Respostas dos Problemas Complementares

5.13 (*a*) $3x^2y^3(y+2x)$ (*b*) $2s^2t(6t-3s^3t^3+2s^2)$ (*c*) $2xyz(x-2z+4yz^2)$ (*d*) $4(y+5)(y-5)$ (*e*) $(1+a^2)(1+a)(1-a)$ (*f*) $x(8+x)(8-x)$ (*g*) $8(x^2+4)(x+2)(x-2)$ (*h*) $2xy(3x+2y)(3x-2y)$ (*i*) $(2x+4y-z)(2x-2y+z)$ (*j*) $(8x+3y)(9y-4x)$ (*k*) $(x+2)^2$ (*l*) $(2-3y)^2$ (*m*) $(xy-4)^2$ (*n*) $xy(2x+3y)^2$ (*o*) $3(a^2+b^2)^2$ (*p*) $(m^2-n^2+4)^2$ (*q*) $(x+3)(x+4)$ (*r*) $(y-5)(y+1)$ (*s*) $(x-3y)(x-5y)$ (*t*) $2z(z+7)(z-2)$ (*u*) $(5-x)(3+x)$

5.14 (*a*) $(m^2-7)(m^2+3)$ (*b*) $(a+2)(a-2)(a+4)(a-4)$ (*c*) $4s^2t(s-3t)(s+2t)$ (*d*) $x^4(x^m-5)(x^m+10)$ (*e*) $(2x+1)(x+1)$ (*f*) $(3y-2)(y-3)$ (*g*) $m(5m+2)(m-1)$ (*h*) $(2x+3y)(3x-2y)$ (*i*) $z^2(2z+1)(2z-1)(3z+1)(3z-1)$ (*j*) $(4x-4y-3)(3x-3y+4)$ (*k*) $x^2(2x^n+1)(2x^n-3)$

5.15 (*a*) $(y+3)(y^2-3y+9)$ (*b*) $(x-1)(x^2+x+1)$ (*c*) $(xy+2)(x^2y^2-2xy+4)$ (*d*) $z^4(2-3z)(4+6z+9z^2)$ (*e*) $8xy(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$ (*f*) $(m-n)(m^2+mn+n^2)(m^6+m^3n^3+n^6)$ (*g*) $(y^2+1)(y^4-y^2+1)$ (*h*) $(x+y-1)(x^2-xy+y^2-5x+4y+7)$ (*i*) $(2x-1)(4x^2+2x+1)(x+1)(x^2-x+1)$

5.16 (*a*) $(x+3)(y-2)$ (*b*) $(2r-s)(p+3q)$ (*c*) $(ax+b)(x-1)$ (*d*) $(x-y)^2(x+y)$ (*e*) $z^3(z-2)(z+1)(z^2-z+1)$ (*f*) $(m+n)(m-n)(m+n+1)$

5.17 (*a*) $(z+1)(z^4-z^3+z-z+1)$
(*b*) $(x+2y)(x^4-2x^3y+4x^2y^2-8xy^3+16y^4)$
(*c*) $(2-u)(16+8u+4u^2+2u^3+u^4)$
(*d*) $(m+1)(m^4-m^3+m^2-m+1)(m-1)(m^4+m^3+m^2+m+1)$
(*e*) $(1-z)(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6)$

5.18 (*a*) $(z^2+4z+8)(z^2-4z+8)$ (*b*) $(2x^2+xy+y^2)(2x^2-xy+y^2)$ (*c*) $(x^4+2x^2-4)(x^4-2x^2-4)$ (*d*) $(m+2n+2p)(m+2n-2p)$ (*e*) $(2+a-3b)(2-a+3b)$ (*f*) $(3x+xy+2y)(3x-xy+2y)$ (*g*) $(x+y+4z)(x+y-z)$

5.19 (*a*) $\text{MDC}=2^3y^2z^2=8y^2z^2$, $\text{MMC}=2^4\cdot 3y^3z^4=48y^3z^4$
(*b*) $\text{MDC}=3r^2s^2$, $\text{MMC}=252r^5s^4t^5$
(*c*) $\text{MDC}=x-2y$, $\text{MMC}=4(x-y)(x-2y)^2$
(*d*) $\text{MDC}=2(y+2z)$, $\text{MMC}=12y^2(y+2z)(y-2z)(y-3z)$
(*e*) $\text{MDC}=x(x-1)$, $\text{MMC}=x^3(x+1)(x-1)(x^2+1)(x^2+x+1)$

Capítulo 6

Frações Algébricas

6.1 FRAÇÕES ALGÉBRICAS RACIONAIS

Uma fração algébrica racional é uma expressão que pode ser escrita como quociente de dois polinômios, P/Q. P é denominado numerador e Q denominador da fração. Assim,

$$\frac{3x-4}{x^2-6x+8} \qquad \text{e} \qquad \frac{x^3+2y^2}{x^4-3xy+2y^3}$$

são frações algébricas racionais.

As regras de manipulação com frações algébricas racionais são as mesmas que as utilizadas para frações numéricas em Aritmética. Uma regra fundamental é: o valor de uma fração fica inalterado se seu numerador e denominador são multiplicados ou divididos pela mesma expressão, desde que tal expressão não seja nula. Neste caso, dizemos que as frações são *equivalentes*.

Por exemplo, se multiplicarmos o numerador e o denominador de $(x+2)/(x-3)$ por $(x-1)$, obteremos a fração equivalente

$$\frac{(x+2)(x-1)}{(x-3)(x-1)} = \frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$$

desde que $(x-1)$ não se anule, isto é, desde que $x \neq 1$.

Da mesma forma, podemos escrever a fração $(x^2+3x+2)/(x^2+4x+3)$ da seguinte maneira

$$\frac{(x+2)(x+1)}{(x+3)(x+1)}$$

e dividir numerador e denominador por $(x+1)$ e obter $(x+2)/(x+3)$, desde que $(x+1)$ não se anule, isto é, desde que $x \neq -1$. A operação de eliminação dos fatores comuns ao numerador e ao denominador é chamada de ***cancelamento***, e pode ser indicada por uma barra inclinada como abaixo:

$$\frac{(x+2)\cancel{(x+1)}}{(x+3)\cancel{(x+1)}} = \frac{x+2}{x+3}$$

Simplificar uma dada fração é reescrevê-la em uma forma equivalente na qual o numerador e o denominador não tenham fatores em comum (exceto ± 1). Neste caso, dizemos que a fração obtida está ***irredutível***. Tal fração irredutível é obtida fatorando-se numerador e denominador e cancelando-se seus fatores comuns, considerando que não sejam nulos.

Assim, $\dfrac{x^2-4xy+3y^2}{x^2-y^2}=\dfrac{(x-3y)\cancel{(x-y)}}{(x+y)\cancel{(x-y)}}=\dfrac{x-3y}{x+y}$, desde que $(x-y)\neq 0$.

Três sinais estão associados a uma fração: o do numerador, o do denominador e o da fração toda. Os dois primeiros podem ser trocados sem que seja alterado o valor da fração. Se não existe sinal algum à frente da fração, subentende-se que o sinal da mesma é positivo.

Exemplo 6.1

$$\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b},\qquad \frac{-a}{-b}=\frac{a}{b},\qquad -\left(\frac{-a}{-b}\right)=-\frac{a}{b}$$

A mudança de sinal pode ser útil em uma simplificação. Por exemplo:

$$\frac{x^2-3x+2}{2-x}=\frac{(x-2)(x-1)}{2-x}=\frac{(x-2)(x-1)}{-(x-2)}=\frac{x-1}{-1}=1-x$$

6.2 OPERAÇÕES COM FRAÇÕES ALGÉBRICAS

A soma algébrica de frações que têm *mesmo denominador* é uma fração cujo numerador é a soma algébrica dos numeradores das frações dadas e cujo denominador é o mesmo das frações dadas.

Exemplo 6.2

$$\frac{3}{5}-\frac{4}{5}-\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3-4-2+1}{5}=\frac{-2}{5}=-\frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{x-3}-\frac{3x+4}{x-3}+\frac{x^2+5}{x-3}=\frac{2-(3x+4)+(x^2+5)}{x-3}=\frac{x^2-3x+3}{x-3}$$

Para adicionar e subtrair frações de *denominadores distintos*, substitua cada fração dada por uma fração equivalente de modo que todas as frações passem a ter mesmo denominador.

O *menor denominador comum* de um conjunto de frações é o MMC dos denominadores das frações.

Assim, o menor denominador comum de 3/4, 4/5 e 7/10 é o MMC de 4, 5, 10, que é 20, e o menor denominador comum de

$$\frac{2}{x^2},\frac{3}{2x},\frac{x}{7}\text{ é }14x^2$$

Exemplo 6.3

$$\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\frac{7}{10}=\frac{15}{20}-\frac{16}{20}+\frac{14}{20}=\frac{15-16+14}{20}=\frac{13}{20}$$

$$\frac{2}{x^2}-\frac{3}{2x}-\frac{x}{7}=\frac{2(14)-3(7x)-x(2x^2)}{14x^2}=\frac{28-21x-2x^3}{14x^2}$$

$$\frac{2x+1}{x(x+2)}-\frac{3}{(x+2)(x-1)}=\frac{(2x+1)(x-1)-3x}{x(x+2)(x-1)}=\frac{2x^2-4x-1}{x(x+2)(x-1)}$$

O produto de duas ou mais frações dadas produz uma fração cujo numerador é o produto dos numeradores das frações dadas e cujo denominador é o produto dos denominadores das frações dadas.

Exemplo 6.4

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{16}=\frac{2\cdot 4\cdot 15}{3\cdot 5\cdot 16}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{x^2-9}{x^2-6x+5}\cdot\frac{x-5}{x+3}=\frac{(x+3)(x-3)}{(x-5)(x-1)}\cdot\frac{x-5}{x+3}$$

$$=\frac{\cancel{(x+3)}(x-3)\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}(x-1)\cancel{(x+3)}}=\frac{x-3}{x-1}$$

O quociente de duas frações dadas é obtido invertendo-se o divisor e depois multiplicando-se.

Exemplo 6.5

$$\frac{3}{8} \div \frac{5}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{3/8}{5/4} = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{7}{x^2-4} \div \frac{xy}{x+2} = \frac{7}{(x+2)(x-2)} \cdot \frac{x+2}{xy} = \frac{7}{xy(x-2)}$$

6.3 FRAÇÕES COMPLEXAS

Fração complexa é aquela que possui uma ou mais frações no numerador ou no denominador, ou em ambos. Para simplificarmos uma fração complexa:

Método 1

(1) Reduza o numerador e denominador a uma única fração.

(2) Divida as duas frações resultantes.

Exemplo 6.6

$$\frac{x - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x^2-1}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{x^2-1}{x} \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{x^2-1}{x+1} = x - 1$$

Método 2

(1) Multiplique o numerador e o denominador da fração complexa pelo MMC de todos os denominadores das frações que a compõem.

(2) Reduza a fração resultante à forma irredutível.

Exemplo 6.7

$$\frac{\frac{1}{x^2} - 4}{\frac{1}{x} - 2} = \frac{\left(\frac{1}{x^2} - 4\right)x^2}{\left(\frac{1}{x} - 2\right)x^2} = \frac{1-4x^2}{x-2x^2} = \frac{(1+2x)(1-2x)}{x(1-2x)} = \frac{1+2x}{x}$$

Problemas Resolvidos

Redução de Frações à Forma Irredutível

6.1 (*a*) $\dfrac{15x^2}{12xy} = \dfrac{3 \cdot 5 \cdot x \cdot x}{3 \cdot 4 \cdot x \cdot y} = \dfrac{5x}{4y}$

(*b*) $\dfrac{4x^2y}{18xy^3} = \dfrac{2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot y}{2 \cdot 9 \cdot x \cdot y \cdot y^2} = \dfrac{2x}{9y^2}$

(*c*) $\dfrac{14a^3b^3c^2}{-7a^2b^4c^2} = -\dfrac{2a}{b}$

(*d*) $\dfrac{8x-8y}{16x-16y} = \dfrac{8\cancel{(x-y)}}{16\cancel{(x-y)}} = \dfrac{1}{2}$ (onde $x - y \neq 0$)

(*e*) $\dfrac{x^3y - y^3x}{x^2y - xy^2} = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{xy(x-y)} = \dfrac{\cancel{xy(x-y)}(x+y)}{\cancel{xy(x-y)}} = x + y$

(*f*) $\dfrac{x^2-4xy+3y^2}{y^2-x^2} = \dfrac{(x-3y)(x-y)}{(y-x)(y+x)} = -\dfrac{(x-3y)\cancel{(x-y)}}{\cancel{(x-y)}(y+x)} = -\dfrac{x-3y}{y+x} = \dfrac{3y-x}{y+x}$

(*g*) $\dfrac{6x^2-3xy}{-4x^2y+2xy^2} = \dfrac{3x(2x-y)}{2xy(y-2x)} = -\dfrac{3x\cancel{(2x-y)}}{2xy\cancel{(2x-y)}} = -\dfrac{3}{2y}$

(*h*) $\dfrac{r^3s+3r^2s+9rs}{r^3-27}=\dfrac{rs(r^2+3r+9)}{r^3-3^3}=\dfrac{rs(r^2+3r+9)}{(r-3)(r^2+3r+9)}=\dfrac{rs}{r-3}$

(*i*) $\dfrac{(8xy+4y^2)^2}{8x^3y+y^4}=\dfrac{(4y[2x+y])^2}{y(8x^3+y^3)}=\dfrac{16y^2(2x+y)^2}{y(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)}=\dfrac{16y(2x+y)}{4x^2-2xy+y^2}$

(*j*) $\dfrac{x^{2n+1}-x^{2n}y}{x^{n+3}-x^ny^3}=\dfrac{x^{2n}(x-y)}{x^n(x^3-y^3)}=\dfrac{x^{2n}(x-y)}{x^n(x-y)(x^2+xy+y^2)}=\dfrac{x^n}{x^2+xy+y^2}$

Multiplicação de Frações

6.2 (*a*) $\dfrac{2x}{3y^2}\cdot\dfrac{6y}{x^2}=\dfrac{12xy}{3x^2y^2}=\dfrac{4}{xy}$ (*b*) $\dfrac{9}{3x+3}\cdot\dfrac{x^2-1}{6}=\dfrac{9}{3(x+1)}\cdot\dfrac{(x+1)(x-1)}{6}=\dfrac{x-1}{2}$

(*c*) $\dfrac{x^2-4}{xy^2}\cdot\dfrac{2xy}{x^2-4x+4}=\dfrac{(x+2)(x-2)}{xy^2}\cdot\dfrac{2xy}{(x-2)^2}=\dfrac{2(x+2)}{y(x-2)}$

(*d*) $\dfrac{6x-12}{4xy+4x}\cdot\dfrac{y^2-1}{2-3x+x^2}=\dfrac{6(x-2)}{4x(y+1)}\cdot\dfrac{(y+1)(y-1)}{(2-x)(1-x)}$

$$=-\frac{\cancel{6(x-2)(y+1)}(y-1)}{4x\cancel{(y+1)(x-2)}(1-x)}=-\frac{3(y-1)}{2x(1-x)}=\frac{3(y-1)}{2x(x-1)}$$

(*e*) $\left(\dfrac{ax+ab+cx+bc}{a^2-x^2}\right)\left(\dfrac{x^2-2ax+a^2}{x^2+(b+a)x+ab}\right)=\dfrac{(a+c)(x+b)}{(a-x)(a+x)}\cdot\dfrac{(x-a)(x-a)}{(x+a)(x+b)}$

$$=-\frac{(a+c)(x+b)}{(x-a)(a+x)}\cdot\frac{(x-a)(x-a)}{(x+a)(x+b)}=-\frac{(a+c)(x-a)}{(x+a)^2}=\frac{(a+c)(a-x)}{(x+a)^2}$$

Divisão de Frações

6.3 (*a*) $\dfrac{5}{4}\div\dfrac{3}{11}=\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{11}{3}=\dfrac{55}{12}$

(*b*) $\dfrac{9}{7}\div\dfrac{4}{7}=\dfrac{9}{7}\cdot\dfrac{7}{4}=\dfrac{9}{4}$

(*c*) $\dfrac{3x}{2}\div\dfrac{6x^2}{4}=\dfrac{3x}{2}\cdot\dfrac{4}{6x^2}=\dfrac{1}{x}$

(*d*) $\dfrac{10xy^2}{3z}\div\dfrac{5xy}{6z^3}=\dfrac{10xy^2}{3z}\cdot\dfrac{6z^3}{5xy}=4yz^2$

(*e*) $\dfrac{x+2xy}{3x^2}\div\dfrac{2y+1}{6x}=\dfrac{x+2xy}{3x^2}\cdot\dfrac{6x}{2y+1}=\dfrac{x(1+2y)}{3x^2}\cdot\dfrac{6x}{(2y+1)}=2$

(*f*) $\dfrac{9-x^2}{x^4+6x^3}\div\dfrac{x^3-2x^2-3x}{x^2+7x+6}=\dfrac{9-x^2}{x^4+6x^3}\cdot\dfrac{x^2+7x+6}{x^3-2x^2-3x}$

$$=\frac{(3-x)(3+x)}{x^3(x+6)}\cdot\frac{(x+1)(x+6)}{x(x-3)(x+1)}=-\frac{3+x}{x^4}$$

(*g*) $\dfrac{2x^2-5x+2}{\left(\dfrac{2x-1}{3}\right)}=(2x^2-5x+2)\cdot\dfrac{3}{2x-1}=(2x-1)(x-2)\cdot\dfrac{3}{2x-1}=3(x-2)$

(*h*) $\dfrac{\left(\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+7x-8}\right)}{\left(\dfrac{9-x^2}{64-x^2}\right)}=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+7x-8}\cdot\dfrac{64-x^2}{9-x^2}=\dfrac{(x-3)(x-2)}{(x+8)(x-1)}\cdot\dfrac{(8-x)(8+x)}{(3-x)(3+x)}=-\dfrac{(x-2)(8-x)}{(x-1)(3+x)}$

Adição e Subtração de Frações

6.4 (*a*) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

(*b*) $\frac{5}{18}+\frac{7}{24}=\frac{5(4)}{72}+\frac{7(3)}{72}=\frac{41}{72}$

(*c*) $\frac{x}{6}+\frac{5x}{21}=\frac{x(7)+5x(2)}{42}=\frac{17x}{42}$

(*d*) $\frac{3t^2}{5}-\frac{4t^2}{15}=\frac{3t^2(3)-4t^2(1)}{15}=\frac{5t^2}{15}=\frac{t^2}{3}$

(*e*) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{y+x}{xy}$

(*f*) $\frac{3}{x}+\frac{4}{3y}=\frac{3(3y)+4(x)}{3xy}=\frac{9y+4x}{3xy}$

(*g*) $\frac{5}{2x}-\frac{3}{4x^2}=\frac{5(2x)-3(1)}{4x^2}=\frac{10x-3}{4x^2}$

(*h*) $\frac{3a}{bc}+\frac{2b}{ac}=\frac{3a(a)+2b(b)}{abc}=\frac{3a^2+2b^2}{abc}$

(*i*) $\frac{3t-1}{10}+\frac{5-2t}{15}=\frac{(3t-1)3+(5-2t)2}{30}=\frac{9t-3+10-4t}{30}=\frac{5t+7}{30}$

(*j*) $\frac{3}{x}-\frac{2}{x+1}+\frac{2}{x^2}=\frac{3x(x+1)-2x^2+2(x+1)}{x^2(x+1)}=\frac{x^2+5x+2}{x^2(x+1)}$

(*k*) $5-\frac{5}{x+3}+\frac{10}{x^2-9}=\frac{5(x^2-9)-5(x-3)+10}{x^2-9}=\frac{5(x^2-x-4)}{x^2-9}$

(*l*) $\frac{3}{y-2}-\frac{2}{y+2}-\frac{y}{y^2-4}=\frac{3(y+2)-2(y-2)-y}{y^2-4}=\frac{10}{y^2-4}$

(*m*) $\frac{5}{2s+4}-\frac{3}{s^2+3s+2}+\frac{s}{s^2-s-2}=\frac{5}{2(s+2)}-\frac{3}{(s+1)(s+2)}+\frac{s}{(s-2)(s+1)}$

$$=\frac{5(s+1)(s-2)-3(2)(s-2)+s(2)(s+2)}{2(s+2)(s+1)(s-2)}=\frac{7s^2-7s+2}{2(s+2)(s+1)(s-2)}$$

(*n*) $\frac{3x-6}{4x^2+12x-16}-\frac{2x-5}{6x^2-6}+\frac{3x^2+3}{8x^2+40x+32}=\frac{3x-6}{4(x+4)(x-1)}-\frac{2x-5}{6(x+1)(x-1)}+\frac{3x^2+3}{8(x+4)(x+1)}$

$$=\frac{(3x-6)(6)(x+1)-(2x-5)(4)(x+4)+(3x^2+3)(3)(x-1)}{24(x+4)(x-1)(x+1)}=\frac{9x^3+x^2-21x+35}{24(x+4)(x-1)(x+1)}$$

Frações Complexas

6.5 (*a*) $\frac{5/7}{3/4}=\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{3}=\frac{20}{21}$

(*b*) $\frac{2/3}{7}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{7}=\frac{2}{21}$

(*c*) $\frac{10}{5/6}=10\cdot\frac{6}{5}=\frac{60}{5}=12$

(*d*) $\frac{\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\right)}{\frac{3}{8}}=\frac{\left(\frac{4}{6}+\frac{5}{6}\right)}{\frac{3}{8}}=\frac{\frac{9}{6}}{\frac{3}{8}}=\frac{9}{6}\cdot\frac{8}{3}=4$

(*e*) $\frac{\left(\frac{x+y}{3x^2}\right)}{\left(\frac{x-y}{x}\right)}=\frac{x+y}{3x^2}\cdot\frac{x}{x-y}=\frac{x+y}{3x(x-y)}$

(*f*) $\frac{\left(\frac{2}{a-b}\right)}{a-b}=\frac{2}{a-b}\cdot\frac{1}{a-b}=\frac{2}{(a-b)^2}$

(*g*) $\frac{2a}{\left(\frac{a}{x+1}\right)}=2a\cdot\frac{x+1}{a}=2(x+1)$

(*h*) $\frac{\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right)}{\left(1+\frac{a-b}{a+b}\right)}=\frac{\left(\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}\right)}{\left(\frac{(a+b)+(a-b)}{a+b}\right)}=\frac{\left(\frac{4ab}{(a-b)(a+b)}\right)}{\left(\frac{2a}{a+b}\right)}=\frac{4ab}{(a-b)(a+b)}\cdot\frac{a+b}{2a}=\frac{2b}{a-b}$

(*i*) $\frac{\left(\frac{2}{x+h-3}-\frac{2}{x-3}\right)}{h}=\frac{\left(\frac{2(x-3)-2(x+h-3)}{(x+h-3)(x-3)}\right)}{h}=\frac{\left(\frac{-2h}{(x+h-3)(x-3)}\right)}{h}=\frac{-2}{(x+h-3)(x-3)}$

$$(j)\quad 3y+\frac{\left(1+\frac{2}{y}\right)}{\left(\frac{y+2}{y-2}\right)}=3y+\frac{\left(\frac{y+2}{y}\right)}{\left(\frac{y+2}{y-2}\right)}=3y+\left(\frac{y+2}{y}\right)\left(\frac{y-2}{y+2}\right)=3y+\frac{y-2}{y}=\frac{3y^2+y-2}{y}$$

$$(k)\quad \frac{1}{1-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}}=\frac{1}{1-\frac{1}{\left(\frac{x+1}{x}\right)}}=\frac{1}{1-\frac{x}{x+1}}=\frac{1}{\left(\frac{x+1-x}{x+1}\right)}=\frac{1}{\left(\frac{1}{x+1}\right)}=x+1$$

$$(l)\quad \frac{a}{a-b+\frac{a+b}{\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)}}=\frac{a}{a-b+\frac{a+b}{\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)}}=\frac{a}{a-b+\frac{ab(a+b)}{(a+b)(a-b)}}=\frac{a}{(a-b)+\frac{ab}{a-b}}$$

$$=\frac{a}{\left(\frac{(a-b)^2+ab}{a-b}\right)}=\frac{a}{\left(\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}\right)}=\frac{a(a-b)}{a^2-ab+b^2}$$

$$(m)\quad 1-\frac{1}{2-\frac{1}{\left(3-\frac{2a-1}{2a+1}\right)}}=1-\frac{1}{2-\frac{1}{\left(\frac{3(2a+1)-(2a-1)}{2a+1}\right)}}=1-\frac{1}{2-\left(\frac{2a+1}{4a+4}\right)}$$

$$=1-\frac{1}{\left(\frac{2(4a+4)-(2a+1)}{4a+4}\right)}=1-\frac{4a+4}{6a+7}=\frac{6a+7-(4a+4)}{6a+7}=\frac{2a+3}{6a+7}$$

$$(n)\quad \frac{\left(\frac{1}{x}+1\right)}{\left(\frac{1}{x}-1\right)}=\frac{\left(\frac{1}{x}+1\right)x}{\left(\frac{1}{x}-1\right)x}=\frac{1+x}{1-x}$$

$$(o)\quad \frac{\left(\frac{a+6}{a^2-9}\right)}{\left(\frac{a}{a-3}-\frac{a+4}{a+3}\right)}=\frac{\left(\frac{a+6}{(a+3)(a-3)}\right)(a+3)(a-3)}{\left(\frac{a}{a-3}-\frac{a+4}{a+3}\right)(a+3)(a-3)}=\frac{a+6}{a(a+3)-(a+4)(a-3)}$$

$$=\frac{a+6}{a^2+3a-(a^2+a-12)}=\frac{a+6}{a^2+3a-a^2-a+12}=\frac{a+6}{2a+12}=\frac{a+6}{2(a+6)}=\frac{1}{2}$$

$$(p)\quad \frac{\left(\frac{2}{6ab}-\frac{1}{4a}\right)}{\left(\frac{1}{3b^2}+\frac{1}{2a}\right)}=\frac{\left(\frac{2}{6ab}-\frac{1}{4a}\right)12ab^2}{\left(\frac{1}{3b^2}+\frac{1}{2a}\right)12ab^2}=\frac{2(2b)-1(3b^2)}{1(4a)+1(6b^2)}=\frac{4b-3b^2}{4a+6b^2}$$

Problemas Complementares

Demonstre que:

6.6 (*a*) $\frac{24x^3y^2}{18xy^3}=\frac{4x^2}{3y}$ (*d*) $\frac{4x^2-16}{x^2-2x}=\frac{4(x+2)}{x}$ (*g*) $\frac{ax^4-a^2x^3-6a^3x^2}{9a^4x-a^2x^3}=-\frac{x(x+2a)}{a(x+3a)}$

(*b*) $\frac{36xy^4z^2}{-15x^4y^3z}=\frac{-12yz}{5x^3}$ (*e*) $\frac{y^2-5y+6}{4-y^2}=\frac{3-y}{y+2}$ (*h*) $\frac{xy-y^2}{x^4y-xy^4}=\frac{1}{x(x^2+xy+y^2)}$

(*c*) $\frac{5a^2-10ab}{a-2b}=5a$ (*f*) $\frac{(x^2+4x)^2}{x^2+6x+8}=\frac{x^2(x+4)}{x+2}$ (*i*) $\frac{3a^2}{4b^3}\cdot\frac{2b^4}{9a^3}=\frac{b}{6a}$

6.7 (*a*) $\dfrac{8xyz^2}{3x^3y^2z}\cdot\dfrac{9xy^2z}{4xz^5}=\dfrac{6y}{x^2z^3}$

(*b*) $\dfrac{xy^2}{2x-2y}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^3y^2}=\dfrac{x+y}{2x^2}$

(*c*) $\dfrac{x^2+3x}{4x^2-4}\cdot\dfrac{2x^2+2x}{x^2-9}\cdot\dfrac{x^2-4x+3}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

(*d*) $\dfrac{x^2-4y^2}{3xy+3x}\cdot\dfrac{2y^2-2}{2y^2+xy-x^2}=-\dfrac{2(x+2y)(y-1)}{3x(x+y)}$

(*e*) $\dfrac{y^2-y-6}{y^2-2y+1}\cdot\dfrac{y^2+3y-4}{9y-y^3}=-\dfrac{(y+2)(y+4)}{y(y-1)(y+3)}$

(*f*) $\dfrac{t^3+3t^2+t+3}{4t^2-16t+16}\cdot\dfrac{8-t^3}{t^3+t}=\dfrac{(t+3)(t^2+2t+4)}{4t(2-t)}$

6.8 (*a*) $\dfrac{3x}{8y}\div\dfrac{9x}{16y}=\dfrac{2}{3}$ (*b*) $\dfrac{24x^3y^2}{5z^2}\div\dfrac{8x^2y^3}{15z^4}=\dfrac{9xz^2}{y}$ (*c*) $\dfrac{x^2-4y^2}{x^2+xy}\div\dfrac{x^2-xy-6y^2}{y^2+xy}=\dfrac{y(x-2y)}{x(x-3y)}$

6.9 (*a*) $\dfrac{6x^2-x-2}{\left(\dfrac{3x-2}{2x+1}\right)}=(2x+1)^2$ (*b*) $\dfrac{\left(\dfrac{y^2-3y+2}{y^2+4y-21}\right)}{\left(\dfrac{4-4y+y^2}{9-y^2}\right)}=-\dfrac{(y-1)(y+3)}{(y-2)(y+7)}$ (*c*) $\dfrac{\left(\dfrac{x^2y+xy^2}{x-y}\right)}{x+y}=\dfrac{xy}{x-y}$

6.10 (*a*) $\dfrac{2x}{3}-\dfrac{x}{2}=\dfrac{x}{6}$

(*b*) $\dfrac{4}{3x}-\dfrac{5}{4x}=\dfrac{1}{12x}$

(*c*) $\dfrac{3}{2y^2}-\dfrac{8}{y}=\dfrac{3-16y}{2y^2}$

(*d*) $\dfrac{x+y^2}{x^2}+\dfrac{x-1}{x}-1=\dfrac{y^2}{x^2}$

(*e*) $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x}{x^2-4}=\dfrac{x}{x^2-4}$

(*f*) $\dfrac{r-1}{r^2+r-6}-\dfrac{r+2}{r^2+4r+3}+\dfrac{1}{3r-6}=\dfrac{r^2+4r+12}{3(r+3)(r-2)(r+1)}$

(*g*) $\dfrac{x}{2x^2+3xy+y^2}-\dfrac{x-y}{y^2-4x^2}+\dfrac{y}{2x^2+xy-y^2}=\dfrac{3x^2+xy}{(2x+y)(2x-y)(x+y)}$

(*h*) $\dfrac{a}{(c-a)(a-b)}+\dfrac{b}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{c}{(b-c)(c-a)}=0$

6.11 (*a*) $\dfrac{x+y}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}=xy$

(*b*) $\dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{2x^2+x}=\dfrac{1}{x^2}$

(*c*) $\dfrac{\left(y+\dfrac{2y}{y-2}\right)}{\left(1+\dfrac{4}{y^2-4}\right)}=y+2$

(*d*) $\dfrac{\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}\right)}{\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}\right)}=2$

(*e*) $\dfrac{x}{1-\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{y}}\right)}=x+y$

(*f*) $2-\dfrac{2}{1-\left(\dfrac{2}{2-\dfrac{2}{x^2}}\right)}=2x^2$

Capítulo 7

Expoentes

7.1 EXPOENTE INTEIRO POSITIVO

Se n é um inteiro positivo, a^n representa o produto de n fatores iguais a a. Assim, $a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$. Na expressão a^n, a é denominado base e n é denominado expoente ou índice. Lemos a^n como "a n-ésima potência de a" ou "a elevado à n-ésima potência". Se $n = 2$ dizemos "a ao quadrado" para a^2; se $n = 3$ dizemos "a ao cubo" para a^3.

Exemplo 7.1

$$x^3 = x \cdot x \cdot x, \qquad 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32, \qquad (-3)^3 = (-3)(-3)\ (-3) = -27$$

7.2 EXPOENTE INTEIRO NEGATIVO

Se n é um inteiro positivo, definimos

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \text{supondo que } a \neq 0.$$

Exemplo 7.2

$$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}, \qquad \frac{1}{3^{-3}} = 3^3 = 27, \qquad -4x^{-2} = \frac{-4}{x^2}, \qquad (a+b)^{-1} = \frac{1}{(a+b)}$$

7.3 RAÍZES

Se n é um inteiro positivo e se a e b são tais que $a^n = b$, então diz-se que a é uma raiz n-ésima de b.

Se b for positivo, existe um único número positivo a, tal que $a^n = b$. Indicamos esse número positivo por $\sqrt[n]{b}$, e o denominamos raiz n-ésima *principal* de b.

Exemplo 7.3 $\sqrt[4]{16}$ é o número positivo que quando elevado à quarta potência resulta em 16. Claramente, este número é $+2$, e então escrevemos $\sqrt[4]{16} = +2$.

Exemplo 7.4 O número -2, quando elevado à quarta potência, também resulta em 16. Dizemos que -2 é uma raiz quarta de 16, mas não a raiz quarta principal de 16.

Se b é negativo, não existe nenhuma raiz n-ésima de b, mas existe uma raiz n-ésima negativa de b, se n for ímpar. Chamamos esse número negativo de raiz n-ésima principal de b e o denotamos por $\sqrt[n]{b}$.

Exemplo 7.5 $\sqrt[3]{-27}$ é o número que quando elevado à terceira potência (ou cubo) resulta em -27. Claramente, este número é -3, e então escrevemos $\sqrt[3]{-27} = -3$ como a raiz cúbica principal de -27.

Exemplo 7.6 Se n é par, como em $\sqrt[4]{-16}$, não existe raiz n-ésima principal em termos de números reais.

Nota: Em Matemática Superior pode-se mostrar que existem exatamente n valores para a tais que $a^n = b$, $b \neq 0$, desde que consideremos os números imaginários (ou complexos).

7.4 EXPOENTES RACIONAIS

Se m e n são inteiros positivos, definimos

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} \text{ (supondo } a \geq 0 \text{ se } n \text{ for par).}$$

Exemplo 7.7

$$4^{3/2} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8, \qquad (27)^{2/3} = \sqrt[3]{(27)^2} = 9$$

Se m e n são inteiros positivos, definimos

$$a^{-m/n} = \frac{1}{a^{m/n}}$$

Exemplo 7.8

$$8^{-2/3} = \frac{1}{8^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}, \qquad x^{-5/2} = \frac{1}{x^{5/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^5}}$$

Definimos $a^0 = 1$, para $a \neq 0$.

Exemplo 7.9

$$10^0 = 1, \qquad (-3)^0 = 1, \qquad (ax)^0 = 1 \qquad (\text{se } ax \neq 0)$$

7.5 REGRAS GERAIS PARA EXPOENTES

Sendo p e q números reais, valem as seguintes regras.

A. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

Exemplo 7.10

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5, \qquad 5^{-3} \cdot 5^7 = 5^{-3+7} = 5^4, \qquad 2^{1/2} \cdot 2^{5/2} = 2^3 = 8$$
$$3^{1/3} \cdot 3^{1/6} = 3^{1/3+1/6} = 3^{1/2} = \sqrt{3}, \qquad 3^9 \cdot 3^{-2} \cdot 3^{-3} = 3^4 = 81$$

B. $(a^p)^q = a^{pq}$

Exemplo 7.11

$$(2^4)^3 = 2^{12}, \qquad (5^{1/3})^{-3} = 5^{(1/3)(-3)} = 5^{-1} = 1/5, \qquad (3^2)^0 = 3^0 = 1$$
$$(x^5)^{-4} = x^{-20}, \qquad (a^{2/3})^{3/4} = a^{(2/3)(3/4)} = a^{1/2}$$

C. $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \qquad a \neq 0$

Exemplo 7.12

$$\frac{2^6}{2^4} = 2^{6-4} = 2^2 = 4, \qquad \frac{3^{-2}}{3^4} = 3^{-2-4} = 3^{-6}, \qquad \frac{x^{1/2}}{x^{-1}} = x^{1/2-(-1)} = x^{3/2}$$
$$\frac{(x+15)^{4/3}}{(x+15)^{5/6}} = (x+15)^{4/3-5/6} = (x+15)^{1/2} = \sqrt{x+15}$$

D. $(ab)^p = a^p b^p$

Exemplo 7.13

$$(2\cdot 3)^4 = 2^4\cdot 3^4, \qquad (2x)^3 = 2^3x^3 = 8x^3, \qquad (3a)^{-2} = 3^{-2}a^{-2} = \frac{1}{9a^2}$$

$$(4x)^{1/2} = 4^{1/2}x^{1/2} = 2x^{1/2} = 2\sqrt{x}$$

E. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p} \qquad b \neq 0$

Exemplo 7.14

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}, \qquad \left(\frac{x^2}{y^3}\right)^{-3} = \frac{(x^2)^{-3}}{(y^3)^{-3}} = \frac{x^{-6}}{y^{-9}} = \frac{y^9}{x^6}$$

$$\left(\frac{5^3}{2^6}\right)^{-1/3} = \frac{(5^3)^{-1/3}}{(2^6)^{-1/3}} = \frac{5^{-1}}{2^{-2}} = \frac{2^2}{5^1} = \frac{4}{5}$$

7.6 NOTAÇÃO CIENTÍFICA

Números muito grandes e números muito pequenos, quando usados em cálculo, geralmente são expressos em notação científica. Um número é expresso em notação científica como o produto de um número N por uma potência de dez, onde $1 \leq N < 10$ e N contém todos os dígitos significativos do número dado.

Exemplo 7.15 Escreva os números a seguir em notação científica (*a*) 5 834 000, (*b*) 0,028 031, (*c*) 45,6.

(*a*) $5\,834\,000 = 5{,}834 \times 10^6$
(*b*) $0{,}028\,031 = 2{,}8031 \times 10^{-2}$
(*c*) $45{,}6 = 4{,}56 \times 10^1$

Podemos colocar o número $3{,}1416 \times 10^3$ em uma calculadora fazendo uso da tecla EE ou da tecla EXP. Quando entramos com o número 3,1416, pressionamos a tecla EE e depois entramos com o número 3 e, a seguir, pressionamos a tecla ENTER ou a tecla =, obtemos uma exposição de 3141,6. Analogamente, podemos entrar com o número $4{,}902 \times 10^{-2}$ entrando com o número 4,902 e pressionando a tecla EE, e então entrando com o -2 e pressionando a seguir a tecla ENTER para obtermos uma exposição de 0,04902. O expoente pode ser qualquer outro inteiro entre -99 e 99. Dependendo do número de dígitos que o número contém e do expoente utilizado, a calculadora pode arredondar o número e/ou deixar o resultado em notação científica. O número de dígitos que pode ter o número N varia de calculadora para calculadora, bem como o fato de a calculadora expor ou não um número em notação científica ou em notação padrão.

Existem calculadoras que algumas vezes expõem o resultado em notação científica, tal como 3,69E-7 ou $3{,}69^{-07}$. Em ambos os casos, a resposta deve ser interpretada como $3{,}69 \times 10^{-7}$. As calculadoras expõem os dígitos significativos do resultado seguidos da potência de 10 conveniente. Quando você colocar em uma calculadora um número em notação científica como parte de um cálculo, pressione a tecla de operação após cada número até você estar pronto para computar o resultado.

Exemplo 7.16 Compute $(1{,}892 \times 10^8) \times (5{,}34 \times 10^{-3})$ usando uma calculadora.

Entre com o número 1,892, pressione a tecla EE, entre com o número 8, pressione a tecla com o símbolo ×, entre com o número 5,34, pressione a tecla EE, entre com o número -3, pressione a tecla ENTRE e obtenha como exposição o número 1 010 328.

$$(1{,}892 \times 10^8) \times (5{,}34 \times 10^{-3}) = 1\,010\,328$$

Problemas Resolvidos

Expoente Positivo Inteiro

7.1 (*a*) $2^3 = 2\cdot 2\cdot 2 = 8$

(*b*) $(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$

(*c*) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{243}$

(*d*) $(3y)^2(2y)^3 = (3y)(3y)(2y)(2y)(2y) = 72y^5$

(*e*) $(-3xy^2)^3 = (-3xy^2)(-3xy^2)(-3xy^2) = -27x^3y^6$

Expoente Negativo Inteiro

7.2 (*a*) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

(*b*) $3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$

(*c*) $-4(4)^{-2} = -4\left(\frac{1}{4^2}\right) = -\frac{1}{4}$

(*d*) $-2b^{-2} = -2\left(\frac{1}{b^2}\right) = -\frac{2}{b^2}$

(*e*) $(-2b)^{-2} = \frac{1}{(-2b)^2} = \frac{1}{4b^2}$

(*f*) $5\cdot 10^{-3} = 5\left(\frac{1}{10^3}\right) = \frac{5}{1.000} = \frac{1}{200}$

(*g*) $\frac{8}{10^{-2}} = 8\cdot 10^2 = 800$

(*h*) $\frac{4}{x^{-2}y^{-2}} = 4x^2y^2$

(*i*) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \frac{1}{(3/4)^3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$

(*j*) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-3} = \frac{1}{(x/y)^3} = \left(\frac{y}{x}\right)^3 = \frac{y^3}{x^3}$

(*k*) $(0.02)^{-1} = \left(\frac{2}{100}\right)^{-1} = \frac{100}{2} = 50$

(*l*) $\frac{ab^{-4}}{a^{-2}b} = \frac{a\cdot a^2}{b\cdot b^4} = \frac{a^3}{b^5}$

(*m*) $\frac{x^{2n+1}}{y^{3n-1}} = x^{2n+1}y^{1-3n}$

(*n*) $\frac{(x-1)^{-2}(x+3)^{-1}}{(2x-4)^{-1}(x+5)^{-3}} = \frac{(2x-4)(x+5)^3}{(x-1)^2(x+3)}$

Expoentes Racionais

7.3 (*a*) $(8)^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

(*b*) $(-8)^{2/3} = \sqrt[3]{(-8)^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

(*c*) $(-x^3)^{1/3} = \sqrt[3]{-x^3} = -x$

(*d*) $\left(\frac{1}{16}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$

(*e*) $\left(-\frac{1}{8}\right)^{2/3} = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{8}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$

7.4 (*a*) $x^{-1/3} = \frac{1}{x^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

(*b*) $(8)^{-2/3} = \frac{1}{8^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{4}$

(*c*) $(-8)^{-2/3} = \frac{1}{(-8)^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(-8)^2}} = \frac{1}{4}$

(*d*) $(-x^3)^{-1/3} = \frac{1}{(-x^3)^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{-x^3}} = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$

(*e*) $(-1)^{-2/3} = \frac{1}{(-1)^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(-1)^2}} = 1$

(*f*) $-(1)^{-2/3} = -\frac{1}{1^{2/3}} = -1$

(*g*) $-(-1)^{-3/5} = -\frac{1}{(-1)^{3/5}} = -\frac{1}{\sqrt[5]{(-1)^3}} = -\frac{1}{\sqrt[5]{-1}} = -\frac{1}{-1} = 1$

7.5 (*a*) $7^0 = 1$, $(-3)^0 = 1$, $(-2/3)^0 = 1$

(*b*) $(x-y)^0 = 1$, se $x - y \neq 0$

(*c*) $3x^0 = 3\cdot 1 = 3$, se $x \neq 0$

(*d*) $(3x)^0 = 1$, se $3x \neq 0$, i.e. se $x \neq 0$

(*e*) $4\cdot 10^0 = 4\cdot 1 = 4$

(*f*) $(4\cdot 10)^0 = (40)^0 = 1$

(*g*) $-(1)^0 = -1$

(*h*) $(-1)^0 = 1$

(*i*) $(3x)^0(4y)^0 = 1\cdot 1 = 1$, se $3x \neq 0$ e $4y \neq 0$, i.e. se $x \neq 0$, $y \neq 0$

(*j*) $-2(3x+2y-4)^0 = -2(1) = -2$, se $3x + 2y - 4 \neq 0$

(*k*) $\frac{(5x+3y)}{(5x+3y)^0} = \frac{5x+3y}{1} = 5x + 3y$, se $5x + 3y \neq 0$

(*l*) $4(x^2+y^2)(x^2+y^2)^0 = 4(x^2+y^2)(1) = 4(x^2+y^2)$, se $x^2 + y^2 \neq 0$

Regras Gerais para Expoentes

7.6 (*a*) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

(*b*) $a^3 \cdot a^5 = a^{3+5} = a^8$

(*c*) $3^4 \cdot 3^5 = 3^9$

(*d*) $a^{n+1} \cdot a^{n-2} = a^{2n-1}$

(*e*) $x^{1/2} \cdot x^{1/3} = x^{1/2+1/3} = x^{5/6}$

(*f*) $x^{1/2} \cdot x^{-1/3} = x^{1/2-1/3} = x^{1/6}$

(*g*) $10^7 \cdot 10^{-3} = 10^{7-3} = 10^4$

(*h*) $(4 \cdot 10^{-6})(2 \cdot 10^4) = 8 \cdot 10^{4-6} = 8 \cdot 10^{-2}$

(*i*) $a^x \cdot a^y \cdot a^{-z} = a^{x+y-z}$

(*j*) $(\sqrt{x+y})(x+y) = (x+y)^{1/2}\ (x+y)^1 = (x+y)^{3/2}$

(*k*) $10^{1.7} \cdot 10^{2.6} = 10^{4.3}$

(*l*) $10^{-4.1} \cdot 10^{3.5} \cdot 10^{-0.1} = 10^{-4.1+3.5-0.1} = 10^{-0.7}$

(*m*) $\left(\dfrac{b}{a}\right)^{3/2} \cdot \left(\dfrac{b}{a}\right)^{-2/3} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{3/2-2/3} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{5/6}$

(*n*) $\left(\dfrac{x}{x+y}\right)^{-1}\left(\dfrac{x}{x+y}\right)^{1/2} = \left(\dfrac{x}{x+y}\right)^{-1/2} = \left(\dfrac{x+y}{x}\right)^{1/2} = \sqrt{\dfrac{x+y}{x}}$

(*o*) $(x^2+1)^{-5/2}(x^2+1)^0(x^2+1)^2 = (x^2+1)^{-5/2+0+2} = (x^2+1)^{-1/2} = \dfrac{1}{(x^2+1)^{1/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

7.7 (*a*) $(a^p)^q = a^{pq}$

(*b*) $(x^3)^4 = x^{3 \cdot 4} = x^{12}$

(*c*) $(a^{m+2})^n = a^{(m+2)n} = a^{mn+2n}$

(*d*) $(10^3)^2 = 10^{3 \cdot 2} = 10^6$

(*e*) $(10^{-3})^2 = 10^{-3 \cdot 2} = 10^{-6}$

(*f*) $(49)^{3/2} = (7^2)^{3/2} = 7^{2 \cdot 3/2} = 7^3 = 343$

(*g*) $(3^{-1/2})^{-2} = 3^1 = 3$

(*h*) $(u^{-2})^{-3} = u^{(-2)(-3)} = u^6$

(*i*) $(81)^{3/4} = (3^4)^{3/4} = 3^3 = 27$

(*j*) $(\sqrt{x+y})^5 = [(x+y)^{1/2}]^5 = (x+y)^{5/2}$

(*k*) $(\sqrt[3]{x^3+y^3})^6 = [(x^3+y^3)^{1/3}]^6 = (x^3+y^3)^{1/3 \cdot 6} = (x^3+y^3)^2$

(*l*) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[6]{a^{2/3}} = (a^{2/3})^{1/6} = a^{1/9} = \sqrt[9]{a}$

7.8 (*a*) $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

(*b*) $\dfrac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$

(*c*) $\dfrac{7^4}{7^3} = 7^{4-3} = 7^1 = 7$

(*d*) $\dfrac{p^{2n+3}}{p^{n+1}} = p^{(2n+3)-(n+1)} = p^{n+2}$

(*e*) $\dfrac{10^2}{10^5} = 10^{2-5} = 10^{-3}$

(*f*) $\dfrac{x^{m+3}}{x^{m-1}} = x^4$

(*g*) $\dfrac{y^{2/3}}{y^{1/3}} = y^{2/3-1/3} = y^{1/3}$

(*h*) $\dfrac{z^{1/2}}{z^{3/4}} = z^{1/2-3/4} = z^{-1/4}$

(*i*) $\dfrac{(x+y)^{3a+1}}{(x+y)^{2a+5}} = (x+y)^{a-4}$

(*j*) $\dfrac{8 \cdot 10^2}{2 \cdot 10^{-6}} = \dfrac{8}{2} \cdot 10^{2+6} = 4 \cdot 10^8$

(*k*) $\dfrac{9 \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 10^4} = \dfrac{9}{3} \cdot 10^{-2-4} = 3 \cdot 10^{-6}$

(*l*) $\dfrac{a^3 b^{-1/2}}{ab^{-3/2}} = a^2 b^1 = a^2 b$

(*m*) $\dfrac{4x^3 y^{-2} z^{-3/2}}{2x^{-1/2} y^{-4} z} = \left(\dfrac{4}{2}\right) x^{3+1/2} y^{-2+4} z^{-3/2-1} = 2x^{7/2} y^2 z^{-5/2}$

(*n*) $\dfrac{8\sqrt[3]{x^2}\sqrt[4]{y}\sqrt{1/z}}{-2\sqrt[3]{x}\sqrt{y^5}\sqrt{z}} = \dfrac{8x^{2/3} y^{1/4} z^{-1/2}}{-2x^{1/3} y^{5/2} z^{1/2}} = -4x^{1/3} y^{-9/4} z^{-1}$

7.9 (*a*) $(ab)^p = a^p b^p$

(*b*) $(2a)^4 = 2^4 a^4 = 16a^4$

(*c*) $(3 \cdot 10^2)^4 = 3^4 \cdot 10^8 = 81 \cdot 10^8$

(*d*) $(4x^8 y^4)^{1/2} = 4^{1/2}(x^8)^{1/2}(y^4)^{1/2} = 2x^4 y^2$

(*e*) $\sqrt[3]{64a^{12}b^6} = (64a^{12}b^6)^{1/3} = (64)^{1/3}(a^{12})^{1/3}(b^6)^{1/3} = 4a^4 b^2$

(*f*) $(x^{2n} y^{-1/2} z^{n-1})^2 = x^{4n} y^{-1} z^{2n-2}$

(*g*) $(27x^{3p} y^{6q} z^{12r})^{1/3} = (27)^{1/3}(x^{3p})^{1/3}(y^{6q})^{1/3}(z^{12r})^{1/3} = 3x^p y^{2q} z^{4r}$

7.10 (*a*) $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$

(*b*) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$

(*c*) $\left(\frac{3a}{4b}\right)^3 = \frac{(3a)^3}{(4b)^3} = \frac{27a^3}{64b^3}$

(*d*) $\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^n = \frac{x^{2n}}{y^{3n}}$

(*e*) $\left(\frac{a^{m+1}}{b}\right)^m = \frac{a^{m^2+m}}{b^m}$

(*f*) $\left(\frac{a^2}{b^4}\right)^{3/2} = \frac{(a^2)^{3/2}}{(b^4)^{3/2}} = \frac{a^3}{b^6}$ (onde $a \geq 0$, $b \neq 0$)

(*g*) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{8}$

(*h*) $\left(\frac{5^3}{2^6}\right)^{-1/3} = \left(\frac{2^6}{5^3}\right)^{1/3} = \frac{2^2}{5} = \frac{4}{5}$

(*i*) $\sqrt[3]{\frac{8x^{3n}}{27y^6}} = \left(\frac{8x^{3n}}{27y^6}\right)^{1/3} = \frac{(8x^{3n})^{1/3}}{(27y^6)^{1/3}} = \frac{8^{1/3}x^n}{27^{1/3}y^2} = \frac{2x^n}{3y^2}$

(*j*) $\left(\frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}\right)^{3/2} = \frac{(a^{1/3})^{3/2}}{(x^{1/3})^{3/2}} = \frac{a^{1/2}}{x^{1/2}}$

(*k*) $\left(\frac{x^{-1/3}y^{-2}}{z^{-4}}\right)^{-3/2} = \frac{(x^{-1/3}y^{-2})^{-3/2}}{(z^{-4})^{-3/2}} = \frac{(x^{-1/3})^{-3/2}(y^{-2})^{-3/2}}{z^6} = \frac{x^{1/2}y^3}{z^6}$

(*l*) $\sqrt{\frac{\sqrt[5]{x}\sqrt[4]{y^3}}{\sqrt[3]{z^2}}} = \sqrt{\frac{x^{1/5}y^{3/4}}{x^{2/3}}} = \left(\frac{x^{1/5}y^{3/4}}{z^{2/3}}\right)^{1/2} = \frac{x^{1/10}y^{3/8}}{z^{1/3}}$

Exemplos Variados

7.11 (*a*) $2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} = 8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 15\frac{7}{8}$

(*b*) $4^{3/2} + 4^{1/2} + 4^{-1/2} + 4^{-3/2} = 8 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 10\frac{5}{8}$

(*c*) $\frac{4x^0}{2^{-4}} = 4(1)(2^4) = 4 \cdot 16 = 64$

(*d*) $10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0 + 10^{-1} + 10^{-2} = 10\,000 + 1000 + 100 + 10 + 1 + 0{,}1 + 0{,}01$
$= 11\,111{,}11$

(*e*) $3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 = 3.524$

(*f*) $\frac{4^{3n}}{2^n} = \frac{(2^2)^{3n}}{2^n} = \frac{2^{6n}}{2^n} = 2^{6n-n} = 2^{5n}$

(*g*) $(0{,}125)^{1/3}(0{,}25)^{-1/2} = \frac{\sqrt[3]{0{,}125}}{\sqrt{0{,}25}} = \frac{0{,}5}{0{,}5} = 1$

7.12 (*a*) Calcule $4x^{-2/3} + 3x^{1/3} + 2x^0$ quando $x = 8$.

$$4 \cdot 8^{-2/3} + 3 \cdot 8^{1/3} + 2 \cdot 8^0 = \frac{4}{8^{2/3}} + 3 \cdot 8^{1/3} + 2 \cdot 8^0 = \frac{4}{4} + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 9$$

(*b*) Calcule

$$\frac{(-3)^2(-2x)^{-3}}{(x+1)^{-2}}$$

quando $x = 2$.

$$\frac{(-3)^2(-4)^{-3}}{3^{-2}} = \frac{9\left(\frac{1}{-4}\right)^3}{\frac{1}{3^2}} = 9\left(-\frac{1}{4}\right)^3(9) = -\frac{81}{64}$$

7.13 (*a*) $\dfrac{2^0-2^{-2}}{2-2(2)^{-2}}=\dfrac{1-1/2^2}{2-2/2^2}=\dfrac{1-1/4}{2-2/4}=\dfrac{3/4}{6/4}=\dfrac{1}{2}$

(*b*) $\dfrac{2a^{-1}+a^0}{a^{-2}}=\dfrac{\left(\dfrac{2}{a}+1\right)}{\left(\dfrac{1}{a^2}\right)}=\dfrac{\left(\dfrac{2+a}{a}\right)}{\left(\dfrac{1}{a^2}\right)}=\dfrac{2+a}{a}\cdot a^2=(2+a)a=2a+a^2$

(*c*) $\left(\dfrac{2^0}{8^{1/3}}\right)^{-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}=\dfrac{1}{1/2}=2$ ou $\left(\dfrac{2^0}{8^{1/3}}\right)^{-1}=\left(\dfrac{8^{1/3}}{2^0}\right)^{1}=\dfrac{2}{1}=2$

(*d*) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}-(-3)^{-2}=(3)^2-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2=9-\dfrac{1}{9}=\dfrac{80}{9}$

(*e*) $\left(-\dfrac{1}{27}\right)^{-2/3}+\left(-\dfrac{1}{32}\right)^{2/5}=(-27)^{2/3}+\left(-\dfrac{1}{2^5}\right)^{2/5}=[(-3)^3]^{2/3}+\left[\left(-\dfrac{1}{2}\right)^5\right]^{2/5}$

$=(-3)^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{37}{4}$

7.14 (*a*) $\dfrac{(-3a)^3\cdot 3a^{-2/3}}{(2a)^{-2}\cdot a^{1/3}}=\dfrac{(-3a)^3\cdot 3\cdot(2a)^2}{a^{2/3}\cdot a^{1/3}}=\dfrac{-27a^3\cdot 3\cdot 4a^2}{a^{2/3+1/3}}=\dfrac{-324a^5}{a}=-324a^4$

(*b*) $\dfrac{(x^{-2})^{-3}\cdot(x^{-1/3})^9}{(x^{1/2})^{-3}\cdot(x^{-3/2})^5}=\dfrac{x^6\cdot x^{-3}}{x^{-3/2}\cdot x^{-15/2}}=\dfrac{x^{6-3}}{x^{-3/2-15/2}}=\dfrac{x^3}{x^{-9}}=x^{12}$

(*c*) $\dfrac{\left(x+\dfrac{1}{y}\right)^m\cdot\left(x-\dfrac{1}{y}\right)^n}{\left(y+\dfrac{1}{x}\right)^m\cdot\left(y-\dfrac{1}{x}\right)^n}=\dfrac{\left(\dfrac{xy+1}{y}\right)^m\cdot\left(\dfrac{xy-1}{y}\right)^n}{\left(\dfrac{xy+1}{x}\right)^m\cdot\left(\dfrac{xy-1}{x}\right)^n}=\dfrac{\left(\dfrac{(xy+1)^m}{y^m}\right)\cdot\left(\dfrac{(xy-1)^n}{y^n}\right)}{\left(\dfrac{(xy+1)^m}{x^m}\right)\cdot\left(\dfrac{(xy-1)^n}{x^n}\right)}$

$=\dfrac{\left(\dfrac{(xy+1)^m(xy-1)^n}{y^{m+n}}\right)}{\left(\dfrac{(xy+1)^m(xy-1)^n}{x^{m+n}}\right)}=\dfrac{x^{m+n}}{y^{m+n}}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{m+n}$

(*d*) $\dfrac{3^{pq+q}}{3^{pq+p}}\cdot\dfrac{3^{2p}}{3^{2q}}=\dfrac{3^{pq+q+2p}}{3^{pq+p+2q}}=3^{(pq+q+2p)-(pq+p+2q)}=3^{p-q}$

7.15 (*a*) $\dfrac{(x^{3/4}\cdot x^{1/2})^{1/3}}{(y^{2/3}\cdot y^{4/3})^{1/2}}=\dfrac{(x^{5/4})^{1/3}}{(y^2)^{1/2}}=\dfrac{x^{5/12}}{y}$

(*b*) $\dfrac{(x^{3/4})^{2/3}-(y^{5/4})^{2/5}}{(x^{3/4})^{1/3}+(y^{2/3})^{3/8}}=\dfrac{x^{1/2}-y^{1/2}}{x^{1/4}+y^{1/4}}=\dfrac{(x^{1/4})^2-(y^{1/4})^2}{x^{1/4}+y^{1/4}}=\dfrac{(x^{1/4}+y^{1/4})(x^{1/4}-y^{1/4})}{x^{1/4}+y^{1/4}}=x^{1/4}-y^{1/4}$

(*c*) $\dfrac{1}{1+x^{p-q}}+\dfrac{1}{1+x^{q-p}}=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x^p}{x^q}\right)}+\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x^q}{x^p}\right)}=\dfrac{x^q}{x^q+x^p}+\dfrac{x^p}{x^p+x^q}=\dfrac{x^q+x^p}{x^q+x^p}=1$

(*d*) $\dfrac{x^{3n}-y^{3n}}{x^n-y^n}=\dfrac{(x^n)^3-(y^n)^3}{x^n-y^n}=\dfrac{(x^n-y^n)(x^{2n}+x^ny^n+y^{2n})}{x^n-y^n}=x^{2n}+x^ny^n+y^{2n}$

(*e*) $\sqrt[a]{a^{a^2-a}}=[a^{a(a-1)}]^{1/a}=a^{a-1}$

(*f*) $2^{2^{3^2}}=2^{2^9}=2^{512}$

7.16 (*a*) $(0{,}004)(30\,000)^2=(4\times10^{-3})(3\times10^4)^2=(4\times10^{-3})(3^2\times10^8)=4\cdot3^2\times10^{-3+8}$
$=36\times10^5$ ou $3\,600\,000$

(*b*) $\dfrac{48\,000\,000}{1200}=\dfrac{48\times10^6}{12\times10^2}=4\times10^{6-2}=4\times10^4$ ou $40\,000$

(*c*) $\dfrac{0{,}078}{0{,}00012}=\dfrac{78\times10^{-3}}{12\times10^{-5}}=6{,}5\times10^{-3+5}=6{,}5\times10^2$ ou 650

(*d*) $\dfrac{(80\,000\,000)^2(0{,}000\,003)}{(600\,000)(0{,}0002)^4}=\dfrac{(8\times10^7)^2(3\times10^{-6})}{(6\times10^5)(2\times10^{-4})^4}=\dfrac{8^2\cdot3}{6\cdot2^4}\cdot\dfrac{10^{14}\cdot10^{-6}}{10^5\cdot10^{-16}}=2\times10^{19}$

(e) $\sqrt[3]{\dfrac{(0{,}004)^4(0{,}0036)}{(120\,000)^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{(4\times10^{-3})^4(36\times10^{-4})}{(12\times10^4)^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{256(36)}{144}\cdot\dfrac{10^{-12}\cdot10^{-4}}{10^8}}$
$= \sqrt[3]{64\times10^{-24}} = 4\times10^{-8}$

7.17 Para quais valores reais das variáveis das operações abaixo serão válidas e produzirão números reais?

(a) $\sqrt{x^2} = (x^2)^{1/2} = x^1 = x$

(b) $\sqrt{a^2+2a+1} = \sqrt{(a+1)^2} = a+1$

(c) $\dfrac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}-b^{-1}} = \dfrac{(a^{-1})^2-(b^{-1})^2}{a^{-1}-b^{-1}} = \dfrac{(a^{-1}+b^{-1})(a^{-1}-b^{-1})}{(a^{-1}-b^{-1})} = a^{-1}+b^{-1}$

(d) $\sqrt{x^4+2x^2+1} = \sqrt{(x^2+1)^2} = x^2+1$

(e) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{(x-1)^1}{(x-1)^{1/2}} = (x-1)^{1-1/2} = (x-1)^{1/2} = \sqrt{x-1}$

SOLUÇÃO

(a) Quando x é um número real, $\sqrt{x^2}$ deve ser positivo ou zero. Se $\sqrt{x^2} = x$ fosse verdade para todo x, então, se $x = -1$ teríamos $\sqrt{(-1)^2} = -1$ ou $\sqrt{1} = -1$, i.e., $1 = -1$, uma contradição. Assim, $\sqrt{x^2} = x$ não pode ser verdadeira para todos os valores de x. Teremos $\sqrt{x^2} = x$ para $x \geq 0$. Se $x \leq 0$, temos $\sqrt{x^2} = -x$. Um resultado válido para ambos $x \geq 0$ e $x \leq 0$ é $\sqrt{x^2} = |x|$. (valor absoluto de x).

(b) $\sqrt{a^2+2a+1}$ deve ser positivo ou nulo, e portanto é igual a $a+1$ se $a+1 \geq 0$, i.e., se $a \geq -1$. Um resultado válido para todos os valores de a é dado por $\sqrt{a^2+2a+1} = |a+1|$.

(c) $(a^{-2}-b^{-2})/(a^{-1}-b^{-1})$ não está definido se a ou b (ou ambos) é igual a zero. Analogamente, não está definido se o denominador $a^{-1}-b^{-1}=0$, i.e., se $a^{-1}=b^{-1}$ ou $a=b$. Assim, o resultado $(a^{-2}-b^{-2})/(a^{-1}-b^{-1}) = a^{-1}+b^{-1}$ é válido se e só se $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $a \neq b$.

(d) $\sqrt{x^4+2x^2+1}$ deve ser positivo ou nulo, e neste caso será igual a x^2+1 se $x^2+1 \geq 0$. Como x^2+1 é maior do que zero para todos os números reais x, o resultado é válido para todos os valores reais de x.

(e) $\sqrt{x-1}$ não será um número real se $x-1<0$, i.e., se $x<1$. Também $(x-1)/(\sqrt{x-1})$ não estará definido se o denominador for nulo, i.e., se $x=1$. Portanto, $(x-1)/(\sqrt{x-1}) = \sqrt{x-1}$ se e só se $x>1$.

7.18 Pediu-se a um estudante calcular a expressão $x+2y+\sqrt{(x-2y)^2}$ para $x=2$, $y=4$. Ele escreveu

$$x+2y+\sqrt{(x-2y)^2} = x+2y+x-2y = 2x$$

e desta forma obteve o valor $2x = 2(2) = 4$ como resposta. O estudante está correto?

SOLUÇÃO

Pondo $x=2$, $y=4$ na expressão dada, obtemos

$$x+2y+\sqrt{(x-2y)^2} = 2+2(4)+\sqrt{(2-8)^2} = 2+8+\sqrt{36} = 2+8+6 = 16.$$

O estudante cometeu um erro ao escrever $\sqrt{(x-2y)^2} = x-2y$, o que só é verdadeiro para $x \geq 2y$. Para $x \leq 2y$, $\sqrt{(x-2y)^2} = 2y-x$. Em qualquer caso, $\sqrt{(x-2y)^2} = |x-2y|$. A simplificação requerida deveria ser $x+2y+2y-x = 4y$, que não é igual a 16 quando $y=4$.

Problemas Complementares

Calcule:

7.19

(a) 3^4

(b) $(-2x)^3$

(c) $\left(\dfrac{3y}{4}\right)^3$

(d) 4^{-3}

(e) $(-4x)^{-2}$

(f) $(2y^{-1})^{-1}$

(g) $\dfrac{3^{-1}x^2y^{-4}}{2^{-2}x^{-3}y^3}$

(h) $(16)^{1/4}$

(i) $\dfrac{8^{-2/3}(-8)^{2/3}}{8^{1/3}}$

(j) $(-a^3b^3)^{-2/3}$

(k) $-3(-1)^{-1/5}(4)^{-1/2}$

(l) $(10^3)^0$

(m) $(x-y)^0[(x-y)^4]^{-1/2}$

(n) $x^y\cdot x^{4y}$

(o) $3y^{2/3}\cdot y^{4/3}$

(p) $(4\cdot10^3)(3\cdot10^{-5})(6\cdot10^4)$

7.20 (*a*) $\dfrac{2^3 \cdot 2^{-2} \cdot 2^4}{2^{-1} \cdot 2^0 \cdot 2^{-3}}$ (*b*) $\dfrac{10^{x+y} \cdot 10^{y-x} \cdot 10^{y+1}}{10^{y+1} \cdot 10^{2y+1}}$ (*c*) $\dfrac{3^{1/2} \cdot 3^{-2/3}}{3^{-1/2} \cdot 3^{1/3}}$ (*d*) $\dfrac{(x+y)^{2/3}(x+y)^{-1/6}}{[(x+y)^2]^{1/4}}$ (*e*) $\dfrac{(10^2)^{-3}(10^3)^{1/6}}{\sqrt{10} \cdot (10^4)^{-1/2}}$ (*f*) $[(x^{-1})^{-2}]^{-3}$ (*g*) $\dfrac{4^{-1/2} a^{2/3} b^{-1/6} c^{-3/2}}{8^{2/3} a^{-1/3} b^{-2/3} c^{5/2}}$ (*h*) $\left(\dfrac{2^{-8} \cdot 3^4}{5^{-4}}\right)^{-1/4}$ (*i*) $\sqrt{\dfrac{\sqrt[4]{a^2}\sqrt[3]{b^5}}{c^{-2} d^2}}$

7.21 (*a*) $\sqrt{27^{-2/3}} + 5^{2/3} \cdot 5^{1/3}$
(*b*) $4\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 + 2^{-1} - 16^{-1/2} \cdot 4 \cdot 3^0$
(*c*) $8^{2/3} + 3^{-2} - \dfrac{1}{9}(10)^0$
(*d*) $27^{2/3} - 3(3x)^0 + 25^{1/2}$
(*e*) $8^{2/3} \cdot 16^{-3/4} \cdot 2^0 - 8^{-2/3}$
(*f*) $\sqrt[3]{(x-2)^{-2}}$ quando $x = -6$
(*g*) $x^{3/2} + 4x^{-1} - 5x^0$ quando $x = 4$
(*h*) $y^{2/3} + 3y^{-1} - 2y^0$ quando $y = 1/8$
(*i*) $64^{-2/3} \cdot 16^{5/4} \cdot 2^0 \cdot (\sqrt{3})^4$
(*j*) $\dfrac{\sqrt{a} \cdot a^{-2/3}}{\sqrt[6]{a^5}} + \dfrac{a^{-5/6}}{\sqrt[3]{a^2} \cdot a^{-1/2}}$
(*k*) $\left(\dfrac{\sqrt{72y^{2n}}}{3} \cdot 9^0\right)(2y^{n+2})^{-1}$

7.22 (*a*) $25^0 + 0{,}25^{1/2} - 8^{1/3} \cdot 4^{-1/2} + 0{,}027^{1/3}$
(*b*) $\dfrac{1}{8^{-2/3}} - 3a^0 + (3a)^0 + (27)^{-1/3} - 1^{3/2}$
(*c*) $\dfrac{3^{-2} + 5(2)^0}{3 - 4(3)^{-1}}$
(*d*) $\dfrac{3^0 x + 4x^{-1}}{x^{-2/3}}$ se $x = 8$
(*e*) $\dfrac{2 + 2^{-1}}{5} + (-8)^0 - 4^{3/2}$
(*f*) $(64)^{-2/3} - 3(150)^0 + 12(2)^{-2}$
(*g*) $(0{,}125)^{-2/3} + \dfrac{3}{2 + 2^{-1}}$
(*h*) $\sqrt[n]{\dfrac{32}{2^{5+n}}}$
(*i*) $\dfrac{(60\,000)^3(0{,}00\,002)^4}{100^2(72\,000\,000)(0{,}0002)^5}$

7.23 (*a*) $\dfrac{(x^2+3x+4)^{1/3}[-\frac{1}{2}(5-x)^{-1/2}] - (5-x)^{1/2}[(x^2+3x+4)^{-2/3}(2x+3)/3]}{(x^2+3x+4)^{2/3}}$ se $x = 1$
(*b*) $\dfrac{(9x^2-5y)^{1/4}(2x) - x^2[\frac{1}{4}(9x^2-5y)^{-3/4}(18x)]}{(9x^2-5y)^{1/2}}$ se $x = 2$, $y = 4$
(*c*) $\dfrac{(x+1)^{2/3}[\frac{1}{2}(x-1)^{-1/2}] - (x-1)^{1/2}[\frac{2}{3}(x+1)^{-1/3}]}{(x+1)^{4/3}}$
(*d*) $x - 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 1}$
(*e*) $3x - 2y - \sqrt{4x^2 - 4xy + y^2}$

Respostas dos Problemas Complementares

7.19 (*a*) 81 (*b*) $-8x^3$ (*c*) $\dfrac{27y^3}{64}$ (*d*) 1/64 (*e*) $\dfrac{1}{16x^2}$ (*f*) $y/2$ (*g*) $\dfrac{4x^5}{3y^7}$ (*h*) 2 (*i*) 1/2 (*j*) $\dfrac{1}{a^2b^2}$ (*k*) 3/2 (*l*) 1 (*m*) $\dfrac{1}{(x-y)^2}$ (*n*) x^{5y} (*o*) $3y^2$ (*p*) 7.200

7.20 (*a*) 2^9 (*b*) 1/10 (*c*) 1 (*d*) 1 (*e*) 10^{-4} (*f*) x^{-6} (*g*) $\dfrac{a\sqrt{b}}{8c^4}$ (*h*) $\dfrac{4}{15}$ (*i*) $\dfrac{a^{1/4}b^{5/6}c}{d}$

7.21 (*a*) $\dfrac{16}{3}$ (*b*) $\dfrac{7}{2}$ (*c*) 4 (*d*) 11 (*e*) $\dfrac{1}{4}$ (*f*) $\dfrac{1}{4}$ (*g*) 4 (*h*) $\dfrac{89}{4}$ (*i*) 18 (*j*) $\dfrac{2}{a}$ (*k*) $\dfrac{\sqrt{2}}{y^2}$

7.22 (*a*) 0,8 (*b*) $\frac{4}{3}$ (*c*) $\frac{46}{15}$ (*d*) 34 (*e*) $-\frac{13}{2}$ (*f*) $\frac{1}{16}$ (*g*) $\frac{26}{5}$ (*h*) $\frac{1}{2}$ (*i*) 150

7.23 (*a*) $-\frac{1}{3}$

(*b*) $\frac{7}{8}$

(*c*) $\dfrac{7-x}{6(x-1)^{1/2}(x+1)^{5/3}}$

(*d*) $2x$ se $x \geq -1$, -2 se $x \leq -1$

(*e*) $x-y$ se $2x \geq y$, $5x-3y$ se $2x \leq y$

Capítulo 8

Radicais

8.1 EXPRESSÕES RADICAIS

Um radical é uma expressão da forma $\sqrt[n]{a}$, que denota a raiz n-ésima principal de a. O inteiro positivo n é o índice ou ordem do radical, e o número a é o radicando. Costuma-se omitir o índice quando $n = 2$.

Assim, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{7x^3 - 2y^2}$, $\sqrt{x + 10}$ são radicais que têm, respectivamente, índices iguais a 3, 4 e 2, e radicandos 5, $7x^3 - 2y^2$ e $x + 10$.

8.2 REGRAS PARA RADICAIS

As regras para radicais são as mesmas que para expoentes, uma vez que $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$. As seguintes são as mais usadas. *Nota*: Se n for par, subentenda $a, b \geq 0$.

A. $(\sqrt[n]{a})^n = a$

Exemplo 8.1 $(\sqrt[3]{6})^3 = 6, \quad (\sqrt[4]{x^2 + y^2})^4 = x^2 + y^2$

B. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$

Exemplo 8.2 $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}, \quad \sqrt[7]{x^2y^5} = \sqrt[7]{x^2}\,\sqrt[7]{y^5}$

C. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad b \neq 0$

Exemplo 8.3 $\sqrt[5]{\dfrac{5}{32}} = \dfrac{\sqrt[5]{5}}{\sqrt[5]{32}} = \dfrac{\sqrt[5]{5}}{2}, \quad \sqrt[3]{\dfrac{(x+1)^3}{(y-2)^6}} = \dfrac{\sqrt[3]{(x+1)^3}}{\sqrt[3]{(y-2)^6}} = \dfrac{x+1}{(y-2)}$

D. $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

Exemplo 8.4 $\sqrt[3]{(27)^4} = (\sqrt[3]{27})^4 = 3^4 = 81$

E. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Exemplo 8.5 $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5}, \quad \sqrt[4]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[12]{2}, \quad \sqrt[5]{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[15]{x^2}$

8.3 SIMPLIFICANDO RADICAIS

A forma de um radical pode mudar das seguintes maneiras:

(*a*) Pela remoção das n-ésimas potências inteiras de seu radicando.

Exemplo 8.6 $\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^3(4)} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4}$

$\sqrt{8x^5y^7} = \sqrt{(4x^4y^6)(2xy)} = \sqrt{4x^4y^6}\,\sqrt{2xy} = 2x^2y^3\sqrt{2xy}$

(*b*) Pela redução do índice do radical.

Exemplo 8.7 $\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{2^6} = 2^{6/4} = 2^{3/2} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$, onde o índice é reduzido de 4 para 2.

$\sqrt[6]{25x^6} = \sqrt[6]{(5x^3)^2} = (5x^3)^{2/6} = (5x^3)^{1/3} = \sqrt[3]{5x^3} = x\sqrt[3]{5}$, onde o índice é reduzido de 6 para 3.

Nota. $\sqrt[4]{(-4)^2} = \sqrt[4]{16} = 2$. É *incorreto* escrever $\sqrt[4]{(-4)^2} = (-4)^{2/4} = (-4)^{1/2} = \sqrt{-4}$.

(*c*) Pela racionalização do denominador do radicando.

Exemplo 8.8 Racionalize o denominador de $\sqrt[3]{9/2}$.

Multiplique o numerador e o denominador do radicando (9/2) por um número que tornará o denominador uma potência n-ésima perfeita (aqui $n = 3$) e então remova o denominador do radical. Neste caso, o número procurado é 2^2. Assim,

$$\sqrt[3]{\frac{9}{2}} = \sqrt[3]{\frac{9}{2}\left(\frac{2^2}{2^2}\right)} = \sqrt[3]{\frac{9(2^2)}{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{36}}{2}$$

Exemplo 8.9 Racionalize o denominador de $\sqrt[4]{\dfrac{7a^3y^2}{8b^6x^3}}$.

Para transformar $8b^6x^3$ em uma quarta potência perfeita, multiplique o numerador e o denominador por $2b^2x$. Assim,

$$\sqrt[4]{\frac{7a^3y^2}{8b^6x^3}} = \sqrt[4]{\frac{7a^3y^2}{8b^6x^3} \cdot \frac{2b^2x}{2b^2x}} = \sqrt[4]{\frac{14a^3y^2b^2x}{16b^8x^4}} = \frac{\sqrt[4]{14a^3y^2b^2x}}{2b^2x}$$

Diz-se que um radical está na forma mais simples se:

(*a*) todas as potências n-ésimas já foram retiradas de seu radicando;

(*b*) o índice do seu radical já é o menor possível;

(*c*) não existem frações em seu radicando, i.e., o denominador está racionalizado.

8.4 OPERAÇÕES COM RADICAIS

Diz-se que dois ou mais radicais são semelhantes se, após terem sido reduzidos à forma mais simples, todos tiverem o mesmo índice e o mesmo radicando.

Assim, $\sqrt{32}$, $\sqrt{1/2}$ e $\sqrt{8}$ são semelhantes, uma vez que

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}, \qquad \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{e} \quad \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$$

Aqui, cada radicando é 2 e cada índice é 2. No entanto, $\sqrt[3]{32}$ e $\sqrt[3]{2}$ não são semelhantes, uma vez que $\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8 \cdot 4} = 2\sqrt[3]{4}$.

Para adicionar algebricamente dois ou mais radicais, reduza cada radical à forma mais simples e agrupe os termos de radicais semelhantes. Assim:

$$\sqrt{32} - \sqrt{1/2} - \sqrt{8} = 4\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{2} = \left(4 - \frac{1}{2} - 2\right)\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

Para multiplicar dois radicais, o procedimento a ser utilizado baseia-se no fato de os índices dos radicais serem ou não os mesmos.

(*a*) Para multiplicar dois radicais de *mesmos índices*, utilize a regra *B*:

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

Exemplo 8.10 $(2\sqrt[3]{4})(3\sqrt[3]{16}) = 2\cdot 3\sqrt[3]{4}\,\sqrt[3]{16} = 6\sqrt[3]{64} = 6\cdot 4 = 24$

$(3\sqrt[4]{x^2y})(\sqrt[4]{x^3y^2}) = 3\sqrt[4]{(x^2y)(x^3y^2)} = 3\sqrt[4]{x^5y^3} = 3x\sqrt[4]{xy^3}$

(*b*) Para multiplicar dois radicais de *diferentes índices*, é conveniente escrevê-los na forma de expoentes fracionários e então fazer uso das regras de expoentes.

Exemplo 8.11 $\sqrt[3]{5}\sqrt{2} = 5^{1/3}\cdot 2^{1/2} = 5^{2/6}\cdot 2^{3/6} = (5^2\cdot 2^3)^{1/6} = (25\cdot 8)^{1/6} = \sqrt[6]{200}$

$\sqrt[3]{4}\sqrt{2} = \sqrt[3]{2^2}\sqrt{2} = 2^{2/3}\cdot 2^{1/2} = 2^{4/6}\cdot 2^{3/6} = 2^{7/6} = \sqrt[6]{2^7} = 2\sqrt[6]{2}$

Para dividir dois radicais, o procedimento a ser utilizado baseia-se no fato de os índices dos radicais serem ou não os mesmos.

(*a*) Para dividir dois radicais de *mesmos índices*, utilize a regra *C*:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

e simplifique.

Exemplo 8.12

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{\frac{5}{3}\cdot\frac{3^2}{3^2}} = \sqrt[3]{\frac{45}{3^3}} = \frac{\sqrt[3]{45}}{3}$$

Também podemos racionalizar o denominador diretamente.

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{3}}\cdot\frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{\sqrt[3]{5\cdot 3^2}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{\sqrt[3]{45}}{3}$$

(*b*) Para dividir dois radicais de *diferentes índices*, é conveniente escrevê-los na forma de expoentes fracionários e então fazer uso das regras de expoentes.

Exemplo 8.13

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[4]{2}} = \frac{6^{1/2}}{2^{1/4}} = \frac{6^{2/4}}{2^{1/4}} = \sqrt[4]{\frac{6^2}{2}} = \sqrt[4]{\frac{36}{2}} = \sqrt[4]{18}$$

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt{2}} = \frac{2^{2/3}}{2^{1/2}} = \frac{2^{4/6}}{2^{3/6}} = 2^{1/6} = \sqrt[6]{2}$$

8.5 RACIONALIZANDO DENOMINADORES BINOMIAIS

Os números binomiais irracionais $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ e $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ são denominados conjugados um do outro. Assim, $2\sqrt{3}+\sqrt{2}$ e $2\sqrt{3}-\sqrt{2}$ são conjugados. A propriedade destes conjugados que os faz úteis é que eles são a soma e a diferença de dois mesmos termos, de modo que o seu produto é a diferença dos quadrados destes termos. Portanto, $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2 = a-b$.

Para racionalizar uma fração cujo denominador é um binômio com radicais de índice 2, multiplique o numerador e o denominador pelo conjugado.

Exemplo 8.14

$$\frac{5}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{5}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{5(2\sqrt{3}-\sqrt{2})}{12-2} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$$

Se o denominador de uma fração é da forma $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$, multiplicamos o numerador e o denominador da fração por $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ para obtermos para denominador $a+b$. Se o denominador original tem a forma $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$, multiplicamos o numerador e o denominador da fração por $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ e obtemos para denominador $a-b$. (Veja Seção 4.2 para as regras de produtos especiais.)

Exemplo 8.15

$$\frac{3}{\sqrt[3]{5}-2}=\frac{3(\sqrt[3]{25}+2\sqrt[3]{5}+4)}{(\sqrt[3]{5}-2)(\sqrt[3]{25}+2\sqrt[3]{5}+4)}=\frac{3(\sqrt[3]{25}+2\sqrt[3]{5}+4)}{(\sqrt[3]{5})^3-(2)^3}$$
$$=\frac{3(\sqrt[3]{25}+2\sqrt[3]{5}+4)}{5-8}=\frac{3(\sqrt[3]{25}+2\sqrt[3]{5}+4)}{-3}=-\sqrt[3]{25}-2\sqrt[3]{5}-4$$

Problemas Resolvidos

Redução de uma Expressão Radical à Forma Mais Simples

8.1 (*a*) $\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 2}=\sqrt{3^2\cdot 2}=3\sqrt{2}$

(*b*) $\sqrt[3]{80}=\sqrt[3]{8\cdot 10}=\sqrt[3]{2^3\cdot 10}=2\sqrt[3]{10}$

(*c*) $5\sqrt[3]{243}=5\sqrt[3]{27\cdot 9}=5\sqrt[3]{3^3\cdot 9}=15\sqrt[3]{9}$

(*d*) $\sqrt[3]{648}=\sqrt[3]{8\cdot 27\cdot 3}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3^3\cdot 3}=6\sqrt[3]{3}$

(*e*) $a\sqrt{9b^4c^3}=a\sqrt{3^2b^4c^2\cdot c}=3ab^2c\sqrt{c}$

(*f*) $\sqrt[6]{343}=\sqrt[6]{7^3}=7^{3/6}=7^{1/2}=\sqrt{7}$

(*g*) $\sqrt[6]{81a^2}=\sqrt[6]{3^4a^2}=3^{4/6}a^{2/6}=3^{2/3}a^{1/3}=\sqrt[3]{9a}$ Note que $a\geq 0$. Veja (*k*) abaixo.

(*h*) $\sqrt[3]{64x^7y^{-6}}=\sqrt[3]{4^3x^6\cdot xy^{-6}}=4x^2y^{-2}\sqrt[3]{x}=\dfrac{4x^2}{y^2}\sqrt[3]{x}$

(*i*) $\sqrt[5]{(72)^4}=(72)^{4/5}=(8\cdot 9)^{4/5}=(2^3\cdot 3^2)^{4/5}=2^{12/5}\cdot 3^{8/5}$
$=(2^2\cdot 2^{2/5})(3\cdot 3^{3/5})=2^2\cdot 3\sqrt[5]{2^2\cdot 3^3}=12\sqrt[5]{108}$

(*j*) $(7\sqrt[3]{4ab})^2=49(4ab)^{2/3}=49\sqrt[3]{16a^2b^2}=98\sqrt[3]{2a^2b^2}$

(*k*) $2a\sqrt{a^2+6a+9}=2a\sqrt{(a+3)^2}=2a(a+3)$. O estudante deve relembrar que $\sqrt{(a+3)^2}$ é um número positivo ou nulo; assim, $\sqrt{(a+3)^2}=a+3$ somente se $a+3\geq 0$. Se os valores de a para os quais $a+3<0$ forem incluídos, devemos escrever $\sqrt{(a+3)^2}=|a+3|$.

(*l*) $\dfrac{x-25}{\sqrt{x}+5}=\dfrac{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)}{\sqrt{x}+5}=\sqrt{x}-5$

(*m*) $\sqrt{12x^4-36x^2y^2+27y^4}=\sqrt{3(4x^4-12x^2y^2+9y^4)}=\sqrt{3(2x^2-3y^2)^2}=(2x^2-3y^2)\sqrt{3}$

Note que isto é válido somente se $2x^2\geq 3y^2$ Veja (*k*) acima.

(*n*) $\sqrt[n]{a^nb^{2n}c^{3n+1}d^{n+2}}=(a^nb^{2n}c^{3n+1}d^{n+2})^{1/n}=ab^2c^3c^{1/n}dd^{2/n}=ab^2c^3d\sqrt[n]{cd^2}$

(*o*) $\sqrt[3]{\sqrt{256}}=\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{8\cdot 2}=2\sqrt[3]{2}$

(*p*) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{6ab^2}}=[(6ab^2)^{1/3}]^{1/4}=(6ab^2)^{1/12}=\sqrt[12]{6ab^2}$

(*q*) $\sqrt[5]{729\sqrt{a^3}}=\sqrt[5]{729a^{3/2}}=(3^6a^{3/2})^{1/5}=3^{12/10}a^{3/10}=3\sqrt[10]{9a^3}$

Mudança na Forma de um Radical

8.2 Transforme os radicais para radicais de ordem 12.

(*a*) $\sqrt[3]{5}=5^{1/3}=5^{4/12}=\sqrt[12]{5^4}=\sqrt[12]{625}$

(*b*) $\sqrt{ab}=(ab)^{1/2}=(ab)^{6/12}=\sqrt[12]{(ab)^6}=\sqrt[12]{a^6b^6}$

(*c*) $\sqrt[6]{x^n}=x^{n/6}=x^{2n/12}=\sqrt[12]{x^{2n}}$

8.3 Reescreva os radicais com a menor ordem possível.

(*a*) $\sqrt[4]{9}=9^{1/4}=(3^2)^{1/4}=3^{1/2}=\sqrt{3}$

(*b*) $\sqrt[12]{8x^3y^6}=\sqrt[12]{(2xy^2)^3}=(2xy^2)^{3/12}=(2xy^2)^{1/4}=\sqrt[4]{2xy^2}$

(*c*) $\sqrt[8]{a^2+2ab+b^2}=\sqrt[8]{(a+b)^2}=(a+b)^{2/8}=(a+b)^{1/4}=\sqrt[4]{a+b}$

8.4 Converta para radicais inteiros, i.e., radicais com coeficiente igual a 1.

(*a*) $6\sqrt{3} = \sqrt{36\cdot 3} = \sqrt{108}$

(*b*) $4x^2\sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{(4x^2)^3y^2} = \sqrt[3]{64x^6y^2}$

(*c*) $\dfrac{2x}{y}\sqrt[4]{\dfrac{2y}{x}} = \sqrt[4]{\left(\dfrac{2x}{y}\right)^4\cdot\dfrac{2y}{x}} = \sqrt[4]{\dfrac{16x^4}{y^4}\cdot\dfrac{2y}{x}} = \sqrt[4]{\dfrac{32x^3}{y^3}}$

(*d*) $\dfrac{a-b}{a+b}\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}} = \sqrt{\dfrac{(a-b)^2}{(a+b)^2}\cdot\dfrac{a+b}{a-b}} = \sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$

8.5 Determine qual dos seguintes números irracionais é o maior:

(*a*) $\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{3}$ (*b*) $\sqrt{5}, \sqrt[3]{11}$ (*c*) $2\sqrt{5}, 3\sqrt{2}$

SOLUÇÃO

(*a*) $\sqrt[3]{2} = 2^{1/3} = 2^{4/12} = (2^4)^{1/12} = (16)^{1/12}$; $\sqrt[4]{3} = 3^{1/4} = 3^{3/12} = (3^3)^{1/12} = (27)^{1/12}$

Como $(27)^{1/12} > (16)^{1/12}$, $\sqrt[4]{3} > \sqrt[3]{2}$.

(*b*) $\sqrt{5} = 5^{1/2} = 5^{3/6} = (5^3)^{1/6} = (125)^{1/6}$; $\sqrt[3]{11} = (11)^{1/3} = (11)^{2/6} = (11^2)^{1/6} = (121)^{1/6}$

Como $125 > 121$, $\sqrt{5} > \sqrt[3]{11}$.

(*c*) $2\sqrt{5} = \sqrt{2^2\cdot 5} = \sqrt{20}$; $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2\cdot 2} = \sqrt{18}$

Portanto, $2\sqrt{5} > 3\sqrt{2}$.

8.6 Racionalize o denominador.

(*a*) $\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{3}} = \sqrt{\dfrac{6}{3^2}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{6}$

(*b*) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{6}} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{6}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{6^2}} = \dfrac{3\sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{6\cdot 6^2}} = \dfrac{3\sqrt[3]{36}}{6} = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{36}$

Outro método: $\dfrac{3}{\sqrt[3]{6}} = \dfrac{3}{6^{1/3}}\cdot\dfrac{6^{2/3}}{6^{2/3}} = \dfrac{3\cdot 6^{2/3}}{6^1} = \dfrac{3\sqrt[3]{6^2}}{6} = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{36}$

(*c*) $3x\sqrt[4]{\dfrac{y}{2x}} = 3x\sqrt[4]{\dfrac{y(2x)^3}{2x(2x)^3}} = 3x\sqrt[4]{\dfrac{y(8x^3)}{(2x)^4}} = \dfrac{3x}{2x}\sqrt[4]{8x^3y} = \dfrac{3}{2}\sqrt[4]{8x^3y}$

(*d*) $\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}} = \sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}\cdot\dfrac{a+b}{a+b}} = \sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{(a+b)^2}} = \dfrac{1}{a+b}\sqrt{a^2-b^2}$

(*e*) $\dfrac{4xy^2}{\sqrt[3]{2xy^2}} = \dfrac{4xy^2}{\sqrt[3]{2xy^2}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{(2xy^2)^2}}{\sqrt[3]{(2xy^2)^2}} = \dfrac{4xy^2\sqrt[3]{(2xy^2)^2}}{2xy^2} = 2\sqrt[3]{4x^2y^4} = 2y\sqrt[3]{4x^2y}$

Adição e Subtração de Radicais Semelhantes

8.7 (*a*) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{72} = \sqrt{9\cdot 2} + \sqrt{25\cdot 2} - \sqrt{36\cdot 2} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = (3+5-6)\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

(*b*) $2\sqrt{27} - 4\sqrt{12} = 2\sqrt{9\cdot 3} - 4\sqrt{4\cdot 3} = 2\cdot 3\sqrt{3} - 4\cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3} - 8\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$

(*c*) $4\sqrt{75} + 3\sqrt{4/3} - 2\sqrt{48} = 4\cdot 5\sqrt{3} + 3\sqrt{\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{3}{3}} - 2\cdot 4\sqrt{3} = \left(20 + 3\cdot\dfrac{2}{3} - 8\right)\sqrt{3} = 14\sqrt{3}$

(*d*) $\sqrt[3]{432} - \sqrt[3]{250} + \sqrt[3]{1/32} = \sqrt[3]{6^3\cdot 2} - \sqrt[3]{5^3\cdot 2} + \sqrt[3]{\dfrac{1}{2^5}\cdot\dfrac{2}{2}} = \left(6 - 5 + \dfrac{1}{4}\right)\sqrt[3]{2} = \dfrac{5}{4}\sqrt[3]{2}$

(*e*) $\sqrt{3} + \sqrt[3]{81} - \sqrt{27} + 5\sqrt[3]{3} = \sqrt{3} + \sqrt[3]{27\cdot 3} - \sqrt{9\cdot 3} + 5\sqrt[3]{3}$

$= \sqrt{3} + 3\sqrt[3]{3} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt[3]{3} = -2\sqrt{3} + 8\sqrt[3]{3}$

(*f*) $2a\sqrt[3]{27x^3y} + 3b\sqrt[3]{8x^3y} - 6c\sqrt[3]{-x^3y} = 6ax\sqrt[3]{y} + 6bx\sqrt[3]{y} + 6cx\sqrt[3]{y} = 6x(a+b+c)\sqrt[3]{y}$

(g) $2\sqrt{\frac{2}{3}}+4\sqrt{\frac{3}{8}}-5\sqrt{\frac{1}{24}}=2\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{3}}+4\sqrt{\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{2}}-5\sqrt{\frac{1}{24}\cdot\frac{6}{6}}$
$=\left(\frac{2}{3}+4\cdot\frac{1}{4}-\frac{5}{12}\right)\sqrt{6}=\frac{5}{4}\sqrt{6}$

(h) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{0,1}}-\sqrt{1,6}=\sqrt{\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{2}}+\frac{3}{\sqrt{1/10}}-\sqrt{(0,16)(10)}=\frac{1}{2}\sqrt{10}+3\sqrt{10}-0,4\sqrt{10}=3,1\sqrt{10}$

(i) $2\sqrt{\frac{a}{b}}-3\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{4}{\sqrt{ab}}=2\sqrt{\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}}-3\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{a}}+\frac{4}{\sqrt{ab}}\cdot\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}$
$=\frac{2}{b}\sqrt{ab}-\frac{3}{a}\sqrt{ab}+\frac{4}{ab}\sqrt{ab}=\left(\frac{2}{b}-\frac{3}{a}+\frac{4}{ab}\right)\sqrt{ab}=\left(\frac{2a-3b+4}{ab}\right)\sqrt{ab}$

Multiplicação de Radicais

8.8 (a) $(2\sqrt{7})(3\sqrt{5})=(2\cdot 3)\sqrt{7\cdot 5}=6\sqrt{35}$

(b) $(3\sqrt[3]{2})(5\sqrt[3]{6})(8\sqrt[3]{4})=(3\cdot 5\cdot 8)\sqrt[3]{2\cdot 6\cdot 4}=120\sqrt[3]{48}=240\sqrt[3]{6}$

(c) $(\sqrt[3]{18x^2})(\sqrt[3]{2x})=\sqrt[3]{36x^3}=x\sqrt[3]{36}$

(d) $\sqrt[4]{ab^{-1}c^5}\cdot\sqrt[4]{a^3b^3c^{-1}}=\sqrt[4]{a^4b^2c^4}=\sqrt{a^2bc^2}=ac\sqrt{b}$

(e) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}=3^{1/2}\cdot 2^{1/3}=3^{3/6}\cdot 2^{2/6}=\sqrt[6]{3^3\cdot 2^2}=\sqrt[6]{108}$

(f) $(\sqrt[3]{14})(\sqrt[4]{686})=(\sqrt[3]{7\cdot 2})\ (\sqrt[4]{7^3\cdot 2})=(7^{1/3}\cdot 2^{1/3})\ (7^{3/4}\cdot 2^{1/4})=(7^{4/12}\cdot 2^{4/12})(7^{9/12}\cdot 2^{3/12})$
$=7(7^{1/12}\cdot 2^{7/12})=7\sqrt[12]{7\cdot 2^7}=7\sqrt[12]{896}$

(g) $(-\sqrt{5}\ \sqrt[3]{x})^6=5^{6/2}x^{6/3}=5^3x^2=125x^2$

(h) $(\sqrt{4\times 10^{-6}})(\sqrt{8,1\times 10^3})(\sqrt{0,0016})=(\sqrt{4\times 10^{-6}})(\sqrt{81\times 10^2})(\sqrt{16\times 10^{-4}})$
$=(2\times 10^{-3})(9\times 10)(4\times 10^{-2})=72\times 10^{-4}=0,0072$

(i) $(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-2\sqrt{3})=\sqrt{6}\sqrt{6}+\sqrt{3}\sqrt{6}+(\sqrt{6})(-2\sqrt{3})\ +(\sqrt{3})(-2\sqrt{3})$
$=6+\sqrt{18}-2\sqrt{18}-2\cdot 3=-\sqrt{18}=-3\sqrt{2}$

(j) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2=(\sqrt{5})^2+\ 2(\sqrt{5})(\sqrt{2})+(\sqrt{2})^2=5+2\sqrt{10}+2=7+2\sqrt{10}$

(k) $(7\sqrt{5}-4\sqrt{3})^2=(7\sqrt{5})^2-\ 2(7\sqrt{5})(4\sqrt{3})+(4\sqrt{3})^2$
$=7^2\cdot 5-2\cdot 7\cdot 4\sqrt{15}+4^2\cdot 3=245-56\sqrt{15}+48=293-56\sqrt{15}$

(l) $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)=(\sqrt{3})^2-(1)^2=3-1=2$

(m) $(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2\sqrt{3}+\sqrt{5})=(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2=4\cdot 3-5=12-5=7$

(n) $(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})=(2\sqrt{5})^2-(3\sqrt{2})^2=4\cdot 5-9\cdot 2=20-18=2$

(o) $(2+\sqrt[3]{3})(2-\sqrt[3]{3})=4-\sqrt[3]{9}$

(p) $(3\sqrt{2}+2\sqrt[3]{4})(3\sqrt{2}-2\sqrt[3]{4})\ =(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt[3]{4})^2=18-4\sqrt[3]{16}=18\ -8\sqrt[3]{2}$

(q) $(3\sqrt{2}-4\sqrt{5})(2\sqrt{3}+3\sqrt{6})=(3\sqrt{2})(2\sqrt{3})-(4\sqrt{5})(2\sqrt{3})+(3\sqrt{2})(3\sqrt{6})-(4\sqrt{5})(3\sqrt{6})$
$=6\sqrt{6}-8\sqrt{15}+9\sqrt{12}-12\sqrt{30}\ =6\sqrt{6}-8\sqrt{15}+18\sqrt{3}-12\sqrt{30}$

(r) $(\sqrt{x+y}-z)(\sqrt{x+y}+z)\ =x+y-z^2$

(s) $(2\sqrt{x-1}-x\sqrt{2})(3\sqrt{x-1}\ +2x\sqrt{2})=6(x-1)-3x\sqrt{2(x-1)}+\ 4x\sqrt{2(x-1)}-4x^2$
$=6(x-1)+x\sqrt{2(x-1)}-4x^2$

8.9 (a) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}\ -\sqrt{5})$
$=[(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}][(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}]$
$=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2=2+2\sqrt{6}+3-5=2\sqrt{6}$

(b) $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+1)(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}-1)=[2\sqrt{3}+(3\sqrt{2}+1)][2\sqrt{3}-(3\sqrt{2}+1)]$
$=(2\sqrt{3})^2-(3\sqrt{2}+1)^2=12-(9\cdot 2+6\sqrt{2}+1)=-7-6\sqrt{2}$

(c) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2+(\sqrt{5})^2+\ 2(\sqrt{2})(\sqrt{3})+2(\sqrt{3})(\sqrt{5})+2(\sqrt{2})(\sqrt{5})$
$=2+3+5+2\sqrt{6}+2\sqrt{15}+2\sqrt{10}=10+\ 2\sqrt{6}+2\sqrt{15}+2\sqrt{10}$

(*d*) $(\sqrt{6+3\sqrt{3}}) = (\sqrt{6-3\sqrt{3}}) = \sqrt{(6+3\sqrt{3})(6-3\sqrt{3})} = \sqrt{36-9\cdot 3} = \sqrt{9} = 3$

(*e*) $(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})^2 = a+b-2\sqrt{(a+b)(a-b)}+a-b = 2a-2\sqrt{a^2-b^2}$

Divisão de Radicais. Racionalização de Denominadores

8.10 (*a*) $\dfrac{10\sqrt{6}}{5\sqrt{2}} = \dfrac{10}{5}\sqrt{\dfrac{6}{2}} = 2\sqrt{3}$

(*b*) $\dfrac{2\sqrt[4]{30}}{3\sqrt[4]{5}} = \dfrac{2}{3}\sqrt[4]{\dfrac{30}{5}} = \dfrac{2}{3}\sqrt[4]{6}$

(*c*) $\dfrac{4x}{y}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{x^2y^2}}{\sqrt[3]{xy}} = \dfrac{4x}{y}\sqrt[3]{\dfrac{x^2y^2}{xy}} = \dfrac{4x}{y}\sqrt[3]{xy}$

(*d*) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{3}} = \sqrt{\dfrac{6}{9}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{6}$

(*e*) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{2}{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{9}{9}} = \sqrt[3]{\dfrac{18}{27}} = \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{18}$

(*f*) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{2}} = \sqrt[5]{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{16}{16}} = \sqrt[5]{\dfrac{16}{32}} = \dfrac{1}{2}\sqrt[5]{16}$

(*g*) $\dfrac{\sqrt{3}+4\sqrt{2}-5\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}+4\sqrt{2}-5\sqrt{8}}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}+4\cdot 2-5\sqrt{16}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}-12}{2}$

(*h*) $\dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \dfrac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2} = \sqrt{5}-\sqrt{2}$

(*i*) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \dfrac{1+2\sqrt{2}+2}{1-2} = -(3+2\sqrt{2})$

(*j*) $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-y^2}} - \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-y^2}} = \dfrac{(x+\sqrt{x^2-y^2})-(x-\sqrt{x^2-y^2})}{(x-\sqrt{x^2-y^2})(x+\sqrt{x^2-y^2})} = \dfrac{2\sqrt{x^2-y^2}}{y^2}$

(*k*) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4\sqrt[3]{2}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4\sqrt[3]{2}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{3(3^{3/6})(4^{2/6})}{4\sqrt[3]{8}} = \dfrac{3\sqrt[6]{3^3\cdot 4^2}}{8} = \dfrac{3}{8}\sqrt[6]{432}$

(*l*) $\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}\cdot\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}} = \dfrac{(x-1)-2\sqrt{(x-1)(x+1)}+(x+1)}{(x-1)-(x+1)} = \sqrt{x^2-1}-x$

(*m*) $\dfrac{x+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}+x} = \dfrac{x+\sqrt{x}}{1+x+\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1+x-\sqrt{x}}{1+x-\sqrt{x}} = \dfrac{x^2+\sqrt{x}}{(1+x)^2-x} = \dfrac{x^2+\sqrt{x}}{1+x+x^2}$

(*n*) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}} = \dfrac{1}{3^{1/3}+4^{1/3}}$ Ponha $x = 3^{1/3}, y = 4^{1/3}$. Então

$$\frac{1}{x+y}\cdot\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-xy+y^2} = \frac{x^2-xy+y^2}{x^3+y^3} = \frac{3^{2/3}-3^{1/3}4^{1/3}+4^{2/3}}{(3^{1/3})^3+(4^{1/3})^3} = \frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{12}+2\sqrt[3]{2}}{7}$$

(*o*) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}} = \dfrac{1(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{x-y}$

(*p*) $\dfrac{m+n}{\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n}} = \dfrac{(m+n)(\sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2})}{(\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n})(\sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2})} = \dfrac{(m+n)(\sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2})}{(m+n)}$

$= \sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2}$

Problemas Complementares

Demonstre que:

8.11 (*a*) $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

(*b*) $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

(*c*) $3\sqrt{20} = 6\sqrt{5}$

(*d*) $\frac{2}{5}\sqrt{50a^2} = 2a\sqrt{2}$ (supondo $a \geq 0$)

(*e*) $\frac{a}{b}\sqrt{75a^3b^2} = 5a^2\sqrt{3a}$

(*f*) $\frac{4}{ab}\sqrt{98a^2b^3} = 28\sqrt{2b}$

(*g*) $\sqrt[3]{640} = 4\sqrt[3]{10}$

(*h*) $\sqrt[3]{88x^3y^6z^5} = 2xy^2z\sqrt[3]{11z^2}$

(*i*) $\sqrt{a/b} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$

(*j*) $14\sqrt{2/7} = 2\sqrt{14}$

(*k*) $3\sqrt[3]{2/3} = \sqrt[3]{18}$

(*l*) $\frac{3a}{4}\sqrt[3]{\frac{3}{2a}} = \frac{3}{8}\sqrt[3]{12a^2}$

(*m*) $xyz\sqrt{\frac{5}{2x^2yz}} = \frac{1}{2}\sqrt{10yz}$

(*n*) $60\sqrt{4/45} = 8\sqrt{5}$

(*o*) $3\sqrt[4]{4/9} = \sqrt{6}$

8.12 (*a*) $\sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{12} = 5\sqrt{3}$

(*b*) $5\sqrt{8} - 3\sqrt{18} = \sqrt{2}$

(*c*) $2\sqrt{150} - 4\sqrt{54} + 6\sqrt{48} = 24\sqrt{3} - 2\sqrt{6}$

(*d*) $5\sqrt{2} - 3\sqrt{50} + 7\sqrt{288} = 74\sqrt{2}$

(*e*) $\sqrt{16a^3 - 48a^2b} = 4a\sqrt{a - 3b}$ $(a \geq 0)$

(*f*) $3\sqrt[3]{16a^3} + 8\sqrt[3]{a^3/4} = 10a\sqrt[3]{2}$

(*g*) $\sqrt{\sqrt[3]{128}} = 2\sqrt[6]{2}$

(*h*) $\sqrt[n]{x^{n+1}y^{2n-1}z^{3n}} = xy^2z^3\sqrt[n]{x/y}$

(*i*) $3\sqrt[4]{9} - 2\sqrt[6]{27} = \sqrt{3}$

(*j*) $6\sqrt{8a^3/3} - 2\sqrt{24ab^2} + a\sqrt{54a} = (7a - 4b)\sqrt{6a}$
$a, b \geq 0$

(*k*) $(x+1)\sqrt[3]{16x^2} - 4x\sqrt[3]{x^2/4} = 2\sqrt[3]{2x^2}$

(*l*) $2\sqrt{54} - 6\sqrt{2/3} - \sqrt{96} = 0$

(*m*) $4\sqrt{x/y} + \frac{3}{\sqrt[4]{x^2y^2}} - 5\sqrt[6]{y^3/x^3} = \frac{4x - 5y + 3}{xy}\sqrt{xy}$

8.13 (*a*) $(3\sqrt{8})(6\sqrt{5}) = 36\sqrt{10}$

(*b*) $\sqrt{48x^5}\ \sqrt{3x^3} = 12x^4$

(*c*) $\sqrt[3]{2}\ \sqrt[3]{32} = 4$

(*d*) $\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{18}) = 8$

(*e*) $(5 + \sqrt{2})(5 - \sqrt{2}) = 23$

(*f*) $(x + \sqrt{y})(x + \sqrt{y}) = x^2 - y$

(*g*) $(2\sqrt{3} - \sqrt{6})(3\sqrt{3} + 3\sqrt{6}) = 9\sqrt{2}$

(*h*) $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(4\sqrt{2} + 3\sqrt{3}) = 6 + \sqrt{6}$

(*i*) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 10$

(*j*) $(2\sqrt{a} + 5\sqrt{a-b})(\sqrt{a} + \sqrt{a-b})$
$= 7a - 5b + 7\sqrt{a^2 - ab}$

(*k*) $(\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7})(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7}) = 1 + 2\sqrt{15}$

(*l*) $\sqrt{8 - 2\sqrt{7}}\sqrt{8 + 2\sqrt{7}} = 6$

(*m*) $\frac{4 + \sqrt{8}}{2} = 2 + \sqrt{2}$

(*n*) $\frac{6 - \sqrt{18}}{3} = 2 - \sqrt{2}$

(*o*) $\frac{3}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

(*p*) $\frac{8 + 4\sqrt{48}}{8} = 1 + 2\sqrt{3}$

(*q*) $\frac{36 - 2\sqrt[3]{81}}{6} = 6 - \sqrt[3]{3}$

8.14 (*a*) $\dfrac{2\sqrt{24x^3}}{\sqrt{3x}} = 4x\sqrt{2} \quad (x>0)$

(*b*) $\dfrac{a\sqrt{b}}{b\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{ab}}{b}$

(*c*) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 + \dfrac{1}{2}\sqrt{6}$

(*d*) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{10}-\sqrt{12}}{\sqrt{18}} = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{6}}{3}$

(*e*) $\sqrt[3]{\dfrac{9V^2}{16\pi^2}} = \dfrac{1}{4\pi}\sqrt[3]{36\pi V^2}$

(*f*) $\dfrac{6a}{\sqrt[3]{12}} = a\sqrt[3]{18}$

(*g*) $\dfrac{\sqrt[5]{3a^7b^6c^5}}{\sqrt[5]{24a^2bc}} = \dfrac{ab}{2}\sqrt[5]{4c^4}$

(*h*) $\sqrt[3]{\dfrac{x^{-2}y^{-3}z^{-1}}{4xyz^2}} = \dfrac{1}{2xy^2z}\sqrt[3]{2y^2}$

(*i*) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt[3]{9}}{3} = \dfrac{\sqrt[6]{648}}{3}$

(*j*) $\dfrac{\sqrt[3]{20}-\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{12}} = \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{45} - \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{12}$

(*k*) $\dfrac{1}{\sqrt{7}-2} = \dfrac{\sqrt{7}+2}{3}$

(*l*) $\dfrac{5}{3+\sqrt{2}} = \dfrac{5}{7}(3-\sqrt{2})$

(*m*) $\dfrac{-2}{2-\sqrt{3}} = -4-2\sqrt{3}$

(*n*) $\dfrac{s\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{3s}{2} + \dfrac{s\sqrt{3}}{2}$

(*o*) $\dfrac{2\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+2} = 5\sqrt{3}-8$

(*p*) $\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x-1}} = \dfrac{2\sqrt{x+1}-x-2}{x}$

8.15 (*a*) $\dfrac{4}{2+\sqrt{5}} + \dfrac{3}{5+2\sqrt{5}} = \dfrac{14}{5}\sqrt{5} - 5$

(*b*) $\dfrac{3\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}-2\sqrt{5}} = \dfrac{47+12\sqrt{15}}{7}$

(*c*) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = 1 + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

(*d*) $\dfrac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}} = \dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{a-b}$

(*e*) $\dfrac{x+\sqrt{y}}{x-\sqrt{y}} + \dfrac{x-\sqrt{y}}{x+\sqrt{y}} = \dfrac{2x^2+2y}{x^2-y}$

(*f*) $\sqrt{\dfrac{x-y}{x^3y-2x^2y^2+xy^3}} = \dfrac{\sqrt{xy(x-y)}}{xy(x-y)}$

(*g*) $\dfrac{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \dfrac{6+10\sqrt{3}+4\sqrt{5}+3\sqrt{15}}{11}$

(*h*) $\dfrac{1}{2+\sqrt[3]{2}} = \dfrac{4-2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{10}$

(*i*) $\dfrac{3}{x+y-\sqrt{x^2-2xy+y^2}} = \dfrac{3}{2y}$ se $x \geq y$

$= \dfrac{3}{2x}$ se $x \leq y$

(*j*) $\dfrac{2}{x^2-\sqrt{x^4+2x^2+1}} = -2$

(*k*) $\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{x}} = \dfrac{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{1-x}$

(*l*) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{m}+2} = \dfrac{4\sqrt[3]{m^2}-8\sqrt[3]{m}+16}{m+8}$

Capítulo 9

Operações Simples com Números Complexos

9.1 NÚMEROS COMPLEXOS

A unidade dos números imaginários é $\sqrt{-1}$, e é representada pela letra i. Muitas regras válidas para os números reais valem também para os números imaginários.

Assim, $\sqrt{-4} = \sqrt{(4)(-1)} = 2\sqrt{-1} = 2i$, $\sqrt{-18} = \sqrt{(18)(-1)} = \sqrt{18}\sqrt{-1} = 3\sqrt{2}\,i$. Também, uma vez que $i = \sqrt{-1}$, temos $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = (-1)\ i = -i$, $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$ e da mesma forma para qualquer potência inteira de i.

Nota: Devemos ser bastante cuidadosos ao aplicarmos certas regras que valem para os números reais. Por exemplo, podemos ser tentados a escrever

$$\sqrt{-4}\sqrt{-4} = \sqrt{(-4)(-4)} = \sqrt{16} = 4, \qquad \text{o que está incorreto.}$$

Para evitar tais dificuldades, é conveniente expressarmos $\sqrt{-m}$, sendo m um número positivo, por $\sqrt{m}\,i$ e fazermos uso da igualdade $i^2 = -1$ sempre que i^2 aparecer. Assim,

$$\sqrt{-4}\sqrt{-4} = (2i)(2i) = 4i^2 = -4, \qquad \text{o que está correto.}$$

Um número complexo é uma expressão da forma $a + bi$, onde a e b denotam números reais e $i = \sqrt{-1}$. No número complexo $a + bi$, a é denominado, *parte real* e bi, *parte imaginária*. Quando $a = 0$, o número complexo é denominado *imaginário puro*. Se $b = 0$, o número complexo se reduz ao número real a. Desta maneira, os números complexos englobam todos os números reais e todos os números imaginários puros.

Dois números complexos $a + bi$ e $c + di$ são *iguais* se e somente se $a = c$ e $b = d$. Assim, $a + bi = 0$ se e somente se $a = 0$ e $b = 0$. Se $c + di = 3$, então $c = 3$, $d = 0$.

O conjugado de um número complexo $a + bi$ é $a - bi$, sendo válida a recíproca. Assim, $5 - 3i$ e $5 + 3i$ são conjugados.

9.2 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Quando são empregados eixos de coordenadas retangulares, o número complexo $x + yi$ é representado por, ou corresponde ao, ponto cujas coordenadas são (x, y). Veja Fig. 9-1.

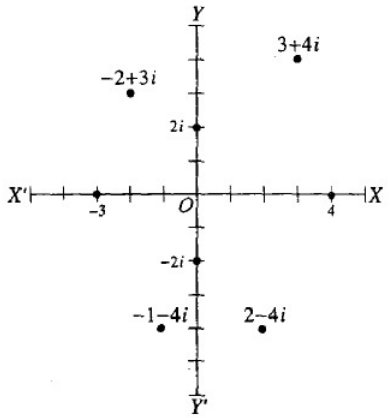


Fig. 9-1

Para representar o número complexo $3 + 4i$, marque sobre o eixo $X'X$ 3 unidades para a direita de O, e daí 4 unidades para cima.

Para representar o número $-2 + 3i$, marque sobre o eixo $X'X$ 2 unidades para a esquerda de O, e daí 3 unidades para cima.

Para representar o número $-1 - 4i$, marque sobre o eixo $X'X$ 1 unidade para a esquerda de O, e daí 4 unidades para baixo.

Para representar o número $2 - 4i$, marque sobre o eixo $X'X$ 2 unidades para a direita de O, e daí 4 unidades para baixo.

Os números imaginários puros (tais como $2i$ e $-2i$) são representados por pontos sobre o eixo $Y'Y$. Os números reais (tais como 4 e -3) são representados por pontos sobre o eixo $X'X$.

9.3 OPERAÇÕES ALGÉBRICAS COM NÚMEROS COMPLEXOS

Para *somar* dois números complexos, somamos as partes reais e imaginárias separadamente. Assim,

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$
$$(5 + 4i) + (3 + 2i) = (5 + 3) + (4 + 2)i = 8 + 6i$$
$$(-6 + 2i) + (4 - 5i) = (-6 + 4) + (2 - 5)\ i = -2 - 3i$$

Para *subtrair* dois números complexos, subtraimos as partes reais e imaginárias separadamente. Assim,

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$
$$(3 + 2i) - (5 - 3i) = (3 - 5) + (2 + 3)i = -2 + 5i$$
$$(-1 + i) - (-3 + 2i) = (-1 + 3) + (1 - 2)i = 2 - i$$

Para *multiplicar* dois números complexos, encaramos os números como binômios e substituímos i^2 por -1. Assim,

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$
$$(5 + 3i)(2 - 2i) = 10 - 10i + 6i - 6i^2 = 10 - 4i - 6(-1) = 16 - 4i$$

Para *dividir* dois números complexos, multiplicamos o numerador e o denominador da fração pelo conjugado do denominador, substituindo i^2 por -1. Assim,

$$\frac{2 + i}{3 - 4i} = \frac{2 + i}{3 - 4i} \cdot \frac{3 + 4i}{3 + 4i} = \frac{6 + 8i + 3i + 4i^2}{9 - 16i^2} = \frac{2 + 11i}{25} = \frac{2}{25} + \frac{11}{25}i$$

Problemas Resolvidos

9.1 Represente as expressões abaixo fazendo uso de i.

(*a*) $\sqrt{-25} = \sqrt{(25)(-1)} = \sqrt{25}\sqrt{-1} = 5i$

(*b*) $3\sqrt{-36} = 3\sqrt{36}\sqrt{-1} = 3 \cdot 6 \cdot i = 18i$

(*c*) $-4\sqrt{-81} = -4\sqrt{81}\sqrt{-1} = -4 \cdot 9 \cdot i = -36i$

(*d*) $\sqrt{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{-1} = \sqrt{\frac{2}{4}}i = \frac{\sqrt{2}}{2}i$

(*e*) $2\sqrt{\frac{-16}{25}} - 3\sqrt{\frac{-49}{100}} = 2 \cdot \frac{4}{5}i - 3 \cdot \frac{7}{10}i = \frac{8}{5}i = \frac{21}{10}i = \frac{16}{10}i - \frac{21}{10}i = -\frac{1}{2}i$

(*f*) $\sqrt{-12} - \sqrt{-3} = \sqrt{12}i - \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}i - \sqrt{3}i = \sqrt{3}i$

(*g*) $3\sqrt{-50} + 5\sqrt{-18} - 6\sqrt{-200} = 15\sqrt{2}i + 15\sqrt{2}i - 60\sqrt{2}i = -30\sqrt{2}i$

(*h*) $-2 + \sqrt{-4} = -2 + \sqrt{4}i = -2 + 2i$

(*i*) $6 - \sqrt{-50} = 6 - \sqrt{50}i = 6 - 5\sqrt{2}i$

(*j*) $\sqrt{8} + \sqrt{-8} = \sqrt{8} + \sqrt{8}i = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$

(*k*) $\frac{1}{5}(-10 + \sqrt{-125}) = \frac{1}{5}(-10 + 5\sqrt{5}i) = -2 + \sqrt{5}i$

(*l*) $\frac{1}{4}(\sqrt{32} + \sqrt{-128}) = \frac{1}{4}(4\sqrt{2} + 8\sqrt{2}i) = \sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$

(*m*) $\frac{\sqrt[3]{-8} + \sqrt{-8}}{2} = \frac{-2 + 2\sqrt{2}i}{2} = -1 + \sqrt{2}i$

9.2 Efetue as operações indicadas algébrica e graficamente:

(*a*) $(2 + 6i) + (5 + 3i)$, (*b*) $(-4 + 2i) - (3 + 5i)$

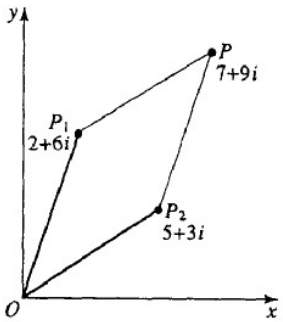


Fig. 9-2

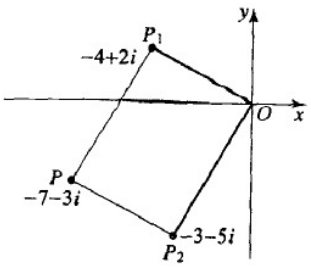


Fig. 9-3

SOLUÇÃO

(*a*) Algebricamente: $(2 + 6i) + (5 + 3i) = 7 + 9i$

Graficamente: Represente os dois números complexos pelos pontos P_1 e P_2, respectivamente, conforme demonstrado na Fig. 9-2. Una P_1 e P_2 à origem O. Complete o paralelogramo, que tem OP_1 e OP_2 como lados adjacentes. O vértice P (ponto $7 + 9i$) representa a soma dos dois números complexos dados.

(*b*) Algebricamente: $(-4 + 2i) - (3 + 5i) = -7 - 3i$

Graficamente: $(-4 + 2i) - (3 + 5i) = (-4 + 2i) + (-3 - 5i)$. Agora somamos $(-4 + 2i)$ e $(-3 - 5i)$.

Represente os dois números complexos $(-4 + 2i)$ e $(-3 - 5i)$ pelos pontos P_1 e P_2, respectivamente, conforme demonstrado na Fig. 9-3. Una P_1 e P_2 à origem O. Complete o paralelogramo, que tem OP_1 e OP_2 como lados adjacentes. O vértice P (ponto $-7 - 3i$) representa a subtração $(-4 + 2i) - (3 + 5i)$.

9.3 Efetue as operações indicadas e simplifique.

(*a*) $(5-2i)+(6+3i)=11+i$

(*b*) $(6+3i)-(4-2i)=6+3i-4+2i=2+5i$

(*c*) $(5-3i)-(-2+5i)=5-3i+2-5i=7-8i$

(*d*) $\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{8}i\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{4}+\left(\frac{5}{8}+\frac{1}{4}\right)i=\frac{5}{4}+\frac{7}{8}i$

(*e*) $(a+bi)+(a-bi)=2a$

(*f*) $(a+bi)-(a-bi)=a+bi-a+bi=2bi$

(*g*) $(5-\sqrt{-125})-(4-\sqrt{-20})=(5-5\sqrt{5}i)-(4-2\sqrt{5}i)=1-3\sqrt{5}i$

9.4 (*a*) $\sqrt{-2}\sqrt{-32}=(\sqrt{2}i)(\sqrt{32}i)=\sqrt{2}\sqrt{32}i^2=\sqrt{64}(-1)=-8$

(*b*) $-3\sqrt{-5}\sqrt{-20}=-3(\sqrt{5}i)(\sqrt{20}i)=-3(\sqrt{5}\sqrt{20})i^2=-3\sqrt{100}(-1)=30$

(*c*) $(4i)(-3i)=-12i^2=12$

(*d*) $(6i)^2=36i^2=-36$

(*e*) $(2\sqrt{-1})^3=(2i)^3=8i^3=8i(i^2)=-8i$

(*f*) $3i(i+2)=3i^2+6i=-3+6i$

(*g*) $(3-2i)(4+i)=3\cdot 4+3\cdot i-(2i)4-(2i)i=12+3i-8i+2=14-5i$

(*h*) $(5-3i)(i+2)=5i+10-3i^2-6i=5i+10+3-6i=13-i$

(*i*) $(5+3i)^2=5^2+2(5)3i+(3i)^2=25+30i+9i^2=16+30i$

(*j*) $(2-i)(3+2i)(1-4i)=(6+4i-3i-2i^2)(1-4i)=(8+i)(1-4i)$
$=8-32i+i-4i^2=12-31i$

(*k*) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2=\frac{1}{2}+i-\frac{1}{2}=i$

(*l*) $(1+i)^3=1+3i+3i^2+i^3=1+3i-3-i=-2+2i$

(*m*) $(3-2i)^3=3^3+3(3^2)(-2i)+3(3)(-2i)^2+(-2i)^3$
$=27+3(9)(-2i)+3(3)(4i^2)-8i^3=27-54i-36+8i=-9-46i$

(*n*) $(3+2i)^3=3^3+3(3^2)(2i)+3(3)(2i)^2+(2i)^3$
$=27+54i+36i^2+8i^3=27+54i-36-8i=-9+46i$

(*o*) $(1+2i)^4=[(1+2i)^2]^2=(1+4i+4i^2)^2=(-3+4i)^2=9-24i+16i^2=-7-24i$

(*p*) $(-1+i)^8=[(-1+i^2]^4=(1-2i+i^2)^4=(-2i)^4=16i^4=16$

9.5 (*a*) $\frac{1+i}{3-i}=\frac{1+i}{3-i}\cdot\frac{3+i}{3+i}=\frac{3+3i+i+i^2}{3^2-i^2}=\frac{2+4i}{10}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$

(*b*) $\frac{1}{i}=\frac{1}{i}\left(\frac{-i}{-i}\right)=\frac{-i}{-i^2}=\frac{-i}{1}=-i$

(*c*) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}i}{3\sqrt{2}-4\sqrt{3}i}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}i}{3\sqrt{2}-4\sqrt{3}i}\cdot\frac{3\sqrt{2}+4\sqrt{3}i}{3\sqrt{2}+4\sqrt{3}i}=\frac{(2\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(3\sqrt{2}+4\sqrt{3}i)}{(3\sqrt{2})^2-(4\sqrt{3})^2i^2}$
$=\frac{6\sqrt{6}+8\sqrt{9}i+3\sqrt{4}i+4\sqrt{6}i^2}{18+48}=\frac{2\sqrt{6}+30i}{66}=\frac{\sqrt{6}}{33}+\frac{5}{11}i$

Problemas Complementares

9.6 Represente as expressões abaixo fazendo uso de i.

(*a*) $2\sqrt{-49}$ (*d*) $4\sqrt{-1/8}$ (*g*) $\frac{-4+\sqrt{-4}}{2}$ (*i*) $4\sqrt{-81}-3\sqrt{-36}+4\sqrt{25}$

(*b*) $-4\sqrt{-64}$ (*e*) $3\sqrt{-25}-5\sqrt{-100}$ (*h*) $\frac{1}{6}(-12-\sqrt{-288})$ (*j*) $3\sqrt{12}-3\sqrt{-12}$

(*c*) $6\sqrt{-1/9}$ (*f*) $2\sqrt{-72}+3\sqrt{-32}$

9.7 Efetue as operações indicadas algébrica e graficamente:

(*a*) $(3+2i)+(2+3i)$ (*c*) $(4-3i)-(-2+i)$

(*b*) $(2-i)+(-4+5i)$ (*d*) $(-2+2i)-(-2-i)$

Efetue as operações indicadas e simplifique.

9.8 (*a*) $(3+4i)+(-1-6i)$ (*g*) $(2i)^4$ (*m*) $(3-4i)^2$

(*b*) $(-2+5i)-(3-2i)$ (*h*) $(\frac{1}{2}\sqrt{-3})^6$ (*n*) $(1+i)(2+2i)(3-i)$

(*c*) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}i\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}i\right)$ (*i*) $5i(2-i)$ (*o*) $(i-1)^3$

(*d*) $(3+\sqrt{-8})-(2-\sqrt{-32})$ (*j*) $(2+i)(2-i)$ (*p*) $(2+3i)^3$

(*e*) $\sqrt{-3}\sqrt{-12}$ (*k*) $(-3+4i)(-3-4i)$ (*q*) $(1-i)^4$

(*f*) $(-i\sqrt{2})(i\sqrt{2})$ (*l*) $(2-5i)(3+2i)$ (*r*) $(i+2)^5$

9.9 (*a*) $\dfrac{2-5i}{4+3i}$ (*d*) $\dfrac{3-\sqrt{2}i}{\sqrt{2}i}$ (*g*) $\dfrac{i+i^2+i^3+i^4}{1+i}$

(*b*) $\dfrac{-1}{2-2i}$ (*e*) $\dfrac{1}{1-2i}+\dfrac{3}{1+4i}$ (*h*) $\dfrac{i^{26}-i}{i-1}$

(*c*) $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}i}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}i}$ (*f*) $\dfrac{5}{3-4i}+\dfrac{10}{4+3i}$ (*i*) $\left(\dfrac{4i^{11}-i}{1+2i}\right)^2$

Respostas dos Problemas Complementares

9.6 (*a*) $14i$ (*c*) $2i$ (*e*) $-35i$ (*g*) $-2+i$ (*i*) $18i+20$

(*b*) $-32i$ (*d*) $\sqrt{2}i$ (*f*) $24\sqrt{2}i$ (*h*) $-2-2\sqrt{2}i$ (*j*) $6\sqrt{3}-6\sqrt{3}i$

9.7 (*a*) $5+5i$ e Fig. 9-4 (*c*) $6-4i$ e Fig. 9-6

(*b*) $-2+4i$ e Fig. 9-5 (*d*) $3i$ e Fig. 9-7

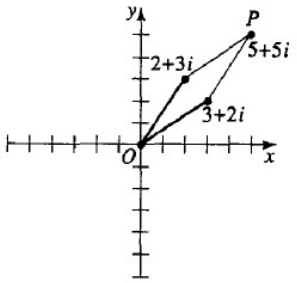


Fig. 9-4

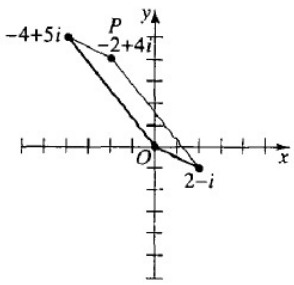


Fig. 9-5

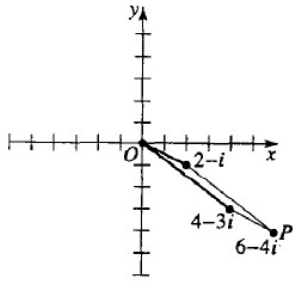


Fig. 9-6

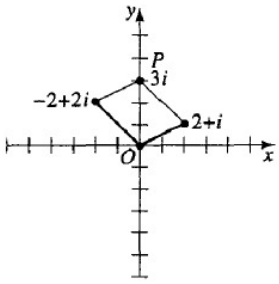


Fig. 9-7

9.8 (*a*) $2-2i$ (*d*) $1+6\sqrt{2}i$ (*g*) 16 (*j*) 5 (*m*) $-7-24i$ (*p*) $-46+9i$
(*b*) $-5+7i$ (*e*) -6 (*h*) $-27/64$ (*k*) 25 (*n*) $4+12i$ (*q*) -4
(*c*) $1-i$ (*f*) 2 (*i*) $5+10i$ (*l*) $16-11i$ (*o*) $2+2i$ (*r*) $-38+41i$

9.9 (*a*) $-\frac{7}{25}-\frac{26}{25}i$ (*c*) $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\sqrt{6}i$ (*e*) $\frac{32}{85}-\frac{26}{85}i$ (*g*) 0 (*i*) $3+4i$
(*b*) $-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$ (*d*) $-1-\frac{3}{2}\sqrt{2}i$ (*f*) $\frac{11}{5}-\frac{2}{5}i$ (*h*) i

Capítulo 10

Equações em Geral

10.1 EQUAÇÕES

Uma equação é uma igualdade entre duas expressões chamadas de membros. Uma equação válida apenas para alguns valores das variáveis envolvidas (algumas vezes chamadas indeterminadas) é chamada de *equação condicional* ou simplesmente equação.

Uma equação válida para todos os valores admissíveis das variáveis (ou indeterminadas) envolvidas é chamada de uma *identidade*. Por valores admissíveis, entendemos os valores para os quais os membros estão definidos.

Exemplo 10.1 $x + 5 = 8$ é verificada apenas para $x = 3$; é, então, uma equação condicional.

Exemplo 10.2 $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ é verificada por todos os valores de x e y; é, então, uma identidade.

Exemplo 10.3

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = \frac{2x-5}{(x-2)(x-3)}$$

é verificada por todos os valores com exceção de $x = 2$, $x = 3$; os valores excluídos nos levam a uma divisão por zero, o que não é permitido. Uma vez que a equação é verdadeira para todos os valores admissíveis de x, ela é uma identidade.

Às vezes, o símbolo $\equiv$, em vez de $=$, é utilizado para identidades

As soluções de uma equação condicional são todos aqueles valores das indeterminadas que tornam ambos os membros iguais. Dizemos que tais soluções satisfazem a equação. Se a equação envolve só uma indeterminada, as soluções são também chamadas de *raízes*. Resolver uma equação significa encontrar todas as suas soluções.

Assim, $x = 2$ é uma solução ou raiz de $2x + 3 = 7$, uma vez que, se substituirmos $x = 2$ na equação, obtemos $2(2) + 3 = 7$, e, portanto, ambos os membros são iguais, i.e., a equação é satisfeita. De maneira análoga, três (das muitas) soluções de $2x + y = 4$ são $x = 0, y = 4$; $x = 1$; $y = 2$; $x = 5$, $y = -6$.

10.2 OPERAÇÕES UTILIZADAS PARA TRANSFORMAR EQUAÇÕES

A. Se quantidades iguais são adicionadas a quantidades iguais, os resultados permanecem iguais.

Assim, se $x - y = z$, podemos adicionar y a ambos os membros e obter $x = y + z$.

B. Se quantidades iguais são subtraídas de quantidades iguais, os resultados permanecem iguais.

Assim, se $x + 2 = 5$, podemos subtrair 2 de ambos os membros e obter $x = 3$.

Nota: Devido às fórmulas A e B, podemos transpor um termo de um membro de uma equação para o outro membro meramente trocando o sinal deste termo. Assim, se $3x + 2y - 5 = x - 3y + 2$, então $3x - x + 2y + 3y = 5 + 2$ ou $2x + 5y = 7$.

C. Se quantidades iguais são multiplicadas por quantidades iguais, os resultados permanecem iguais.

Assim, se ambos os membros de $\frac{1}{4}y = 2x^2$ forem multiplicados por 4, o resultado será $y = 8x^2$.

Da mesma forma, se ambos os membros de $\frac{9}{5}C = F - 32$ forem multiplicados por $\frac{5}{9}$ o resultado será $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

D. Se quantidades iguais são divididas por quantidades iguais, os resultados permanecem iguais, desde que não tenha ocorrido divisão por zero.

Assim, se $-4x = -12$, podemos dividir ambos os membros por -4 para obter $x = 3$.

Da mesma forma, se $E = IR$, podemos dividir ambos os membros por $R \neq 0$ para obter $I = E/R$.

E. Potências iguais de quantidades iguais são iguais.

Assim, se $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, então $T^2 = (2\pi\sqrt{l/g})^2 = 4\pi^2 l/g$.

F. As mesmas raízes de quantidades iguais são iguais. Assim,

$$\text{se } r^3 = \frac{3V}{4\pi}, \qquad \text{então } r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

G. Inversos de quantidade iguais são iguais, desde que não ocorra inverso de zero.

Assim, se $1/x = 1/3$, então $x = 3$. Da mesma forma,

$$\text{se } \frac{1}{R} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}, \text{ então } \qquad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

As operações explicitadas em A-F são algumas vezes denominadas axiomas da igualdade.

10.3 EQUAÇÕES EQUIVALENTES

Equações equivalentes são equações que têm as mesmas soluções.

Assim, $x - 2 = 0$ e $2x = 4$ têm a mesma solução $x = 2$, e, portanto, são equivalentes. No entanto, $x - 2 = 0$ e $x^2 - 2x = 0$ não são equivalentes, uma vez que $x^2 - 2x = 0$ tem a solução adicional $x = 0$.

As operações acima usadas para transformar equações podem nem sempre nos fornecer equações equivalentes às equações originais. O uso de tais operações pode nos fornecer equações com mais ou com menos soluções do que a equação original.

Se as operações fornecerem uma equação com mais soluções do que a original, as soluções extras são denominadas *estranhas*, e a equação derivada, *redundante* com respeito à equação original. Se as operações fornecerem uma equação com menos soluções do que a original, a equação derivada é denominada *defeituosa* com respeito à equação original.

As operações explicitadas em A e B sempre nos fornecem equações equivalentes. Já as explicitadas em C e E podem nos fornecer equações redundantes e soluções estranhas. As operações em D e F podem dar origem a equações defeituosas.

10.4 FÓRMULAS

Uma fórmula é uma equação que expressa um fato geral, uma regra ou um princípio.

Por exemplo, em Geometria, a fórmula $A = \pi r^2$ expressa a área A do círculo em termos de seu raio r.

Em Física, a fórmula $s = \frac{1}{2}gt^2$, onde g é aproximadamente 32,2 pés/s^2, expressa a relação entre a distância s, em pés, percorrida desde o repouso por um objeto em queda livre durante um tempo t, dado em segundos.

Resolver uma fórmula em uma das variáveis nela envolvidas é realizar as mesmas operações em ambos os seus membros até que esta variável apareça em apenas um lado da equação.

Assim, se $F = ma$, podemos dividir por m e obter $a = F/m$. Dizemos, então, que a fórmula está resolvida para a em termos das outras variáveis F e g. Para conferir nosso trabalho, substituímos $a = F/m$ na equação original e obtemos $F = m(F/m)$, uma identidade.

10.5 EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Um monômio em um número de indeterminadas $x, y, z, \ldots$ tem a forma $ax^p y^q z^r \ldots$, onde os expoentes $p, q, r, \ldots$ são ou inteiros positivos ou zero, e o coeficiente a é independente das indeterminadas. A soma dos expoentes $p + q + r + \ldots$ é denominada *grau* do termo nas indeterminadas $x, y, z, \ldots$

Exemplos 10.1 $3x^2z^3$, $\frac{1}{2}x^4$, 6 são monômios.
$3x^2z^3$ é de grau 2 em x, 3 em z e seu grau é 5 em x e z.
$\frac{1}{2}x^4$ é de grau 4. 6 é de grau zero.
$4y/x = 4yx^{-1}$ não é inteiro em x; $3x\sqrt{y}z^3$ não é racional em y.

Quando falarmos em grau sem que seja feita referência a alguma indeterminada, estaremos subentendendo o grau em todas as indeterminadas.

Um polinômio em várias indeterminadas consiste de termos, cada um dos quais racional e inteiro. O grau de tal polinômio é definido como o grau dos termos de mais alto grau.

Exemplo 10.2 $3x^3y^4z + xy^2z^5 - 8x + 3$ é um polinômio de grau 3 em x, 4 em y, 5 em z, 7 em x e y, 7 em y e z, 6 em x e z e 8 em x, y e z.

Uma equação polinomial é uma fórmula que estabelece a igualdade entre dois polinômios. O grau de tal equação é o grau do termo de mais alto grau presente na equação.

Exemplo 10.3 $xyz^2 + 3xz = 2x^3y + 3z^2$ é de grau 3 em x, 1 em y, 2 em z, 4 em x e y, 3 em y e z, 3 em x e z e 4 em x, y e z.

Deve ficar claro que termos semelhantes numa equação devem ser agrupados. Assim, $4x^3y + x^2z - xy^2 = 4x^3y + z$ deve ser escrita $x^2z - xy^2 = z$.

Uma equação é denominada *linear* se é de grau 1, e *quadrática* se é de grau 2. Analogamente, as palavras *cúbica*, *quártica* e *quíntica* referem-se a equações de grau 3, 4 e 5, respectivamente.

Exemplo 10.4 $2x + 3y = 7z$ é uma equação linear em x, y e z.
$x^2 - 4xy + 5y^2 = 10$ é uma equação quadrática em x e y.
$x^3 + 3x^2 - 4x - 6 = 0$ é uma equação cúbica em x.

Uma equação polinomial de grau n na indeterminada x pode ser escrita

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad a_0 \neq 0,$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são constantes dadas e n é um inteiro positivo.

Como casos especiais vemos que

$a_0x + a_1 = 0$ ou $ax + b = 0$	é de grau 1 (equação linear),
$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$ ou $ax^2 + bx + c = 0$	é de grau 2 (equação quadrática),
$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_s = 0$	é de grau 3 (equação cúbica),
$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$	é de grau 4 (equação quártica).

Problemas Resolvidos

10.1 Quais das equações abaixo são condicionais e quais são identidades?

(*a*) $3x - (x + 4) = 2(x - 2)$, $2x - 4 = 2x - 4$; identidade.

(*b*) $(x - 1)(x + 1) = (x - 1)^2$, $x^2 - 1 = x^2 - 2x + 1$; equação condicional.

(*c*) $(y - 3)^2 + 3(2y - 3) = y(y + 1) - y$, $y^2 - 6y + 9 + 6y - 9 = y^2 + y - y$, $y^2 = y^2$; identidade.

(*d*) $x + 3y - 5 = 2(x + 2y) + 3$, $x + 3y - 5 = 2x + 4y + 3$; equação condicional.

10.2 Verifique cada uma das equações abaixo para a solução ou soluções indicadas.

(*a*) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=10;\ x=12.$ $\quad \frac{12}{2}+\frac{12}{3}=10,\ 6+4=10,$ e $x=12$ é uma solução.

(*b*) $\frac{x^2+6x}{x+2}=3x-2;\ x=2,\ x=-1.$ $\quad \frac{2^2+6(2)}{2+2}=3(2)-2,\ \frac{16}{4}=4,$ e $x=2$ é uma solução.

$\frac{(-1)^2+6(-1)}{-1+2}=3(-1)-2,\ \frac{-5}{1}=-5,$ e $x=-1$ é uma solução.

(*c*) $x^2-xy+y^2=19;\ x=-2,\ y=3;\ x=4,\ y=2+\sqrt{7};\ x=2,\ y=-1$

$x=-2,\ y=3$: $(-2)^2-(-2)3+3^2=19,\ 19=19,$ e $x=-2,\ y=3$ é uma solução.

$x=4,\ y=2+\sqrt{7}$: $4^2-4(2+\sqrt{7})+(2+\sqrt{7})^2=19,\ 16-8-4\sqrt{7}+(4+4\sqrt{7}+7)=19,\ 19=19,$ e $x=4,\ y=2+\sqrt{7}$ é uma solução.

$x=2,\ y=-1$: $2^2-2(-1)+(-1)^2=19,\ 7=19,$ e $x=2,\ y=-1$ não é uma solução.

10.3 Utilize os axiomas da igualdade para resolver cada equação:

(*a*) $2(x+3)=3(x-1),\ 2x+6=3x-3$

Transpondo termos: $2x-3x=-6-3,\ -x=-9.$ Multiplicando por -1: $x=9.$

Verificação: $2(9+3)=3(9-1),\ 24=24$

(*b*) $\frac{x}{3}+\frac{x}{6}=1$

Multiplicando por 6: $2x+x=6,\ 3x=6.$ Dividindo por 3: $x=2.$

Verificação: $2/3+2/6=1,\ 1=1$

(*c*) $3y-2(y-1)=4(y+2),\ 3y-2y+2=4y+8,\ y+2=4y+8$

Transpondo: $y-4y=8-2,\ -3y=6.$ Dividindo por -3: $y=6/(-3)=-2$

Verificação: $3(-2)-2(-2-1)=4(-2+2),\ 0=0$

(*d*) $\frac{2x-3}{x-1}=\frac{4x-5}{x-1}.$ Multiplicando por $x-1,\ 2x-3=4x-5$ ou $x=1.$

Verificação: Substituindo $x=1$ na equação dada, encontramos $-1/0=-1/0.$ Isso não faz sentido, uma vez que a divisão por zero é uma operação excluída, e a equação dada não tem solução. Note que

$$(i)\ \frac{2x-3}{x-1}=\frac{4x-5}{x-1} \qquad \text{e} \qquad (ii)\ 2x-3=4x-5$$

não são equações equivalentes. Quando (*i*) é multiplicada por $x-1$, é introduzida uma *solução estranha* $x=1$, e a equação (*ii*) é *redundante* com respeito à equação (*i*).

(*e*) $x(x-3)=2(x-3).$ Dividindo cada membro por $x-3$, temos a solução $x=2.$

Agora $-3=0$ ou $x=3$ é também solução da equação dada que foi perdida com a divisão. As raízes de fato são $x=2$ e $x=3.$

A equação $x=2$ é *defeituosa* em relação à equação dada.

(*f*) $\sqrt{x+2}=-1.$ Elevando ambos os membros ao quadrado, $x+2=1$ ou $x=-1.$

Checando: Substituindo $x=-1$ na equação dada, $\sqrt{1}=-1$ ou $1=-1$, o que é falso.

Assim, $x=-1$ é uma *solução estranha*. A equação dada não tem solução.

(*g*) $\sqrt{2x-4}=6.$ Elevando ambos os membros ao quadrado, $2x-4=36$ ou $x=20.$

Verificação: se $x=20,\ \sqrt{2(20)-4}=6$ ou $\sqrt{36}=6$, o que é verdadeiro.

Assim, $x=20$ é uma solução. Neste caso, nenhuma solução estranha foi introduzida.

10.4 Em cada uma das fórmulas abaixo, resolva para a letra indicada.

(*a*) $E=IR,$ para R. Dividindo ambos os lados por $I\neq 0$, obtemos $R=E/I.$

(*b*) $s=v_0t+\frac{1}{2}at^2$, para a.

Transpondo: $\frac{1}{2}at^2 = s - v_0 t$. Multiplicando por 2, $at^2 = 2(s - v_0 t)$.
Dividindo por $t^2 \neq 0$,

$$a = \frac{2(s - v_0 t)}{t^2}$$

(*c*) $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$, para p. Transpondo,

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{f} - \frac{1}{q} = \frac{q-f}{fq}$$

Tomando inversos,

$$p = \frac{fq}{q-f} \qquad \text{(supondo } q \neq f\text{)}.$$

(*d*) $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, para g. Elevando ao quadrado ambos os membros,

$$T^2 = \frac{4\pi^2 l}{g}$$

Multiplicando por g, $gT^2 = 4\pi^2 l$. Dividindo por T^2, $g = 4\pi^2 l/T^2$.

10.5 Nas fórmulas abaixo, encontre o valor da letra indicada, sendo dados os valores das demais letras.

(*a*) $F = \frac{9}{5}C + 32$, $F = 68$; encontre C. $68 = \frac{9}{5}C + 32$, $36 = \frac{9}{5}C$, $C = \frac{5}{9}(36) = 20$

Outro método: $\frac{9}{5}C = F - 32$, $C = \frac{5}{9}(F - 32) = \frac{5}{9}(68 - 32) = \frac{5}{9}(36) = 20$

(*b*) $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$, $R = 6$, $R_1 = 15$; encontre R_2. $\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{R_2}$, $\dfrac{1}{R_2} = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{15} = \dfrac{5-2}{30} = \dfrac{1}{10}$, $R_2 = 10$

Outro método: $\dfrac{1}{R_2} = \dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{R_1} = \dfrac{R_1 - R}{RR_1}$, $R_2 = \dfrac{RR_1}{R_1 - R} = \dfrac{6(15)}{15-6} = 10$

(*c*) $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$, $V = 288\pi$; encontre r. $288\pi = \dfrac{4}{3}\pi r^3$, $r^3 = \dfrac{288\pi}{4\pi/3} = 216$, $r = 6$

Outro método: $3V = 4\pi r^3$, $r^3 = \dfrac{3V}{4\pi}$, $r = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\dfrac{3(288\pi)}{4\pi}} = \sqrt[3]{216} = 6$

10.6 Determine o grau das equações nas indeterminadas indicadas.

(*a*) $2x^2 + xy - 3 = 0$: x; y; x e y

Grau 2 em x, 1 em y, 2 em x e y.

(*b*) $3xy^2 - 4y^2z + 5x - 3y = x^4 + 2$: x; z; y e z; x, y e z

Grau 4 em x, 1 em z, 3 em y e z, 4 em x, y e z.

(*c*) $x^2 = \dfrac{3}{y+z}$: x; x e z; x, y e z

Como está, a equação não é polinomial. No entanto, ela pode ser tranformada em uma equação polinomial multiplicando-se por $y + z$ para obter-se $x^2(y + z) = 3$ ou $x^2y + x^2z = 3$. A equação derivada é uma equação polinomial de grau 2 em x, 3 em x e z, 3 em x, y e z.

(*d*) $\sqrt{x+3} = x + y$: y; x e y

Como está, a equação não é polinomial. No entanto, ela pode ser tranformada em uma equação polinomial elevando-se ambos os lados ao quadrado. Então, obtemos $x + 3 = x^2 + 2xy + y^2$, que é de grau 2 em y e 2 em x e y.

Deve-se mencionar, no entanto, que as equações não são equivalentes, uma vez que $x^2 + 2xy + y^2 = x + 3$ inclui ambas as equações $\sqrt{x+3} = x + y$ e $\sqrt{x+3} = x + y$.

10.7 Encontre todos os valores de x, para os quais (*a*) $x^2 = 81$, (*b*) $(x - 1)^2 = 4$.

SOLUÇÃO

(*a*) Não há nada que indique se x é um número positivo ou negativo, de modo que devemos supor que qualquer um dos casos é possível. Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados da equação, obtemos $\sqrt{x^2} = \sqrt{81} = 9$.

Agora, $\sqrt{x^2}$ representa um número positivo (ou zero) se x for real. Então, temos $\sqrt{x^2} = x$ se x for positivo, enquanto que $\sqrt{x^2} = -x$ se x for negativo. Portanto, quando escrevemos $\sqrt{x^2}$, devemos considerar que esta expressão pode ser igual tanto a x (se $x > 0$) quanto a $-x$ (se $x < 0$). Portanto, a equação $\sqrt{x^2} = 9$ pode ser escrita como $x = 9$ ou $-x = 9$ (i.e., $x = -9$). As duas soluções podem ser escritas ± 9.

(*b*) $(x-1)^2 = 4$, $\pm(x-1) = 2$ ou $(x-1) = \pm 2$, e as duas raízes são $x = 3$ e $x = -1$.

10.8 Explique a falácia na seguinte seqüência de passos:

(*a*)	Seja $x = y$:	$x = y$
(*b*)	Multiplique ambos os lados por x:	$x^2 = xy$
(*c*)	Subtraia y^2 de ambos os lados:	$x^2 - y^2 = xy - y^2$
(*d*)	Escreva como:	$(x-y)(x+y) = y(x-y)$
(*e*)	Divida por $x - y$:	$x + y = y$
(*f*)	Substitua x por seu igual, y:	$y + y = y$
(*g*)	Portanto:	$2y = y$
(*h*)	Divida por y:	$2 = 1$

SOLUÇÃO

Não há nada errado nos passos (*a*), (*b*), (*c*), (*d*).

No entanto, em (*e*), dividimos por $x - y$, que, de acordo com a hipótese inicial, é zero. Como a divisão por zero não é definida, tudo o que fizemos a partir de (*e*) deve ser desconsiderado.

10.9 Demonstre que $\sqrt{2}$ é um número irracional, i.e., não pode ser quociente de dois inteiros.

SOLUÇÃO

Suponha que $\sqrt{2} = p/q$, onde p e q são inteiros sem fatores em comum exceto ± 1, i.e., p/q está expresso em seus termos mínimos. Elevando ao quadrado, temos $p^2/q^2 = 2$ ou $p^2 = 2q^2$. Como $2q^2$ é um número par, temos p^2 par e portanto p é par (se p fosse ímpar, p^2 seria ímpar); então $p = 2k$, onde k é um inteiro. Assim, $p^2 = 2q^2$ se torna $(2k)^2 = 2q^2$ ou $q^2 = 2k^2$; daí q^2 é par e q é par. Mas se p e q fossem pares, eles teriam o número 2 como um fator em comum, contradizendo a hipótese de que eles não tinham fator em comum exceto ± 1. Portanto, $\sqrt{2}$ é irracional.

Problemas Complementares

10.10 Determine quais das equações abaixo são equações condicionais e quais são identidades.

(*a*) $2x + 3 - (2 - x) = 4x - 1$

(*b*) $(2y-1)^2 + (2y+1)^2 = (2y)^2 + 6$

(*c*) $2\{x + 4 - 3(2x-1)\} = 3(4-3x) + 2 - x$

(*d*) $(x+2y)(x-2y) - (x-2y)^2 + 4y(2y-x) = 0$

(*e*) $\dfrac{9x^2 - 4y^2}{3x - 2y} = 2x + 3y$

(*f*) $(x-3)(x^2+3x+9) = x^3 - 27$

(*g*) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^2}{12} = x^2$

(*h*) $(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2$

10.11 Verifique as equações abaixo para a solução ou soluções indicadas.

(*a*) $\dfrac{y^2 - 4}{y - 2} = 2y - 1$; $y = 3$

(*b*) $x^2 - 3x = 4$; $-1, -4$

(*c*) $\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+2} = 4$; $34, 2$

(*d*) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$; $1, 2, 3$

(*e*) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{x-1}$; $x = 3$

(*f*) $y^3 + y^2 - 5y - 5 = 0$; $\pm\sqrt{5}, -1$

(*g*) $x^2 - 2y = 3y^2$; $x = 4$, $y = 2$; $x = 1$, $y = -1$

(*h*) $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2 + y^2)$; quaisquer valores de x, y

10.12 Utilize os axiomas da igualdade para resolver as equações. Verifique as soluções encontradas.

(*a*) $5(x-4) = 2(x+1) - 7$

(*b*) $\frac{2y}{3} - \frac{y}{6} = 2$

(*c*) $\frac{1}{y} = 8 - \frac{3}{y}$

(*d*) $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1}{x-2}$

(*e*) $\frac{3x-2}{x-2} = \frac{x+2}{x-2}$

(*f*) $\sqrt{3x-2} = 4$

(*g*) $\sqrt{2x+1} + 5 = 0$

(*h*) $\sqrt[3]{2x-3} + 1 = 0$

(*i*) $(y+1)^2 = 16$

(*j*) $(2x+1)^2 + (2x-1)^2 = 34$

10.13 Nas fórmulas abaixo, resolva para a letra indicada.

(*a*) $\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}; T_2$

(*b*) $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}; s$

(*c*) $m = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}; c$

(*d*) $v^2 = v_0^2 + 2as; a$

(*e*) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}; k$

(*f*) $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]; d$

10.14 Nas fórmulas abaixo, encontre o valor da letra indicada, sendo dados os valores das demais letras.

(*a*) $v = v_0 + at$; encontre a se $v = 20$, $v_0 = 30$, $t = 5$.

(*b*) $S = \frac{n}{2}(a + d)$; encontre d se $S = 570$, $n = 20$, $a = 40$.

(*c*) $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$; encontre q se f $=30$, $p = 10$.

(*d*) $Fs = \frac{1}{2}mv^2$; encontre v se $F = 100$, $s = 5$, $m = 2{,}5$.

(*e*) $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$; encontre C até quatro casas decimais se $f = 1.000$, $L = 4 \cdot 10^{-6}$.

10.15 Determine o grau das equações nas indeterminadas indicadas.

(*a*) $x^3 - 3x + 2 = 0$: x

(*b*) $x^2 + xy + 3y^4 = 6$: x; y; x e y

(*c*) $2xy^3 - 3x^2y^2 + 4xy = 2x^3$: x; y; x e y

(*d*) $xy + yz + xz + z^2x = y^4$: x; y; z; x e z; y e z; x,y e z

10.16 Classifique cada equação como sendo (ou podendo se tornar uma) equação linear, quadrática, cúbica, quártica ou quíntica em todas as indeterminadas presentes.

(*a*) $2x^4 + 3x^3 - x - 5 = 0$

(*b*) $x - 2y = 4$

(*c*) $2x^2 + 3xy + y^2 = 10$

(*d*) $x^2y^3 - 2xyz = 4 + y^5$

(*e*) $\sqrt{x^2 + y^2 - 1} = x + y$

(*f*) $\frac{2x+y}{x-3y} = 4$

(*g*) $3y^2 - 4y + 2 = 2(y-3)^2$

(*h*) $(z+1)^2(z-2) = 0$

10.17 A equação $\sqrt{(x+4)^2} = x + 4$ é uma identidade? Justifique.

10.18 Prove que $\sqrt{3}$ é irracional.

Respostas dos Problemas Complementares

10.10 (*a*) Equação condicional (*b*) Equação condicional (*c*) Identidade (*d*) Identidade (*e*) Equação condicional (*f*) Identidade (*g*) Equação condicional (*h*) Identidade

10.11 (*a*) $y = 3$ é uma solução.
(*b*) $x = -1$ é uma solução, $x = -4$ não é.
(*c*) $x = 34$ é uma solução, $x = 2$ não é.
(*d*) $x = 1, 2, 3$ são soluções.
(*e*) $x = 3$ é uma solução.
(*f*) $y = \pm\sqrt{5}, -1$ são soluções.
(*g*) $x = 4, y = 2; x = 1, y = -1$ são soluções.
(*h*) A equação é uma identidade; portanto, quaisquer valores de x e y são soluções.

10.12 (*a*) $x = 5$ (*b*) $y = 4$ (*c*) $y = 1/2$ (*d*) $x = 3$ (*e*) nenhuma solução (*f*) $x = 6$ (*g*) nenhuma solução (*h*) $x = 1$ (*i*) $y = 3, -5$ (*j*) $x = \pm 2$

10.13 (*a*) $T_2 = \dfrac{P_2 V_2 T_1}{P_1 V_1}$ (*b*) $s = \frac{1}{2}gt^2$ (*c*) $c = \pm\sqrt{2a^2 + 2b^2 - 4m^2}$ (*d*) $a = \dfrac{v^2 - v_0^2}{2s}$ (*e*) $k = \dfrac{4\pi^2 m}{T^2}$ (*f*) $d = \dfrac{2S - 2an}{n(n-1)}$

10.14 (*a*) $a = -2$ (*b*) $d = 17$ (*c*) $q = -15$ (*d*) $v = \pm 20$ (*e*) $C = 0{,}0063$

10.15 (*a*) 3 (*b*) 2, 4, 4 (*c*) 3, 3, 4 (*d*) 1, 4, 2, 3, 4, 4

10.16 (*a*) quártica (*b*) linear (*c*) quadrática (*d*) quíntica (*e*) quadrática (*f*) linear (*g*) quadrática (*h*) cúbica

10.17 $\sqrt{(x+4)^2} = x + 4$ somente se $x + 4 \geq 0$; $\sqrt{(x+4)^2} = -(x+4)$ se $x + 4 \leq 0$.
A equação não é uma identidade.

Capítulo 11

Razão, Proporção e Variação

11.1 RAZÃO

A razão entre dois números a e b, escrita $a{:}b$, é a fração a/b, desde que tenhamos $b \neq 0$.

Assim, $a : b = a/b$, $b \neq 0$. Se $a = b \neq 0$, a razão é 1:1 ou $1/1 = 1$.

Exemplos 11.1

(1) A razão de 4 para $6 = 4{:}6 = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

(2) $\dfrac{2}{3} : \dfrac{4}{5} = \dfrac{2/3}{4/5} = \dfrac{5}{6}$ (3) $5x : \dfrac{3y}{4} = \dfrac{5x}{3y/4} = \dfrac{20x}{3y}$

11.2 PROPORÇÃO

Uma proporção é uma igualdade de duas razões. Assim, $a : b = c : d$, ou $a/b = c/d$, é uma proporção na qual a e d são os *extremos*, b e c são os *meios* e d é denominada a *quarta proporcional* de a, b e c.

Na proporção $a : b = b : c$, c é denominada a *terceira proporcional* de a e b, e b é a *média proporcional entre* a e c.

Proporções são equações e podem ser transformadas usando-se os mesmos procedimentos das equações. Algumas das equações transformadas são usadas freqüentemente e são chamadas de regras de proporção. Se $a/b = c/d$, então

(1) $ad = bc$ (3) $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$ (5) $\dfrac{a-b}{b} = \dfrac{c-d}{d}$

(2) $\dfrac{b}{a} = \dfrac{d}{c}$ (4) $\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d}$ (6) $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{c+d}{c-d}$

11.3 VARIAÇÃO

Ao lermos material científico, é comum encontrarmos afirmações como "A pressão de um gás enclausurado varia diretamente com a temperatura". Afirmações como esta têm significados matemáticos precisos e representam um tipo especial de função chamado funções de variação. Os três tipos de funções de variação são direta, inversa e conjunta.

(1) Se x varia *diretamente* com y, então $x = ky$ ou $x/y = k$, onde k é a constante de proporcionalidade ou constante de variação.

(2) Se x varia *diretamente* com y^2, então $x = ky^2$.

(3) Se x varia *inversamente* com y, então $x = k/y$.

(4) Se x varia *inversamente* com y^2, então $x = k/y^2$.

(5) Se x varia *conjuntamente* com y e z, então $x = kyz$.

(6) Se x varia *diretamente* com y^2 e *inversamente* com z, então $x = ky^2/z$.

A constante k pode ser determinada se um conjunto de valores das variáveis for conhecido.

11.4 PREÇO UNITÁRIO

Ao fazermos compras, observamos que um mesmo item pode estar sendo vendido em quantidades distintas. Para compararmos preços, precisamos computar o preço por unidade de medida de cada tamanho do item.

Exemplos 11.2 Qual é o preço unitário de cada item?

(*a*) Um vidro de 3 onças de azeitonas que custa 87¢*

$$\frac{x¢}{87¢} = \frac{1\text{ oz}}{3\text{ oz}} \qquad x = \frac{87}{3} = 29 \qquad 29¢ \text{ por onça}$$

(*b*) Uma caixa de 12 onças de cereal que custa \$1,32

$$\frac{x¢}{132¢} = \frac{1\text{ oz}}{12\text{ oz}} \qquad x = \frac{132}{12} = 11 \qquad 11¢ \text{ por onça}$$

Exemplos 11.3 Qual é o preço unitário de cada item com precisão de décimos de centavos?

(*a*) Uma lata com 6,5 onças de atum que custa \$1,09

$$\frac{x¢}{109¢} = \frac{1\text{ oz}}{6{,}5\text{ oz}} \qquad x = \frac{109}{6{,}5} = 16{,}8 \qquad 16{,}8¢ \text{ por onça}$$

(*b*) Uma lata com 14 onças de salmão que custa \$1,95

$$\frac{x¢}{195¢} = \frac{1\text{ oz}}{14\text{ oz}} \qquad x = \frac{195}{14} = 13{,}9 \qquad 13{,}9¢ \text{ por onça}$$

11.5 COMPRA ÓTIMA

Para determinarmos a compra ótima, comparamos o preço unitário para cada tamanho de item, e o tamanho com o menor preço unitário será a compra ótima. Com isto, estamos fazendo duas suposições — uma compra maior não acarretará desperdício e o comprador tem recursos para comprar qualquer um dos tamanhos oferecidos. Para determinarmos a compra ótima, o preço unitário é geralmente arredondado ao mais próximo décimo de centavo.

Exemplos 11.4 Qual é a compra ótima com relação a uma garrafa de óleo vegetal quando 1 galão custa \$5,99, 1 pinta custa 89¢ e 24 onças custam \$1,29?

$$\frac{a¢}{599¢} = \frac{1\text{ oz}}{128\text{ oz}} \qquad a = \frac{599}{128} = 4{,}7 \qquad 4{,}7¢ \text{ por onça}$$

$$\frac{b¢}{89¢} = \frac{1\text{ oz}}{16\text{ oz}} \qquad b = \frac{89}{16} = 5{,}6 \qquad 5{,}6¢ \text{ por onça}$$

$$\frac{c¢}{129¢} = \frac{1\text{ oz}}{24\text{ oz}} \qquad c = \frac{129}{24} = 5{,}4 \qquad 5{,}4¢ \text{ por onça}$$

A compra ótima é 1 galão de óleo vegetal a \$5,99.

* N. de T. Nesta obra, adotamos o símbolo ¢ para representar centavos.

Problemas Resolvidos

Razão e Proporção

11.1 Expresse as seguintes razões como frações simplificadas.

(*a*) $96:128 = \frac{96}{128} = \frac{3}{4}$ (*b*) $\frac{2}{3}:\frac{3}{4} = \frac{2/3}{3/4} = \frac{8}{9}$ (*c*) $xy^2:x^2y = \frac{xy^2}{x^2y} = \frac{y}{x}$

(*d*) $(xy^2 - x^2y):(x-y)^2 = \frac{xy^2 - x^2y}{(x-y)^2} = \frac{xy(y-x)}{(y-x)^2} = \frac{xy}{y-x}$

11.2 Encontre a razão das seguintes quantidades.

(*a*) 6 libras para 12 onças. Costuma-se expressar as quantidades nas mesmas unidades.
Então, a razão de 96 onças para 12 onças é $96:12 = 8:1$.

(*b*) 3 quartos para 2 galões.
A razão requerida é 3 quartos para 8 quartos ou $3:8$.

(*c*) 3 jardas quadradas para 6 pés quadrados.
Como 1 jarda quadrada = 9 pés quadrados, a razão requerida é 27 pés^2: 6 pés^2 = $9:2$.

11.3 Determine o valor de x nas seguintes proporções:

(*a*) $(3-x):(x+1) = 2:1$, $\frac{3-x}{x+1} = \frac{2}{1}$ e $x = \frac{1}{3}$

(*b*) $(x+3):10 = (3x-2):8$, $\frac{x+3}{10} = \frac{3x-2}{8}$ e $x = 2$

(*c*) $(x-1):(x+1) = (2x-4):(x+4)$, $\frac{x-1}{x+1} = \frac{2x-4}{x+4}$, $x^2 - 5x = 0$,

$x(x-5) = 0$ e $x = 0{,}5$

11.4 Encontre a quarta proporcional dos seguintes conjuntos de números. Em cada caso, denote por x a quarta proporcional.

(*a*) 2, 3, 6. Aqui, $2:3 = 6:x$, $\frac{2}{3} = \frac{6}{x}$ e $x = 9$.

(*b*) 4, −5, 10. Aqui, $4:-5 = 10:x$ e $x = -\frac{25}{2}$.

(*c*) a^2, ab, 2. Aqui, $a^2:ab = 2:x$, $a^2x = 2ab$ e $x = \frac{2b}{a}$.

11.5 Encontre a terceira proporcional dos seguintes pares de números. Em cada caso, denote por x a terceira proporcional.

(*a*) 2, 3. Aqui, $2:3 = 3:x$ e $x = 9/2$.

(*b*) $-2, \frac{8}{3}$. Aqui, $-2:\frac{8}{3} = \frac{8}{3}:x$ e $x = -\frac{32}{9}$.

11.6 Encontre a média proporcional entre 2 e 8.

SOLUÇÃO

Seja x a média proporcional requerida. Então, $2:x = x:8$, $x^2 = 16$ e $x = \pm 4$.

11.7 Um segmento de reta de 30 centímetros de comprimento é dividido em duas partes cujos comprimentos estão na razão $2:3$. Encontre os comprimentos de cada parte.

SOLUÇÃO

Denotemos os comprimentos procurados por x e $30 - x$. Assim,

$$\frac{x}{30-x} = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad x = 12 \text{ cm}, \quad 30 - x = 18 \text{ cm}$$

11.8 Dois irmãos têm respectivamente 5 e 8 anos. Em quantos anos (x) a razão entre as suas idades será de 3 : 4?

SOLUÇÃO

Em x anos, suas respectivas idades serão $5 + x$ e $8 + x$.
Assim, $(5 + x):(8 + x) = 3:4$, $4(5 + x) = 3(8 + x)$ e $x = 4$.

11.9 Divida 253 em 4 partes proporcionais a 2, 5, 7, 9.

SOLUÇÃO

Denotemos as quatro partes por $2k$, $5k$, $7k$, $9k$.
Desta forma, $2k + 5k + 7k + 9k = 253$ e $k = 11$. Assim, as quatro partes são 22, 55, 77 e 99.

11.10 Se $x:y:z = 2:-5:4$ e $x - 3y + z = 63$, encontre x, y, z.

SOLUÇÃO

Sejam $x = 2k$, $y = -5k$, $z = 4k$.

Substituindo estes valores em $x - 3y + z = 63$, obtemos $2k - 3(-5k) + 4k = 63$ ou $k = 3$.

Então, $x = 2k = 6$, $y = -5k = -15$, $z = 4k = 12$.

Variação

11.11 Escreva uma equação para as afirmações, empregando k como a constante de proporcionalidade.

(*a*) A circunferência C de um círculo varia com o seu diâmetro d. *Resp.* $C = kd$

(*b*) O período de oscilação T de um pêndulo simples em determinada posição é proporcional à raiz quadrada de seu comprimento l. *Resp.* $T = k\sqrt{l}$

(*c*) A taxa de energia de radiação E por unidade de área de um radiador perfeito é proporcional à quarta potência da sua temperatura absoluta T. *Resp.* $E = kT^4$

(*d*) O calor C em calorias desenvolvido em um condutor de resistência R ohms, usando-se uma corrente de I ampères, varia conjuntamente com o quadrado da corrente, a resistência do condutor e o tempo t durante o qual o condutor conduz corrente. *Resp.* $H = kI^2Rt$

(*e*) A intensidade I de uma onda de som varia conjuntamente com o quadrado de sua freqüência n, com o quadrado de sua amplitude r, com a velocidade do som v e a densidade d do meio sem perturbação.

Resp. $$I = kn^2r^2vd$$

(*f*) A força de atração F entre duas massas m_1 e m_2 varia diretamente com o produto das massas e inversamente com o quadrado da distância r entre elas. *Resp.* $F = km_1m_2/r^2$

(*g*) A uma temperatura constante, o volume V de uma dada massa de um gás ideal varia inversamente com a pressão p à qual ela está sujeita. *Resp.* $V = k/p$

(*h*) Uma força desequilibrada F agindo sobre um corpo produz nele uma aceleração a que é diretamente proporcional à força e inversamente proporcional à massa m do corpo. *Resp.* $a = kF/m$

11.12 A energia cinética E de um corpo é proporcional ao seu peso W e ao quadrado de sua velocidade v. Um corpo de 8 libras movendo-se a 4 pés/s tem 2 pés/lb de energia cinética. Encontre a energia cinética de um caminhão de 3 toneladas (6.000 lb) a uma velocidade de 60 milhas por hora (80 pés/s).

SOLUÇÃO

Para encontrar k: $E = kWv^2$ ou $k = \dfrac{E}{Wv^2} = \dfrac{2}{8(4^2)} = \dfrac{1}{64}$

Portanto, a energia cinética do caminhão é $E = \dfrac{Wv^2}{64} = \dfrac{6.000(88)^2}{64} = 726\,000$ pés/lb.

11.13 A pressão p de uma dada massa de um gás ideal varia inversamente com o volume V e diretamente com a temperatura absoluta T. A que pressão 100 pés cúbicos de gás hélio a 1 atmosfera de pressão e 1253° devem ser submetidos para serem comprimidos a 50 pés cúbicos quando a temperatura for 313°?

SOLUÇÃO

Para encontrar k: $p = k\dfrac{T}{V}$ ou $k = \dfrac{pV}{T} = \dfrac{1(100)}{253} = \dfrac{100}{253}$

Portanto, a pressão requerida é $p = \frac{100}{253}\frac{T}{V} = \frac{100}{253}\left(\frac{313}{50}\right) = 2{,}47$ atmosferas.

Outro método: denotemos com índices 1 e 2 as condições inicial e final do gás, respectivamente.

Assim, $k = \frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$, $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$, $\frac{1(100)}{253} = \frac{p_2(50)}{313}$ e $p_2 = 2{,}47$ atm

11.14 Se 8 homens levam 12 dias para montar 16 máquinas, quantos dias levarão 15 homens para montar 50 máquinas?

SOLUÇÃO

O número de dias (x) varia diretamente com o número de máquinas (y) e inversamente com o número de homens (z).

Assim, $x = \frac{ky}{z}$, onde $k = \frac{xz}{y} = \frac{12(8)}{16} = 6$

Portanto, o número de dias requerido é $x = \frac{6y}{z} = \frac{6(50)}{15} = 20$ dias.

Preço Unitário e Compra Ótima

11.15 Qual o preço unitário de 12 laranjas que custam 99¢?

SOLUÇÃO

$$\frac{x¢}{99¢} = \frac{1 \text{ laranja}}{12 \text{ laranjas}} \qquad x = \frac{99}{12} = 8{,}25 \qquad \$0{,}0825 \text{ por laranja}$$

11.16 Qual o preço unitário de saco de lixo quando 20 sacos custam \$2,50?

SOLUÇÃO

$$\frac{x¢}{250¢} = \frac{1 \text{ saco}}{20 \text{ sacos}} \qquad x = \frac{250}{20} = 12{,}5 \qquad 12{,}5¢ \text{ por saco}$$

11.17 Qual é a compra ótima quando 7 latas de sopa custam \$2,25 e 3 latas de sopa custam 95¢ ?

SOLUÇÃO

$$\frac{a¢}{225¢} = \frac{1 \text{ lata}}{7 \text{ latas}} \qquad a = \frac{225}{7} = 32{,}1 \qquad 32{,}1¢ \text{ por lata}$$

A compra ótima é 3 latas de sopa a 95¢.

11.18 Qual é a compra ótima quando um pacote de 3 onças de requeijão custa 43¢ e um pacote de 8 onças de requeijão custa 87¢?

SOLUÇÃO

$$\frac{a¢}{43¢} = \frac{1 \text{ oz}}{3 \text{ oz}} \qquad a = \frac{43}{3} = 14{,}3 \qquad 14{,}3¢ \text{ por onça}$$

$$\frac{b¢}{87¢} = \frac{1 \text{ oz}}{8 \text{ oz}} \qquad b = \frac{87}{8} = 10{,}9 \qquad 10{,}9¢ \text{ por onça}$$

A compra ótima é o pacote de 8 onças de requeijão a 87¢.

Problemas Complementares

10.19 Expresse as seguintes razões como frações simplificadas.

(*a*) 40:64 (*b*) 4/5:8/3 (*c*) $x^2y^3:3xy^4$ (*d*) $(a^2b + ab^2):(a^2b^{3+} + a^3b^2)$

11.20 Encontre a razão das seguintes quantidades.

(*a*) 20 jardas para 40 pés (*c*) 2 pés quadrados para 96 polegadas quadradas

(*b*) 8 pintas para 5 quartos (*d*) 6 galões para 30 pintas

11.21 Determine o valor de x nas seguintes proporções:

(*a*) $(x+3):(x-2) = 3:2$ (*c*) $(x+1):4 = (x+6):2x$

(*b*) $(x+4):1 = (2-x):2$ (*d*) $(2x+1):(x+1) = 5x:(x+4)$

11.22 Encontre a quarta proporcional dos seguintes conjuntos de números:

(*a*) 3, 4, 12 (*c*) a, b, c

(*b*) $-2, 5, 6$ (*d*) $m+2, m-2, 3$

11.23 Encontre a terceira proporcional dos seguintes pares de números:

(*a*) 3, 5 (*b*) $-2, 4$ (*c*) a, b (*d*) $ab, \sqrt{ab}$

11.24 Encontre a média proporcional entre dos seguintes pares de números:

(*a*) 3, 27 (*b*) $-4, -8$ (*c*) $3\sqrt{2}$ e $6\sqrt{2}$ (*d*) $m+2$ e $m+1$

11.25 Se $(x+y):(x-y) = 5:2$, encontre $x:y$.

11.26 Dois números estão na razão 3 : 4. Se 4 é adicionado a cada um deles, a razão resultante é 4 : 5. Encontre estes números.

11.27 Um segmento de reta de 120 polegadas de comprimento é dividido em três partes cujos comprimentos são proporcionais a 3, 4, 5. Encontre esses comprimentos.

11.28 Se $x:y:z = 4:-3:2$ e $2x+4y-3z = 20$, encontre x, y, z.

11.29 (*a*) Se x varia diretamente com y e se $x = 8$ quando $y = 5$, encontre y quando $x = 20$.

(*b*) Se x varia diretamente com y^2 e se $x = 4$ quando $y = 3$, encontre x quando $y = 6$.

(*c*) Se x varia diretamente com y e se $x = 8$ quando $y = 3$, encontre y quando $x = 2$.

11.30 A distância percorrida por um objeto em queda livre a partir do repouso varia diretamente com o quadrado do tempo de queda. Se um objeto cai 144 pés em 3 segundos, que distância ele percorrerrá ao cair por 10 segundos?

11.31 A força do vento sobre uma vela varia conjuntamente com a área da vela e o quadrado da velocidade do vento. Em um pé quadrado de vela, a força é de 1 libra quando a velocidade do vento é de 15 milhas por hora. Determine a força do vento a 45 milhas por hora sobre uma vela de 20 jardas quadradas de área.

11.32 Se 2 homens aram 6 acres de terra em 4 horas, quantos homens são necessários para arar 18 acres de terra em 8 horas?

11.33 Qual é o preço unitário com precisão de décimos de centavo para cada item?

(*a*) uma lata de 1,36 litros de suco de frutas ao preço de \$1,09

(*b*) um pote de geléia com 283 gramas que custa 79¢

(*c*) um pote de creme facial com 10,4 onças que custa \$3,73

(*d*) uma dúzia de latas de ervilhas que custa \$4,20

(*e*) 25 libras de semente de grama que custam \$27,75

(*f*) 3 rosquinhas que custam 49¢

11.34 Qual é a compra ótima?

(*a*) 100 cartelas de aspirina por \$1,75 ou 200 cartelas de aspirina por \$2,69

(*b*) um pote de geléia com 6 onças por 85¢ ou um pote de geléia com 12 onças por \$1,59

(*c*) um frasco de colutório com 14 onças que custa \$1,15 ou um frasco de colutório com 20 onças que custa \$1,69

(*d*) um pote de mostarda com 9 onças que custa 35¢ ou um pote de mostarda com 24 onças que custa 89¢

(*e*) um pacote de biscoitos com 454 gramas por \$1,05 ou um pacote de biscoitos com 340 gramas por 93¢

(*f*) um frasco de amaciante com 0,94 litro por 99¢ ou um frasco de amaciante com 2,76 litros por \$2,65

Respostas dos Problemas Complementares

11.19 (*a*) 5/8 (*b*) 3/10 (*c*) $x/3y$ (*d*) $1/ab$

11.20 (*a*) 3:2 (*b*) 4:5 (*c*) 3:1 (*d*) 8:5

11.21 (*a*) 12 (*b*) -2 (*c*) 4, -3 (*d*) 2, $-2/3$

11.22 (*a*) 16 (*b*) -15 (*c*) bc/a (*d*) $3(m-2)/(m+2)$

11.23 (*a*) 25/3 (*b*) -8 (*c*) b^2/a (*d*) 1

11.24 (*a*) ± 9 (*b*) $\pm 4\sqrt{2}$ (*c*) ± 6 (*d*) $\pm\sqrt{m^2+3m+2}$

11.25 7/3

11.26 12, 16

11.27 30, 40, 50 polegadas

11.28 -8, 6, -4

11.29 (*a*) $12\frac{1}{2}$ (*b*) 16 (*c*) 12

11.30 1600 pés

11.31 1620 lb

11.32 3 homens

11.33 (*a*) 80,1¢ por litro (*c*) 35,9¢ por onça (*e*) 111¢ por libra

(*b*) 0,3¢ por grama (*d*) 35¢ por lata (*f*) 16,3¢ por rosquinha

11.34 (*a*) 200 cartelas de aspirinas por \$2,69

(*b*) o pote com 12 onças por \$1,59

(*c*) o frasco com 14 onças custando \$1,15

(*d*) o pote com 24 onças custando 89¢

(*e*) o pacote com 454 gramas por \$1,05

(*f*) o frasco com 2,76 litros por \$2,65

Capítulo 12

Funções e Gráficos

12.1 VARIÁVEIS

Uma variável é um símbolo que, em uma argumentação matemática, pode assumir qualquer valor de um conjunto de valores. Uma *constante* é um símbolo que representa um único valor particular durante uma discussão matemática.

Letras finais do alfabeto, como x, y, z, u, v e w, geralmente são empregadas para representar variáveis, e as letras iniciais do alfabeto, como a, b e c, são usadas como constantes.

12.2 RELAÇÕES

Uma relação é um conjunto de pares ordenados. A relação pode ser especificada por uma equação, por uma regra ou por uma tabela. O conjunto das primeiras componentes dos pares ordenados é denominado domínio da relação. O conjunto das segundas componentes dos pares é denominado imagem da relação. Neste capítulo, consideraremos apenas relações que têm para domínio e imagem conjuntos de números reais.

Exemplo 12.1 Quais são o domínio e a imagem da relação $\{(1,3),\ (2,6),\ (3,9),\ (4,12)\}$?

$$\text{domínio} = \{1,2,3,4\} \quad \text{imagem} = \{3,6,9,12\}$$

12.3 FUNÇÕES

Uma função é uma relação tal que cada elemento do domínio compõe um par com exatamente um elemento da imagem.

Exemplo 12.2 Quais relações são funções?

(*a*) $\{(1,2),\ (2,3),\ (3,4),\ (4,5)\}$
função – cada elemento na primeira componente faz parte de apenas um par

(*b*) $\{(1,2),\ (1,3),\ (2,8),\ (3,9)\}$
não função – 1 compõe par com 2 e com 3

(*c*) $\{(1,3),\ (2,3),\ (4,3),\ (9,3)\}$
função – cada elemento na primeira componente faz parte de apenas um par

Em geral, funções e relações são estabelecidas por equações. Quando o domínio não está especificado, determinamos o maior subconjunto dos reais para o qual a equação está definida e este é o domínio. Uma vez determinado o domínio, passamos a determinar a imagem, encontrando o valor da equação para cada valor do domínio. A variável associada ao domínio é denominada variável independente, e a variável associada à imagem é a variável dependente. Em equações com variáveis x e y, geralmente supõe-se que x seja a variável independente e y seja a variável dependente.

Exemplo 12.3 Quais são o domínio e a imagem de $y = x^2 + 2$?

O domínio é o conjunto de todos os números reais, uma vez que o quadrado de cada número real é um número real e um número real somado a 2 ainda é um número real. Domínio = {todos os números reais}

A imagem é o conjunto de todos os números reais maiores ou iguais a 2, uma vez que o quadrado de um número real é no mínimo zero e, quando adicionamos 2 a cada valor, temos os números reais que são no mínimo iguais a 2. Imagem = {todos os reais ≥ 2}

Exemplo 12.4 Quais são o domínio e a imagem de $y = 1/(x - 3)$?

A equação não está definida para $x = 3$, de modo que o domínio é o conjunto de todos os reais diferentes de 3. Domínio = {todos os números reais $\neq 3$}

Uma fração pode ser nula somente quando o numerador é zero. Como o numerador desta fração é sempre 1, a fração nunca é igual a zero. Assim, a imagem é o conjunto de todos os números reais diferentes de zero. Imagem = {todos os reais $\neq 0$}

12.4 NOTAÇÃO PARA FUNÇÃO

A notação $y = f(x)$, lida "y é igual a f de x", é utilizada para expressar que y é função de x. Com esta notação, $f(a)$ representa o valor da variável dependente y quando $x = a$ (desde que garantido que exista esse valor).

Assim, $y = x^2 - 5x + 2$ pode ser escrita $f(x) = x^2 - 5x + 2$. Daí $f(2)$, i.e., o valor de $f(x)$ ou y, quando $x = 2$, é $f(2) = 2^2 - 5(2) + 2 = -4$. Da mesma forma, $f(-1) = (-1)^2 - 5(-1) + 2 = 8$.

Qualquer letra pode ser utilizada para denotar uma função; assim, $g(x)$, $h(x)$, $F(x)$, etc., podem representar funções de x.

12.5 SISTEMA DE COORDENADAS RETANGULARES

Um sistema de coordenadas retangulares é utilizado para dar uma visualização da relação entre duas variáveis.

Considere duas retas perpendiculares $X'X$ e $Y'Y$ interseccionando-se no ponto O, como mostra a Fig. 12-1.

A reta $X'X$, denominada eixo x, é normalmente horizontal.

A reta $Y'Y$, denominada eixo y, é normalmente vertical.

O ponto O é denominado origem.

Fazendo uso de uma unidade de medida conveniente, marcam-se pontos no eixo x distanciados de sucessivas unidades para a direita e esquerda da origem O, definindo os da direita como 1, 2, 3, 4, ... e os da esquerda como $-1, -2, -3, -4, \ldots$. Aqui escolhemos arbitrariamente OX para ser o sentido positivo; isto é o usual, mas não é obrigatório.

Faz-se o mesmo com o eixo y, escolhendo OY como o sentido positivo. É usual (mas não obrigatório) utilizar-se a mesma unidade de medida em ambos os eixos.

O eixo x e o eixo y dividem o plano em 4 partes, conhecidas como *quadrantes*, que são marcadas com I, II, III, IV, como na Fig. 12-1.

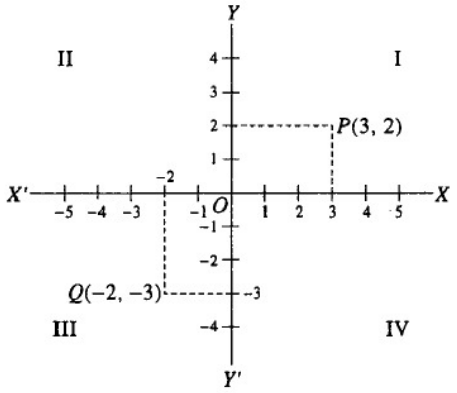


Fig. 12-1

Dado um ponto P no plano xy, trace perpendiculares aos eixos x e y passando por P. Os valores de x e y dos pontos que as perpendiculares determinam sobre os eixos x e y são chamados de *coordenada* x (ou abscissa) do ponto e *coordenada* y (ou ordenada) do ponto P. Tais coordenadas são indicadas por (x, y).

Reciprocamente, a partir das coordenadas de um ponto, podemos localizar o ponto no plano xy.

Por exemplo, o ponto P na Fig. 12-1 tem coordenadas (3, 2); o ponto com coordenadas $(-2, -3)$ é Q.

O gráfico de uma função $y = f(x)$ é o conjunto de todos os pontos (x, y) que satisfazem a equação $y = f(x)$.

12.6 FUNÇÃO DE DUAS VARIÁVEIS

Diz-se que a variável z é uma função das variáveis x e y se existir uma relação tal que, para cada par de valores de x e y, corresponda um e somente um valor de z. Aqui, x e y são denominados variáveis independentes e z é a variável dependente.

A notação utilizada neste caso é $z = f(x, y)$: leia-se "z igual a f de x e y". Daí $f(a, b)$ denota o valor z quando $x = a$, e $y = b$, desde que a função esteja definida para estes valores.

Assim, se $f(x, y) = x^3 + xy^2 - 2x$, então $f(2, 3) = 2^3 + 2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 = 20$.

De forma análoga, podemos definir funções de mais de duas variáveis independentes.

12.7 SIMETRIA

Quando a metade esquerda de um gráfico é uma imagem espelhada da metade direita, dizemos que o gráfico é simétrico com relação ao eixo y (veja Fig 12-2). Tal simetria ocorre porque, para cada valor de x, tanto x quanto $-x$ resultam no mesmo valor y, isto é, $f(x) = f(-x)$. A equação pode ou não expressar y como função de x.

Alguns gráficos têm a metade inferior como uma imagem espelhada da metade superior, e então dizemos que tais gráficos são simétricos em relação ao eixo x. Isso ocorre quando, para cada valor de y, tanto y quanto $-y$ resultam em um mesmo valor para x (veja Fig. 12-3). Nesses casos, não se tem uma função para y em termos de x.

Se, ao substituirmos x por $-x$ e y por $-y$ em uma equação, obtivermos uma equação equivalente à dada, dizemos que o gráfico é simétrico em relação à origem (veja Fig. 12-4). Tais equações representam relações que nem sempre são funções.

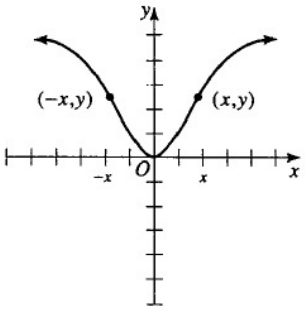


Fig. 12-2

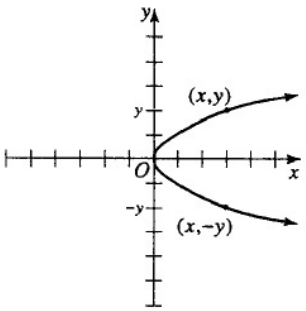


Fig. 12-3

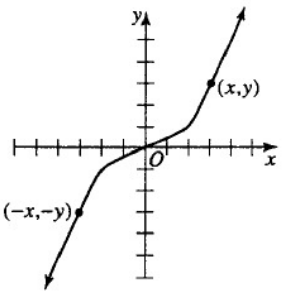


Fig. 12-4

A simetria pode ser utilizada para esboçar mais facilmente gráficos de relações ou funções. Uma vez determinados o tipo de simetria (se existir) e a forma de metade do gráfico, a outra metade pode ser construída fazendo-se uso dessa simetria. A maioria dos gráficos não são simétricos nem em relação ao eixo x, nem em relação ao eixo y e nem em relação à origem. No entanto, muitos gráficos utilizados mais freqüentemente exibem uma dessas simetrias e utilizá-la facilita o processo de construção do gráfico.

Exemplo 12.5 Teste a relação $y = 1/x$ com respeito à simetria.

Substituindo x por x, obtemos $y = -1/x$, de modo que o gráfico não é simétrico em relação ao eixo y.
Substituindo y por $-y$, obtemos $-y = 1/x$, de modo que o gráfico não é simétrico em relação ao eixo x.
Substituindo x por $-x$ e y por $-y$, obtemos $-y = -1/x$, que é equivalente a $y = 1/x$, de modo que o gráfico é simétrico em relação à origem.

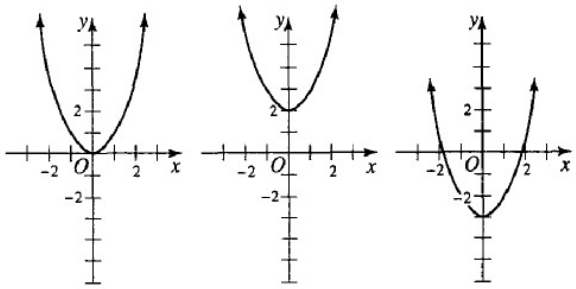
12.8 TRANSLAÇÕES

O gráfico de $y = f(x)$ fica transladado para cima quando adicionamos uma constante positiva a cada valor y no gráfico. O gráfico fica transladado para baixo quando adicionamos uma constante negativa a cada valor y no gráfico de $y = f(x)$. Assim, o gráfico de $y = f(x) + b$ difere do gráfico de $y = f(x)$ por uma translação vertical de $|b|$ unidades. O deslocamento é para cima se $b > 0$ e é para baixo se $b < 0$.

Exemplos 12.6 Como os gráficos de $y = x^2 + 2$ e $y = x^2 - 3$ diferem do gráfico de $y = x^2$?

Deslocamos o gráfico de $y = x^2$ 2 unidades para cima para obtermos o gráfico de $y = x^2 + 2$ (veja Figs. 12-5 (*a*) e (*b*)).

Deslocamos o gráfico de $y = x^2$ 3 unidades para baixo para obtermos o gráfico de $y = x^2 - 3$ (veja Figs. 12-5 (*a*) e (*c*)).



(*a*) $y = x^2$ (*b*) $y = x^2 + 2$ (*c*) $y = x^2 - 3$

Fig. 12-5

O gráfico de $y = f(x)$ é deslocado para a direita quando uma constante positiva é subtraída de cada valor da variável x. É deslocado para a esquerda quando uma constante positiva é subtraída de cada valor da variável x. Assim, o gráfico de $y = f(x - a)$ difere do gráfico de $y = f(x)$ por um deslocamento horizontal de $|a|$ unidades. O deslocamento é para a direita se $a > 0$ e é para a esquerda se $a < 0$.

Exemplos 12.7 Como os gráficos de $y = (x + 1)^2$ e $y = (x - 2)^2$ diferem do gráfico de $y = x^2$?

Deslocamos o gráfico de $y = x^2$ 1 unidade para a esquerda para obtermos o gráfico de $y = (x + 1)^2$, uma vez que $x + 1 = x - (-1)$ (veja Figs. 12-6 (*a*) e (*b*)).
Deslocamos o gráfico de $y = x^2$ 2 unidades para a direita para obtermos o gráfico de $y = (x - 2)^2$ (veja Figs. 12-6 (*a*) e (*c*)).