇÃO

Pelo Teorema de Sinais de Descartes, $P(x) = x^3 - x - 5$ tem 1 raiz positiva real e 2 ou 0 raízes reais negativas.

Agora, determinamos a cota superior dos zeros reais de $P(x)$.

	1	0	−1	−5
0	1	0	−1	−5

	1	0	−1	−5
1	1	1	0	−5

	1	0	−1	−5
2	1	2	3	1

A cota superior dos zeros reais de $P(x)$ é 2.

Como $P(1) = -5$ e $P(2) = 1$, existe um zero real positivo entre 1 e 2.

Agora, determinamos o intervalo de décimos onde se encontra esta raiz. Usando a divisão sintética, determinamos os valores decimais até encontrarmos dois valores de sinais contrários. Como $P(2) = 1$ está mais próximo de zero que $P(1) = -5$, começamos com $x = 1{,}9$. Como $P(1{,}9) = -0{,}041$ e $P(2{,}0) = 1$, o zero real está entre 1,9 e 2, 0.

Como $P(1{,}90) = -0{,}41$ está mais próximo de zero que $P(2{,}0) = 1$, procuramos intervalo de centésimos, começando com $x = 1{,}91$. $P(1{,}91) = 0{,}579$. Como $P(1{,}90) = -0{,}041$ e $P(1{,}91) = 0{,}579$, existe uma raiz real entre 1,90 e 1,91.

Agora, determinamos $P(1{,}905)$ para decidir se a raiz deve ser arredondada para 1,90 ou 1,91. $P(1{,}905) = 0{,}008$. Como $P(1{,}900)$ é negativo e $P(1{,}905)$ é positivo, a raiz está entre 1,900 e 1,905. Quando arredondados a duas casas decimais, todos os números neste intervalo são arredondados para 1,90.

Portanto, uma raiz real de $P(x) = x^3 - x - 5$, arredondada para duas casas decimais, é 1,90.

20.42 Aproxime $\sqrt[3]{3}$ a três casas decimais.

SOLUÇÃO

Seja $x = \sqrt[3]{3}$, de modo que $x^3 = 3$ e $P(x) = x^3 - 3 = 0$.

Pela Regra de Sinais de Descartes, $P(x)$ tem uma raiz real positiva e nenhuma raiz real negativa.

Como $P(1) = -2$ e $P(2) = 5$, a raiz está entre 1 e 2.

Como $P(1)$ está mais próximo de 0 do que $P(2) = 5$, localizamos os intervalos de décimos avaliando $P(x)$ de $x = 1$ até $x = 2$, começando com $x = 1{,}1$. Uma vez encontrada uma mudança de sinal em $P(x)$, paramos.

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$P(x)$	−2	−1,669	−1,272	−0,803	−0,256	0,375

Como $P(1{,}4)$ é negativo e $P(1{,}5)$ é positivo, a raiz real está entre 1,4 e 1,5.

Agora, determinamos o intervalo de centésimos, explorando os valores de $P(x)$ dentro do intervalo limitado por $x = 1{,}40$ e $x = 1{,}50$.

x	1,40	1,41	1,42	1,43	1,44	1,45
$P(x)$	−0,256	−0,97	−0,137	−0,076	−0,014	0,49

By Possuidão

Como $P(1{,}44)$ é negativo e $P(1{,}45)$ é positivo, a raiz real está entre 1,44 e 1,45.

O próximo passo é determinar o intervalo de milésimos para a raiz, explorando os valores de $P(x)$ dentro do intervalo entre $x = 1{,}440$ e $x = 1{,}450$.

x	1,440	1,441	1,442	1,443
$P(x)$	−0,014	−0,008	−0,002	0,005

Como $P(1{,}442)$ é negativo e $P(1{,}443)$ é positivo, a raiz real está entre 1,442 e 1,443.

Como $P(1{,}4425) = 0{,}002$, a raiz real está entre 1,4420 e 1,4425. Todos os valores no intervalo entre 1,4420 e 1,4425 são arredondados para 1,442, com uma precisão de três casas decimais.

Portanto, $\sqrt[3]{3} = 1{,}442$, com precisão de três casas decimais.

Problemas Complementares

20.43 Se $P(x) = 2x^3 - x^2 - x + 2$, encontre (*a*) $P(0)$, (*b*) $P(2)$, (*c*) $P(-1)$, (*d*) $P(\frac{1}{2})$, (*e*) $P(\sqrt{2})$.

20.44 Determine o resto das seguintes divisões:

(*a*) $(2x^5 - 7) \div (x + 1)$ (*d*) $(4y^3 + y + 27) \div (2y + 3)$

(*b*) $(x^3 + 3x^2 - 4x + 2) \div (x - 2)$ (*e*) $(x^{12} + x^6 + 1) \div (x - \sqrt{-1})$

(*c*) $(3x^3 + 4x - 4) \div (x - \frac{1}{2})$ (*f*) $(2x^{33} + 35) \div (x + 1)$

20.45 Prove que $x + 3$ é um fator de $x^3 + 7x^2 + 10x - 6$, e que $x = -3$ é uma raiz da equação $x^3 + 7x^2 + 10x - 6 = 0$.

20.46 Decida quais dos seguintes números são raízes da equação $y^4 + 3y^3 + 12y - 16 = 0$:

(*a*) 2, (*b*) −4, (*c*) 3, (*d*) 1, (*e*) $2i$.

20.47 Determine os valores de k para os quais:

(*a*) $4x^3 + 3x^2 - kx + 6k$ é divisível de forma exata por $x + 3$,

(*b*) $x^5 + 4kx - 4k^2 = 0$ tem $x = 2$ para raiz.

20.48 Determine, por divisão sintética, o quociente e o resto das seguintes divisões:

(*a*) $(2x^3 + 3x^2 - 4x - 2) \div (x + 1)$ (*c*) $(y^6 - 3y^5 + 4y - 5) \div (y + 2)$

(*b*) $(3x^5 + x^3 - 4) \div (x - 2)$ (*d*) $(4x^3 + 6x^2 - 2x + 3) \div (2x + 1)$

20.49 Se $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x - 4$, calcule $P(2)$ e $P(-3)$, usando divisão sintética.

20.50 Dado que uma raiz de $x^3 - 7x - 6 = 0$ é -1, encontre as outras duas raízes.

20.51 Demonstre que $2x^4 - x^3 - 3x^2 - 31x - 15 = 0$ tem raízes $3, -\frac{1}{2}$. Encontre as demais.

20.52 Encontre as raízes das equações:

(*a*) $(x + 3)^2(x - 2)^3(x + 1) = 0$ (*c*) $(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 4x + 5) = 0$

(*b*) $4x^4(x + 2)^4(x - 1) = 0$ (*d*) $(y^2 + 4)^2(y + 1)^2 = 0$

20.53 Construa equações com coeficientes inteiros que possuam apenas as seguintes raízes:

(*a*) $2, -3, -\frac{1}{2}$ (*b*) $0, -4, 2/3, 1$ (*c*) $\pm 3i$, raiz dupla 2 (*d*) $-1 \pm 2i, 2 \pm i$

By Possuidão

20.54 Construa uma equação cujas raízes são $1 \pm \sqrt{2}$, $-1 \pm i\sqrt{3}$.

20.55 Construa a equação de menor grau possível com coeficientes inteiros que possuem as seguintes raízes:

(*a*) 1, 0, i (*b*) $2+i$ (*c*) $-1 \pm \sqrt{3}$, 1/3 (*d*) -2, $i\sqrt{3}$ (*e*) $\sqrt{2}$, i (*f*) $i/2$, 6/5

20.56 Na equação $x^3 + ax^2 + bx + a = 0$, a e b são números reais. Se $x = 2 + i$ é uma raiz da equação, encontre a e b.

20.57 Construa uma equação de menor grau possível com coeficientes inteiros que tenham $\sqrt{2} - 1$ para raiz dupla.

20.58 Construa uma equação de menor grau possível com coeficientes inteiros que tenham $\sqrt{3} + 2i$ como raiz.

20.59 Resolva as equações, tendo sido indicada uma raiz.

(*a*) $x^4 + x^3 - 12x^2 + 32x - 40 = 0$; $1 - i\sqrt{3}$ (*c*) $x^3 - 5x^2 + 6 = 0$; $3 - \sqrt{3}$

(*b*) $6x^4 - 11x^3 + x^2 + 33x - 45 = 0$; $1 + i\sqrt{2}$ (*d*) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 16x + 8 = 0$; $2i$

20.60 Determine as raízes racionais das equações, se existirem.

(*a*) $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0$ (*c*) $2x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x - 4 = 0$

(*b*) $4x^3 - 3x + 1 = 0$ (*d*) $3x^3 + x^2 - 12x - 4 = 0$

20.61 Resolva as equações:

(*a*) $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$ (*d*) $4x^4 + 8x^3 - 5x^2 - 2x + 1 = 0$

(*b*) $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$ (*e*) $5x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 6x - 4 = 0$

(*c*) $3x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 0$ (*f*) $3x^5 + 2x^4 - 15x^3 - 10x^2 + 12x + 8 = 0$

20.62 Prove que (*a*) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ e (*b*) $\sqrt[5]{2}$ são números irracionais.

20.63 Se $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 12x - 16$, determine o número de raízes positivas, negativas e complexas.

20.64 Localize as raízes reais de $x^4 - 3x^2 - 6x - 2 = 0$ entre dois inteiros consecutivos. Encontre a menor raiz positiva da equação, com precisão de duas casas decimais.

20.65 Encontre as cotas inferior e superior para as raízes reais de cada equação.

(*a*) $x^3 - 3x^2 + 2x - 4 = 0$ (*b*) $2x^4 + 5x^2 - 6x - 14 = 0$

20.66 Encontre as raízes racionais de $2x^3 - 5x^2 + 4x + 24 = 0$ e então resolva a equação completamente.

20.67 Fazendo uso da Regra de Sinais de Descartes, o que se pode deduzir com relação ao número de raízes positivas, negativas e complexas das equações abaixo?

(*a*) $2x^3 + 3x^2 + 7 = 0$ (*c*) $x^5 + 4x^3 - 3x^2 - x + 12 = 0$

(*b*) $3x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$ (*d*) $x^5 - 3x - 2 = 0$

20.68 Dada a equação $3x^4 - x^3 + x^2 - 5 = 0$, determine:

(*a*) o número máximo de raízes positivas,

(*b*) o número mínimo de raízes positivas,

(*c*) o número exato de raízes negativas, e

(*d*) o número máximo de raízes complexas.

By Possuidão

20.69 Dada a equação $5x^3 + 2x - 4 = 0$, quantas raízes (*a*) negativas, (*b*) reais existem?

20.70 Verifique se a equação $x^6 + 4x^4 + 3x^2 + 16 = 0$ possui:

(*a*) 4 raízes complexas e 2 raízes reais
(*b*) 4 raízes reais e 2 raízes complexas
(*c*) 6 raízes complexas
(*d*) 6 raízes reais

20.71 (*a*) Quantas raízes positivas tem a equação $x^6 - 7x^2 - 11 = 0$?
(*b*) Quantas raízes complexas tem a equação $x^7 + x^4 - x^2 - 3 = 0$?
(*c*) Demonstre que $x^6 + 2x^3 + 3x - 4 = 0$ tem exatamente 4 raízes complexas.
(*d*) Demonstre que $x^4 + x^3 - x^2 - 1 = 0$ tem apenas 1 raiz negativa.

20.72 Resolva completamente as equações:

(*a*) $8x^3 - 20x^2 + 14x - 3 = 0$ (*c*) $4x^3 + 5x^2 + 2x - 6 = 0$
(*b*) $8x^4 - 14x^3 - 9x^2 + 11x - 2 = 0$ (*d*) $2x^4 - x^3 - 23x^2 + 18x + 18 = 0$

20.73 Aproxime a raiz indicada para cada equação, com a precisão solicitada.

(*a*) $2x^3 + 3x^2 - 9x - 7 = 0$; raiz positiva, com precisão de décimos
(*b*) $x^3 + 9x^2 + 27x - 50 = 0$; raiz positiva, com precisão de centésimos
(*c*) $x^3 - 3x^2 - 3x + 18 = 0$; raiz negativa, com precisão de décimos
(*d*) $x^3 + 6x^2 + 9x + 17 = 0$; raiz negativa, com precisão de décimos
(*e*) $x^5 + x^4 - 27x^3 - 83x^2 + 50x + 162 = 0$; raiz entre 5 e 6, com precisão de centésimos
(*f*) $x^4 - 3x^3 + x^2 - 7x + 12 = 0$; raiz entre 1 e 2, com precisão de centésimos

20.74 Para encontrarmos a deflexão máxima de um feixe com largura dada e carregado de uma certa maneira, é necessário resolver a equação $4x^3 - 150x^2 + 1500x - 2871 = 0$. Encontre a raiz entre 2 e 3 da equação, com precisão de décimos.

20.75 O comprimento de uma caixa retangular é o dobro de sua largura, e sua altura é um pé maior do que a largura. Se o seu volume é de 64 pés cúbicos, encontre a largura em pés, com uma precisão de décimos.

20.76 Determine $\sqrt[3]{20}$, com uma precisão de centésimos.

Respostas dos Problemas Complementares

20.43 (*a*) 2 (*b*) 12 (*c*) 0 (*d*) 3/2 (*e*) $3\sqrt{2}$

20.44 (*a*) -9 (*b*) 14 (*c*) $-13/8$ (*d*) 12 (*e*) 1 (*f*) 33

20.46 -4, 1 e $2i$ são raízes

20.47 (*a*) $k = 9$ (*b*) $k = 4, -2$

20.48 (*a*) $2x^2 + x - 5 + \dfrac{3}{x+1}$ (*c*) $y^5 - 5y^4 + 10y^3 - 20y^2 + 40y - 76 + \dfrac{147}{y+2}$

(*b*) $3x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 26x + 52 + \dfrac{100}{x-2}$ (*d*) $2x^2 + 2x - 2 + \dfrac{5}{2x+1}$

20.49 12, 227

By Possuidão

20.50 3, −2

20.51 $-1 \pm 2i$

20.52 (*a*) raiz dupla −3, raiz tripla 2, −1
(*b*) raiz quádrupla 0, raiz quádrupla −2, 1
(*c*) $-1, -2, 2 \pm i$
(*d*) raízes duplas $\pm 2i$, raiz dupla −1

20.53 (*a*) $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6 = 0$ (*c*) $x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 36x + 36 = 0$
(*b*) $3x^4 + 7x^3 - 18x^2 + 8x = 0$ (*d*) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 10x + 25 = 0$

20.54 $x^4 - x^2 - 10x - 4 = 0$

20.55 (*a*) $x^4 - x^3 + x^2 - x = 0$ (*d*) $x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = 0$
(*b*) $x^2 - 4x + 5 = 0$ (*e*) $x^4 - x^2 - 2 = 0$
(*c*) $3x^3 + 5x^2 - 8x + 2 = 0$ (*f*) $20x^3 - 24x^2 + 5x - 6 = 0$

20.56 $a = -5,\ b = 9$

20.57 $x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$

20.58 $x^4 + 2x^2 + 49 = 0$

20.59 (*a*) $1 \pm i\sqrt{3},\ -5,\ 2$ (*b*) $1 \pm i\sqrt{2},\ -5/3,\ 3/2$ (*c*) $3 \pm \sqrt{3},\ -1$ (*d*) $\pm 2i,\ 2 \pm \sqrt{2}$

20.60 (*a*) −3, 2
(*b*) 1/2, 1/2, −1
(*c*) nenhuma raiz racional
(*d*) $-1/3, \pm 2$

20.61 (*a*) $1,\ \pm 3$ (*d*) $\pm\frac{1}{2},\ -1 \pm \sqrt{2}$
(*b*) $3,\ -2,\ 1/2$ (*e*) $-1,\ 2/5,\ \pm\sqrt{2}i$
(*c*) $1/3,\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ (*f*) $\pm 1,\ \pm 2,\ -2/3$

20.63 1 raiz positiva, 0 raiz negativa, 2 raízes complexas

20.64 Raiz positiva entre 2 e 3; raiz negativa entre −1 e 0; raiz positiva aproximadamente igual a 2,41.

20.65 (*a*) cota superior 3, cota inferior −1; (*b*) cota superior 2, cota inferior −2

20.66 $-3/2, 2 \pm 2i$

20.67 (*a*) 1 negativa, 2 complexas
(*b*) 3 positivas ou 1 positiva, 2 complexas
(*c*) 1 negativa, 2 positivas, 2 complexas ou 1 negativa, 4 complexas
(*d*) 1 positiva, 2 negativas, 2 complexas ou 1 positiva, 4 complexas

20.68 (*a*) 3 (*b*) 1 (*c*) 1 (*d*) 2

By Possuidão

20.69 (*a*) nenhuma (*b*) uma

20.70 (*c*)

20.71 (*a*) uma (*b*) quatro ou seis

20.72 (*a*) 1/2, 1/2, 3/2 (*b*) 2, −1, 1/4, 1/2 (*c*) 3/4, $-1 \pm i$ (*d*) 3, 3/2, $-2 \pm \sqrt{2}$

20.73 (*a*) 1,9 (*b*) 1,25 (*c*) −2,2 (*d*) −4,9 (*e*) 5,77 (*f*) 1,38

20.74 2,5

20.75 2,9 pés

20.76 2,71

By Possuidão

Capítulo 21

Funções Racionais

21.1 FUNÇÕES RACIONAIS

Uma função racional é o quociente de duas funções polinomiais. Se $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios e $Q(x)$ é não-nulo, então uma função da forma $R(x) = P(x)/Q(x)$ é racional.

O domínio de $R(x)$ é a intersecção dos domínios de $P(x)$ e $Q(x)$.

21.2 ASSÍNTOTAS VERTICAIS

Se $R(x) = P(x)/Q(x)$, então os valores de x tais que $Q(x) = 0$ originam assíntotas verticais se $P(x) \neq 0$. No entanto, se para algum valor $x = a$, $P(a) = 0$ e $Q(a) = 0$, então $P(x)$ e $Q(x)$ terão um fator comum, a saber, $x - a$. Se $R(x)$ for então reduzida aos termos de mais baixo grau, o gráfico de $R(x)$ tem um buraco quando $x = a$.

Uma assíntota vertical para $R(x)$ é uma reta vertical $x = k$, sendo k constante, da qual o gráfico de $R(x)$ se aproxima sem nunca tocá-la. $R(k)$ não está definida porque $Q(k) = 0$ e $P(k) \neq 0$. O domínio de $R(x)$ é separado em intervalos distintos pelas assíntotas verticais de $R(x)$.

Exemplo 21.1 Quais são as assíntotas verticais de $R(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-4}$?

Como $R(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-4}$ não está definida quando $x^2 - 4 = 0$, $x = 2$ e $x = -2$ poderiam originar assíntotas verticais.

Quando $x = 2$, $2x - 3 \neq 0$ e quando $x = -2$, $2x - 3 \neq 0$. Assim, o gráfico de $R(x)$ tem assíntotas verticais originadas por $x = 2$ e $x = -2$.

21.3 ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS

Uma função racional $R(x) = P(x)/Q(x)$ tem uma assíntota horizontal $y = a$ se, quando $|x|$ cresce sem limites, $R(x)$ se aproxima de a. $R(x)$ tem no máximo uma assíntota horizontal, que pode ser encontrada comparando-se o grau de $P(x)$ com o grau de $Q(x)$.

(1) Se o grau de $P(x)$ é menor que o de $Q(x)$, então $R(x)$ tem para assíntota horizontal a reta $y = 0$.

(2) Se o grau de $P(x)$ é igual ao de $Q(x)$, então $R(x)$ tem para assíntota horizontal a reta $y = a_n/b_n$, onde a_n é o coeficiente líder (coeficiente do termo com o grau mais alto) de $P(x)$ e b_n é o coeficiente líder de $Q(x)$.

By Possuidão

(3) Se o grau de $P(x)$ é maior que o de $Q(x)$, então $R(x)$ não tem assíntota horizontal.

O gráfico de $R(k)$ pode cruzar uma assíntota horizontal no interior do seu domínio. Isto é possível porque, ao determinarmos a assíntota horizontal, estamos interessados no comportamento do gráfico de $R(x)$ apenas quando $|x|$ cresce sem limites.

Exemplo 21.2 Quais são as assíntotas horizontais das funções racionais $R(x)$?

$$(a)\ R(x) = \frac{3x^3}{x^2 - 1} \qquad (b)\ R(x) = \frac{x}{x^2 - 4} \qquad (c)\ R(x) = \frac{2x + 1}{3 + 5x}$$

(*a*) Para
$$R(x) = \frac{3x^3}{x^2 - 1},$$
o grau do numerador $3x^3$ é 3 e o do denominador, 2. Como o grau do numerador excede do denominador, $R(x)$ não tem assíntota horizontal.

(*b*) O grau do numerador de
$$R(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$
é 1 e o do denominador, 2, de modo que $R(x)$ tem $y = 0$ para assíntota horizontal.

(*c*) O numerador e denominador de
$$R(x) = \frac{2x + 1}{3 + 5x}$$
têm grau 1. Como o coeficiente líder do numerador é 2 e o do denominador é 5, $R(x)$ tem $y = \frac{2}{5}$. para assíntota horizontal.

21.4 O GRÁFICO DE FUNÇÕES RACIONAIS

Para esboçar o gráfico de uma função racional $R(x) = P(x)/Q(x)$, primeiramente determinamos seus buracos: valores de x para os quais $P(x)$ e $Q(x)$ são nulos. Depois de localizados os buracos, reduzimos $R(x)$ aos termos de mais baixo grau. O valor da forma reduzida de $R(x)$ para um valor de x que origina um buraco é a coordenada y do ponto que corresponde ao buraco.

Uma vez que $R(x)$ está reduzida aos termos de mais baixo grau, determinamos as assíntotas, a simetria, os zeros e a intersecção com o eixo y, caso ela exista. Esboçamos as retas assíntotas com linhas tracejadas e localizamos os zeros e a intersecção com o eixo y, bem como muitos outros pontos para determinar como o gráfico se aproxima das assíntotas. Finalmente, esboçamos o gráfico passando por estes pontos e se aproximando das assíntotas.

Exemplo 21.3 Esboce o gráfico das funções racionais $R(x)$.

$$(a)\ R(x) = \frac{3}{x^2 - 1} \qquad (b)\ R(x) = \frac{x^2}{4 - x^2}$$

(*a*)
$$R(x) = \frac{3}{x^2 - 1}$$
tem para assíntotas verticais $x = 1$ e $x = -1$, para assíntota horizontal $y = 0$ e não tem buracos.

Como o numerador de $R(x)$ é constante, não tem zeros. Como $R(0) = -3$, o gráfico de $R(x)$ tem intersecção com o eixo y em $(0, -3)$.

Localize o ponto de intersecção com o eixo y e esboce as assíntotas com linhas tracejadas. Determinamos alguns valores de $R(x)$ em cada intervalo de domínio $(-\infty, -1)$ e $(-1, 1)$ e $(1, \infty)$. $R(-x) = R(x)$, de modo que $R(x)$ é simétrica em relação ao eixo y.

$$R(2) = R(-2) = \frac{3}{2^2 - 1} = 1,\ R(0{,}5) = R(-0{,}5) = \frac{3}{(0{,}5)^2 - 1} = -4$$

By Possuidão

Localize (2,1), (−2,1), (0,5, −4) e (−0,5, −4). Usando as assíntotas como limitantes, traçamos o gráfico de

$$R(x) = \frac{3}{x^2 - 1},$$

demonstrado na Fig. 21-1.

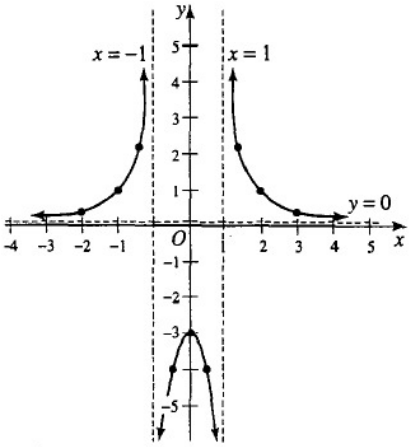

Fig. 21-1

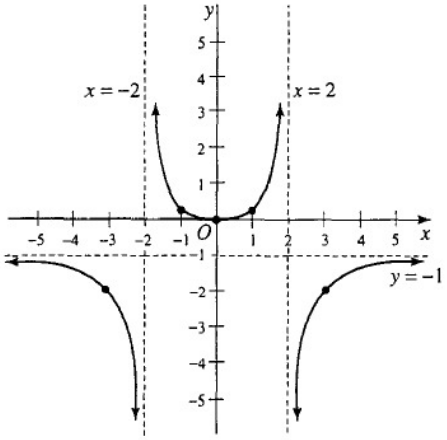

Fig- 21-2

(*b*)
$$R(x) = \frac{x^2}{4 - x^2}$$

tem assíntotas verticais $x = 2$ e $x = -2$, assíntota horizontal $y = -1$ e não tem buraco.

Os zeros de $R(x)$ são originados por $x = 0$. Como, quando $x = 0$, temos $R(0) = 0$, concluímos que (0, 0) é o zero e a intersecção com o eixo y.

Localize o ponto (0, 0) e as assíntotas verticais e horizontal.

Determinamos alguns valores de $R(x)$ em cada intervalo do seu domínio $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ e $(2, \infty)$. Como $R(-x) = R(x)$, o gráfico é simétrico com relação ao eixo y.

$$R(3) = R(-3) = \frac{3^2}{4 - 3^2} = \frac{9}{-5} = \frac{-9}{5}; \qquad R(1) = R(-1) = \frac{1^2}{4 - 1^2} = \frac{1}{3}$$

Localize (3, − 9/5), (−3, − 9/5), (1, 1/3) e (1, −1/3).

Usando as assíntotas como retas limitantes, esboçamos o gráfico de $R(x)$. O gráfico de

$$R(x) = \frac{x^2}{4 - x^2}$$

está demonstrado na Fig. 21-2.

21.5 ESBOÇANDO GRÁFICOS DE FUNÇÕES RACIONAIS USANDO A CALCULADORA GRÁFICA

As características de uma calculadora gráfica nos permitem facilmente esboçar o gráfico de funções racionais, a menos que a calculadora tente esboçar justamente um ponto de abscissa igual ao valor da assíntota, caso em que ela une os dois ramos da função racional. Você precisa determinar as assíntotas verticais e então fixar a escala no visor para o eixo x de modo que os valores das assíntotas verticais sejam usados.

As assíntotas horizontais devem ser identificadas a partir do próprio gráfico, uma vez que elas não são desenhadas e apenas aparecem como uma característica do gráfico no visor da calculadora.

Os buracos são determinados por fatores que podem ser cancelados na expressão da função racional. Estes são difíceis de identificar a partir do gráfico esboçado no visor da calculadora.

Em geral, quando usamos uma calculadora gráfica para ajudar no esboço do gráfico de uma função racional. é bom não depender da calculadora para determinar as assíntotas verticais, as horizontais e os buracos. Determi-

By Possuidão

ne você mesmo tais valores e localize-os no gráfico que está construindo. Utilize o esboço da calculadora gráfica para indicar a localização e a forma do gráfico e para guiá-lo no seu próprio esboço do gráfico.

Problemas Resolvidos

21.1 Estabeleça o domínio de cada função racional $R(x)$.

(*a*) $R(x) = \dfrac{3x}{x+2}$ (*b*) $R(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x}$ (*c*) $R(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{x^3 - x}$

SOLUÇÃO

(*a*) Para $R(x) = 3x/(x+2)$, denote $x + 2 = 0$ e note que $R(x)$ não está definida para $x = -2$. O domínio de $R(x)$ é {todos os números reais exceto $x = -2$}, ou seja, o conjunto $(-\infty, -2)$.

(*b*) Para $R(x) = (x^3 - 2x^2 - 3x)/x$, vemos que $R(x)$ não está definida para $x = 0$. Assim, o domínio de $R(x)$ não está definido para $x = 0$. Portanto, o domínio de $R(x)$ é {todos os números reais exceto 0}, ou seja, o conjunto $(-\infty, 0) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$.

(*c*) Para $R(x) = (3x^2 - 1)/(x^3 - x)$, denotamos $x^3 - x = 0$ e observamos que, para $x = 0$, $x = 1$ e $x = -1$, $R(x)$ não está definida. O domínio de $R(x)$ é {todos os números reais exceto $-1, 0, 1$}, ou seja, o conjunto $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$.

21.2 Determine as assíntotas verticais e horizontais e os buracos do gráfico das seguintes funções racionais $R(x)$:

(*a*) $R(x) = \dfrac{3x}{x+2}$ (*b*) $R(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x}$ (*c*) $R(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{x^3 - x}$

SOLUÇÃO

(*a*) Valores que anulam o denominador mas não o numerador originam assíntotas. Em $R(x) = 3x/(x+2)$, $x = -2$ anula o denominador $x + 2$ mas não o numerador $3x$. Assim, $x = -2$ é uma assíntota vertical.

Como o grau do numerador $3x$ é 1 e o do denominador $x + 2$ é 1, $R(x)$ tem $y = 3/1 = 3$ para assíntota horizontal, onde 3 é o coeficiente líder do numerador e 1 é o do denominador.

Como $x = 0$ é o único valor que anula o numerador mas não o denominador, $R(x)$ não tem buracos no gráfico.

(*b*) Apenas $x = 0$ anula o denominador de $R(x) = (x^3 - 2x^2 - 3x)/x$. Como $x = 0$ também anula o numerador, $R(x)$ não tem assíntotas verticais.

Como o grau do numerador de $R(x)$ é 3 e o do denominador é 1, o grau do numerador excede o grau do denominador, e então não há assíntota horizontal.

Como $x = 0$ anula tanto o numerador quanto o denominador, existe um buraco no gráfico de $R(x)$ quando $x = 0$. Reduzimos $R(x)$ aos termos de menor grau e obtemos $R(x) = x^2 - 2x - 3$ quando $x \neq 0$. O gráfico desta forma reduzida teria o valor -3 se x fosse zero, de modo que o buraco no gráfico de $R(x)$ é no ponto $(0, -3)$.

(*c*) Como $x^3 - x = 0$ tem soluções $x = 0$, $x = 1$ e $x = -1$, as assíntotas verticais de $R(x) = (3x^2 - 1)/(x^3 - x)$ são $x = 0$, $x = 1$ e $x = -1$.

O grau do numerador de $R(x)$ é menor que o do denominador, de modo que $y = 0$ é a assíntota horizontal de $R(x)$.

O numerador não se anula em nenhum dos valores $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$, valores que anulam o denominador, de modo que o gráfico de $R(x)$ não tem buraco.

21.3 Quais são os zeros e as intersecções com o eixo y das funções racionais $R(x)$?

(*a*) $R(x) = \dfrac{3x}{x+2}$ (*b*) $R(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x}$ (*c*) $R(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{x^3 - x}$

SOLUÇÃO

(*a*) Em $R(x) = 3x/(x+2)$, o numerador $3x$ se anula para $x = 0$. Como $x = 0$ não anula o denominador, existe um zero para $x = 0$. Assim, $(0, 0)$ é o zero de $R(x)$. A intersecção com o eixo y é o valor de y quando $x = 0$. Assim, $(0, 0)$ é o ponto de intersecção com o eixo y.

By Possuidão

(*b*) Para $R(x) = (x^3 - 2x^2 - 3x)/x$, o numerador $x^3 - 2x^2 - 3x$ se anula quando $x = 0$, $x = -1$ e $x = 3$. No entanto, $x = 0$ anula também o denominador, de modo que ele não vai originar um zero para $R(x)$. Os zeros de $R(x)$ são $(3, 0)$ e $(-1, 0)$.

Do Problema 21.1(*b*), sabemos que $x = 0$ não pertence ao domínio de $R(x)$. Portanto, $R(x)$ não tem intersecção com o eixo y.

(*c*) Para $R(x) = (3x^2 - 1)/(x^3 - x)$, o numerador $3x^2 - 1 = 0$ tem soluções $x = \sqrt{3}/3$ e $x = -\sqrt{3}/3$. Portanto, os zeros de $R(x)$ são $(\sqrt{3}/3, 0)$ e $(-\sqrt{3}/3, 0)$.

Do Problema 21.1(*c*), sabemos que o domínio de $R(x)$ não contém $x = 0$, de modo que $R(x)$ não tem intersecção com o eixo y.

21.4 Esboce o gráfico das funções racionais $R(x)$.

(*a*) $R(x) = \dfrac{3x}{x+2}$ (*b*) $R(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x}$ (*c*) $R(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{x^3 - x}$

SOLUÇÃO

Pelos Problemas 21.1, 21.2 e 21.3, conhecemos os domínos, as assíntotas verticais e horizontais, os buracos, os zeros e as intersecções com o eixo y dessas funções racionais. Faremos uso de tais informações para esboçar o gráfico das mesmas.

(*a*) $R(x) = 3x/(x + 2)$ tem uma assíntota vertical em $x = -2$, uma horizontal em $y = 3$, e $(0, 0)$ é o ponto de intersecção do gráfico com o eixo y. Desenhamos linhas tracejadas para as assíntotas e localizamos o ponto $(0, 0)$. Selecionamos alguns valores para x, determinamos os pontos e a seguir os localizamos. Para $x = -4, -3, -1$ e 2, obtemos os pontos $(-4, 6)$, $(-3, 9)$, $(-1, -3)$ e $(2, 1{,}5)$. Agora esboçamos o gráfico de $R(x)$ passando pelos pontos acima e se aproximando das assíntotas. Como o domínio de $R(x)$ está separado em duas partes, teremos duas partes para o gráfico de $R(x)$. Veja Fig. 21-3.

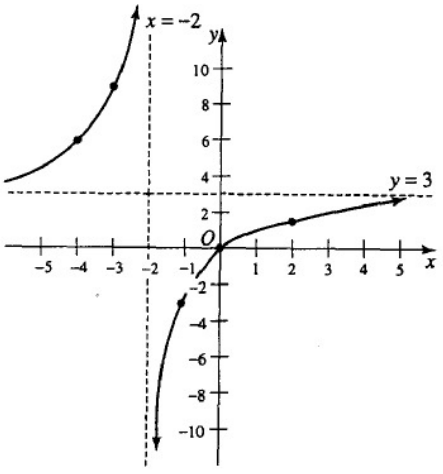

Fig. 21-3

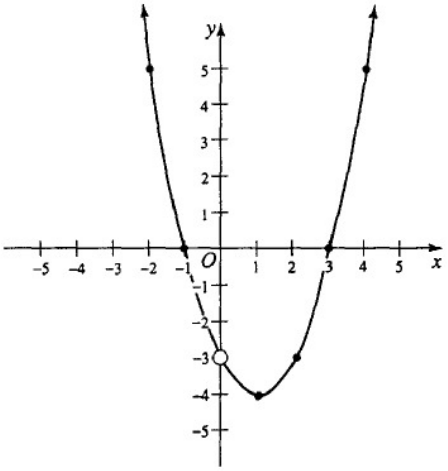

Fig. 21-4

(*b*) $R(x) = (x^3 - 2x^2 - 3x)/x = x^2 - 2x - 3$ quando $x \neq 0$, e existe um buraco em $(0, -3)$. Para o gráfico de $R(x)$ não existem assíntotas nem intersecção com o eixo y, mas existem zeros em $(3, 0)$ e $(-1, 0)$.
Localizamos os zeros e colocamos um círculo aberto O em torno do ponto $(0, -3)$ para indicar o buraco no gráfico. Agora selecionamos valores para x, determinamos os pontos correspondentes e a seguir os localizamos. Para $x = -2$, 1, 2 e 4, obtemos os pontos $(-2, 5)$, $(1, -4)$, $(2, 3)$ e $(4, 5)$. Como o domínio de $R(x)$ está separado em duas partes pelo valor de x que origina o buraco, o gráfico de $R(x)$ está separado em duas partes pelo buraco $(0, -3)$. Veja Fig. 21-4.

(*c*) $R(x) = (3x^2 - 1)/(x^3 - x)$ tem assíntotas verticais em $x = -2$, $x = 0$ e $x = 1$, uma assíntota horizontal em $y = 0$ e zeros em $(\sqrt{3}/3, 0)$ e $(-\sqrt{3}/3, 0)$. Aproximamos tais valores, obtendo $(0{,}6, 0)$ e $(-0{,}6, 0)$, localizamos estes pontos e esboçamos as assíntotas. Para nos certificarmos de que esboçamos todas as partes do gráfico de $R(x)$, selecionamos alguns valores de x provenientes de todos os intervalos do domínio. Para $x = -2, -1{,}5, -0{,}75, -0{,}25, 0{,}25, 0{,}75, 1{,}5$, e 2, obtemos os pontos $(-2, -1{,}8)$, $(-1{,}5, -3{,}1)$, $(-0{,}75, 2{,}1)$, $(-0{,}25, -3{,}5)$, $(0{,}25, 3{,}5)$, $(0{,}75, -2{,}1)$, $(1{,}5, 3{,}1)$ e $(2, 1{,}8)$. Como o domínio de $R(x)$ está separado em quatro partes, teremos também quatro partes para o gráfico de $R(x)$. Veja Fig. 21-5.

By Possuidão

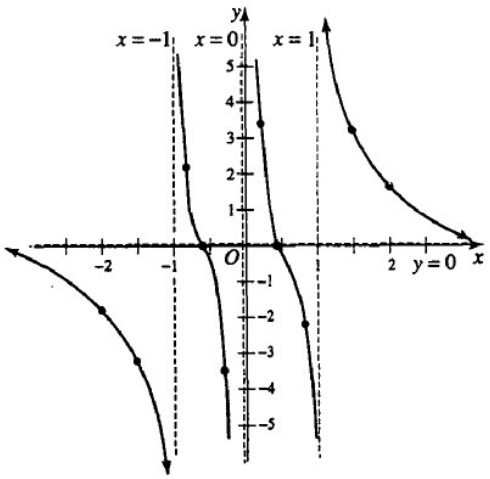

Fig. 21-5

Problemas Complementares

21.5 Determine o domínio das funções racionais.

(*a*) $R(x) = \dfrac{4}{x+2}$ (*d*) $R(x) = \dfrac{4}{x^2+x-2}$ (*g*) $R(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2}$

(*b*) $R(x) = -\dfrac{1}{x-2}$ (*e*) $R(x) = \dfrac{6-x}{x+3}$ (*h*) $R(x) = \dfrac{x^2+4}{27x^3-3x}$

(*c*) $R(x) = -\dfrac{x}{x^2-4}$ (*f*) $R(x) = \dfrac{2x-5}{x+4}$ (*i*) $R(x) = \dfrac{-x^2+x}{x^2-5x+6}$

21.6 Determine as assíntotas das funções racionais.

(*a*) $R(x) = \dfrac{4}{x-3}$ (*b*) $R(x) = \dfrac{x}{x^2-16}$ (*c*) $R(x) = \dfrac{3x+6}{x-1}$

(*d*) $R(x) = \dfrac{x^2-6x+9}{x}$ (*f*) $R(x) = \dfrac{-x^2+2x}{x+3}$ (*h*) $R(x) = \dfrac{2}{x^2-7x+10}$

(*e*) $R(x) = \dfrac{2x^2-5}{x+2}$ (*g*) $R(x) = -\dfrac{3}{x+4}$ (*i*) $R(x) = \dfrac{x+5}{5-x}$

21.7 Determine os zeros e a intersecção com o eixo *y* das funções racionais.

(*a*) $R(x) = \dfrac{3}{x+2}$ (*d*) $R(x) = \dfrac{x^3-27}{x^2}$ (*g*) $R(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2+6x+9}$

(*b*) $R(x) = -\dfrac{x}{x^2-4}$ (*e*) $R(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$ (*h*) $R(x) = \dfrac{x^3-1}{x}$

(*c*) $R(x) = \dfrac{2x+8}{x+3}$ (*f*) $R(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-1}$ (*i*) $R(x) = \dfrac{x+3}{x^2+2x+1}$

By Possuidão

21.8 Esboce os gráficos das funções racionais.

(*a*) $R(x) = \frac{2}{x}$ (*d*) $R(x) = \frac{2x-6}{x+1}$ (*g*) $R(x) = \frac{4-x^2}{x^2-9}$

(*b*) $R(x) = \frac{3}{x-2}$ (*e*) $R(x) = \frac{x+2}{x-3}$ (*h*) $R(x) = -\frac{x}{x^2-4}$

(*c*) $R(x) = -\frac{1}{x^2-1}$ (*f*) $R(x) = \frac{x}{x^2-9}$ (*i*) $R(x) = \frac{x^2-5x+4}{x^2+7x+6}$

21.9 Esboce os gráficos das funções racionais.

(*a*) $R(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$ (*b*) $R(x) = \frac{3x}{x^2-2x}$

21.10 Esboce os gráficos das funções racionais.

(*a*) $R(x) = \frac{2}{x^2+4}$ (*b*) $R(x) = \frac{x^2+2}{x^3-x}$

Respostas dos Problemas Complementares

21.5 (*a*) $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$ (*f*) $(-\infty, -4) \cup (-4, \infty)$

(*b*) $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$ (*g*) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

(*c*) $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$ (*h*) $(-\infty, -1/3) \cup (-1/3, 0) \cup (0, 1/3) \cup (1/3, \infty)$

(*d*) $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, \infty)$ (*i*) $(-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, \infty)$

(*e*) $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$

21.6

	Assíntotas verticais	Assíntotas horizontais
(*a*)	$x = 3$	$y = 0$
(*b*)	$x = 4, x = -4$	$y = 0$
(*c*)	$x = 1$	$y = 3$
(*d*)	$x = 0$	nenhuma
(*e*)	$x = -2$	nenhuma
(*f*)	$x = -3$	nenhuma
(*g*)	$x = -4$	$y = 0$
(*h*)	$x = 5, x = 2$	$y = 0$
(*i*)	$x = 5$	$y = -1$

21.7

	Zeros	Intersecção
(*a*)	nenhum	(0, 3/2)
(*b*)	(0, 0)	(0,0)
(*c*)	(–4, 0)	(0, 8/3)
(*d*)	(3, 0)	nenhuma
(*e*)	(0, 0)	(0, 0)
(*f*)	(2, 0), (– 2, 0)	(0, 4)
(*g*)	(3, 0), (2, 0)	(0, 2/3)
(*h*)	(1, 0)	nenhuma
(*i*)	(–3,0)	(0,3)

21.8 (*a*) Fig. 21-6 (*d*) Fig. 21-9 (*g*) Fig. 21-12

(*b*) Fig. 21-7 (*e*) Fig. 21-10 (*h*) Fig. 21-13

(*c*) Fig. 21-8 (*f*) Fig. 21-11 (*i*) Fig. 21-14

By Possuidão

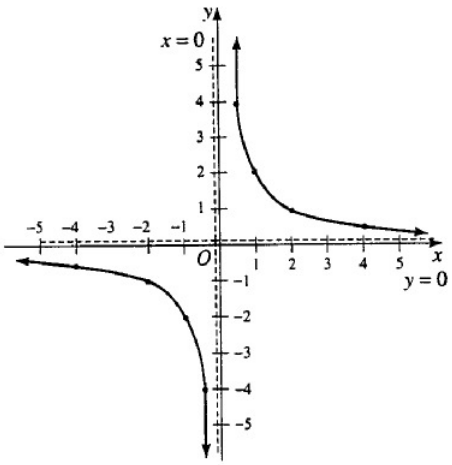

Fig. 21-6

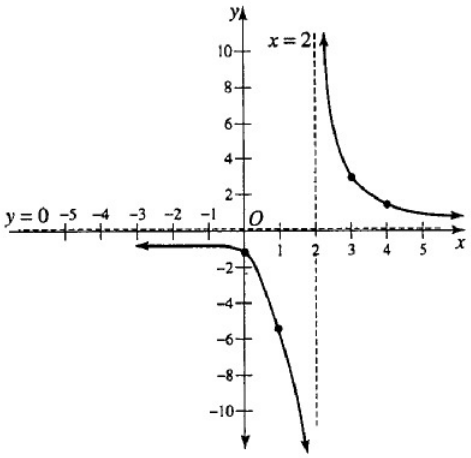

Fig. 21-7

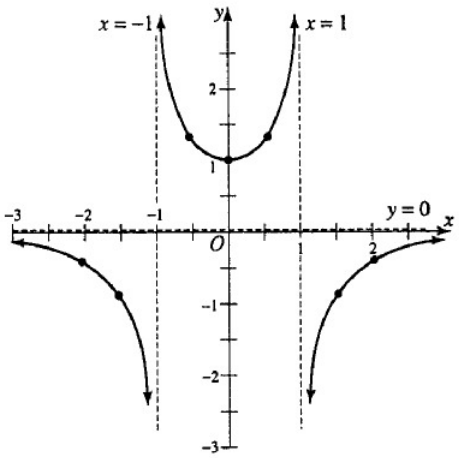

Fig. 21-8

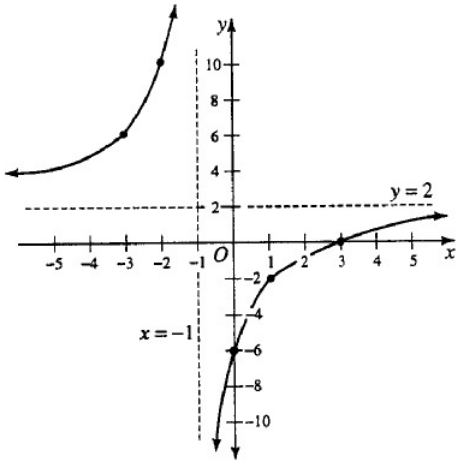

Fig. 21-9

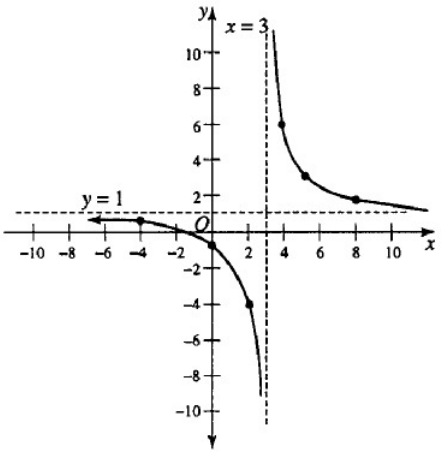

Fig. 21-10

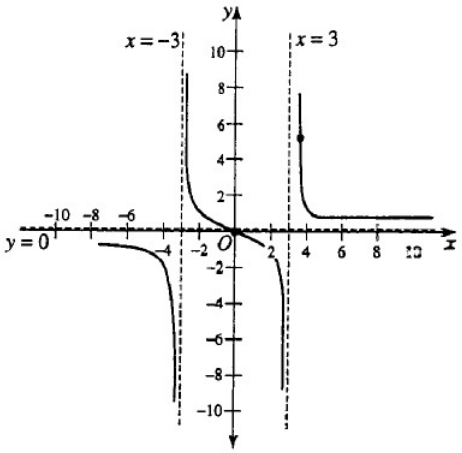

Fig. 21-11

By Possuidão

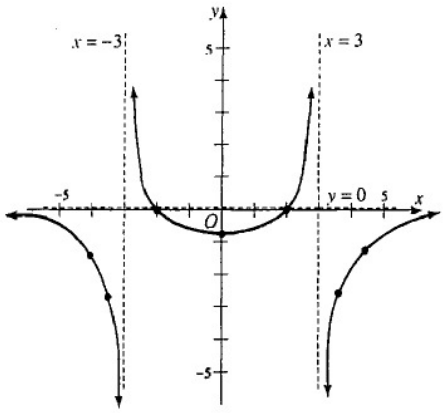

Fig. 21-12

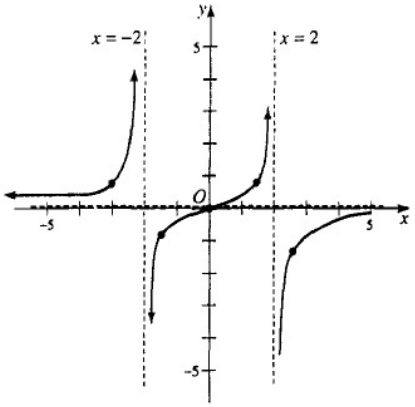

Fig. 21-13

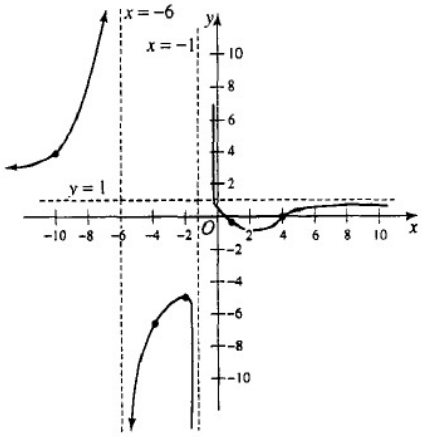

Fig. 21-14

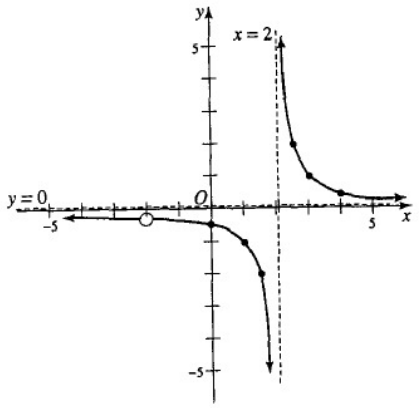

Fig. 21-15

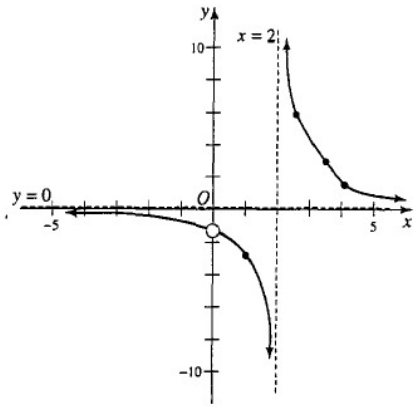

Fig. 21-16

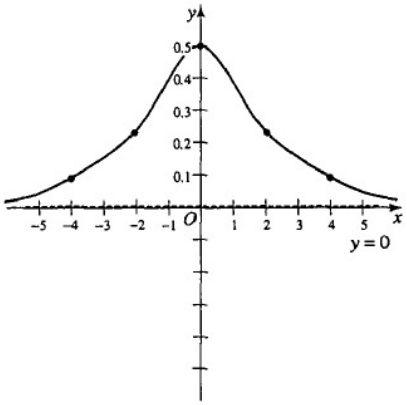

Fig. 21-17

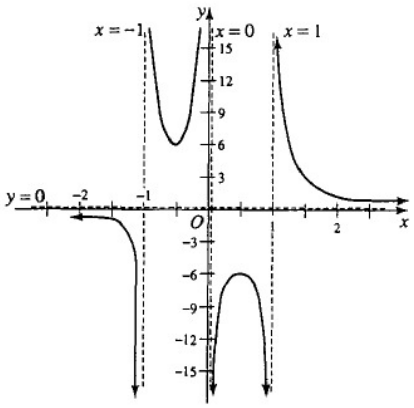

Fig. 21-18

21.9 (*a*) Reduzida aos termos de mais baixo grau, $R(x) = 1/(x-2)$ quando $x \neq -2$. O gráfico é a Fig. 21-15.
(*b*) Reduzida aos termos de mais baixo grau, $R(x) = 3/(x-2)$ quando $x \neq 0$. O gráfico é a Fig. 21-16.

21.10 (*a*) Fig. 21-17
(*b*) Fig. 21-18

By Possuidão

Capítulo 22

Seqüências e Séries

22.1 SEQÜÊNCIAS

Uma seqüência de números é uma função definida no conjunto dos inteiros positivos. Os números na seqüência são denominados *termos*. Uma série é a soma dos termos de uma seqüência.

22.2 PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

A. Uma *progressão aritmética* é uma seqüência de números em que, após o primeiro, cada um é obtido adicionando-se ao termo anterior uma constante chamada *diferença comum.*

Assim, 3, 7, 11, 15, 19, ... é uma progressão aritmética porque cada termo é obtido adicionando-se 4 ao termo precedente. Na progressão aritmética 50, 45, 40, ... a diferença comum é $45 - 50 = 40 - 45 = -5$.

B. *Fórmulas para progressões aritméticas:*

(1) O n-ésimo termo, ou último termo: $l = a + (n-1)\,d$

(2) A soma dos primeiros n termos: $S = \dfrac{n}{2}(a + l) = \dfrac{n}{2}\,[2a + (n-1)d]$

onde a = primeiro termo da progressão; d = diferença comum;

n = número de termos; l = n-ésimo termo, ou último termo;

S = soma dos primeiros n termos.

Exemplo 22.1 Considere a progressão aritmética 3, 7, 11, ... onde $a = 3$ e $d = 7 - 3 = 11 - 7 = 4$. O sexto termo é $l = a + (n-1)d = 3 + (6-1)4 = 23$.

A soma dos seis primeiros termos é

$$S = \frac{n}{2}(a + l) = \frac{6}{2}(3 + 23) = 78 \quad \text{ou} \quad S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{6}{2}[2(3) + (6-1)4] = 78$$

22.3 PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

A. Uma *progressão geométrica* é uma seqüência de números em que, após o primeiro, cada um é obtido multiplicando-se o termo anterior por uma constante chamada *razão comum.*

Assim, 5, 10, 20, 40, 80, ... é uma progressão geométrica porque cada termo é obtido multiplicando-se o termo precedente pelo número 2. Na progressão geométrica 9, -3, 1, $-1/3$, $1/9$ ..., a razão comum é

By Possuidão

$$\frac{-3}{9} = \frac{1}{-3} = \frac{-1/3}{1} = \frac{1/9}{-1/3} = -\frac{1}{3}$$

B. *Fórmulas para progressões geométricas:*

(1) O n-ésimo termo, ou último termo: $l = ar^{n-1}$

(2) A soma dos n primeiros termos: $S = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \dfrac{rl - a}{r - 1}$, $r \neq 1$

onde a = primeiro termo da seqüência; r = razão comum; n = número de termos; l = n-ésimo termo, ou último termo; S = soma dos n primeiros termos.

Exemplo 22.2 Considere a progressão geométrica 5, 10, 20, ..., onde $a = 5$ e

$$r = \frac{10}{5} = \frac{20}{10} = 2$$

O sétimo termo é $l = ar^{n-1} = 5(2^{7-1}) = 5(2^6) = 320$.

A soma dos sete primeiros termos é

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{5(2^7 - 1)}{2 - 1} = 635$$

22.4 SÉRIES GEOMÉTRICAS INFINITAS

A soma até o infinito (S_∞) de qualquer progressão geométrica (série geométrica infinita), na qual a razão comum r é numericamente menor que 1, é dada por

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r}, \qquad \text{onde} \quad |r| < 1$$

Exemplo 22.3 Considere a série geométrica infinita

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$$

onde $a = 1$ e $r = -\frac{1}{2}$. A soma dos seus infinitos termos é:

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r} = \frac{1}{1 - (-1/2)} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$$

22.5 SEQÜÊNCIAS HARMÔNICAS

Uma *seqüência harmônica* é uma seqüência de números cujos inversos formam uma progressão aritmética. Assim,

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \cdots$$

é uma seqüência harmônica porque 2, 4, 6, 8, 10, ... é uma progressão aritmética.

22.6 MÉDIAS

Os termos entre dois termos quaisquer de uma seqüência são chamados *médias* entre estes *dois* termos.

Assim, na progressão aritmética 3, 5, 7, 9, 11, ..., a média aritmética entre 3 e 7 é 5, e *quatro* médias aritméticas entre 3 e 13 são 5, 7, 9, 11.

Na progressão geométrica 2, −4, 8, −16, ..., *duas* médias geométricas entre 2 e −16 são −4, 8.

By Possuidão

Na seqüência harmônica

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots,$$

a média harmônica entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ é $\frac{1}{3}$, e *três* médias harmônicas entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{6}$ são $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$.

Problemas Resolvidos

22.1 Quais das seguintes seqüências são progressões aritméticas?

(*a*) $1, 6, 11, 16, \ldots$ Sim, uma vez que $6 - 1 = 11 - 6 = 16 - 11 = 5$. $(d = 5)$

(*b*) $\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \ldots$ Sim, uma vez que $1 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} - 1 = \frac{7}{3} - \frac{5}{3} = \frac{2}{3}$. $(d = \frac{2}{3})$

(*c*) $4, -1, -6, -11, \ldots$ Sim, uma vez que $-1 - 4 = -6 - (-1) = -11 - (-6) = -5$. $(d = -5)$

(*d*) $9, 12, 16, \ldots$ Não, uma vez que $12 - 9 \neq 16 - 12$.

(*e*) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ Não, uma vez que $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} - \frac{1}{3}$.

(*f*) $7, 9 + 3p, 11 + 6p, \ldots$ Sim, com $d = 2 + 3p$.

22.2 Comprove a fórmula $S = (n/2)(a + l)$ para a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética.

SOLUÇÃO

A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética podem ser escritos

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + l \qquad (n \text{ termos})$$

ou

$$S = l + (l - d) + (l - 2d) + \cdots + a \qquad (n \text{ termos}),$$

onde a soma é escrita na ordem reversa.

Somando, $2S = (a + l) + (a + l) + (a + l) + \cdots + (a + l)$ para n termos.

Portanto, $2S = n(a + l)$ e $S = \frac{n}{2}(a + l)$

22.3 Encontre o 16º termo da progressão aritmética 4, 7, 10, ...

SOLUÇÃO

Aqui $a = 4$, $n = 16$, $d = 7 - 4 = 10 - 7 = 3$ e $l = a + (n - 1)d = 4 + (16 - 1)3 = 49$

22.4 Determine a soma dos 12 primeiros termos da progressão aritmética 3, 8, 13, ...

SOLUÇÃO

Aqui $a = 3$, $d = 8 - 3 = 13 - 8 = 5$, $n = 12$, e

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] = \frac{12}{2}[2(3) + (12 - 1)5] = 366.$$

Caso contrário: $l = a + (n - 1)d = 3 + (12 - 1)5 = 58$ e

$$S = \frac{n}{2}(a + l) = \frac{12}{2}(3 + 58) = 366$$

22.5 Determine o 40º termo e a soma dos 40 primeiros termos da progressão aritmética 10, 8, 6, ...

SOLUÇÃO

Aqui $d = 8 - 10 = 6 - 8 = -2$, $a = 10$, $n = 40$.

By Possuidão

$$l = a + (n-1)d = 10 + (40-1)(-2) = -68 \quad \text{e}$$

Então,
$$S = \frac{n}{2}(a+l) = \frac{40}{2}(10-68) = -1160$$

22.6 Qual termo da seqüência 5, 14, 23, ... é igual a 239?

SOLUÇÃO

$l = a + (n-1)d$, $239 = 5 + (n-1)9$, $9n = 243$ e o termo solicitado é $n = 27$.

22.7 Calcule a soma dos 100 primeiros inteiros positivos que são múltiplos de 7.

SOLUÇÃO

A seqüência é 7, 14, 21, ..., uma progressão aritmética na qual $a = 7$, $d = 7$, $n = 100$.

Portanto,
$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{100}{2}[2(7) + (100-1)7] = 35\,350$$

22.8 Quantos inteiros consecutivos, começando com 10, são necessários para que sua soma seja 2035?

SOLUÇÃO

A seqüência é 10, 11, 12, ..., uma progressão aritmética na qual $a = 10$, $d = 1$, $S = 2035$.

Usando
$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d],$$

obtemos
$$2035 = \frac{n}{2}[20 + (n-1)1], \quad 2035 = \frac{n}{2}(n+19), \quad n^2 + 19n - 4070 = 0,$$
$$(n-55)(n+74) = 0, \quad n = 55, -74$$

Portanto, são necessários 55 inteiros.

22.9 Quanto tempo levar-se-á para saldar um débito de \$ 880,00 se \$ 25,00 forem pagos no primeiro mês, \$ 27,00 no segundo, \$ 29,00 no terceiro, e assim sucessivamente?

SOLUÇÃO

De
$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d],$$

obtemos
$$880 = \frac{n}{2}[2(25) + (n-1)2], \quad 880 = 24n + n^2, \quad n^2 + 24n - 880 = 0,$$
$$(n-20)(n+44) = 0, \quad n = 20, -44$$

O débito será saldado em 20 meses.

22.10 Quantos termos da progressão aritmética 24, 22, 20, ... são necessários para proporcionarem uma soma igual a 150? Escreva os termos.

SOLUÇÃO

$$150 = \frac{n}{2}[48 + (n-1)(-2)], \quad n^2 - 25n + 150 = 0, \quad (n-10)(n-15) = 0, \quad n = 10, 15$$

Para $n = 10$: 24, 22, 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6

Para $n = 15$: 24, 22, 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0, −2, −4

22.11 Determine a progressão aritmética cuja soma dos n primeiros termos é igual a $n^2 + 2n$.

SOLUÇÃO

O n-ésimo termo = soma dos n termos − soma dos $n-1$ termos

$$= n^2 + 2n - [(n-1)^2 + 2(n-1)] = 2n + 1$$

Portanto, a progressão aritmética é 3, 5, 7, 9, ...

22.12 Demonstre que a soma dos n primeiros inteiros ímpares consecutivos começando por 1 é igual a n^2.

By Possuidão

SOLUÇÃO

Precisamos determinar a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética 1, 3, 5, ...

Então, $a = 1,\ d = 2,\ n = n$ e $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}[2(1) + (n-1)2] = n^2$

22.13 Encontre três números em progressão aritmética tais que a soma do primeiro com o terceiro seja 12 e o produto do primeiro com o segundo, 24.

SOLUÇÃO

Denotemos os números da progressão aritmética por $(a-d)$, a, $(a+d)$.

Então, $(a-d) + (a+d) = 12$ ou $a = 6$.

Como $(a-d)\,a = 24$, $(6-d)\,6 = 24$ ou $d = 2$.

Portanto, os números são 4, 6, 8.

22.14 Encontre três números em progressão aritmética tais que sua soma seja 21 e seu produto, 280.

SOLUÇÃO

Denotemos os números por $(a-d)$, a, $(a+d)$.

Então $(a-d) + a + (a+d) = 21$ ou $a = 7$.

Como $(a-d)(a)(a+d) = 280$, $a(a^2 - d^2) = 7(49 - d^2) = 280$ e $d = \pm 3$.

Portanto, os números são 4, 7, 10, ou 10, 7, 4.

22.15 Três números estão na razão 2: 5:7. Se 7 for subtraído do segundo, os números resultantes formarão uma progressão aritmética. Determine os números originais.

SOLUÇÃO

Denotemos os números originais por $2x$, $5x$, $7x$. Os números resultantes na progressão aritmética são $2x$, $(5x-7)$, $7x$.

Então, $(5x-7) - 2x = 7x - (5x-7)$ ou $x = 14$.

Portanto, os números originais são 28, 70, 98.

22.16 Calcule a soma de todos os inteiros entre 100 e 800 que são divisíveis por 3.

SOLUÇÃO

A progressão aritmética é 102, 105, 108, ... Assim, $l = a + (n-1)d$, $798 = 102 + (n-1)3$, $n = 233$ e

$$S = \frac{n}{2}(a + l) = \frac{233}{2}(102 + 798) = 104\,850$$

22.17 Deve-se construir uma rampa de inclinação constante com 10 apoios eqüidistantes. As alturas do apoio mais alto e do mais baixo deverão ser $42\frac{1}{2}$ pés e 2 pés, respectivamente. Determine a altura necessária para cada apoio.

SOLUÇÃO

De $l = a + (n-1)d$, temos $42\frac{1}{2} = 2 + (10-1)\,d$ e $d = 4\frac{1}{2}$ pés.

Portanto, as alturas são $2,\ 6\frac{1}{2},\ 11,\ 15\frac{1}{2},\ 20,\ 24\frac{1}{2},\ 29,\ 33\frac{1}{2},\ 38,\ 42\frac{1}{2}$ pés, respectivamente.

22.18 Um corpo em queda livre, a partir do repouso, cai 16 pés durante o primeiro segundo, 48 pés durante o segundo, 8 durante o terceiro etc. Calcule quanto ele cai durante o 15º segundo e a distância total de queda em 15 segundos a partir do repouso.

SOLUÇÃO

Aqui $d = 48 - 16 = 80 - 48 = 32$.

Durante o 15º segundo, o corpo cai uma distância $l = a + (n-1)\,d = 16 + (15-1)32 = 464$ pés.

A distância total percorrida durante 15 segundos é $S = \frac{n}{2}(a + l) = \frac{15}{2}(16 + 464) = 3.600$ pés.

By Possuidão

22.19 Em uma corrida das batatas, 8 batatas são dispostas sobre uma linha reta, distanciadas 6 pés uma da outra, sendo que a primeira está posicionada também a 6 pés da cesta. O participante deve partir da cesta e colocar uma batata por vez na cesta. Determine a distância total que um participante deve percorrer até encerrar a corrida.

SOLUÇÃO

Aqui $a = 2 \cdot 6 = 12$ pés, e $l = 2(6 \cdot 8) = 96$ pés. Daí $S = \frac{n}{2}(a + l) = \frac{8}{2}(12 + 96) = 432$ pés.

22.20 Demonstre que, se os lados de um triângulo retângulo estiverem em progressão aritmética, sua razão será 3: 4: 5.

SOLUÇÃO

Denotemos os lados do triângulo por $(a - d)$, a, $(a + d)$, onde a hipotenusa é $(a + d)$.

Então, $(a + d)^2 = a^2 + (a - d)^2$ ou $a = 4d$. Portanto, $(a - d)$: a : $(a + d) = 3d : 4d : 5d = 3: 4: 5$.

22.21 Deduza a fórmula para a média aritmética (x) entre dois números p e q.

SOLUÇÃO

Como p, x, q estão em progressão aritmética, temos $x - p = q - x$ ou $x = \frac{1}{2}(p + q)$.

22.22 Encontre a média aritmética entre os pares de números a seguir.

(a) 4 e 56 — Média aritmética $= \dfrac{4 + 56}{2} = 30$

(b) $3\sqrt{2}$ e $-6\sqrt{2}$ — Média aritmética $= \dfrac{3\sqrt{2} + (-6\sqrt{2})}{2} = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

(c) $a + 5d$ e $a - 3d$ — Média aritmética $= \dfrac{(a + 5d) + (a - 3d)}{2} = a + d$

22.23 Insira cinco médias aritméticas entre 8 e 26.

SOLUÇÃO

Queremos determinar uma progressão aritmética da forma 8, —, —, —, —, —, 26; portanto $a = 8$, $l = 26$ e $n = 7$.

Assim, $l = a + (n - 1)\,d$, $26 = 8 + (7 - 1)\,d$, $d = 3$.

As cinco médias aritméticas são 11, 14, 17, 20, 23.

22.24 Insira entre 1 e 36 um número de médias aritméticas tais que a soma da progressão aritmética resultante seja 148.

SOLUÇÃO

$$S = \tfrac{1}{2}n(a + l), \quad 148 = \tfrac{1}{2}n(1 + 36), \quad 37n = 296 \quad \text{e} \quad n = 8$$
$$l = a + (n - 1)d, \quad 36 = 1 + (8 - 1)d, \quad 7d = 35 \quad \text{e} \quad d = 5$$

A progressão aritmética completa é 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36.

22.25 Quais das seguintes seqüências são progressões geométricas?

(a) 3, 6, 12, . . . — Sim, uma vez que $\dfrac{6}{3} = \dfrac{12}{6} = 2$. $(r = 2)$

(b) 16, 12, 9, . . . — Sim, uma vez que $\dfrac{12}{16} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$. $\left(r = \dfrac{3}{4}\right)$

(c) $-1, 3, -9, \ldots$ — Sim, uma vez que $\dfrac{3}{-1} = \dfrac{-9}{3} = -3$. $(r = -3)$

(d) 1, 4, 9, . . . — Não, pois $\dfrac{4}{1} \neq \dfrac{9}{4}$.

(e) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{9}, \ldots$ — Sim, uma vez que $\dfrac{1/3}{1/2} = \dfrac{2/9}{1/3} = \dfrac{2}{3}$. $\left(r = \dfrac{2}{3}\right)$

(f) $2h, \dfrac{1}{h}, \dfrac{1}{2h^3}, \ldots$ — Sim, uma vez que $\dfrac{1/h}{2h} = \dfrac{1/2h^3}{1/h} = \dfrac{1}{2h^2}$. $\left(r = \dfrac{1}{2h^2}\right)$

By Possuidão

22.26 Comprove a fórmula

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

para a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica.

SOLUÇÃO

A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica podem ser escritos

$$(1) \quad S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} \qquad (n \text{ termos})$$

Multiplicando (1) por r, obtemos

$$(2) \quad rS = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \qquad (n \text{ termos})$$

Subtraindo (1) de (2), obtemos

$$rS - S = ar^n - a, \qquad (r-1)S = a(r^n - 1) \qquad \text{e} \qquad S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

22.27 Encontre o oitavo termo e a soma dos oito primeiros termos da progressão geométrica 4, 8, 16, ...

SOLUÇÃO

Aqui $a = 4$, $r = 8/4 = 16/8 = 2$, $n = 8$.

O oitavo termo é $l = ar^{n-1} = 4(2)^{8-1} = 4(2^7) = 4(128) = 512$.

A soma dos oito primeiros termos é

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{4(2^8 - 1)}{2 - 1} = \frac{4(256 - 1)}{1} = 1.020$$

22.28 Determine o sétimo termo e a soma dos sete primeiros termos da seqüência 9, −6, 4, ...

SOLUÇÃO

Aqui $$a = 9, \qquad r = \frac{-6}{9} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$$

O sétimo termo é, portanto, $$l = ar^{n-1} = 9\left(-\frac{2}{3}\right)^{7-1} = \frac{64}{81}$$

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{9[1 - (-2/3)^7]}{1 - (-2/3)} = \frac{9[1 - (-128/2.187)]}{5/3} = \frac{463}{81}$$

22.29 O segundo termo de uma progressão geométrica é 3 e o quinto, 81/8. Encontre o oitavo termo.

SOLUÇÃO

quinto termo $= ar^4 = \frac{81}{8}$, segundo termo $= ar = 3$

Então, $\frac{ar^4}{ar} = \frac{81/8}{3}$, $r^3 = \frac{27}{8}$ e $r = \frac{3}{2}$.

Portanto, o 8º termo $= ar^7 = (ar^4)r^3 = \frac{81}{8}\left(\frac{27}{8}\right) = \frac{2.187}{64}$.

22.30 Encontre três números em progressão geométrica cuja soma é 26 e cujo produto é 216.

SOLUÇÃO

Denotemos os números na progressão geométrica por a/r, a, ar. Assim, $(a/r)(a)(ar) = 216$, $a^3 = 216$ e $a = 6$.

Além disso, $a/r + a + ar = 26$, $6/r + 6 + 6r = 26$, $6r^2 - 20r + 6 = 0$ e $r = 1/3, 3$.

Para $r = 1/3$, os números são 18, 6, 2; para $r = 3$, são 2, 6, 18.

22.31 O primeiro termo de uma progressão geométrica é 375 e o quarto, 192. Encontre a razão comum e a soma dos quatro primeiros termos.

By Possuidão

SOLUÇÃO

1º termo = $a = 375$, 4º termo = $ar^3 = 192$. Então, $375r^3 = 192$, $r^3 = 64/125$ e $r = 4/5$

A soma dos quatro primeiros termos é

$$S = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{375[1-(4/5)^4]}{1-4/5} = 1.107$$

22.32 O primeiro termo de uma progressão geométrica é 160, e a razão comum é 3/2. Quantos termos consecutivos devemos considerar para ter uma soma igual a 2110?

SOLUÇÃO

$$S = \frac{a(r^n-1)}{r-1}, \quad 2110 = \frac{160[(3/2)^n-1]}{3/2-1}, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 = \frac{211}{32}, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{243}{32} = \left(\frac{3}{2}\right)^5, \qquad n = 5$$

Os cinco termos consecutivos são 160, 240, 360, 540, 810.

22.33 Em uma progressão geométrica de quatro termos na qual a razão é positiva, a soma dos dois primeiros termos é 8, e a dos dois últimos é 72. Determine a progressão.

SOLUÇÃO

Os quatro termos são a, ar, ar^2, ar^3. Assim, $a + ar = 8$ e $ar^2 + ar^3 = 72$.

Portanto, $\dfrac{ar^2+ar^3}{a+ar} = \dfrac{ar^2(1+r)}{a(1+r)} = r^2 = \dfrac{72}{8} = 9$, de modo que $r = 3$.

Como $a + ar = 8$, $a = 2$ e a progressão é 2, 6, 18, 54.

22.34 Prove que x, $x + 3$, $x + 6$ nunca forma uma progressão geométrica.

SOLUÇÃO

Se x, $x + 3$, $x + 6$ fosse uma progressão geométrica, então

$$r = \frac{x+3}{x} = \frac{x+6}{x+3}, \quad x^2 + 6x + 9 = x^2 + 6x, \text{ ou } 9 = 0$$

Como esta igualdade nunca é verdadeira, concluímos que x, $x + 3$, $x + 6$ não pode ser uma progressão geométrica.

22.35 Um garoto concorda em trabalhar recebendo um centavo no primeiro dia, dois no segundo, quatro no terceiro, oito no quarto, etc. Quanto ele receberá ao final de 12 dias de trabalho?

SOLUÇÃO

Aqui $a = 1$, $r = 2$, $n = 12$.

$$S = \frac{a(r^n-1)}{r-1} = 2^{12} - 1 = 4096 - 1 = 4095¢ = \$40{,}95$$

22.36 Estima-se que a população de uma certa cidade crescerá 10% a cada ano por quatro anos. Qual será a porcentagem de crescimento populacional da população após este período?

SOLUÇÃO

Denotemos por p a população inicial. Após um ano, a população será igual a $1{,}10\,p$; após dois, será igual a $(1{,}10)^2\,p$; após três, $(1{,}10)^3\,p$; após quatro, $(1{,}10)^4\,p = 1{,}46\,p$. Portanto, a população crescerá 46%.

22.37 De um tanque contendo 240 galões de álcool, 60 galões são retirados e substituídos por água. A seguir, 60 galões da mistura são retirados e substituídos por água, etc. Quantos galões de álcool restarão no tanque depois de realizadas cinco substituições de 60 galões?

SOLUÇÃO

Após a primeira substituição, restam $240 - 60 = 180$ galões de álcool tanque.

By Possuidão

Após a segunda substituição, restam

$$180\left(\frac{240-60}{240}\right) = 180\left(\frac{3}{4}\right) \text{ galões de álcool}$$

A progressão geométrica para o número de galões de álcool que restam no tanque após sucessivas substituições é

$$180, 180\left(\frac{3}{4}\right), 180\left(\frac{3}{4}\right)^2, \ldots \quad \text{onde} \quad a = 180, \; r = \frac{3}{4}.$$

Após a quinta substituição ($n = 5$), restam

$$l = ar^{n-1} = 180\left(\frac{3}{4}\right)^4 = 57 \text{ galões de álcool}$$

22.38 Uma soma de \$ 400,00 é investida hoje a uma taxa de 6% ao ano. Qual será o capital acumulado em cinco anos, se os juros forem computados

(*a*) anualmente, (*b*) a cada meio ano, (*c*) trimestralmente?

SOLUÇÃO

Denotemos por P = capital inicial, i = taxa de juro por período, S = capital acumulado após n períodos.

Ao final do primeiro período: juro = Pi, novo capital = $P + Pi = P(1 + i)$.

Ao final do segundo período: juro = $P(1 + i)i$, novo capital = $P(1 + i) + P(1 + i)i = P(1 + i)^2$.

O capital acumulado ao final de n períodos será $S = P(1 + i)^n$.

(*a*) Como existe uma taxa de juro por ano, $n = 5$ e $i = 0{,}06$.

$$S = P(1 + i)^n = 400(1 + 0{,}06)^5 = 400(1{,}3382) = \$535{,}28$$

(*b*) Como existem duas taxas de juro por ano, $n = 2(5) = 10$ e $i = \frac{1}{2}(0{,}06) = 0{,}03$.

$$S = P(1 + i)^n = 400(1 + 0{,}03)^{10} = 400(1{,}3439) = \$537{,}56$$

(*c*) Como existem quatro taxas de juro por ano, $n = 4(5) = 20$ e $i = \frac{1}{4}(0{,}06) = 0{,}015$.

$$S = P(1 + i)^n = 400(1 + 0{,}015)^{20} = 400(1{,}3469) = \$538{,}76$$

22.39 Que capital (P) deve ser investido a um juro de 4% ao ano, computado a cada meio ano, de forma que o capital resultante (S) seja de \$ 500,00 ao final de $3\frac{1}{2}$ anos?

SOLUÇÃO

Como existem duas taxas de juro por ano, $2(3\frac{1}{2}) = 7$ (períodos) e a taxa de juro por período é $i = \frac{1}{2}(0{,}04) = 0{,}02$.

Assim, $S = P(1 + i)^n$ ou $P = S(1 + i)^{-n} = 500(1 + 0{,}02)^{-7} = 500(0{,}870\,56) = \$435{,}28$.

22.40 Deduza a fórmula da média geométrica, G, entre dois números p e q.

SOLUÇÃO

Como p, G, q estão em progressão geométrica, temos $G/p = q/G$, $G^2 = pq$ e $G = \pm\sqrt{pq}$.

É comum tomarmos $G = \sqrt{pq}$ se p e q forem positivos

e $G = -\sqrt{pq}$ se p e q forem negativos.

22.41 Encontre a média geométrica entre os pares de números a seguir.

(*a*) 4 e 9 $\quad G = \sqrt{4(9)} = 6$

(*b*) -2 e -8 $\quad G = -\sqrt{(-2)(-8)} = -4$

(*c*) $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ e $\sqrt{7} - \sqrt{3}$ $\quad G = \sqrt{(\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3})} = \sqrt{7 - 3} = 2$

22.42 Mostre que a média aritmética A entre dois números positivos p e q é maior ou igual à sua média geométrica G.

By Possuidão

SOLUÇÃO

A média aritmética entre p e q é $A = \frac{1}{2}(p+q)$. A média geométrica p e q é $G = \sqrt{pq}$.

Então, $A - G = \frac{1}{2}(p+q) - \sqrt{pq} = \frac{1}{2}(p - 2\sqrt{pq} + q) = \frac{1}{2}(\sqrt{p} - \sqrt{q})^2$.

No entanto, $\frac{1}{2}(\sqrt{p} - \sqrt{q})^2$ é sempre positivo ou zero; assim $A \geq G$. ($A = G$ se e somente se $p = q$.)

22.43 Insira duas médias geométricas entre 686 e 2.

SOLUÇÃO

Queremos determinar uma progressão geométrica da forma 686, —, —, 2, onde $a = 686$, $l = 2$, $n = 4$.

Então, $l = ar^{n-1}$, $2 = 686r^3$, $r^3 = 1/343$ e $r = 1/7$.

Assim, progressão geométrica é 686, 98, 14, 2, e as médias são 98, 14.

Nota: Na verdade, $r^3 = 1/343$ é satisfeita por três valores distintos de r, sendo uma das soluções real e as outras duas imaginárias. É comum excluir-se das progressões geométricas os números imaginários.

22.44 Insira cinco médias geométricas entre 9 e 576.

SOLUÇÃO

Queremos determinar uma progressão geométrica da forma 9, —, —, —, —, —, 576, onde $a = 9$, $l = 576$, $n = 7$.

Então, $l = ar^{n-1}$, $576 = 9r^6$, $r^6 = 64$, $r^3 = \pm 8$ e $r = \pm 2$.

Assim, as progressões são 9, 18, 36, 72, 144, 288, 576 e 9, −18, 36, −72, 144, −288, 576, e as médias correspondentes são 18, 36, 72, 144, 288 e −18, 36, −72, 144, −288.

22.45 Encontre a soma das seguintes séries geométricas infinitas:

(*a*) $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$ $\qquad S_\infty = \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{2}{1-1/2} = 4$

(*b*) $\frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{4}{27} - \frac{8}{81} + \cdots$ $\qquad S_\infty = \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{1/3}{1-(-2/3)} = \dfrac{1}{5}$

(*c*) $1 + \dfrac{1}{1{,}04} + \dfrac{1}{(1{,}04)^2} + \cdots$ $\qquad S_\infty = \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{1}{1-1/1{,}04} = \dfrac{1{,}04}{1{,}04-1} = \dfrac{104}{4} = 26$

22.46 Expresse cada uma das seguintes dízimas periódicas como frações racionais:

(*a*) 0,444 . . . (*b*) 0,4272727 . . . (*c*) 6,305305 . . . (*d*) 0,78367836 . . .

SOLUÇÃO

(*a*) $0{,}444\ldots = 0{,}4 + 0{,}04 + 0{,}004 + \ldots$, onde $a = 0{,}4$, $r = 0{,}1$.

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{0{,}4}{1-0{,}1} = \frac{0{,}4}{0{,}9} = \frac{4}{9}$$

(*b*) $0{,}4272727\ldots = 0{,}4 + 0{,}0272727\ldots$

$0{,}0272727\ldots = 0{,}027 + 0{,}00027 + 0{,}0000027 + \ldots$, onde $a = 0{,}027$, $r = 0{,}01$.

$$S_\infty = 0{,}4 + \frac{a}{1-r} = 0{,}4 + \frac{0{,}027}{1-0{,}01} = 0{,}4 + \frac{27}{990} = \frac{4}{10} + \frac{3}{110} = \frac{47}{110}$$

(*c*) $6{,}305305\ldots = 6 + 0{,}305305\ldots$

$0{,}305305\ldots = 0{,}305 + 0{,}000305 + \ldots$, onde $a = 0{,}305$, $r = 0{,}001$.

$$S_\infty = 6 + \frac{a}{1-r} = 6 + \frac{0{,}305}{1-0{,}001} = 6 + \frac{305}{999} = 6\frac{305}{999}$$

(*d*) $0{,}78367836\ldots = 0{,}7836 + 0{,}00007836 + \ldots$, onde $a = 0{,}7836$, $r = 0{,}0001$.

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{0{,}7836}{1-0{,}0001} = \frac{7836}{9999} = \frac{2612}{3333}$$

22.47 As distâncias alcançadas por um pêndulo em sucessivas oscilações formam a progressão geométrica 16, 12, 9, ... polegadas, respectivamente. Calcule a distância total percorrida por ele até chegar ao repouso.

By Possuidão