quártica. Mais geralmente, todo conjunto dado de

$$n(n+3)/2-1$$

pontos arbitrários determinará uma coleção associada de

$$n^2-[n(n+3)/2-1]=(n-1)(n-2)/2$$

pontos "dependentes" adicionais, tal que qualquer curva de grau n passando por todos os pontos dados passará também pelos pontos dependentes[8]. Plücker deu também um dual desse teorema sobre o paradoxo, bem como generalizações a superfícies em três dimensões.

5 Plücker, no primeiro volume de *Analytisch-geometrische Entwicklungen* (1828) elevou à categoria de princípio a notação abreviada de Lamé e Gergonne; no segundo volume dessa influente obra (1831) ele redescobriu um novo sistema de coordenadas que já tinha sido inventado independentemente três vezes. Era o que chamamos coordenadas homogêneas, de que Feuerbach foi um inventor[9]. Outro descobridor foi A. F. Möbius (1790-1860) que publicou seu sistema em 1827 numa obra com o título *Barycentrische Calcul*. O autor deste clássico é mais conhecido, no entanto, pela superfície de um só lado que tem seu nome — a faixa de Möbius obtida unindo as extremidades de uma fita depois de dar uma volta a uma delas. Ainda outro inventor das coordenadas homogêneas foi Étienne Bobillier (1797-1832) um graduado da École Polytechnique que publicou seu novo sistema de coordenadas nos *Annales* de Gergonne de 1827-1828. As notações e linhas de raciocínio dos quatro inventores diferiam[10], mas todos tinham uma coisa em comum — usavam *três* coordenadas em vez de duas para determinar um ponto do plano. Os sistemas eram equivalentes ao que também chamamos coordenadas trilineares. Plücker, na verdade, a princípio tomou especificamente suas três coordenadas x, y e t de um ponto P de um plano como sendo as três distâncias de P aos lados de um triângulo de referência. Mais tarde no Vol. II de *Analytisch-geometrische Entwicklungen* ele deu a definição mais usual de coordenadas homogêneas como coleção de triplas ordenadas de números (x, y, t) relacionadas como as coordenadas cartesianas (X, Y) de P por $x = Xt$ e $y = Yt$. É evidente que as coordenadas homogêneas de um ponto P não são únicas, pois a tripla (x, y, t) e a tripla (kx, ky, kt), $k \neq 0$, correspondem ao mesmo par $(x/t, y/t)$. Porém a falta de unicidade não causa mais dificuldade que a falta de unicidade em coordenadas polares ou a falta de unicidade de forma no caso de frações. O nome homogênea provém, é claro, do fato de que quando usamos as equações de transformação para passar da equação $f(X, Y) = 0$ de uma curva em coordenadas cartesianas para a forma $f(x/t, y/t) = 0$ a nova equação conterá termos todos de mesmo grau nas variáveis x, y e t. E, o que é mais importante, deve-se notar que não há no sistema de coordenadas cartesianas um par que corresponda a uma tripla numérica homogênea da forma $(x, y, 0)$. Uma tal tripla (se x e y não são ambos nulos) designa um ponto ideal, ou "ponto no infinito". Finalmente se tinha conseguido ligar os elementos infinitos de Kepler, Desargues e Poncelet a um sistema de coordenadas de números ordinários. Além disso, assim como toda tripla ordenada de números reais (não todos nulos) em coordenadas homogêneas corresponde a um ponto num plano, também toda equação linear $ax + by + ct = 0$ (desde que a, b e c não sejam todos nulos) corresponde a uma reta no plano. Em particular todos os "pontos no infinito" no plano estão evidentemente sobre a reta dada pela equação $t = 0$, chamada reta no infinito ou reta ideal no plano. É evidente que esse novo sistema de coordenadas é o ideal para o estudo da geo-

[8]Veja Charlotte A. Scott, "On the Intersections of Plane Curves", *Bulletin of the American Mathematical Society*, **4** (1897-1898), 260-273

[9]Veja Albert Keifer, *Die Einführung der homogenen Koordinaten durch* K. W. Feuerbach, M. D. Schauberg (Strassburg, 1910)

[10]Para mais detalhes e referências veja C. B. Boyer, *History of Analytic Geometry* (1956), pp. 241-244, 249-252

metria projetiva, que até então fora estudada quase exclusivamente do ponto de vista da geometria pura.

6 As coordenadas homogêneas representaram um grande passo na direção da aritmetização da geometria, mas em 1829 Plücker publicou no *Journal* de Crelle um artigo com um ponto de vista revolucionário, que era uma completa ruptura com o conceito cartesiano de coordenadas como segmentos de reta. A equação de uma reta em coordenadas homogêneas tem a forma $ax + by + ct = 0$. Os três coeficientes ou parâmetros (a, b, c) determinam uma única reta no plano, exatamente como as três coordenadas homogêneas (x, y, t) correspondem a um único ponto do plano. Como as coordenadas são números, portanto não diferentes dos coeficientes, Plücker viu que se podia modificar a linguagem usual e chamar (a, b, c) as *coordenadas* homogêneas de uma reta. Se, finalmente, invertermos a convenção cartesiana de modo que as primeiras letras do alfabeto designem variáveis e as do fim do alfabeto constantes, a equação $ax + by + ct = 0$ representará um feixe de retas passando pelo ponto fixo (x, y, t), em lugar do feixe de pontos sobre a reta fixa (a, b, c). Considerando agora a equação descomprometida $pu + qv + rw = 0$, é claro que ela pode ser olhada indiferentemente como representando a totalidade dos pontos (u, v, w) que jazem sobre a reta fixa (p, q, r) ou a totalidade das retas (p, q, r) passando pelo ponto fixo (u, v, w).

Plücker havia descoberto o correspondente analítico imediato do princípio geométrico de dualidade, a respeito do qual Gergonne e Poncelet haviam brigado; ficou claro agora que a justificação que a geometria pura havia buscado em vão era aqui fornecida pelo ponto de vista algébrico. A permuta das palavras "ponto" e "reta" corresponde apenas à permuta das palavras "constante" e "variável" em relação às quantidades p, q, r e u, v, w. Da simetria da situação algébrica resulta claramente que todo teorema que diz respeito a $pu + qv + rw = 0$ aparece imediatamente em duas formas, duais uma da outra. Além disso, Plücker mostrou que toda curva pode ser encarada como tendo origem dual: é um lugar gerado por um ponto móvel e é envolvida por uma reta móvel, o ponto movendo-se continuamente ao longo da reta enquanto a reta gira com centro no ponto. E, o que é estranho, o grau de uma curva em coordenadas de ponto (a "ordem" da curva) não precisa ser igual ao grau da curva em coordenadas de reta (a "classe" da curva) e um dos grandes sucessos de Plücker, publicado no *Journal* de Crelle de 1834, foi a descoberta de quatro equações, que têm seu nome, relacionando a classe e a ordem de uma curva com as singularidades da curva:

$$m = n(n-1) - 2\delta - 3\kappa \quad \text{e} \quad n = m(m-1) - 2\tau - 3\iota;$$
$$\iota = 3n(n-2) - 6\delta - 8\kappa \quad \text{e} \quad \kappa = 3m(m-2) - 6\tau - 8\iota$$

onde m é a classe, n a ordem, δ o número de nós, κ o número de cúspides, ι o número de tangentes estacionárias (pontos de inflexão) e τ o número de bitangentes. Dessas equações resulta imediatamente que uma cônica (de ordem dois) não pode ter singularidades e portanto deve ser também de classe dois.

Num artigo no *Journal* de Crelle em 1831 Plücker estendeu o princípio de dualidade a três dimensões, onde as relações entre as coordenadas homogêneas (a, b, c, d) de um plano e as coordenadas (x, y, z, t) de um ponto mostram que o dual de um teorema no espaço tridimensional se obtém por permuta das palavras "ponto" e "plano", a palavra "reta" permanecendo sem modificação. O geômetra francês Michel Chasles (1793-1880) afirmou ter tido a idéia das coordenadas de reta e plano ao mesmo tempo que Plücker, o que dá mais um exemplo de simultaneidade de descoberta na geometria do século dezenove[11]. Em artigos e volumes posteriores Plücker estendeu seu trabalho de modo a incluir coordenadas cartesianas e homogêneas imaginárias. Agora era trivial justificar o teorema de Poncelet que diz que todos os círculos têm em comum dois pontos imaginários no infinito, pois os pontos $(1, i, 0)$ e $(i, 1, 0)$ satisfazem ambos à equação $x^2 + y^2 + axt + byt + ct^2 = 0$, quaisquer que sejam os valores de a, b, c. Plücker mostrou também que os focos das cônicas têm a propriedade que as tangentes imaginárias

[11]Veja C. B. Boyer, *History of Analytic Geometry*, p. 251, nota 65

por esses pontos à curva passam pelos dois pontos circulares citados acima; por isso ele definiu um foco de uma curva plana de ordem superior como um ponto tendo essa propriedade.

7 Durante os dias de Descartes e Fermat, e novamente durante o tempo de Monge e Lagrange, a França fora o centro do desenvolvimento da geometria analítica, mas com a obra de Plücker a liderança no campo atravessou o Reno fixando-se na Alemanha. No entanto Plücker foi em larga medida o tradicional profeta não reconhecido em seu próprio país. Lá Steiner era extraordinariamente admirado; e Steiner odiava métodos analíticos. O termo análise implica uma certa dose de técnica ou maquinaria. Freqüentemente se fala da análise como um instrumento, termo nunca aplicado à síntese; e Steiner fazia objeções a todos os tipos de instrumentos ou "ajudas mecânicas" na geometria. O cálculo, ele dizia, substitui o pensamento, ao passo que a geometria deveria estimular o pensamento. Möbius permaneceu neutro na controvérsia análise versus síntese, mas Jacobi, apesar de ser ele próprio um construtor de algoritmos, se uniu a Steiner na oposição polêmica a Plücker[12]. Desanimado, Plücker em 1847 se voltou da geometria para a física, publicando uma série de artigos sobre magnetismo e espetroscopia.

É uma das ironias da história que a obra de Plücker encontrou reconhecimento onde menos se esperaria. A Inglaterra durante o século dezoito fora um bastião da geometria sintética; ao passo que Monge e Lagrange estavam produzindo a revolução analítica na França, a geometria de coordenadas na Inglaterra fora pouco adiante da obra de Newton. Mesmo *As cônicas* de Wallis caíra em desuso em Cambridge, onde o interesse pela matemática estava em baixa no começo do século dezenove[13]. O rápido progresso da pesquisa matemática na França e na Inglaterra impressionara pouco na Grã-Bretanha. Perante essa situação, um grupo de jovens matemáticos de Cambridge em 1812 formou o que chamaram a "Analytic Society". Nas palavras de Charles Babbage (1792-1871), um dos líderes, o objetivo da Sociedade era promover *"the principles of pure* d-*ism as opposed to the* dot-*age of the university"*. (Um segundo objetivo da Sociedade era "deixar o mundo mais sábio do que o tinham encontrado".) Isso, é claro, era uma referência à persistente recusa dos ingleses de abandonar os fluxos de Newton, com notação com pontos (*dot*), em favor das diferenciais, notadas *d*, de Leibniz; mais geralmente implicava um desejo de aproveitar os grandes progressos feitos na matemática no Continente[14]. Em 1816, como resultado da inspiração da Sociedade, foi publicada uma tradução para o inglês do *Calculus* em um volume de Lacroix, e dentro de poucos anos os matemáticos ingleses se viram em posição de rivalizar com seus contemporâneos do Continente. Por exemplo, George Green (1793-1841), um filho de moleiro, autodidata, em 1828 publicou para circulação privada um ensaio sobre eletricidade e magnetismo que continha o importante teorema que leva seu nome: se $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ têm derivadas parciais contínuas sobre uma região R do plano xy limitada por uma curva C, então $\int_C Pdx + Qdy = \iint_R (Q_x - P_y)dxdy$. Esse teorema, ou seu análogo em três dimensões, é também conhecido como teorema de Gauss, pois os resultados de Green foram praticamente esquecidos até serem redescobertos por Lord Kelvin em 1846. Enquanto isso o teorema fora também descoberto por Michel Ostrogradski (1801-1861) e na Rússia tem seu nome até hoje.

8 Um fato que ilustra o despertar da matemática na Inglaterra é a fundação em 1839 do *Cambridge Mathematical Journal*. Logo depois a Inglaterra produziu um dos mais prolíficos matemáticos de todos os tempos, só Euler e Cauchy sendo seus rivais em produtividade. Foi Arthur Cayley (1821-1895), um brilhante estudante de Cambridge que ganhou a maior parte dos prêmios de matemática e que desde cedo contribuiu com artigos no *Cambridge Mathematical Journal* e seus sucessores. Cayley era primariamente um algebrista, não um especialista em geometria; mas era no lado algébrico que Plücker fora mais fraco. É com surpresa que se observa que Plücker não aproveitara os desenvolvimentos na teoria dos determinantes, talvez por causa de seu feudo com Jacobi; pode ser essa a razão pela qual ele não desenvolveu sistematicamente uma geometria analítica de mais de três dimensões. Plücker chegara perto dessa noção por sua observação em 1846 de que os quatro parâmetros que determinam uma reta no espaço tridimensional podem ser pensados como quatro coordenadas; mas só muito tempo depois, em 1865, é que ele voltou à geometria analítica e desenvolveu a idéia de uma "nova geometria do espaço" — um espaço a quatro dimensões em que as retas e não os pontos eram os elementos básicos. Enquanto isso, em 1843 Cayley iniciara a geometria analítica ordinária do espaço n-dimensional, usando determinantes como instrumento essencial. Nessa notação, usando coordenadas homogêneas, as equações da reta e do plano, respectivamente, podem ser escritas como

$$\begin{vmatrix} x & y & t \\ x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Cayley fez notar que o correspondente elemento fundamental $(n-1)$-dimensional no espaço a n dimensões pode ser expresso em coordenadas homogêneas por um determinante, semelhante a esses anteriores, de ordem $n + 1$. Muitas das fórmulas simples para dimensões dois e três podem, se convenientemente expressas, ser generalizadas facilmente para n dimensões. Em 1846 Cayley publicou um artigo no *Journal* de Crelle em que ele novamente estendia alguns teoremas do espaço tridimensional a um espaço de dimensão quatro; em 1847 Cauchy nos *Comptes Rendus* publicou um artigo em que ele considerava "pontos analíticos" e "retas analíticas" num espaço de dimensão maior que três[15].

9 Um ano apenas depois da publicação do primeiro artigo de Cayley sobre a geometria em dimensões superiores, noções semelhantes apareceram na Alemanha em *Ausdehnungslehre* de Hermann Grassmann (1809-1877). Em notação nova e assustadora e obscura exposição, Grassmann tentava construir um cálculo de "grandezas extensivas" envolvendo um número indefinido de elementos ou dimensões, mas seus esforços para construir uma espécie de análise vetorial para n dimensões encontraram pouca compreensão da parte de seus contemporâneos[16]. Talvez uma razão para isso fosse a influência esmagadora de Steiner, que continuava a defender a geometria pura. Steiner, em Systematische Entwicklungen de 1832 produzira um tratamento da geometria projetiva baseado em considerações métricas. Alguns anos depois a geometria pura encontrou outro devoto alemão em K. G. C. von Staudt (1798-1867), cuja *Geometrie der Lage* de 1847 construía a geometria projetiva sem referência a grandeza ou número. Na França a obra de Poncelet tinha sido continuada por Chasles, também graduado da École Polytechnique, onde se tornou professor de geometria. A Chasles deve-se a ênfase nas seis razões duplas ou anarmônicas

$$\frac{c-a}{c-b} \Big/ \frac{d-a}{d-b}$$

de quatro pontos colineares ou quatro retas concorrentes, e na invariância delas sob transformações projetivas. Seu *Traité de géométrie supérieure* (1852) foi influente também

[12]Uma excelente exposição sobre a obra de Plücker se encontra em Wilhelm Ernst, *Julius Plücker* (1933). Veja também Alfred Clebsch, "Notice sur les travaux de Jules Plücker", traduzido por Paul Mansion, *Bulletino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche*, **5** (1872), 183-212

[13]Veja W. W. R. Ball, *A History of the Study of Mathematics at Cambridge* (Cambridge, 1889)

[14]Veja J. M. Dubbey, "The Introduction of the Differential Notation to Great Britain", *Annals of Science*, **19** (1963), 37-48

[15]Para excertos dessas e outras obras veja *Source Book in Mathematics*, editado por D. E. Smith, pp. 524-545

[16]Uma exposição resumida das idéias de Grassmann se encontra em J. L. Coolidge, *A History of Geometrical Methods* (1963), pp. 252-257, e uma tradução de uma parte de *Ausdehnungslehre* de Grassmann aparece em *Source Book in Mathematics* de Smith, pp. 684-696

para o estabelecimento do uso de segmentos de reta orientados na geometria pura. Chasles, que é conhecido também por seu *Aperçu historique sur l'origine et le developpement des méthodes en géométrie* (1837) foi um dos últimos grandes geômetras projetivos na França, e foi principalmente na Alemanha que sua obra foi continuada por homens como Steiner e von Staudt. A este último em particular deve-se muito da forma que tomou a geometria projetiva sintética[17].

10 Foi difícil apresentar uma descrição dos desenvolvimentos geométricos na primeira metade do século dezenove por causa das correntes cruzadas e das inter-relações entre os múltiplos aspectos do assunto, mas houve um aspecto, o surgimento da geometria não-euclidiana, que se desenvolveu independentemente dos movimentos descritos acima. Porém, também nesse caso encontramos um assombroso exemplo de simultaneidade de descoberta, pois noções semelhantes ocorreram, durante o primeiro terço do século dezenove, a três homens, um alemão, um húngaro e um russo. Já observamos que Gauss durante a segunda década do século tinha chegado à conclusão que os esforços para provar o postulado das paralelas feitos por Saccheri, Lambert, Legendre e seu amigo húngaro Farkas Bolyai eram vãos e que eram possíveis geometrias diferentes da de Euclides. No entanto, ele não participou suas idéias a outros; ele simplesmente tinha elaborado a idéia, como ele disse, "para si próprio". Por isso continuaram a ser feitos esforços para provar o postulado, e entre os que tentaram tal prova estava o jovem Nicolai Lobachevsky (1793-1856), filho de um funcionário que morreu quando Nicolai tinha apenas sete anos. Lobachevsky freqüentou a Universidade de Kazan, apesar das dificuldades financeiras da família, onde entrou em contato com reputados professores que a universidade trouxera da Alemanha, inclusive J. M. Bartels (1769-1836) com quem Gauss estudara antes. Aos vinte e um anos, apenas, Lobachevsky tornou-se membro do corpo docente, e em 1827 tinha sido nomeado Reitor da universidade. Lá ele permaneceu, como professor e administrador, até o fim de seus dias, apesar de seus últimos anos serem amargurados pela cegueira e pela falta de apreciação por seu trabalho.

Lobachevsky e Ostrogradsky foram ambos matemáticos russos eminentes, mas diferiam fortemente quanto a idéias matemáticas e políticas. Ostrogradsky estudara longamente em Paris, onde sofreu a influência da análise francesa de Cauchy — assunto convencional em que rápido progresso estava sendo feito. Lobachevsky, de outro lado, tinha sido mais influenciado pela corrente alemã e geométrica. Além disso, Ostrogradsky vinha de família próspera, aristocrática e conservadora, ao passo que Lobachevsky, constantemente sujeito a pobreza e privações, nunca teve uma posição de relevo na sociedade e freqüentemente defendia causas liberais impopulares. Assim em sua época Ostrogradsky gozou de uma estima que Lobachevsky não teve; mas hoje o nome de Ostrogradsky, quando é conhecido, é em conexão com um único teorema, ao passo que Lobachevsky é chamado o "Copérnico da geometria", o homem que revolucionou o assunto pela criação de todo um ramo novo, a geometria de Lobachevsky, mostrando com isso que a geometria euclidiana não era a verdade absoluta que se supunha ser. Num certo sentido a descoberta da geometria não-euclidiana desferiu um golpe devastador na filosofia kantiana comparável ao efeito que teve sobre as concepções pitagóricas a descoberta de grandezas incomensuráveis. Através da obra de Lobachevsky tornou-se necessário rever as concepções fundamentais sobre a natureza da matemática; mas os colegas de Lobachevsky estavam demasiado próximos da situação para vê-la na perspectiva apropriada, e o desbravador de novos caminhos teve que elaborar suas idéias na solidão.

11 As idéias revolucionárias de Lobachevsky parecem não lhe ter vindo como inspiração súbita. Numa exposição geral sobre geometria que ele escreveu em 1823, presumivelmente para uso em cursos, Lobachevsky disse do postulado de paralelas simplesmente que "nunca foi descoberta uma prova rigorosa de sua validade"[18]. Aparentemente ele então não excluía a possibilidade de ser descoberta uma tal prova. Três anos depois na Universidade de Kazan ele leu, em francês, um artigo (agora perdido) sobre os princípios da geometria, inclusive "une démonstration rigoureuse du theorème des parallèles". O ano de 1826 em que esse artigo foi lido pode ser tomado como data não-oficial de nascimento da geometria de Lobachevsky, pois foi então que o autor apresentou muitos dos teoremas característicos do novo assunto. Passados mais três anos, no *Mensageiro de Kazan* de 1829, Lobachevsky publicou um artigo, "On the Principles of Geometry", que marca oficialmente o nascimento da geometria não-euclidiana. Entre 1826 e 1829 ele ficara completamente convencido de que o quinto postulado de Euclides não pode ser provado com base nos outros quatro, e no artigo de 1829 ele se tornou o primeiro matemático a dar o passo revolucionário de publicar uma geometria especificamente construída sobre uma hipótese em conflito direto com o postulado das paralelas: Por um ponto C fora de uma reta AB pode-se traçar mais de uma reta do plano que não encontra AB. Com esse novo postulado Lobachevsky deduziu uma estrutura geométrica harmoniosa sem contradições lógicas inerentes. Era em todos os sentidos uma geometria válida, mas ela parecia tão contrária ao senso comum que o próprio Lobachevsky a chamou "geometria imaginária".

Lobachevsky percebia bem o significado de sua descoberta da "geometria imaginária", como se percebe claramente pelo fato que durante os vinte anos entre 1835 e 1855 ele escreveu três exposições completas da nova geometria. Em 1835-1838 seu livro *Novos Fundamentos da Geometria* apareceu em russo; em 1840 ele publicou *Investigações Geométricas sobre a teoria das Paralelas* em alemão; e em 1855 seu último livro, *Pangeometria*, foi publicado simultaneamente em francês e em russo. (Todos foram já traduzidos em outras línguas.) Pelo segundo desses livros Gauss veio a saber das contribuições de Lobachevsky à geometria não-euclidiana e foi por sua recomendação que Lobachevsky em 1842 foi eleito para a Sociedade Científica de Göttingen. Em cartas a amigos Gauss louvou a obra de Lobachevsky, mas nunca lhe deu apoio em artigo impresso porque temia a caçoada dos "beócios". Em parte por isso a nova geometria só lentamente se tornou conhecida.

12 O amigo húngaro de Gauss, Farkas Bolyai, passara boa parte de sua vida tentando provar o postulado das paralelas, e quando descobriu que seu próprio filho Janos Bolyai (1802-1860) estava absorvido pelo problema das paralelas, o pai, um professor de matemática de província, escreveu ao filho, oficial do exército:

> Pelo amor de Deus, eu lhe peço, desista! Tema tanto isso quanto as paixões sensuais porque isso também pode tomar todo seu tempo, e privá-lo de sua saúde, paz de espírito, e felicidade na vida!

O filho, não persuadido, continuou seus esforços até que em 1829 aproximadamente ele chegou à conclusão a que poucos anos antes Lobachevsky chegara. Em vez de tentar provar o impossível, ele desenvolveu o que chamou a "Ciência Absoluta do Espaço", partindo da hipótese que por um ponto fora de uma reta podem ser traçadas infinitas retas do plano, não uma só, cada uma paralela à reta dada. Janos mandou suas reflexões a seu pai, que as publicou sob forma de um apêndice de um tratado que tinha completado, com um longo título em latim começando com *Tentamen*. O *Tentamen* do Bolyai mais velho tem um *imprimatur* datado de 1829, o ano do artigo de Lobachevsky no *Mensageiro de Kazan*, mas só apareceu em 1832.

A reação de Gauss à "Ciência Absoluta do Espaço" foi semelhante à que tivera no caso de Lobachevsky — aprovação sincera, mas sem apoio impresso. Quando Farkas Bolyai escreveu perguntando sua opinião a respeito da obra não ortodoxa de seu filho, Gauss respondeu que não podia elogiar a obra de Janos pois isso seria auto-elogio, já que havia tido essas idéias já havia anos. O temperamental Janos ficou compreensivelmente perturbado, temendo ser privado da prioridade. A continuada falta de reconhecimento, bem como a publicação da obra de Lobachevsky em alemão em 1840 tanto

[17]Para mais detalhes veja J. L. Coolidge, *A History of Geometrical Methods*, pp. 92-101

[18]Veja V. Kagan, *N. Lobachevsky and his Contribution to Science* (1957), p. 33; também Alexander Vucinich, "Nikolai Ivanovich Lobachevskyii: The Man behind the First Non-Euclidean Geometry", *Isis*, 53 (1962), 465-481

o abalaram que ele nada mais publicou. A parte do leão do crédito pelo desenvolvimento da geometria não-euclidiana pertence pois a Lobachevsky[19].

13 A geometria não-euclidiana continuou por várias décadas a ser um aspecto da matemática um tanto à margem até ser completamente integrada através das idéias notavelmente gerais de G. F. B. Riemann (1826-1866). Filho de um pastor de aldeia, Riemann foi educado em condições muito modestas, permanecendo sempre fisicamente frágil e tímido de modos. Teve no entanto boa instrução, primeiro em Berlim depois em Göttingen, onde obteve seu doutorado com uma tese sobre teoria das funções de variável complexa. É aqui que achamos as chamadas equações de Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, que uma função analítica $w = f(z) = u + iv$ de uma variável complexa $z = x + iy$ deve satisfazer, embora essa exigência fosse conhecida já nos dias de Euler e d'Alembert[20]. A tese levava também ao conceito de superfície de Riemann, antecipando o papel que a topologia finalmente viria a desempenhar na análise.

Em 1854 Riemann tornou-se Privatdozent na Universidade de Göttingen, e segundo o costume ele foi designado para apresentar um *Habilitationschrift* perante o corpo docente. O resultado no caso de Riemann foi a mais célebre conferência probacionária da história da matemática, pois apresentava uma profunda e ampla visão de todo o domínio da geometria. A tese tinha o titulo "Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen" (Sobre as hipóteses que estão nos fundamentos da geometria), mas não apresentava um exemplo específico. Propunha em vez disso uma visão global da geometria como um estudo de variedades de qualquer número de dimensões em qualquer tipo de espaço. Suas geometrias eram não-euclidianas num sentido muito mais geral do que a de Lobachevsky, em que a questão é simplesmente a de quantas paralelas são possíveis por um ponto. Riemann viu que a geometria nem sequer deveria necessariamente tratar de pontos ou retas ou do espaço no sentido ordinário, mas de coleções de n-uplas que são combinadas segundo certas regras.

Entre as regras mais importantes em qualquer geometria, Riemann percebeu, está a regra para achar a distância entre dois pontos que estão infinitesimalmente próximos um do outro. Na geometria euclidiana ordinária essa "métrica" é dada por $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$; mas uma infinidade de outras fórmulas podem ser usadas como fórmula da distância, e naturalmente a métrica usada determinará as propriedades do espaço ou a geometria.

Um espaço cuja métrica é da forma

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & g_{11}dx^2 + g_{12}dxdy + g_{13}dxdz \\ & + g_{21}dydx + g_{22}dy^2 + g_{23}dydz \\ & + g_{13}dzdx + g_{23}dzdy + g_{33}dz^2, \end{aligned}$$

onde as g são constantes ou, mais geralmente, funções de x, y e z, chama-se um espaço Riemanniano. Assim (localmente) o espaço euclidiano é apenas um caso muito especial de um espaço riemanniano em que $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$ e todos os outros gs são zero. Riemann inclusive desenvolveu a partir da métrica uma fórmula para a curvatura gaussiana de uma "superfície" em seu "espaço". Não é de espantar que depois da conferência de Riemann, e quase pela única vez em sua longa carreira, Gauss tenha exprimido entusiasmo pela obra de outra pessoa[21].

Há também um sentido mais restrito em que usamos hoje a frase geometria riemanniana: a geometria plana que se deduz da hipótese de Saccheri do ângulo obtuso se se abandona também a hipótese da infinitude da reta. Um modelo para essa geometria se encontra na interpretação do "plano" como a superfície de uma esfera e de uma "reta"

[19]Porções das obras tanto de Lobachevsky quanto de Bolyai aparecem em inglês em muitos lugares, inclusive em Smith, *Source Book*. Uma exposição muito completa se encontra em Friedrich Engel e Paul Stäckel, *Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie* (1898-1913). Entre as exposições mais completas em inglês está uma em Roberto Bonola. *Non-Euclidean Geometry* (1955), que contém traduções da *Teoria das Paralelas* de Lobachevsky e da *Ciência absoluta do espaço* de Bolyai

[20]Veja E. T. Bell, *Development of Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1940), p. 465

[21]Veja E. T. Bell, *Men of Mathematics* (New York: Simon and Schuster, 1937), pp. 484-509

como um círculo máximo sobre a esfera. Nesse caso a soma dos ângulos de um triângulo é maior que dois retos, ao passo que na geometria de Lobachevsky e Bolyai (correspondendo à hipótese do ângulo agudo) a soma dos ângulos é menor que dois retos. Esse uso do nome de Riemann, no entanto, não faz justiça à mudança fundamental nas concepções geométricas que sua *Habilitationschrift* de 1854 (só publicada em 1867) acarretou. Foi a sugestão de Riemann do estudo geral de espaços métricos com curvatura e não o caso especial da geometria sobre a esfera, que mais tarde tornou possível a teoria geral da relatividade. O próprio Riemann contribuiu grandemente para a física teórica em muitas direções, e portanto foi apropriado que em 1859 ele fosse nomeado sucessor de Dirichlet na cadeira em Göttingen que Gauss ocupara.

Ao mostrar que a geometria não-euclidiana com soma dos ângulos maior que dois retos é realizada sobre a superfície de uma esfera Riemann essencialmente provou a consistência dos axiomas de que a geometria deriva. No mesmo sentido Eugênio Beltrami (1835-1900), um colega de Cremona em Bolonha e mais tarde professor em Pisa, Pávia e Roma, mostrou que havia disponível um modelo para a geometria de Lobachevsky. Esse é a superfície gerada pela revolução de uma tratriz em torno de sua assíntota, superfície denominada pseudo-esfera por ter curvatura negativa constante, assim como a esfera tem curvatura positiva constante. Se definimos a "reta" entre dois pontos da pseudo-esfera como a geodésica por esses pontos, a geometria resultante terá as propriedades que resultam dos postulados de Lobachevsky. Como o plano é uma superfície com curvatura constante nula, a geometria euclidiana pode ser considerada como um intermediário entre os dois tipos de geometria não-euclidiana.

14 A unificação da geometria que Riemann tinha conseguido era especialmente relevante no caso da geometria diferencial, ou geometria "de pequena vizinhança". A geometria analítica, ou "em grande" não mudara muito. Na verdade, a conferência de Riemann foi feita mais ou menos a meio tempo da auto-aposentadoria geométrica de Plücker, durante a qual tinha havido uma pausa na atividade sobre geometria analítica na Alemanha. Em 1865 Plücker novamente voltou a publicar trabalhos de matemática, desta vez em publicações inglesas em vez do *Journal* de Crelle, provavelmente porque Cayley mostrara interesse pela obra de Plücker. Nesse ano ele publicou um artigo em *Philosophical Transactions* (freqüentemente chamada simplesmente *Phil. Trans.*) que três anos depois ele expandiu num livro, sobre uma "Nova geometria do espaço". Aqui ele explicitamente formulou um princípio que ele já indicara vinte anos antes. Um espaço, ele dizia, não precisa ser pensado como uma totalidade de pontos; pode igualmente bem ser visualizado como composto de retas. Na verdade, cada figura que antes fora pensada como um lugar ou totalidade de pontos pode ser ela própria pensada como um *elemento* de um espaço, e a dimensionalidade do espaço corresponderá ao número de parâmetros que determinam esse elemento. Se nosso espaço ordinário a três dimensões é pensado como um "feixe de feno cósmico de palhas infinitamente finas e infinitamente longas" em vez de um "aglomerado de chumbo de matar passarinho infinitamente fino"[22] ele será a quatro dimensões em vez de três. Em 1868, o ano do livro de Plücker baseado nesse tema, Cayley desenvolveu analiticamente em *Phil. Trans.* a noção do plano cartesiano ordinário a duas dimensões como um espaço de cinco dimensões, cujos elementos são as cônicas. Há ainda outras idéias na *Neue Geometrie des Raumes* de Plücker. A representação geométrica de uma única equação $f(x, y, z) = 0$ em coordenadas de ponto é chamada uma superfície, duas equações simultâneas correspondem a uma curva, e três determinam um ou mais pontos. Na "Nova geometria" de seu espaço de retas a quatro dimensões Plücker chamou a "figura" representada por uma única equação $f(r, s, t, u) = 0$ nas quatro coordenadas de seu espaço de retas um "complexo", duas equações designavam uma "congruência" e três um "domínio". Descobriu que o complexo de retas quadrático tem propriedades semelhantes às de uma superfície quádrica, mas não viveu para completar o estudo extenso que planejava. Morreu em 1868, o ano

[22]Veja E. T. Bell, *Men of Mathematics*, p. 400

em que sua Nova Geometria apareceu, editada por um de seus estudantes, Felix Klein (1849-1925).

15 Klein fora assistente de Plücker na Universidade de Bonn durante a volta deste último à geometria e num certo sentido foi o sucessor de Plücker no entusiasmo pela geometria analítica. No entanto, a obra do jovem no campo tomou direção diferente — uma direção que serviu para trazer um elemento de unidade à diversidade dos novos resultados da pesquisa. Esse novo ponto de vista pode ter sido em parte resultado de visitas a Paris, onde as noções de Lagrange de teoria dos grupos tinham sido desenvolvidas, especialmente através de grupos de substituição, num completo ramo da álgebra. Klein ficou profundamente impressionado com as possibilidades unificadoras do conceito de grupo, e passou boa parte do resto de sua vida desenvolvendo, aplicando e popularizando a noção. Em parte dessa obra ele colaborou com o matemático norueguês, Sophus Lie (1842-1899), estudante contemporâneo de Klein em Göttingen que descobriu as transformações de contato e escreveu um tratado em três volumes sobre a teoria de grupos de transformações (1888-1893). As transformações de contato de Lie, sistematizadas por Klein, estabeleciam uma correspondência biunívoca entre as retas e esferas do espaço euclidiano de tal modo que retas concorrentes correspondem a esferas tangentes[23]. (Segundo o conceito de Plücker, as retas e esferas no espaço euclidiano tridimensional constituem um espaço a quatro dimensões.) Em geral, transformações de contato são transformações analíticas que levam superfícies tangentes em superfícies tangentes.

Diz-se que uma coleção de elementos forma um grupo com relação a uma dada operação se (1) a coleção é fechada sob a operação, (2) a coleção contém um elemento identidade com relação à operação, (3) para cada elemento na coleção há um elemento inverso com relação à operação e (4) a operação é associativa. Os elementos podem ser números (como na aritmética), pontos (na geometria), transformações (em álgebra ou geometria) ou qualquer coisa. A operação pode ser aritmética (como adição ou multiplicação) ou geométrica (como uma rotação em torno de um ponto ou eixo) ou qualquer outra regra para combinar dois elementos de um conjunto (tais como duas transformações) de modo a formar um terceiro elemento do conjunto. A generalidade do conceito de grupo é evidente; Klein numa célebre aula inaugural em 1872, quando se tornou professor em Erlangen, mostrou como podia ser aplicado como um meio conveniente para caracterizar as várias geometrias que tinham aparecido durante o século.

Essa conferência de Klein, que veio a chamar-se o *Erlanger Programm*, descrevia a geometria como o estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes sob um particular grupo de transformações. Portanto toda classificação de grupos de transformações torna-se uma codificação das geometrias. A geometria plana euclidiana, por exemplo, é o estudo das propriedades das figuras, inclusive área e comprimento, que ficam invariantes sob o grupo de transformações obtidas a partir das translações e rotações do plano — as transformações ditas rígidas, equivalentes ao axioma não enunciado de Euclides de que as figuras permanecem invariantes quando deslocadas no plano. Analiticamente as transformações rígidas do plano podem ser escritas na forma

$$\begin{cases} x' = ax + by + c, \\ y' = dx + ey + f, \end{cases}$$

onde $ae - bd = 1$; esses elementos formam um grupo. A "operação" que "combina" dois tais elementos é simplesmente a de efetuar as transformações uma depois da outra. É fácil ver que se a transformação acima é seguida por uma outra

$$\begin{cases} x'' = Ax' + By' + C, \\ y'' = Dx' + Ey' + F, \end{cases}$$

o resultado das duas operações executadas sucessivamente é equivalente a alguma operação desse tipo que levará o ponto (x, y) no ponto (x'', y'').

[23]Veja Coolidge, *History of Geometrical Methods*, pp. 298 e seguintes

Se nesse grupo de transformações substituímos a restrição $ae - bd = 1$ pela exigência mais geral $ae - bd \neq 0$ as novas transformações também formam um grupo. No entanto comprimentos e áreas não são mais preservados, mas uma cônica de um tipo dado (elipse, parábola, hipérbole) permanecerá, sob essas transformações, uma cônica de mesmo tipo. Tais transformações, estudadas antes por Möbius, são conhecidas como transformações afins; caracterizam uma geometria conhecida como *afim*, assim chamada porque pontos finitos vão em pontos finitos sob qualquer transformação dessas. É claro, pois, que a geometria euclidiana, do ponto de vista de Klein, é simplesmente um caso especial da geometria afim. A geometria afim por sua vez é apenas um caso especial de uma outra ainda mais geral — a projetiva. Uma transformação projetiva pode ser escrita na forma

$$x' = \frac{ax + by + c}{dx + ey + f}, \qquad y' = \frac{Ax + By + C}{dx + ey + f}.$$

É claro que se $d = 0 = e$ e $f = 1$, a transformação é afim. Propriedades interessantes das transformações projetivas incluem o fato de que (1) uma cônica é transformada numa cônica e (2) razões duplas permanecem invariantes. Papus tinha percebido essas propriedades um milênio e meio antes, mas não tinha idéia do conceito de grupo que possibilita essa organizada classificação das geometrias. Na verdade, para Papus, havia só uma geometria, pois os pontos ideais da geometria projetiva seriam impensáveis na antiguidade. O *Erlanger Programm* de Klein era tão claramente um produto do século dezenove que não poderia ter sentido em nenhuma época anterior. A princípio teve apenas circulação limitada, mas antes do fim do século veio a ter grande influência em todo o mundo matemático[24]. A influência persistente do *Erlanger Programm* pode ainda hoje ser percebida em quase qualquer tratado geral de geometria moderno[25].

16 A obra de Klein num certo sentido é um climax adequado para a "Idade Heróica da Geometria" pois ele ensinou durante meio século. Tão contagioso era seu entusiasmo que algumas figuras do fim do século dezenove profetizaram que não só a geometria mas finalmente toda a matemática viria a ser contida na teoria dos grupos. Sua clássica história da matemática no século dezenove (publicada postumamente)[26] mostra como ele conhecia todos os aspectos do assunto; seu nome é também lembrado hoje na topologia na superfície de uma face chamada garrafa de Klein. Ocupava-se muito de geometria não-euclidiana, à qual contribuiu com os nomes "geometria elítica" e "geometria hiperbólica" para as hipóteses do ângulo obtuso e do ângulo agudo respectivamente; para o último ele propôs um modelo simples como alternativa ao de Beltrami. Seja o plano hiperbólico imaginado como formado dos pontos interiores a um círculo C no plano euclidiano, seja a "reta" hiperbólica por dois pontos P_1 e P_2 a parte da reta euclidiana P_1P_2 que jaz dentro do círculo C, e seja a "distância" entre os dois pontos P_1 e P_2 dentro do círculo definida como

$$\ln \frac{P_2Q_1 \cdot P_1Q_2}{P_1Q_1 \cdot P_2Q_2},$$

onde Q_1 e Q_2 são os pontos de intersecção da reta P_1P_2 com o círculo C (Fig. 24.1). Com uma definição conveniente de "ângulo" entre duas "retas" os "pontos", "retas" e "ângulos" no modelo hiperbólico de Klein têm propriedades semelhantes às da geometria euclidiana, excetuado o postulado das paralelas.

Desde Monge não existira professor tão influente, pois além de dar aulas entusiasmantes Klein se preocupava com o ensino da matemática em muitos níveis e exerceu

[24]Uma tradução em inglês sob o título "A Comparative Review of Recent Researches in Geometry" apareceu em 1893 no segundo volume do *Bulletin of the New York Mathematical Society* (agora o *Bulletin of the American Mathematical Society*)

[25]Veja, por exemplo, Annita Tuller, *A Modern Introduction to Geometries* (Princeton, New York: D. Van Nostrand Co., 1967)

[26]*Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (1926-1927)

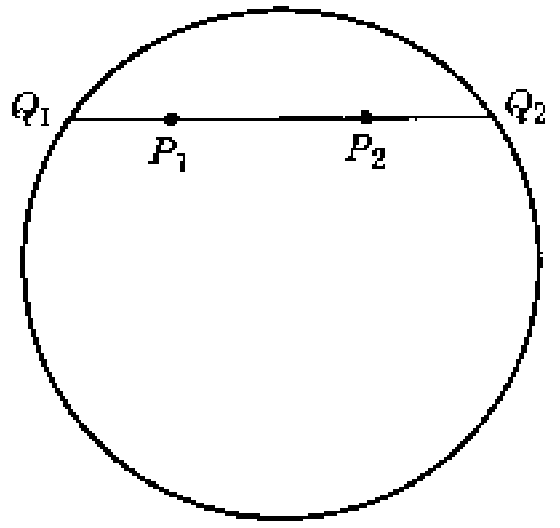


Figura 24.1

forte influência em círculos pedagógicos. Em 1886 ele se tornou professor de matemática em Göttingen, e sob sua liderança a universidade tornou-se a Meca a que estudantes de muitos países acorriam. Em seus últimos anos Klein desempenhou muito eficazmente o papel de "velho estadista" no reino da matemática[27]. Assim a idade áurea da geometria moderna que começara tão auspiciosamente na França na École Polytechnique com a obra de Lagrange, Monge e Poncelet atingiu a seu zênite na Alemanha na Universidade de Göttingen, através da pesquisa e inspiração de Gauss, Riemann e Klein.

BIBLIOGRAFIA

Bolyai, Johann, *Geometrische Untersuchungen*, editado por Paul Stäckel (Leipzig: B. G. Teubner, 1913)

Bonola, Roberto, *Non-Euclidean Geometry*, traduzido por H. S. Carslaw (New York: reimpressão Dover, 1955)

Boyer, C. B., *History of Analytic Geometry* (New York: Scripta Mathematica, 1956)

Cajori, Florian, *History of Mathematics*, 2.ª edição (New York: Macmillan, 1931)

Chasles, Michel, *Aperçu historique sur l'origine et la développement des méthodes en géométrie* (Bruxelas, 1837; 2.ª edição, Paris, 1875)

Clebsch, Alfred, "Notice sur les travaux de Jules Plücker", traduzido por Paul Mansion, *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche*, 5 (1872) 183-212

Coolidge, J. L., "The Heroic Age of Geometry", *Bulletin of the American Mathematical Society*, 35 (1929), 19-37

Coolidge, J. L., *A History of Geometrical Methods* (New York: reimpressão Dover, 1963)

De Vries, Hk., "How Analytic Geometry Became a Science," *Scripta Mathematica*, 14 (1948), 5-15

Engel, Friedrich, e Paul Stäckel, *Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie* (Leipzig: B. G. Teubner, 1898-1913, 2 volumes)

Ernst, Wilhelm, *Julius Plücker* (Bonn, 1933)

Fano, G., "Gegensatz von synthetischer und analytischer Geometrie in seiner historischen Entwicklung im XIX. Jahrhundert", *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Vol. III, Parte 1, primeira metade, pp. 223-288; tradução para o francês em *Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, Tomo III, Vol. 1, pp. 185-259

Kagan, V., *N. Lobachevsky and his Contribution to Science* (Moscou: Foreign Languages Publishing House, 1957)

Klein, Felix, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (Berlin: Springer, 1926-1927, 2 volumes)

Klein, Felix, *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*, Vol. II, *Geometry* (New York, brochura Dover, 1939)

Kötter, Ernst, "Die Entwickelung der synthetischen Geometrie, von Monge bis auf Staudt, 1847." *Jahresbericht der Deutscher Mathematiker-Vereinigung*, 5, parte 2 (1898-1901)

Loria, Gino, *Storia delle matematiche* (Turin: Sten, 1929-1935, 3 volumes)

Loria, Gino, *Il passato e il presente delle principali teorie geometriche*, 4.ª edição (Pádua: Cedam, 1931)

Nagel, Ernest, "The Formation of Modern Conceptions of Formal Logic in the Development of Geometry", *Osiris*, 7 (1939), 142-224

Patterson, Boyd C., "The Origins of the Geometric Principle of Inversion," *Isis*, 19 (1933), 154-180

Pierpont, James, "The History of Mathematics in the Nineteenth Century," *Bulletin of the American Mathematical Society*, 11 (1904), 136-159

Schmidt, Franz, e Paul Stäckel, eds., *Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Wolfgang Bolyai* (Leipzig, 1899)

[27]Veja, por exemplo, G. A. Miller, "Felix Klein and the History of Mathematics", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 13 (1927), 611-613

Simon, Max, "Uber die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jahrhundert", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Ergänzungsbände*, 1 (1906)

Smith, D. E., *Source Book in Mathematics* (New York: reimpressão Dover, 1959)

Sommerville, D. M. Y., *Bibliography of Non-Euclidean Geometry* (Londres: Harrison, 1911)

Vucinich, Alexander, "Nikolai Ivanovich Lobachevskii, The Man behind the First Non-Euclidean Geometry", *Isis*, 53 (1962), 465-481

EXERCÍCIOS

1. O papel de École Polytechnique, uma escola de engenharia, foi um auxílio ou prejudicou o renascimento da geometria pura no século dezenove? Explique.

2. Cite meia dúzia de casos de descoberta independente e simultânea na geometria durante a primeira metade do século dezenove, mencionando os papéis desempenhados pelos descobridores.

3. Dê os nomes de três geômetras importantes na França e três na Alemanha durante o século dezenove, citando algumas de suas contribuições principais e indicando se eles eram primariamente analistas ou sintetistas.

4. Foi por acaso ou por conseqüência natural que a geometria não-euclidiana primeiro apareceu na Alemanha, Rússia e Hungria e não na França ou Inglaterra? Dê razões para sua resposta

5. A descoberta e a justificação do princípio de dualidade foram o resultado de desenvolvimentos na geometria sintética ou na geometria analítica? Explique.

6. Como você explica o fato de a Inglaterra, um bastião da geometria, durante o século dezoito, não tomar a liderança no reavivamento da geometria pura no século dezenove?

7. Descreva vários aspectos em que a geometria de coordenadas no século dezenove difere da de Fermat e Descartes.

8. Ache o eixo radical ou "reta de Gaultier" do par de círculos $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ e $(x-2)^2(y-4)^2 - 1 = 0$. Esboce vários membros da família radical e o eixo radical.

9. Mostre que com a definição de Klein da distância em seu modelo de geometria hiperbólica, três pontos colineares na ordem P, Q, R tem a propriedade $\overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PR}$.

10. Mostre que no modelo de Klein a reta é infinitamente longa no sentido que a distância entre dois pontos sobre ela cresce indefinidamente quando um dos pontos permanece fixo e o outro tende a um ponto de intersecção da reta com o círculo de fronteira

11. Para o triângulo reto três-quatro-cinco ache os raios dos círculos inscrito e excrito e o raio do círculo de nove pontos.

12. Construa, com régua e compasso, o círculo inscrito, os três círculos excritos e o círculo de nove pontos de um triângulo.

13. Mostre que o círculo de nove pontos de um triângulo retângulo isósceles é tangente tanto ao círculo circunscrito quanto ao inscrito.

14. Mostre que em coordenadas homogêneas no plano o inverso $P'(x', y', z')$ de $P(x, y, t)$ com relação ao círculo $x^2 + y^2 = a^2t^2$ é dado pela equação $x' = a^2xt$, $y' = a^2yt$, $t' = x^2 + y^2$.

15. Mostre que a inversa de uma parábola não é uma parábola.

*16. Prove que o centro do círculo de nove pontos de qualquer triângulo é ponto médio entre o circuncentro e o ortocentro.

*17. Prove que se os ângulos de base de um quadrilátero são retos e se os dois lados perpendiculares à base são iguais, os ângulos do topo são iguais. São agudos, retos ou obtusos? Explique.

*18. Prove que o inverso plano de um círculo que não passa pelo centro de inversão é um círculo que não passa pelo centro de inversão. Qual é o inverso de um círculo que passa pelo centro de inversão?

*19. Uma inversão no espaço tridimensional com relação a uma esfera transforma um plano num plano? Explique completamente.

*20. Prove que um círculo ortogonal ao círculo de inversão é transformado em si mesmo, mas que o inverso do centro não é o centro do círculo invertido.

*21. Se $C_1 = 0$ e $C_2 = 0$ são dois círculos num plano, descreva os membros da família $K_1C_1 + K_2C_2 = 0$ para os três casos seguintes: (a) $C_1 = 0$ e $C_2 = 0$ se cortam; (b) $C_1 = 0$ e $C_2 = 0$ são tangentes; (c) $C_1 = 0$ e $C_2 = 0$ não têm ponto comum.

*22. Verifique o teorema de Green, usando integral curvilínea e dupla, para o caso em que $P = xy$ e $Q = x^2 + y^2$ e a região R é a parte do plano limitada pelo quadrado unitário com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$.

*23. Mostre que uma cônica sob inversão é transformada numa cúbica ou quártica conforme o centro de inversão esteja ou não sobre a cônica.

*24. Qual seria a dimensionalidade de uma geometria plana em que os elementos fundamentais não são pontos mas (a) retas ou (b) círculos ou (c) parábolas ou (d) secções cônicas ou (e) curvas algébricas de grau três?

Capítulo **25**

A aritmetização da análise

> Na maior parte das ciências uma geração põe abaixo o que outra construiu, e o que uma estabeleceu a outra desfaz. Somente na matemática é que cada geração constrói um novo andar sobre a antiga estrutura.
>
> *Hermann Hankel*

1 Newton e Leibniz tinham entendido que a análise, o estudo de processos infinitos, tratava de grandezas contínuas, tais como comprimentos, áreas, velocidades e acelerações, ao passo que a teoria dos números claramente tem como seu domínio o conjunto discreto dos números naturais. No entanto vimos que Bolzano tentou dar provas puramente aritméticas de proposições, tais como o teorema da locação na álgebra elementar, que pareciam depender de propriedades de funções contínuas; e Plücker tinha aritmetizado completamente a geometria analítica. A teoria dos grupos originalmente tratara de conjuntos discretos de elementos, mas Klein tinha em mente uma unificação dos aspectos discreto e contínuo da matemática sob o conceito de grupo. O século dezenove foi de fato um período de correlação na matemática, e a aritmetização da análise, frase cunhada por Klein em 1895, era um aspecto dessa tendência.

A palavra chave na análise, é claro, é "função", e foi especialmente no esclarecimento desse termo que surgiu a tendência à aritmetização. Já antes do meio do século dezoito tinham surgido diferenças de opinião quanto à representação de funções, quando d'Alembert e Euler tinham dado soluções do problema de uma corda vibrante em "forma fechada", usando duas funções arbitrárias, ao passo que Daniel Bernoulli achara uma solução em termos de uma série infinita de funções trigonométricas. Como essa última solução parecia implicar periodicidade, ao passo que as funções arbitrárias de d'Alembert e Euler não eram necessariamente periódicas, parecia que a solução de Bernoulli era menos geral. Que isso não era assim foi mostrado em 1824 por J. B. J. Fourier (1768-1830).

Joseph Fourier era filho de um alfaiate em Auxerre; foi educado pela Ordem Beneditina, na qual num dado momento ele pensou em tomar ordens. Em vez disso tornou-se professor de matemática, primeiro na escola militar local e depois na École Normale e na École Polytechnique. Em 1798 ele se juntou a Monge na aventura egípcia de Napoleão, tornando-se secretário do Institut d'Egypte e compilando a *Description de l'Egypte.* Ao voltar à França ele teve vários postos administrativos, mas assim mesmo teve oportunidade de continuar seus trabalhos científicos. Ele é mais conhecido hoje por seu célebre *Théorie analytique de la chaleur* de 1822. Esse livro, descrito por Kelvin como "um grande poema matemático" foi um desenvolvimento de idéias que dez anos antes lhe tinham valido o prêmio da Académie por um ensaio sobre a teoria matemática do calor. Lagrange, Laplace e Legendre, os julgadores, tinham criticado uma certa imprecisão de raciocínio no ensaio; a posterior elucidação das idéias de Fourier foi até certo ponto a razão pela qual o século dezenove veio a ser chamado a idade do rigor[1].

A principal contribuição de Fourier e seu livro clássico à matemática foi a idéia, vagamente percebida por Daniel Bernoulli, de que qualquer função $y = f(x)$ pode ser representada por uma série da forma

$$y = 1/2\, a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx + \cdots$$
$$+\, b_1 \operatorname{sen} x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + b_n \operatorname{sen} nx + \cdots,$$

[1]Veja P. E. B. Jourdain, "Note on Fourier's Influence on the Conceptions of Mathematics", *International Congress of Mathematicians* (Cambridge, 1912), Vol. II, pp. 526-527

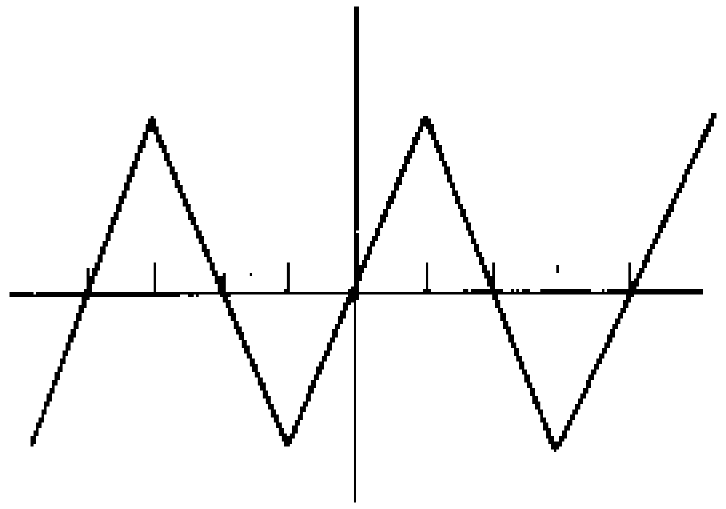


Figura 25.1

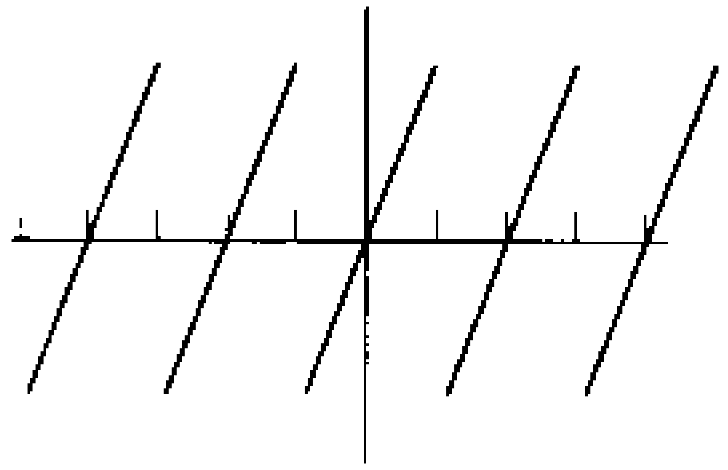


Figura 25.2

agora conhecida como série de Fourier. Uma tal representação em série admite uma generalidade muito maior no tipo de funções que podem ser estudadas que a série de Taylor. Mesmo que haja muitos pontos em que a derivada não existe (como na Fig. 25.1) ou em que a função não é contínua (como na Fig. 25.2), a função ainda assim pode ter uma expansão de Fourier; essa expansão é facilmente encontrada observando que

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$$

e

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx.$$

Fourier, como Monge, caiu em desgraça quando se deu a restauração dos Bourbons após o exílio de Napoleão em 1815, mas seu trabalho é fundamental tanto na física quanto na matemática. As funções já não precisavam mais ter a forma bem comportada com que os matemáticos estavam acostumados. Lejeune Dirichlet, por exemplo, em 1837 sugeriu[2] uma definição muito ampla de função: se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a x, existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então diz-se que y é função da variável independente x. Isso chega perto da noção moderna de uma correspondência entre dois conjuntos de números, mas o conceito de "conjunto" e de "número real" ainda não tinham sido estabelecidos. Para indicar a natureza completamente arbitrária da regra de correspondência, Dirichlet propôs uma função muito "mal comportada"; quando x é racional, ponha-se $y = c$, e quando x é irracional seja $y = d \neq c$. Essa função, freqüentemente chamada função de Dirichlet, é tão patológica que não há valor de x para o qual seja contínua. Dirichlet deu também a primeira prova rigorosa da convergência de série de Fourier para uma função sujeita a certas restrições, ditas condições de Dirichlet. Uma série de Fourier nem sempre converge para o valor da função da qual deriva, mas Dirichlet no *Journal* de Crelle de 1828 provou o seguinte teorema. Se $f(x)$ é periódica de período 2π, se para $-\pi < x < \pi$ a função $f(x)$ tem um número finito de valores máximos e mínimos e um número finito de descontinuidades, e se $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$ é finita, então a série de Fourier converge para $f(x)$ em todos os pontos em que $f(x)$ é contínua e em pontos de salto converge para a média aritmética dos limites à direita e à esquerda da função. Também útil é outro teorema conhecido como critério de Dirichlet: se os termos da série $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n + \cdots$ são tais que os bs são positivos e tendem monotonicamente a zero, e se existe um número M tal que $|a_1 + a_2 + \cdots + a_m| < M$ para todos os valores de m, então a série converge.

O nome de Dirichlet surge em muitas outras conexões na matemática pura e aplicada. Especialmente importante na termodinâmica e eletrodinâmica é o problema de Dirichlet: dada uma região R limitada por uma curva fechada C e uma função $f(x, y)$ contínua sobre C, achar uma função $F(x, y)$ contínua em R e C que satisfaça à equação de Laplace em R e que seja igual a f sobre C. Em matemática pura Dirichlet é bem conhe-

[2]Veja Dirichlet, *Werke* (1889-1897), I, 135

cido pela aplicação que fez da análise à teoria dos números, em conexão com a qual introduziu a série de Dirichlet — $\sum a_n e^{-\lambda_n S}$ — onde os coeficientes de Dirichlet a_n são números complexos, os expoentes de Dirichlet λ_n são números reais monotonicamente crescentes e S é uma variável complexa.

2 O sucessor de Dirichlet em Göttingen, Bernhard Riemann, também conseguiu profundos teoremas relacionando a teoria dos números com a análise clássica. Euler tinha observado conexões entre a teoria dos números e a série

$$1/1^s + 1/2^s + 1/3^s + \cdots + 1/n^s + \cdots,$$

onde s é um inteiro — um caso especial da série de Dirichlet. Riemann estudou a mesma série para uma variável complexa, a soma da série definindo uma função $\zeta(s)$ que a partir daí passou a ser conhecida como função zeta de Riemann. Uma das sugestões tantalizantes que os matemáticos ainda não puderam provar ou negar é a famosa conjetura de Riemann: todos os zeros imaginários $s = \sigma + it$ da função zeta[3] têm parte real $\sigma = 1/2$. Provavelmente nenhum ramo da matemática já legou tantos problemas não resolvidos quanto a teoria dos números. Riemann era um matemático de interesses múltiplos e mente fértil, contribuindo não só para a geometria e a teoria dos números como também para a análise. Em análise é lembrado por seu papel no refinamento da definição de integral, pela ênfase que deu às equações de Cauchy-Riemann, e pelas superfícies de Riemann. Essas superfícies são um engenhoso meio de uniformizar uma função, isto é, dar uma representação unívoca de funções complexas que no plano ordinário de Gauss seriam multivalentes. Aqui vemos um aspecto notável da obra de Riemann — uma concepção fortemente intuitiva e geométrica da análise que está em marcado contraste com as tendências aritmetizantes da escola de Weierstrass. Seus processos foram chamados "um método de descoberta" ao passo que os de Weierstrass constituíam "um método de demonstração"[4], e seus resultados foram tão significativos que Bertrand Russell descreveu-o como "logicamente o predecessor imediato de Einstein". Foi o gênio intuitivo de Riemann na física e na matemática que produziu conceitos como o de curvatura de um espaço riemanniano ou variedade, sem o qual a teoria da relatividade geral não poderia ter sido formulada[5].

3 A teoria dos números trata primariamente dos inteiros ou, mais geralmente, das razões de inteiros — os chamados números racionais. Tais números são sempre raízes de uma equação linear $ax + b = 0$ com coeficientes inteiros. A análise real lida com um tipo de número mais geral, que pode ser racional ou irracional. Essencialmente já Euclides sabia que as raízes de $ax^2 + bx + c = 0$ onde a, b, c são múltiplos inteiros de um dado comprimento, podem ser construídos geometricamente com régua e compasso. Se os coeficientes de $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots + px + q = 0$, onde n e a, b, $c, \ldots, q$ são inteiros e $n > 2$, as raízes da equação em geral não são construtíveis com os instrumentos euclidianos. As raízes de uma tal equação, para $n > 0$, chamam-se números algébricos, para indicar o modo pelo qual são definidos. Como todo número racional é raiz de uma tal equação com $n = 1$, surge naturalmente a questão de saber se ou não todo número irracional é raiz de uma tal equação com $n > 2$. A resposta negativa a essa questão foi finalmente dada em 1844 por Liouville, que nesse ano construiu uma classe ampla de números reais não-algébricos. A particular classe que ele construiu é conhecida como dos números de Liouville, o conjunto todo dos números reais não algébricos sendo designado como dos números transcendentes. A construção de Liouville de números transcendentes é bastante elaborada, mas para quem não insiste numa prova de transcendentalismo podem ser dados alguns exemplos simples de números transcendentes — tais como 0,1001000100001 ... ou os números da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}.$$

Provar que um número real particular, como e ou π não é algébrico é em geral bastante difícil. Liouville, por exemplo, conseguiu provar, em seu *Journal* de 1844, que nem e nem e^2 podiam ser raízes de uma equação quadrática com coeficientes inteiros; logo, dado um segmento de reta unitário, segmentos de comprimentos e ou e^2 não são construtíveis com instrumentos euclidianos. Mas passaram-se quase trinta anos antes que outro matemático francês, Charles Hermite (1822-1901), continuando as idéias de Liouville, mostrasse que e não pode ser raiz de nenhuma equação polinomial a coeficientes inteiros — isto é, que e é transcendente[6].

O nome "teorema de Hermite" é freqüentemente dado à afirmação de que e é um número transcendente. Hermite, como muitos de seus renomados predecessores, estudou na École Polytechnique, onde mais tarde ensinou e onde era geralmente considerado o mais importante autor francês em teoria das funções desde os dias de Cauchy. Entre seus sucessos notáveis estava uma resolução da equação quíntica geral por meio de funções elíticas[7]. Liouville também é conhecido por uma variedade de outras contribuições. Em análise sua obra é lembrada pelo teorema de Liouville — se $f(z)$, uma função analítica inteira da variável complexa z, é limitada em todo o plano complexo, então $f(z)$ é uma constante. Desse teorema o teorema fundamental da álgebra pode ser deduzido como simples corolário como segue. Se $f(z)$ é um polinômio de grau maior que zero, e se $f(z)$ nunca se anulasse no plano complexo, então seu recíproco $F(z) = 1/F(z)$ satisfaria às condições do teorema de Liouville. Conseqüentemente $F(z)$ seria uma constante, o que é obviamente falso. Logo a equação $f(z) = 0$ é satisfeita ao menos por um valor complexo $z = z_0$. Na geometria analítica plana há um outro "teorema de Liouville" — os comprimentos das tangentes de um ponto P a uma cônica C são proporcionais às raízes cúbicas dos raios de curvatura de C nos correspondentes pontos de contato[8].

O status do número π desafiou os matemáticos por nove anos mais que o número e. Lambert em 1770 e Legendre em 1794 tinham mostrado que tanto π quanto π^2 são irracionais, mas essa prova não tinha posto fim à velhíssima questão da quadratura do círculo. A questão foi finalmente encerrada em 1882 por um artigo em *Mathematische Annalen* de C. L. F. Lindemann (1852-1939) de Munich. O artigo, intitulado "Über die Zahl π", mostrava conclusivamente, estendendo a obra de Liouville e Hermite, que π também é transcendente. Em sua prova Lindemann primeiro mostrou que a equação $e^{ix} + 1 = 0$ não pode ser satisfeita se x é algébrico. Como Euler mostrara que o valor $x = \pi$ satisfaz à equação, segue-se que π não é algébrico. Aqui, finalmente, estava a resposta ao problema clássico da quadratura do círculo. Para que a quadratura do círculo fosse possível com os instrumentos euclidianos o número π teria que ser raiz de uma equação algébrica com uma raiz exprimível por raízes quadradas. Como π não é

[3]Para propriedades da função zeta veja E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (Leipzig, 1909). Uma exposição sobre a hipótese de Riemann se encontra em E. T. Bell, *The Development of Mathematics* (1940), p. 293

[4]Henri Poincaré, "L'oeuvre mathématique de Weierstrass", *Acta Mathematica*, 22 (1898-1899), 1-18

[5]Em E. T. Bell, *Men of Mathematics* (New York: Simon and Schuster, 1937) há um capítulo caloroso, entitulado "Anima Candida", inteiramente dedicado a Riemann e sua obra (pp. 484-509)

[6]Para uma exposição completa sobre a história do assunto veja U. G. Mitchell e Mary Strain, "The Number e", *Osiris*, 1 (1936), 476-496. Veja também D. E. Smith, *Source Book in Mathematics* (New York: reimpressão Dover, 1959), pp. 99-106

[7]Veja E. Picard, "L'oeuvre scientifique de Charles Hermite" em École Normale Supérieure, *Annales Scientifiques* (3), 18 (1901), 9-34, ou o prefácio de Charles Hermite, *Oeuvres*, editado por Emile Picard (1905-1917)

[8]Para esse e outros aspectos de sua obra veja Gino Loria, "J. Liouville and His Work", *Scripta Mathematica*, 4 (1936), 147-154, 257-262; 301-305; ou, em francês, *Archeion*, 18 (1936), 117-139

algébrico, o círculo não pode ser quadrado segundo as regras clássicas[9]. Estimulado por seu sucesso, Ferdinand Lindemann mais tarde publicou várias pretensas provas do último teorema de Fermat, mas outros mostraram que elas não eram válidas.

4 O ano de 1872 foi um ano de festa não só na geometria mas ainda mais particularmente na análise. Nesse ano contribuições cruciais na direção da aritmetização da análise foram feitas por não menos que cinco matemáticos, um francês, os demais alemães. O francês foi H. C. R. (Charles) Méray (1835-1911) da Borgonha; os quatro alemães foram Karl Weierstrass (1815-1897) da Universidade de Berlim, seu aluno H. E. Heine (1821-1881) de Halle, Georg Cantor (1845-1918), também de Halle, e J. W. R. Dedekind (1831-1916) de Braunschweig. Esses homens num certo sentido representaram o clímax de meio século de investigação sobre a natureza da função e do número que começara em 1822 com a teoria do calor de Fourier e com uma tentativa feita naquele mesmo ano por Martin Ohm (1792-1872) de reduzir toda a análise a aritmética em *Versuch eines vollständig konsequenten Systems der Mathematik*. Havia duas causas principais de inquietação nesse intervalo de cinqüenta anos. Uma era a falta de confiança nas operações executadas sobre séries infinitas. Não era sequer claro se ou não uma série infinita de funções — de potências, ou de senos e co-senos, por exemplo — sempre converge à função de que provém. Uma segunda causa de preocupação era a falta de qualquer definição da expressão "número real" que estava no próprio cerne do programa de aritmetização. Bolzano em 1817 tinha percebido tão bem a necessidade de rigor em análise que Klein o chamava "o pai da aritmetização"; mas Bolzano tinha sido menos influente que Cauchy, cuja análise ainda carregava muito de intuição geométrica. Mesmo a função contínua e não derivável de Bolzano de cerca de 1830 foi esquecida pelos sucessores, e o exemplo de uma tal função dado por Weierstrass (em aulas dadas em 1861 e num artigo para a Academia de Berlin de 1872) em geral foi considerado como a primeira ilustração do fato.

Riemann enquanto isso tinha exibido uma função $f(x)$ que é descontínua numa infinidade de pontos num intervalo mas cuja integral no entanto existe e define uma função contínua $F(x)$ que para a infinidade de pontos em questão não tem derivada. A função de Riemann num certo sentido é menos patológica que as de Bolzano ou Weierstrass, mas tornou claro que a integral exigia uma definição mais cuidadosa que a de Cauchy, que fora conduzido em grande parte pelo sentimento geométrico sobre a área sob uma curva. A definição atual de integral definida sobre um intervalo em termos de somas superiores e inferiores é geralmente conhecida como integral de Riemann, em honra do homem que deu condições necessárias e suficientes para que uma função limitada seja integrável. A função de Dirichlet, por exemplo, não tem integral de Riemann em nenhum intervalo. Definições ainda mais gerais da integral, com condições mais fracas sobre a função, foram propostas no século seguinte, mas a definição de integral usada em quase todos os cursos universitários de cálculo é ainda a de Riemann.

5 Houve uma lacuna de quase cinqüenta anos entre a obra de Bolzano e a de Weierstrass, mas a unidade de esforços nesse meio século e a necessidade de redescobrir a obra de Bolzano eram tais que há um célebre teorema que leva o nome de ambos, o teorema de Bolzano-Weierstrass: um conjunto limitado S contendo infinitos elementos (pontos ou números) tem ao menos um ponto de acumulação. Esse teorema foi provado por Bolzano e aparentemente Cauchy também o conhecia, mas foi a obra de Weierstrass que o tornou familiar aos matemáticos.

[9]Para uma exposição excepcionalmente extensa sobre a história mais recente dos três problemas clássicos veja Felix Klein, *Famous Problems of Elementary Geometry*, traduzido por Beman e Smith (reimpresso em New York, 1955). Veja também E. W. Hobson, *Squaring the Circle*, e D. E. Smith, "The History and Transcendence of π", em J. W. A. Young, *Monographs on Topics of Modern Mathematics* (New York, 1915), pp. 387-416. Cf. Hermann von Baravalle, "The Number π", *The Mathematics Teacher*, 45 (1952), 340-348, ou 60 (1967), 479-487

Ceticismo quanto às séries de Fourier fora expresso por Lagrange, mas Cauchy em 1823 julgava ter provado a convergência da série de Fourier geral. Dirichlet mostrara que a prova de Cauchy não era satisfatória e tinha fornecido condições suficientes para convergência. Foi ao procurar liberalizar as condições de Dirichlet para a convergência de uma série de Fourier que Riemann desenvolveu sua definição de integral de Riemann; e mostrou que uma função $f(x)$ pode ser integrável em um intervalo sem ser representável por uma série de Fourier[10]. Foi o estudo das séries trigonométricas que levou também à teoria de Cantor, a ser descrita mais adiante.

6 Dirichlet morreu no ano crítico de 1872. Só um ano depois morreu também, com trinta e quatro anos, um jovem que prometia dar contribuições significativas tanto à matemática quanto à sua história. Foi Hermann Hankel (1839-1873), aluno de Riemann e professor de matemática em Leipzig. Em 1867 ele tinha publicado um livro, *Theorie der komplexen Zahlensysteme*, em que observava que "a condição para construir uma aritmética universal é pois uma matemática puramente intelectual, desligada de todas as percepções". Vimos que a revolução na geometria teve lugar quando Gauss, Lobachevsky e Bolyai se libertaram das preconcepções do espaço. Um tanto no mesmo sentido, a completa aritmetização da análise só se tornou possível quando, como Hankel previra, os matemáticos compreenderam que os números reais devem ser encarados como "estruturas intelectuais" e não como grandezas intuitivamente dadas, legadas pela geometria de Euclides. A idéia de Hankel não era realmente nova; havia uma geração, como veremos no próximo capítulo, que os algebristas, especialmente na Grã-Bretanha, vinham desenvolvendo uma aritmética universal e álgebras múltiplas. As implicações para a análise, no entanto, não tinham sido percebidas por muitos. Bolzano, no começo da década de 1830, fizera uma tentativa para desenvolver uma teoria dos números reais como limites de seqüências de números racionais[11], mas essa não foi reconhecida nem publicada até 1962. Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) tinha talvez sentido a necessidade disso, mas seu recorrer ao tempo em vez de ao espaço era uma mudança de linguagem, embora não de forma lógica, a partir dos conceitos geométricos usualmente colocados como base. A essência da questão foi apreendida pela primeira vez e publicada pelo quinteto de 1872 já mencionado.

Méray não demorou a apresentar suas idéias, pois já em 1869 ele tinha publicado um artigo chamando a atenção para uma séria falha de raciocínio que os matemáticos vinham cometendo desde os tempos de Cauchy. Essencialmente a *petitio principii* consistia em definir o limite de uma seqüência como um número real e em seguida definir um número real como limite de uma seqüência (de números racionais). Deve-se lembrar que Bolzano e Cauchy tinham tentado provar que uma seqüência que "converge em si" — isto é, uma seqüência para a qual S_{n+p} difere de S_n (para n suficientemente grande) por menos que um número prefixado ε — também converge no sentido de relações externas a um número real S, o limite da seqüência. Méray, em seu *Nouveau precis d'analyse infinitésimale* de 1872, cortou o nó górdio deixando de apelar para a condição externa de convergência ou para o número real S. Usando apenas o critério de Cauchy-Bolzano, onde n, p e ε são números racionais, a convergência pode ser descrita sem referência a números irracionais. Num sentido amplo ele considerava que uma seqüência convergente determina ou um número racional como limite ou um "número fictício" como um "limite fictício". Mostrou que esses "números fictícios" podem ser ordenados e em essência eles são o que chamamos números irracionais. Méray era um tanto vago quanto a se ou não sua seqüência convergente é o número. Se é, como parece indicado, então sua teoria é equivalente à desenvolvida ao mesmo tempo por Weierstrass.

[10]Para mais detalhes veja Jerome H. Manheim, *The Genesis of Point Set Topology* (1964), Caps. 3 e 4. Obras relacionadas com a análise de Riemann e Weierstrass são extensamente tratadas em Felix Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (1926-1927), Vol. 1

[11]Veja B. von Rootselaar, "Bolzano's Theory of Real Numbers", *Archive for History of Exact Sciences*, 2 (1964-1965), 168-180

7 Weierstrass tentou separar o cálculo da geometria e baseá-lo no conceito de número apenas; como Méray, ele também viu que para fazer isso era necessário dar uma definição de número irracional que fosse independente do conceito de limite, já que esse até então tinha pressuposto o anterior. Para corrigir o erro lógico de Cauchy, Weierstrass decidiu a questão da *existência* de um limite de uma seqüência convergente tomando a própria seqüência como o número ou limite. A concepção de Weierstrass é demasiado sutil para ser apresentada com detalhe aqui, mas em forma consideravelmente simplificada podemos dizer que o número 1/3 não é o *limite* da série $3/10 + 3/100 + 3/1\,000 + \cdots + 3/10^n + \cdots$; ele *é* a seqüência associada a essa série. (Na verdade, na teoria de Weierstrass, os números irracionais são mais amplamente definidos como *agregados* de racionais, e não de forma mais restrita como *sequências ordenadas* de racionais como indicamos.)

Weierstrass não publicou suas idéias sobre a aritmetização da análise, mas elas foram difundidas por estudantes, como Ferdinand Lindemann e Eduard Heine, que assistiram a suas aulas. Em 1871 Cantor iniciara um terceiro programa de aritmetização, semelhante aos de Méray e Weierstrass. Heine sugeriu simplificações que levaram ao chamado desenvolvimento de Cantor-Heine, publicado por Heine no *Journal* de Crelle para 1872 no artigo "Die Elemente der Funktionenlehre". Não podemos entrar em detalhes, mas em essência o desenvolvimento se assemelhava ao de Méray no sentido que seqüências convergentes que não convergem a números racionais por decreto definem números irracionais. Um ataque inteiramente diferente ao mesmo problema, e o que é mais conhecido hoje, foi dado no mesmo ano por Dedekind num livro célebre, *Stetigkeit und die Irrationalzahlen* (A continuidade e os números irracionais)[12].

8 A atenção de Dedekind se voltara para o problema dos números irracionais desde 1858, quando dava aulas de Cálculo. O conceito de limite, ele concluiu, deveria ser desenvolvido através da aritmética apenas, sem usar a geometria como guia, se se desejava que fosse rigoroso. Em vez de simplesmente procurar uma saída do círculo vicioso de Cauchy, Dedekind se perguntou, como indica o título de seu livro, o que há na grandeza geométrica contínua que a distingue dos números racionais. Galileu e Leibniz tinham julgado que a "continuidade" de pontos sobre uma reta era conseqüência de sua densidade — isto é, do fato que entre dois pontos quaisquer existe sempre um terceiro. Porém os números racionais têm essa propriedade, no entanto não formam um *continuum*.

Refletindo sobre a questão, Dedekind chegou à conclusão de que a essência da continuidade de um segmento de reta não se deve a uma vaga propriedade de ligação mútua, mas a uma propriedade exatamente oposta — a natureza da divisão do segmento em duas partes por um ponto sobre o segmento. Em qualquer divisão dos pontos do segmento em duas classes tais que cada ponto pertence a uma e somente uma, e tal que todo ponto numa classe está à esquerda de todo ponto da outra, existe um e um só ponto que realiza a divisão. Como Dedekind escreveu: "Por essa observação trivial o segredo da continuidade será revelado". A observação podia ser trivial, mas seu autor parece ter tido algumas dúvidas quanto a ela, pois hesitou durante alguns anos antes de se comprometer em algo impresso.

Dedekind viu que o domínio dos números racionais pode ser estendido de modo a formar um *continuum* de números reais se supusermos o que agora se chama o axioma de Cantor-Dedekind — que os pontos sobre uma reta podem ser postos em correspondência biunívoca com os números reais. Expresso aritmeticamente, isso significa que para toda divisão dos números racionais em duas classes A e B tais que todo número da primeira classe, A, é menor que todo número da segunda classe, B, existe um e um só número real que produz essa *Schnitt*, ou corte de Dedekind. Se A tem um maior número, ou se B contém um menor número, o corte define um número racional; mas se A não tem um maior elemento e B não tem um menor, então o corte define um número irracional.

[12]Existe uma tradução para o inglês sob o título *Essays on the Theory of Numbers*, traduzido por W. W. Beman (Chicago, 1901; New York, brochura Dover, 1963). Esta contém também a tradução de *Was sind und was sollen die Zahlen*, de Dedekind, 1888

Se, por exemplo, pusermos em A todos os números racionais negativos e também todos os racionais positivos cujos quadrados são inferiores a dois, e em B todos os racionais positivos cujos quadrados são superiores a dois, dividimos todo o conjunto dos racionais de um modo que define um número irracional — nesse caso o número que usualmente escrevemos como $\sqrt{2}$. Agora, Dedekind observou, os teoremas fundamentais sobre limites podem ser provados rigorosamente sem recurso à geometria. Foi a geometria que indicou o caminho para uma definição conveniente de continuidade, mas no fim foi excluída da definição aritmética formal do conceito. O corte de Dedekind no sistema de números racionais, ou uma construção equivalente dos números reais, tinha agora substituído a grandeza geométrica como espinha dorsal da análise.

As definições de número real são, como Hankel indicara que deviam ser, construções intelectuais baseadas nos números racionais, em vez de algo imposto à matemática do exterior. Das definições acima, uma das mais populares tem sido a de Dedekind. No começo do século vinte uma modificação do corte de Dedekind foi proposta por Bertrand Russel (1872-1970). Ele notou que como qualquer das duas classes A, B de Dedekind é univocamente determinada pela outra, uma só basta para a determinação de um número real. Assim $\sqrt{2}$ pode ser definido simplesmente como o segmento ou subclasse do conjunto dos números racionais formado de todos os números racionais positivos cujos quadrados são menores que dois e também de todos os números racionais negativos; de modo semelhante, todo número real nada mais é que um segmento do sistema dos números racionais.

9 Weierstrass, como parte de um programa de aritmetização, não só contribuiu para uma definição satisfatória de número real, como também para uma definição melhorada do conceito de limite. A definição de Cauchy usara frases como "valores sucessivos" ou "aproximar-se indefinidamente" ou "tão pequeno quanto se queira". Embora sejam sugestivas, e provavelmente pedagogicamente reconfortantes falta-lhes a precisão que em geral se espera da matemática. Em suas conferências, portanto, Weierstrass dava ênfase ao que às vezes se chamou a "teoria estática da variável". Heine, em seus *Elemente* de 1872, influenciado pelas aulas de Weierstrass, definiu o limite da função $f(x)$ em x_0 como segue:

> Se, dado qualquer ε, existe um η_0 tal que para $0 < \eta < \eta_0$ a diferença $f(x_0 \pm \eta) - L$ é menor em valor absoluto que ε, então L é o limite de $f(x)$ para $x \to x_0$.

Nessa definição fria e precisa não há sugestão de entidades fluindo e gerando magnitudes de dimensão superior, nenhum recurso a pontos ou retas móveis, nenhum abandono de quantidades infinitamente pequenas. Só restam os números reais, a operação de adição (e sua inversa, a subtração) e a relação "menor que". A linguagem sem ambigüidades e o simbolismo de Weierstrass e Heine expulsaram do Cálculo a noção de variabilidade e tornaram desnecessário o persistente apelo a infinitesimais fixos. A "Idade do Rigor" chegara verdadeiramente, substituindo os antigos artifícios heurísticos e os antigos conceitos intuitivos por precisão lógica crítica. Hoje o η de Weierstrass freqüentemente é substituído por outra letra grega, δ, mas as definições de limite de uma função encontradas em livros atuais são essencialmente as mesmas que Weierstrass e Heine introduziram há quase um século. As chamadas provas por épsilons e deltas são agora parte do instrumental comum dos matemáticos.

10 Weierstrass fora educado numa família católica devota mas liberal, tendo sido seu pai um protestante convertido. Karl, o mais velho, tinha um irmão e duas irmãs, mas nenhum deles casou-se, talvez por causa da atitude de dominação do pai; e Karl tinha pelo menos mais uma excentricidade, não gostava de música. Saiu-se tão bem na escola que seu pai insistiu para que ele se preparasse para o serviço público estudando direito na Universidade de Bonn, onde se tornou um perito em beber e em esgrima, em vez de em direito ou matemática, e saiu sem se graduar. Preparou-se então para o ensino secundário em Münster, onde um instrutor, Christoph Gudermann (1798-1851) tomou Weierstrass sob sua proteção. Gudermann interessava-se especialmente por funções

elíticas e hiperbólicas, assunto em que seu nome é lembrado na gudermaniana: Se u é uma função de x satisfazendo à equação $\operatorname{tg} u = \operatorname{senh} x$, então u chama-se a gudermaniana de x, escrita $u = \operatorname{gd} x$. Mais importante para a matemática que essa pequena contribuição foram o tempo e inspiração que o professor deu ao estudante, que estava destinado a tornar-se por sua vez o maior professor de matemática dos meados do século dezenove — pelo menos se julgarmos em termos do número de pesquisadores de sucesso que produziu. Gudermann fizera ver ao jovem Weierstrass o instrumento útil que era a representação em série de potências de uma função, e foi em relação a isso que Weierstrass, seguindo as pegadas de Abel, produziu sua maior obra.

Weierstrass obteve seu diploma de professor aos vinte e seis anos, e durante mais de uma dúzia de anos ensinou em várias escolas secundárias. Em 1854, porém, um artigo sobre funções abelianas publicado no *Journal* de Crelle trouxe-lhe tanta reputação que logo depois um posto de professor na Universidade de Berlim lhe foi oferecido, o qual ele aceitou. Weierstrass tinha então quase quarenta anos, o que faz dele uma notável exceção à idéia comumente aceita de que um grande matemático deve revelar-se cedo. Apesar de seu início tardio, foi geralmente reconhecido, durante o último terço do século, como o maior analista do mundo[13].

Antes do meio do século dezenove supunha-se que se uma série infinita converge em algum intervalo a uma função $f(x)$ contínua e derivável, então uma segunda série obtida derivando a série de partida termo a termo convergirá necessariamente, no mesmo intervalo, a $f'(x)$. Vários matemáticos mostraram que isso não é sempre verdade e que só se pode confiar na derivação termo a termo se a série obtida é uniformemente convergente no intervalo — isto é, se um N único pode ser achado tal que para todo valor de x no intervalo as somas parciais $S_n(x)$ diferem da soma $S(x)$ da série por menos que um ε dado para todo $n > N$. Weierstrass mostrou que a integração termo a termo de uma série uniformemente convergente era também permissível. Na questão da convergência uniforme Weierstrass de modo algum estava só, pois o conceito foi enunciado independentemente, mais ou menos ao mesmo tempo, por, ao menos, três outros — Cauchy na França (talvez por volta de 1853), Sir G. G. Stokes em Cambridge, (em 1847) e P. L. V. Seidel (1821-1896) na Alemanha (em 1848)[14]. Porém talvez ninguém mereça tanto ser conhecido como o pai do movimento de crítica em análise quanto Weierstrass[15]. De 1857 até sua aposentadoria em 1890 ele aconselhou insistentemente a toda uma geração de estudantes a ter cuidado no uso da representação em série, e um desses estudantes, Heine, em 1870 provou que o desenvolvimento em série de Fourier de uma função contínua é único se impusermos a condição de ser uniformemente convergente. Nisso ele estava aplainando dificuldades surgidas no trabalho de Dirichlet e Riemann sobre séries de Fourier.

Uma das contribuições importantes de Weierstrass à análise é conhecida como prolongamento analítico. Weierstrass mostrara que a representação como série de potências de uma função $f(x)$ em torno de um ponto P_1 no plano complexo converge em todos os pontos internos a um círculo C_1 com centro em P_1 e que passa pela singularidade mais próxima. Se, agora, expandirmos a mesma função em torno de um segundo ponto P_2 diferente de P_1 mas interno a C_1, essa série convergirá dentro de um círculo C_2 tendo P_2 como centro e passando pela singularidade mais próxima de P_2. Esse círculo pode envolver pontos fora de C_1, portanto prolongamos a área do plano em que $f(x)$ está analiticamente definida. Weierstrass por isso definiu uma função analítica como uma série de potências juntamente com todas as que podem ser obtidas dela por prolongamento analítico. A importância de trabalhos como o de Weierstrass é sentida par-

[13]Sobre sua vida veja E. T. Bell, *Men of Mathematics* (New York: Simon e Schuster 1937), Cap. 22, ou Ganesh Prasad, *Some Great Mathematicians of the Nineteenth Century* (1933-1937), Vol. I, Cap. 5

[14]Veja E. T. Bell, *The Development of Mathematics*, p. 270

[15]Veja James Pierpont, "Mathematical Rigor, Past and Present", *Bulletin of the American Mathematical Society*, 34 (1928), 23-53

ticularmente na física matemática, em que soluções de equações diferenciais raramente são achadas em forma que não seja a de uma série infinita.

Em alguns pontos a vida de Dedekind se assemelha à de Weierstrass: ele também era um em quatro filhos, e também ele nunca se casou; e ambos viveram mais de oitenta anos. De outro lado, os membros da família de Dedekind eram luteranos; ele se iniciou na matemática mais cedo que Weierstrass, entrando em Göttingen aos dezenove anos e obtendo seu doutorado três anos depois com uma tese sobre o Cálculo que foi elogiada por Gauss. Dedekind permaneceu em Göttingen durante alguns anos, ensinando e ouvindo aulas de Dirichlet, depois dedicou-se ao ensino secundário, principalmente em Brunswick, pelo resto de sua vida. Dedekind viveu tantos anos depois de sua célebre introdução dos "cortes" que a famosa editora Teubner deu como data de sua morte, no *Calendário de Matemáticos*, 4 de setembro de 1899. Isso divertiu Dedekind, que viveu ainda mais de uma dúzia de anos, e ele escreveu ao editor que passara a data em questão em conversa estimulante com seu amigo Georg Cantor.

11 A vida de Cantor foi tragicamente diferente da de seu amigo Dedekind[16]. Cantor nasceu em S. Petersburgo, de pais que havia emigrado da Dinamarca, mas a maior parte de sua vida ele passou na Alemanha, tendo a família se mudado para Frankfurt quando ele tinha onze anos. Seus pais eram cristãos de ascendência judia — sendo seu pai um convertido ao protestantismo e sua mãe católica de nascimento. O filho Georg se interessou fortemente pelos argumentos sutis dos teólogos medievais sobre a continuidade e o infinito, e isso contribuiu para que não quisesse seguir uma carreira mundana em engenharia, como seu pai sugeria. Em seus estudos em Zürich, Göttingen e Berlim o jovem conseqüentemente concentrou-se em filosofia, física e matemática — programa que parece ter estimulado sua enorme imaginação matemática. Doutorou-se em Berlim em 1867 com uma tese sobre a teoria dos números, mas suas primeiras publicações mostram atração pela análise de Weierstrass. Esse campo estimulou as idéias revolucionárias que lhe ocorreram pouco antes dos trinta anos. Já notamos a obra de Cantor em conexão com a prosaica expressão "número real"; mas suas contribuições mais originais centram-se na provocativa palavra "infinito".

Desde os dias de Zeno que se falava em infinito, tanto na teologia quanto na matemática, mas ninguém antes de 1872 fora capaz de dizer exatamente do que estava falando. Com demasiada freqüência nas discussões sobre o infinito os exemplos citados eram coisas como poder ilimitado ou grandezas indefinidamente grandes. Ocasionalmente a atenção se concentrava, como na obra de Galileu e Bolzano, na infinidade de elementos de uma coleção — por exemplo, os números naturais ou os pontos de um segmento de reta. Cauchy e Weierstrass só viam paradoxo nas tentativas de identificar um infinito "completado" na matemática, acreditando que o infinitamente grande ou pequeno indicava apenas a potencialidade de Aristóteles — uma incompletude do processo em questão. Porém enquanto estavam sob a influência de Weierstrass dois de seus estudantes chegaram a uma conclusão oposta. O primeiro deles foi Dedekind, que viu nos paradoxos de Bolzano não uma anomalia mas uma propriedade universal dos conjuntos infinitos que tomou como definição precisa:

> Diz-se que um sistema S é infinito quando é semelhante a uma parte própria dele mesmo; caso contrário S se diz um sistema finito.

Em terminologia um tanto mais moderna, um conjunto S de elementos se diz infinito se os elementos de um subconjunto próprio S' podem ser postos em correspondência biunívoca com os elementos de S. Que o conjunto S dos números naturais é infinito, por exemplo, é claro pelo fato de ser o conjunto S' dos números triangulares tal que a cada elemento n de S corresponde um elemento de S' dado por $n(n+1)/2$. Essa definição positiva de um conjunto "infinito completado" não deve ser confundida com a afirmação negativa às vezes escrita com o símbolo de Wallis como $1/0 = \infty$. Essa

[16]Veja Bell, *Men of Mathematics*, Cap. 29, ou Prasad, *Great Mathematicians*, Vol. II, Cap. 7

"equação" diz apenas que não existe número real que multiplicado por zero produza o número um.

12 A definição de Dedekind de conjunto infinito apareceu em 1872 em seu *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. (Em 1888 Dedekind expôs mais amplamente suas idéias em outro importante tratado, *Was sind und was sollen die Zahlen*). Dois anos depois Cantor casou-se, e na lua-de-mel foi a Interlaken, onde o casal encontrou Dedekind. No mesmo ano, 1874, Cantor publicou no *Journal* de Crelle um de seus artigos mais revolucionários[17]. Ele, como Dedekind, tinha reconhecido a propriedade fundamental dos conjuntos infinitos, mas, ao contrário de Dedekind, Cantor viu que os conjuntos infinitos não são todos iguais. No caso finito, dizemos que conjuntos de elementos têm o mesmo número (cardinal) se podem ser postos em correspondência biunívoca. De modo um tanto semelhante, Cantor se dispôs a construir uma hierarquia de conjuntos infinitos conforme a *Mächtigkeit* ou "potência" do conjunto. O conjunto dos quadrados perfeitos ou o conjunto dos números triangulares têm a mesma potência que o conjunto de todos os inteiros positivos, pois eles podem ser postos em correspondência biunívoca. Esses conjuntos parecem muito menores que o conjunto de todas as frações racionais, no entanto Cantor mostrou que também esse último conjunto é contável ou enumerável — isto é, também esse pode ser posto em correspondência biunívoca com os inteiros positivos, portanto tem a mesma potência. Para mostrar isso, simplesmente seguimos as flechas na Fig. 25.3, "contando" as frações pelo caminho.

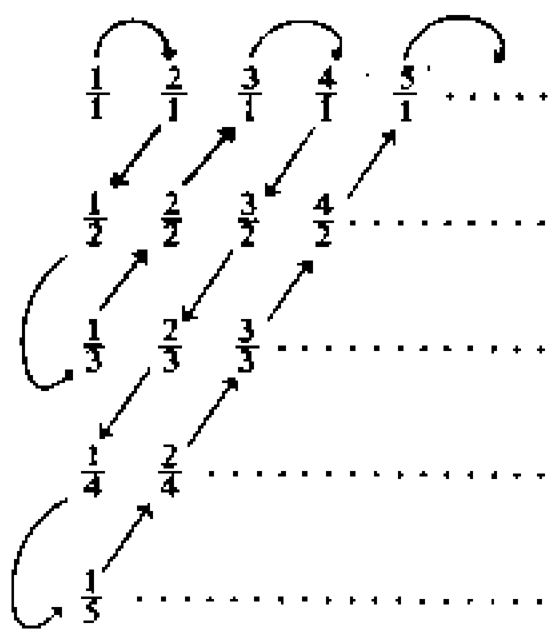


Figura 25.3

As frações racionais são tão densas, que entre duas quaisquer delas, por mais próximas que estejam, há sempre outra; no entanto o arranjo de Cantor[18] mostrou que o conjunto das frações tem a mesma potência que o dos inteiros. Começa-se a pensar que todos os conjuntos infinitos têm a mesma potência, porém Cantor provou conclusivamente que isso não é verdade. O conjunto de todos os números reais, por exemplo, tem potência maior que o conjunto das frações racionais. Para mostrar isso Cantor usou uma *reductio ad absurdum*. Suponhamos que os números reais entre 0 e 1 sejam contáveis, e que estejam expressos como decimais infinitos (de modo que 1/3, por exemplo, aparece como 0,333 . . ., 1/2 como 0,4999 . . ., e assim por diante), e que estejam dispostos em ordem:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0{,}a_{11}a_{12}a_{13}\cdots \\ a_2 &= 0{,}a_{21}a_{22}a_{23}\cdots \\ a_3 &= 0{,}a_{31}a_{32}a_{33}\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

[17]Uma exposição muito completa da obra de Cantor se encontra na Introdução a uma tradução para o inglês de dois artigos de Cantor de 1895 e 1897 publicada sob o título *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, editado por P. E. B. Jourdain (1915). Veja também Herbert Meschkowski, *Ways of Thought of Great Mathematicians* (S. Francisco: Holden-Day, 1964), pp. 91-104

[18]Cantor provou a enumerabilidade dos números racionais em seu artigo de 1874, mas aqui ele usou um tipo diferente de prova. Mais tarde ele deu a demonstração aqui reproduzida

onde a_{ij} é um dígito entre 0 e 9 inclusive. Para mostrar que nem todos os números reais entre 0 e 1 estão incluídos acima, Cantor exibiu uma fração decimal infinita diferente de todas as referidas anteriormente. Para isso, formemos $b = 0{,}b_1b_2b_3\ldots$ onde $b_K = 9$ se $a_{KK} = 1$ e $b_K = 1$, se $a_{KK} \neq 1$. Esse número real estará entre 0 e 1 e no entanto será diferente de todos os do arranjo que se presumia conter todos os números reais entre 0 e 1.

13 Os números reais podem ser subdivididos em dois tipos de dois modos diferentes: (1) como racionais e irracionais ou (2) como algébricos e transcendentes. Cantor mostrou que mesmo a classe dos números algébricos, que é muito mais geral que a dos racionais, tem ainda a mesma potência que a dos inteiros. Portanto são os números transcendentes que dão ao sistema dos números reais a "densidade" que resulta em maior potência. Que é fundamentalmente uma questão de densidade que determina a potência de um conjunto é sugerido pelo fato que a potência do conjunto de pontos numa reta é a mesma que a potência do conjunto de pontos de um segmento da reta, por menor que seja. Para mostrar isso, seja *RS* a reta indefinidamente estendida e seja *PQ* qualquer segmento finito (Fig. 25.4). Coloquemos o segmento de modo a cortar *RS* num ponto *O* mas não ser perpendicular a *RS*, nem jazer sobre *RS*. Escolhendo os pontos *M* e *N* de modo que *PM* e *QN* sejam paralelas a *RS*, e *MON* perpendicular a *RS*, então traçando retas por *M* que cortam tanto *OP* quanto *OR*, e retas por *N* que cortem tanto *OQ* quanto *OS*, estabelece-se facilmente uma correspondência biunívoca.

Ainda mais surpreendente é o fato de a dimensão não decidir a potência de um conjunto. A potência do conjunto de pontos sobre um segmento de reta unitário é a mesma da dos pontos numa área unitária ou num volume unitário — ou, aliás, a mesma que a potência do conjunto de todos os pontos do espaço tridimensional. (Porém a dimensão conserva alguma autoridade por ser uma correspondência biunívoca entre espaços de dimensão diferente necessariamente descontinua.) Alguns resultados na teoria dos conjuntos de pontos eram tão paradoxais que o próprio Cantor uma vez, em 1877, escreveu a Dedekind, "Eu vejo isso, mas não acredito"; e pediu a seu amigo que verificasse a prova[19]. Os editores também hesitavam muito antes de aceitar seus artigos, e várias vezes a publicação de artigos de Cantor no *Journal* de Crelle foi atrasada devido à indecisão dos editores e à preocupação quanto à possibilidade de erros estarem escondidos nesse inconvencional modo de ataque a conceitos matemáticos.

14 Os incríveis resultados de Cantor o levaram a estabelecer a teoria dos conjuntos como uma disciplina matemática completamente desenvolvida, chamada *Mengenlehre* (teoria das coleções) ou *Mannigfaltigkeitslehre* (teoria das multiplicidades), ramo que em meados do século vinte teria efeitos profundos sobre o ensino da matemática. Ao tempo de sua fundação Cantor despendeu muito esforço para convencer seus contemporâneos da validade de seus resultados, pois havia considerável *horror infiniti*, e os matemáticos sentiam relutância em aceitar o *eigentlich Unendlich* ou infinidade completada. Juntando prova sobre prova, Cantor finalmente construiu toda uma aritmética transfinita. A "potência" de um conjunto tornou-se o "número cardinal" do conjunto. Assim o "número" do conjunto dos inteiros era o "menor" número transfinito, *E*, e o "número" do conjunto dos números reais ou dos pontos de uma reta é um número "maior".

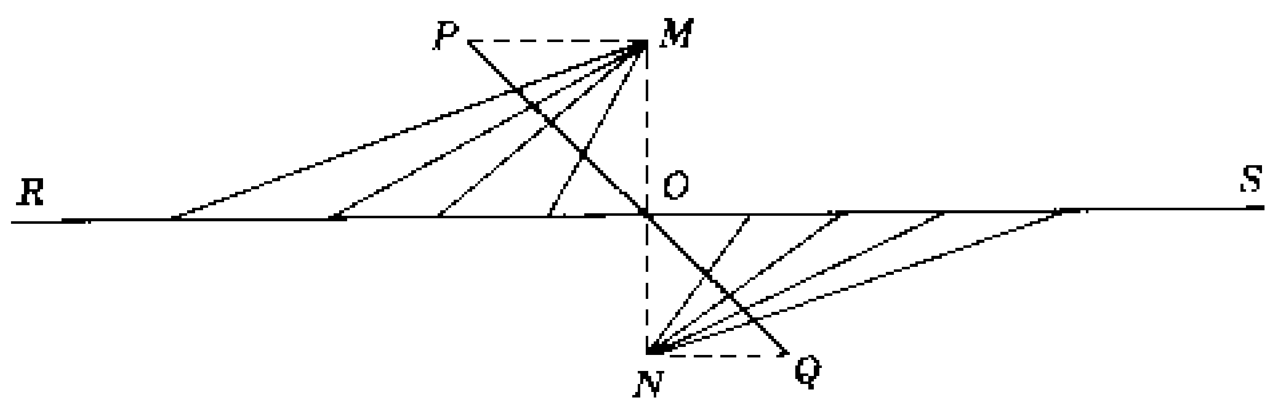


Figura 25.4

[19]Uma exposição especialmente clara da obra de Cantor se encontra em Herbert Meschkowski, *Evolution of Mathematical Thought* (1965), Cap. 5

C, o número do *continuum*. Ainda não teve resposta a questão de saber se existem ou não números transfinitos entre E e C. Cantor provou que existem infinitos números transfinitos para além de C, pois provou que o conjunto dos subconjuntos de um conjunto sempre tem potência maior que o próprio conjunto. Portanto o "número" do conjunto dos subconjuntos de C é um terceiro número transfinito, o conjunto dos subconjuntos desse conjunto de subconjuntos determina um quarto número e assim por diante, indefinidamente. Assim como há uma infinidade de números naturais, há uma infinidade de números transfinitos.

Os números transfinitos descritos anteriormente são números cardinais, mas Cantor desenvolveu também uma aritmética de números ordinais transfinitos. Relações de ordem são delicadas e verifica-se que a aritmética ordinal transfinita difere marcadamente da aritmética ordinal finita. Para casos finitos as regras para números ordinais são essencialmente as mesmas que para cardinais. Assim $3 + 4 = 4 + 3$ quer esses dígitos designem números cardinais ou ordinais. No entanto, se designarmos por ω o número ordinal dos "números de contar", então $1 + \omega$ não é a mesma coisa que $\omega + 1$, pois $1 + \omega$ obviamente é a mesma coisa que ω. Ainda mais, pode-se mostrar que $\omega + \omega = \omega$ e $\omega \cdot \omega = \omega$, propriedades diferentes da dos ordinais finitos mas semelhantes a de cardinais transfinitos.

15 Dedekind e Cantor estavam entre os matemáticos mais notáveis, e certamente mais originais, de sua época; no entanto nenhum dos dois conseguiu uma posição profissional de primeiro plano. Dedekind passou quase toda a sua vida ensinando em nível de escola secundária, e Cantor passou a maior parte de sua carreira na Universidade de Halle, pequena escola sem grande reputação. Cantor esperava obter um posto de professor na Universidade de Berlim e culpou Leopold Kronecker (1823-1891) por sua falta de sucesso. Kronecker, como Cantor, nascera de pais judeus, mas, novamente como Cantor, preferiu o protestantismo[20]. Na Universidade de Berlim entrou em contato com Weierstrass, Dirichlet, Jacobi e Steiner, obtendo seu doutorado em 1845 com uma tese sobre teoria algébrica dos números. Como Weierstrass, aprovava a aritmetização universal da análise, mas queria que a aritmética fosse finita, e aqui entrou em conflito com Cantor. Voltando às antigas idéias pitagóricas, Kronecker insistia em que a aritmética e a análise se baseassem nos números inteiros. "Deus fez os inteiros", ele costumava dizer, "e todo o resto é obra do homem". Rejeitava categoricamente a construção dos números reais de seu tempo pelo fato de não poder ser efetuada só com processos finitos, e pedia uma revolução aritmética que banisse como inexistentes os números irracionais. Na análise Kronecker pouco fez além de criticar abertamente seus contemporâneos em suas aulas e conversação. Diz-se que ele perguntou a Lindemann para que servia sua prova de que π não é algébrico já que números irracionais não existem. Na álgebra Kronecker fez contribuições significativas, mas os analistas da época consideravam suas idéias excessivamente metafísicas. Às vezes se diz que seu movimento morreu de inanição[21]; veremos depois, que se pode dizer que reapareceu sob nova forma na obra de Poincaré e Brouwer.

Durante a maior parte de sua vida Kronecker foi um homem de negócios muito próspero, mas possuía fortes ligações com professores na Universidade de Berlim onde finalmente aceitou um posto em 1883. Seu finitismo evidentemente embaraçava Weierstrass, mas foi a Cantor que ele feriu mais gravemente. Não só Kronecker se opôs a que fosse dada uma posição a Cantor em Berlim como procurou solapar o ramo da matemática que Cantor estava criando. Cantor, por sua vez, escreveu uma defesa vigorosa em 1883 em seu *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* (Fundamentos de uma teoria geral das multiplicidades), em que mantinha que "numerações definidas podem ser feitas com conjuntos infinitos tão bem quanto com finitos". Não temia cair no que chamava um "abismo de transcendentes" no entanto ocasionalmente ele se entregava a argumentos de tipo teológico. Kronecker continuou seus ataques contra o hipersensitivo e temperamental Cantor e em 1884 Cantor sofreu o primeiro dos esgotamentos nervosos que viriam reaparecer durante os trinta e três anos restantes de sua vida. Acessos de depressão às vezes o levavam a duvidar de sua própria obra, embora fosse até certo ponto reconfortado pelo apoio de homens como Hermite. Quase no fim ele obteve o reconhecimento de suas realizações, mas sua morte em 1918 numa instituição para doenças mentais em Halle faz lembrar que o gênio e a loucura às vezes estão relacionados de perto. A tragédia de sua vida pessoal é mitigada pelo hino de elogio de um dos maiores matemáticos do começo do século vinte, David Hilbert, que descreveu a nova aritmética transfinita como "o produto mais extraordinário do pensamento matemático, uma das mais belas realizações da atividade humana no domínio do puramente inteligível". Onde almas tímidas tinham hesitado, Hilbert exclamava "Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós[22].

[20]Para sua vida e obra ver Bell, *Men of Mathematics*, Cap. 25, ou Prasad, *Great Mathematicians*, Vol. II, Cap. 3

[21]Pierpont, "Mathematical Rigor, Past and Present", *Bulletin of the American Mathematical Society*, 34 (1928), 23-53, pp. 38-40

BIBLIOGRAFIA

Bell, E. T., *The Development of Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1940)

Bourbaki, Nicolas, *Éléments d'histoire des mathématiques* (Paris: Hermann, 1960)

Boyer, Carl B., *The Concepts of the Calculus* (New York: Columbia University Press, 1939; reimpresso por Dover, 1959)

Brill, A., e M. Noether, "Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neurer Zeit", *Jahresbericht der Deutsche Mathematiker Vereinigung*, 3 (1892-1893), 107-566

Cajori, Florian, *History of Mathematics*, 2.ª edição (New York: Macmillan, 1931)

Cantor, Georg, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, traduzido por P. E. B. Jourdain (Chicago e Londres: Open Court, 1915; New York: brochura Dover, s.d.).

Dantscher, Victor, *Vorlesungen über die Weierstrassche Theorie der irrationalen Zahlen* (Leipzig e Berlin: B. G. Teubner, 1908)

Dedekind, Richard, *Essays on the Theory of Numbers*, traduzido por W. W. Beman (Chicago: Open Court, 1901)

Dirichlet, G. L., *Werke*, editado por L. Kronecker and L. Fuchs (Berlin, 1889-1897, 2 volumes)

Eves, Howard, e Carroll V. Newsom, *An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics* (New York: Rinehart, 1958)

Fourier, Joseph, *Oeuvres*, editado por G. Darboux (Paris, 1888-1890, 2 volumes)

Heine, E., "Die Elemente der Funktionenlehre", *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 74 (1872), 172-188

Hermite, Charles, *Oeuvres*, editado por Émile Picard (Paris: Gauthier-Villars, 1905-1917, 4 volumes)

Hobson, E. W., "On the Infinite and the Infinitesimal in Mathematic Analysis", *Proceedings of the London Mathematical Society*, 35 (1903), 117-140

Jourdain, P. E. B., "The Development of the Theory of Transfinite Numbers", *Archiv der Mathematik und Physik* (3), 10 (1906), 254-281; 17 (1908-1909), 287-311; 16 (1910), 21-43; 22 (1913-1914), 1-21

Jourdain, P. E. B., "Note on Fourier's Influence on the Conceptions of Mathematics", *International Congress of Mathematicians* (Cambridge, 1912), Vol. II, pp. 526-527

Jourdain, P. E. B., "On Isoid Relations and Theories of Irrational Number", *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Cambridge, 1912), Vol. II, pp. 492-496

Klein, Felix, *On Riemann's Theory of Algebraic Functions and Their Integrals*, traduzido por Frances Hardcastle (Cambridge: Cambridge University Press, 1893)

Klein, Felix, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (Berlin: Springer, 1926-1927, 2 volumes)

Kronecker, Leopold, *Werke*, editado por Kurt Hensel (Leipzig: B. G. Teubner, 1895-1931, 5 volumes)

Langer, Rudolph E., *Fourier Series, the Genesis and Evolution of a Theory* (Oberlin, Ohio: The Mathematical Association of America, 1947)

[22]"Sur l'infini", *Acta Mathematica*, 48 (1926), 91-122, especialmente pp. 97-100; ou "Über das Unendlich", *Mathematische Annalen*, 95 (1926), 161-190, especialmente pp. 167-170

Loria, Gino, "Le mathématicien J. Liouville et ses oeuvres," *Archeion*, **18** (1936), 117-139; versão em inglês em *Scripta Mathematica*, Vol. 4 (1936)
Manheim, Jerome H., *The Genesis of Point Set Topology* (New York: Pergamon Press, 1964)
Méray, Charles, *Nouveau précis d'analyse infinitésimale* (Paris, 1872)
Merz, J. T., *A History of European Thought in the Nineteenth Century* (Edimburgh e Londres, 1896-1914, 4 volumes, reimpresso. New York: Dover, 1965)
Meschkowski, Herbert, *Evolution of Mathematical Thought* (San Francisco: Holden-Day, 1965)
Pierpont, James, "The History of Mathematics in the Nineteenth Century", *Bulletin of the American Mathematical Society*, **11** (1904), 136-159
Pierpont, James, "Mathematical Rigor, Past and Present," *Bulletin of the American Mathematical Society*, **34** (1928), 23-53
Pincherle, Salvatore, "Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principii del Prof. C. Weierstrass," *Giornale di Matematiche*, **18** (1880), 178-254, 317-357
Poincaré, Henry, "L'oeuvre mathématique de Weierstrass," *Acta Mathematica*, **22** (1898-1899), 1-18
Prasad, Ganesh, *Some Great Mathematicians of the Nineteenth Century* (Benares: Benares Mathematical Society, 1933-1934, 2 volumes)
Waismann, Friedrich, *Introduction to Mathematical Thinking* (New York: reimpressão Harper, 1959)
Weierstrass, Karl, *Mathematische Werke* (Berlin: Mayer & Müller, 1894-1927, 7 volumes)

EXERCÍCIOS

1. Explique por que o século dezenove foi chamado "um século de correlação" na matemática, citando contribuições especificas em apoio a essa idéia.

2. Até que ponto os desenvolvimentos da análise no século dezenove foram motivados mais por fatores internos na matemática que pelas necessidades e preferências da sociedade? Dê exemplos específicos para apoiar sua resposta.

3. Compare o nível de rigor na análise do século dezenove com o do século dezoito e com o das obras de Arquimedes, apoiando sua resposta com exemplos específicos.

4. Descreva a importância do ano de 1872 na aritmetização da análise.

5. Havia mais probabilidade de os matemáticos principais do século dezenove serem professores do que ocorria no século dezoito? Dê exemplos para apoiar sua resposta.

6. A asserção de Kronecker, de que Deus fez os inteiros e todos os outros números são obra do homem, é defensável ou indefensável? Explique.

7. Mostre que o conjunto de todos os números reais entre 3 e 7 inclusive pode ser posto em correspondência biunívoca com o conjunto de todos os números reais entre 1 e 11.

8. Defina precisamente as expressões "número real" e "número irracional". Quando e como foi pela primeira vez reconhecida a necessidade de admitir números irracionais e quando e como surgiu a necessidade de ter uma definição precisa? Explique claramente.

9. Compare a definição de "limite de uma função" dada por Weierstrass com a formulada antes por Cauchy, indicando as vantagens ou desvantagens relativas.

10. Qual tem maior número transfinito, o conjunto de todos os inteiros ou a classe de todas as raízes n-ésimas de todos os inteiros? Explique.

11. Dados dois segmentos de reta de comprimentos diferentes, mostre que se pode estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos dos dois segmentos.

12. Escreva sob forma de decimais infinitos uma dúzia de números transcendentes diferentes, dando em cada caso a regra de sucessão dos dígitos. Algum desses números é racional? Explique.

13. Mostre que se $u = \text{gd}\, x$, então $\cos u = \text{sech}\, x$ e $\text{sen}\, u = \text{tgh}\, x$.

*14. Na expansão de Fourier

$$f(x) = 1/2\, a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + b_1 \text{sen}\, x + b_2 \text{sen}\, 2x + \cdots$$

multiplique ambos os membros da equação por $\cos 2x$ e integre ambos os membros de $-\pi$ a $+\pi$ para mostrar que

$$a_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 2x\, dx.$$

*15. Como no Exc. 14, multiplique ambos os membros da equação por $\text{sen}\, 2x$ e integre entre $-\pi$ e $+\pi$ para obter a fórmula análoga para b_2.

*16. Esboce a função $f(x) = 1$ para $n\pi < x < (n+1)\pi$ quando n é par e $f(x) = 0$ para $n\pi < x < (n+1)\pi$ quando n é ímpar, e ache a expansão de Fourier da função.

Capítulo **26**

O surgimento da álgebra abstrata

> Não é paradoxo dizer que nos nossos momentos de inspiração mais teórica podemos estar o mais próximo possível de nossas aplicações mais práticas.
>
> *A. N. Whitehead*

1 O século dezenove, mais do que qualquer período precedente, mereceu ser conhecido como Idade Áurea da matemática. O que se acrescentou ao assunto durante esses cem anos supera de longe, tanto em quantidade quanto em qualidade, a produtividade total combinada de todas as épocas precedentes. O século foi também, com a possível exceção da Idade Heróica na Grécia antiga, o mais revolucionário na história da matemática. Em 1829 um novo mundo na geometria foi descoberto por Lobachevsky, um russo que tivera um professor alemão, e em 1874 o campo da análise fora assombrado pela matemática do infinito que fora introduzida por Cantor, um alemão nascido na Rússia. A França já não era mais o centro reconhecido do mundo matemático, embora fornecesse a carreira meteórica de Évariste Galois (1811-1832). O caráter internacional do assunto se percebe no fato de as duas contribuições mais revolucionárias na álgebra terem sido feitas, em 1843 e 1847, por matemáticos que ensinavam na Irlanda. A primeira dessas foi a obra de Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) a segunda veio de George Boole (1815-1864). Os contribuidores mais prolíficos à álgebra do século dezenove porém foram ingleses que passaram algum tempo na América, — Arthur Cayley (1821-1895) e J. J. Sylvester (1814-1897) — e foi principalmente na universidade de onde esses provinham, Cambridge, que se deu o aparecimento da álgebra moderna.

A Universidade de Cambridge no começo do século dezenove não era bem um lugar onde se procuraria enxergar novos desenvolvimentos da matemática. É verdade que cem anos antes fora a *alma mater* de Sir Isaac Newton; mas o chauvinismo e a controvérsia sobre prioridade no Cálculo tinham levado ao isolacionismo intelectual pelo qual os britânicos pagaram caro. As universidades escocesas do século dezoito tinham mantido ligações mais estreitas com o Continente que as da Inglaterra, mas as primeiras eram relativamente mais fracas em matemática que em biologia e química. Quando Jacobi visitou Cambridge em 1842 perguntaram-lhe quem era o maior matemático inglês vivo e ele respondeu "Não há nenhum"[1]. Isso na época era um juízo deselegantemente duro. Mas é verdade que uma geração antes na Inglaterra em geral e em Cambridge, em particular, quase não havia consciência dos imensos avanços que tinham sido feitos no Continente em análise e geometria. Talvez fosse por isso que a Inglaterra, quando emergiu da teia do provincianismo, tomou a liderança em álgebra, pois nesse campo os desenvolvimentos realizados no Continente durante o século dezoito tinham sido menos notáveis.

2 O ponto de virada na matemática inglesa veio em 1815 com a formação em Trinity College, Cambridge, da Analytical Society, já mencionada antes, a qual se constituía de três jovens de Cambridge: o algebrista George Peacock (1791-1858), o astrônomo John Herschel (1792-1871), e Charles Babbage (1792-1871) célebre pelas "Calculating Engines". A finalidade imediata da Sociedade era reformar o ensino e a notação do cálculo; e em 1817, quando Peacock foi nomeado examinador para o *tripos** matemático,

[1]Alexander Macfarlane, *Lectures on Ten British Mathematicians of the Nineteenth Century* (1916), p. 10. Cf. W. W. R. Ball, *A History of the Study of Mathematics at Cambridge* (1889)

*Originalmente, exame para graduação em matemática na Cambridge University. N. do R.

a notação diferencial substituiu a dos fluxos no exame de Cambridge. Peacock era ele próprio graduado e professor de Cambridge, o primeiro dos muitos homens de Trinity College que iriam conduzir o desenvolvimento da álgebra. Ele se graduou como segundo *wrangler* — isso é, teve o segundo lugar no célebre exame de *tripos* (iniciado em 1725) para estudantes de matemática — o primeiro lugar sendo de John Herschel, outro dos fundadores da Analytical Society. Peacock era um zeloso administrador e reformador, tomando parte ativa na modificação dos estatutos da universidade e na fundação da Astronomical Society of London, da Philosophical Society of Cambridge, e da British Association for the Advancement of Science, essa última tendo sido o modelo da American Association for the Advancement of Science. Durante os últimos vinte anos de sua vida ele foi deão da catedral de Ely.

Peacock não produziu resultados novos notáveis em matemática, mas teve grande importância na reforma do assunto na Inglaterra, especialmente no que diz respeito à álgebra. Tinha havido em Cambridge uma tendência tão conservadora em álgebra quanto na geometria e na análise; ao passo que, no Continente, os matemáticos estavam desenvolvendo a representação gráfica dos números complexos, na Inglaterra havia protestos de que mesmo os números negativos não tinham validade. Num esforço para justificar as idéias mais amplas na álgebra, Peacock em 1830 publicou seu *Treatise on Algebra*, em que procurou dar à álgebra uma estrutura lógica comparável à de *Os elementos* de Euclides. Sem usar seus nomes modernos, ele tentou, sem grande sucesso se julgado por padrões atuais, formular as leis fundamentais da aritmética — as leis comutativa e associativa para a adição e a multiplicação e a lei distributiva para a multiplicação relativamente à adição. Esse método, mais tarde ampliado numa obra em dois volumes de 1842-1845, marca o início do pensamento postulacional na aritmética e na álgebra. No primeiro volume o autor aplicou as regras a números, ou, como denominava o tema, à "álgebra aritmética"; no segundo volume, dedicado à "álgebra simbólica", ele estendia as regras ao estudo de grandezas em geral. Na "álgebra aritmética" de Peacock entende-se que os símbolos + e − têm apenas seu significado ordinário, de modo que a expressão $a-b$ só tem sentido se a é maior que b (pois Peacock tinha em mente os números naturais). Na "álgebra simbólica" tais restrições são eliminadas, mas assume-se que as regras da álgebra númerica valem universalmente no sistema mais abstrato[2]:

> Todos os resultados da álgebra aritmética que foram deduzidos pela aplicação de suas regras, e que têm forma geral embora tenham valor particular são também resultados na álgebra simbólica, onde são gerais tanto em valor quanto em forma.

A justificativa para essa ousada extrapolação não é explicada; Peacock simplesmente aceita isso como um "princípio da permanência de formas equivalentes" um tanto semelhante ao princípio de correlação que Carnot e Poncelet tinham usado com tanto sucesso em geometria. Porém, a forma algébrica desse nebuloso postulado num certo sentido serviu de obstáculo ao progresso, pois sugeria que as leis da álgebra são as mesmas quaisquer que sejam os números ou objetos dentro dela. Peacock, ao que parece, pensava primariamente no sistema numérico dos inteiros e nas grandezas reais da geometria, e sua distinção entre os dois tipos de álgebra não era muito diferente da que Viète fizera entre "logistica numerosa" e "logistica speciosa". Por isso o subtítulo do segundo volume da obra de Peacock é *On Symbolical Algebra and its Applications to the Geometry of Position*, cujas últimas três palavras poderiam dar a entender que o autor estivera lendo Carnot.

3 Peacock, o "Euclides da álgebra", achou apoio para suas idéias na obra de Augustus De Morgan (1806-1871), o qual ajudou também a fundar a British Association for the

[2] *Treatise on Algebra* (reimpresso da edição de 1842-1845, New York: Scripta Mathematica, 1940), Vol. I, pp. VI-VIII. Encontra-se uma biografia de Peacock em Macfarlane, *Ten British Mathematicians*, Cap. 1

Advancement of Science (1831) e num certo sentido se uniu a Peacock para formar o que se poderia chamar uma "escola inglesa" de matemática. De Morgan nascera na Índia, seu pai tendo trabalhado para a East India Company, mas estudou no Trinity College, graduando-se como quarto *wrangler*. Não conseguiu um lugar em Cambridge ou Oxford porque recusou submeter-se ao exame religioso necessário, embora tivesse sido educado como membro da Igreja da Inglaterra, na qual sua mãe esperava que viesse a ser ministro. Em conseqüência, De Morgan foi nomeado, aos vinte e dois anos, professor de matemática na recém-fundada Universidade de Londres, mais tarde chamada University College da Universidade de Londres, onde continuou a ensinar exceto durante curtos períodos em que se demitia por causa de restrições da liberdade acadêmica. Sempre foi um defensor da tolerância religiosa e intelectual, e foi também autor e professor de qualidade excepcional. Nasceu cego de um olho, o que pode explicar algumas de suas inocentes excentricidades, como o fato de não gostar da vida rural, sua recusa de votar em qualquer eleição, e não se ter candidatado a membro da Royal Society. Amava enigmas e ditos de espírito, muitos dos quais estão reunidos no seu conhecido *Budget of Paradoxes*, uma encantadora sátira aos quadradores de círculo editada após sua morte por sua viúva[3].

Peacock foi uma espécie de profeta no desenvolvimento da álgebra abstrata, e De Morgan estava para ele um tanto como Elisha está para Elijah. Na *Álgebra* de Peacock entendia-se em geral que os símbolos representavam números ou grandezas, mas De Morgan os conservava abstratos. Deixava sem significado não só as letras que usava como também os símbolos de operação; letras como A, B, C podiam indicar virtudes e vícios e + e − podiam significar recompensas e castigos. De Morgan insistia em que "com uma única exceção, nenhuma palavra ou sinal em álgebra ou aritmética tem um átomo de significado em todo este capítulo, cujo assunto são símbolos e suas leis de combinação, dando uma álgebra simbólica que pode a partir daí tornar-se a gramática de cem álgebras diferentes significativas". (A exceção mencionada por De Morgan é o símbolo de igualdade, pois ele pensava que em $A = B$ os símbolos A e B "devem ter o mesmo significado resultante, quaisquer que sejam os passos para atingi-lo".) Essa idéia, expressa já em 1830 em sua *Trigonometry and Double Algebra*, está próxima da percepção moderna de que a matemática lida com funções proposicionais, e não com proposições; mas De Morgan parece não ter percebido a natureza inteiramente arbitrária das regras e definições da álgebra. Estava suficientemente próximo da filosofia de Kant para acreditar que as leis fundamentais usuais da álgebra deveriam aplicar-se a qualquer sistema algébrico. Ele via que indo da "álgebra simples" do sistema numérico real para a "álgebra dupla" dos números complexos as regras de operação permaneciam as mesmas. E De Morgan acreditava que essas duas formas esgotam os tipos de álgebra possíveis e que não era possível desenvolver uma álgebra tripla ou quádrupla. Nesse importante ponto Hamilton, outro homem de Trinity, mas desta vez Trinity College de Dublin, não de Cambridge, mostrou que ele estava errado. (Outro matemático de Trinity, Dublin, foi George Salmon [1819-1904] que lá ensinava matemática e religião, e foi autor de excelentes textos sobre cônicas, álgebra e geometria analítica.)

4 O pai de Hamilton, advogado, e sua mãe, ao que se diz ambos intelectualmente bem dotados, morreram quando ele era ainda menino; mas mesmo antes de ficar órfão a instrução do jovem Hamilton fora determinada por um tio, que era lingüista. Jovem extremamente precoce, William lia grego, hebraico e latim aos cinco anos; aos dez conhecia meia dúzia de línguas orientais. Um encontro com um calculista relâmpago poucos anos depois estimulou o interesse já forte de Hamilton pela matemática, assim como a amizade com Wordsworth e Coleridge provavelmente encorajou-o a continuar a pro-

[3] Uma extensa exposição sobre a vida e a obra de De Morgan está incluída em Macfarlane, *Ten British Mathematicians*, Cap. 2. Ver também *Memoir of A. D. M. by his Wife Sophia Elizabeth De Morgan, with Selections from His Letters* (1882)

duzir a má poesia que vinha escrevendo desde a meninice[4]. Hamilton entrou em Trinity College, Dublin, e enquanto ainda estudante lá, aos vinte e dois anos, foi nomeado Royal Astronomer da Irlanda, Diretor do Observatório de Dunsink, e professor de astronomia. No mesmo ano ele apresentou à Academia Irlandesa um artigo sobre sistemas de raios em que exprimia um de seus temas favoritos — que o espaço e o tempo estão "indissoluvelmente ligados entre si". Num certo sentido pode-se tomar essa idéia como presságio da teoria da relatividade, mas Hamilton tirou dela uma conclusão menos frutífera: assim como a geometria é a ciência do espaço somente, a álgebra deve ser a ciência do tempo puro. Talvez aqui Hamilton estivesse seguindo na álgebra o exemplo de Newton que, quando encontrava dificuldade para definir conceitos abstratos no método dos fluxos, sentia-se mais à vontade apelando para a noção de tempo no universo físico. Talvez estivesse simplesmente concluindo que, como a geometria é a ciência do espaço, e espaço e tempo são os dois aspectos da intuição sensorial, a álgebra deveria ser a ciência do tempo[5].

Pouco depois de apresentar seu primeiro artigo a predição feita por Hamilton de refração cônica em certos cristais foi experimentalmente confirmada por físicos. Essa verificação de uma teoria matemática garantiu sua reputação, e aos trinta anos ele recebeu um título de nobreza. Dois anos antes, em 1833, ele tinha apresentado um artigo longo e significativo à Academia Irlandesa, em que introduziu uma álgebra formal de pares de números complexos cujas regras de combinação são precisamente as que hoje são dadas para números complexos. A importante regra para multiplicação dos pares é naturalmente

$$(a, b)(\alpha, \beta) = (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha)$$

e ele interpretava esse produto como uma operação envolvendo rotação[6]. Aqui vê-se o conceito definitivo de número complexo como par ordenado de números reais, idéia que estava indicada nas representações gráficas de Wessel, Argand e Gauss, mas que agora era explicitada pela primeira vez.

Hamilton percebia que seus pares ordenados podiam ser pensados como entidades orientadas no plano, e naturalmente tentou estender a idéia a três dimensões passando do número complexo binário $a + bi$ às triplas ordenadas $a + bi + cj$. A operação de adição não oferecia dificuldade, mas durante dez anos ele lutou com a multiplicação de n-uplas para n maior que dois. Um dia em 1843, enquanto passeava com a esposa ao longo do Royal Canal, teve uma inspiração: sua dificuldade desapareceria se usasse quádruplas em vez de triplas e se abandonasse a lei comutativa para a multiplicação. Estava mais ou menos claro já que para quádruplas de números $a + bi + cj + dk$ se deveria tomar $i^2 = j^2 = k^2 = -1$; agora Hamilton viu que deveria tomar $ij = k$ mas $ji = -k$, e semelhantemente $jk = i = -kj$ e $ki = j = -ik$. No resto, as leis de operação são as da álgebra ordinária.

Assim como Lobachevsky criara uma nova geometria consistente em si mesma, abandonando o postulado das paralelas, Hamilton criou uma nova álgebra, também consistente em si, abandonando o postulado da comutatividade para a multiplicação. Parou em seu passeio e com uma faca recortou a fórmula fundamental $i^2 = j^2 = k^2 = ijk$ numa pedra na Brougham Bridge; no mesmo dia, 16 de outubro, pediu licença à Royal Irish Academy para ler um artigo sobre quatérnions na sessão seguinte. A descoberta chave fora súbita, mas o descobridor vinha trabalhando para ela havia uns quinze anos. Hamilton, muito naturalmente, sempre considerou a descoberta dos quatérnions como

[4]Exposições sobre sua vida e obra se encontram em E. T. Bell, *Men of Mathematics* (1937), Cap. 19, e Alexander Macfarlane, *Ten British Mathematicians*, Cap. 3. Em *Scripta Mathematica*, **10** (1944), há vários artigos dedicados à vida e à obra de Hamilton. O estudo mais extenso é R. P. Graves, *Life of Sir William Rowan Hamilton* (1882). Veja também C. Lanczos, "William Rowan Hamilton", *American Scientist*, **55** (1967), 129-143

[5]E. T. Bell, *Men of Mathematics*, p. 359

[6]Uma exposição sobre o artigo em que Hamilton apresentou essa idéia é dada por C. C. MacDuffee em "Algebra's Debt to Hamilton", *Scripta Mathematica*, **10** (1944), 25-36

seu maior sucesso; em retrospecto é claro que não era tanto esse particular tipo de álgebra que era significativo, mas antes a descoberta da tremenda liberdade que tem a matemática de construir álgebras que não precisam satisfazer às restrições impostas pelas ditas "leis fundamentais", que até então, com o apoio do vago princípio da permanência de forma, tinham sido invocadas sem exceção. Durante os últimos vinte anos de sua vida Hamilton dispendeu suas energias com sua álgebra favorita, à qual ele se inclinava a atribuir significado cósmico, e que alguns matemáticos ingleses consideravam uma espécie de *arithmetica universalis* em sentido leibniziano. Suas *Lectures on Quaternions* apareceram em 1853, e depois disso ele se dedicou à preparação da obra ampliada, *Elements of Quaternions*. Essa não estava de todo terminada quando ele morreu em 1865, mas foi editada e publicada por seu filho no ano seguinte. A tragédia de uma esposa semi-inválida tinha ensombrecido seus últimos anos, e uma ocasional intemperança alcoólica levava alguns engraçados a dizer que ele poderia ser de fato um mestre do tempo puro, mas não do tempo sublunar. No entanto é uma satisfação para os norte-americanos lembrar que nesses infelizes anos de guerra civil a recém-fundada National Academy of Sciences nomeou Sir William Rowan Hamilton seu primeiro associado estrangeiro.

5 Em 1844, o ano seguinte à descoberta da multiplicação quaternioniana por Hamilton, idéias um tanto semelhantes foram publicadas na Alemanha por Grassmann em seu tratado *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* (A teoria da extensão linear, um novo ramo da matemática). Este é um cálculo vetorial muito geral, em um número qualquer de dimensões, e aqui também encontramos o desenvolvimento da idéia de multiplicação não-comutativa. Na verdade no sistema de Grassmann a multiplicação não é necessariamente associativa. É interessante notar que Grassmann, como Hamilton, era um lingüista, sendo especialista em literatura sânscrita. Ao contrário de Hamilton, porém, nunca ocupou cargo proeminente, mas ensinou em escolas secundárias. Além disso, demorou para que o significado de seu *Ausdehnungslehre* fosse percebido, pois o livro era não só pouco convencional como difícil de ler. Uma razão era que Grassmann, como Desargues antes dele, usava uma terminologia muito inusitada, porém mais fundamental era a novidade e extrema generalidade das idéias do autor quanto a extensão. Mesmo Gauss, que exprimiu aprovação à obra de Grassmann, parece ter achado excessiva a abstração filosófica[7].

Grassmann reescreveu seu *Ausdehnungslehre* em uma segunda edição em 1862, e então sua influência começou a fazer-se sentir mais fortemente. Em particular, resultou no desenvolvimento na América do Norte, primeiramente graças aos esforços de um físico da Universidade de Yale, Josiah Welleard Gibbs (1839-1903), da álgebra mais limitada dos vetores no espaço tridimensional. A álgebra dos vetores é novamente uma álgebra múltipla em que não vale a lei comutativa para a multiplicação.

Na verdade em 1867 Hankel provou que a álgebra dos números complexos é, como De Morgan suspeitara, a álgebra mais geral que é possível sob as leis fundamentais da aritmética[8]. A *Vector Analysis* de Gibbs apareceu em 1881 e novamente em 1884, e ele publicou outros artigos durante essa década. Essas obras provocaram uma animada e não muito polida controvérsia com os proponentes dos quatérnions sobre os méritos relativos das duas álgebras. Em 1895 um colega de Gibbs em Yale organizou uma Associação Internacional para Promover o Estudo dos Quatérnions e Sistemas Relacionados da Matemática, cujo primeiro presidente era um fervoroso adepto dos quatérnions. Não demorou muito para que sistemas relacionados, como vetores e sua generalização, ten-

[7]E. T. Bell, *The Development of Mathematics* (1940), p. 183. Não há exposição adequada em inglês sobre Grassmann e sua obra, mas um extrato em tradução inglesa de *Ausdehnungslehre* está incluído em *Source Book in Mathematics*, editado por D. E. Smith (1929), pp. 684-685

[8]Veja Kenneth O. May, "The Impossibility of a Division Algebra of Vectors in Three Dimensional Space", *American Mathematical Monthly*, 73 (1966), 289-291

sores, durante algum tempo eclipsassem os quatérnions[9], mas hoje eles têm um lugar garantido na álgebra, bem como na teoria quântica. Ainda mais, embora o nome de Hamilton seja raramente ligado a vetores, pois as notações de Gibbs vinham principalmente de Grassmann, a verdade é que as propriedades principais dos vetores tinham sido estabelecidas durante a longa investigação que Hamilton fez das álgebras múltiplas.

6 Pelos meados do século dezenove os matemáticos alemães estavam de cabeça e ombros acima dos de outras nacionalidades no que se referia à análise e à geometria, com as universidades de Berlim e Göttingen na liderança e com a publicação centrada no *Journal* de Crelle. A álgebra, por outro lado, foi durante algum tempo quase um monopólio britânico, com Trinity College, Cambridge, à frente e o *Cambridge Mathematical Journal* como principal veículo de publicação. Peacock e De Morgan eram ambos de Trinity, como também Cayley, que contribuiu fortemente tanto para a álgebra quanto para a geometria, e que se graduara como *senior wrangler*. Mencionamos a obra de Cayley em geometria analítica, especialmente quanto ao uso de determinantes; mas Cayley foi também um dos primeiros a estudar matrizes, outro exemplo da preocupação britânica com forma e estrutura em álgebra. Essa obra proveio de uma memória de 1858 sobre a teoria das transformações. Se, por exemplo, aplicamos após a transformação

$$T_1\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy, \end{cases}$$

uma outra transformação

$$T_2\begin{cases} x'' = Ax' + By', \\ y'' = Cx' + Dy', \end{cases}$$

o resultado (que aparecera já antes, por exemplo nas *Disquisitiones arithmeticae* de Gauss em 1801) é equivalente à transformação composta

$$T_1T_2\begin{cases} x'' = (Aa + Bc)x + (Ab + Bd)y, \\ y'' = (Ca + Dc)x + (Cb + Dd)y. \end{cases}$$

Se, de outro lado, invertemos a ordem de T_1 e T_2, de modo que T_2 é a transformação

$$\begin{cases} x' = Ax + By, \\ y' = Cx + Dy, \end{cases}$$

e T_1 é a transformação

$$\begin{cases} x'' = ax' + by', \\ y'' = cx' + dy', \end{cases}$$

então essas duas aplicadas sucessivamente equivalem à transformação única

$$T_1T_2\begin{cases} x'' = (aA + bC)x + (aB + bD)y, \\ y'' = (cA + dC)x + (cB + dD)y. \end{cases}$$

A troca da ordem das transformações em geral produz um resultado diferente. Expresso na linguagem das matrizes,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA + bC & aB + bD \\ cA + dC & cB + dD \end{pmatrix},$$

mas

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{pmatrix}.$$

[9]Um livro sobre a história da análise vetorial, por Michael J. Crowe, foi publicado pela University of Notre Dame Press, em 1967. Crowe está também preparando uma tradução da *Ausdehnungslehre* de Grassmann. Há uma introdução histórica em P. H. Moon e D. E. Spencer, *Vectors* (Princeton, N. J., 1965). Veja também G. J. Pawlikowski, "The Men Responsible for the Development of Vectors", *The Mathematics Teacher*, **60** (1967), 393-396

Como duas matrizes são iguais se e somente se todos os elementos correspondentes são iguais, é claro que mais uma vez estamos diante de um exemplo de multiplicação não comutativa.

A definição da multiplicação de matrizes é a indicada acima, e a soma de duas matrizes (de iguais dimensões) é definida como a matriz obtida somando os elementos correspondentes das matrizes. Assim

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + A & b + B \\ c + C & d + D \end{pmatrix}.$$

A multiplicação de uma matriz por um escalar K é definida pela equação

$$K \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ka & Kb \\ Kc & Kd \end{pmatrix}.$$

A matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que é usualmente denotada por I, deixa toda matriz quadrada de segunda ordem invariante por multiplicação; por isso é chamada a matriz identidade para multiplicação. A única matriz que deixa outra matriz invariante por adição é evidentemente a matriz zero

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que é portanto a matriz identidade para a adição. Com essas definições podemos pensar nas operações sobre as matrizes como nas de uma "álgebra", passo que foi dado por Cayley e pelos matemáticos americanos Benjamin Peirce (1809-1880) e seu filho Charles S. Peirce (1839-1914). Os Peirces desempenharam na América algo do papel que Hamilton, Grassmann e Cayley tinham tido na Europa. O estudo da álgebra de matrizes e outras álgebras não comutativas foi em toda parte um dos principais fatores no desenvolvimento de uma visão cada vez mais abstrata da álgebra[10], especialmente no século vinte.

7 Logo depois de graduar-se em Trinity, Cayley dedicou-se ao direito durante quatorze anos; isso quase não interferiu com sua pesquisa matemática, e ele publicou várias centenas de artigos durante esses anos. Muitos dos artigos foram sobre a teoria dos invariantes algébricos, campo em que ele e seu amigo James Joseph Sylvester eram proeminentes. Cayley e Sylvester faziam um contraste total, o primeiro sendo de boa índole e temperamento, o segundo irrequieto e impaciente. Ambos se graduaram em Cambridge — Cayley em Trinity, Sylvester em St. John — mas Sylvester não podia obter um grau por ser judeu. Durante três anos depois de 1838 Sylvester ensinara no University College, em Londres, onde era colega de seu antigo professor, De Morgan; depois disso ele aceitou um posto de professor na University of Virginia. Problemas de disciplina perturbaram tanto o temperamental matemático que ele partiu precipitadamente, depois de três meses apenas. Ao voltar à Inglaterra passou quase dez anos ocupando-se de negócios e depois voltou-se para o estudo de direito, em conexão com o que, em 1850, ele encontrou Cayley pela primeira vez. A partir daí os dois tornaram-se amigos e matemáticos, e finalmente ambos abandonaram as leis. Em 1854 Sylvester aceitou um posto na Royal Military Academy em Woolwich, e em 1863 Cayley aceitou o posto de *"sadlerian professor"* em Cambridge. Em 1876 Sylvester fez mais uma tentativa de ensinar na América do Norte, dessa vez na recém-fundada Johns Hopkins University, onde permaneceu quase até os setenta anos, quando então aceitou um posto de professor na Universidade de Oxford.

[10]Veja, por exemplo, Nicolas Bourbaki, *Éléments d'histoire des mathématiques* (1960), pp. 120-128

Em 1881, quando Sylvester estava ainda na Johns Hopkins, Cayley aceitou um convite para fazer lá uma série de conferências sobre funções abelianas e funções teta. Embora os artigos de Cayley, quase tão numerosos quanto os de Euler ou de Cauchy, tratem predominantemente de álgebra e geometria, ele também contribuiu para a análise e seu único livro, publicado em 1876, é um *Treatise on Elliptic Functions*[11].

Os interesses de Cayley se dispersavam, mas a lealdade de Sylvester à álgebra era firme, e é justo que seu nome esteja ligado ao que se chama o método dialítico de Sylvester para eliminar uma incógnita entre duas equações polinomiais. O artifício é simples e consiste em multiplicar uma ou ambas as equações pela incógnita a ser eliminada, repetindo o processo se necessário até que o número total de equações seja uma unidade maior que o número de potências da incógnita. Dessa coleção de $n + 1$ equações pode-se então eliminar todas as n potências, pensando em cada potência como uma incógnita diferente. Assim, para eliminar x do par de equações $x^2 + ax + b = 0$ e $x^3 + cx^2 + dx + e = 0$ multiplica-se a primeira por x e depois multiplica-se a equação resultante, e também a segunda equação acima, por x. Então, pensando em cada uma das quatro potências de x como numa incógnita diferente, o determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & a & b \\ 0 & 1 & a & b & 0 \\ 1 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & d & e \\ 1 & c & d & e & 0 \end{vmatrix}$$

chamado o resultante no método de Sylvester, quando igualado a zero, dá o resultado da eliminação.

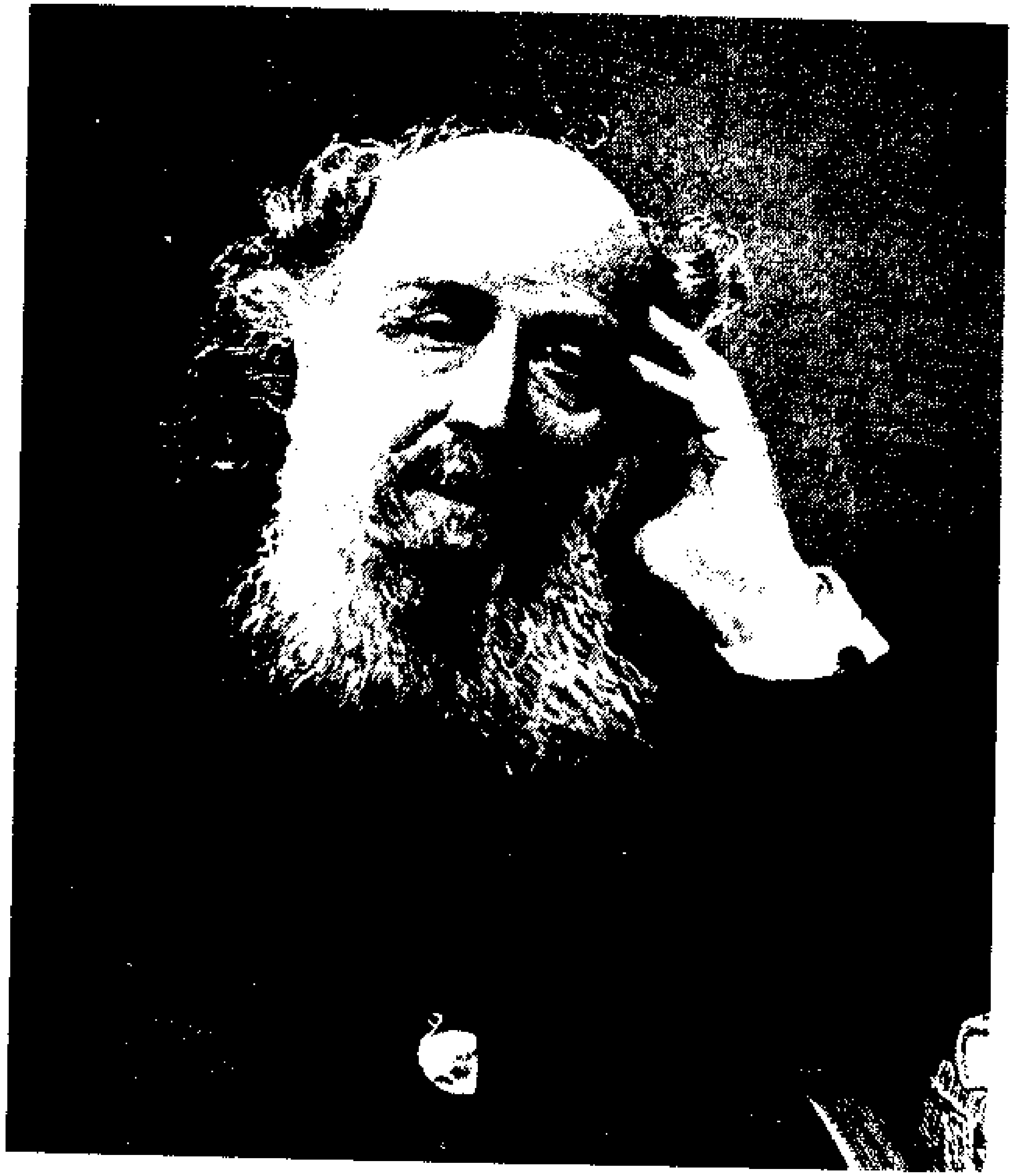
8 Mais importante que sua obra sobre eliminação foi a colaboração de Sylvester com Cayley no desenvolvimento da teoria das "formas" (ou "quânticas", como Cayley preferia chamá-las), através da qual os dois vieram a ser chamados os "gêmeos invariantes". Entre 1854 e 1878 Sylvester publicou quase uma dúzia de artigos sobre formas — polinômios homogêneos em duas ou mais variáveis — e seus invariantes[12]. Os casos mais importantes na geometria analítica e na física são as formas quadráticas em duas e três variáveis, pois, quando igualadas a uma constante, representam cônicas e quádricas. Em particular a forma $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, quando igualada a uma constante não nula, representa uma elipse (real ou imaginária), uma parábola ou uma hipérbole, conforme $B^2 - AC$ seja menor que, igual a ou maior que zero. Além disso, se a forma é transformada por rotação de eixos em torno da origem na nova forma $A'x^2 + 2B'xy + C'y^2$, então $(B')^2 - A'C' = B^2 - AC$ — isto é, a expressão $B^2 - AC$, chamada a característica da forma, é um invariante sob uma tal transformação. A expressão $A + C$ é outro invariante. Outros invariantes importantes associados com a forma são as raízes k_1 e k_2 da equação característica

$$\begin{vmatrix} A-k & B \\ B & C-k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} A'-k & B' \\ B' & C'-k \end{vmatrix} = 0.$$

As raízes, de fato, são os coeficientes de x^2 e y^2 na forma canônica $k_1x^2 + k_2y^2$ a que a forma, se não for de tipo parabólico, pode ser reduzida por uma rotação dos eixos. O efervescente Sylvester se gabava de ter descoberto e desenvolvido a redução de formas

[11]Seus *Collected Mathematical Papers* (1889-1898) formam quatorze volumes grandes

[12]Sumários breves de alguns artigos de Cayley sobre quânticas e outros tópicos estão incluídos em Ganesh Prasad, *Some Great Mathematicians of the Nineteenth Century* (1933-1934), II, 1-33. Veja também R. W. Feldmann, "History of Elementary Matrix Theory", *The Mathematics Teacher*, **55** (1962), 482-484, 589-590, 657-659



James Joseph Sylvester

binárias à forma canônica de uma assentada, "com uma garrafa de vinho do Porto para sustentar as energias naturais debilitadas"[13].

Se designarmos por M a matriz dos coeficientes da forma e por I a matriz identidade de ordem dois, a equação característica pode ser escrita como $|M - kI| = 0$, onde as barras verticais representam o determinante da matriz. Uma das propriedades importantes da álgebra de matrizes é que uma matriz M satisfaz à sua equação característica, resultado dado em 1858 e conhecido como teorema de Hamilton-Cayley. Diz-se às vezes que a álgebra de matrizes de Cayley deriva da álgebra de quatérnions de Hamilton, mas Cayley em 1894 negou especificamente tal ligação. Ele admirava a teoria dos quatérnions, mas afirmava que seu desenvolvimento das matrizes se originava dos determinantes, como modo conveniente de exprimir uma transformação[14].

9 Enquanto que os matemáticos de Trinity, Hamilton e Cayley (um de Dublin, outro de Cambridge), estavam desenvolvendo dois novos tipos de álgebra, uma terceira forma de álgebra, radicalmente diferente, estava sendo inventada por um inglês praticamente

[13]Bell, *Men of Mathematics*, p. 398. No Cap. 21 há uma boa exposição geral das vidas de Sylvester e Cayley. Em Macfarlane, *Ten British Mathematicians*, há um capítulo inteiro sobre cada um

[14]E. T. Bell, *Development of Mathematics*, pp. 188-189

autodidata, George Boole. Nascido de família modesta em Lincoln, Inglaterra, Boole tinha só instrução escolar comum; mas aprendeu grego e latim por si, acreditando que esse conhecimento o ajudaria a melhorar sua condição. Durante seus primeiros anos como professor de escola elementar, Boole percebeu que precisava aprender mais matemática, e começou a estudar as obras de Laplace e Lagrange, além de mais línguas estrangeiras. Tornando-se amigo de De Morgan, interessou-se também vivamente por uma controvérsia sobre lógica que o filósofo escocês Sir William Hamilton (1788-1856), que não deve ser confundido com o matemático irlandês Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), tinha iniciado com De Morgan. (O Sir William escocês era um baronete que herdara seu título, o Sir William irlandês era um *knight* que ganhara seu título.) O resultado foi que Boole em 1847 publicou uma obra curta chamada *The Mathematical Analysis of Logic*, um pequeno livro que De Morgan viu estar destinado a marcar época.

A história da lógica pode ser dividida, com simplificação ligeiramente excessiva, em três estágios: (1) lógica grega, (2) lógica escolástica, e (3) lógica matemática[15]. No primeiro estágio, as fórmulas lógicas consistiam de palavras da linguagem ordinária, sujeitas às regras sintáticas usuais. No segundo estágio, a lógica era tirada da linguagem ordinária mas caracterizada por regras sintáticas diferenciadas e funções semânticas especializadas. No terceiro estágio, a lógica ficou marcada pelo uso de uma linguagem artificial em que palavras e sinais têm funções semânticas muito limitadas. Ao passo que nos dois primeiros estágios teoremas lógicos eram derivados da linguagem ordinária, a lógica do terceiro estágio procede de maneira oposta — primeiro ela constrói um sistema puramente formal, e só depois procura uma interpretação na fala comum. Embora Leibniz seja às vezes considerado um precursor desse último ponto de vista, sua data de florescimento é na verdade o ano em que apareceu o primeiro livro de Boole, bem como a *Formal Logic* de De Morgan. A obra de Boole, em particular, insistia em que a lógica deve ser associada à matemática, não à metafísica, como argüia o escocês Sir William Hamilton.

Mais importante até que sua lógica matemática era a concepção que Boole tinha da própria matemática. Na Introdução a sua *Análise Matemática da Lógica* o autor faz objeções à concepção então corrente da matemática como ciência da grandeza e do número (definição ainda adotada em alguns dicionários inferiores). Defendendo uma visão mais ampla, Boole escrevia:

> Poderíamos com justiça tomar como característica definitiva de um verdadeiro Cálculo, que é um método que se apóia no uso de Símbolos, cujas leis de combinação são conhecidas e gerais, e cujos resultados admitem uma interpretação consistente... É com base nesse princípio geral que eu pretendo estabelecer o Cálculo da Lógica, e que reivindico para ele um lugar entre as formas reconhecidas da Análise Matemática[16].

A *Álgebra* de Peacock de 1830 tinha sugerido que os símbolos para objetos na álgebra não precisam indicar números, e De Morgan argüia que as interpretações dos símbolos para operações eram também arbitrárias; Boole levou o formalismo à sua conclusão. A matemática já não estava limitada a questões de número e grandeza contínua. Aqui pela primeira vez está claramente expressa a idéia de que a característica essencial da matemática é não tanto seu conteúdo quanto sua forma. Se qualquer tópico é apresentado de tal modo que consiste de símbolos e regras precisas de operação sobre esses símbolos, sujeitas apenas à exigência de consistência interna, tal tópico é parte da matemática. Embora a *Mathematical Analysis of Logic* não conseguisse grande fama, foi provavelmente por causa dessa obra que Boole dois anos depois foi nomeado professor de matemática no recém-fundado Queens College, em Cork.

[15]Veja I. M. Bochenski, *Formale Logik* (Amsterdam: North Holland, 1956; tradução para o inglês, 1961).

[16]George Boole, *The Mathematical Analysis of Logic* (1847) pp. 3-4. Há uma reimpressão dessa obra – New York: Philosophical Library, 1948.

Um grande matemático e filósofo do século vinte, Bertrand Russell, afirmou que a maior descoberta do século dezenove foi a natureza da matemática pura. Acrescenta a essa asserção as palavras, "A matemática pura foi descoberta por Boole numa obra que ele chamou *As Leis do Pensamento*." Nessa asserção Russell se refere à obra mais conhecida de Boole, publicada em 1854. Para ser mais preciso seria melhor citar o livro anterior, de 1847, em que as mesmas idéias tinham sido apresentadas.

10 A *Investigation of the Laws of Thought* de 1854 de Boole é um clássico na história da matemática, pois ampliou e esclareceu as idéias apresentadas em 1847, estabelecendo ao mesmo tempo a lógica formal e uma nova álgebra, chamada álgebra de Boole, ou álgebra dos conjuntos, ou álgebra da lógica. Boole usou as letras $x, y, z, \ldots$ para representar subconjuntos de coisas — números, pontos, idéias, ou outras entidades — escolhidas de um conjunto universal ou universo de discurso, cuja totalidade ele designava pelo símbolo ou "número" 1. Por exemplo, se o símbolo 1 representa todos os europeus, x poderia representar todos os europeus que são cidadãos franceses, y poderia representar todos os homens europeus de mais de vinte e um anos, e z todos os europeus cuja altura está entre 1,50 m e 1,80 m. O símbolo ou número 0 Boole tomou para indicar o conjunto vazio, que não contém nenhum elemento do conjunto universal — o que agora se chama conjunto nulo. O sinal + entre duas letras ou símbolos, como $x + y$, ele tomou como sendo a união dos subconjuntos x e y — isto é, o conjunto formado de todos os elementos em x ou y (ou ambos). O sinal de multiplicação × representava a intersecção de conjuntos, de modo que $x \times y$ significa os elementos ou objetos que estão no subconjunto x e também no subconjunto y. No exemplo acima $x + y$ consiste de todos os europeus que são cidadãos franceses ou são homens de mais de vinte e um anos, ou ambos; $x \times y$ (escrito também como $x \cdot y$ ou simplesmente xy) é o conjunto de todos os cidadãos franceses que são homens de mais de vinte e um anos. (Boole, ao contrário de De Morgan, usava união exclusiva, não admitindo elementos comuns em x e y, mas a álgebra booleana moderna, mais convenientemente, toma + como sendo a união inclusiva de conjuntos que podem ter elementos comuns.) O sinal = representa a relação de identidade. É claro que as cinco leis fundamentais da álgebra valem para essa álgebra booleana, pois $x + y = y + x$, $xy = yx$, $x + (y + z) = (x + y) + z$, $x(yz) = (xy)z$ e $x(y + z) = xy + xz$. No entanto, nem todas as regras da álgebra ordinária continuam válidas. Por exemplo, $1 + 1 = 1$ e $x \cdot x = x$. (A segunda dessas aparece na obra de Boole, mas não a primeira, já que ele usava união exclusiva.) A equação $x^2 = x$ tem somente duas raízes, na álgebra ordinária, $x = 0$ e $x = 1$; quando escrita na forma $x(1 - x) = 0$ ela sugere que $1 - x$ deve designar o complemento do subconjunto x — isto é, todos os elementos do conjunto universal que não estão no subconjunto x. Embora seja verdade na álgebra booleana que $x^3 = x$ ou $x(1 - x^2) = 0$ ou $x(1 - x)(1 + x) = 0$, a solução na álgebra ordinária difere da da álgebra booleana em que não há números negativos. A álgebra de Boole difere da álgebra ordinária também pelo fato de $zx = zy$ (onde z não é o conjunto nulo) não implicar $x = y$; nem é necessariamente verdade que se $xy = 0$, então x ou y deve ser 0.

Boole mostrou que sua álgebra fornecia um algoritmo simples para raciocínios silogísticos. A equação $xy = x$, por exemplo, diz muito claramente que todos os xs são ys. Se também é dado que todos os ys são zs, então $yz = y$. Substituindo na primeira equação o valor de y dado na segunda o resultado é $x(yz) = x$. Usando a lei associativa da multiplicação, a última equação pode ser escrita como $(xy)z = x$, e substituindo xy por x temos $xz = x$, que é simplesmente a maneira simbólica de dizer que todos os xs são zs.

A *Mathematical Analysis of Logic* (1847) e, a fortiori, *The Laws of Thought* (1854) contêm muito mais sobre a álgebra de conjuntos do que indicamos. Em particular, a segunda obra inclui aplicações a probabilidades. Hoje a álgebra booleana é largamente usada não só por matemáticos puros mas também por outros que a aplicam a problemas de seguros e de teoria da informação. As notações mudaram um pouco desde os dias de Boole, de modo que a união e a intersecção são geralmente denotadas por $\cup$ e $\cap$, em vez de + e ×, e o símbolo para o conjunto vazio é ϕ em vez de 0; mas os princípios fundamentais são os estabelecidos por Boole há mais de um século.

Há um aspecto da obra de Boole que não se relaciona de perto com seus tratados sobre lógica e teoria dos conjuntos, mas que é familiar a todo estudante de equações diferenciais. É o algoritmo dos operadores diferenciais, que ele introduziu para facilitar o tratamento das equações diferenciais lineares. Se, por exemplo, queremos resolver a equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$, a equação é escrita na notação $(aD^2 + bD + c)y = 0$. Então, considerando D como uma incógnita, em vez de operador, resolvemos a equação quadrática algébrica $aD^2 + bD + c = 0$. Se as raízes da equação algébrica são p e q, então e^{px} e e^{qx} são soluções da equação diferencial e $Ae^{px} + Be^{qx}$ é a solução geral da equação diferencial. Há muitas outras situações em que Boole, em seu *Tratado sobre Equações Diferenciais* de 1859 assinalou analogias entre as propriedades do operador diferencial (e seu inverso) e as regras da álgebra. Os matemáticos ingleses da segunda metade do século dezenove estavam novamente voltando a liderar na análise algorítmica, campo em que cinqüenta anos antes estavam muito deficientes.

Boole morreu em 1864, só dez anos depois de publicar suas *Laws of Thought*, mas o reconhecimento, inclusive um grau honorário da Universidade de Dublin, tinha-lhe vindo antes de sua morte[17]. É curioso notar que Cantor, que como Boole foi um dos principais abridores de trilhas novas do século, foi um dos poucos a não aceitar a obra de Boole.

11 Entre os que continuaram a obra de Boole após sua morte estavam De Morgan e Benjamin Peirce. Esses descobriram independentemente a chamada lei de dualidade de De Morgan — para toda proposição envolvendo adição e multiplicação lógicas, existe uma proposição correspondente em que as palavras adição e multiplicação são permutadas. Em particular temos a chamada fórmula de De Morgan: Se x e y são subconjuntos de um conjunto S, então o complementar da união de x e y é a intersecção dos complementares de x e y, e o complementar da intersecção de x e y é a reunião dos complementares de x e y.

Benjamin Peirce esteve ligado a Harvard College por mais de cinqüenta anos, primeiro como estudante, depois como professor. Sua obra principal foi seu artigo sobre *Álgebra linear associativa*, lido para a American Association for the Advancement of Science em 1864, mas publicado somente em 1881 no *American Journal of Mathematics*. As álgebras lineares associativas incluem a álgebra ordinária, a análise vetorial e os quatérnions como casos especiais, mas não estão restritas às unidades l, i, j, k. Peirce construiu tabelas de multiplicação para 162 álgebras, o que estava bem longe da idéia que prevalecia no começo do século, de que existia somente uma álgebra! C. S. Peirce continuou a obra de seu pai nessa direção mostrando que de todas essas álgebras somente três têm divisão univocamente definida: a álgebra ordinária real, a álgebra dos números complexos, e a álgebra dos quatérnions. Foi em conexão com sua obra sobre álgebra linear associativa que Benjamin Peirce em 1870 deu a definição bem conhecida. "A matemática é a ciência que tira conclusões necessárias". Seu filho concordava plenamente com essa idéia, devido à influência de Boole, mas frisava que a matemática e a lógica não são a mesma coisa. "A matemática é puramente hipotética: só produz proposições condicionais. A lógica, ao contrário, é categórica em suas asserções"[18]. Essa distinção seria discutida pelo mundo matemático durante a primeira metade do século vinte.

[17]Não há biografia completa de Boole. Para mais detalhes ver Macfarlane, *Ten British Mathematicians*, pp. 50-63, Bell, *Men of Mathematics*, Cap. 23, ou artigo a aparecer sobre Boole de T. A. A. Broadbent em *Dictionary of Scientific Biography* (a ser publicado por Charles Scribner's Sons, New York). Uma exposição bem feita da álgebra de Boole está incluída também em Herbert Meschkowski, *Ways of Thought of Great Mathematicians* (1964), pp. 74-83. Veja também o artigo sobre "Logic, History of", na *Encyclopedia of Philosophy*, ed. por Paul Edwards (8 volumes, New York: Macmillan, 1967), IV, 513-571

[18]Para excertos curtos da obra tanto de Benjamin como de C. S. Peirce, veja *The Treasury of Mathematics*, editado por Henrietta O. Midonick (1965), pp. 610-642. Cf. *Studies in the Philosophy of Charles Sanders Peirce* (2.ª série, Amherst, Mass.: University of Massachusetts Press, 1964)

Charles Sanders Peirce

Na Inglaterra idéias um tanto semelhantes eram apresentadas por William Kingdon Clifford (1845-1879), outro graduado de Trinity, cuja obra brilhante, como a de um graduado de Trinity mais antigo, Roger Cotes, foi bruscamente cortada por morte prematura aos trinta e quatro anos. Clifford era extraordinário em muitos aspectos. Por exemplo, era um ginasta capaz de se suspender na barra com qualquer das mãos — feito incomum para qualquer pessoa, e especialmente para um matemático. Além disso, teve prêmios de declamação, algo quase nunca visto em alguém que se graduou como segundo *wrangler*. Também, como o matemático de Oxford C. L. Dogson (1832-1898), mais conhecido como Lewis Carroll, autor de *Alice no País das Maravilhas*, ele compôs *Little People*, coleção de histórias infantis. Em 1870 Clifford escreveu um artigo "On the Space-Theory of Matter" em que apoiou fortemente a geometria não-euclidiana de Lobachevsky e Riemann[19]. Na álgebra Clifford também apoiou as idéias novas, e

[19]Veja Bell, *Men of Mathematics*, pp. 503-504, e D. J. Struik, *Concise History of Mathematics* (1967), pp. 171-173

seu nome está perpetuado nas álgebras de Clifford, de que octônions ou biquatérnions são casos particulares. Essas álgebras não comutativas foram usadas por Clifford para estudar movimentos em espaços não-euclidianos, dos quais certas variedades são chamadas espaços de Clifford e Klein[20]. Como a progressista matemática inglesa da segunda metade do século dezenove diferia do mediocrizante conservadorismo do começo do século!

12 A multiplicidade de álgebras inventadas no século dezenove poderia ter dado à matemática uma tendência centrífuga se não tivessem sido desenvolvidos certos conceitos estruturais. Um dos mais importantes desses foi a noção de grupo, cujo papel unificador na geometria já foi indicado. Na álgebra o conceito de grupo foi sem dúvida a força mais importante para a coesão, e foi um fator essencial no surgimento das idéias abstratas. Não houve uma pessoa responsável pelo surgimento da idéia de grupo, mas a figura que mais se sobressai nesse contexto foi o homem que deu o nome a esse conceito, o jovem Évariste Galois, morto tragicamente antes de completar vinte e um anos.

Galois nasceu nas proximidades de Paris, na aldeia de Bourg-la-Reine, onde seu pai era prefeito. Seus pais, bastante cultos, não tinham mostrado particular aptidão pela matemática, porém deles o jovem Galois adquiriu seu ódio implacável pela tirania. Quando entrou na escola aos doze anos mostrou pouco interesse pelo latim, grego ou álgebra, mas ficou fascinado pela *Geometria* de Legendre. Mais tarde ele leu e compreendeu obras de álgebra e análise de mestres como Lagrange e Abel, mas seus trabalhos escolares de rotina permaneciam medíocres e seus professores o consideravam excêntrico. Aos dezesseis anos Galois sabia o que seus professores não tinham percebido — que era um gênio matemático. Esperava, por isso, entrar na escola que tinha produzido tantos matemáticos célebres, a École Polytechnique, mas foi recusado devido à sua falta de preparo sistemático. Foi o primeiro fracasso amargo. Mesmo assim, aos dezessete anos Galois expôs suas descobertas fundamentais num artigo, que ele pediu a Cauchy que apresentasse à Académie. Cauchy não se limitou a esquecer o artigo, como fizera com um dos artigos importantes de Abel, ele perdeu o artigo! Agora Galois odiava não só os examinadores como também os acadêmicos. Um fracasso na sua segunda tentativa de entrar na Polytechnique aumentou sua amargura; mas o choque mais pesado ainda estava para vir. Atacado por causa de intrigas clericais, seu pai sentiu-se perseguido e suicidou-se.

Apesar dos golpes que sofrera Galois entrou na École Normale a fim de preparar-se para ensinar; também continuou sua pesquisa, e em 1830 submeteu uma memória num concurso para o prêmio de matemática da Académie. Fourier, o secretário da Académie, levou o artigo para casa, morreu logo depois, e o artigo se perdeu. Enfrentando de todos os lados tirania e frustações, Galois aderiu à causa da revolução de 1830. Uma carta candente criticando a indecisão do diretor da École Normale resultou na expulsão de Galois; mas mais uma vez ele tentou submeter um artigo à Académie, dessa vez através de Poisson. O artigo continha resultados importantes que agora são parte do que se chama teoria de Galois; mas Poisson, o assessor, devolveu-o com a observação de que era "incompreensível". Completamente desiludido, Galois entrou para a Guarda Nacional. Em 1831, numa reunião de republicanos, propôs um brinde que foi interpretado como ameaça à vida de Louis Philippe, e foi preso. Embora solto logo, foi preso de novo poucos meses depois e condenado a seis meses de prisão. Pouco depois envolveu-se com uma mulher e por causa dela, em nome de um código de "honra", não pode evitar um duelo. Numa carta para amigos ele escreveu, "Fui desafiado por dois patriotas — era impossível recusar". Na noite anterior ao duelo, com pressentimentos de morte, Galois passou as horas rascunhando, numa carta a um amigo, notas para a posteridade sobre suas descobertas[21]. Pediu que a carta fosse publicada (o que foi feito no mesmo ano) na *Revue Encyclopedique* e exprimiu a esperança de que Jacobi e Gauss pudessem dar publicamente sua opinião sobre a importância dos teoremas. Na manhã de 30 de maio de 1832 Galois encontrou seu adversário num duelo com pistolas. Recebeu um tiro nos intestinos e ficou caído no lugar até que um camponês que passava o levou a um hospital onde morreu de peritonite na manhã seguinte. A seu funeral compareceram milhares de republicanos[22]. Tinha apenas vinte anos então, o mais jovem matemático que jamais fez descobertas tão significativas.

[20]Uma exposição sobre a vida de Clifford se encontra em Macfarlane *Ten British Mathematicians*, pp. 78-91, mas os julgamentos ali expressos sobre a obra de Clifford não são bem fundamentados. Veja também Clifford, *Mathematical Papers* (Londres, 1882)

13 Galois confiara ao destinatário de sua última carta alguns manuscritos para a Académie e em 1846 Liouville editou alguns desses e publicou-os em seu *Journal*. Liouville achara a tarefa difícil, pois Galois não seguira o conselho de Descartes, "Quando se discute uma questão transcendente, deve-se ser transcendentemente claro". Mas Liouville sentiu-se recompensado quando, depois de preencher as lacunas na prova, percebeu o método pelo qual Galois provara esse belo teorema:

> Para que uma equação irredutível de grau primo possa ser resolvida por radicais é necessário e suficiente que todas as suas raízes sejam funções racionais de duas quaisquer dentre elas.

O objetivo principal das pesquisas de Galois tinha sido o de determinar quando as equações polinomiais são resolúveis por radicais. Gauss, em seus critérios para construtibilidade de polígonos regulares, em essência tinha resolvido a questão da solubilidade da equação $a_0X^n + a_n = 0$ em termos de operações racionais e raízes quadradas dos coeficientes. Galois generalizou o resultado fornecendo critérios para a resolubilidade de $a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n = 0$ em termos de operações racionais e raízes n-ésimas dos coeficientes. Seu método de ataque do problema, hoje chamado teoria de Galois é como alho, no sentido que não há algo como um pouco dele. É preciso fazer um estudo substancial para apreciar o raciocínio — como as experiências de Galois com seus contemporâneos mostraram. No entanto podemos indicar de modo geral o que está atrás da teoria de Galois e por que ela é importante.

Galois começou suas investigações com um trabalho de Lagrange sobre as permutações das raízes de uma equação polinomial. Toda mudança no arranjo ordenado de n objetos chama-se uma permutação desses objetos. Se por exemplo a ordem das letras a, b, c é mudada para c, a, b essa permutação é escrita sucintamente (acb), notação em que cada letra é levada na letra imediatamente seguinte, entendendo-se que a primeira letra sucede à última. Assim a letra a foi levada em c, c por sua vez em b e b foi em a. A notação (ac) ou (ac,b), no entanto, significa que a vai em c, c vai em a e b vai em si mesmo. Se duas permutações são efetuadas sucessivamente, a permutação resultante chama-se o produto das duas transformações de permutação. Assim o produto de (acb) e (ac, b), escrito como $(acb)(ac, b)$ é a permutação (a, bc). A permutação idêntica I leva cada letra em si mesma — isto é, deixa a ordem a, b, c inalterada. O conjunto de todas as permutações sobre as letras a, b, c claramente satisfaz à definição de grupo dada no Cap. 24 sobre a geometria; esse grupo, contendo seis permutações, é chamado grupo simétrico sobre a, b, c. No caso de n elementos distintos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o grupo simétrico sobre eles contém $n!$ transformações. Se esses elementos são as raízes de uma equação irredutível, as propriedades do grupo simétrico fornecem condições necessárias e suficientes para que a equação seja resolúvel por radicais.

Inspirado pela prova de Abel da irresolubilidade por radicais da equação quíntica, Galois descobriu que uma equação algébrica irredutível é resolúvel por radicais se e só se seu grupo — isto é, o grupo de permutações sobre suas raízes — é resolúvel. A descrição de um grupo resolúvel é bastante complicada, envolvendo relações entre o grupo

[21]A carta aparece traduzida para o inglês em *Source Book in Mathematics*, editado por D. E. Smith, pp. 278-285

[22]Ver George Sarton, "Évariste Galois", *Osiris*, 3 (1937), 241-259

e seus subgrupos. As três permutações (abc), $(abc)^2$ e $(abc)^3 = I$ formam um subgrupo do grupo simétrico sobre a, b, c. Lagrange já tinha mostrado que a ordem de um subgrupo deve ser um divisor da ordem do grupo; mas Galois foi além e achou relações entre a fatorabilidade do grupo de uma equação e a solubilidade da equação. Além disso, a ele devemos o uso em 1830 da palavra "grupo" em seu sentido técnico em matemática[23].

A teoria de Galois fornece um algoritmo para achar de fato as raízes de uma equação quando essas podem ser expressas por radicais; mas a ênfase no método de Galois na teoria das equações geralmente se volta mais para a estrutura algébrica do que para o tratamento de casos específicos. Embora sua obra fosse anterior à da maior parte dos algebristas ingleses do grande período de 1830-1850 suas idéias não tiveram influência até sua publicação em 1846. A álgebra então estava tornando-se tão geral e abstrata que métodos heurísticos para encontrar raízes eram subordinados a questões lógicas referentes a teoremas de existência. Galois estava tão perto da atitude moderna e no entanto era tão inarticulado que não conseguiu fazer-se compreender pelos professores em seu tempo. Hoje fala-se muito nas escolas secundárias em "Matemática Moderna", mas ela só é moderna no sentido que as idéias de Galois finalmente estão chegando a todos, mais de um século depois que o destino o tratou tão mal.

14 A obra de Galois foi importante não só por tornar a noção abstrata de grupo fundamental na teoria das equações, mas também por levar, através das contribuições de Dedekind, Kronecker e Kummer, ao que se pode chamar tratamento aritmético da álgebra, algo parecido com a aritmetização da análise. Isso não significa uma volta à concepção medieval e renascentista da álgebra como um algoritmo para achar um número desconhecido. Significa o desenvolvimento de um cuidadoso tratamento postulacional da estrutura algébrica em termos de vários corpos de números. O conceito de corpo estava implícito na obra de Abel e Galois, mas Dedekind, em 1879, parece ter sido o primeiro a dar uma definição explícita de corpo numérico — uma coleção de números que formam um grupo abeliano com relação à adição e (com a exceção do inverso do zero) com relação à multiplicação, e no qual a multiplicação é distributiva com relação à adição. Exemplos simples são a coleção dos números racionais, o sistema dos números reais, e o corpo complexo. Kronecker em 1881 deu outros exemplos com seus domínios de racionalidade. O conjunto dos números da forma $a + b\sqrt{2}$, onde a e b são racionais, forma um corpo, como se verifica facilmente. Nesse caso o número de elementos do corpo é infinito. Um corpo com um número finito de elementos chama-se um corpo de Galois, e um exemplo simples é o corpo dos inteiros módulo 5 (ou qualquer primo).

A preocupação com estrutura e o surgimento de novas álgebras, especialmente durante a segunda metade do século dezenove, levaram a amplas generalizações quanto a número e aritmética. Já vimos que Gauss estendeu a idéia de inteiro como o estudo dos inteiros gaussianos da forma $a + bi$, onde a e b são inteiros. Dedekind generalizou ainda mais com a teoria dos "inteiros algébricos" — números que satisfazem a equações polinomiais com coeficientes inteiros e primeiro coeficiente igual a um. Tais sistemas de "inteiros", é claro, não formam um corpo, pois faltam os inversos para a multiplicação. Têm algo em comum no fato de satisfazerem às demais exigências para um corpo; dizemos que formam um "domínio de integridade". Tais generalizações da palavra *inteiro* têm porém um preço — perde-se a fatoração única. Por isso Dedekind e um matemático

[23]Veja suas *Oeuvres*, editado por F. Picard (1897), p. 28. Para detalhes sobre a teoria de Galois e solubilidade de equações veja Emile Artin, *Galois Theory* (Notre Dame Mathematical Lectures, n.º 2, Notre Dame, Ind., 1959); ou veja um volume sobre álgebra moderna, como Garrett Birkhoff e Saunders MacLane, *Survey of Modern Algebra* (New York: Macmillan, 1941), ou L. E. Dickson, *Modern Algebraic Theories* (Chicago: B. H. Sanborn, 1926). Uma explicação muito concisa encontra-se em E. T. Bell, *The Development of Mathematics*, pp. 218-220. Cf. Garrett Birkhoff, "Galois and Group Theory", *Osiris*, 3 (1937), 260-268

seu contemporâneo, Ernst Eduard Kummer (1810-1893) introduziram na aritmética o conceito de "ideal", baseado na noção de "anel".

Dizemos que um conjunto de elementos forma um anel se (1) é um grupo abeliano com relação à adição, (2) o conjunto é fechado com relação à multiplicação e (3) a multiplicação é associativa e é distributiva com relação à adição. (Assim um anel que seja comutativo para a multiplicação, tenha elemento unidade, e não tenha divisores do zero, é um domínio de integridade.) Um ideal, então, é um subconjunto I de elementos de um anel R que (1) é um grupo aditivo e (2) tem a propriedade que sempre que x pertence a R e y pertence a I, xy pertence a I. O conjunto dos inteiros pares, por exemplo, é um ideal do anel dos inteiros. Verifica-se que no anel (ou domínio de integridade) R dos inteiros algébricos, todo ideal I de R pode ser representado de modo único (exceto quanto à ordem dos fatores) como um produto de ideais primos. Isto é, a unicidade de fatoração pode ser preservada com a teoria dos ideais[24].

Kummer perdeu o pai aos três anos, mas sua mãe cuidou de que seu filho estudasse na Universidade de Halle, onde se doutorou aos vinte e um anos. Após cerca de doze anos de ensino em ginásios, ele sucedeu a Dirichlet em Berlim quando esse em 1855 tornou-se o sucessor de Gauss em Göttingen; Kummer permaneceu lá até aposentar-se em 1883. Logo depois de seu doutoramento Kummer começara a interessar-se pelo último teorema de Fermat, para o qual Cauchy uma vez erradamente pensara ter uma prova. Kummer conseguiu provar o teorema para uma grande classe de expoentes, mas uma prova geral ele não conseguiu. A pedra no caminho parece ter estado no fato de que na fatoração de $x^n + y^n$, através da resolução de $x^n + y^n = 0$ para x em termos de y, os inteiros algébricos, ou raízes da equação, não satisfazem necessariamente ao teorema fundamental da aritmética — isto é, não têm fatoração única. O resultado foi que, embora não conseguisse provar o teorema de Fermat na tentativa de fazê-lo ele criou num certo sentido uma nova aritmética — a teoria dos ideais que ele descobriu em 1846, muitos anos antes de desenvolvimentos semelhantes por Dedekind. Uma das lições que a história da matemática ensina claramente é que a busca de soluções para problemas não resolvidos, sejam eles resolúveis ou não, leva invariavelmente a descobertas importantes pelo caminho.

15 A matemática tem sido freqüentemente comparada a uma árvore, pois cresce numa estrutura acima da terra que se espalha e ramifica sempre mais, ao passo que ao mesmo tempo suas raízes cada vez mais se aprofundam e alargam, em busca de fundamentos sólidos. Esse duplo crescimento foi especialmente característico do desenvolvimento da análise no século dezenove, pois a rápida expansão da teoria das funções fora acompanhada pela rigorosa aritmetização do campo, desde Bolzano até Weierstrass. Na álgebra o século dezenove fora mais notável por desenvolvimentos novos que por atenção aos fundamentos, e os esforços de Peacock para construir uma base sólida eram fracos se comparados com a precisão de Bolzano na análise. Durante os últimos anos do século, porém, houve vários esforços para fornecer raízes mais sólidas para a álgebra. O sistema dos números complexos é definido em termos dos números reais, que são exibidos como classes de números racionais, que por sua vez são pares ordenados de inteiros; mas o que são afinal os inteiros? Todos pensam saber, por exemplo, o que é o número três — até tentarem defini-lo ou explicá-lo — e a idéia da igualdade de inteiros é tomada como óbvia. Não satisfeito com a idéia de deixar os conceitos básicos da aritmética, e portanto da álgebra, em estado tão vago, o lógico e matemático alemão F. L. G. Frege (1848-1925) foi levado a sua bem conhecida definição de número cardinal. A base para suas idéias veio da teoria dos conjuntos de Boole e Cantor. Lembremos que Cantor considerara que dois conjuntos infinitos têm a mesma "potência" se os elementos dos conjuntos podem ser postos em correspondência biunívoca. Frege viu que essa

[24]Para uma boa introdução à teoria dos ideais, veja N. H. McCoy, *Rings and Ideals* (Carus Mathematical Monographs, N.º 8, The Mathematical Association of America, 1948)

idéia de correspondência de elementos é básica também na noção de igualdade de inteiros. Dois conjuntos finitos têm o mesmo número cardinal se os elementos de cada um podem ser postos em correspondência biunívoca com os do outro. Se, então, começarmos com um conjunto inicial, como o conjunto dos dedos de uma mão humana normal, e formarmos o conjunto muito maior de todos os conjuntos cujos elementos podem ser postos em correspondência biunívoca com os elementos do conjunto original, então esse conjunto de todos tais conjuntos constituiria um número cardinal, nesse caso o número cinco. Mais geralmente, a definição de Frege do número cardinal de uma dada classe, finita ou infinita, é a classe de todas as classes que são semelhantes à classe dada (onde por "semelhante" entende-se que os elementos das duas classes em questão podem ser postos em correspondência biunívoca).

A definição de Frege de número cardinal (emendada mais tarde para evitar paradoxos) apareceu em 1884 num livro bem conhecido, *Die Grundlagen der Arithmetik* (Os fundamentos da aritmética), e da definição ele derivou as propriedades dos números inteiros que são familiares na aritmética de escola elementar. Nos anos subseqüentes Frege ampliou suas idéias em *Grundgesetze der Arithmetik* (Leis básicas da aritmética) em dois volumes, o primeiro volume aparecendo em 1893 e o segundo dez anos depois. Aqui o autor se propôs derivar os conceitos da aritmética dos da lógica formal, pois discordava da asserção de C. S. Peirce de que a matemática e a lógica são claramente distintas. Frege estudara nas Universidades de Jena e Göttingen, e ensinou em Jena durante uma longa carreira. No entanto seu programa não encontrou muito eco até ser atacado independentemente no começo do século vinte por Bertrand Russell, quando se tornou um dos principais objetivos dos matemáticos[25]. Frege ficou agudamente decepcionado com a fraca receptividade a seu livro, mas a culpa em parte está na forma excessivamente nova e filosófica em que seus resultados estavam expressos. A história mostra que as idéias novas são mais facilmente aceitas se apresentadas em forma relativamente convencional.

16 A Itália tinha tomado parte um tanto menos ativa no desenvolvimento da álgebra abstrata que a França, a Alemanha e a Inglaterra, mas durante os últimos anos do século dezenove houve matemáticos italianos que se interessaram profundamente pela lógica matemática. O mais conhecido desses foi Giuseppe Peano (1858-1932) cujo nome é lembrado hoje em conexão com os axiomas de Peano dos quais dependem tantas construções rigorosas da álgebra e da análise. Seu objetivo era semelhante ao de Frege, mas era ao mesmo tempo mais ambicioso e mais terra-a-terra[26]. Esperava, em seu "Formulaire de mathématiques" (1894 e seguintes) desenvolver uma linguagem formalizada que contivesse não só a lógica matemática como todos os ramos mais importantes da matemática. Que esse programa atraísse um grande círculo de colaboradores e discípulos resultou em parte do fato de ele evitar a linguagem metafísica e de sua feliz escolha de símbolos — tais como ε (pertence à classe de), $\cup$ (soma lógica ou união), $\cap$ (produto lógico ou intersecção) e $\supset$ (contém) — muitos deles usados até hoje. Para seus fundamentos da aritmética ele escolheu três conceitos primitivos (zero, número, isto é, inteiros não-negativos, e a relação "é sucessor de") satisfazendo aos cinco postulados seguintes.

1. Zero é um número.
2. Se a é um número, o sucessor de a é um número.

[25]Há uma tradução para o inglês de *The Foundations of Arithmetic* por J. L. Austin, 2.ª edição (New York: Philosophical Library, 1953). Parte dessa tradução está incluída em *The Treasury of Mathematics*, editado por Henrietta O. Midonick. Há também uma versão em inglês das partes introdutórias do Vol. I e do Epílogo ao Vol. II de *Leis Básicas da Aritmética*, de Montgomery Furth (Berkeley: University of California Press, 1964)

[26]Nicolas Bourbakì, *Eléments d'histoire des mathématiques* (1960), p. 20

3. Zero não é o sucessor de um número.
4. Dois números cujos sucessores são iguais são eles próprios iguais.
5. Se um conjunto S de números contém o zero e também o sucessor de todo número de S, então todo número está em S.

A última exigência, é claro, é o axioma de indução. Os axiomas de Peano, formulados pela primeira vez em 1889 na *Arithmetices principia nova methodo exposita*, representam a mais notável tentativa do século de reduzir a aritmética comum, portanto no fim a maior parte da matemática, a puro simbolismo formal. (Ele exprimia os postulados em símbolos, em vez das palavras que usamos.) Aqui o método postulacional atingiu novo nível de precisão, sem ambigüidade de sentido e sem hipóteses ocultas. Peano também despendeu muito esforço no desenvolvimento da lógica simbólica, um tema favorito no século vinte.

Mais uma contribuição de Peano deve talvez ser mencionada, pois representou uma das descobertas inquietantes do tempo. O século dezenove se iniciou com a descoberta de que curvas e funções não precisam ser do tipo bem comportado que até então dominara o campo, e Peano em 1890 mostrou até que ponto a matemática podia insultar o senso comum quando construiu curvas contínuas que enchem o espaço — isto é, curvas dadas por equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, onde f e g são funções reais contínuas no intervalo $0 \leq t \leq 1$, cujos pontos preenchem completamente o quadrado unitário $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Esse paradoxo, é claro, combina perfeitamente com a descoberta de Cantor de que não há mais pontos no quadrado unitário que no segmento de reta unitário[27], e foi um dos fatores que levaram o século seguinte a dedicar muito mais atenção à estrutura básica da matemática. O próprio Peano, porém, em 1903 se distraiu com a invenção da linguagem internacional que ele chamou "Interlíngua" ou "Latino sine flexione", com vocabulário tirado do latim, francês, inglês e alemão. Esse movimento porém foi muito mais efêmero que sua estrutura axiomática da aritmética.

Em retrospecto podemos admirar o século dezenove como um período de incomparável realização, em geometria, análise e álgebra. Em extensão, imaginação, rigor, abstração e generalidade nenhum século anterior podia comparar-se com ele. No entanto, apesar do rápido avanço e das formulações definitivas, havia pouca impressão de que os desenvolvimentos matemáticos iriam tornar-se mais lentos. O pessimismo *fin de siècle* que Lagrange exprimira no fim do século dezoito estava conspicuamente ausente no fim do século dezenove. A Era Vitoriana exalava apenas otimismo, no que se refere à matemática. No capítulo final indicaremos alguns dos aspectos em que essa espectativa otimista foi amplamente realizada — mas não antes que sérias desconfianças tivessem abalado a serenidade dos matemáticos durante os primeiros anos do novo século. Paradoxo se sucederia a paradoxo até que o século vinte veio a parecer mais um período de dúvidas que um de grandes expectativas. Felizmente o princípio de desafio e resposta parece ter funcionado: nas realizações matemáticas já registradas, esse século lidera facilmente todos os outros.

BIBLIOGRAFIA

Ball, W. W. R., *A History of the Study of Mathematics at Cambridge* (Cambridge: Cambridge University Press, 1889)

Bell, E. T., *Men of Mathematics* (New York: Simon and Schuster, 1937)

Bell, E. T., *The Development of Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1940)

Bochenski, I. M., *Formale Logik* (Amsterdam, traduzido para o inglês em: North Holland, 1956, 1961)

[27]Uma descrição da curva de Peano bem como de seus axiomas se encontra em Ettore Carruccio, *Mathematics and Logic in History and in Contemporary Thought*, traduzido para o inglês por Isabel Quigly (1964), pp. 306-308. Esse livro inclui referências também a outros aspectos da obra de Peano

Boole, George, *The Laws of Thought*, reimpresso como Vol. II em seu *Collected Logical Works* (Chicago: Open Court, 1916)
Boole, George, *The Mathematical Analysis of Logic* (Cambridge: Macmillan, 1847; reimpresso, New York: Philosophical Library, 1948)
Boole, George, *Studies in Logic and Probability* (Londres: Waters, 1952)
Boole, George, *Treatise on Differential Equations* (Londres: Macmillan, 1859)
Bourbaki, Nicolas, *Éléments d'histoire des mathématiques* (Paris: Hermann, 1960)
Carruccio, Ettore, *Mathematics and Logic in History and in Contemporary Thought*, trad. por Isabel Quigly (Chicago: Aldine, 1964)
Cayley, Arthur, *Collected Mathematical Papers* (Cambridge, 1889-1898, 14 volumes)
Crowe, Michael J., *A History of Vector Analysis* (University of Notre Dame Press, 1967)
De Morgan, Sophia Elizabeth, *Memoir of A. D. M. by his Wife Sophia Elizabeth De Morgan, with Selections from His Letters* (Londres, 1882)
Feldmann, R. W., "History of Elementary Matrix Theory," *The Mathematics Teacher*, 55 (1962), 482-484, 589-590, 657-659
Galois, Évariste, *Oeuvres*, editado por E. Picard (Paris, 1897)
Graves, R. P., *Life of Sir William Rowan Hamilton* (Dublin: Hodges, Figgis, 1882, 3 volumes)
Klein, Felix, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (Berlin: Springer, 1926-1927, 2 volumes)
MacDuffee, C. C., "Algebra's Debt to Hamilton," *Scripta Mathematica*, 10 (1944), 25-36
Macfarlane, Alexander, *Lectures on Ten British Mathematicians of the Nineteenth Century* (New York: Wiley, 1916)
Meschkowski, Herbert, *Ways of Thought of Great Mathematicians* (San Francisco: Holden-Day, 1964)
Midonick, Henrietta O., ed., *The Treasury of Mathematics* (New York: Philosophical Library, 1965)
Peacock, George, *Treatise on Algebra* (1840-1845, 2 volumes; reimpresso, New York: Scripta Mathematica, 1940)
Prasad, Ganesh, *Some Great Mathematicians of the Nineteenth Century* (Benares: Benares Mathematical Society, 1933-1934, 2 volumes)
Prior, A. N., ed., "Logic, History of," *The Encyclopedia of Philosophy* (New York: Macmillan, 1967, 8 volumes), IV, 513-571
Sarton, George, "Évariste Galois," *Osiris*, 3 (1937), 241-259
Smith, D. E., ed., *Source Book in Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1929; reimpresso, New York: Dover, 1959)
Struik, D. J., *Concise History of Mathematics*, 3.ª edição (New York: brochura Dover, 1967)

EXERCÍCIOS

1. A Inglaterra no século dezenove era forte na álgebra, ao passo que no século dezoito dera preferência à geometria sintética. Explique como certos fatores podem justificar isso, citando exemplos específicos.

2. A álgebra no século dezenove contribuiu com idéias mais notavelmente novas que a análise e a geometria? Dê exemplos específicos em apoio a sua resposta.

3. À medida que a álgebra tornava-se mais abstrata, os meios de sustento para os matemáticos mudaram substancialmente? Descreva os meios de sustento de algumas figuras principais.

4. Bertrand Russell afirmava que foi o século dezenove que descobriu a natureza da matemática pura. Explique o que ele tinha em mente ao fazer tal asserção.

5. Até que ponto as carreiras de Hamilton e Boole foram semelhantes, e em que suas vidas e contribuições diferiram?

6. Cayley e Sylvester são às vezes chamados os "gêmeos invariantes". Explique por que e indique em que pontos eles estavam longe de serem gêmeos.

7. A álgebra do século dezenove dá apoio à idéia comum de que a maior parte das grandes descobertas matemáticas são feitas por jovens? Cite exemplos para justificar sua resposta.

8. Durante o século dezenove muitos grandes matemáticos estudaram e ensinaram em Trinity College, Cambridge, onde Newton estudara e ensinara. Mencione alguns desses, indicando seus papéis em Cambridge e suas contribuições à matemática.

9. Explique em que sentido a álgebra dos números complexos é uma "álgebra dupla". Por que De Morgan combinou-a com elementos de trigonometria?

10. De Morgan, nascido no século dezenove, propôs o seguinte enigma relativo a sua idade: Eu tinha x anos no ano x^2. Resolva o enigma.

11. Se A é a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

e B é a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

vale $AB = BA$?

12. Mostre que para um polinômio quadrático em x e y a soma dos coeficientes dos termos em x^2 e y^2 permanece invariante sob uma rotação dos eixos em torno da origem.

13. Mostre por meio de diagramas que a fórmula de De Morgan para conjuntos é válida.

14. Se A é a permutação (abc) e B é a permutação (cba), o produto AB é igual ao produto BA? Explique.

15. Mostre que o inteiro de Gauss $1 + i$ não tem inverso para a multiplicação, portanto que os inteiros de Gauss $a + bi$ não formam um corpo.

16. Usando o conceito de Hamilton de número complexo $x + yi$ como simplesmente o par de números reais (x, y), escreva o quociente de $(a, b) \div (\alpha, \beta)$ como par de números reais.

17. Da fórmula de Hamilton para quatérnions $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, usando a lei associativa para multiplicação, mostre que $ij = ji$, $ik = -ki$, e $jk = -kj$.

18. Usando o método dos operadores de Boole resolva a equação diferencial $y'' + 3y' + 2y = 0$.

*19. Mostre que o conjunto de todas as permutações sobre as letras a, b, c forma um grupo. É um grupo abeliano? Abel conhecia esse grupo? Explique.

*20. Mostre que o conjunto dos inteiros módulo 5 forma um corpo.

*21. Mostre que para o corpo dos inteiros módulo 5 todo valor de x satisfaz $x^5 = x$.

*22. Mostre que os números da forma $a + b\sqrt{2}$, onde a e b são racionais, formam um corpo.

*23. Prove que a relação $B^2 - AC$ entre os coeficientes da cônica $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ é invariante sob rotação dos eixos. Use esse resultado para provar que a cônica é uma elipse, uma parábola, ou uma hipérbole conforme $B^2 - AC$ seja menor que, igual a, ou maior que zero.

Capítulo **27**

Aspectos do século vinte

A idade áurea da matemática — não foi a de Euclides, é a nossa.

C. J. Keyser

1 Uma das contribuições definitivas do século dezenove foi o reconhecimento de que a matemática não é uma ciência natural, mas uma criação intelectual do homem. Bertrand Russell escreveu no *International Monthly* em 1901:

> O século dezenove, que se orgulha da invenção do vapor e da evolução, poderia derivar um título mais legítimo à fama da descoberta da matemática pura.

T. H. Huxley (1825-1895), "o *bull-dog* de Darwin" na defesa da evolução, notara que "A matemática é aquele assunto que nada sabe da observação, nada da indução, nada da causalidade". Em outra ocasião, quando criticara Kelvin por ter, ao que pensava, subestimado a idade da Terra, Huxley fez o comentário bem conhecido:

> A matemática pode ser comparada a um moinho magnificamente bem feito que mói farinha tão fina quanto se deseja; mas o que você recebe depende do que você põe lá; e assim como o melhor moinho do mundo não pode tirar farinha de trigo de grãos de ervilha, também páginas de fórmulas não tirarão um resultado definido de dados imprecisos.

Isto é, pelo fim do século era geralmente reconhecido mesmo por não-matemáticos que a matemática é pensamento postulacional, em que de premissas arbitrárias são tiradas conclusões válidas. Que os postulados sejam ou não verdadeiros num sentido científico é indiferente; na verdade, as próprias palavras em que os postulados são expressos são termos não-definidos. Isso levou Bertrand Russell à sua descrição da matemática, em 1901, como o assunto em que ninguém sabe do que está falando, nem se o que está dizendo é verdade. Dois anos depois, no início de seus *Principles of Mathematics*, Russell formulou uma definição precisa da matemática:

> A matemática pura é a classe de todas as proposições da forma "p implica q", onde p e q são proposições contendo uma ou mais variáveis, as mesmas nas duas proposições e nem p nem q contêm constantes exceto constantes lógicas[1].

Essa definição enfatiza que é a estrutura lógica a característica essencial da matemática e não os enunciados categóricos que possa conter referentes ao mundo dos sentidos. Russell, em resumo, pretendia igualar matemática e lógica, mas nisso não houve acordo universal entre os matemáticos. Sylvester discordara fortemente de Huxley, argumentando que a matemática se origina

> ... diretamente das forças e atividades inerentes da mente humana, e da introspecção continuamente renovada daquele mundo interior do pensamento em que os fenômenos são tão variados e exigem atenção tão grande quanto os do mundo físico exterior.

Sylvester, em outras palavras, se inclinava ao que agora se chama a visão intuicionista da matemática, pois considerava que o objetivo da matemática pura era "revelar as leis da inteligência humana", assim como a física revela as leis do mundo dos sentidos[2].

[1] Veja Bertrand Russell, *Principles of Mathematics* (reimpresso, New York: Norton, 1938), p. 3. Veja também pp. VI e seguintes

[2] *Collected Mathematical Papers*, editado por H. F. Baker (Cambridge: Cambridge University Press, 1904-1912, 4 volumes), III, 424

Nisso ele representava uma rejeição das tendências formalizantes de Boole, Dedekind e Peano. Kronecker poderia talvez ser colocado no campo de Sylvester, apesar da aritmetização que representava, pois considerava os inteiros como tendo um sentido dado por Deus.

Mais claramente intuicionista era um matemático que pode ser considerado como uma das duas principais figuras de transição entre o século dezenove e o século vinte — Henri Poincaré (1854-1912), homem a quem Sylvester na velhice admirava como jovem prolífico.

2 Quando Gauss morreu em 1855 pensava-se em geral que nunca mais existiria um universalista em matemática — alguém que estivesse igualmente à vontade em todos os ramos, puros e aplicados. Se alguém a partir daí provou que essa idéia estava errada, esse alguém foi Poincaré, pois ele considerou toda a matemática como seu domínio.

Em muitos pontos, porém, Poincaré diferia fundamentalmente de Gauss. Gauss fora calculista prodígio que em toda sua vida nunca hesitou perante cálculos complicados, ao passo que Poincaré não foi especialmente precoce em demonstrar aptidão matemática e reconhecia que tinha dificuldades com cálculos aritméticos simples. O caso de Poincaré mostra que para ser um grande matemático não é necessário ter facilidade com números; há outros aspectos mais relevantes do talento matemático inato. Também, enquanto que Gauss escreveu relativamente pouco, polindo suas obras, Poincaré escrevia apressadamente e extensamente, publicando mais memórias por ano que qualquer outro matemático. Além disso, Poincaré, especialmente em seus últimos anos, escreveu livros populares de sabor filosófico, algo que não atraíra Gauss. De outro lado, são numerosas e fundamentais as semelhanças entre Poincaré e Gauss. Ambos eram tão férteis em idéias que era difícil para eles rascunhar suas idéias em papel, ambos tinham forte preferência por teoremas gerais em vez de casos específicos, e ambos contribuíram para uma grande variedade de ramos da ciência.

Poincaré nasceu em Nancy[3], cidade que iria abrigar bom número de grandes matemáticos no século vinte. A família conquistou proeminência de várias maneiras; seu primo Raymond foi presidente da França durante a Primeira Grande Guerra. Henri era desageitadamente ambidestro, e sua ineptitude em exercícios físicos era lendária. Tinha vista fraca e era muito distraído, mas, como Euler e Gauss, tinha notável capacidade para exercícios mentais em todos os aspectos do pensamento matemático. Após graduar-se na École Polytechnique em 1875 ele obteve um diploma em engenharia de minas, em 1879, e ficou ligado ao Departamento de Minas pelo resto de sua vida. Em 1879 ele obteve também um doutorado em ciência na Universidade de Paris, onde, até sua morte em 1912, ele teve vários postos de professor de matemática e ciência.

A tese de doutoramento de Poincaré fora sobre equações diferenciais (não métodos de resolução, mas teoremas de existência), que levaram a uma de suas mais célebres contribuições à matematica — as propriedades das funções automorfas; na verdade, ele foi virtualmente o fundador da teoria dessas funções. Uma função automorfa $f(z)$ da variável complexa z é uma função que é analítica, excetuados pólos, num domínio D e que é invariante sob um grupo infinito enumerável de transformações lineares fracionárias

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Tais funções são generalizações das funções trigonométricas — como vemos se $a = 1 = d$, $c = 0$, e b é da forma $2k\pi$ — e das funções elíticas. Hermite estudara tais transformações no caso especial em que os coeficientes a, b, c e d são inteiros para os quais $ad - bc = 1$ e tinha descoberto uma classe de funções modulares elíticas invariantes

[3] Para uma bibliografia de fontes sobre a vida e a obra de Poincaré, veja George Sarton, *The Study of the History of Mathematics* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1936), pp. 93-94. O Cap. 28, apropriadamente intitulado "The Last Universalist", em E. T. Bell, *Men of Mathematics* (New York: Simon and Schuster, 1937), fornece um vivo relato sobre a vida e a obra de Poincaré

por essas transformações. Mas as generalizações de Poincaré revelaram uma categoria mais ampla de funções, conhecidas como zeta-fuchsianas, que, conforme Poincaré mostrou, podiam ser usadas para resolver a equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes algébricos.

3 Poincaré não se demorava em campo algum o tempo suficiente para dar um fecho a sua obra; um contemporâneo disse dele, "Ele era um conquistador, não um colonizador". No seu ensino na Sorbonne ele lecionava sobre um tópico diferente em cada ano escolar — capilaridade, elasticidade, termodinâmica, óptica, eletricidade, telegrafia, cosmogonia e outros; a apresentação era tal que em muitos casos as aulas apareciam impressas, pouco depois de serem dadas. Só em astronomia ele publicou meia dúzia de volumes — *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (3 volumes, 1892-1899) e *Leçons de mécanique céleste* (3 volumes, 1905-1910) — sendo nisso um digno sucessor de Laplace. Especialmente importantes foram os métodos que ele usou para atacar o problema dos três corpos e suas generalizações. Também significativa para a cosmogonia foi uma memória de 1885 em que ele mostrou que uma forma de pera pode ser uma figura de equilíbrio relativo assumido por um fluido homogêneo sujeito a gravitação newtoniana e girando uniformemente em torno de um eixo, e a questão de uma terra em forma de pera continuou a interessar os geodesistas até nossos dias. Sir George H. Darwin (1845-1912), filho de Charles Darwin (1809-1882), escreveu em 1909 que a mecânica celeste de Poincaré seria uma vasta mina para pesquisadores ainda por meio século.

É interessante que Poincaré, como Laplace, escreveu extensamente sobre probabilidades. Em certos aspectos sua obra é apenas uma continuação natural da de Laplace e das dos analistas do século dezenove; mas Poincaré tinha duas faces como Janus e até certo ponto antecipava o grande interesse pela topologia que seria tão característico do século seguinte. A topologia não foi invenção de um homem. Alguns problemas topológicos encontram-se na obra de Euler, Möbius e Cantor e mesmo a palavra "topologia" fora usada em 1847 por J. B. Listing (1808-1882) no título de um livro, *Vorstudien zur Topologie* (Estudos introdutórios em topologia); mas como data para o início do assunto a mais apropriada é 1895, o ano em que Poincaré publicou sua *Analysis situs*. Esse livro pela primeira vez forneceu um desenvolvimento sistemático.

A topologia é agora um ramo amplo e fundamental da matemática, com muitos aspectos; mas pode ser dividida em dois sub-ramos bastante diferentes — a topologia combinatória e a topologia dos conjuntos de pontos. Poincaré tinha pouco entusiasmo pela última, e quando em 1908 ele falou no Congresso Internacional de Matemática em Roma, ele se referiu ao *Mengenlehre* de Cantor como uma doença de que gerações posteriores se considerariam curadas[4]. A topologia combinatória, ou *analysis situs* como era então chamada em geral, é o estudo de aspectos qualitativos intrínsecos das configurações espaciais que permanecem invariantes por transformações biunívocas contínuas com inversa contínua. Freqüentemente é chamada popularmente "geometria de borracha", pois deformações de um balão, por exemplo, sem furá-lo ou rasgá-lo, são exemplos de transformações topológicas. Um círculo, por exemplo, é topologicamente equivalente a uma elipse; a dimensão de um espaço é um invariante topológico, como também o número de Descartes-Euler $N_0 - N_1 + N_2$ para poliedros simples. Entre as contribuições originais de Poincaré à topologia está uma generalização da fórmula poliedral de Descartes-Euler para espaços de dimensão superior, usando o que ele chamou "números de Betti" em honra de Enrico Betti (1823-1892), que ensinara na Universidade de Pisa e observara algumas das propriedades desses invariantes topológicos.

A maior parte da topologia, porém, lida com aspectos qualitativos e não quantitativos da matemática, e nisso é típica de uma ruptura com o estilo prevalente na análise do século dezenove. A atenção de Poincaré parece ter sido atraída para a *analysis situs* por tentativas de integração qualitativa de equações diferenciais. Poincaré, como Riemann, era especialmente hábil no tratar problemas de natureza topológica, como o de achar as propriedades de uma função sem se preocupar com sua representação formal no sentido clássico, pois eles eram intuicionistas de julgamento sólido. Se o interesse de Poincaré pela topologia tivesse se mantido ele poderia ter antecipado mais desse ramo da matemática, um dos mais favorecidos e fecundos campos de pesquisa no século vinte. Sua mente inquieta, porém, estava ocupada com tudo o que estava acontecendo na física e na matemática da passagem do século, desde as ondas hertzianas e raios X à teoria quântica e teoria da relatividade.

[4]As atas publicadas de tais congressos internacionais encontram-se em muitas bibliotecas e podem ser consultadas, com grande proveito quanto ao desenvolvimento da matemática no século vinte

Como exemplo da variedade de interesses de Poincaré, é a ele que devemos um sugestivo modelo da geometria de Lobachevsky dentro de uma moldura euclidiana[5]. Suponhamos que o mundo é limitado por uma grande esfera de raio R e que a temperatura absoluta num ponto dentro da esfera é $R^2 - r^2$, onde r é a distância ao centro da esfera; suponhamos também que o indice de refração do meio translúcido é inversamente proporcional a $R^2 - r^2$. Além disso, suponhamos que as dimensões dos objetos variam de ponto para ponto, sendo proporcionais à temperatura em qualquer ponto dado. Aos habitantes de um tal mundo o universo pareceria infinito; e os raios de luz ou "retas" não seriam retilineos, mas círculos ortogonais à esfera de fronteira e pareceriam infinitos. Os "planos" seriam esferas ortogonais à esfera de fronteira e dois tais "planos" não-euclidianos se cortariam numa "reta" não-euclidiana. Os axiomas de Euclides valeriam, com exceção do postulado das paralelas.

4 Poincaré morreu no auge de sua capacidade, aos cinqüenta e oito anos, tendo escrito mais que qualquer outro matemático de nosso século[6]. Klein comparou-o a Cauchy em versatilidade, e muitos o consideraram o primeiro matemático de seus dias. Seu maior rival, David Hilbert (1862-1943) vinha da Alemanha e era de temperamento e idéias notavelmente diferentes. Aqui temos outra figura de transição entre os séculos dezenove e vinte; mas enquanto que Poincaré parece talvez pertencer mais ao século anterior, Hilbert claramente está mais no seu elemento no posterior, em vista de sua ênfase em estrutura. Hilbert, como Immanuel Kant (1724-1804) nascera em Königsberg na Prússia Oriental, mas ao contrário de Kant ele viajou largamente, especialmente para assistir a congressos internacionais de matemáticos que se tornaram tão característicos deste século. O primeiro congresso matemático formal realizou-se em Zürich em 1893, o segundo em Paris em 1900, e a partir daí se tem realizado mais ou menos regularmente cada quatro anos, sendo o Décimoquinto Congresso Internacional realizado em 1966 em Moscou.

No Congresso de Paris de 1900, Hilbert, renomado professor em Göttingen, apresentou uma exposição em que tentou, com base nas tendências da pesquisa matemática no fim do glorioso século dezenove, predizer a direção de progressos futuros. Isso ele fez propondo vinte e três problemas que ele acreditava estariam ou deveriam estar entre os que ocupariam a atenção dos matemáticos no século vinte. "Se quisermos ter uma idéia do desenvolvimento provável do conhecimento matemático no futuro imediato", ele disse, "devemos fazer passar por nossas mentes as questões não-resolvidas e olhar os problemas que a ciência de hoje coloca e cujas soluções esperamos do futuro"[7].

Embora discordasse da idéia de que só os conceitos da aritmética são suscetíveis de tratamento completamente rigoroso, ele reconhecia que o desenvolvimento do *continuum* aritmético por Cauchy, Bolzano e Cantor era um dos dois mais notáveis sucessos do século — o outro sendo a geometria não-euclidiana de Gauss, Bolyai e Lobachevsky — e assim o primeiro dos vinte e três problemas dizia respeito à estrutura do *continuum* dos números reais. A questão consta de duas partes: (1) se existe um

[5]Para essa e outras contribuições de Poincaré veja o "Éloge historique d'Henri Poincaré" por Gaston Darboux em *Oeuvres Henri Poincaré* (1916-1956), Vol. II (1952), VII-LXXI. Veja também Vito Volterra e outros, *Henri Poincaré: l'oeuvre scientifique, l'oeuvre philosophique* (1914)

[6]Veja Ernest Lebon, *Henri Poincaré, bibliographie analytique des écrits* (1909)

[7]Veja a tradução por Mary Winston Newson de "Mathematical Problems" de Hilbert em *Bulletin of the American Mathematical Society* (2), 8 (1902), 437-479. O original em alemão apareceu no *Göttingen Nachrichten* de 1900, pp. 253-297, e em *Archiv der Mathematik und Physik*, (3), 1 (1901), 44-63, 213-237

número transfinito entre o de um conjunto enumerável e o número do *continuum*; e (2) o *continuum* numérico pode ser considerado um conjunto bem ordenado? A segunda parte pergunta se a totalidade dos números reais pode ser disposta de outro modo de forma que toda coleção parcial tenha um primeiro elemento. Isso se relaciona de perto com o axioma da escolha que leva o nome do matemático alemão Ernst Zermelo (1871-1956) que o formulou em 1904. O axioma de Zermelo afirma que, dado qualquer conjunto de conjuntos mutuamente disjuntos não-vazios, existe pelo menos um conjunto que contém um e um só elemento em comum com cada um dos conjuntos não-vazios[*]. Como ilustração de um problema envolvendo o axioma de Zermelo, consideremos o conjunto de todos os números reais n tais que $0 \leq n \leq 1$; chamemos dois desses números reais de equivalentes se sua diferença é racional. Existem evidentemente infinitas classes de equivalência de números reais. Se formarmos um conjunto S de um número de cada uma dessas classes, S é enumerável ou não-enumerável? O axioma da escolha, indispensável em análise, Kurt Gödel (1906-   ) em 1940 provou ser consistente com outros axiomas da teoria dos conjuntos; mas em 1963 foi provado por Paul Cohen (1934-   ) que o axioma da escolha é independente dos outros axiomas num certo sistema de teoria dos conjuntos, mostrando assim que o axioma não pode ser provado dentro desse sistema[9]. Isso parece excluir uma solução definida para o primeiro problema de Hilbert.

5 O segundo problema de Hilbert, também sugerido pela idade do rigor no século dezenove, perguntava se é possível provar que os axiomas da aritmética são consistentes — que um número finito de passos lógicos baseados neles nunca pode levar a resultados contraditórios. Uma década depois apareceu o primeiro volume de *Principia mathematica* (3 volumes, 1910-1913), de Bertrand Russell e Alfred North Whitehead (1861-1947), a mais elaborada tentativa feita até então de desenvolver as noções fundamentais da aritmética a partir de um conjunto preciso de axiomas. Essa obra, na tradição de Leibniz, Boole e Frege, e baseada nos axiomas de Peano, desenvolvia em todos os detalhes um programa que se destinava a provar que toda a matemática pura pode ser obtida a partir de um pequeno número de princípios lógicos fundamentais. Isso justificaria a idéia de Russell, expressa antes, de que a matemática é indistinguível da lógica. Mas o sistema de Russell e Whitehead, não inteiramente formalizado, parece ter encontrado mais aprovação entre lógicos do que entre matemáticos. Além disso, os *Principia* deixavam sem resposta a segunda pergunta de Hilbert. Esforços para resolver esse problema levaram em 1931 a uma surpreendente conclusão por parte de um jovem matemático austríaco, Kurt Gödel, que emigrara para os Estados Unidos e se tornara membro do Institute for Advanced Study em Princeton. Gödel mostrou que dentro de um sistema rigidamente lógico como o que Russell e Whitehead tinham desenvolvido para a aritmética, podem ser formuladas proposições que são indecidíveis ou indemonstráveis dentro dos axiomas do sistema. Isto é, dentro do sistema existem certos enunciados precisos que não podem ser provados ou negados[10]. Portanto não se pode, usando os métodos usuais, ter certeza de que os axiomas da aritmética não levarão a contradições.

Num certo sentido o teorema de Gödel, às vezes considerado o resultado mais decisivo da lógica matemática, parece resolver negativamente a segunda pergunta de Hilbert.

[*] Veja Herman Rubin e Jean E. Rubin, *Equivalents of the Axiom of Choice* (Amsterdam: North-Holland, 1963)

[9] Veja P. J. Cohen, "The Independence of the Continuum Hypothesis", *Proceedings of the National Academy of Science*, 50 (1963), 1 143-1 148; 51 (1964), 105-110

[10] Kurt Gödel, "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme", *Monatshefte der Mathematik und Physik*, **38** (1931), 173-198; ou veja sua *Consistency of the Axiom of Choice and the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory* (Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1940, edição revista em 1951). Inúmeros esforços têm sido feitos para explicar a prova de Gödel em linguagem apropriada para o não-especialista. Veja em particular Ernest Nagel e J. R. Newman, "Gödel's Proof", *The World of Mathematics* (New York: Simon e Schuster, 1956, 4 volumes), III, 1668-1695

Em suas implicações a descoberta por Gödel de proposições indecidíveis é tão perturbadora quanto a revelação por Hipasus da existência de grandezas incomensuráveis, pois parece eliminar a esperança de certeza matemática pelo uso dos métodos óbvios. Talvez também, como resultado, esteja condenado o ideal da ciência — inventar uma coleção de axiomas dos quais todos os fenômenos do mundo natural possam ser deduzidos. No entanto, os matemáticos e os cientistas aceitaram igualmente o golpe sem maior preocupação e continuaram a acumular teorema sobre teorema em quantidade maior que nunca. Certamente nenhum estudioso hoje repetiria a asserção de Babbage em 1813 de que "A idade áurea da literatura matemática certamente passou".

Os problemas levantados pelo teorema de Gödel foram atacados de fora da própria aritmética através de um novo aspecto da lógica matemática que surgiu pelo meio do século vinte e chamado metamatemática. Essa não se preocupa com o simbolismo e operações da aritmética, mas com a interpretação desses sinais e regras. Se a aritmética não pode sair do areal da possível inconsistência, talvez a metamatemática, estando fora da dificuldade, possa salvar o dia por outros meios — tais como indução transfinita. Alguns matemáticos esperariam ao menos um meio de determinar, para cada proposição matemática, se ela é verdadeira, falsa ou indecidível. De qualquer forma, mesmo a resposta desencorajadoramente negativa ao segundo problema de Hilbert estimulou assim, em vez de reduzi-la, a criatividade matemática.

6 As quatro perguntas seguintes na lista de Hilbert são um tanto mais técnicas e abstrusas que as duas primeiras, mas a sete e a oito dizem respeito a noções familiares. No problema sete pergunta-se se o número α^{β}, onde α é algébrico (e não zero ou um) e β é irracional e algébrico, é transcendente. Em forma geométrica, Hilbert exprimia isso perguntando se em um triângulo isósceles a razão da base para um lado é transcendente se a razão do ângulo no vértice para os ângulos na base é algébrica e irracional.

Essa questão foi resolvida em 1934 por Aleksander Osipovich Gelfond (1906-   ) que provou que a conjetura de Hilbert, agora conhecida como teorema de Gelfond, era correta — α^{β} é transcendente se α é algébrico e não é zero nem 1, e se β é algébrico e não-racional. No entanto, na matemática a resposta a uma pergunta apenas faz surgir outras, e os matemáticos ainda não sabem responder a uma questão como a de saber se α^{β} é ou não transcendente se α e β são transcendentes. Não se sabe, por exemplo, se e^{e} ou π^{π} ou π^{e} ou a constante de Euler γ são transcendentes. Sabe-se porém que e^{π} é transcendente, pois $e^{\pi} = 1/e^{-\pi} = 1/i^{2i}$, e i^{2i} é transcendente pelo teorema de Gelfond[11].

A pergunta oito de Hilbert simplesmente renovava o apelo, familiar no século dezenove, para a obtenção de uma prova da conjetura de Riemann de que os zeros da função zeta, excetuados os zeros inteiros negativos, têm todos a parte real igual a um meio. Uma prova disso, ele pensava, poderia levar a uma prova da familiar conjetura sobre a infinidade de pares de primos; mas nenhuma prova foi dada ainda, embora mais de um século tenha-se passado desde que Riemann arriscou o palpite.

Não podemos tratar dos outros problemas postos por Hilbert — problemas de topologia, equações diferenciais, cálculo de variações, e outros campos — exceto para dizer que aproximadamente a metade deles ainda não foi resolvida[12] e que, naturalmente, a matemática se desenvolveu também em muitas direções não previstas em 1900. Devemos observar ainda que a primeira metade do século vinte não diferiu de períodos anteriores na história da matemática ao menos num ponto — cada problema antigo que era resolvido legava à posteridade vários problemas novos. Como Hilbert disse ao propor seus problemas, "Enquanto um ramo da ciência oferece uma abundância de problemas, ele está vivo"; ele terminou com palavras de encorajamento perante o crescimento pra-

[11] Veja Einar Hille, "Gelfond's Solution of Hilbert's Seventh Problem", *American Mathematical Monthly*, **49** (1942), 654-661. Cf. A. O. Gelfond, *Transcendental and Algebraic Numbers*, traduzido por Leo F. Boron (New York: Dover, 1960)

[12] Para o status dos problemas depois de trinta anos, veja L. Bieberbach, "Über den Einfluss von Hilberts Pariser Vortrag über 'Mathematische Probleme' auf die Entwicklung der Mathematik in den letzten dreissig Jahren", *Naturwissenschaften*, **18** (1936), 1 101-1 111

ticamente exponencial da matemática, observando que à medida que o assunto se expande os instrumentos ficam mais aguçados e os métodos mais simples, por isso o campo pode ser dominado apesar de sua extensão.

7 Hilbert legou à matemática muito mais que uma coleção de problemas. Em 1899, um ano antes de sua conferência em Paris, ele havia publicado um volume pequeno mas famoso chamado *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos da geometria). Essa obra, traduzida nas línguas principais[13], exerceu forte influência sobre a matemática do século vinte. Com a aritmetização da análise e os axiomas de Peano, a maior parte da matemática, exceto a geometria, conseguira base estritamente axiomática. A geometria no século dezenove florescera como nunca antes, mas foi principalmente nos *Grundlagen* de Hilbert que um esforço foi feito para pela primeira vez para dar-lhe o caráter puramente formal que tinham a álgebra e a análise. *Os elementos* de Euclides tinham uma estrutura dedutiva, certamente, mas estavam cheios de hipóteses ocultas, definições sem sentido e falhas lógicas. Hilbert percebeu que nem todos os termos em matemática podem ser definidos e por isso começou seu tratamento da geometria com três objetos não definidos — ponto, reta e plano — e seis relações não definidas — estar sobre, estar em, estar entre, ser congruente, ser paralelo e ser contínuo. Em lugar dos cinco axiomas (ou noções comuns) de Euclides e cinco postulados, Hilbert formulou para sua geometria uma coleção de vinte e um postulados, conhecidos como axiomas de Hilbert. Oito deles se referem à incidência e incluem o primeiro postulado de Euclides, quatro são sobre propriedades de ordem, cinco sobre congruência, três sobre continuidade (propriedades não mencionadas explicitamente por Euclides) e uma é um postulado de paralelas essencialmente equivalente ao quinto postulado de Euclides[14]. Em seguida à obra pioneira de Hilbert outras coleções de axiomas foram propostas por outros; e o caráter puramente dedutivo e formal da geometria, como dos outros ramos da matemática, ficou completamente estabelecido desde o começo do século vinte.

8 Hilbert, através de seus *Grundlagen*, tornou-se o principal representante de uma "escola axiomática" que foi influente na formação das atitudes contemporâneas na matemática e no ensino da matemática[15]. Os *Grundlagen* iniciavam com uma frase de Kant: "Todo conhecimento humano começa com intuições, passa a conceitos e termina com idéias", mas o desenvolvimento dado por Hilbert à geometria estabelecia uma visão do assunto decididamente antikantiana. Dava ênfase a que não se devem assumir, para os termos não definidos na geometria, propriedades além das indicadas nos axiomas. O nivel intuitivo-empirico das antigas concepções geométricas deve ser abandonado e pontos, retas e planos devem ser entendidos apenas como elementos de certos conjuntos dados.

A teoria dos conjuntos, tendo dominado a álgebra e a análise agora invadia a geometria. Semelhantemente, as relações não definidas devem ser tratadas como abstrações indicando nada mais que uma correspondência ou aplicação. Através da geometria analítica o tratamento formal da geometria fora associado à axiomatização da álgebra, e o resultado final da associação foi um grau de abstração que excedia tudo do século dezenove. Peano em 1888 tinha em essência definido um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais; mas no que veio a chamar-se espaço de Hilbert[16] as idéias de Hamilton, Grassmann e Peano são generalizadas ainda mais. Os elementos não são os pontos de Euclides, mas seqüências infinitas de números complexos $x_1, x_2, \ldots,$ para

[13]Uma tradução para o inglês por E. J. Townsend, *The Foundations of Geometry*, foi publicado por Open Court, LaSalle, Ill., em 1902. Uma oitava edição alemã apareceu em 1956

[14]Uma lista dos postulados pode ser encontrada em Ralph G. Stanton e Kenneth D. Fryer, *Topics in Modern Mathematics* (Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1964), pp. 167-170, bem como nas várias edições dos *Fundamentos* de Hilbert

[15]Veja, por exemplo, Rolf Nevanlinna, "Reform in Teaching Mathematics", *The Mathematical Monthly*, 73 (1966), 451-464

[16]Veja P. R. Halmos, *Introduction to Hilbert Space* (New York: Chelsea, 1951) ou S. K. Berberian, *Introduction to Hilbert Space* (New York: Oxford, 1961)

as quais a série $x_1^2 + x_2^2 + \cdots$ converge. Esse é um caso especial de espaço vetorial, formas mais gerais do qual foram introduzidas mais tarde por Stefan Banach (1892-1945) e outros. Um espaço vetorial é uma coleção de elementos chamados vetores, sujeitos às regras usuais de combinação de vetores e escalares. Espaços vetoriais de tipos variados são determinados conforme restrições impostas aos elementos. O espaço de Hilbert, por exemplo, é um espaço vetorial cujos elementos têm uma infinidade de componentes, sujeitas à condição de que $(x_1^2 + x_2^2 + \cdots)$ seja finita. Os espaços de Hilbert, apesar do extraordinário grau de abstração que representam, encontraram aplicação na teoria quântica. Os espaços de Banach são espaços vetoriais ainda mais abstratos em que os elementos não precisam ser definidos em relação ao corpo complexo. Em linguagem técnica, um espaço de Banach é um espaço vetorial normado, completo na métrica definida pela norma; um espaço de Hilbert é um espaço de Banach cuja norma $\|x\|$ tem a propriedade do paralelogramo $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$. Banach era a luz mais forte numa grande "Escola polonesa" que floresceu entre as duas Grandes Guerras, nas Universidades de Lwow e Varsóvia. Banach ensinava em Lwow, e o chefe do grupo de Varsóvia era Waclaw Sierpinski (1882-), que deu contribuições a teoria dos números, topologia e teoria dos conjuntos, e fundou em 1920 a *Fundamenta Mathematicae*, um dos melhores periódicos de matemática do mundo. Sierpinski foi um professor notavelmente bem sucedido e muitos de seus discípulos conquistaram reputação na matemática norteamericana quando o círculo polonês foi dispersado e Sierpinski deportado pelos alemães[17]. Com o fim da guerra Sierpinski voltou à destruída Varsóvia e a publicação de *Fundamenta* recomeçou; mas Banach morrera pouco depois do fim das hostilidades[18].

Hilbert se interessava por todos os aspectos da matemática pura e seu nome está ligado a uma curva simples que enche um espaço e é mais fácil de descrever que a semelhante dada por Peano. A curva de Hilbert é gerada continuando indefinidamente o processo indicado na Fig. 27.1. Começando com um quadrado unitário, nós o subdividimos em quatro partes quadradas como mostra a figura e depois ligamos em ordem os quatro pontos centrais. Cada uma dessas quatro partes é por sua vez subdividida em quatro partes, cujos centros são ligados do modo indicado, sempre começando no quadrado inferior à esquerda e terminando no inferior direito. É claro que a curva limite desse processo passará por todos os pontos do quadrado; incidentalmente esse é outro exemplo de curva contínua que não é diferenciável em nenhum ponto. O século dezenove observara alguns dos casos patológicos que podem surgir na álgebra, análise e geometria, mas foi no século vinte que anomalias e paradoxos surgiram de todos os lados. Entre outras esquisitices estava uma curva contínua fechada exibida em 1904 por Helge von

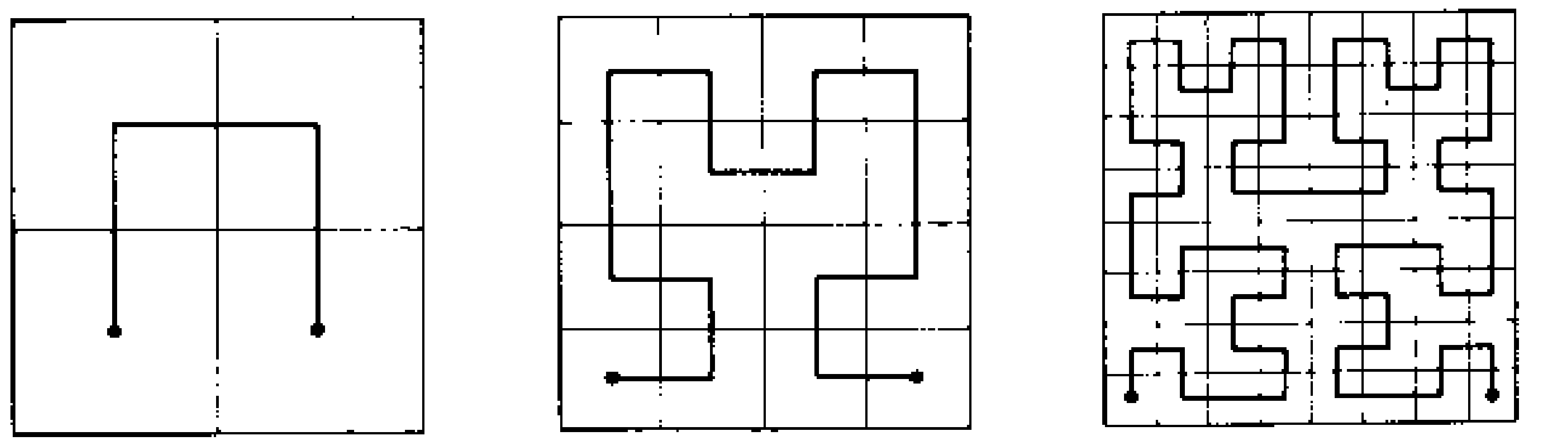


Figura 27.1

[17]Veja Matthew M. Fryde, "Waclaw Sierpinski Mathematician", *Scripta Mathematica*, 27 (1964), 105-111

[18]Veja Hugo Steinhaus, "Stefan Banach, 1892-1945", *Scripta Mathematica*, 26 (1963), 93-100. Steinhaus foi também um dos reputados membros do grupo polonês de matemáticos. Para algumas notas adicionais, mas inadequadas, sobre os matemáticos poloneses ver Sister Mary Grace, "Poland's Contribution to Mathematics", *The Mathematics Teacher*, 60 (1967), 383-386. Para os que lêem polonês existe uma exposição muito mais completa num volume por Jadwiga Dianni e Adam Wachulka, *Mil Anos de Matemática Polonesa* (Varsóvia: PZVS, 1963)

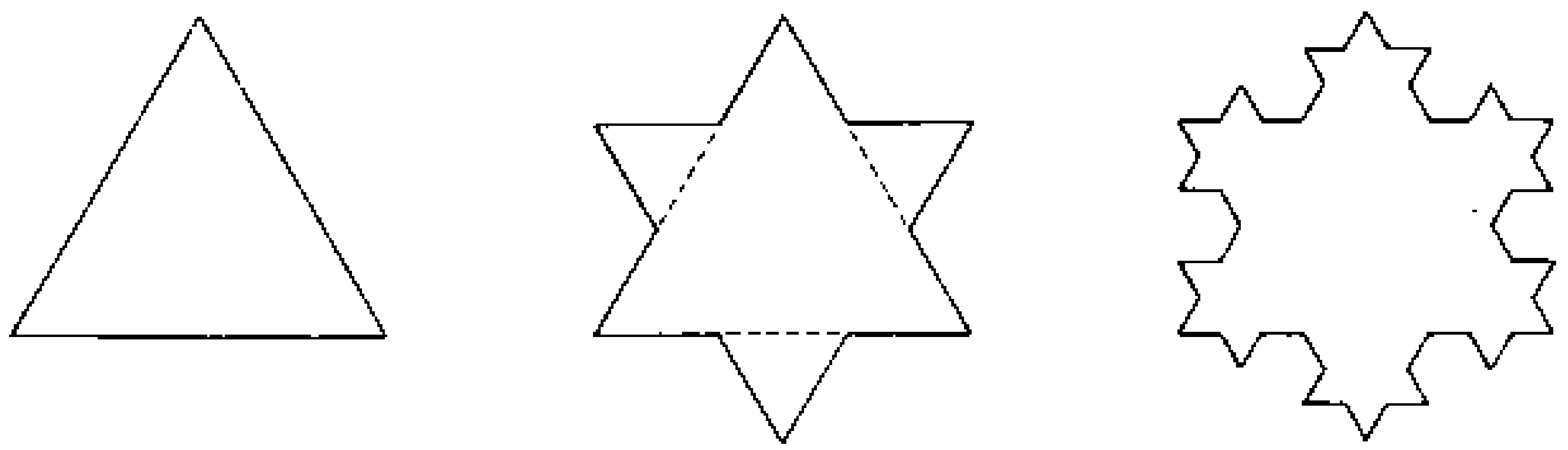


Figura 27.2

Koch (1870-1924) de Stockholm e definida essencialmente como segue[19]. Começando com um triângulo equilátero com lados unitários, dividimos em três cada um dos segmentos unitários, construímos um triângulo equilátero no terço do meio e apagamos a base de cada um dos novos triângulos equiláteros (veja Fig. 27.2). O resultado é uma poligonal fechada de doze lados e com comprimento total de quatro unidades. Dividindo em três cada um dos doze lados, erigindo doze triângulos equiláteros sobre os terços do meio, e apagando as bases, temos uma figura fechada com quarenta e oito lados e um comprimento de 16/3. Continuando esse processo indefinidamente, resulta uma curva limite chamada curva de Koch ou do floco de neve. Não só não tem tangente em nenhum ponto mas tem a notável propriedade de que, dados dois pontos quaisquer sobre a curva, o comprimento de arco entre os dois pontos é infinito.

9 Hilbert, como Poincaré, era um matemático de muitas facetas, que contribuiu para a teoria dos números, lógica matemática, equações diferenciais, o problema dos três corpos e outros aspectos da física matemática. Foi em conexão com seu trabalho sobre fundamentos da matemática[20] que ele se envolveu na mais forte controvérsia do século, que num certo sentido era a continuação do conflito anterior entre Cantor e Kronecker. Hilbert admirava o *Mengenlehre* de Cantor, ao passo que Poincaré o criticava fortemente. As teorias de Cantor, como os abstratos espaços de Hilbert, pareciam muito afastados da base intuitivo-empírica que Poincaré e alguns de seus contemporâneos preferiam. No Congresso de Paris de 1900, em que Hilbert apresentou seus problemas, Poincaré leu um artigo em que comparava os papéis da lógica e da intuição na matemática.

Os matemáticos então e depois vieram a se agrupar em duas ou três escolas de pensamento, dependendo de sua atitude com relação aos fundamentos de sua ciência. Os que adotavam idéias semelhantes às de Poincaré formaram um grupo vagamente definido com predileções intuitivas. Hilbert veio a ser considerado chefe de uma escola "formalista", que alguns de seus sucessores levaram à conclusão de que a matemática é apenas um jogo sem sentido jogado com fichas sem sentido de acordo com certas regras formais aceitas previamente.

Relacionado com o grupo formalista, mas não identificado com ele, havia um certo número de matemáticos que hesitavam em aceitar a natureza inteiramente arbitrária das regras do jogo. Liderados por Bertrand Russell, esses homens, freqüentemente descritos como a escola "logicista" ou "logicalista", igualavam a matemática e a lógica, em oposição a C. S. Peirce, mas de acordo com Frege. Foi L. E. J. Brouwer (1881-1966) da Universidade de Amsterdam quem realmente conseguiu reunir os oponentes do formalismo de Hilbert e do logicismo de Russell. Ele insistia em que os elementos e axiomas da matemática são consideravelmente menos arbitrários do que parece. Em sua tese para doutoramento em 1907 e em artigos posteriores Brouwer atacou os fundamentos lógicos da aritmética e da análise, tornando-se conhecido como o fundador de uma nova escola claramente definida, a "escola intuicionista". Segundo Brouwer, a linguagem e a lógica não são pressuposições para a matemática, a qual tem sua origem na intuição

[19]"Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes", *Acta Mathematica*, 30 (1906), 145-174. Modificamos um pouco a curva de Koch para fins de exposição

[20]*Grundlagen der Mathematik*, com P. Bernays (Berlin: Springer, 1934-1939, 2 volumes)

que torna seus conceitos e inferências imediatamente claros para nós[21]; uma afirmação de que existe um objeto tendo uma dada propriedade significa que existe um método conhecido que permite que o objeto seja encontrado ou construído em um número finito de passos. Em particular, ele argüia que o método de prova indireta, a que a aritmética transfinita recorria com freqüência, não é válido. Desde os tempos de Aristóteles as três leis básicas da lógica tinham sido consideradas sacrossantas: (1) a lei da identidade, *A* é *A*; (2) a lei da contradição, *A* não pode ser simultaneamente *B* e não *B*; e (3) a lei do meio excluído (ou *tertium non datur*), *A* ou é *B* ou não *B*, pois não há outra alternativa. Brouwer negava essa última lei da lógica e recusava aceitar resultados baseados nela. Por exemplo, ele perguntava aos formalistas se é verdadeiro ou falso que "a seqüência de dígitos 123456789 ocorre em algum lugar na representação decimal de π". Como não existe método conhecido para fazer uma decisão, não se pode aplicar aqui a lei do meio excluído e afirmar que a proposição ou é verdadeira ou é falsa.

10 Em 1918 Hermann Weyl (1885-1955) aderiu à causa intuicionista, apesar de ter estudado com Hilbert, a quem mais tarde sucedeu em Göttingen. Weyl afirmava que, ao basear a análise no *continuum* da aritmética, os formalistas tinham construído uma casa que "numa parte essencial está construída sobre areia"[22]. Hilbert comparava os ataques de Brouwer e Weyl com o negativismo de Kronecker no período anterior, mas não conseguiu destruir seus argumentos. Weyl foi um dos grandes matemáticos produzidos pela Universidade de Göttingen, e contribuiu para vários ramos da matemática e para dois grandes avanços da ciência durante os primeiros anos do século. Fora colega de Albert Einstein (1879-1955) em Zürich em 1913, e em 1918 Weyl sustentou a teoria da relatividade num livro muito difundido, *Raum-Zeit-Materie* ("Espaço-tempo-matéria"). Durante os dez anos seguintes ele escreveu uma série de artigos sobre as aplicações da teoria dos grupos à mecânica quântica, a que Einstein também fez contribuições importantes. No ápice de sua carreira, em 1933, Weyl se demitiu de seu posto em Göttingen em protesto contra a demissão de seus colegas pelos nazistas, e o glorioso período da matemática nessa universidade terminou abruptamente. Weyl foi para a América do Norte e tornou-se membro do Institute for Advanced Study em Princeton, de que também Einstein em 1933 tinha sido feito membro vitalício. A relação estreita entre matemática abstrata e teoria científica que a obra de Poincaré, Hilbert, Weyl e Einstein representa tem sido especialmente característica do século vinte, e não foi perturbada pelas controvérsias dentro da matemática com relação aos fundamentos do assunto.

Os formalistas e logicistas ficaram particularmente embaraçados com vários paradoxos na teoria dos conjuntos que há muito tempo eram familiares, como o do barbeiro da cidade que barbeia todos aqueles, e somente aqueles, que não se barbeiam a si mesmos. O barbeiro está ou não incluído no conjunto daqueles que barbeiam a si mesmos? Aqui também a lei do meio excluído parece inaplicável. Outro exemplo é o que geralmente se chama de "antinomia de Russell". O conjunto de todos os conjuntos que não são elementos deles mesmos é um elemento dele mesmo? Quer a resposta seja afirmativa quer negativa, resulta uma contradição. Tais paradoxos levantaram sérias dúvidas sobre se um programa como o de Russell e Whitehead, baseado como é na noção de conjunto, poderia ter sucesso. O paradoxo de Russell foi proposto em 1902, e o desgosto que causou entre os especialistas em lógica matemática foi bem expresso por Frege em 1903 num apêndice ao segundo volume de seu *Grundgesetze*:

> Nada pior praticamente pode acontecer a um autor científico do que ver uma das fundações de seu edifício ser abalada depois de terminada a obra. Fui colocado nessa posição por uma carta contendo o paradoxo de Mr. Bertrand Russell exatamente quando a impressão deste segundo volume

[21]Veja o artigo, "Mathematics, Foundations of", por S. C. Kleene em *Encyclopaedia Britannica*, XV (1963), 82B-83. Cf. Edith H. Luchins e A. S. Luchins, "Logicism", *Scripta Mathematica*, 27 (1965), 223-243

[22]Veja Hermann Weyl: *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, baseado numa tradução de Olaf Helmer (1940)

estava quase pronta . . . *Solatium miseris, socios habuisse malorum.* Eu também tenho esse consolo, se é que é consolo; pois todos aqueles que em suas provas usaram extensões de conceitos, classes, conjuntos inclusive sistemas de Dedekind estão na mesma posição. Não é só uma questão de meu método particular de colocar as fundações, mas trata-se de saber se alguma fundamentação lógica para a aritmética é possível[23].

Essa percepção das três principais concepções quanto à natureza da matemática não deve levar à conclusão de que todo matemático se encontra em um dos três campos. Nada podia estar mais longe da verdade, e mesmo dentro de cada escola de pensamento há grande diversidade de opinião. Pode-se até sugerir que não há dois matemáticos de hoje que concordem quanto à natureza de seu assunto. Certamente a palavra "matemática" significou coisas diferentes para os povos do mundo em diferentes períodos da história, e seria pouco realístico esperar grande acordo dentro de um campo que se tornou tão vasto. Durante a primeira métade do século vinte o conflito entre as facções foi às vezes agudo; mas a partir daí tem havido mais um sentimento, que lembra o pensamento de d'Alembert cerca de duzentos anos antes, de que devemos levar avante o desenvolvimento do assunto, tanto nas fundações quanto na superestrutura, sem preocupação excessiva com um credo particular[24].

11 Nem todos os matemáticos principais do começo do século vinte tomaram parte ativa na controvérsia formalista-intuicionista. Em particular, Henri Lebesgue (1875-1941) um dos matemáticos mais originais e produtivos, revolucionou um importante aspecto da análise sem aderir a uma das principais ortodoxias. Tomou uma posição um tanto intermediária entre intuicionistas e formalistas — uma posição que poderia ser descrita como empirismo lógico francês. Mas se no que diz respeito a fundamentos lógicos Lebesgue ocupava uma posição de centro, em sua pesquisa ele escandalizou os analistas convencionais, como Hermite, com sua predileção por tipos patológicos de funções. Ele tivera o tipo usual de treinamento matemático, embora tivesse mostrado excepcional irreverência ao questionar afirmações feitas por seus professores; mas sua dissertação, aceita em Nancy em 1902, era inusitada, virtualmente refazendo a teoria da integração. Sua obra se afastava tanto das idéias aceitas que Lebesgue, como Cantor, a princípio foi atacado não só por crítica externa como por dúvida interior; mas o valor de suas idéias encontrou crescente reconhecimento, e em 1910 ele foi nomeado para a Sorbonne. No entanto, ele não criou uma "escola" nem se concentrou no campo que abrira. Embora seu conceito de integral fosse por si um exemplo notável de generalização, Lebesgue temia que "Reduzida a teorias gerais, a matemática fosse uma bela forma sem conteúdo. Morreria rapidamente"[25]. Desenvolvimentos posteriores parecem indicar que seus temores quanto à má influência da generalidade na matemática eram injustificados.

A integral de Riemann tinha dominado o estudo da integração antes que Lebesgue se tornasse o "Arquimedes do período de extensão". Mas, pelo fim do século dezenove, estudos sobre séries trigonométricas e o *Mengenlehre* de Cantor tinham feito com que os matemáticos percebessem mais claramente que a idéia essencial de funcionalidade deveria ser uma correspondência ponto-a-ponto ou "aplicação" no novo sentido, não a idéia de variação lisa. Cantor tinha até lutado com noções de conjuntos mensuráveis, mas em sua definição a medida da união de dois conjuntos podia ser menor que a soma das medidas dos conjuntos. Os defeitos da definição de Cantor foram removidos por Emile Borel (1871-1956), o predecessor imediato de Lebesgue nos estudos sobre teoria da medida. Borel, como Carnot, até certo ponto levava vida dupla, pois de um posto de professor em Paris ele passou a participação ativa em negócios governamentais. De

[23]Veja Gottlob Frege, *The Basic Laws of Arithmetic: Exposition of the System*, traduzido para o inglês por Montgomery Furth (Berkeley, Calif.: University of California Press, 1964), p. 127

[24]Uma exposição intensiva das idéias conflitantes é apresentada em Max Black: *The Nature of Mathematics* (1933). Veja também Abraham S. Luchins e Edith H. Luchins, *Logical Foundations of Mathematics for Behavioral Scientists* (1965) para uma exposição mais popular

[25]Veja Henri Lebesgue, *Measure and the Integral* (1966), p. 5. Esse volume contém um bem escrito "Biographical Sketch" por K. O. May

1924 a 1936 ele fez parte da Câmara de Deputados, e, antes de ser preso em 1940 pelo governo de Vichy, fora ministro da marinha. Sua lista de publicações de matemática antes de 1924 era notável, incluindo mais de meia dúzia de livros. Um dos primeiros volumes tinha sido sobre um tema pouco comum: *Leçons sur le séries divergentes* (1901). Aqui o autor mostrava como para certas séries divergentes é possível definir uma "soma" que faça sentido em relações e operações envolvendo tais séries. Por exemplo, se a série é $\sum u_n$, então uma "soma" pode ser definida como $\int_0^\infty e^{-x}\sum_0^\infty u_n x^n/n!\,dx$ se essa integral existe. Durante as primeiras décadas deste século houve vivo interesse por tais definições; mas a influência mais duradoura de Borel esteve na aplicação da teoria dos conjuntos à teoria das funções, onde seu nome é lembrado no familiar teorema de Heine-Borel:

> Se um conjunto fechado de uma reta pode ser coberto por um conjunto de intervalos de modo que cada ponto do conjunto é um ponto interior de pelo menos um dos intervalos, então existe um número finito de intervalos com essa propriedade de cobertura.

Em terminologia um pouco diferente esse teorema fora enunciado por Heine em 1872, mas fora esquecido até ser reenunciado em 1895 por Borel[26]. O nome de Borel está também ligado a qualquer conjunto que possa ser obtido de conjuntos abertos e fechados da reta real por aplicações repetidas das operações de união e intersecção a número enumerável de conjuntos. Todo conjunto de Borel é mensurável em sua definição.

Lebesgue, refletindo sobre o trabalho de Borel sobre conjuntos, viu que a definição de Riemann de integral tem o defeito de só se aplicar em casos excepcionais, pois assume não mais que uns poucos pontos de descontinuidade para a função. Se uma função $y = f(x)$ tem muitos pontos de descontinuidade, então à medida que o intervalo $x_{i+1} - x_i$ se torna menor, os valores $f(x_{i+1})$ e $f(x_i)$ não ficam necessariamente próximos. Em vez de subdividir o domínio da variável independente, Lebesgue dividiu pois o campo $\bar{f} - \underline{f}$ de variação da função em subintervalos Δy_i e em cada subintervalo escolheu um valor η_i. Então achou a "medida" $m(E_i)$ do conjunto E_i dos pontos do eixo x para os quais os valores de f são aproximadamente iguais a η_i. No modo informal em que Lebesgue gostava de exprimir a diferença, os integradores anteriores tinham adicionado indivisíveis, grandes ou pequenos, na ordem da esquerda para a direita, ao passo que ele preferia agrupar indivisiveis de tamanho semelhantes antes de somar[27]. Isto é, às somas de Riemann $S_n = \sum f(x_i)\Delta x_i$ ele substituiu somas tipo Lebesgue $S_n = \sum \eta_i m(E_i)$ e depois fazia os intervalos tenderem a zero.

A integral de Lebesgue que descrevemos aqui muito informalmente na verdade é definida muito mais precisamente em termos de supremos e ínfimos e da medida de Lebesgue de um conjunto, conceito complicado que não pode ser explicado aqui, mas um exemplo pode sugerir como opera a integral de Lebesgue. Assumamos que a medida de Lebesgue do conjunto dos números racionais no intervalo $[0, 1]$ é zero e que a medida de Lebesgue dos irracionais desse intervalo é um; suponhamos procurada a integral de $f(x)$ nesse intervalo, onde $f(x)$ é zero para valores racionais de x e um para valores irracionais de x. Como $m(E_i) = 0$ para todos os valores de i exceto $i = n$ onde $\eta_n = 1$, temos $S_n = 0 + 0 + \cdots + \eta_n m(E_n) = 1 \cdot 1 = 1$; portanto a integral de Lebesgue é 1. A integral de Riemann da mesma função no mesmo intervalo não existe, é claro.

Não definimos as expressões "medida de um conjunto" ou "função mensurável" pois não é fácil defini-las em poucas palavras elementares. Além disso, a palavra "medida" pode ter vários significados diferentes. Quando Lebesgue apresentou seu novo conceito de integral, ele usou a palavra no sentido específico do que hoje se chama medida de Lebesgue. Essa era uma extensão das noções clássicas de comprimento e área a conjuntos mais gerais que os associados com as curvas e superfícies usuais. Hoje a palavra "medida" é usada mais amplamente ainda, uma medida num espaço R sendo simples-

[26]Veja E. T. Bell, *The Development of Mathematics* (1940), p. 452, para referências

[27]Para uma excelente introdução à integral de Lebesgue veja as palavras do próprio Lebesgue em sua *Measure and the Integral* (traduzido para o inglês) mencionado na nota de rodapé 25 deste capítulo

mente uma função não-negativa μ com a propriedade $\mu(\sum A_i) = \sum \mu(A_i)$ para toda classe enumerável de partes disjuntas A_i contidas em R. Não só o novo conceito de integral cobre uma classe mais ampla de funções que o de Riemann, mas a relação inversa entre diferenciação e integração (no sentido generalizado de Lebesgue) está sujeita a menos exceções. Por exemplo, se $g(x)$ é diferenciável em $[a, b]$ e se $g'(x) = f(x)$ é limitada, então $f(x)$ é Lebesgue integrável e $g(x) - g(a) = {}_L\int_a^x f(t)\,dt$, ao passo que com as mesmas restrições sobre $g(x)$ e $g'(x)$ a integral de Riemann ${}_R\int_a^x f(t)\,dt$ poderia não existir.

As idéias de Lebesgue datam dos anos finais do século dezenove, mas tornaram-se conhecidas através de seus dois tratados clássicos: *Leçons sur les séries trigonométriques* (1903) e *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (1904)[28].

As idéias revolucionárias que continham abriram caminho para novas generalizações. Entre essas estão a integral de Denjoy e a integral de Haar, propostas por um francês, Arnaud Denjoy (1884-) e um húngaro, Alfred Haar (1885-1933) respectivamente. Outra integral bem conhecida do século vinte é a de Lebesgue-Stieltjes, combinação das idéias de Lebesgue e do analista holandês T. J. Stieltjes (1856-1894). A obra desses homens e outros alterou tanto o conceito de integral, através de generalizações, que se disse que embora a integração seja tão antiga quanto o tempo de Arquimedes, "a teoria da integração foi creação do século vinte"[29].

12 As novas teorias de integração estavam relacionadas de perto com outra característica acentuada do século vinte, o rápido crescimento da topologia geral. Maurice Fréchet (1878-) na Universidade de Paris, em sua tese de doutoramento de 1906 mostrou claramente que a teoria das funções já não podia passar sem uma visão muito geral da teoria dos conjuntos. O que Fréchet tinha em mente não eram necessariamente os conjuntos de números, mas conjuntos de elementos de natureza arbitrária, tais como curvas ou pontos; sobre tais conjuntos arbitrários ele construiu um "cálculo funcional" em que uma operação funcional é definida num conjunto E quando a cada elemento A de E corresponde um valor numericamente determinado $U(A)$. Interessava-se não por um particular exemplo de conjunto E mas pelos resultados da teoria dos conjuntos que são independentes da natureza dos elementos do conjunto. Nesse cálculo muito geral a noção de limite é muito mais ampla do que a previamente definida, essa estando incluída na anterior como caso especial, assim como a integral de Lebesgue contém as integrais de Riemann e Cauchy. Provavelmente nenhum aspecto da matemática do século vinte sobressai tanto quanto o grau sempre crescente de generalização e abstração. Desde o tempo de Hilbert e Fréchet as noções de conjunto abstrato e espaço abstrato têm sido fundamentais na pesquisa.

É interessante notar que Hilbert e Fréchet chegaram a suas generalizações do conceito de espaço partindo de direções um tanto diferentes. Hilbert se interessara, como Poincaré, pelo estudo de equações integrais, especialmente através da obra de Ivar Fredholm (1866-1927). Num certo sentido uma equação integral pode ser considerada uma extensão de um sistema de n equações em n incógnitas a um sistema de infinitas equações a infinitas incógnitas, tópico que tinha sido tratado, sob forma de determinantes infinitos, por von Koch. Ao trabalhar com equações integrais de 1904 a 1910 Hilbert não se referiu explicitamente a espaços com infinitas dimensões, mas desenvolveu o conceito de continuidade de uma função de infinitas variáveis. Até que ponto Hilbert construiu formalmente o "espaço" que mais tarde teve seu nome pode ser um ponto discutível, mas as idéias básicas estavam ali, e seu impacto no mundo matemático foi

[28]Há muitas exposições em inglês. Veja J. Burkill, *The Lebesgue Integral* (Cambridge: Cambridge University Press, 1951); J. H. Williamson, *Lebesgue Integration* (New York: Holt, Rinehart, 1962); Stanislaw Hartman e J. Mikusinski, *The Theory of Lebesgue Measure and Integration*, traduzido por Leo F. Boron (Oxford, Pergamon, 1961): L. Cesari, *Surface Area* (Princeton: Princeton University Press, 1956)

[29]E. T. Bell, *Development of Mathematics*, p. 448. Cf. Arnaud Denjoy, *Un demi-siècle* (1907-1956) *de notes communiquées aux académies* (Paris: Gauthier-Villars, 1957, 2 volumes): e *Introduction à la théorie des fonctions de variables réelles* (Paris: Hermann, 1937, 2 volumes). Veja também Leopoldo Nachbin, *The Haar Integral*, traduzido por Lulu Bechtolsheim (Princeton: D. Van Nostrand, 1965)

grande. Durante os anos em que Hilbert se ocupou com equações integrais, Hadamard estava fazendo pesquisas sobre cálculo de variações, e seu protegido Fréchet conscientemente tentou em 1906 generalizar os métodos nesse campo através do que chamou *cálculo funcional*. Ao passo que o cálculo usual lida com funções, o cálculo funcional lida com funcionais. Ao passo que uma função é uma correspondência entre um conjunto S_1 de números e outro conjunto S_2 de números, um funcional é uma correspondência entre uma classe C_1 de funções e outra classe C_2 de funções. Fréchet formulou definições generalizadas, correspondendo aproximadamente a termos como limite, derivada e continuidade no cálculo usual, aplicáveis aos espaços de funções que ele criou assim, introduzindo em grande escala um novo vocabulário para a nova situação[30].

Dizem alguns que a topologia começou com a *analysis situs* de Poincaré; outros que data da teoria dos conjuntos de Cantor, ou talvez do desenvolvimento dos espaços abstratos. Outros ainda consideram Brouwer o fundador da topologia, especialmente devido a seus teoremas de invariança topológica de 1911 e à fusão que efetuou dos métodos de Cantor com os da *analysis situs*. De qualquer forma, com Brouwer começou o período de evolução intensiva da topologia que continuou até hoje. Durante essa "idade áurea" da topologia, matemáticos americanos têm contribuído notavelmente. Foi dito que "a topologia começou como muita geometria e pouca álgebra, mas agora é muita álgebra e pouca geometria"[31]. Ao passo que outrora a topologia podia ser descrita como geometria sem medida, hoje a topologia algébrica ameaça dominar o campo, mudança que resultou em grande parte de liderança dos Estados Unidos.

Em 1913 Weyl deu um curso sobre superfícies de Riemann[32] em Göttingen, onde Hilbert tinha recebido uma cadeira por recomendação de Klein, e ele também deu ênfase à natureza abstrata de uma superfície, ou "variedade de dimensão dois", como preferia chamá-la. O conceito de variedade, ele afirmou, não deveria ser ligado a um espaço de pontos (no sentido geométrico usual), mas ter sentido mais amplo. Começamos simplesmente com uma coleção de coisas chamadas "pontos" (que podem ser objetos quaisquer) e introduzimos um conceito de continuidade por meio de definições adequadas. A formulação clássica dessa idéia foi dada um ano depois por Felix Hausdorff (1868-1942), o "sumo sacerdote" da topologia dos conjuntos de pontos.

A primeira parte dos *Grundzüge der Mengenlehre* (Aspectos básicos da teoria dos conjuntos) de Hausdorff de 1914 é uma exposição sistemática dos aspectos característicos da teoria dos conjuntos, em que a natureza dos elementos não tem importância; só as relações entre os elementos são importantes. Na segunda parte do livro achamos um desenvolvimento claro dos "espaços topológicos de Hausdorff" a partir de uma coleção de axiomas. Por espaço topológico o autor entende um conjunto E de elementos x e certos subconjuntos S_x chamados vizinhanças de x. Assume-se que as vizinhanças satisfazem aos quatro seguintes "axiomas de Hausdorff".

1. A cada ponto x corresponde ao menos uma vizinhança $U(x)$, e cada vizinhança $U(x)$ contém o ponto x.
2. Se $U(x)$ e $V(x)$ são duas vizinhanças do mesmo ponto x, existe uma vizinhança $W(x)$ que é subconjunto das duas.
3. Se o ponto y pertence a $U(x)$, existe uma vizinhança $U(y)$ que é subconjunto de $U(x)$.

[30]Uma exposição detalhada e bem feita do surgimento dos espaços de funções através da obra de Hilbert e Fréchet é dada em Michael Bernkopf, "The Development of Function Spaces with Particular Reference to Their Origins in Integral Equation Theory", *Archive for History of Exact Sciences*, 3 (1966), 1-96

[31]Veja *Recent Soviet Contributions to Mathematics*, editado por J. P. LaSalle e S. Lefschetz (1962), p. 13

[32]Hermann Weyl, *The Concept of a Riemann Surface*, traduzido por G. R. Maclane, 3.ª edição (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1955)

4. Para dois pontos diferentes x e y existem duas vizinhanças $U(x)$ e $U(y)$ sem pontos comuns[33].

Vizinhanças assim definidas permitem a Hausdorff introduzir o conceito de continuidade. Com axiomas adicionais ele desenvolveu as propriedades e vários espaços mais particulares, tais como o espaço euclidiano.

Se algum livro marca o aparecimento da topologia dos conjuntos de pontos como disciplina separada, é o *Grundzüge* de Hausdorff. É interessante notar que embora fosse a aritmetização da análise que começou a linha de pensamento que levou de Cantor a Hausdorff, no fim o conceito de número fica totalmente submerso sob um ponto de vista muito mais geral. Além disso, embora a palavra "ponto" seja usada no título, a nova disciplina tem tão pouco a ver com os pontos da geometria ordinária quanto com os números da aritmética comum. A topologia emergiu no século vinte como um tema que unifica quase toda a matemática, um tanto como a filosofia procura coordenar todo o conhecimento. Por causa de seu primitivismo, a topologia está na base de uma parte muito grande da matemática, conferindo-lhe uma inesperada coesão.

13 O alto grau de abstração formal que se introduziu na análise, geometria e topologia no começo do século vinte não podia deixar de invadir a álgebra. O resultado foi um novo tipo de álgebra, às vezes inadequadamente descrito como "álgebra moderna", produto em grande parte do segundo terço do século. É de fato verdade que um processo gradual de generalização na álgebra tinha sido desenvolvido no século dezenove, mas no século vinte o grau de abstração deu uma virada brusca para cima[34]. x e y já não representavam mais necessariamente números desconhecidos (reais ou imaginários) ou segmentos, como na obra de Descartes; agora podiam designar elementos de qualquer tipo — substituições, figuras geométricas, matrizes, etc. Quando no século dezesseis *cosa* era usado para a incógnita, a "coisa" naturalmente era uma grandeza; agora o sentido literal da palavra italiana ou espanhola é literalmente aplicável, pois não há restrição sobre a natureza dos elementos da álgebra abstrata além dos especificamente postulados nos axiomas. Alguma indicação da direção em que a álgebra estava avançando pode ser percebida comparando os artigos sobre álgebra apresentados no Quinto Congresso Internacional em Cambridge, Inglaterra, em 1912, logo antes da interrupção causada pela Primeira Grande Guerra, e os lidos no Décimo Primeiro Congresso Internacional em Cambridge, Massachusetts, em 1950, depois da segunda interrupção na série causada pela Segunda Grande Guerra. A transição da álgebra clássica para a abstrata, no entre-guerra, fica evidente olhando os índices, como também a emergência da topologia como rival de sua mãe, a geometria. O enorme desenvolvimento da topologia hoje resulta em parte do fato que é difícil imaginar um aspecto da análise ou da geometria que não deva ser baseado num estudo topológico prévio; e apesar do ar vago que a topologia às vezes aparenta, ela está ligada de perto com as questões matemáticas mais precisas. Se a segunda metade do século continuar na direção em que se abriu, a álgebra abstrata e a topologia terão a parte do leão na pesquisa matemática.

14 Se a matemática mudou de forma entre as guerras, é igualmente verdade que muito da matemática em seguida à Segunda Guerra representou algo radicalmente novo, anunciando uma nova era[35]. A teoria dos conjuntos e a teoria da medida durante o século vinte invadiram uma parte sempre maior da matemática, e poucos ramos foram tão completamente influenciados por essa tendência quanto a teoria das probabilidades, a que Borel tinha contribuído com seus *Éléments de la théorie des probabilités* (1909). O primeiro ano do novo século foi auspicioso para as probabilidades, tanto na física quanto na genética, pois em 1901 Gibbs publicou seus *Elementary Principles in Statistical*

[33]Veja Paul Alexandroff. *Elementary Concepts of Topology*, traduzido por Alexis N. Obolensky (1965), p. 17, ou Jerome H. Manheim, *The Genesis of Point Set Topology* (1964), pp. 126-127

[34]Veja Oystein Ore, *L'algèbre abstraite* (Paris: Hermann, 1936)

[35]Jean Dieudonné, "Recent Developments in Mathematics". *American Mathematical Monthly*, 71 (1964). 239-248

Mechanics, e no mesmo ano a *Biometrika* foi fundada por Karl Pearson (1857-1936). Francis Galton (1822-1911), primo precoce de Charles Darwin e estatístico nato, tinha estudado os fenômenos de regressão; em 1900 Pearson, professor "Galton" de eugenia na Universidade de Londres, tinha popularizado o teste do *chi-square*. Um dos títulos de Poincaré tinha sido "Professor do cálculo de probabilidades", indicando o interesse crescente pelo assunto. Na Rússia o estudo de cadeias ligadas de eventos foi iniciado, especialmente em 1906-1907, por Andrei Andreyevitch Markov (ou Markoff, 1856-1922), discípulo de Tchebycheff e co-editor das *Oeuvres* (2 volumes, 1899-1904) de seu mestre. Na teoria cinética dos gases e em muitos fenômenos biológicos e sociais a probabilidade de um evento depende muitas vezes de resultados precedentes, e especialmente desde os meados do século vinte as cadeias de Markov de probabilidades interligadas têm sido amplamente estudadas[36]. Quando se procuraram fundamentos matemáticos para a teoria das probabilidades, os estatísticos viram que o instrumento adequado estava disponível, e hoje nenhuma exposição rigorosa da teoria das probabilidades é possível sem usar noções sobre funções mensuráveis e teorias modernas da integração. Na Rússia, por exemplo, Andrei Nicolaevich Kolmogoroff (1903-   ) fez importantes progressos em processos de Markov, e satisfez em parte o sexto projeto de Hilbert, que pedia fundamentos axiomáticos para as probabilidades, através do uso da teoria da medida de Lebesgue. A análise clássica se ocupara de funções contínuas, ao passo que os problemas de probabilidades em geral envolvem casos discretos. A teoria da medida e as extensões do conceito de integração eram idealmente adequados para promover uma associação mais íntima da análise com probabilidades, especialmente depois da metade do século, quando Laurent Schwartz (1915-   ) da Universidade de Paris generalizou o conceito de diferenciação através da teoria das distribuições (1950-1951).

A função delta de Dirac da física atômica tinha mostrado que as funções patológicas que por tanto tempo tinham ocupado os matemáticos eram úteis também na ciência. Nos casos mais difíceis, porém, perde-se a diferenciabilidade, o que causa problemas na resolução de equações diferenciais — um dos principais elos de ligação entre a matemática e a física — especialmente quando estão envolvidas soluções singulares. Para superar essa dificuldade Schwartz introduziu uma noção mais ampla de diferenciabilidade, tornada possível pelo desenvolvimento, na primeira metade do século, de espaços vetoriais gerais por Banach, Fréchet e outros.

Um espaço vetorial é um conjunto de elementos $a, b, c \dots$ satisfazendo a certas condições, inclusive especialmente a exigência que se a e b são elementos de L e se α e β são números complexos então $\alpha a + \beta b$ é um elemento de L. Se os elementos de L são funções, o espaço vetorial chama-se um espaço vetorial de funções e uma aplicação linear dele chama-se um funcional linear. Por "distribuição" Schwartz entendia um funcional linear contínuo sobre o espaço das funções que são diferenciáveis e satisfazem a certas outras condições. A medida de Dirac, por exemplo, é um caso especial de uma distribuição. Schwartz então desenvolveu uma definição apropriada de derivada de uma distribuição tal que a derivada de uma distribuição é sempre uma distribuição. Isso fornece uma poderosa generalização do cálculo, com aplicações imediatas à teoria das probabilidades e à física. A análise funcional, essencialmente uma generalização do cálculo de variações, e a teoria das distribuições têm sido também importantes tópicos de pesquisa desde os meados do século[37].

15 As probabilidades e a estatística no século vinte estão intimamente ligados não só com a matemática pura como com uma característica notavelmente diferente de nosso

[36]Não há exposição adequada da história da teoria das probabilidades recente, mas uma apresentação elementar de alguns aspectos encontra-se em Amy C. King e C. B. Read. *Pathways to Probability* (1963). Veja também as notas histórico-bibliográficas no fim de E. B. Dynkin. *Markov Processes*, traduzido do russo (New York: Springer, 1965, 2 volumes), II, 240-266

[37]Para uma exposição sinótica veja J.-P. Marchand, *Distributions: An Outline* (Amsterdam: North-Holland, 1962). Cf. Laurent Schwartz, *Théorie des distributions* (Paris: Hermann, 1950-1951, 2 volumes; 2.ª edição, 1957)

tempo — uma dependência crescente com relação aos grandes computadores. O assunto do cálculo por máquinas não era realmente novo, pois Pascal e Leibniz tinham tido sucesso modesto muito antes. Na verdade, o profeta da máquina de calcular elaborada tinha sido Charles Babbage, um excêntrico que manteve uma polêmica durante toda a sua vida com os tocadores de realejo enquanto tentava desesperadamente obter fundos para completar seu ambicioso projeto de construir um "engenho de diferença". Esse artefato, concebido em 1833, foi durante algum tempo financiado pelo governo inglês; quando o Ministro do Tesouro em 1842 cancelou o apoio financeiro, Babbage amargamente comparou-o ao destruidor do belo Templo de Éfeso. A máquina idealizada por Babbage teria muito da flexibilidade das máquinas modernas, mas sem a velocidade dessas. Efetuaria todas as operações aritméticas e guardaria informação para uso posterior, usando um esquema elaborado de rodas e alavancas. Sua "máquina", um computador digital, nunca foi completada. A era moderna da computação mecânica pode-se dizer que começou aproximadamente em 1925 no Massachusetts Institute of Technology onde Vannevar Bush (1890-   ) e seus associados construíram um calculador grande, com motores elétricos, mas por outro lado mecânico. Em 1930 a International Business Machines Corporation começou a construção do MARK I, uma calculadora eletromecânica completamente automática segundo as linhas da visão de Babbage; mas antes de ficar pronta, em 1944, já estava fora da moda com os planos do ENIAC (Eletronic Numerical Integrator and Calculator). Esse foi o primeiro calculador completamente eletrônico, baseado no fluxo de eléctrons através de tubos de vácuo. Fora começado sob a pressão de necessidades militares, e entre aqueles que serviram como consultores no projeto estava John von Neumann (1903-1957), nascido em Budapeste, que havia ensinado em Berlin e Hamburgo antes de ir para a América do Norte em 1930, onde, junto com Einstein, ele se tornou um dos primeiros membros permanentes do Institute for Advanced Study em 1933. Entre 1944 e 1946 ele ajudou a preparar um relatório para o exército sobre a capacidade dos computadores, e em 1949 o primeiro computador com programa em reserva entrou em operação. Dois anos depois UNIVAC I (Universal Automatic Calculator) estava pronto, feito pela Sperry Rand Corporation, mas o campo da computação eletrônica muda tão rapidamente que esse computador é hoje peça de museu na Smithsonian Institution[38].

A eletricidade alterou tanto nosso modo de viver que freqüentemente se diz que vivemos numa era elétrica; agora os aparelhos eletrônicos podem estar a ponto de alterar grande parte de nosso desenvolvimento matemático. Os computadores hoje tornaram-se tão vastos e intrincados que ultrapassam os sonhos de Babbage, que viveu um século antes de seu advento. Problemas que estavam desesperadoramente além das capacidades dos matemáticos de eras anteriores recentemente foram resolvidos com a ajuda dos computadores de alta velocidade. Se, como Kepler disse, a invenção dos logaritmos duplicou a vida de um astrônomo, quanto mais o computador eletrônico expandiu as carreiras de cientistas e matemáticos! Com seu poder crescente veio também uma proliferação de novos campos e aplicações da matemática — programação linear, teoria dos jogos, pesquisa operacional e muito mais. Von Neumann, um dos matemáticos mais criativos e versáteis de nosso século, foi um pioneiro num novo tratamento da economia matemática. A econometria havia muito usava análise matemática, mas foi especialmente através da *Theory of Games and Economic Behavior* de von Neumann e Oskar Morgenstern em 1944 que a chamada matemática finita veio a desempenhar um papel crescente nas ciências sociais. As inter-relações entre os vários ramos do pensamento tornaram-se tão complicadas que Norbert Wiener (1894-1964), um prodígio matemático e por muitos anos professor no MIT, em 1948 publicou seu *Cybernetics*, livro que estabelecia uma nova disciplina dedicada ao estudo do controle e comunicação

[38]Uma exposição muito informativa sobre o desenvolvimento dos computadores se encontra em Jeremy Bernstein, *The Analytical Engine: Computers — Past, Present and Future* (1963). Veja também *Babbage's Calculating Machine or Difference Engine*, editado por Philip Morrison e Emily Morrison (New York, 1961)

em animais e máquinas. Von Neumann e Wiener também se envolveram profundamente com teoria quântica, e o primeiro em 1955 foi nomeado para a Comissão de Energia Atômica Americana; mas seria um erro concluir que homens como esses eram apenas matemáticos aplicados. Contribuíram pelo menos tanto para a matemática pura — para teoria dos conjuntos, teoria dos grupos, cálculo operacional, probabilidades e lógica matemática e fundamentos. Fora von Neumann, na verdade, quem em 1929 deu aos espaços de Hilbert esse nome, sua primeira axiomatização e sua forma atual altamente abstrata[39]. Wiener fora importante no começo da década de vinte na origem da teoria moderna dos espaços lineares e em particular no desenvolvimento dos espaços de Banach. A notável expansão da matemática aplicada no século vinte de modo algum diminuiu o ritmo do desenvolvimento da matemática pura, nem o surgimento de novos ramos diminuiu o vigor dos antigos.

16 Os conceitos fundamentais da álgebra moderna (ou abstrata), topologia e espaços vetoriais foram estabelecidos entre 1920 e 1940, mas a vintena de anos seguinte viu uma verdadeira revolução nos métodos da topologia algébrica que se estendeu à álgebra e à análise. O resultado foi uma nova disciplina chamada álgebra homológica, sobre a qual apareceu, em 1955 o primeiro livro por Henri Cartan (1904-   ) e Samuel Eilenberg (1913-   ), sendo seguido na dúzia de anos seguintes por várias outras monografias. A álgebra homológica é um desenvolvimento da álgebra abstrata que trata de resultados válidos para muitas espécies diferentes de espaços — uma invasão do domínio da álgebra pura pela topologia algébrica. A rapidez com que esse cruzamento, geral e poderoso, entre a álgebra e a topologia algébrica, cresceu é evidente pelo rápido aumento no número de artigos sobre álgebra homológica que aparecem na lista de *Mathematical Reviews*. Além disso, os resultados desse ramo têm aplicação tão ampla que as etiquetas antigas, álgebra, análise, geometria, já não se ajustam aos resultados de pesquisa recente. Nunca antes a matemática esteve tão unificada quanto hoje. A maior parte do enorme desenvolvimento durante os vinte anos seguintes à Segunda Grande Guerra teve pouco que ver com as ciências naturais, sendo estimulada por problemas dentro da própria matemática pura; no entanto durante o mesmo período as aplicações da matemática à ciência se multiplicaram incrivelmente. A explicação dessa anomalia parece clara: a abstração e percepção de estruturas tem tido papel cada vez mais importante no estudo da natureza, como na matemática. Por isso mesmo em nossos dias de pensamento superabstrato, a matemática continua a ser a linguagem da ciência, tal como o era na antiguidade[40]. Que há uma conexão íntima entre fenômenos experimentais e estruturas matemáticas parece completamente confirmado da maneira mais inesperada pelas descobertas recentes da física contemporânea, embora as razões subjacentes para essa concordância permaneçam obscuras. "Do ponto de vista axiomático, a matemática aparece assim como um repositório de formas abstratas — as estruturas matemáticas; e acontece — sem que saibamos por que — que certos aspectos da realidade empírica se ajustam a essas formas, como por uma espécie de pré-adaptação"[41].

17 Foi dito repetidamente aqui que a matemática do século vinte viu uma ênfase sobre a abstração e uma preocupação crescente com a análise de esquemas amplos. Talvez isso apareça o mais claramente possível nas obras de meados do século vinte emanadas do matemático policéfalo conhecido como Nicolas Bourbaki. Este é um francês inexistente com nome grego que apareceu nas páginas de título de várias dúzias de volumes numa grande obra que ainda prossegue, *Éléments de mathématique*, que pretende captar toda a matemática que vale a pena. A cidade de Bourbaki é dada como Nancy, cidade

[39]Para uma exposição sobre a obra de von Neumann veja uma série de artigos formando um número em memória do *Bulletin of the American Mathematical Society*, 64 (Maio, 1958)

[40]M. H. Stone "The Revolution in Mathematics", *Liberal Education*, 47 (1961), 304-327. Veja especialmente p. 326

[41]N. Bourbaki "The Architecture of Mathematics", *American Mathematical Monthly*, 57 (1950), 221-232. É uma tradução de um artigo que apareceu em *Les grands courants de la pensée mathématique*, editado por F. Le Lionnais (1962). Veja especialmente p. 231

que forneceu vários dos grandes matemáticos do século; pode não ser coincidência o fato de que em Nancy há uma estátua do pitoresco e outrora muito real General Charles Denis Sauter Bourbaki (1816-1897) a quem em 1862 foi oferecido o trono da Grécia, que ele rejeitou, e cujo papel na Guerra franco-prussiana foi muito notável. Nicolas Bourbaki porém não é parente seu em nenhum sentido da palavra; o nome foi simplesmente tomado para designar um grupo de matemáticos, quase exclusivamente franceses, que formam uma espécie de secreta *société anonyme*[42]. Como instituição de referência N. Bourbaki às vezes usa a Universidade de Nancago, referência ao fato que dois dos líderes do grupo durante algum tempo pertenceram a universidades da área de Chicago — André Weil (1906-   ) na Universidade de Chicago (mais recentemente porém no Institute for advanced Study em Princeton) e Jean Dieudonné (1906-   ) na Northwestern University (antes na Universidade de Nancy, depois na Universidade de Paris). O primeiro volume dos *Éléments* de Bourbaki apareceu em 1939, o trigésimo primeiro em 1965; até agora a obra não completou o que se conhece como Parte I, *Les structures fundamentales de l'analyse*. Essa parte contém meia dúzia de subtítulos: (1) Teoria dos conjuntos, (2) Álgebra, (3) Topologia geral, (4) Funções de variável real, (5) Espaços vetoriais topológicos, e (6) Integração. Esses títulos indicam que só uma pequena parte da matemática contida nesses volumes existia há um século. A apresentação do assunto por Bourbaki é caracterizada por uma adesão sem concessões ao tratamento axiomático e a uma forma secamente abstrata e geral que retrata claramente a estrutura lógica. O tratamento bourbakista da matemática é assim um tanto análogo, no mais alto nível, às mudanças que se deram na matemática em nível elementar e secundário. A esperança em ambos os casos é que a ênfase em estrutura leve a considerável economia de pensamento. Por exemplo, no começo do século dezenove a descoberta de que a estrutura do sistema dos números complexos era a mesma que a do plano euclidiano mostrou que as propriedades deste, estudadas por dois milênios, podiam ser aplicadas ao primeiro. O resultado foi uma proliferação exuberante na análise complexa. Não há razão para que a preocupação atual com semelhanças de estrutura não produza, nos anos futuros, dividendos semelhantes.

A chamada matemática moderna nas escolas também partilha com Bourbaki o desejo de substituir cálculos por idéias. Os românticos da matemática no começo do século temiam que um árido formalismo encorajado pelo logicismo se apoderasse do assunto. Pelos meados do século o feudo entre formalistas e intuicionistas tinha-se aquietado e Bourbaki não vê necessidade de tomar partido na controvérsia. "O que o método axiomático fixa como seu objetivo principal", ele escreve, "é exatamente o que o formalismo lógico por si não pode fornecer, ou seja, a inteligibilidade profunda da matemática"[43]. Na mesma linha de pensamento um dos líderes do grupo, geralmente considerado como um dos grandes matemáticos dos meados do século, escreveu que, "Se a lógica é a higiene da matemática, não é sua fonte de alimento"[44].

Poincaré observou uma vez que em matemática "os profetas da desgraça . . . os pessimistas, sempre foram forçados a recuar"; esse otimismo está presente na matemática de hoje. Weil, concordando com a visão de Hilbert, apontou para a multidão de problemas existentes como sinal seguro da vitalidade da matemática; do futuro ele diz: "O grande matemático do futuro, como o do passado, fugirá dos caminhos batidos. É por *rapprochements* inesperados, a que nossa imaginação não saberia como chegar, que ele resolverá, dando-lhes outro aspecto, os grandes problemas que nós lhe deixaremos de

[42]Paul R. Halmos, "Nicolas Bourbaki", *Scientific American*, **196** (Maio, 1957), 88-99

[43]Bourbaki, "The Architecture of Mathematics", *American Mathematical Monthly*, **57** (1950), 223

[44]André Weil, "The Future of Mathematics", *American Mathematical Monthly*, **57** (1950), 295-306; veja p. 297. É tradução de um artigo de *Les grands courants de la pensée mathématique*, editado por F. Le Lionnais (1948: nova edição 1962)

herança"[45]. Olhando para o futuro, Weil tem confiança em mais uma coisa: "No futuro, como no passado, as grandes idéias devem simplificar idéias"[46].

Pelo conhecimento do passado pode-se prever num sentido muito geral o que o futuro pode conter. Mas se há um elemento de verdade no aforismo "a história se repete", a história da matemática contudo mostrou que as "repetições" são tão variadas e imprevistas que impedem qualquer previsão significativa das coisas que estão para vir. Foi dito[47] que um gráfico representando o crescimento da ciência, incluindo a matemática, se aproxima de uma curva exponencial, e não é desarrazoado esperar que os desenvolvimentos futuros da matemática sigam essa curva. No entanto, loucura e sabedoria estão tão misturadas na sociedade humana que há agora uma possibilidade muito real de que a matemática do homem se torne um dia o instrumento de sua própria destruição.

BIBLIOGRAFIA

Alexandroff, Paul, *Elementary Concepts of Topology*, traduzido por Alexis N. Obolensky (New York: Frederick Ungar, 1965)

Bell, E. T., *The Development of Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1940)

Bernkopf, Michael, "The Development of Function Spaces with Particular Reference to Their Origins in Integral Equation Theory", *Archive for History of Exact Sciences*, **3** (1966), 1-96

Bernstein, Jeremy, *The Analytical Engine: Computers—Past, Presente and Future* (New York: Random House, 1963)

Beth, E. W., *The Foundations of Mathematics* (Amsterdam: North Holland, 1959)

Black, Max, *The Nature of Mathematics* (New York: Harcourt, Brace, 1933)

Bochenski, I. M., *A History of Formal Logic*, traduzido por Ivo Thomas (Notre Dame, Ind.: University of Notre Dame Press, 1961)

Bourbaki, N., "The Architecture of Mathematics", *American Mathematical Monthly*, 57 (1950), 221-232

Bourbaki, N., *Éléments d'histoire des mathématiques* (Paris: Hermann, 1960)

Delachet, André, *Contemporary Geometry*, traduzido por H. G. Bergmann (New York: Dover Publications, 1962)

Dieudonné, Jean, "Recent Developments in Mathematics", *The American Mathematical Monthly*, 71 (1964), 239-248

Enriques, F., *The Historic Development of Logic*, traduzido por J. Rosenthal (New York: Holt, Rinehart, 1929)

Hilbert, David, "Mathematical Problems", traduzido por Mary Winston Newson, no *Bulletin of the American Mathematical Society* (2), **8** (1902), 437-479

Hilbert, David, *Foundations of Geometry*, traduzido por E. J. Townsend, 2.ª edição (Chicago: Open Court, 1910)

Hilbert, David, *Gesammelte Abhandlungen* (Berlin: Springer, 1932-1935, 3 volumes)

King, Amy, C. e C. B. Read, *Pathways to Probability* (New York: Holt, Rinehart, 1963)

LaSalle, J. P., e S. Lefschetz, eds., *Recent Soviet Contributions to Mathematics* (New York: Macmillan, 1962)

Lebesgue, Henri, *Leçons sur l'intégration* (Paris: Gauthier-Villars, 1904)

Lebesgue, Henri, *Measure and the Integral*, editado por K. O. May (San Francisco: Holden-Day, 1966)

Lebon, Ernest, *Henri Poincaré, bibliographie analytique des écrits* (Paris: Gauthier-Villars, 1909)

Le Lionnais, F., ed. *Les grands courants de la pensée mathématique*, nova edição (Paris: Albert Blanchard, 1962)

Luchins, Abraham S., e Edith H. Luchins, *Logical Foundations of Mathematics for Behavioral Scientists* (New York: Holt, Rinehart, 1965)

Manheim, Jerome H., *The Genesis of Point Set Topology* (New York: Macmillan, 1964)

Nevanlinna, Rolf, "Reform in Teaching Mathematics", *American Mathematical Monthly*, 73 (1966), 451-464

Nörlund, N. E., "Correspondence de Henri Poincaré et de Felix Klein", *Acta Mathematica*, **39** (1923), 94-132

[45]"L'avenir des mathématiques" em *Les grands courants de la pensée mathématique*, editado por F. Le Lionnais (1962), pp. 307-320; veja p. 317

[46]"The Future of Mathematics", *American Mathematical Monthly*, **57** (1950), 304

[47]D. J. Price, *Science since Babylon* (New Haven, Conn.: Yale University Press, 1961), Cap. 5. Cf. K. O. May, "Quantitative Growth of the Mathematical Literature", *Science*, **154** (1966), 1672-1673

Picard, Émile, *Les sciences mathématiques en France depuis un demi-siècle* (Paris: Gauthier-Villars, 1917)
Pierpont, James, "Mathematical Rigor, Past and Present", *Bulletin of the American Mathematical Society*, 37 (1928), 23-53
Poincaré, Henri, *Oeuvres* (Paris: Gauthier-Villars, 1916-1956, 11 volumes)
Prasad, Ganesh, *Mathematical Research in the Last Twenty Years* (Berlin: Walter de Gruyter, 1923)
Russel, Bertrand, *Principles of Mathematics*, 2.ª edição (New York: Norton, 1938)
Stone, M. H., "The Revolution in Mathematics", *Liberal Education*, 47 (1961), 304-327
Volterra, Vito, e outros, *Henri Poincaré: l'oeuvre scientifique, l'oeuvre philosophique* (Paris: Alcan, 1914)
Weil, André, "The Future of Mathematics", *American Mathematical Monthly*, 57 (1950), 295-306
Weyl, Hermann, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, baseado numa tradução de Olaf Helmer (Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1940)
Wilder, R. L., "The Origin and Growth of Mathematical Concepts," *Bulletin of the American Mathematical Society*, 59 (1953), 423-448

EXERCÍCIOS

1. Dê três definições ou descrições da matemática dos séculos dezenove e vinte, explicando qual prefere e por quê.

2. Descreva as idéias das três principais escolas de pensamento do século dezenove quanto aos fundamentos da matemática, mencionando uma ou duas figuras importantes de cada uma.

3. Descreva vários paradoxos e anomalias na matemática do século vinte, indicando seu significado.

4. Explique por que as distinções tradicionais entre álgebra e geometria se tornaram menos pronunciadas durante o século vinte. Que campo se desenvolveu mais rapidamente no século e por quê?

5. Os progressos da matemática se inspiraram mais na ciência e na tecnologia no século vinte que no dezenove? Explique.

6. Compare a influência sobre as atitudes matemáticas do teorema de Gödel com a da descoberta das grandezas incomensuráveis.

7. A taxa de crescimento das descobertas matemáticas está aumentando ou diminuindo durante o século vinte? Como você explica isso?

8. Os matemáticos gregos antigos hoje seriam classificados como formalistas, intuicionistas, ou logicistas? Explique.

9. Cite três matemáticos importantes, não nascidos nos Estados Unidos, que se tornaram membros do Institute for Advanced Study em Princeton (familiarmente conhecido como *Princetitute*) e descreva brevemente suas principais contribuições à matemática.

10. Mencione três aspectos em que a cidade francesa de Nancy esteve associada com matemáticos do século vinte.

11. Descreva algumas das contribuições da Polônia à matemática no intervalo entre as duas Guerras Mundiais.

12. Qual é a integral de Lebesgue em [0, 1] da função $f(x)$ onde $f(x) = 1$ se x racional e $f(x) = 0$ se x irracional? Dê os motivos de sua resposta.

13. Mostre que o produto de duas transformações lineares fracionárias (em uma variável) é uma transformação linear fracionária.

14. Se uma transformação linear fracionária

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

satisfaz à condição $ad - bc = 1$, mostre que a transformação inversa também satisfaz a essa condição.

*15. Se cada uma de duas transformações lineares fracionárias satisfaz à condição no Exc. 14, mostre que o produto delas também satisfaz.

16. Quais dos números seguintes são, ao que se sabe, transcendentes: π^e, e^π, e^e, π^π, $(\sqrt{2})^e$, $\pi^{\sqrt{3}}$, $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$, ln 1, tg $\pi/3$, i^i. Explique

*17. Prove que $\log_{10}3$ é irracional e use esse resultado e o teorema de Gelfond para mostrar que $\log_{10}3$ é transcendente. Quantos dos logaritmos comuns dos inteiros entre 1 e 10 inclusive são algébricos?

*18. Os três primeiros passos na definição da curva de von Koch ou do floco de neve são mostrados na Fig. 27.2. Ache o perímetro e a área da configuração correspondente ao quarto passo.

*19. O perímetro da curva de von Koch ou do floco de neve é infinito, mas a área limitada por ela é finita. Ache essa área.

Bibliografia geral

Archibald, R. C., *Outline of the History of Mathematics* (Buffalo: Slaught Memorial Papers of the Mathematical Association of America, 1949). Valioso especialmente por sua extensa bibliografia.
Ball, W. W. R., *A Short Account of the History of Mathematics* (Londres: Macmillan, 1888). Uma das mais populares histórias da matemática: apareceu em 6.ª edição em 1915 e foi reimpressa como brochura Dover em 1960. Obsoleta, mas ainda é interessante.
Ball, W. W. R., *Mathematical Recreations and Problems of Past and Present Times* (Londres: Macmillan, 1892). Muito popular; contém muito da história da matemática.
Bell, E. T., *Men of Mathematics* (New York: Simon and Schuster, 1937). Exposições biográficas muito bem escritas, assumem relativamente pouco conhecimento matemático.
Bell, E. T., *Development of Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1940). Excelente exposição, especialmente sobre a matemática moderna, para leitores de bom preparo matemático.
Bochner; Salomon, *The Role of Mathematics in the Rise of Science* (Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1966). Não uma narrativa contínua, mas uma coleção de ensaios.
Bourbaki, Nicolas, *Éléments d'histoire des mathématiques* (Paris: Hermann, 1960). Não é uma história conexa, mas exposições sobre certos aspectos, especialmente de tempos modernos.
Braunmühl, Anton von, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* (Leipzig: B. B. Teubner, 1900-1903, 2 volumes). Ainda o padrão no campo.
Cajori, Florian, *A History of Mathematics*, 2.ª edição (New York: Macmillan, 1919). A mais ambiciosa fonte em um volume em inglês.
Cajori, Florian, *A History of Mathematical Notations* (Chicago: Open Court, 1928-1929, 2 volumes). A obra definitiva sobre o assunto.
Cantor, Moritz, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (Leipzig: Teubner, 1892-1908, 4 volumes). A mais extensa história da matemática publicada até hoje. Alguns volumes estão em 2.ª edição e a obra toda existe em reimpressão.
Carruccio, Ettore, *Mathematics and Logic in History and in Contemporary Thought*, traduzido por Isabel Quigly (Chicago: Aldine, 1964). Um apanhado geral eclético. Na bibliografia predominam autores italianos.
Chasles, Michel, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, 2.ª edição (Paris, 1875). Obra clássica especialmente forte quanto à geometria sintética no começo do século dezenove.
Coolidge, J. L., *A History of Geometrical Methods* (Oxford: Clarendon, 1940). Excelente obra que pressupõe considerável conhecimento de matemático. Existe em brochura Dover de 1963.
Dickson, L. E., *History of the Theory of Numbers* (Washington, D. C.: Carnegie Intitution, 1919-1923). Definitivo em sua área. Existe em reimpressão, New York: Stechert, 1934.
Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées (Paris, 1904-1914). Isto é essencialmente uma tradução parcial de *Encyklopädie der mathematischen Wissenschsften* (Leipzig: Teubner, 1898-1935), mas a versão francesa contém muitas referências históricas adicionais.
Eves, Howard, *An Introduction to the History of Mathematics*, edição revista (New York: Holt, Rinehart and Winston, 1964). Texto notavelmente bem feito.
Gillespie, C. C., ed., *Dictionary of Scientific Bibliography* (a ser publicado em cerca de seis volumes por Charles Scribner's Sons, New York, começando em 1968).
Heath, T. L., *A History of Greek Mathematics* (Oxford; Clarendon, 1921, 2 volumes). A melhor exposição sobre o assunto em inglês. Existe em brochura, em forma um tanto abreviada como *A Manual of Greek Mathematics* (New York: Dover, 1963).
Hofman, J. E., *Geschichte der Mathematik* (Berlim: Walter de Gruyter, 1953-1957, 3 volumes; Vol. I nova edição, 1963). Os agradáveis volumes em tamanho de bolso contêm índices bibliográficos extraordinariamente úteis. Esses índices foram tragicamente omitidos na tradução em inglês que apareceu em dois volumes (New York: Philosophical Library, 1957-1959) sob os títulos *The History of Mathematics* e *Classical Mathematics*, o que tornou a tradução de utilidade muito limitada.
Itard, Jean e Pierre Dedron, *Mathématiques et mathématiciens* (Paris: Magnard, 1959). Elementar mas útil; contém extratos de fontes.
James, Glenn, e R. C. James, *Mathematics Dictionary*, 2.ª edição (Princeton, N. J.: D. Van Nostrand, 1959). Útil, mas não tão completo quanto Naas e Schmid.

Kaestner, A. G., *Geschichte der Mathematik* (Göttingen, 1796-1800, 4 volumes). Especialmente útil quanto à matemática prática e à ciência na Renascença.

Klein, Felix, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (Berlim, 1926-1927, 2 volumes). Apanhado em alto nivel, que ficou incompleto devido à morte do autor.

Kline, Morris, *Mathematics in Western Culture* (New York: Oxford, 1953). Agradavelmente escrito, em nivel popular.

Klügel, G. S., *Mathematisches Wörterbuch* (Leipzig, 1803-1836, 7 volumes). Retrata a situação do campo um século e meio atrás.

Loria, Gino, *Storia delle matematiche* (Turim: Sten, 1929-1933, 3 volumes). Obra sólida e substancial. Segunda edição, Milan: U. Hoepli, 1950.

Marie, Maximilien, *Histoire des sciences mathématiques* (Paris, 1883-1888, 12 volumes). Não uma história sistemática, mas uma série de biografias dispostas em ordem cronológica e arrolando as obras principais de cada um.

Midonick, Henrietta O., ed., *The Treasury of Mathematics* (New York: Philosophical Library, 1965). Útil, mas a seleção dá ênfase a contribuições não-européias.

Montucla, J. E., *Histoire des mathématiques*, nova edição (Paris, 1799-1802, 4 volumes). Ainda útil, especialmente para aplicações da matemática à ciência. Existe reimpressão, Paris: A. Blanchard, 1960.

Moritz, R. E., *Memorabilia Mathematica or the Philomath's Quotation Book* (New York, 1914). Contém mais de duas mil citações, distribuidas por assunto e com um indice. Existe em brochura Dover sob o título *On Mathematics and Mathematicians*.

Muir, Thomas, *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development* (Londres, 1906--1930, 4 volumes e suplemento). De longe a mais completa no campo. Existe reimpressão Dover.

Naas, Joseph, e H. L. Schmid, *Mathematisches Wörterbuch* (Berlim: Akademie, 1961, 2 volumes). Um dicionário absolutamente exemplar contendo número extraordinário de definições e biografias curtas.

Newman, James, ed., *The World of Mathematics* (New York: Simon e Schuster, 1956, 4 volumes). Contém muito material sobre história da matemática.

Read, C. B., "Articles on the History of Mathematics: A Bibliography of Articles Appearing in Six Periodicals". *School Science and Mathematics* (1959), 689-717. Especialmente útil quanto a material introdutório.

Sarton, George, *Introduction to the History of Science* (Baltimore: Carnegie Institution, 1927-1948, 3 volumes em 5). Obra monumental e instrumento indispensável na pesquisa da história da ciência e da matemática até 1400.

Sarton, George, *The Study of the History of Mathematics* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1936; New York: reimpressão em brochura Dover, 1957). Um guia breve mas útil. Veja também Sarton, *Horus: A Guide to the History of Science* (New York: Ronald Press, 1952)

Schaaf, W. L., *A Bibliography of Mathematical Education* (Forest Hills, N. Y.: Stevinus Press, 1941). Um índice de artigos em periódicos desde 1920, contendo mais de quatro mil itens.

Schaaf, W. L., *Recreational Mathematics: A Guide to the Literature*, 3.ª edição (Washington, D. C.: National Council of Teachers of Mathematics, 1963). Contém entre duas e três mil referências a livros e artigos.

Scott, J. F., *A History of Mathematics* (Londres: Taylor and Francis, 1958). Bom quanto a matemáticos ingleses mas desatualizado quanto ao periodo pré-helênico.

Smith, D. E., *History of Mathematics* (Boston: Ginn, 1923-1925, 2 volumes; brochura Dover, New York, 1958). Ainda muito útil quanto a detalhes biográficos, especialmente datas de nascimento e morte, e para aspectos elementares da matemática.

Smith, D. E., *A Source Book in Mathematics* (New York: McGraw Hill, 1929; brochura Dover, New York, 1959, 2 volumes). Útil, mas a seleção está longe de ser ideal.

Struik, D. J., *A Concise History of Mathematics*, 3.ª edição (New York: Dover, 1967). Breve, mas merecedora de confiança e em nivel muito erudito, com muitas referências.

Struik, D. J., *Source Book in Mathematics* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1968). Muito boa cobertura em álgebra, análise e geometria de 1200 a 1800.

Tannery, Paul, *Mémoires scientifiques* (Paris: Gauthier-Villars, 1912-1934, 13 volumes). Esses volumes contêm muitos artigos sobre história da matemática, especialmente da antiguidade grega e sobre o século dezessete, por uma das grandes autoridades no campo.

Taton, René, ed., *Histoire générale des sciences* (Paris: Presses Universitaires de France, 1957-1961, 3 volumes; tradução inglesa, New York: Basic Books, 1964-1965). Excelente exposição bem fundamentada.

Taylor, Eva, G. R., *The Mathematical Practitioners of ... England* (Cambridge: Cambridge University Press, 1954-1966, 2 volumes). Detalhes biográficos sobre pessoas de 1485 a 1840.

Todhunter, Isaac, *History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace* (Cambridge, 1865). Uma obra padrão e completa.

Tropfke, Johannes, *Geschichte der Elementar-Mathematik*, 2.ª edição (1921-1924, 7 volumes). Uma história importante para os ramos elementares. Alguns volumes apareceram numa 3.ª edição incompleta.

Van der Waerden, B. L., *Science Awakening*, traduzido por Arnold Dresden (New York: Oxford University Press, 1961). Uma exposição sobre a matemática grega e pré-helênica, com ilustrações atraentes. Existe uma edição em brochura (New York: Wiley, 1963).

Wieleitner, Heinrich, *Geschichte der Mathematik* (Parte II, de Descartes a cerca de 1800, Leipzig, 1911-1921, 2 volumes). Obra muito útil em nivel matemático médio; não confundir com a Sammlung Göschen *Geschichte der Mathematik* do mesmo autor, mais breve, em dois volumes (Berlim, 1939).

Youschkevitch, A. P., *Geschichte der Mathematik im Mittelalter* (Leipzig: Teubner, 1964). Exposição substanciosa e com autoridade.

Zeller, Irmã Mary Claudia, *The Development of Trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus* (Ann Arbor, Mich.: University of Michigan; Ph. D. Dissertation, 1944). O que há em inglês de mais parecido com uma história da trigonometria.

Zeuthen, H. G., *Geschichte der Mathematik im XVI und XVII Jahrhundert* (edição alemã, Leipzig: Teubner, 1903). Exposição sólida e útil.

Apêndice

Tabela cronológica

(As datas anteriores a –776 são apenas aproximações)

		5 000 000 000 000	Origem do sol
		–5 000 000 000	Origem da terra
		–600 000 000	Começo da Idade Paleozóica
		–225 000 000	Começo da Idade Mesozóica
		60 000 000	Começo da Idade Cenozóica
–50 000	Evidência de contagens	–2 000 000	Origem do homem
–25 000	Desenhos geométricos primitivos	–50 000	Homem de Neanderthal
		–25 000	Arte paleolítica; Homem de Cro-Magnon
		10 000	Agricultura mesolítica
		5000	Civilizações neolíticas
–4241	Origem hipotética do calendário egípcio		
		4000	Uso de metais
–3000	Numerais hieroglíficos no Egito	3500	Uso da roda de ceramista; escrita
		–3000	Uso de veículos com rodas
		–2800	Grande pirâmide
–2773	Provável introdução do calendário egípcio		
–2400	Notação posicional na Mesopotâmia	–2400	Império sumério-acadiano
–1850	Papiro de Moscou (Golonishev); ciferização		
		–1800	Código de Hamurabi
		–1700	Domínio do Egito pelos hicsos; Stonehenge na Inglaterra
		–1600	Domínio cassita na Mesopotâmia; novo reinado no Egito
		1400	Catástrofe em Creta
		–1350	Alfabeto fenício, uso do ferro; relógios de sol e água
–1100?	Chou Pei	–1200	Guerra de Tróia, Êxodo do Egito
		–776	Primeira olimpíada
		–753	Fundação tradicional de Roma
		–743	Era de Nabonassar
		–740	Obras de Homero e Hesíodo (aprox.)
		–586	Cativeiro na Babilônia

−585 Tales de Mileto; geometria dedutiva (?)
−540 Aritmética e geometria pitagóricas (aprox.)
Numerais em barra, na China (aprox.)
Sulvasūtras na Índia (aprox.)

−450 Terra esférica de Parmênides (aprox.)
−430 Morte de Zeno; obras de Demócrito
Astronomia de Filolaus (aprox.)
Os elementos de Hipócrates de Chios (aprox.)

−428 Nascimento de Arquitas; morte de Anaxágoras
−427 Nascimento de Platão
−420 Trissetriz de Hípias (aprox.)
Incomensuráveis (aprox.)

−369 Morte de Teaetetus
−360 Eudoxo sobre proporção e exaustão (aprox.)
−350 Menaecmus sobre secções cônicas (aprox.)
Dinostrato sobre quadratriz (aprox.)

−335 Eudemus: *História da Geometria* (aprox.)

−330 Autólico: *Sobre a esfera móvel* (aprox.)

−320 Aristeu: *Cônicas* (aprox.)

−300 *Os elementos* de Euclides (aprox.)

−260 Astronomia heliocêntrica de Aristarco (aprox.)

−230 Crivo de Eratóstenes (aprox.)
−225 *As cônicas* de Apolônio (aprox.)

−538 Persas tomam a Babilônia
−480 Batalha das Termópilas
−477 Formação da Liga de Delos
−461 Começo da Idade de Péricles

−430 Hipócrates de Cos (aprox.)
Doutrina atômica (aprox.)

−429 Morte de Péricles; peste em Atenas

−404 Fim da Guerra do Peloponeso
−399 Morte de Sócrates; *Anabasis* de Xenofonte

−347 Morte de Platão

−332 Fundação de Alexandria

−323 Morte de Alexandre
−322 Morte de Aristóteles e de Demóstenes

−311 Começo da Era Selêucida na Mesopotâmia
−306 Ptolomeu I (Sóter) do Egito

−283 Faros em Alexandria
−264 Começa a Primeira Guerra Púnica

−232 Morte de Asoka, o "Constantino Budista"

−212 Morte de Arquimedes

−180 Cissóide de Diocles (aprox.)
Conchóide de Nicomedes (aprox.)
Hipsicles e círculo de 360° (aprox.)

−150 Espiras de Perseus (aprox.)

−140 Trigonometria de Hiparco (aprox.)

−60 Geminus sobre postulado das paralelas (aprox.)

+75 Obras de Heron de Alexandria (aprox.)

100 Nicômaco: *Aritmética* (aprox.)
Menelau: *Esferas* (aprox.)

125 Teon de Smirna e a matemática platônica
150 Ptolomeu: *O Almajesto* (aprox.)

250 Diofante: *Aritmética* (aprox.?)

320 Papus: *Coleções matemáticas* (aprox.)

390 Teon de Alexandria (evidência)
415 Morte de Hipatia

470 Tsu Ch'ung-Chi: valor de π (aprox.)
476 Nascimento de Aryabhata
485 Morte de Proclus

520 Antêmio de Tiales e Isidoro de Mileto
524 Morte de Boécios

529 Fechamento das escolas de Atenas

−210 Começa a grande muralha da China

−166 Revolta de Judas Macabeu

−146 Destruição de Cartago e Corinto

−121 Caio Graco é morto
−75 Cícero restaura o túmulo de Arquimedes
−60 Lucrécio: *De rerum natura*
−44 Morte de Júlio César

+79 Morte de Plínio o Velho no Vesúvio

116 Trajano amplia o Império Romano
122 Começa a muralha de Adriano na Inglaterra

180 Morte de Marco Aurélio

286 Divisão do Império por Diocleciano

324 Fundação de Constantinopla
378 Batalha de Adrianopla

455 Vândalos saqueiam Roma

476 Tradicional "queda" de Roma

496 Clovis adota o cristianismo

526 Morte de Teodorico
529 Fundação do mosteiro de Monte Cassino

560 Comentários de Eutócio sobre Arquimedes (aprox.)
628 Brahmasphuta siddhanta
662 O bispo Sebokht menciona os numerais hindus
735 Morte do Venerável Beda
775 Obras hindus traduzidas para o árabe
830 Al-Khowarizmi: *Algebra* (aprox.)
901 Morte de Thabit ibn-Qurra
998 Morte de abu'l-Wefa
1037 Morte de Avicena
1039 Morte de Alhazen
1048 Morte de al-Biruni
1114 Nascimento de Bhaskara
1123 Morte de Omar Khayyam
1142 Adelar de Bath traduz Euclides
1202 Fibonacci: *Liber abaci*
1260 Trissecção de Campanus (aprox.)
Jordanus Nemorarius: *Arithmetica* (aprox.)
1270 Wm. de Moerbeke traduz Arquimedes (aprox.)
1274 Morte de Nasir Eddin

532 Construção de Hágia Sophia por Justiniano
590 Gregório, o Grande, é eleito papa
622 Hejira de Maomé
641 Queimada a biblioteca de Alexandria
732 Batalha de Tours
814 Morte de Carlos Magno
910 Abadia beneditina em Cluny
987 Ascensão de Hugo Capeto
999 Gerbert torna-se papa Silvestre II
1028 Escola em Chartres
1066 Batalha de Hastings
1096 Primeira Cruzada
1100 Henrique I da Inglaterra coroado
1170 Assassinato de Thomas à Becket
1204 Cruzados saqueiam Constantinopla
Morte de Maimônides
1215 Magna Carta
1265 "Primeiro" parlamento na Inglaterra
1271 Viagens de Marco Polo; relógios mecânicos (aprox.)
1286 Invenção dos óculos (aprox.)

1303 Chu Shi-kié e o triângulo de Pascal
1328 Bradwardine: *Liber de proportionibus*
1336 Morte de Richard of Wallingford
1360 Latitude de formas de Oresme (aprox.)
1436 Morte de al-Kashi
1464 Morte de Nicholas de Cusa
1472 Peurbach: *Nova teoria dos planetas*
1476 Morte de Regiomontanus
1482 Primeira impressão de Euclides
1489 Uso de + e − por Widmann
1492 Uso do ponto decimal por Pellos
1494 Pacioli: *Summa*
1525 Rudolff: *Coss*
1526 Morte de Scipione dal Ferro
1527 Apian publica o triângulo de Pascal
1543 Tartaglia publica o *Arquimedes* de Moerbeke
Copérnico: *De revolutionibus*
1544 Stifel: *Arithmetica integra*
1545 Cardan: *Ars magna*
1557 Recorde: *Whetstone of Witte*

1348 A Peste Negra
1364 Morte de Petrarca
1431 Joana d'Arc é queimada
1440 Invenção da imprensa
1453 Queda de Constantinopla
1473 Capela Sistina
1483 Assassinato dos príncipes na Torre
1485 Henrique VII, primeiro Tudor
1492 Descoberta da América por Colombo
1498 Execução de Savonarola
1517 Reforma Protestante
1520 Campo do Tecido de Ouro
1534 Ato de Supremacia
1543 Vesalius: *De fabrica*
Ramus: *Reprovação de Aristóteles*
1553 Servetus queimado em Genebra
1558 Ascensão de Elizabeth I

1564 Nascimento de Galileu

1572 Bombelli: *Algebra*
1579 Viète: *Canon mathematicus*

1585 Stevin: *La disme*
Relato de Harriot sobre "Virginia"

1595 Pitiscus: *Trigonometria*

1603 Morte de Viète
1609 Kepler: *Astronomia nova*
1614 Logaritmos de Napier

1620 Logaritmos de Bürgi

1629 Método de máximos e mínimos de Fermat
1631 Harriot: *Artis analyticae praxis*
Oughtred: *Clavis mathematicae*
1635 Cavalieri: *Geometria indivisibilibus*

1637 Descartes: *Discours de la méthode*
1639 Desargues: *Brouillon projet*
1640 *Essay pour les coniques* de Pascal
1642 Nascimento de Newton; morte de Galileu

1647 Morte de Cavalieri e de Torricelli

1655 Wallis: *Arithmetica infinitorum*
1657 Neil retifica sua parábola
1658 Relógio de pêndulo cicloidal de Huygens

1564 Nascimento de Shakespeare; mortes de Vesalius e Miguelângelo
1572 Massacre de S. Bartolomeu

1584 Assassinato de Guilherme de Orange

1588 Drake derrota a armada espanhola

1598 Edito de Nantes
1603 Morte de Wm. Gilbert e de Elizabeth I
1609 Telescópio de Galileu

1616 Morte de Shakespeare e de Cervantes
1620 Desembarque dos Peregrinos
1626 Morte de Francis Bacon e de Willebrod Snell
1628 Harvey: *De motu cordis et sanguinis*

1636 Fundação da Universidade de Harvard

1643 Ascenção de Luiz XIV
1644 Barômetro de Torricelli

1649 Carlos I decapitado
1651 Hobbes: *Leviathan*
Bomba de ar de Von Guericke

1660 A Restauração
1662 Fundada a Royal Society
1666 Fundada a Académie des Sciences

1667 Gregory: *Geometriae pars universalis*
1668 Mercator: *Logarithmotechnia*
1670 Barrow: *Lectiones geometriae*
1672 Assassinato de De Witt
1678 Teorema de Ceva

1684 Primeiro artigo de Leibniz sobre Cálculo

1687 *Principia* de Newton

1690 Rolle: *Traité d'algèbre*
1696 Braquistocrona (Bernoullis)
Regra de l'Hospital

1706 Uso de π por William Jones

1715 Taylor: *Methodus incrementorum*
1718 De Moivre: *Doctrine of Chances*
1722 Cotes: *Harmonia mensurarum*
1730 Fórmula de Stirling
1731 Clairaut sobre curvas reversas
1733 Saccheri: *Euclides vindicatus*
1734 Berkeley: *The Analyst*

1742 Maclaurin: *Treatise of Fluxions*
1743 D'Alembert: *Traité de dynamique*
1748 Euler: *Introductio*; Agnesi: *Instituzioni*

1750 Regra de Cramer; elipse de Fagnano

1759 *Die freye Perspektive* de Lambert

1770 Trigonometria hiperbólica

1679 Habeas Corpus
1682 Fundada *Acta eruditorum*
1683 Sitio de Viena

1685 Revogação do Edito de Nantes

1689 A Revolução Gloriosa

1699 Morte de Racine
1702 Começo da Guerra da Rainha Anne

1711 Nascimento de Hume

1718 Termômetro de Fahrenheit

1730 Termômetro de Rèaumur

1737 Linnaeus: *Systema naturae*
1738 Daniel Bernoulli: *Hydrodynamica*
1740 Ascenção de Frederico, o Grande
1742 Termômetro centígrado

1749 Volume I da *Histoire naturelle* de Buffon

1751 Volume I da *Encyclopédie* de Diderot
1752 Pipa de Franklin

1767 Máquina a vapor aperfeiçoada de Watt

1777	Problema da agulha de Buffon
1779	Bézout sobre eliminação
1788	Lagrange: *Mécanique analytique*
1794	Legendre: *Éléments de géométrie*
1795	Monge: *Feuilles d'analyse*
1796	Laplace: *Système du monde*
1797	Lagrange: *Fonctions analytiques*
	Mascheroni: *Geometria del compasso*
	Wessel: *Essay on . . . direction*
	Carnot: *Métaphysique du calcul*
1801	Gauss: *Disquisitiones arithmeticae*
1803	Carnot: *Géométrie de position*
1810	Volume I de *Annales* de Gergonne
1815	"The Analytical Society" em Cambridge
1817	Bolzano: *Rein analytischer Beweis*
1822	Poncelet: *Traité*; séries de Fourier; teorema de Feuerbach
1826	Fundado o *Journal* de Crelle
	Princípio de dualidade (Poncelet, Plücker, Gergonne)
	Funções elíticas (Abel, Gauss, Jacobi)
1827	Coordenadas homogêneas
	(Möbius, Plücker, Feuerbach)
	Cauchy: *Calcul des Residus*
1828	Green: *Electricity and Magnetism*
1829	Geometria de Lobachevsky
	Morte de Abel aos 26 anos
1830	Peacock: *Algebra*

1774	Descoberta do oxigênio (Priestley, Scheele, Lavoisier)
1776	Declaracão de Independência Americana
1781	Descoberta de Uranus por Herschel
1783	Composição da água (Cavendish, Lavoisier)
1789	Revolução Francesa
1794	Lavoisier guilhotinado
1795	École Polytechnique; École Normale
1796	Vacinação (Jenner)
1799	Sistema métrico
1800	Pilha de Volta
1801	Descoberta de Ceres
1803	Teoria atômica de Dalton
1804	Napoleão coroado imperador
1814	Linhas de Fraunhofer
1815	Batalha de Waterloo
1817	Vibrações ópticas transversas (Young e Fresnel)
1820	Oersted descobre o eletromagnetismo
1826	Obra de Ampère em eletrodinâmica
1827	Lei de Ohm
1828	Síntese da uréia por Wöhler
1829	Morte de Thomas Young
1830	Lyell: *Principles of Geology*
	Comte: *Cours de philosophie positive*

1832	Bolyai: *Ciência Absoluta do Espaço*
	Morte de Galois aos 20 anos
1834	Steiner torna-se professor em Berlim
1836	Fundado o *Journal* de Liouville
1837	*Cambridge and Dublin Mathematical Journal*
1843	Quatérnions de Hamilton
1844	Grassmann: *Ausdehnungslehre*
1847	Von Staudt: *Geometrie der Lage*
1852	Chasles: *Traité de géométrie supérieure*
1854	Habilitationschrift de Riemann
	Boole: *Laws of Thought*
1855	Dirichlet sucede a Gauss em Göttingen
1863	Cayley nomeado em Cambridge
1864	Weierstrass nomeado em Berlim
1872	Dedekind: *Stetigkeit und irrationale Zahlen*
	Heine: *Elemente*
	Méray: *Nouveaux précis*
	Klein: Erlanger Programm
1873	Hermite prova que e é transcendente
1874	*Mengenlehre de Cantor*
1877	Sylvester nomeado em Johns Hopkins
1881	Gibbs: *Vector Analysis*
1882	Lindemann prova que π é transcendente
1884	Frege: *Grundlagen der Arithmetik*
1888	Começos da American Mathematical Society

1831	Indução eletromagnética de Faraday
1832	Engenho analítico de Babbage
1836	Primeiro telégrafo
1842	Conservação da energia (Mayer e Joule)
1846	Descoberta de Netuno (Adams e Leverrier)
	Uso da anestesia
1848	Marx: *Manifesto Comunista*
1850	Dickens: *David Copperfield*
1858	Cabo Atlântico
1859	Darwin: *Origin of Species*
	Espectroscopia química (Bunsen e Kirchhoff)
1868	Descoberta das cavernas Cro-Magnon
1869	Abertura do Canal de Suez
	Tabela periódica de Mendeleef
1873	Maxwell: *Electricity and Magnetism*
1876	Telefone de Bell
1887	Descoberta das ondas herzianas
1888	Fundado o Institut Pasteur

1889	Axiomas de Peano
1895	Poincaré: *Analysis situs*
1896	Provado o teorema dos números primos (Hadamard e De la Vallée Poussin)
1899	Hilbert: *Grundlagen der Geometrie*
1900	Problemas de Hilbert
	Volume I de Russell e Whitehead: *Principia*
1903	Integração de Lebesgue
1906	Cálculo funcional (Fréchet)
1907	Brouwer e intuicionismo
1914	Hausdorff: *Grundzüge der Mengenlehre*
1916	Teoria geral da relatividade de Einstein
1917	Hardy e Ramanujan sobre teoria dos números
1923	Espaços de Banach
1930	Weyl sucede a Hilbert em Göttingen
1931	Teorema de Gödel
1933	Weyl se demite de Göttingen
1934	Teorema de Gelfond
1939	Volume I de Bourbaki: *Éléments*
1955	Álgebra homológica (Cartan e Eilenberg)
1963	Paul J. Cohen sobre a hipótese do continuum
1966	15.º Congresso Internacional de Matemática (Moscou)

1895	Descoberta dos raios X (Roentgen)
1896	Descoberta da radioatividade (Becquerel)
1897	Descoberta do electron (J. J. Thomson)
1898	Descoberta do radium (Marie Curie)
1900	Freud: *Die Traumdeutung*
1901	Teoria quântica de Planck
1903	Primeiro vôo com motor
1905	Relatividade especial (Einstein)
1914	Assassinato do arquiduque austríaco
1915	Abertura do Canal de Panamá
1917	Revolução Russa
1927	Lindbergh voa sobre o Atlântico
1928	Fleming descobre a penicilina
1933	Hitler torna-se Chanceler
1941	Pearl Harbor
1945	Bombardeio de Hiroshima
1946	Primeira reunião da ONU
1963	Assassinato do Presidente Kennedy
1965	Morte de Sir Winston Churchill

Índice

Aaboe, Asger, 127
Abacistas, 184
Ábaco, 44, 45, 145-146, 147, 199
Abd-al-Hamid ibn-Turk, 170, 178
Abel, N. H., 375, 360, 378, 384, 388, 432, 433
  função abeliana, 376, 412, 426
  teorema de Abel-Ruffini, 375
Aberrância, 356
Abraham ibn Ezra, 184
Abu-al-Hasan, 177
Abu-Kamil, 167, 178
Abu'l-Wefa, 172, 177
Adam, Charles, 251, 267
Adelard de Bath, 183
Agostini, Amedeo, 285
Aha, problemas com, 12, 17
Ahmes, 9, 11, 13, 17, 140
  Papiro de, *veja também* Papiro Rhind
Aiyar, T. V. V., 164
Alavanca, lei da, 89
Al-Battani, 172
Alberti, Leon Battista, 215
Alberto Magnus, 189
Alberuni, *veja também* Al-Biruni
Al-Biruni, 143, 152, 153, 154, 174
Alcuin de York, 182
Alembert, J. L. d', *veja também* D'Alembert, J. L.
Alengry, Franck, 348, 364
Alexandre de Afrodisias, 50
Alexandre de Villedieu, 184
Alexandre, o Grande, 20, 70, 72, 74, 124
Alexandroff, Paul, 454, 459
Alfabeto, 33
Algarismo, 184, 206
  veja também Indo-arábicos, numerais
Álgebra, abstrata, 419-438
  arábica, 166-171, 174-176
  babilônia, 22, 132, 134, 168
  cartesiana, 247-253
  chinesa, 143, 148, 149
  da lógica, 428
  diofantina, 130, 132-134
  egípcia, 12, 22, 28, 30, 31
  estágios na, 132
  européia medieval, 187
  geométrica, 57, 76, 79-83, 114, 168, 175, 176, 198, 211
  grega, 133
  hindu, 154, 160-163
  leis da, 421-423, 429
  moderna, 454, 457
  não-comutativa, 423-425, 432
  newtoniana, 301
  nome, 166
  pai da, 130, 132, 167
  renascentista, 201-213
  simbólica, 170, 247, 420
  sincopada, 132, 167, 168, 223
  teorema fundamental da, 330, 370
Algoritmo, Arquimediano, 93
  Euclidiano, 84
  origem da palavra, 166, 184
  raiz quadrada, 21, 52, 301
  veja também Al-Khowarizmi
Alhazen, 174
  problema de, 174
  Tesouro da óptica, 174
Al-jabr, *veja também* Al-Khowarizmi, *Al-Jabr*
Al-Karkhi, 172, 174, 176
Al-Kashi, 150, 177, 180, 210, 235
Al-Khowarizmi, 166-171, 174, 178, 183, 247
  Al-jabr, 166-170, 174, 184, 185, 188, 201, 203, 205, 206, 327
  De numero hindorum, 166
Allman, G. J., 45, 60
Amir-Moez, A. R., 175, 178
Ampère, A. M., 384
Análise, 65, 138, 235, 280, 289, 326, 390, 394
  aritmetização da, 404-417
Analysis situs, *veja também* Topologia
Analytic Society, 394, 419
Anaxágoras de Clazomene, 47, 59, 61
Anderson, Alexander, 236, 281
Anel, 435
Angeli, Stefano degli, 281, 321
Ângulo, de contingência, 67, 191
  medida do, 26, 116, 118, 157
  medida em radianos, 157
  trissecção do, 48, 51, 59, 105, 135, 189, 225
Antemius de Trales, 140, 181
  Sobre espelhos que queimam, 141
Anthonisz, A., 235
Antologia grega, 130, 140
Apastamba, 151
Apian, Peter, 206, 218
Ápices, 182
Apolônio de Perga, 74, 86, 104-114, 118, 124, 126, 130, 135, 138, 140, 171, 190, 197, 200, 225, 236, 253, 263, 338, 388
  As cônicas, 106-114, 124, 138, 140, 171, 190, 220, 253, 262, 270, 279
  Dividir em uma razão, 105, 106, 138
  Inclinações, 105
  Lugares planos, 105, 253
  Problema de, 105, 236
  Sobre Secção Determinada, 104, 105
  Sobre tangências, 104, 105, 236
Aplicação de áreas, 57, 81, 108
Arago, François, 324, 364
Aratus de Soli, 118
Archibald, R. C., 9, 14, 16, 19, 27, 31, 87, 96, 331, 461
Arquimedes de Siracusa, 44, 59, 68, 89-102, 104, 114, 116, 122, 124, 126, 129, 140, 171, 174, 190, 197, 198, 200, 220, 228, 234, 236, 238, 241, 251, 260, 276, 316, 369, 373, 452
  axioma de, 66, 95
  Computador de areia, 92, 135
  Livro de Lemas, 98
  Método, 99-102, 117, 124, 216, 261
  Problema do gado, 99, 161
  Quadratura da parábola, 94, 96, 190, 261
  Sobre conóides e esferóides, 95, 190
  Sobre corpos flutuantes, 91, 101
  Sobre o equilíbrio de planos, 90, 99, 101
  Sobre a esfera e o cilindro, 96, 99, 101, 140, 190

Sobre espirais, 93, 96, 101, 190
Sobre as medidas do círculo, 93, 99, 101, 190, 191
Sólidos de, 99
teorema da corda quebrada, 99
Arco, comprimento de, *veja também* Curvas, comprimento de
Área, do círculo, 13, 28, 30, 93, 99, 101, 190, 191
do hemisfério, 15
do quadrilátero, 13, 29, 30
do triângulo, 5, 13, 15, 26, 28
Argand, J. R., 379
Aristeu, 74, 138
Aristarcos de Samos, 92, 116, 119, 213
Aristóteles, 4, 48, 50, 59, 61-72, 77, 117, 125, 191, 202, 214, 251, 449
Aritmética, árabe, 166, 172
babilônia, 19-22, 124
chinesa, 144-147
egípcia, 8-12
hindu, 155-159
leis da, 420, 434, 444
pitagórica, 38-44, 132
Platônica, 64-66, 132
primitiva, 2
veja também Logística
Arquitas, 21, 38, 47, 48, 52, 59, 61, 65, 70
Artin, Emile, 434
Aryabhata, 150, 153, 160, 174
Aryabhatiya, 153, 154
Astronomia, 52, 61, 71, 116-118, 143, 238, 239, 362, 373, 442
árabe, 171, 176
chinesa, 143
copérnica, 213
de Apolônio, 106, 118, 122
de Eudoxo, 68, 122
de Hiparco, 118, 122
de Ptolomeu, 122
leis da, 238, 298
pitagórica, 39
At-Tusi, *veja também* Nasir Eddin al-Tusi
Austin, J. L., 436
Autólico de Pitane, 71, 74
Averroes, 251
Avicena, 174, 176

Babbage, Charles, 394, 419, 445, 456
Babilônia, matemática da, 18-32
Bachet, C. G. de, 258
Bacon, Francis, 222
Bacon, Roger, 180, 189
Baker, H. F., 440
Bakshali, manuscrito, 159
Ball, W. W. R., 300, 303, 394, 419, 437, 461
Banach, Stefan, 447
espaços de, 447, 455, 457
Baravelle, Hermann von, 408
Barras, numerais em, 145
Barraclough, June, 348
Barret, H. M., 140
Barrow, Isaac, 270, 284-285, 287, 290, 293, 295, 306
Bartels, J. M., 396
Bayes, Thomas, 362
Beaune, de, *veja também* Debeaune, Florimond
Bechtolsheim, Lulu, 452
Becker, O., 68, 72
Beda, o Venerável, 182
Bell, E. T., XI, 126, 342, 359, 364, 374, 384, 398, 399, 406, 412, 413, 416, 417, 422, 423, 427, 430, 431, 434, 437, 441, 451, 459, 461
Beltrami, Eugênio, 340, 399, 401
Beman, W. W., 408, 410
Berberian, S. K., 446
Bergmann, H. G., 459
Berkeley, George, 306, 316, 322, 338
Berlim, Papiro de, 14
Bernays, P., 448
Bernkopf, Michael, 453, 459
Bernoulli, Christoph, 311
Bernoulli, Daniel, 310-312, 324, 328, 334, 335, 348, 404
Bernoulli, Daniel II, 311
Bernoulli, Jacques, 306-309, 318, 322, 324, 328
Ars conjectandi, 308, 313
desigualdade de, 307
equação de, 307
lemniscata de, 307
números de, 308
Bernoulli, Jacques II, 311
Bernoulli, Jean, 306, 309-311, 314, 316, 318, 322, 324, 328
Bernoulli, Jean II, 311
Jean III, 311
Johann Gustav, 311
Nicholas, 311, 321, 324, 334
árvore genealógica dos, 306
Bernstein, Jeremy, 456, 459
Bertrand, J. L. F., 372
Bessel, F. W., 374
Beth, E. W., 459
Betti, Enrico, 442
números de, 442
Bézout, Etienne, 341, 345, 356
teorema de, 315
Bhaskara, 161-163
Lilavati, 162
Vija-Ganita, 161
Bieberbach, L., 445
Bienewitz, *veja também* Apian, Peter
Billingsley, H., 198
Binet, J. P. M., 376
Binomial, teorema, 21, 150, 159, 176, 178, 281, 287, 295
veja também Triângulo aritmético
Biot, J.-B., 352, 357
Birkhoff, Garrett, 434
Björnbo, A., 50
Black, Max, 450, 459
Bobillier, Étienne, 392
Bochenski, I. M., 428, 437, 459
Bochner, Salomon, 461
Boécio, 131, 139, 141, 180, 181, 185, 188, 191, 202
Arithmetica, 132, 139, 182
Geometria, 139
Bolyai, Janos, 397, 402, 409, 443
Bolyai, Wolfgang, 383, 396, 397
Bolzano, Bernhard, 381, 384, 404, 408, 413, 435, 443
teorema de Bolzano-Weierstrass, 408
Bombelli, Rafael, 210, 232
Álgebra, 211, 214, 215, 233
Boncompagni, B., 195, 384
Bond, J. D., 214, 220
Bonola, R., 176, 321, 322, 340, 342, 402
Boole, George, 419, 427-430, 435, 438, 441, 444
álgebra de, 429
Laws of Thought, 429
Borel, Emile, 450, 454

Boron, L. F., 445
Bortolotti, Ettore, 31, 215, 220
Bosmans, Henri, 265, 267
Bosse, Abraham, 263
Bourbaki, Nicolas, 417, 425, 436, 438, 458, 461
Boutroux, Pierre, 268
Braquistócrona, 296, 307
Bradwardine, Thomas, 190, 195, 200
Brahe, Tycho, 227, 238
Brahmagupta, 160-162, 165, 166, 168, 173
Brahmasphuta Siddhānta, 160
fórmulas de, 160, 162, 174
Brasch, F. E., 238, 243
Brassine, E., 267
Braunmühl, A. von, 127, 243, 461
Brianchon, C. J., 387, 391
teorema de, 387
Briggs, Henry, 222, 230, 278, 283
Brill, A., 384, 417
Bring, E. S., 318
Broadbent, T. A. A., 430
Bromwich, T. J., 102
Brouncker, William, 283
Brouwer, L. E. J., 416, 448, 453
Browell, W. R., 354, 364
Bruins, E. M., 31
Brumbaugh, R. S., 72
Brunelleschi, Filippo, 215
Brunet, Pierre, 333, 342
Brunschvicg, Léon, 268
Bubnov, N., 155, 163
Buffon, G. L. L., Comte de, 312, 335, 341
problema da agulha de Buffon-Laplace, 335-362
Bürgi, Jobst, 222, 230, 233, 234
Burkill, J., 452
Burlingame, Anne E., 364
Busard, H., 195
Bussey, W. H., 265

Cajori, Florian, XI, 56, 60, 159, 178, 185, 225, 230, 243, 265, 292, 303, 316, 322, 342, 364, 402, 417, 461
Calculator, *veja também* Suiseth, Richard
Cálculo, 163, 242, 257, 289-292, 295, 307, 316, 379
controvérsias, 316, 319, 331, 354
descoberta do, 287, 292, 303, 379
diferencial, 255, 284, 290, 294, 296, 331
funcional, 452
generalizado, 455
integral, 67, 96, 193, 256, 279-283, 380, 451
nome, 296, 307, 380, 410-411
teorema fundamental do, 257, 282, 291, 292
Cálculo de variações, 310-311, 349, 360, 453, 455
Cambridge Mathematical Journal, 394, 424
Campanus, J., 188, 191, 202
Cantor, Georg, 408, 410, 413-417, 419, 430, 435, 442, 448, 450, 453
axioma de Cantor-Dedekind, 410
Cantor, Moritz, XII, 188, 189, 195, 218, 285, 344, 364, 461
Carathéodory, C., 360
Cardan, Jerome, 177, 206-211, 213, 220, 265, 287, 301, 318
Ars magna, 206-210
De subtilitate, 207
Practica arithmetice, 208
Carnot, Lazare, 344-348, 353-357, 359, 361, 363, 384, 387, 390
Correlation des figures, 354
Géométrie de position, 355, 387
Réflexions, 354
Carnot, árvore genealógica, 353
Carroll, Lewis, *veja também* Dodgson, C. L.
Carruccio, Ettore, 31, 437, 438, 461
Carrus, S., 390
Cartan, Henri, 457
Cartografia, 218
Caspar, Max, 243
Cassiodoro, 181
Castelnuovo, G., 267, 285
Cataldi, P. A., 283
Catenária, 239, 278, 307
Catóptrica, *veja também* Reflexão, lei da
Cauchy, A.-L., 337, 374, 375-378, 379-384, 390, 394, 407, 408, 411, 412, 413, 426, 432, 435, 443, 452
equações de Cauchy-Riemann, 331, 398, 406
teorema do valor médio, 381
Cavalieri, Bonaventura, 222, 239, 241-243, 245, 251, 256, 259, 268, 280, 283, 284, 308
Geometria indivisibilibus, 241, 279
princípio de, 59, 241
Cayley, Arthur, 394, 399, 419, 424-426, 427, 438
Cesari, L., 452
Ceulen, Ludolph van, 235
Ceva, Giovanni, 320
Chace, A. B., 9, 16
Chasles, M., 141, 285, 364, 395, 402, 461
Chebichev, P. L., *veja também* Tchebycheff, P. L.
Child, J. M., 284, 285, 295, 303
Ch'in Chiu-shao, 149
Chou Pei, 143
Chui-chang suan-shu, *veja também* *Nove capítulos*
Chuquet, Nicolas, 202, 205, 211, 214, 220
Triparty, 202-204
Chu Shih-chieh, 149-150, 151
Cícero, 58, 97
Ciclóide, 114, 239, 259, 267, 274, 276, 277, 280, 294, 307
Ciferização, 9, 43, 145, 154, 155
Cipolla, M., 31
Círculo, área do, 13, 28, 30, 49, 57, 66, 67, 68, 93, 144, 153, 162, 238
circunferência do, 13, 28, 162
nove pontos, 388
osculador, 172
quadratura do, 48-50, 59, 70, 94, 135, 144, 199
Clagett, Marshall, 45, 61, 102, 132, 141, 181, 188, 190, 192, 193, 195, 233, 257, 281, 340, 407, 421
Clairaut, A. C., 332, 337, 383
Clairaut le cadet, 333
Clark, W. E., 154, 163
Clarke, A. A., 371, 385
Clarke, F. M., 212, 220
Clavius, Christoph, 223, 236, 245
Clebsch, Alfred, 394, 402
Clerke, Agnes M., 225, 312
Clifford, W. K., 431
Cohen, I. B., 300
Cohen, M. R., 75, 87, 102, 127, 130, 132, 140, 141
Cohen, P. J., 444
Colebrooke, H. T., 160, 163
Collins, John, 282, 291, 292, 293
Colombo, C., 132, 155, 204
Commandino, Federigo, 220, 222
Commercium epistolicum, 303
Complexo, número, *veja também* Número imaginário
Conant, Levi, 1, 5
Condorcet, M. J. A. N. C. de, 344, 346-349, 353, 364
Congruência, teoria da, 358, 361, 371

Cônicas, secções, 69, 107-114, 175, 236, 262-265, 272, 278, 299, 315, 401
 nomes de, 95, 107
Conjuntos, *veja também* Teoria dos conjuntos
Conóide, 280
Conon de Alexandria, 94
Contar, origem, 3
Continuidade, 55, 58, 191, 410, 416, 443, 452
 definição da, 380
 princípio de, 237, 262, 390
Convergência, 282, 307, 327, 329, 360, 381, 382, 405, 409, 412
 critério de Cauchy-Bolzano, 409
 critério da razão, 337, 382
 uniforme, 412
Coolidge, J. L., 70, 73, 114, 215, 216, 263, 267, 270, 272, 283, 285, 310, 322, 342, 349, 388, 395, 396, 400, 402, 461
Coordenadas, 69, 109, 114, 193, 248, 251, 253, 272, 278, 300, 355
 de reta, 393, 399
 homogêneas, 392, 395
 intrínsecas, 355
 polares, 300, 308, 319, 362
Copérnico, N., 40, 116, 123, 172, 177, 202, 212, 213, 214, 218, 231, 396
 teorema de, 214, 271
Cor, natureza da, 287, 300
Cornford, F. M., 65, 73
Co-senos, lei dos, 82
Cotes, Roger, 314, 320, 327, 431
Court, N. A., 263, 388, 389
Coxeter, H. S. M., 82, 114, 186
Cramer, Gabriel, 317, 341
 paradoxo de, 315, 391
 regra de, 317, 341, 376
Crelle, A. L., 375, 378
 Journal de Crelle, 378, 388, 393, 395, 405, 410, 412, 414, 324
Cremona, Luigi, 389, 399
Crowe, M. J., 424, 438
Cubos, soma de, 27, 132
Cúbica, equação *veja também* Equações cúbicas
Cuneiforme, escrita, 7, 18, 20, 30, 33
 textos tabelas, 21
Curva de distribuição normal, 313, 361
Curvatura, 276, 277, 296, 310, 340, 355, 383, 398
 centro de, 112
 raio de, 276, 300, 308
Curvas, classificação das, 109, 135, 217, 249-251, 282, 300, 321, 338
 comprimento das, 139, 238, 251, 261, 267, 277, 280, 321, 448
 definição, 68, 93, 114, 137, 437
 de dupla curvatura, 137, 333
 floco de neve, 448
 que preenchem uma região, 437, 447
Cusa, Nicholas de *veja também* Nicholas de Cusa

D'Alembert, J. L., 324, 329-336, 337, 341, 344, 348, 354, 379, 382, 398, 404, 450
 teorema de, *veja também* Álgebra, teorema fundamental da
Dantscher, Victor, 417
Dantzig, Tobias, 45, 127
Darboux, Gaston, 443
Darwin, Charles, 1, 440, 442, 455
Darwin, G. H., 442
Datta, B., 151, 163
David, Florence N., 267
Davies, Charles, 364
Davis, H. T., 102
Debeaune, Florimond, 257, 268, 272
Decimal, sistema, 3, 19, 44, 89, 145, 147, 154, 232, 347
 ponto, 204, 223
Dedekind, J. W. R., 408, 410, 413, 415, 417, 434, 441
 corte de, 410, 413
Dedron, P., 174, 178, 243, 461
Dedução, origem da, 35, 56
Dee, John, 198
Delachet, André, 459
Delambre, J. B. L., 352
Delos, problema de, 48, 50, 53, 59, 69, 97, 135
Demócrito de Abdera, 13, 47, 58, 59
De Moivre, Abraham, 312-315, 318, 320, 327
 Doctrine of Chances, 313
 Miscellanea analytica, 313, 314
 problema de, 313
 teorema de, 313
De Morgan, Augustus, 185, 265, 303, 420, 423, 425, 428-430, 438
 fórmula de, 430
De Morgan, Sophia E., 438
Denjoy, Arnaud, 452
Derivada, 359, 380, *veja também* Cálculo e Limite, conceito de
Desargues, Girard, 238, 245, 262-264, 270, 389, 392, 423
 teorema de, 263
Descartes, René, 111, 114, 138, 175, 220, 236, 245-256, 257, 259, 261, 263, 267, 270-272, 274, 276, 278, 280, 287, 290, 296, 297, 299, 307, 327, 333, 349, 352, 383, 394, 433, 442, 454
 folium de, 256, 301
 La Géométrie, 220, 234, 247-253, 272, 333
 ovais de, 252
 regra de sinais, 253, 302
Determinantes, 297, 317, 346, 376-378, 395
 definição de, 377
 funcional, 378
 nome, 376
 notação, 377
De Vries, Hk., 402
De Witt, Jan, 272, 278
Diâmetros conjugados, 109, 113
Dianni, Jadwiga, 447
Dickson, L. E., 85, 318, 336, 342, 361, 364, 434, 461
Dickson, W., 354, 364
Diderot, Denis, 329, 344
Dieudonné, Jean, 454, 458, 459
Diferencial, 295, 320, 331, 354, 380
 triângulo, 294
 veja também Cálculo, diferencial
Dijksterhuis, E. J., 90, 102, 232, 243
Diller, A., 117
Dingeldey, F., 114
Dinóstrato, 51, 62, 69, 70, 71
Diofante de Alexandria, 44, 130-135, 138, 139, 140, 167, 171, 174, 187, 223, 233
 Arithmetica, 130, 132-135, 167, 171, 174, 181, 202, 225, 258
Diofantina, análise, 132, 148, 161-163, 167, 171, 174, 187
Dionísio Exíguus, 180
Diretriz, 113, 138
Dirichlet, P. G. Lejeune, 373, 378, 405, 408, 412, 416, 435
 critério de, 405
 problema de, 405
 série de, 406
Discriminante, de cúbica, 97-98
 de quadrática, 168, 170
Distribuições, 455
Divisão babilônia, 22
 egípcia, 11, 22
 método de riscar, 158
Dodecaedro, 37, 53, 63, 64, 106
Dodgson, C. L., 431
D'Ooge, M. L., 132, 141
Drabkin, I. E., 75, 87, 127, 130, 140, 141
Drake, Stillman, 239, 243
Dualidade, 387, 391, 393
Dubbey, J. M., 394
Dugas, René, 342
Duhamel, J. M. C., 267
Duhem, Pierre, 195
Duillier, N. F. de, 302
Dunnington, G. W., 370, 385
Duplicação do cubo, *veja também* Delos, problema de
Dürer, Albrecht, 215, 216-218, 239
Dynkin, E. B., 455

Easton, Joy B., 212, 220, 273
Ebert, E. R., 212, 220
École Normale, 350, 359, 361, 364, 404, 432
École Polytechnique, 350, 352, 359, 361, 363, 364, 377, 378, 387, 390, 395, 402, 404, 407, 432
Ecfantus, 52
Edleston, J., 322
Edwards, Paul, 430
Eels, W. C., 3, 5
Eilenberg, Samuel, 457
Einstein, 449, 456
Eisenstein, F. G., 373
Eliminação, 341, 426
Elipse, 69, 107-113
 área da, 95, 238
Empédocles, 63
Eneström, Gustav, 325, 342
Engel, Fr., 322, 340, 342, 398, 402
Enriques, F., 459
Epiciclo, 106, 122, 123, 177
Equações, biquadráticas, 25, 149, 174, 203, 209, 247, 318
 classificação de, 23, 250
 cúbicas, 21, 24, 97, 134, 140, 174, 187, 204, 206-209, 210, 225, 227, 247, 274, 300, 302
 lineares, 12, 23, 57, 144, 148
 quadráticas, 22, 38, 76, 81, 85, 105, 133, 154, 160, 167-169, 174, 203, 248
 quínticas, 210, 318, 375, 433
 simultâneas, 23, 134, 144, 149
 teoria das, 252, 360
Equações, diferenciais, 307, 320, 332-334, 360, 362, 430, 441
 de Bernoulli, 307
 de Clairaut, 332
 de Euler, 334
 de Laplace, 362
 de Legendre, 358
 de Ricatti, 320-321, 333
Equante, 123
Eratóstenes de Cirene, 116-118, 123
 crivo de, 117
 Sobre a medida, 118, 138
Erhardt, E. von, 92
Erhardt, R. von, 92
Ernst, Wilhelm, 394, 402
Escrita, cuneiforme, 8
 hierática e hieroglífica, 8
 origem da, 3, 7
Esfera, volume da, 96, 101
Espelho Marinho das medidas do círculo, 149
Esticadores de corda, 4, 13, 58, 150, 153
Euclides de Alexandria, 38, 49, 58, 66, 74-88, 104, 110, 116, 119, 124, 125, 130, 135, 138, 139, 166, 170, 174, 176, 188, 191, 223, 234, 321, 327, 338, 345, 354, 356, 359, 372, 396, 400, 406, 409, 443, 446
 Dados, 76, 120
 Divisão de figuras, 75, 187, 201
 obras espúrias, 86
 Óptica, 75
 Os elementos, 38, 56, 63, 66, 74-88, 106, 116, 119, 121, 124, 139, 141, 151, 153, 166, 169, 170, 183, 188, 191, 198, 214, 320, 338, 354, 387, 420, 446
 Porismas, 74, 119, 138
Euclides de Megara, 74
Eudemo de Rodes, 35, 36, 41, 49, 72, 139
Eudoxo de Cnido, 61, 66-69, 72, 83, 106, 116, 126, 327
 axioma de, 66-67
Euler, Leonhard, 87, 259, 271, 280, 283, 297, 308, 312, 317, 324-331, 333-342, 349, 357, 360, 362, 370, 373, 375, 377, 379, 382, 388, 394, 398, 404, 426, 441
 Álgebra, 337
 constante de, 326, 445
 função ϕ de, 336
 identidades de, 327, 330, 340
 integrais de, 334, 357
 Introductio, 326, 338, 349
 reta de, 338, 351, 388
Eutócius de Ascalon, 70, 97, 99, 108, 140, 171, 180, 181
Eves, Howard, 25, 31, 161, 163, 389, 417, 461
Evoluta, 112, 276, 307
Exaustão, método de, 67, 94-97
Excentricidade, 113
Expoentes, leis dos, 93, 104, 133, 192, 203
 notação, 192, 203, 248
Eymard, P., 368

Fagnano, G. C., 321
Falsa posição, método da, 12, 144, 148
Fano, G., 390, 402
Faulhaber, Johann, 245
Fedel, J., 322
Feldmann, R. W., 426, 438
Fermat, Pierre de, 245, 252, 253-261, 263, 265, 268, 270, 271, 274, 276-277, 278, 284, 287, 291, 327, 349, 352, 361, 378, 382, 394
 Introdução aos lugares, 254
 método de máximos e mínimos, 255, 273
 números de, 259, 373
 pequeno teorema de, 259, 336
 último teorema de, 134, 258, 336, 358, 435
Ferrari, Ludovico, 206
Ferro, Scipione del, 207
Feuerbach, K. W., 388
 círculo de, 388
Fibonacci, *veja também* Leonardo de Pisa
Figuras cósmicas, *veja também* Poliedros regulares
Filolaus, 39, 40, 52
Filoponus, John, 180
Finck, Thomas, 226
Fior, Antonio Maria, 207
Fladt, K., 114
Fleckenstein, J. O., 311, 322, 325
Floridus, *veja também* Fior, Antonio Maria
Fluentes, 291
 veja também Cálculo
Fluxos, 291, 394
 veja também Cálculo

Focos, 113, 138, 393, 394
Fontana, Niccolo *veja também* Tartaglia, Niccolo
Formalismo, 441, 448, 458
Formas, teoria das, 426
Fourier, J. B. J., 363, 384, 404, 408, 417, 432
séries de, 405, 409, 412
Frações, comuns, 126, 155, 185, 186
conceito de, 4, 11, 20, 39, 44, 146, 147, 185
contínuas, 283, 360
enumerabilidade das frações racionais, 414
potências fracionárias, 192, 233, 234, 279, 287
sexagesimais, 21, 26, 121, 126, 145, 174, 177, 187, 222, 231
unitárias, 10, 16, 126, 170, 186
Frankland, W. B., 87
Fraser, A. C., 316, 322
Fréchet, Maurice, 452
Fredholm, Ivar, 452
Freeman, Kathleen, 45, 51, 60
Frege, F. L. G., 435, 444, 448, 449
Freudenthal, Hans, 265
Fryde, M. M., 447
Fryer, K. D., 446
Função, automorfa, 441
conceito de, 192, 297, 311, 327, 404, 408
contínua sem tangente, 382, 408, 447
elítica, 375, 378, 426, 441
notação, 311, 326
teoria da, 359, 374-376, 380, 382, 411, 435, 441
Furth, Montgomery, 436, 450
Fuss, N., 325, 342

Galileu Galilei, 181, 193, 211, 222, 231, 232, 236, 239-242, 243, 251, 253, 260-261, 278, 287, 311, 381, 413
Galois, Évariste, 360, 419, 432-434, 438
teoria de, 433
Galton, Francis, 455
Gandz, Solomon, 167, 168, 178
Ganguli, S., 152
Gaultier, L., 391
Gauss, C. F., 367-376, 379, 382-385, 389, 396, 397, 398, 399, 402, 409, 413, 423, 433, 435, 441, 443
curvatura de, 383
Disquisitiones arithmeticae, 326, 371-373
inteiros de, 372, 434
plano de, 406
teorema de Gauss, *veja também* Teorema de Green
Gelfond, A. O., 445
teorema de, 445
Genty, Abbé Louis, 268
Geodésicas, 311, 383
Geometria, analítica, 70, 105, 114, 137, 163, 192, 246-257, 272-274, 391-394, 399
analítica no espaço, 319, 333, 349-351
babilônica, 28, 30, 124
chinesa, 144, 147
descritiva, 346, 349
diferencial, 383, 399
egípcia, 7-17, 28, 30, 150
européia medieval, 187-194
grega, 67-72, 74-87, 104-114, 135-139
hindu, 150-153, 159, 162
inversiva, 389
moderna, 352, 387-402
n-dimensional, 395, 399, 442, 453
não-euclidiana, 177, 340, 383, 396-399, 432, 443
origens da, 4, 7, 38, 124
platônica, 64
projetiva, 262-264, 387, 389, 395, 401
renascentista, 214-220
só com compasso, 271, 389
Gerardo de Cremona, 183, 190
Gerbert, 182
Gergonne, J.-D., 378, 390-393
Annales de, 379, 388, 391
Gerhardt, C. I., 295, 303
Gershenson, D. E., 48
Gibbs, J. W., 423, 454
Gillings, R. J., 11, 15, 16
Gillespie, C. C., 461
Ginsburg, B., 195
Giovanni di Cosali, 192
Girard, Albert, 222, 224, 227, 234, 287, 301, 330, 370
Glaisher, J. W. L., 205, 220, 230, 243, 326
Gnômon, 40, 82, 169, 173
Gobar, numerais, 182
veja também Numeração arábica
Gödel, Kurt, 444
teorema de, 444
Goldbach, Christian, 331, 337
conjetura de, 337
Goldschmidt, V., 163
Golenishev, papiro *veja também* Papiro de Moscou
Goniometria, 226-228
veja também Trigonometria analítica
Görland, A., 73
Gow, James, 45, 60
Grandi, Guido, 321
rosas de, 321
Granger, G. G., 348
Grant, Edward, 191, 192, 195
Gráfico, 192
Grassmann, Hermann, 395, 423, 425, 446
Graves, R. P., 422, 438
Gravidade, centro de, 90, 100, 138, 236, 302, 358
Gravitação, lei da, 287, 298, 442
Green, George, 394
teorema de, 394
Greenberg, D. A., 48
Gregorio de St. Vincent, 257
Gregory, David, 282
Gregory, James, 281-284, 286, 287, 290, 295, 297, 302, 316, 337
série de, 283
Gridgeman, N. T., 335, 362
Grimsley, Ronald, 330, 342
Grosseteste, *veja também* Robert Grosseteste
Grupo, definição de, 400
nome, 432, 434
teoria do, 360, 400
Gudermann, Christoph, 411
Gudermanniana, 412
Guggenbuhl, Laura, [illegible]
Guldin, Paul, 138
teorema de, 138

Haar, Alfred, 452
Haas, Karlheinz, 273, 285
Hachette, 351
Hadamard, Jacques, 372, 453
Hall, A. R., 290, 303
Hall, M. R., 290, 303
Halley, Edmund, 299, 300, 312
Halmos, P. R., 446, 458
Hamilton, William Rowan, 409, 419, 421-424, 425, 427, 438, 446
Hankel, Hermann, 370, 404, 409, 411, 423
Harmônica, divisão, 110, 262
média, *veja também* Média harmônica
série, 194, 271, 309, 328
Hermônico, triângulo, 294
Harriot, Thomas, 222, 223, 280
Hartman, Stanisław, 452
Haskins, C. H., 183
Hausdorff, Felix, 453
Heath, T. L., 35, 36, 43, 45, 53, 60, 66, 67, 72, 73, 77, 81, 85, 87, 91, 102, 105, 107, 114, 116, 119, 127, 130, 134, 137, 138, 141, 461
Heiberg, J. L., 73, 102
Heidel, W. A., 41
Heine, H. E., 408, 410, 411, 412, 417, 451
teorema de Heine-Borel, 451
Helmer, Olaf, 449, 460
Hemisfério, área do, 15, 96
Henry, Charles, 254, 268
Hermann, Jacob, 319, 321, 324
Hermann, o Dálmata, 183
Hermite, Charles, 385, 407, 417, 450
teorema de, 407
Herodiânica, notação *veja também* Numeração ática
Heródoto, 4, 7, 13, 16, 35, 44, 143, 145
Heron de Alexandria, 21, 118, 124-126, 139, 170, 187, 200, 356
A métrica, 124
fórmula de, 99, 124, 160, 174
Geométrica, 125
Mecânica, 126
princípio de, 126
Herschel, John, 419
Heuraet, Heinrich van, 277
Hicetas, 52
Hierática, numeração, 9, 20
Hieroglifos, 7, 18, 33
Hilbert, David, 337, 417, 443-447, 448, 449, 452, 455, 458
axiomas de, 446
curva de, 447
espaço de, 447, 452, 457
Fundamentos da geometria, 446
problemas de, 443-446
Hill, G. F., 163, 178, 182, 195
Hille, Einar, 445
Hiltebeitel, Adam, 385
Hipatia, 130, 139, 140
Hipérbole, 70, 97, 107-113, 135, 175, 237, 254, 272, 278, 283, 355, 388
Hiperbólica, geometria, 401
Hiperbólicas, funções, 340
Hiperbolóide, 101, 280
Hipsicles, 86, 118
Hiparco de Nicéia, 111, 118-120, 123, 126
Hipasus de Metapontum, 47, 53-54, 56, 59, 445
Hípias de Elis, 47, 51, 59, 70, 235
Hipócrates de Chios, 47, 48-50, 59, 67, 69, 71, 76, 82, 116, 118, 140
Hobbes, Thomas, 281
Hobson, E. W., 60, 230, 243, 408, 417
Hofmann, J. E., 102, 143, 148, 159, 187, 199, 206, 220, 230, 243, 303, 309, 322, 342, 461
Hogben, L., 65, 126
Hooke, Robert, 287, 298
Ho Peng-Yoke, 148, 149, 150, 163
Hoppe, E., 102
Horner, W. G., método de, 148, 149, 177, 187, 225
Horsley, Samuel, 290
Hospital, G. F. A. de l', *veja também* L'Hospital, G. F. A. de
Hrabanus, 182
Hudde, Johann, 273, 283, 290
regras de, 273
Hughes, Barnabas, 220
Hultsch, F. O., 87, 134, 141
Huxley, T. H., 440
Huygens, Christiaan, 265, 271, 272, 274-278, 285, 287, 293, 298, 307, 313, 383
Horologium oscillatorium, 276
lei do movimento circular, 298

Ibn-al-Haitham, *veja também* Alhazen
Ibn-Sina, *veja também* Avicena
Ibn-Turk, *veja também* Abd-al-Hamid ibn-Turk
Ibn-Yunus, 175, 226
Icosaedro, 37, 63, 64, 106
Idade áurea, da matemática, 419, 440-445
da matemática chinesa, 148-150
da matemática grega, 74-114
da topologia, 453
Idade de prata da matemática grega, 129-139
Ideal, 435
Inclinado, lei do plano, 126, 137, 188
Incomensurabilidade, 53, 56, 59, 61, 63, 66, 152, 396, 445
Indeterminada, análise, *veja também* Diofantina, análise
Indução matemática, 258, 259, 265, 445
Indo-arábicos, numerais, 154, 163, 165, 172, 181, 184, 187, 202
Infinitas, seqüências, 186, 282
séries, 194, 271, 283, 287, 289, 292, 296, 307, 309, 314, 319, 327, 382, 404-406, 408, 413, 451
veja também Convergência
Infinitésimo, 55, 58, 67, 72, 191, 194, 238, 239, 266, 271, 282, 292, 295, 306, 310, 319, 332, 354, 359, 380, 411
Infinito, conjunto, 241, 332, 381, 413-417, 435
de Cantor, 413-417, 450
ordens do, 381
ponto no, 237, 262
símbolo para, 279, 413
Infinitos, processos, 21, 55, 59, 72, 235, 238, 256, 257, 261, 262, 280-284, 289, 408
Instantânea, velocidade, 56
veja também Fluxões, Derivada
Integral, 380, 408
elítica, 358, 374, 375
generalizações, 452
de Lebesgue, 450-452
de Riemann, 406, 408, 451
veja também Cálculo, integral
Interpolação, linear, 22, 24
princípio de, 279, 281, 289
Intuicionismo, 406, 440, 443, 448, 458
Invariantes, 401, 426, 442, 453
Involuta, 276
Irmã Mary Grace, 447
Isidoro de Mileto, 86, 141, 180
Isidoro de Sevilha, 182
Isócrona, 274
Isoperimetria, 136
Itard, Jean, 174, 178, 243, 461
Ivins Jr., W. M., 263

Jacob de Cremona, 198
Jacobi, C. G. J., 375-378, 379, 388, 394, 395, 416, 419, 433
jacobiano, 378
James, Glenn, 461

James. R. C., 461
Jayawardine, S. A., 211
Jerrard. G. B., 318
John de Halifax, *veja também* Sacrobosco
John de Sevilha, 183
John Filoponus, *veja também* Filoponus, John
Johnson, F. R., 212
Johnson, R. A., 136, 160, 338
Jones, William, 326
Jordanus Nemorarius, 187, 223, 233
  Arithmetica, 118
  De numeris datis, 188, 204
Jourdain, P. E. B., 385, 404, 414, 417
Jowett, B., 64, 73
Jurin, James, 322
Juros, compostos, 22, 154
Juschkewitsch, A. P. *veja também* Youschkevitch, A. P.
Justiniano, 180

Kaestner, A. G., 390, 462
Kagan, V., 396, 402
Kahun, papiro de, 14
Kakhel, Abdul-Kader, 177
Kalmus, H., 5
Kargon, Robert, 225
Karpinski, L. C., 141, 164, 167, 178, 182, 187
Kasir, D. S., 175, 178
Kaye, G. R., 152, 163
Keifer, Albert, 392
Keill, John, 303
Kelvin, Lord, 389, 394, 404, 440
Kennedy, E. S., 157, 173, 178
Kepler, Johann, 37, 86, 222, 231, 235, 236-239, 241, 243, 262, 287, 390, 392, 456
  leis de, 298
Keyser, C. J., 440
King, Amy C., 455, 459
Kleene, S. C., 449
Klein, Felix, XII, 344, 368, 385, 400-402, 404, 408, 409, 417, 432, 438, 443, 453, 459, 462
  Erlanger Programm, 400
  Garrafa de Klein, 401
Kline, Morris, XII, 216, 462
Klügel, G. S., 390, 462
Knobel, E. B., 127
Knott, C. G., 230, 243
Koch, Helge von, *veja também* Von Koch, Helge
Kolmogoroff, A. N., 455
Kötter, Ernst, 402
Kowalewski, Gerhard, 329, 342, 382
Kremer, Gerhard, *veja também* Mercator, Gerhard
Kronecker, Leopold, 416, 417, 434, 441, 448
Kugler, F. X., 31
Kummer, E. E., 435

Lacroix, S. F., 352, 357, 394
Lafon, J. P., 368
Lagrange, J. L., 344, 346, 349, 351, 357, 359-361, 363, 370, 374, 376, 378, 382, 384, 394, 400, 402, 404, 409, 428, 432, 434, 437
  Mecanique, 346, 363
  multiplicadores de, 360
Lahire, Philippe de, 263, 270, 351
Lalouvère, Antoine de, 267
Lambert, J. H., 339, 396, 407
  quadrângulo de, 176, 340
Lambo, Charles, 203, 220
Lamé, Gabriel, 391
Lammert, F., 127
Lanczos, C., 422
Landau, Edmund, 359, 406
Lander, L. J., 336
Langer, R. E., 330, 417
Laplace, P. S., 245, 255, 344, 347, 350, 361-363, 364, 376, 382, 384, 404, 428, 442
  Mécanique céleste, 362, 382
  transformada de, 362
Larkey, S. V., 212
LaSalle, J. P., 453, 459
Lasserre, François, 65, 73
Latham, Marcia L., 248, 268
Latitude de formas, 192, 239, 253
Lattin, Harriet P., 155, 163
Latus rectum, 70, 108
Lavoisier, A. L., 346, 347
Lebesgue, Henri, 450-452, 459
  medida de, 451, 455
Lebon, Ernest, 443, 459
Lee, H. D. P., 56, 60
Lefrançais, F. L., 352
Lefschetz, Solomon, 453, 459
Legendre, A. M., 344-348, 350, 356-359, 363, 364, 372, 374, 375, 378, 379, 382, 396, 404
  Éléments de geométrie, 356, 432
Lehmann, Ernst, 270, 285
Leibniz, G. W., 236, 259, 265, 267, 271, 273, 287, 289, 291, 292, 298, 302, 303, 306, 307, 310, 318, 322, 324, 327, 331, 336, 354, 376, 394, 404, 423, 428, 444
  regra de, 296
  série de, 296
  teorema de, 296
Lejeune, A., 127
Lejeune-Dirichlet, *veja também* Dirichlet, P. G. Lejeune
Le Lionnais, F., 457, 459
Leon, 49
Leonardo da Vinci, 204, 216, 231
Leonardo de Pisa, 184-187, 189, 194
  Liber abaci, 185, 202, 203
  Liber quadratorum, 187
  Practica geometriae, 187, 200
  seqüência de Fibonacci, 186
Leucipo, 59
Levey, Martin, 178
L'Hospital, G. F. A. de, 297, 309, 318, 320, 332
  regra de, 309
Li Chih, 149
Lie, Sophus, 400
Limite, conceito de, 67, 96, 255, 291, 331, 360, 380, 410-411
Lindemann, C. L. F., 407, 410
Liouville, Joseph, 379, 389, 406, 418, 433
  Journal de, 379, 407, 433
  teorema de, 407
Listing, J. B., 442
Liu Hui, 148
Li Yeh, *veja também* Li Chih
Lobachevsky, N. I., 372, 387, 396-399, 409, 419, 431, 443
  geometria de, *veja também* geometria não-euclidiana
Loeffler, Eugen, 163
Logarítmica, curva, 261
  espiral, 251, 283, 308
Logaritmos, 22, 93, 175, 228-231, 241, 283
  definição de, 228
  de números negativos, 311, 322, 330

  nome, 229
  tabelas de, 22, 203, 206, 229
Lógica, estágios na, 428
  matemática, 298, 436, 440, 444, 448, 458
  símbolos na, 436
Logicismo, 448
Logística, 45, 64, 91, 124
Lohne, J. A., 225
Loria, Gino, 45, 73, 87, 268, 285, 350, 402, 407, 418, 462
Luchins, A. S., 449, 450, 459
Luchins, Edith H., 449, 450, 459
Luckey, P., 177, 178
Lugar de três e quatro retas, *veja também* Papus, problema de
Lunas, quadratura de, 49, 71, 140

McCormack, T. J., 359
McCoy, N. H., 435
MacDuffee, C. C., 422, 438
Macfarlane, Alexander, 419, 420, 421, 422, 427, 430, 432, 438
Mackay, J. S., 388
Maclane, G. R., 453
MacLane, Saunders, 434
Maclaurin, Colin, 315-318, 322, 325, 338, 341
  série de, 309, 315
  Treatise of Algebra, 317, 337
  Treatise of Fluxions, 315
Magini, G. A., 223
Mahnke, Dietrich, 303
Manheim, J. H., 409, 418, 454, 459
Manitius, K., 127
Mansion, Paul, 394
Máquinas de calcular, 264, 456
Marchand, J.-P., 455
Marie, Maximilien, 384, 462
Markov, A. A., 455
Marre, Aristide, 203, 220, 389
Mascheroni, Lorenzo, 271
Matemática, árabe, 165-178
  babilônia, 18-32, 48, 130
  bizantina, 180
  chinesa, 143-150
  congressos de, 443, 448, 454
  definição de, I, 430, 440
  egípcia, 7-17, 30, 48, 130
  estrutura, 397, 411, 421, 423, 428, 434, 437, 440, 458
  européia medieval, 180-195
  grega, 33-142
  hindu, 150-163
  natureza da, 31, 35, 44, 48, 72, 77, 153, 429, 440
  organizações de, 379
  origens da, 1-5
  periódicos de, 378
  romana, 130, 139
Matrizes, 144, 424, 427
Maupertuis, P. L. M. de, 299
Maurolico, Francesco, 215, 220, 222, 265
Maurus, Hrabanus, *veja também* Hrabanus, Maurus
May, K. O., XII, 423, 450, 459
Maia, numeração, 155
Média, 41, 118
  aritmética, 41, 52, 136
  geométrica, 41, 50, 52, 136
  harmônica, 41, 52, 136
Menaecmus, 62, 69-72, 74, 175, 247
Menelau de Alexandria, 119, 135, 320, 356
  Sphaerica, 119
  teorema de, 119, 356
Mengenlehre, *veja também* teoria dos conjuntos; infinitos, de Cantor
Mengoli, Pietro, 271, 273, 283, 285
Menninger, Karl, 5, 163
Méray, H. C. R., 408, 409, 410, 418
Mercator, Gerard, 218
Mercator, Nicolaus, 283, 291, 295
  série de, 283, 295
Méré, Chevalier de, 265
Mersenne, Marin, 245, 251, 256, 257, 261, 282
  números de, 259
Merton, regra de, 190, 193
Merz, J. T., 385, 418
Meschkowski, Herbert, 320, 322, 414, 415, 418, 430, 438
Mesopotâmia, matemática na, *veja também* Matemática babilônica
Metamatemática, 445
Metrodorus, 140
Michel, P.-H., 45, 60, 73
Midolo, P., 102
Midonick, Henrietta O., 430, 436, 438, 462
Mikami, Yoshio, 144, 148, 163
Mikusinski, J., 452
Miller, G. A., 402
Mínimos quadrados, 358, 367, 373, 379
Mitchell, U. G., 407
Möbius, A. F., 392, 394, 401, 442
Moerbeke, William de, *veja também* William de Moerbecke
Mohr, Georg, 271, 318
Moivre, Abraham de, *veja também* De Moivre, Abraham
Molk, J., 385
Monge, Gaspard, 344-353, 355, 363, 377, 387, 391, 394, 401, 404
  esfera de, 351
Montucla, Etienne, 285, 322, 462
Moon, P. H., 424
More, L. T., 303
Morehead, James, 385
Morgenstern, Oskar, 456
Moritz, R. E., 462
Morley, S. G., 164
Morrison, Emily, 456
Morrison, Philip, 456
Moschopoulos, M., 181
Moscou, papiro de, 7, 14
Motte, Andrew, 292
Muir, Thomas, 297, 303, 376, 385, 462
Müller, Johann, *veja também* Regiomontanus
Mullinger, J. B., 225
Multinomial, teorema, 297
Multiplicação, babilônica, 21
  egípcia, 11
  gelosia, 158
  hindu, 158
  tabelas, 21
Murdoch, John, 194, 195
Música, 40, 52, 61, 131, 139

Naas, Joseph, 462
Nachbin, Leopoldo, 452
Nagel, Ernest, 370, 402, 444
Não-euclidiana, geometria, *veja também* Geometria não-euclidiana; Postulado das paralelas
Napier, John, 222, 228-230, 232, 283
Napoleão, 344, 353, 361, 363, 387, 404
Nasir Eddin al-Tusi, 176, 200, 321
  teorema de, 177, 213, 271

Needham, Joseph, 143, 147, 151, 164
Negativo, número, *veja também* Número negativo
Neil, William, 277, 280
parábola de, 277
Nesselmann, G. H. F., 141
Neugebauer, Otto, 2, 8, 10, 16, 19, 25, 28, 31, 35, 36, 38, 45, 57, 60, 92, 102, 104, 106, 114, 115, 118, 125, 157
Neusis, 98, 105
Nevanlinna, Rolf, 446, 459
Newman, J. R., 444, 462
Newsom, C. V., 417
Newson, Mary W., 443, 459
Newton, Isaac, 105, 110, 236, 246, 249, 267, 271, 273, 280, 281, 287-292, 295, 297-304, 306, 308, 312, 315, 316, 327, 332, 354, 361, 373, 379, 381, 394, 404, 422
Arithmetica universalis, 301, 317
De analysi, 289, 293, 301
De quadratura, 291, 300, 302
enumeração das curvas cúbicas, 300
identidades de, 301
Methodus fluxionum, 291, 300, 301, 338
método de, 301
paralelogramo de, 301
Principia, 111, 277, 292, 298-300, 301, 314, 338, 363
Nicholas de Cusa, 197, 202, 221
Nicômaco de Gerasa, 130-132, 141
Introductio arithmetica, 130, 131, 132, 139, 181
Nielsen, Niels, 344
Nieuwentijt, Bernard, 319
Noether, Max, 384, 417
Nörlund, N. E., 459
Normais, 112-113
Notações algébricas, 132, 192, 203, 204, 206, 213, 222, 225, 232, 233, 248, 254, 273, 279, 297, 326
do cálculo, 290, 295
de determinantes, 297
Nove capítulos, 143, 148
Noves fora, 159, 174
Numeração arábica, 166, 169, 172, 184
veja também indo-arábicos
ática, 43, 44, 92
babilônia, 19, 145
bizantina, 181
chinesa, 145
decimal, 8, 43, 145, 147, 154, 184, 231-234
Devanagari, 172
hierática, 9, 43
hieroglífica, 8, 9, 19, 42
hindu, 154, 181, 184
Jônia, 42, 92, 104, 154
maia, 155
sexagesimal, *veja também* Fração sexagesimal
Numerais, alfabéticos *veja também* Numeração jônia
Números, abundantes, 42
algébricos, 406, 415, 434
amigáveis, 42, 171, 258, 336
cardinais, 436
conceito, 1, 39, 54
corpo de, 434
deficientes, 42
figurativos, 40, 123, 135, 294
imaginários, 203, 210, 211, 224, 298, 330, 370, 406, 454
ímpares, 42, 131
inteiros, 434, 435
irracionais, 53, 58, 160, 176, 210, 409-411, 415
veja também Incomensurabilidade
irregulares, 21, 26, 30
misticismo, 39, 52, 64
negativos, 147, 160, 167, 169, 203, 206, 224, 253, 273, 330
perfeitos, 42, 84, 85, 131, 258, 336, 337
primos, 42, 84, 118, 258, 328, 336, 359, 372
reais, 161, 176, 370, 406, 408, 410, 415
transcendentes, 407, 415, 445
transfinitos, *veja também* Infinito de Cantor, *veja também* Teoria dos números

Oblongo, número *veja também* Números figurativos
Obolensky, A. N., 454
Octaedro, 37, 63, 64
Ohm, Martin, 408
Oldenburg, Henry, 287, 291, 293, 298, 327
Omar Khayyam, 165, 175-176, 178, 204, 206, 247
Álgebra, 175, 176
Ore, Oystein, 221, 265, 268, 336, 342, 454
Oresme, Nicole, 191-195, 197, 202, 238, 241, 253, 261, 271, 279
Algorismus proportionum, 192
De proportionibus proportionum, 191
Tractatus de figuratione potentiarum, 193
Tractatus de latitunibus formarum, 193
Organizações científicas, 245, 278
veja também Organizações matemáticas
Ortogonais, trajetórias, 296
Osiander, Andreas, 213
Ostrogradsky, Michel, 394, 396
Otho, Valentin, 214, 235
Oughtred, William, 222, 225, 247, 278, 287

Pachymeres, G., 181
Pacioli, Luca, 203, 206, 211, 216, 221
De divina proportione, 204
Summa, 203
Papus de Alexandria, 71, 105, 113, 129, 135-139, 141, 171, 190, 214, 223, 225, 247, 249, 262, 271, 401
Coleção matemática, 104, 135-139, 203, 220, 236, 253
problema de, 105, 137, 247, 249, 254, 299
teorema de, 136, 138
Tesouro da análise, 138
Parábola, 69, 97, 107-114, 174, 238, 239, 243, 254, 260, 261, 272, 278
área da, 94, 100, 141
comprimento da, 261
foco da, 262
Parabolóide, 91, 95, 101, 174, 278
Paralelas, postulado das, 77, 176, 443, 446
veja também Geometria não-euclidiana
Parâmetro, conceito de, 175, 223
Parker, R. A., 16
Parkin, T. R., 336
Parmênides de Elea, 55
Parcimônia, princípio da, 252, 271, 288
Pascal, Blaise, 245, 259, 264-268, 270, 274, 277, 280, 287, 293, 294, 332, 387, 389, 391
teorema de, 264, 315, 387
triângulo de, *veja também* Triângulo aritmético
Pascal, Etienne, 264
Patterson, B. C., 402
Paulo de Alexandria, 153
Pawlikowski, G. J., 424
Peacock, George, 419, 424, 435, 438
Álgebra, 420, 428, 438
Peano, Giuseppe, 436, 441, 447
axiomas de, 436, 444, 446
Pearson, Karl, 455
Peet, T. E., 9

Peirce, B., 425, 430
Peirce, C. S., 425, 430, 436, 448
Pell, John, 161
equação de, 99, 134, 161
Pellos, F., 204
Pêndulo, relógio de, 274-277
Pentagonal, número *veja também* Números figurativos
Pentágono, 37, 53, 54, 121, 218
Péricles, 47
Idade de, 47, 104
Perseu, 137
Perspectiva, 204, 215-218, 316
Peters, C. H. F., 127
Petersburgo, paradoxo de S., 312
Peuerbach, G., 200
Pi, natureza de, 340, 407
símbolo, 326
valor de, 8, 13, 15, 28, 93, 104, 122, 125, 129, 144, 147, 153, 154, 157, 160, 162, 177, 222, 235, 280, 283, 297
Picard, Émile, 407, 434, 460
Piero della Francesca, 216
Pierpont, James, 385, 402, 412, 416, 418, 460
Pincherle, Salvatore, 418
Pitiscus, Bartholomeus, 228
Planudes, M., 181
Platão, 47, 51, 52, 59, 61-72, 125, 131, 231, 245, 349
Platão de Tivoli, 183
Platônicos, sólidos *veja também* Poliedros regulares
Plimpton Collection, tableta, 25, 26
Plínio, 35
Plotnick, S. M., 186
Plücker, Julius, 315, 391, 394, 395, 399, 402, 404
equações de, 393
Plutarco, 35, 48, 116
Poincaré, Henri, 406, 416, 418, 441, 443, 448, 452, 455
Poisson, 384, 432
Ponto, ideal, 238, 262, 390, 392
imaginário, 355, 356, 390, 393
Polares, coordenadas, *veja também* Coordenadas polares
Pólo e polar, 110, 262, 270, 355, 391
Poligonal, número *veja também* Números figurativos
Polígonos, área de, 28
construção de, 367, 373
Poliedros regulares, 37, 41, 63, 64, 86
Poliedral, fórmula, 87, 247, 383, 442
Polígono estrelado, 191
Poncelet, J.-V., 352, 387, 389, 390, 392, 395, 402
teorema de Poncelet-Steiner, 389
Porisma, 138
veja também Euclides, *Porismas*
Posidônio, 123
Posicional, princípio, 20, 22, 24, 44, 145, 154-157, 174-175
Postulado, quinto, *veja também* Paralelas, postulado das
Postulacional, pensamento, 437, 440, 444, 446
Prasad, Ganesh, 412, 413, 416, 418, 426, 438, 460
Precioso Espelho, 149
Price, D. J. de S., 25, 26, 459
Primos, teorema dos numeros, 359, 372
veja também Números primos
Pringsheim, A., 385
Prior, A. N., 438
Probabilidade, 265, 268, 272, 309, 311, 334, 348, 361, 442, 454
Proclus, 35, 41, 49, 63, 69, 70, 74, 76, 129, 139, 141
Sumário eudemiano, 35, 139
teorema de, 139
Progressões geométricas, 12, 27, 84, 162
veja também Séries
Projeções, mapa, 123
Prova em matemática, 12, 30, 35, 49, 65, 78, 176, 444
Proporção, 12, 41, 49, 66, 83, 191, 203, 278
Prostaférese, 175, 226, 228, 230
Psellus, M. C., 181
Pseudoesfera, 340, 399
Ptolomeu de Alexandria, 44, 111, 116, 118, 119-124, 129, 135, 139, 153, 154, 160, 171, 174, 183, 200, 202, 218, 227
Almagesto, 119-123, 129, 139, 166, 172, 183, 200
Analemma, 123
fórmulas de, 120, 227
Geografia, 123
Óptica, 123
Tetrabiblos, 124, 129, 166
Puissant, L. P., 352
Pirâmides, 8, 13, 14
tronco de, 14, 28, 148
volume de, 15, 59, 153
Pitágoras, 35-45, 47, 52, 59, 63, 72, 131, 150, 185
teorema de, 13, 29, 37, 54, 79, 119, 122, 143, 148, 151, 161
generalização do teorema de, 136, 171, 187, 350
triplas pitagóricas, 26, 27, 42, 65, 151, 162, 258
Pitagóricos, 35-45, 47, 49, 51, 53, 61, 82, 237, 382, 396, 416

Quadrados mágicos, 144, 217
Quadrângulo completo, 262, 299
Quadrática, equação *veja também* Equações quadráticas
Quadratriz, 51, 71
Quadratura do círculo, *veja também* Círculo, quadratura do
Quádricas, superfícies, 339, 351, 399
veja também Geometria analítica no espaço
Quadrilátero, área do, 13, 29, 30, 153, 160, 162
cíclico, 160, 162, 174
veja também Saccheri, quadrilátero de; Lambert, quadrângulo de
Quadrivium, 52, 61, 181
Quatérnions, 422, 423
Quibell, J. E., 8

Radiano, 157
Rajagopal, C. T., 164, 282
Ramanujan, S., 163
Ramée, Pierre de la, 214
Ravenstein, E. G., 219
Read, C. B., 455, 459, 462
Recorde, Robert, 197, 211, 214, 220, 225, 297
Whetstone of Witte, 212
Reductio ad absurdum, 49, 67, 86, 94
Reflexão, lei da, 125, 174
Refração, 123, 174
lei da, 123
Regiomontanus, 180, 199-202, 204, 205, 213, 214, 226, 236, 258
De triangulis omnimodis, 200
Epitome, 200
Regra de três, 12, 144, 154
Reichardt, Hans, 372, 385
Reiff, R., 285, 322, 342
Reinhard, Marcel, 356
Reisch, Gregor, 185, 199
Relatividade, teoria da, 399, 406, 422, 443
Reversa, curva *veja também* Curva de dupla curvatura
Rhabdas, Nicolau, 181
Rheticus, G. J., 213, 226
Rhind, Henry, 9
Papiro de, 9-14, 16, 17, 140, 186
Riccati, Jacopo, 320, 333
Riccati, Vincenzo, 333, 340

Ricci, Michelangelo, 282
Riemann, G. F. B., 398, 402, 406, 408, 412, 431, 442, 445, 450
  conjetura de, 406, 445
  geometria riemanniana, 398
  superfícies de, 406, 453
Riese, Adam, 205, 206
Rigaud, S. P., 285
Ritter, Frédéric, 228, 243
Robbins, F. E., 134, 141
Robert Grosseteste, 189
Robert de Chester, 183, 167, 178
Roberval, G. P. de, 245, 259, 261, 267, 268, 270, 274
Robinson, Abraham, 332, 380
Roche, Etienne de la, 203, 211
Roever, W. H., 350
Rolle, Michel, 319
Roomen, A. van, 227
Rootselaar, B. von, 409
Rosen, Edward, 220
Rosenfeld, B. A., 178
Rosenfeld, L., 274, 285
Rosenthal, A., 304
Rosenthal, J., 459
Roulette, *veja também* Ciclóide
Rubin, Herman, 444
Rubin, Jean E., 444
Rudolff, Christoph, 206
Rudolph de Bruges, 183
Russell, Bertrand, 406, 411, 429, 436, 440, 444, 448, 449, 460
  antinomia de, 449
  Principia mathematica, 444
Rutten, M., 31

Saccheri, Girolamo, 177, 321, 340, 396, 398
  quadrilátero de, 176, 321, 340
Sachan, E. C., 152
Sachs, A., 19, 31
Sacrobosco, 184, 200
Saidan, A. S., 177, 178
Sánchez Pérez, J. A., 134, 141, 178
Santillana, Giorgio de, 239, 243
Sarkar, B. K., 151
Sarton, George, 28, 87, 123, 127, 141, 152, 164, 178, 183, 187, 195, 200, 221, 232, 244, 359, 379, 385, 433, 438, 441, 462
Saunderson, Nicholas, 337
Sayili, Aydin, 170, 171, 178
Schaaf, W. L., 370, 385, 462
Schepler, H. C., 235
Schmid, H. L., 462
Schmidt, Franz, 402
Schooten, Frans van, 228, 272, 277, 278, 286, 287, 290
Schroeder, L. von, 53
Schwartz, Laurent, 455
Scott, Charlotte A., 392
Scott, J. F., XI, 164, 281, 286, 462
Scriba, C. J., 257, 268, 281, 286
Sebokt, Bispo, 155, 169
Secção áurea, 16, 37, 69, 86, 186, 204, 216
Seidel, P. L. V., 412
Seidenberg, Abraham, 4, 5
Selêucida, período, 18, 20, 29
Semi-regulares, poliedros, *veja também* Arquimedes, sólidos de
Seno, 118-122, 153, 15[illegible], 163, 172, 200, 214, 327, 330
  lei do, 116, 160, 172
  origem do nome seno, 184
  série do seno, 295
Seqt, 14, 17
Sergescu, P., 304
Série, 12, 84, 95, 132, 150, 154
  veja também Infinitas, séries
Severus Sebokt, *veja também* Sebokt, Bispo
Sexagesimal, numeração 19-22, 121, 145, 156, 163
  veja também Fração sexagesimal
Siddhantas, 152, 157, 160, 166, 200
Sierpinski, Waclaw, 259, 447
Silvestre II, Papa, *veja também* Gerbert
Simétricas, funções, 224
Simon, M., 199, 221, 403
Simplício, 49, 71, 140, 180
Simpson, Thomas, 337
Simson, Robert, 338
Sindhind, *veja também* Brahmagupta, Brahmasphuta Siddhānta
Singh, A. N., 151, 152, 163
Sluse, R. F. de, 273, 284, 285
  pérolas de, 274, 349
  regra de, 273, 292
Smeltzer, Donald, 5
Smith, D. E., XI, 6, 102, 125, 143, 148, 155, 157, 159, 164, 176, 178, 182, 187, 195, 206, 209, 221, 232, 235, 242, 244, 248, 268, 280, 286, 289, 304, 309, 313, 314, 321, 322, 326, 371, 385, 388, 395, 398, 403, 407, 408, 423, 433, 438, 462
Smith, J. W., 228
Sócrates, 47, 51, 61, 74
Solmsen, F., 73
Sommerville, D. M. Y., 403
Soroban, 145
Speidell, John, 230
Spencer, D. E., 424
Spiess, Otto, 310, 322
SSu-yüan yü-chien, *veja também* *Precioso Espelho*
Stäckel, Paul, 322, 328, 340, 342, 398, 402
Stahl, W. H., 127, 130, 141
Stamm, E., 191
Stanton, R. G., 446
Staudt, K. G. C. von, *veja também* Von Staudt, K. G. C.
Steele, D. A., 381, 384
Steiner, Jakob, 388, 391, 394, 395, 416
  pontos de, 388
Steinhaus, Hugo, 447
Stevin, Simon, 222, 231, 235, 236, 243, 279, 287
Stieltjes, T. J., 452
Stifel, Michael, 206, 213, 223
  Arithmetica integra, 206, 228
Stirling, James, 313, 315
  fórmula de, 313
Stokes, G. G., 382, 412
Stolz, Otto, 385
Stone, M. H., 457, 460
Strain, Mary, 407
Struik, D. J., XI, XII, 3, 6, 134, 144, 155, 164, 175, 176, 178, 209, 232, 238, 243, 322, 342, 389, 438, 462
Struve, W. W., 15, 16
Suan phan, 145
Subcontrária, média *veja também* Média harmônica
Suidas, 120
Suiseth, Richard, 194
Sullivan, J. W. N., 195, 221
Sulvasutras, 5, 150
Sumérios, 18
Superfície, área de, 16, 138
Superfícies, *veja também* Geometria analítica no espaço
Susa, tabletas, 28
Suter, Heinrich, 178
Swift, J. D., 134, 141
Sylvester, J. J., 419, 425, 440
  método dialítico de, 426
Szabó, A., 57, 60, 85, 87

Tabelas, logarítmicas, 22, 203, 206, 228
  de multiplicação, 131
  de potência e raízes, 22
  recíprocos, 21
  refração, 123
  trigonométrica, 118, 120-122, 157, 172, 173, 226, 230, 231, 241
Tales, 33-35, 38, 44, 47, 48, 56
  teorema de, 30, 34, 119, 122
Tangente, a uma curva, 110-113, 252, 255, 257, 259, 264, 273, 284, 292, 295
  trigonométrica, 27, 172, 200, 214, 340
Tanner, R. C. H., 225
Tannery, Paul, 45, 55, 60, 116, 118, 127, 153, 251, 254, 267, 462
Tartaglia, Niccolo, 207, 220
Taton, René, 265, 351, 462
Taylor, Brook, 311, 315, 332, 382
  série de, 282, 311, 315, 405
Taylor, Charles, 115
Taylor, Eva, G. R., 463
Taylor, R. E., 204, 221
Taylor, T., 39
Tchebycheff, P. L., 334, 372, 455
Teaetetus, 62, 63, 327
Teodoro de Cirene, 62, 63, 69
Teon de Alexandria, 87, 118, 139
Teon de Smirna, 132
Teoria dos conjuntos, 413, 429, 435, 446, 449-455
Teoria dos números, 83, 132, 143, 148, 149, 161, 258-259, 266, 328, 358, 361, 371-373, 383, 406, 413
Terra, tamanho da, 68, 92, 116, 123
Tesouro da análise, 104
Tetractys, 39, 52, 132
Tetraedro, 37, 63, 148
Thabit ibn-Qurra, 171-173, 178, 183
  teorema de, 171
Thomas, Ivor, 35, 36, 45, 60, 87, 102, 115, 127, 138, 142
Thomas-Stanford, C., 87
Thompson, D. W., 137, 186
Thompson, William *veja também* Kelvin, Lord
Thomson, J. O., 127
Thureau-Dangin, Fr., 8, 31
Timaeus de Locri, 63
Todhunter, Isaac, 268, 312, 313, 322, 335, 342, 361, 463
Toeplitz, Otto, 268, 304, 342
Tomás de Aquino, 189, 191
Topologia, 355, 398, 401, 442, 453, 457
Torricelli, Evangelista, 245, 251, 260-261, 267, 273, 282, 284, 291, 307
Townsend, E. J., 446, 459
Transformações, afins, 401
  algébricas, 22, 25, 253, 318, 424
  geométricas, 13, 14, 109, 123, 218, 254, 283, 300, 308, 319, 339, 351, 389, 400, 426
  veja também Geometria projetiva
Trapézio, área do, 13, 15
Triângulo, área do, 5, 13, 15, 25, 28, 98, 160
Triangular, número *veja também* Números figurativos
Trigonometria, analítica, 260, 311, 313, 326
  árabe, 172, 174, 177, 184
  babilônia, 25, 116
  egípcia, 14, 116
  européia medieval, 184
  grega, 116-127
  hindu, 152, 157, 163, 184
  início da Idade Moderna, 225-228
  nome, 160
  renascentista, 200, 213, 214
  veja também Tabelas trigonométricas
Trissecção do ângulo *veja também* Ângulo, trissecção do
Trissectriz *veja também* Quadratriz
Tropfke, Johannes, 102, 244, 463
Truesdell, C., 342
Tschirnhaus, E. W. von, 318
Ts'e yuan hai-chung veja também Espelho marinho das medidas do círculo
Tsu Cheng-chih, 148
Tsu Ch'ung-chih, 148
Tuller, Annita, 401
Tung-Li Yuan, 143
Turnbull, H. W., 244, 268, 282, 286, 290, 304, 317, 322
Tweedie, Charles, 315, 317, 322

Uhler, H. S., 331

Vallée-Poussin, C. J. de la, 372
Valson, C.-A., 385
Van Ceulen, Ludolph *veja também* Ceulen, Ludolph van
Vandermonde, C. A., 376
Van der Waerden, B. L., 10, 15, 16, 19, 29, 31, 35, 36, 49, 55, 60, 115, 127, 142, 155, 463
Van Heuraet, Heinrich, *veja também* Heuraet, Heinrich van
Van Roomen, A. *veja também* Roomen, A. van
Van Schooten, Franz *veja também* Schooten, Franz van
Varahamihira, 152
Varignon, Pierre, 319
Vedamurthi, T. V., 282
Venerável Beda, *veja também* Beda, o Venerável
Ver Eecke, Paul, 138, 139, 141
Vetorial, análise, 395, 423
  espaço, 447, 452, 455
Virado, seno, 184, 241
Viète, François, 222-228, 231, 234, 253, 274, 281, 287, 297, 301, 318, 327
  Ars analyticae praxis, 223, 236
  Canon mathematicus, 222, 226
  Isagoge, 224
Vigesimal, sistema, 3, 156
Vitruvius, 129
Vogel, Kurt, 10, 17, 22, 27, 28, 31, 134, 178
Vogt, Heinrich, 53, 87
Voltaire, 89, 298, 303, 330, 344, 348
Volterra, Vito, 443, 460
Von Fritz, Kurt, 54, 60
Von Koch, Helge, 447-448, 452
Von Neumann, John, 456
Von Staudt, K. G. C., 395, 402
Vorob'ev, N. N., 186
Vucinich, Alexander, 396, 403

Wachulka, Adam, 447
Waismann, Friedrich, 418
Walker, Evelyn, 260, 268
Walker, Helen M., 312, 322

Wallis, John, 267, 268, 271, 277-281, 283, 286, 287, 288, 306, 326, 334
Arithmetica infinitorum, 277, 279-281, 308
As cônicas, 278, 394
fórmulas de Wallis, 281
Wallner, C. R., 268
Walsh, J. J., 189
Waring, Edward, 337, 361, 382
Waters, W. G., 221
Watson, S. J., 356
Wedberg, A., 73
Weierstrass, Karl, 382, 406, 408-413, 416, 418, 435
Weil, André, 458, 460
Weissenborn, H., 323
Werner, Johannes, 215, 216, 220, 226
fórmulas de, 226
Wessel, Caspar, 370, 379
Weyl, Hermann, 449, 453, 460
Wheeler, N. F., 8, 17
Whewell, William, 284, 286
Whitehead, A. N., 419, 444, 449
Whiteside, D. T., 284, 290, 291, 304
Widman, J., 205
Wieleitner, Heinrich, 193, 195, 304, 323, 342, 463
Wiener, Norbert, 456
Wilder, R. L., 460
William de Moerbeke, 190, 197
Williamson, J. H., 452
Wilson, John, 337
teorema de, 337, 361
Winter, H. J. J., 164, 168, 178
Witner, J. R., 209
Witt, Jan de *veja também* De Witt, Jan
Woodhause, Robert, 360
Wren, Christopher, 280
Wright, Edward, 219, 230

Xenócrates, 72

Yang Hui, 149
Yeldham, Florence A., 158, 164
Young, J. W. A., 408
Young, Thomas, 8
Youschkevitch, A. P., 143, 163, 178, 195, 463
Yunus, *veja também* Ibn-Yunus

Zassenhaus, Hans, 371
Zeller, Eduard, 39, 45
Zeller, Irmã Mary C., 201, 214, 221, 228, 244, 463
Zenodoro, 137
Zeno de Elea, 47, 55-56, 59, 61, 72
paradoxos de, 55, 59, 72
Zermelo, Ernst, 444
Zero, conceito, 13, 155, 160, 161, 203
nome, 185
operações sobre, 160, 161, 162
símbolo, 20, 145, 150, 155, 182, 184, 185
Zeuthen, H. G., 54, 70, 73, 115, 268, 286, 304, 344, 463
Ziegler, Konrat, 142

Este trabalho foi elaborado pelo processo de FOTOCOMPOSIÇÃO **Monophoto** - no Departamento de Composição da Editora Edgard Blücher Ltda. - São Paulo - Brasil

impresso na
planimpress gráfica e editôra
rua anhaia, 247 - s.p.