Ensino & Informação
Prof: Altamir A. R. Araldi
Revista®

Mostraremos a seguir o porquê da expressão "Classe de Comunicação Fechada" utilizada nos livros de Processos Estocásticos (mais precisamente: Clarke, A. Bruce; Disney, Ralphy L.: PROBABILIDADE E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS). Uma explicação precisa é dada por Samuel Karlin (Livro em Inglês: A FIRST COURSE IN STOCHASTIC PROCESSES – sem tradução para o Português, páginas 41 e 42) a esta expressão "Classe de Comunicação Fechada" onde o mesmo coloca que é uma **Relação de Equivalência dentro do Conjunto de Todos os Estados aquela definida por**: "o Estado j se COMUNICA ou que é acessível ao Estado i se, e somente se para algum n≥0, ${P_{ij}}^{n} > 0$: Isto é, J é acessível através do Estado i se existe e é positiva (MAIOR QUE ZERO) a Probabilidade de que em um Número Finito de Transições o Estado j pode ser Alcançado partindo do Estado i. Formalmente,

Definição: Dois estados i e j, cada um acessível ao outro, são ditos se COMUNICAREM e escrevemos (notação) $i \leftrightarrow j$. Se dois estados i e j não se COMUNICAM, então:

${P_{ij}}^{n} = 0$, para todo n≥0 e/ou ${P_{ji}}^{n} = 0$, para todo n>=0.

Desta forma, a Definição de Comunicação é uma Relação de Equivalência, senão vejamos:

(a) $i \leftrightarrow i$: (Propriedade REFLEXIVA), uma consequência da própria Definição (dada em outra ocasião no livro de Karlin) de que

$${P_{ij}}^{0} = \delta_{ij} = \begin{Bmatrix} 1, se\ i = j \\ 0, se\ i \neq j \end{Bmatrix}$$

(b) Se $i \leftrightarrow j$, então $j \leftrightarrow i$: (Propriedade SIMÉTRICA), isto por causa da própria definição de "Comunicação".

(a) Se $i \leftrightarrow j$ e $j \leftrightarrow k$, então $i \leftrightarrow k$: (Propriedade TRANANSITIVA).

A prova da Transitividade procede do seguinte: $i \leftrightarrow j$ e $i \leftrightarrow j$ implica que existem Números Inteiros **n** e **m** tais que ${P_{ij}}^{n} > 0$ e ${P_{jk}}^{n} > 0$. Consequentemente pela expressão (3.2) da página 40 ${P_{ij}}^{n} = \sum_{k=0}^{\infty} {P_{ik}}^{r} {P_{kj}}^{s}$ e a não negatividade de cada ${P_{rs}}^{t}$, nós concluímos que:

$${P_{ik}}^{n+m} = \sum_{k=0}^{\infty} {P_{ir}}^{n} {P_{rk}}^{m} > 0.$$

Argumento análogo mostra a existência de um Número Inteiro v tal que ${P_{ki}}^{n} > 0$, como desejado.

Bem, já que a Relação $i \leftrightarrow j$ é uma Relação de Equivalência, então esta Relação define uma **PARTIÇÃO** no **Conjunto de todos os Estados (e Vice-Versa: Dada uma Partição $\boldsymbol{\omega}$, existe uma única Relação de Equivalência em $\boldsymbol{\omega}$ que corresponde a esta Partição dada.** E, então dizemos que uma vez dentro de uma Classe, e não existe a Probabilidade positiva (Maior do que ZERO e/ou diferente de zero) de partindo de um estado dentro desta classe Alcançar um outro estado dentro de outra classe. Assim, para se compreender melhor, imaginemos que temos um **Conjunto Total de Estados Finito $\boldsymbol{\omega} =$ {a,b,c,d,e,f}**. Se, por exemplo, no Conjunto de Todos os estados {a,b,c,d,e,f} as únicas Classes são: I={a,b}; II={c} e III={d,e,f}, isto é, $a \leftrightarrow b$; $c \leftrightarrow c$; e [$d \leftrightarrow e$; $e \leftrightarrow f$; $d \leftrightarrow f$]. Aqui como é uma Partição, podemos observar que: $I \cap II = \emptyset\ (conjunto\ vazio)$; $I \cap III = \emptyset$; $II \cap III = \emptyset$. E, além disso, $I \cup II \cup III = \boldsymbol{\omega}$. **Esta é a Definição de Partição: Interseção de cada classe (subconjunto) é vazia; e a União de todas as classes (subconjuntos) é $\boldsymbol{\omega}$.**

Na hipótese de, por exemplo, acontecer de o Estado **b** vir a se Comunicar com **c**, então, pela propriedade TRANSITIVA as classes I e II acabam se tornando um só, ou seja, a Classe maior {a,b,c}. E a NOVA Partição resulta: {a,b,c} e {d,e,f}.

Então, o Conceito de Classe de Comunicação Fechada nada mais é do que um Classe ou Subconjunto de Estados que se comunicam somente entre estes Estados da sua Classe.