

João M. S. Carvalho

Professor e Investigador do Instituto Universitário da Maia

PROGRAMAÇÃO LINEAR

Algoritmos simplex primal, dual,
transporte e afetação



VidaEconómica

João M. S. Carvalho

Investigador integrado no Interdisciplinary Centre of Social Sciences (CICS.NOVA – 4647/FCT)
das Universidades Nova de Lisboa e do Minho.

Investigador da Unidade de Investigação em Ciências Empresariais e Sustentabilidade (UNICES)
do Instituto Universitário da Maia.

PROGRAMAÇÃO LINEAR

Algoritmos simplex primal, dual,
transporte e afetação

VidaEconómica

FICHA TÉCNICA

Título

Programação linear

Autor

João M. S. Carvalho

Editor

Vida Económica - Editorial, SA
R. Gonçalo Cristóvão, 14 • 4000-263 Porto
www.vidaeconomica.pt • <http://livraria.vidaeconomica.pt>

Composição e montagem

Vida Económica

Impressão e acabamento

UniarTE Gráfica, S.A. • 4300-414 Porto

Depósito Legal

380890/14

ISBN

978-989-768-030-4

Executado em setembro de 2014



A cópia ilegal viola os direitos dos autores.

Os prejudicados somos todos nós.

© Todos os direitos reservados para Vida Económica, Editorial, SA

Nenhuma parte deste livro pode ser utilizada ou reproduzida, no todo ou em parte, por qualquer processo mecânico, fotográfico, eletrónico ou de gravação, ou qualquer outra forma copiada, para uso público ou privado (além do uso legal como breve citação em artigos e críticas) sem autorização prévia por escrito da Vida Económica – Editorial, S.A.

Veja no final deste livro como se registar na n/ editora e receber informação sobre lançamentos, iniciativas e promoções da Vida Económica – Editorial SA

ÍNDICE

1. Introdução.....	9
Definição	9
Metodologia da investigação operacional	12
Exemplo.....	14
Exercício.....	17
2. Programação Linear	19
O Modelo PL.....	19
Hipóteses e Propriedades Fundamentais	21
Noções sobre Conjuntos Convexos	22
O Método Simplex	23
Fundamentos Teóricos do Método Simplex.....	24
Representação Matricial.....	27
Algoritmo Simplex Primal	28
Solução Degenerada.....	34
Z Ilimitado.....	35
Conversão de Problemas e Otimização	35
Obtenção de uma Base Inicial.....	35
Inconsistência e Redundância	37
Solução pelo Método do Grande M.....	38

Solução pelo Método das Duas Fases.....	42
Exercício.....	44
Algoritmo Simplex para Variáveis Limitadas	49
Violação das Regras Canônicas.....	56
Dualidade.....	57
Algoritmo Simplex Dual	65
Cálculo Matricial das Soluções Primal e Dual	68
Análise de Pós-Otimização	73
Novas variáveis ou restrições.....	73
Análise de Sensibilidade.....	74
Análise de Variação	76
Exemplo Global.....	76
Programação Inteira	98
Exemplo.....	99
 3. Modelo de Transporte	 101
Conceitos gerais.....	101
Exemplo.....	102
Algoritmo Simplex de Transporte.....	103
 4. Modelo de Afetação.....	 109
Conceitos gerais.....	109
Exemplo.....	111
Outros Casos	116
Exercício	116
 5. Exercícios	 125

6. Soluções.....	135
7. Apêndice 1 – Álgebra Matricial	143
Representação matricial de equações	143
Operações com matrizes.....	145
Matriz transposta e matriz inversa	146
Resolução de equações com matrizes.....	149
8. Apêndice 2 – Formulário.....	151
Bibliografia.....	153

1. INTRODUÇÃO

DEFINIÇÃO

A Investigação Operacional (IO) tem como objeto o estudo e a investigação de operações e sistemas mais ou menos complexos, que combinam simultaneamente elementos humanos e materiais, procurando através de técnicas quantitativas apoiar a tomada de decisões aos níveis macro e microeconómico. O analista ou técnico de IO trabalha os dados, obtendo elementos quantitativos que fundamentam a tomada de decisões. No entanto, são os gestores (ou outros agentes de decisão) que definem os objetivos e que tomam as decisões.

Os problemas, que a IO procura ajudar a resolver, podem ser estruturados e não estruturados, e de nível estratégico, tático ou operacional. Os problemas estruturados resolvem-se de forma conhecida, estando tipificados e tendo mais a ver com elementos materiais.

Ao nível estratégico, temos as grandes decisões tomadas, por exemplo, pelo Conselho de Administração, envolvendo a estrutura como um todo, e todos os elementos materiais e humanos.

Ao nível tático, por exemplo nos departamentos de uma empresa, colocam-se as questões que envolvem mais o elemento humano do que o elemento material, existindo mais problemas não estruturados do que a nível operacional.

Ao nível operacional, por exemplo, dos funcionários, existe mais o controlo de tarefas e procedimentos, tendo mais a ver com elementos materiais do que humanos, predominando os problemas estruturados.

A gestão da produção é talvez o domínio em que as aplicações de programação linear (PL) são mais numerosas. Contudo, tanto em marketing (determinação de políticas de preços, de afetação da força de vendas e de distribuição) como nas finanças (escolha de programas de investimento), na logística (gestão dos transportes), ou nos recursos humanos (afetação de pessoal), a IO é um auxiliar precioso para a determinação eficaz de soluções que melhor satisfaçam os objetivos definidos inicialmente.

Leonid Kantorovitch, em 1939, foi um dos pioneiros da programação linear, tendo sido agraciado com o prémio Nobel da Economia em 1975. Com a 2ª Guerra Mundial, e nos anos subsequentes, deu-se um grande desenvolvimento da IO e da PL, devido ao facto de ser necessário investigar a melhor forma de tomar decisões no que diz respeito à gestão dos recursos logísticos e às operações das forças armadas. Assim, entre 1939 e 1951 são conseguidos desenvolvimentos teóricos no âmbito da Programação Linear (PL) por Von Neumann, Harold Kuhn e A. W. Tucker, é formulado o algoritmo Simplex por George B. Dantzig e aparecem formulações aplicadas da PL por T. C. Koopmans, A. Charnes e W. W. Cooper.

A partir de 1951, data do primeiro simpósio sobre PL, surgiram inúmeros trabalhos procurando completar as suas bases teóricas, melhorar a eficiência computacional dos seus algoritmos e aperfeiçoar o grau de realismo das suas formulações.

A programação linear faz parte de uma área da IO, denominada programação matemática, que também inclui a programação não linear.

O seu desenvolvimento foi inspirado por três tipos de problemas:

- **Transporte:** otimização de sistemas (programas) de distribuição, conhecendo-se os custos de transporte, a procura prevista para cada loja e as capacidades máximas de produção de cada fábrica.
- **Composição:** otimização da composição de uma dieta, minimizando o seu custo e satisfazendo os níveis mínimos de calorias e vitaminas necessários na alimentação.
- **Formação e produção:** otimização de programas de contratação e formação de pessoal, assim como de produção e armazenamento, de forma a minimizar os custos e a maximizar os lucros.

Utilizam-se técnicas de otimização matemática, nomeadamente, os algoritmos Simplex primal e dual.

A chamada **programação** inteira é também um problema de PL, onde se exige a integralidade das variáveis.

A **programação** não **linear** implica funções não lineares no equationamento do problema.

Outras técnicas de IO, que não estão no âmbito deste livro, são a **programação** dinâmica (processo de decisão multifásico), os modelos de otimização de redes (problemas de minimização de percursos, maximizações de fluxos, etc.), a meta-heurística (iterações de forma a ir melhorando sempre), a teoria dos jogos (análise da forma como se estabelecem as decisões em concorrência ou cooperação em diversos modelos de mercados), a análise de decisão (problemas e decisões em ambientes de muita incerteza), as cadeias de Markov (processos que evoluem ao longo do tempo de uma forma probabilística), a teoria das filas de espera (problema da espera para aceder a um serviço), a gestão de aprovisionamento (racionalização dos inventários), a

simulação (imitação do funcionamento de um sistema real através de modelos), a gestão de projetos (organização dos recursos e das atividades em equipas orientadas para atingir as metas predefinidas) e os modelos de previsão (métodos quantitativos e qualitativos).

A **programação linear** insere-se num cenário de certeza (nos cenários de incerteza ou de risco são utilizadas outras técnicas de IO), utilizando-se modelos lineares determinísticos de otimização, aplicados a problemas combinatórios com uma infinidade de soluções mas sujeitos a restrições, e resolvendo-se por recurso a técnicas algorítmicas.

METODOLOGIA DA INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

A metodologia da IO utiliza quatro recursos importantes:

1. A análise sistémica e a definição do problema como pertencente a um todo, sendo equacionadas as perspetivas de todos os setores da organização e recolhida toda a informação relevante. É feita uma descrição sumária da situação e a análise do contexto do problema e do objetivo a que se destina o estudo.
2. A interdisciplinaridade na visão do problema. Os fenómenos em estudo só são cabalmente compreendidos quando exista o contributo de todas as áreas de especialidade relevantes para o assunto em causa.
3. A utilização de modelos. As situações reais muito dificilmente são passíveis de experiências, logo recorre-se a modelos, que representam a realidade de forma mais simples, para a estudar e interpretar. Tipos de modelos:
 - *Ícónicos* (ex: fotos): representam fielmente a realidade, mas numa escala diferente.

- *Analógicos* (ex: gráficos): utilizam propriedades que representam, por analogia, outro tipo de propriedades, estados ou situações.
- *Simbólicos*: utilizam símbolos para representar a realidade. Exemplo destes são os modelos matemáticos, que são os mais abstratos, manipuláveis e adaptáveis. Nestes temos modelos lineares (relações do 1º grau entre as variáveis) e os não lineares (relações de outros graus). Os modelos podem ainda ser determinísticos/exatos ou aleatórios/estocásticos.

4. Recurso ao método científico:

- a. Formulação do problema: objetivos, variáveis controláveis e não controláveis, condicionantes, parâmetros impostos, restrições, e agentes de decisão.
- b. Construção do modelo matemático: função objetivo e relações entre as variáveis.
- c. Obtenção da solução: cálculo da solução ótima, utilizando o método Simplex.
- d. Testar o modelo e a solução: novas variáveis, erros cometidos, etc.
- e. Estabelecer o controlo da solução: análise de sensibilidades e análises paramétricas.
- f. Implementação da solução: problemas técnicos e humanos, etc.

O exemplo seguinte apresenta um problema simples, que permite a introdução ao tipo de raciocínios necessários para a formulação (equacionamento) dos problemas que podem ser resolvidos pela programação linear.

EXEMPLO

A empresa “Corticeira” produz e comercializa dois tipos de produtos: ladrilhos para o chão e rolhas de cortiça. Ambos os produtos utilizam na sua produção cortiça e mão de obra. Os lucros previstos são de 6 euros por m^2 vendido de ladrilhos, e de 5 euros por kg de rolhas. Para produzir 1 kg de rolhas são necessários 2 kg de cortiça em bruto, enquanto para produzir 1 m^2 de ladrilhos são necessários 3 kg de cortiça em bruto. A empresa recebe, diariamente, 450 kg de cortiça em bruto. A mão de obra é constituída por 10 operários que trabalham 8 h por dia. Um kg de rolhas leva meia hora a produzir, enquanto um m^2 de ladrilhos se produz em 15 minutos.

A administração da “Corticeira” pretende saber quais as quantidades a produzir diariamente de cada um dos produtos, de forma a maximizar o lucro.

Formulação ou o equacionar do problema:

1. Definição das variáveis, isto é, quais são os valores que é preciso calcular? Utiliza-se sempre a letra “Z” para o valor da função objetivo.

$$Z = \text{lucro total}$$

$$x_1 - \text{quantidade de ladrilhos (m}^2\text{)}$$

$$x_2 - \text{quantidade de rolhas (kg)}$$

2. Qual é o objetivo deste problema? Pretende-se maximizar o lucro. Então, a **função objetivo** diz-nos como calcular o lucro da empresa, multiplicando-se os lucros unitários previstos pelas quantidades a produzir de cada produto, assumindo que toda a produção será vendida:

$$\text{Máx } Z = 6x_1 + 5x_2$$

3. Quais as limitações ou restrições à produção? Procuram-se os totais de recursos disponíveis (termos independentes) e formulam-se as equações ou inequações que discriminam a forma como esses recursos são afetados à produção dos produtos, através dos respetivos coeficientes técnicos. Não esquecer a necessidade de, em cada restrição, utilizar a mesma unidade de medida.

- a. Qual é o total de matéria-prima recebida diariamente, e de que forma essa matéria-prima é distribuída pela produção dos produtos? Pode ser ultrapassado esse total? Se sim, então utilizaríamos o sinal $>$, se não, utiliza-se o $<$; caso se tenha de consumir exatamente toda a matéria-prima, então utilizaríamos o sinal de $=$.

$$3x_1 + 2x_2 \leq 450 \text{ (limitação da matéria-prima em kg)}$$

- b. Qual é o total de mão de obra, em horas, que a empresa tem disponível diariamente? Pode ser ultrapassado com os recursos existentes? De que forma são alocadas essas horas de trabalho à produção dos produtos?

$$0,25x_1 + 0,5x_2 \leq 80 \text{ (limitação da mão-de-obra em horas)}$$

- c. Estabelece-se a condição de não negatividade para todas as variáveis de decisão, isto é, não se aceitam valores negativos para as quantidades a produzir:

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ (limitação da não negatividade)}$$

Resolução gráfica:

Para todas as equações e/ou inequações, calculam-se os “zeros” das funções, porque é o método mais fácil de desenhar as retas e de as enquadrar corretamente no sistema de eixos ortogonais:

1ª restrição:

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 225$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 150$$

2ª restrição:

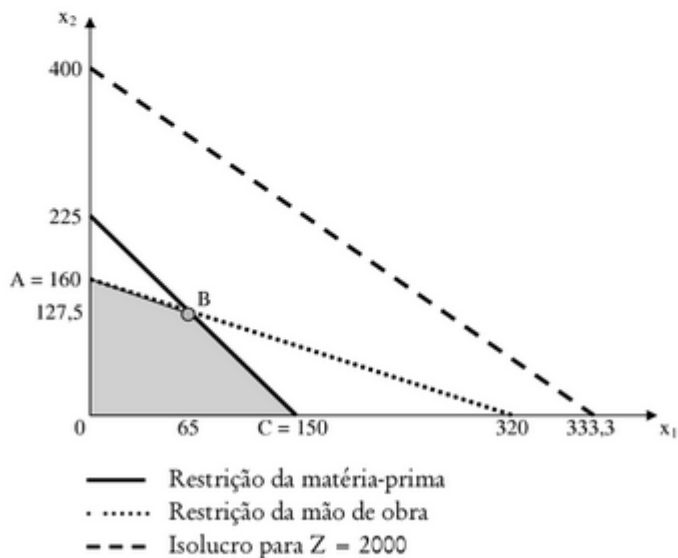
$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 160$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 320$$

Função objetivo (temos 2 graus de liberdade, logo é necessário atribuir um valor a Z):

$$x_1 = 0 \text{ e } Z = 2000 \Rightarrow x_2 = 400$$

$$x_2 = 0 \text{ e } Z = 2000 \Rightarrow x_1 = 333,3$$



O espaço de soluções possível consiste em todos os pontos do perímetro e do interior do quadrilátero $[ABCO]$. Verifica-se que, se deslocarmos a isolucro ($Z = 2000$) para baixo, esta encontrará o vértice $B = (65; 127,5)$, o qual corresponde ao ponto ótimo.

Resolução do sistema de equações (e não de inequações) das restrições de matéria-prima e de mão de obra:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 450 \\ 0,25x_1 + 0,5x_2 = 80 \end{cases} \begin{cases} x_1 = 65 \text{ m}^2 \text{ ladrilhos} \\ x_2 = 127,5 \text{ kg rolhas} \end{cases}$$

Então, o lucro máximo possível é de:

$$Z = 6 \times 65 + 5 \times 127,5 = 1027,50 \text{ €}$$

EXERCÍCIO

$$\text{Função objetivo: } \text{Máx } Z = 12x_1 + 10x_2 - 840$$

$$\text{Restrição 1: } 5x_1 + 8x_2 \leq 500$$

$$\text{Restrição 2: } 4x_1 + x_2 \leq 300$$

$$\text{Condição de não negatividade: } x_1, x_2 \geq 0$$

Para a resolução gráfica:

$$1^{\text{a}} \text{ restrição: } x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 62,5$$

$$1^{\text{a}} \text{ restrição: } x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 100$$

$$2^{\text{a}} \text{ restrição: } x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 300$$

$$2^{\text{a}} \text{ restrição: } x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 75$$

$$\text{Objetivo para } Z = 260 \quad x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 110$$

$$\text{Objetivo para } Z = 260 \quad x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 91,67$$

Resolução do sistema:

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 = 500 \\ 4x_1 + x_2 = 300 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x_1 + 8 \times (300 - 4x_1) = 500 \\ x_2 = 300 - 4x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} -27x_1 = -1900 \\ --- \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 70,37 \\ x_2 = 18,52 \end{cases}$$

$$Z = 12 \times 70,37 + 10 \times 18,52 - 840 = 189,64$$

2. PROGRAMAÇÃO LINEAR

O MODELO PL

Nas fórmulas do Modelo de Programação Linear assume-se que o índice i representa o número da linha e o índice j o número da coluna.

Na **forma canónica** básica do modelo de otimização temos:

- n variáveis principais ou de decisão x_j
- n coeficientes da função objetivo c_j
- m restrições

Os coeficientes e as constantes nas restrições e na função objetivo denominam-se **parâmetros do modelo de PL**:

Função objetivo (máx. ou mín.): $Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$

Satisfazendo as restrições: $r_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \begin{cases} \geq \\ = \\ \leq \end{cases} b_i$

Sendo $x_1, \dots, x_n \geq 0$ a restrição de não negatividade.

Z - valor da medida de desempenho global que queremos otimizar (lucro, custos, área utilizada, desperdício, etc.);

- x_j – nível de atividade j (para $j = 1, 2, \dots, n$), representando as variáveis de decisão;
- c_j – coeficientes da função objetivo que nos dão o incremento em Z , que resulta de um incremento unitário no nível de atividade j ;
- a_{ij} – coeficientes técnicos. Coeficiente da variável x_j na restrição de ordem i , representando a quantidade do recurso i consumido por unidade de atividade j ;
- b_i – termo independente da i ésima restrição, sendo a quantidade do recurso i que se encontra disponível para alocação nas atividades x_j (para $i = 1, 2, \dots, m$).

O sistema de restrições é constituído por m equações e n incógnitas, com $n \geq m$, o que implica $(n - m)$ graus de liberdade. Logo, é um sistema indeterminado, porque existem mais incógnitas do que equações, o que implica, em geral, mais do que uma solução.

Admitindo que as restrições são linearmente independentes, é possível exprimir M variáveis em função dos valores atribuídos às restantes $(N - M)$. Qualquer solução, obtida desta forma, que satisfaça o sistema diz-se uma **solução possível** do problema. O conjunto de todas as soluções possíveis designa-se por **domínio das soluções possíveis**. Se as variáveis restantes forem igualadas a zero, a solução designa-se como **solução básica possível** (ou admissível). Neste caso, as M variáveis designam-se por **variáveis básicas** e as restantes como **não básicas**. Se alguma variável básica for igual a zero, a solução básica diz-se **degenerada**, a qual levanta problemas de cálculo. A **solução ótima** é a que otimiza a função objetivo.

O Teorema Fundamental da Programação Linear diz que, se existe uma solução possível, então existe uma solução básica possível, e se existe uma solução ótima possível, então existe uma solução ótima básica possível.

Deste teorema conclui-se que não é necessário procurar a solução ótima entre todas as soluções possíveis (em geral, infinitas) do problema, mas apenas entre as soluções básicas possíveis. O número máximo destas soluções é dado pelas C_M^N .

Na PL é utilizado um método de passar de uma solução básica possível para outra (iteração), a que corresponda um melhor valor da função objetivo. Dispõe-se de um critério que permite saber quando se alcançou a solução ótima, sem necessitar de experimentar todas as soluções básicas possíveis. Assim, pretende-se passar de vértice para vértice do polítopo de soluções possíveis, melhorando sempre o valor da função objetivo; e aplicar um critério de otimalidade que permita saber se um vértice ótimo foi alcançado. Podemos encontrar soluções viáveis, possíveis ou admissíveis. Há também soluções inviáveis, impossíveis ou não admissíveis.

Teste de otimalidade: se uma solução num ponto extremo não tiver nenhuma solução em ponto extremo adjacente que seja melhor, então ela tem de ser uma solução ótima.

HIPÓTESES E PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS

Determinismo: não se consideram os cenários de incerteza ou risco, não existindo qualquer valor aleatório ou probabilístico. Conhecidos os parâmetros, eles determinam um conjunto de soluções para o problema.

Certeza: o valor atribuído a cada parâmetro de um modelo de PL é assumido como uma constante conhecida.

Linearidade: todas as relações são do 1º grau, o que implica as propriedades da aditividade, da proporcionalidade e da continuidade. Pressupõe-se que a contribuição marginal de cada atividade é constante.

Não negatividade: incógnitas (as intensidades de cada atividade) não negativas.

Divisibilidade (continuidade): as variáveis podem assumir valores não inteiros.

Aditividade: implícita na função objetivo e nas restrições. Pressupõe-se que se podem utilizar as capacidades máximas na produção e nos recursos, não havendo deseconomias internas, conseguindo-se a total eficiência dos recursos envolvidos. Toda a função num modelo de PL é a soma das contribuições individuais das respectivas atividades.

Proporcionalidade: implícita na função objetivo e nas restrições. Os coeficientes são constantes, pressupondo que não há economias de escala, sendo a produção a custos constantes ($P_{mg} = 1$) e a rendimentos constantes ($R_{mg} = 1$) à escala. Assim, a contribuição c_j de cada atividade para o valor Z da função objetivo é proporcional ao nível de atividade x_j conforme representado no termo $c_j x_j$.

NOÇÕES SOBRE CONJUNTOS CONVEXOS

Combinação linear convexa – seja um conjunto de pontos x_i e X .

Diz-se que X é uma combinação linear convexa dos pontos x_i se $X = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$

Em que λ_i são os coeficientes escalares que terão de assumir os seguintes valores:

$$\begin{cases} 0 \leq \lambda_i \leq 1 \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{cases}$$

Ou seja, dois pontos definem um segmento de reta e uma combinação linear convexa, que é igual ao segmento que os une.

Conjunto convexo – quando, para quaisquer dois pontos desse conjunto, toda a combinação **linear** por eles definida é constituída por pontos pertencentes ao conjunto.

Ponto extremo de um conjunto convexo – quando não se consegue expressá-lo ou defini-lo como combinação **linear** convexa de quaisquer outros dois pontos pertencentes ao conjunto, mas só a partir dele próprio (ex: vértices de um retângulo).

Aplicação das noções de conjuntos convexos à PL:

O conjunto de soluções possíveis de um qualquer problema de PL é um conjunto convexo com um número finito de pontos extremos, e a solução ótima encontrar-se-á, pelo menos, num dos seus pontos extremos.

O MÉTODO SIMPLEX

O método Simplex centra-se, exclusivamente, nas soluções de ponto extremo, que existirão se o conjunto de soluções for convexo. Consiste num **algoritmo iterativo** (procedimento sistemático para atingir uma solução e que repete uma série de passos) com a seguinte estrutura:

Inicialização (normalmente a origem) → teste de otimalidade →

→ se sim, pára;

→ se não, continua → iteração

Dada uma solução de ponto extremo, é muito mais rápido recolher informações sobre as soluções de pontos extremos adjacentes do que sobre todas as outras. O percurso faz-se ao longo dos lados da região das soluções viáveis.

Após a solução de ponto extremo ter sido identificada, o método Simplex examina cada um dos lados da região de soluções viáveis, identificando a taxa de crescimento de Z e escolhendo a que for maior.

Se num ponto extremo de solução não existir taxa de crescimento do Z , então encontramos a solução ótima.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS DO MÉTODO SIMPLEX

Hipóteses:

- É um sistema consistente, possível, não havendo incompatibilidade entre as restrições.
- As restrições são linearmente independentes, não havendo equações redundantes, nem repetição da informação.
- O número de restrições é menor que o número de variáveis. O sistema é indeterminado.
- Se alguma destas hipóteses não se verificar, então não há problema.

Teoremas:

- O conjunto de soluções admissíveis num problema de PL é um conjunto convexo com um número finito de pontos extremos.
- Uma função **linear**, cujo domínio é um conjunto convexo, assume o seu valor ótimo em pelo menos um ponto extremo.
- A uma solução básica admissível de um modelo de PL corresponde um ponto extremo do conjunto convexo das soluções admissíveis.

Condições:

- A restrição de não negatividade é obrigatória.
- Não é possível aplicar o método a um problema na forma geral, mas terá de se passar para a **forma padrão ou aumentada**, transformando-se o sistema de inequações e/ou equações, associadas às restrições, exclusivamente num sistema de equações. Recorre-se, para isso, às chamadas **variáveis auxiliares, de desvio ou de folga** (s_i), assim como a **variáveis artificiais** (a_i). Estes novos tipos de variáveis permitem obter uma matriz identidade no quadro Simplex, constituindo-se como a **base inicial**.
 - caso a inequação seja $\leq$, acrescenta-se uma variável auxiliar s_i com sinal positivo, o que nos leva a obter uma das colunas da matriz identidade (s_i terá o coeficiente 1 nesta linha e, nas restantes, o coeficiente 0);
 - caso a inequação seja $\geq$, acrescenta-se uma variável auxiliar s_i com sinal negativo e uma variável artificial a_i com sinal positivo; porque o coeficiente negativo da variável auxiliar não permite ter um vetor da matriz identidade, logo precisamos da variável artificial para o efeito (a_i terá o coeficiente 1 nesta linha e, nas restantes, o coeficiente 0);
 - caso seja uma equação, acrescenta-se uma variável artificial com sinal positivo, de modo a conseguir ter mais um vetor da matriz identidade.

Exemplo da transformação na forma padrão:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Máx. } Z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 & \text{Máx. } Z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 0s_1 + 0s_2 - Ma_1 - Ma_2 \\
 4x_1 + 2x_2 \leq 80 & 4x_1 + 2x_2 + s_1 = 80 \\
 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 120 & 2x_1 + 5x_2 + x_3 + a_1 = 120 \\
 3x_1 + 0,5x_3 \geq 20 & 3x_1 + 0,5x_3 - s_2 + a_2 = 20 \\
 x_1, x_2, x_3 \geq 0 & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, a_1, a_2 \geq 0
 \end{array}$$

Começa-se pelas restrições:

- na primeira ($\leq$) tem de se acrescentar uma variável de folga s_1 . O número do índice deve-se ao facto de ser a primeira variável auxiliar acrescentada;
- na segunda ($=$) tem de se acrescentar uma variável artificial a_1 ;
- na terceira ($\geq$) subtrai-se a variável auxiliar s_2 e soma-se a variável artificial a_2 .

Segue-se a função objetivo:

- as **variáveis auxiliares** têm significado económico (num problema de produção, correspondem a quantidades de recursos não utilizadas), mas não têm peso no cálculo do valor de Z , que queremos otimizar. Por isso, são sempre acrescentadas com o coeficiente zero.
- as **variáveis artificiais** não têm qualquer significado económico, logo são acrescentadas com o coeficiente **M** (número infinitamente grande), de modo a poderem ser retiradas aquando da aplicação do algoritmo Simplex. O sinal de **M** deverá ser contrário ao da otimização: positivo para minimizações e negativo para maximizações.

Uma solução básica tem as seguintes propriedades:

- Cada variável ou é básica ou não básica.
- O número de variáveis básicas é igual ao número de restrições funcionais (agora equações). Portanto, o número de variáveis não básicas é igual ao número total de variáveis menos o número de restrições funcionais.
- As variáveis não básicas têm o valor zero.
- Os valores das básicas são obtidos com a solução simultânea das equações. O conjunto das variáveis básicas é chamado a **Base**.
- Se as variáveis básicas satisfizerem a restrição de não negatividade, a solução básica é uma solução básica viável.

REPRESENTAÇÃO MATRICIAL

$$X - \text{vetor das variáveis } x_i \text{ do modelo} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$C - \text{vetor dos coeficientes } c_j \text{ das variáveis da função objetivo} = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_j \quad \dots \quad c_m]$$

$$A - \text{matriz dos coeficientes } a_{ij} \text{ das restrições} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

$$B - \text{vetor dos termos independentes } b_i \text{ das restrições} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Função objetivo: Máx $Z = C X$

Restrições: $A X = B$

Condição de não negatividade: $X \geq 0$

ALGORITMO SIMPLEX PRIMAL

O algoritmo Simplex primal permite solucionar problemas de programação linear utilizando várias técnicas de operações com matrizes implícitas no chamado Quadro Simplex. Para construir este quadro é preciso passar da formulação inicial do problema (forma canônica) para a chamada forma aumentada (forma padrão), seguindo as regras apontadas atrás.

Exemplo de maximização:

$$\text{Máx } Z = 3x_1 + 4x_2$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 80$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 120$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Forma aumentada:

$$Z - 3x_1 - 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 + s_1 = 80$$

$$2x_1 + 5x_2 + s_2 = 120$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

Retirada dos coeficientes para construir o quadro inicial Simplex:

$$Z - 3x_1 - 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 + 1s_1 + 0s_2 = 80$$

$$2x_1 + 5x_2 + 0s_1 + 1s_2 = 120$$

A **base inicial** (B) é sempre constituída pelas variáveis que determinam uma matriz identidade no quadro Simplex inicial. Logo são, neste caso, as variáveis de folga s_1 e s_2 .

$$B = \{s_1; s_2\} \quad b_1 = 80 \quad ; \quad b_2 = 120$$

A primeira linha do quadro chama-se **linha zero**, porque corresponde aos coeficientes da função objetivo. A partir da segunda linha do quadro, a que chamamos linha 1, temos as restrições do problema, que estarão então nas linhas 1 e 2 deste exemplo.

Como estão fora da base, as variáveis $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$, sendo que a coluna do lado direito do quadro nos dá a solução para as variáveis básicas inicial:

$$(x_1, x_2, s_1, s_2) = (0, 0, 80, 120), \text{ resultando em } Z = 0$$

Quadro 1 - inicial

	Base	x_1	x_2	s_1	s_2	b
Linha 0	Z	-3	-4	0	0	0
Linha 1	s_1	4	2	1	0	80
Linha 2	s_2	2	5	0	1	120

O algoritmo Simplex primal utiliza 3 critérios nas iterações:

- 1) **Otimidade** – a solução só é ótima se na linha zero todos os valores forem positivos ou nulos;
- 2) **Entrada para a base** – escolhe-se a variável que apresente o valor mais baixo negativo na linha zero;
- 3) **Saída da base** – na coluna da variável que entra faz-se o teste da razão mínima, só com os coeficientes positivos como denominadores. Isto é, dividem-se os valores da coluna **b** pelos da coluna da variável que vai entrar para a Base. Escolhe-se o menor valor desses rácios, determinando a variável que sai da Base. Garante-se, assim, uma iteração admissível para a solução básica seguinte, porque determinamos qual a variável que se anula em primeiro lugar. Não se poderá escolher um valor superior a esse mínimo, pois isso implicaria violar a restrição de não negatividade.

Caso haja empates, tanto no critério de entrada como no de saída, a escolha será arbitrária.

O valor **pivô** é o que se encontra na célula de interseção entre a coluna da variável que entra e a linha da variável que sai.

Na coluna da variável que entra terá que se reconstruir um dos vetores da matriz identidade, de modo a que as variáveis que estão na Base sejam sempre aquelas às quais corresponde tal matriz. Para isso, teremos que ter o valor '1' na célula pivô e '0' nas restantes células da coluna. O método que se utiliza é chamado de **condensação ou eliminação Gaussiana**, o que implica fazer operações entre as linhas de modo a obter os novos valores para a coluna da variável que entrou para a base.

No exemplo:

Critério de otimalidade: há 2 valores negativos na linha zero, logo a solução inicial não é ótima. Iniciamos a **iteração 1**:

Critério de entrada: o valor mais baixo é (-4), logo a variável que vai entrar para a Base será x_2 . Esta será a variável que maior contributo pode dar para aumentar Z.

Critério de saída: $\min \{80/2 = 40 ; 120/5 = 24\} = 24 \Rightarrow$ sai $s_2 \Rightarrow$ pivô = 5

Condensação gaussiana:

- Dividir a linha 2 (L_2) por 5, de modo a obter 1 na célula pivô $\equiv L_2 / 5 = L_2^*$
- Multiplicar a nova linha 2 por 4 e somar à linha 0, para obter $0 \equiv 4L_2^* + L_0$
- Multiplicar a nova linha 2 por -2 e somar à linha 1, para obter $0 \equiv -2L_2^* + L_1$

IT1	Base	x_1	x_2	s_1	s_2	b
$4L_2^* + L_0$	Z	-3	-4	0	0	0
$-2L_2^* + L_1$	s_1	4	2	1	0	80 $80/2 = 40$
$L_2 / 5 = L_2^*$	s_2	2	5	0	1	120 $120/5 = 24$

Quadro 2

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	b
Z	-1,4	0	0	0,8	96
s_1	3,2	0	1	-0,4	32
x_2	0,4	1	0	0,2	24

Interpretações de alguns valores no quadro Simplex:

- x_2 entrou para a base e vale, neste momento, 24 unidades, e como o seu lucro unitário é $c_2 = 4$, então o lucro Z sobe $4 \times 24 = 96$.

- Temos 0,8 na linha zero em s_2 , o que significa que, se tivéssemos mais uma unidade do recurso B, então haveria uma diminuição de uma unidade na folga s_2 , a qual provocaria os seguintes efeitos:
 - Z (lucro total) aumentaria 0,8, passando para 96,8;
 - A folga do recurso A (s_1) diminuiria 0,4, passando o total do recurso A não utilizado para 31,6 unidades;
 - e o produto x_2 aumentaria 0,2, passando para 24,2 unidades.
- Temos -1,4 na linha zero em x_1 , o que significa que produzir mais uma unidade de x_1 teria os seguintes efeitos:
 - Z aumentaria 1,4, passando para 97,4;
 - s_1 diminuiria 3,2, passando para 28,8 unidades em reserva, logo tendo-se utilizado mais 3,2 unidades do recurso A;
 - e o produto x_2 diminuiria 0,4, passando a produzir-se 23,6 unidades.

A regra é que, sempre que uma variável tem um incremento positivo, os coeficientes abaixo dela deverão ser interpretados pelo seu simétrico nos efeitos. Quando seja uma variação negativa, então os coeficientes deverão ser interpretados pelo valor e sinal que apresentam.

Critério da otimalidade: todos os coeficientes na linha 0 são ≥ 0 ? Não. Então temos de continuar as iterações.

Iteração 2:

Entra x_1 (-1,4) e sai s_1 [$\min\{24/0,4 = 60 ; 32/3,2 = 10\} = 10$].
Pivô = 3,2

Dividir a linha 1 por 3,2 para obter $1 \equiv L_1 / 3,2 = L_1^*$

Multiplicar a nova linha 1 por 1,4 e somar à linha 0, para obter $0 \equiv 1,4L_1^* + L_0$.

Multiplicar a nova linha 1 por -0,4 e somar à linha 2, para obter $0 \equiv -0,4L_1^* + L_2$.

IT2	Base	x_1	x_2	s_1	s_2	b	
$4L_1^* + L_0$	Z	-1,4	0	0	0,8	96	
$L_1 / 3,2 = L_1^*$	s_1	3,2	0	1	0,4	32	$32/3,2 = 10$
$-0,4L_1^* + L_2$	s_2	0,4	1	0	0,2	24	$24/0,4 = 60$

Quadro 3

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	b
Z	0	0	7/16	5/8	110
x_1	1	0	5/16	-1/8	10
x_2	0	1	-1/8	1/4	20

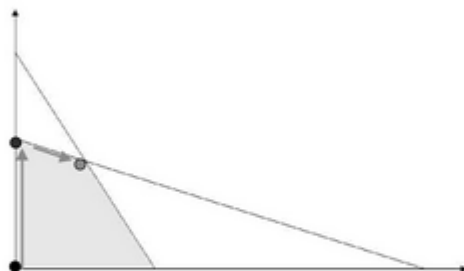
Crítério da otimalidade: todos os coeficientes na linha 0 são ≥ 0 ? Sim. Então atingimos a solução ótima do problema $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (10, 20, 0, 0)$, resultando em $Z = 110$.

A solução ótima é única porque os coeficientes são positivos nas variáveis não básicas. Caso contrário, a solução seria ótima múltipla ou alternativa.

Os coeficientes das variáveis básicas na linha zero são sempre nulos nos quadros Simplex.

As variáveis auxiliares s_1 e s_2 são não básicas, logo a totalidade dos recursos foi utilizada.

Representação gráfica das iterações efetuadas:



Iniciamos as iterações no ponto $(0,0)$, com $Z = 0$.

Depois passamos para o ponto $(0, 24)$, com $Z = 96$.

Terminamos com o ponto $(10, 20)$, com $Z = 110$.

SOLUÇÃO DEGENERADA

Acontece o problema da degenerescência quando existe uma variável básica $= 0$.

Pode surgir na solução básica inicial, no 1.º quadro do Simplex. Também pode acontecer numa situação de empate no critério de saída, visto a escolha ser arbitrária, e todos se anulam, logo ficando pelo menos um vetor na base cuja variável é nula. A solução será básica viável degenerada.

Consequências da degenerescência:

- O valor de Z pode não aumentar.
- O valor das variáveis pode não se alterar.
- Entrada em ciclo: repetição indefinida de uma determinada sequência de bases sem nunca se chegar à solução básica possível e ótima.

Z ILIMITADO

Se todos os coeficientes da coluna pivô (excluindo a linha 0) são negativos ou zero, então não há nenhuma variável para sair. O valor de Z crescerá indefinidamente. O modelo deverá estar mal formulado, por erro nas restrições ou omissão de restrições relevantes.

CONVERSÃO DE PROBLEMAS E OTIMIZAÇÃO

O método Simplex só se aplica a maximizações. Assim, têm de se converter os problemas de minimização.

$$\text{Mín } Z = Z_0$$

$$Z_0 \leq Z \Leftrightarrow Z_0 - Z \leq 0 \Leftrightarrow (-Z_0) - (-Z) \geq 0 \Leftrightarrow -Z_0 \geq -Z$$

$$\text{Logo: } -Z_0 \text{ é um máximo de } -Z \Leftrightarrow Z_0 = \text{Mín } Z = -\text{Máx } (-Z)$$

$$\text{Máx } Z = Z_0$$

$$Z_0 \geq Z \Leftrightarrow Z_0 - Z \geq 0 \Leftrightarrow (-Z_0) - (-Z) \leq 0 \Leftrightarrow -Z_0 \leq -Z$$

$$\text{Logo: } -Z_0 \text{ é um mínimo de } -Z \Leftrightarrow Z_0 = \text{Máx } Z = -\text{Mín } (-Z)$$

Então, para fazer a conversão de um problema de minimização em maximização, basta multiplicarmos a função objetivo por (-1).

Atenção que agora, no Simplex, o valor de Z é o simétrico do verdadeiro.

OBTENÇÃO DE UMA BASE INICIAL

Num problema com m restrições, teremos de ter m variáveis básicas iniciais, isto é, cada restrição terá de ter uma variável cujo coeficiente seja '1' nessa restrição e '0' para as demais. A utilização de

variáveis de folga no caso $\leq$ garante esta regra. No caso de a restrição ser de $\geq$, então precisamos de utilizar uma variável artificial, visto que a de excesso terá coeficiente '-1'. No caso da igualdade numa restrição, também se usa a variável artificial. Estas variáveis artificiais não têm significado económico e deverão ser eliminadas da solução ótima. Se tal não for possível, e ficarem variáveis artificiais positivas na solução ótima, então concluir-se-á que a solução é impossível.

Se todas as restrições forem do tipo $\leq$, então a passagem à forma padrão leva-nos a obter a matriz identidade com os coeficientes das variáveis de desvio.

Com outro tipo de restrições, $\geq$ e/ou $=$, tem de se recorrer às variáveis artificiais como instrumento para obter a Base inicial. O coeficiente **M** atribuído às variáveis artificiais, acrescentadas à função objetivo, deve ser anulado para se poder iniciar o método Simplex. Assim, por eliminação gaussiana, deve-se converter os **M** em zeros, só nas colunas dessas variáveis artificiais. O método das duas fases, inclusive, trata separadamente destas questões: anulam-se os **M** – as variáveis artificiais – de modo a chegar-se a uma Base inicial e, depois, resolve-se o problema real, sem que se usem os **M**.

Se o problema original não tiver nenhuma solução viável, então a solução final pelos 2 métodos (grande número ou duas fases) tem pelo menos uma variável artificial maior que zero.

Exemplo

Forma geral: $\text{Máx } Z = 3x_1 + 4x_2$

Restrições: $4x_1 + 2x_2 \leq 80$

$2x_1 + 5x_2 \geq 120$

$x_1 + 3x_2 = 100$

$x_1, x_2 \geq 0$

$$\text{Forma padrão ou aumentada: } \begin{aligned} \text{Máx } Z &= 3x_1 + 4x_2 + 0s_1 + \\ &+ 0s_2 - Ma_1 - Ma_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Restrições: } \quad &4x_1 + 2x_2 + s_1 = 80 \\ &2x_1 + 5x_2 - s_2 + a_1 = 120 \\ &x_1 + 3x_2 + a_2 = 100 \\ &x_1, x_2, x_3, s_1, a_1, a_2 \geq 0 \end{aligned}$$

O que permite a Base $B = [s_1 \ a_1 \ a_2] = [80, 120, 100]$

As variáveis básicas assumem os valores dos termos independentes das restrições. M é um valor infinito, que penaliza as variáveis artificiais positiva ou negativamente, conforme a otimização seja, respetivamente, de minimização ou maximização. Se uma variável artificial deixar de ser básica, nunca mais o voltará a ser. O problema é se não se consegue que ela deixe a Base. Assim, nem toda a solução na forma aumentada é solução da forma geral, visto as variáveis artificiais não terem significado económico. Só quando estas são nulas, teremos uma solução da forma geral.

INCONSISTÊNCIA E REDUNDÂNCIA

No fim da resolução pela forma aumentada, saber se a solução é a da forma geral depende:

- das variáveis artificiais serem todas não básicas, logo a solução existe e é a básica ótima admissível da forma geral ou da padrão;
- não conseguindo isso, e se existir no fim pelo menos uma variável artificial básica, então poderá ser ≥ 0 :

- se for nula, então a solução é degenerada. Podemos estar em presença de uma **solução redundante** se a linha do quadro Simplex correspondente a essa variável for uma linha de zeros. Há pois repetição de informação;
- se for positiva, então obtém-se uma solução sem qualquer significado, logo não é solução básica ótima admissível da forma geral. Pode não existir essa solução, existindo **inconsistência** se a linha correspondente a essa variável artificial for uma linha de zeros. Se não o for, então poderá existir solução, mas não é admissível, visto não cumprir a restrição de não negatividade.

SOLUÇÃO PELO MÉTODO DO GRANDE M

Exemplo

Forma geral: $\text{Mín } Z = -x_1 - 1,5x_2$
 $0,5x_1 + x_2 \leq 7,5$
 $2x_1 + x_2 \geq 15$
 $x_1, x_2 \geq 0$

Forma aumentada: $\text{Mín } Z = -x_1 - 1,5x_2 + 0s_1 + 0s_2 + Ma_1$
 $0,5x_1 + x_2 + s_1 = 7,5$
 $2x_1 + x_2 - s_2 + a_1 = 15$
 $x_1, x_2, s_1, s_2, a_1 \geq 0$

Determinação dos valores para a linha zero do quadro Simplex:

$$\text{Mín } Z = -x_1 - 1,5x_2 + 0s_1 + 0s_2 + Ma_1$$

$$\text{Mín } Z = -\text{Máx } (-Z)$$

$$\text{Máx } (-Z) = x_1 + 1,5x_2 - 0s_1 - 0s_2 - Ma_1$$

$$-Z - x_1 - 1,5x_2 + 0s_1 + 0s_2 + Ma_1 = 0$$

Quadro 1 - inicial A

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	b
-Z	-1	-1,5	0	0	M	0
s_1	0,5	1	1	0	0	7,5
a_1	2	1	0	-1	1	15

Começa-se por anular o coeficiente **M** das variáveis artificiais na linha zero, que deverá ser nulo para que aquelas possam ser usadas, inicialmente, como variáveis básicas.

Multiplicar a linha 2 por $(-M)$ e somar à linha 0 $= -ML_2 + L_0$

Quadro 1 - inicial B

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	b
-Z	$-1 - 2M$	$-1,5 - M$	0	M	0	$-15M$
s_1	0,5	1	1	0	0	7,5
a_1	2	1	0	-1	1	15

Critério de otimalidade: a solução não é ótima pois temos valores negativos na linha zero.

Iteração 1:

Critério de entrada: o valor negativo mais baixo é $(-1 - 2M)$, logo x_1 vai entrar para a Base.

Critério de saída: divide-se os b_i por a_{1i} , com estes positivos, e escolhe-se o menor valor dos raios.

$\text{Mín} \{7,5/0,5 = 15; 15/2 = 7,5\} = 7,5 \Rightarrow$ Sai a_1 e o valor pivô = 2.

Condensação Gaussiana: $L_2 / 2 = L_2^*$; $-0,5 L_2^* + L_1$; $(1 + 2M) L_2^* + L_0$

Quadro 2

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	b
-Z	0	-1	0	-0,5	$0,5 + M$	7,5
s_1	0	0,75	1	0,25	-0,25	3,75
x_1	1	0,5	0	-0,5	0,5	7,5

Critério de otimalidade: a solução continua a não ser ótima, pois temos ainda valores negativos na linha zero.

Iteração 2:

Critério de entrada: o valor negativo mais baixo é -1, logo x_2 vai entrar para a Base.

Critério de saída: $\text{Mín} \{3,75/0,75 = 5; 7,5/0,5 = 15\} = 5 \Rightarrow$ Sai s_1 e o valor pivô = 0,75

Condensação Gaussiana: $L_1 / 0,75 = L_1^*$; $L_2^* + L_0$; $-0,5 L_1^* + L_2$

Quadro 3

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	b
-Z	0	0	4/3	-1/6	1/6 + M	12,5
x_2	0	1	4/3	1/3	-1/3	5
x_1	1	0	-2/3	-2/3	2/3	5

Critério de otimalidade: a solução continua a não ser ótima, pois temos ainda valores negativos na linha zero.

Iteração 3:

Critério de entrada: o valor negativo mais baixo é -1/6, logo s_2 vai entrar para a Base.

Critério de saída: $\text{Mín} \{5/0,33 = 15\} = 15 \Rightarrow$ Sai x_2 e valor pivô = 1/3

Condensação Gaussiana: $L_1 / 1/3 = L^*_1$; $1/6 L^*_1 + L_0$; $2/3 L^*_1 + L_2$

Quadro 4

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	b
-Z	0	0,5	2	0	M	15
s_2	0	3	4	1	-1	15
x_1	1	2	2	0	0	15

Critério de otimalidade: todos os coeficientes da linha zero são agora positivos ou nulos, pelo que a solução ótima foi alcançada.

As variáveis básicas são $x_1 = 15$ e $s_2 = 15$

As variáveis não básicas são sempre nulas, logo x_2 e $s_1 = 0$

O valor da função objetivo será o simétrico: $Z = -15$

Prefácio

A Programação Linear numa abordagem pedagógica mais próxima das necessidades dos alunos.

O uso de programas informáticos, para a resolução de problemas com muitas variáveis, é imprescindível. Contudo, os utilizadores têm de compreender o que está em causa, como modelizar os problemas, como interpretar os resultados, que análises se podem fazer depois de atingirmos uma otimização.

A Programação Linear permite resolver problemas nas áreas da Gestão de Produção, da Logística, das Finanças, do Marketing, etc.

Este livro, com muitos exemplos e exercícios, ajuda a formatar os raciocínios que estão na base do equacionamento matemático de problemas dos mais variados tipos, facilitando e conferindo uma base científica à tomada de decisões.

Público Alvo: Para alunos e professores de Investigação Operacional, e para gestores e empresários com necessidade de resolver problemas em que a Programação Linear seja aplicável.

Sumário

Estrutura da obra:

- Introdução
- Programação Linear
- Modelo de Transporte
- Modelo de Afetação
- Exercícios
- Soluções
- Apêndice 1 – Álgebra Matricial
- Apêndice 2 – Formulário