23. Mostre que se α for zero ou um inteiro positivo par $2n$, a solução em série y_1 se reduz a um polinômio de grau $2n$ contendo apenas potências pares de x. Encontre os polinômios correspondentes a $\alpha = 0, 2$ e 4. Mostre que, se α for um inteiro positivo ímpar $2n + 1$, então a solução em série y_2 se reduz a um polinômio de grau $2n + 1$ contendo apenas potências ímpares de x. Encontre os polinômios correspondentes a $\alpha = 1$, 3 e 5.

24. O polinômio de Legendre $P_n(x)$ é definido como a solução polinomial da equação de Legendre com $\alpha = n$ que satisfaz, também, a condição $P_n(1) = 1$.
    (a) Usando os resultados do Problema 23, encontre os polinômios de Legendre $P_0(x), ..., P_5(x)$.
    (b) Faça os gráficos de $P_0(x), ..., P_5(x)$ para $-1 \le x \le 1$.
    (c) Encontre os zeros de $P_0(x), ..., P_5(x)$.

25. Pode-se mostrar que a fórmula geral para $P_n(x)$ é

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k},$$

onde $\lfloor n/2 \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a $n/2$. Observando a forma de $P_n(x)$ para n par e ímpar, mostre que $P_n(-1) = (-1)^n$.

26. Os polinômios de Legendre têm um papel importante em física matemática. Por exemplo, ao se resolver a equação de Laplace (equação do potencial) em coordenadas esféricas, encontramos a equação

$$\frac{d^2F(\varphi)}{d\varphi^2} + \cot\varphi \frac{dF(\varphi)}{d\varphi} + n(n+1)F(\varphi) = 0, \qquad 0 < \varphi < \pi,$$

onde n é um inteiro positivo. Mostre que a mudança de variável $x = \cos\varphi$ leva a uma equação de Legendre com $\alpha = n$ para $y = f(x) = F(\arccos x)$.

27. Mostre que, para $n = 0, 1, 2, 3$, o polinômio de Legendre correspondente é dado por

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n.$$

Esta fórmula, conhecida como fórmula de Rodrigues,[9] é válida para todos os inteiros positivos n.

28. Mostre que a equação de Legendre também pode ser escrita como

$$[(1 - x^2)y']' = -\alpha(\alpha + 1)y.$$

Segue, então, que

$$[(1 - x^2)P_n'(x)]' = -n(n+1)P_n(x) \quad \text{e} \quad [(1 - x^2)P_m'(x)]' = -m(m+1)P_m(x).$$

Multiplicando a primeira equação por $P_m(x)$, a segunda por $P_n(x)$, integrando por partes e depois subtraindo uma equação da outra, mostre que

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0 \quad \text{se} \quad n \neq m.$$

Esta propriedade dos polinômios de Legendre é conhecida como a propriedade de ortogonalidade. Se $m = n$, pode-se mostrar que o valor desta integral é $2/(2n + 1)$.

29. Dado um polinômio f de grau n, é possível expressar f como uma combinação linear de $P_0, P_1, P_2, ..., P_n$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x).$$

Usando o resultado do Problema 28, mostre que

$$a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)\,dx.$$

5.4 Equações de Euler; Pontos Singulares Regulares

Nesta seção vamos começar considerando como resolver equações da forma

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \tag{1}$$

[9] Olinde Rodrigues (1794–1851) publicou este resultado como parte de sua tese de doutorado na *École Normale* em Paris em 1816. Mais tarde tornou-se banqueiro e reformador social.

na vizinhança de um ponto singular x_0. Lembre-se de que se as funções P, Q e R são polinômios sem fatores comuns, os pontos singulares da Eq. (1) são os pontos nos quais $P(x) = 0$.

Equações de Euler. Uma equação diferencial relativamente simples que tem um ponto singular é a **equação de Euler**[10]

$$L[y] = x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0, \tag{2}$$

onde α e beta são constantes reais. Neste caso $P(x) = x^2$, de modo que $x = 0$ é o único ponto singular regular da Eq. (2); todos os outros são pontos ordinários. Por conveniência, vamos considerar, primeiro, o intervalo $x > 0$; mais tarde estenderemos nossos resultados para o intervalo $x < 0$.

Note que $(x^r)' = rx^{r-1}$ e $(x^r)'' = r(r-1)x^{r-2}$. Logo, se supusermos que a Eq. (2) tem uma solução da forma

$$y = x^r, \tag{3}$$

obtemos

$$\begin{aligned} L[x^r] &= x^2(x^r)'' + \alpha x(x^r)' + \beta x^r \\ &= x^r[r(r-1) + \alpha r + \beta]. \end{aligned} \tag{4}$$

Se r é raiz da equação de segundo grau

$$F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta = 0, \tag{5}$$

então $L[x^r]$ é zero e $y = x^r$ é uma solução da Eq. (2). As raízes da Eq. (5) são

$$r_1, r_2 = \frac{-(\alpha - 1) \pm \sqrt{(\alpha-1)^2 - 4\beta}}{2}, \tag{6}$$

e $F(r) = (r - r_1)(r - r_2)$. Como para equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes, é necessário considerar separadamente os casos nos quais as raízes são reais e diferentes, reais e iguais, e complexas conjugadas. De fato, a discussão inteira sobre equações de Euler é semelhante ao tratamento de equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes no Capítulo 3, com e^{rt} substituído por x^r.

Raízes Reais e Distintas. Se $F(r) = 0$ tem raízes reais r_1 e r_2 com $r_1 \neq r_2$, então $y_1(x) = x^{r_1}$ e $y_2(x) = x^{r_2}$ são soluções da Eq. (2). Como

$$W(x^{r_1}, x^{r_2}) = (r_2 - r_1)x^{r_1+r_2-1}$$

não se anula se $r_1 \neq r_2$ e $x > 0$, segue que a solução geral da Eq. (2) é

$$y = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2}, \qquad x > 0. \tag{7}$$

Note que, se r não for racional, então x^r é definida por $x^r = e^{r\ln x}$.

EXEMPLO 1

Resolva

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0, \qquad x > 0. \tag{8}$$

Substituindo $y = x^r$ na Eq. (8), obtemos

$$x^r[2r(r-1) + 3r - 1] = x^r(2r^2 + r - 1) = x^r(2r-1)(r+1) = 0.$$

Logo $r_1 = \frac{1}{2}$ e $r_2 = -1$, de modo que a solução geral da Eq. (8) é

$$y = c_1x^{1/2} + c_2x^{-1}, \qquad x > 0. \tag{9}$$

Raízes Iguais. Se as raízes r_1 e r_2 são iguais, obtemos apenas uma solução $y_1(x) = x^{r_1}$ da forma proposta. Pode-se obter uma segunda solução pelo método de redução de ordem, mas vamos considerar, para nossa discussão futura, um método alternativo. Como $r_1 = r_2$, $F(r) = (r - r_1)^2$. Assim, nesse caso, além de $F(r_1) =$

[10]Esta equação é chamada algumas vezes de equação de Cauchy-Euler ou equação equidimensional. Ela foi estudada por Euler em cerca de 1740, mas sua solução já era conhecida por Johann Bernoulli antes de 1700.

0, temos, também, $F'(r_1) = 0$. Isso sugere a diferenciação da Eq. (4) em relação a r e, depois, a atribuição r igual a r_1. Diferenciando a Eq. (4) em relação a r, temos

$$\frac{\partial}{\partial r}L[x^r] = \frac{\partial}{\partial r}[x^r F(r)].$$

Substituindo $F(r)$, trocando as ordens de integração em relação a x e em relação a r, e notando que $\partial(x^r)/\partial r = x^r \ln r$, obtemos

$$L[x^r \ln x] = (r - r_1)^2 x^r \ln x + 2(r - r_1)x^r. \tag{10}$$

A expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (10) é 0 para $r = r_1$; portanto,

$$y_2(x) = x^{r_1} \ln x, \qquad x > 0 \tag{11}$$

é uma segunda solução da Eq. (2). Calculando o wronskiano, vemos que

$$W(x^{r_1}, x^{r_1} \ln x) = x^{2r_1 - 1}.$$

Logo, x^{r_1} e $x^{r_1} \ln x$ formam um conjunto fundamental de soluções para $x > 0$, e a solução geral da Eq. (2) é

$$y = (c_1 + c_2 \ln x)x^{r_1}, \qquad x > 0. \tag{12}$$

EXEMPLO 2

Resolva

$$x^2y'' + 5xy' + 4y = 0, \qquad x > 0. \tag{13}$$

Substituindo $y = x^r$ na Eq. (13), obtemos

$$x^r[r(r-1) + 5r + 4] = x^r(r^2 + 4r + 4) = 0.$$

Portanto, $r_1 = r_2 = -2$ e

$$y = x^{-2}(c_1 + c_2 \ln x), \qquad x > 0 \tag{14}$$

é a solução geral da Eq. (13).

Raízes Complexas. Finalmente, suponha que as raízes r_1 e r_2 são complexas conjugadas, digamos, $r_1 = \lambda + i\mu$ e $r_2 = \lambda - i\mu$, com $\mu \neq 0$. Precisamos explicar agora o significado de x^r quando r é complexo. Lembrando que

$$x^r = e^{r \ln x} \tag{15}$$

quando $x > 0$ e r é real, podemos usar essa equação para *definir* x^r quando r é complexo. Então, usando a fórmula de Euler para $e^{i\mu \ln x}$, obtemos

$$\begin{aligned} x^{\lambda + i\mu} &= e^{(\lambda + i\mu)\ln x} = e^{\lambda \ln x} e^{i\mu \ln x} = x^\lambda e^{i\mu \ln x} \\ &= x^\lambda[\cos(\mu \ln x) + i \operatorname{sen}(\mu \ln x)], \qquad x > 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Com essa definição de x^r para valores complexos de r, pode-se verificar que as regras usuais da álgebra e o cálculo diferencial continuam válidos, logo x^{r_1} e x^{r_2} são, de fato, soluções da Eq. (2). A solução geral da Eq. (2) é

$$y = c_1 x^{\lambda + i\mu} + c_2 x^{\lambda - i\mu}. \tag{17}$$

A desvantagem dessa expressão é que as funções $x^{\lambda + i\mu}$ e $x^{\lambda - i\mu}$ tomam valores complexos. Lembre-se de que tivemos uma situação semelhante no estudo de equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes quando as raízes eram complexas. Da mesma forma que fizemos anteriormente, podemos observar que as partes real e imaginária de $x^{\lambda + i\mu}$, a saber,

$$x^\lambda \cos(\mu \ln x) \quad \text{e} \quad x^\lambda \operatorname{sen}(\mu \ln x) \tag{18}$$

também são soluções da Eq. (2). Um cálculo direto mostra que

$$W[x^\lambda \cos(\mu \ln x), x^\lambda \operatorname{sen}(\mu \ln x)] = \mu x^{2\lambda - 1}.$$

Portanto, essas soluções formam um conjunto fundamental de soluções para $x > 0$, e a solução geral da Eq. (2) é

$$y = c_1 x^\lambda \cos(\mu \ln x) + c_2 x^\lambda \operatorname{sen}(\mu \ln x), \qquad x > 0. \tag{19}$$

EXEMPLO 3

Resolva

$$x^2y'' + xy' + y = 0. \tag{20}$$

Substituindo $y = x^r$ na Eq. (20), obtemos

$$x^r[r(r-1) + r + 1] = x^r(r^2 + 1) = 0.$$

Logo, $r = \pm i$ e a solução geral é

$$y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\ln x), \qquad x > 0. \tag{21}$$

O fator x^λ não parece explicitamente na Eq. (21) porque, neste exemplo, $\lambda = 0$ e $x^\lambda = 1$.

Vamos considerar, agora, o comportamento qualitativo das soluções da Eq. (2) perto do ponto singular $x = 0$. Isso depende inteiramente da natureza dos expoentes r_1 e r_2. Em primeiro lugar, se r for real e positivo, $x^r \to 0$ quando x tende a zero assumindo apenas valores positivos. Por outro lado, se r for real e negativo, então x^r tornar-se-á ilimitado. Finalmente, se $r = 0$, $x^r = 1$. Essas possibilidades estão ilustradas na Figura 5.4.1 para diversos valores de r. Se r for complexo, uma solução típica será $x^\lambda \cos(\mu \ln x)$. Essa função torna-se ilimitada ou tende a zero se λ for, respectivamente, negativo ou positivo, e, também, oscila cada vez mais rapidamente quando $x \to 0$. Esses comportamentos estão ilustrados nas Figuras 5.4.2 e 5.4.3 para valores selecionados de λ e de μ. Se $\lambda = 0$, a oscilação tem amplitude constante. Finalmente, se as raízes são repetidas, então uma das soluções tem a forma $x^r \ln x$, que tende a zero se $r > 0$ e é ilimitada se $r \leq 0$. Um exemplo de cada caso aparece na Figura 5.4.4.

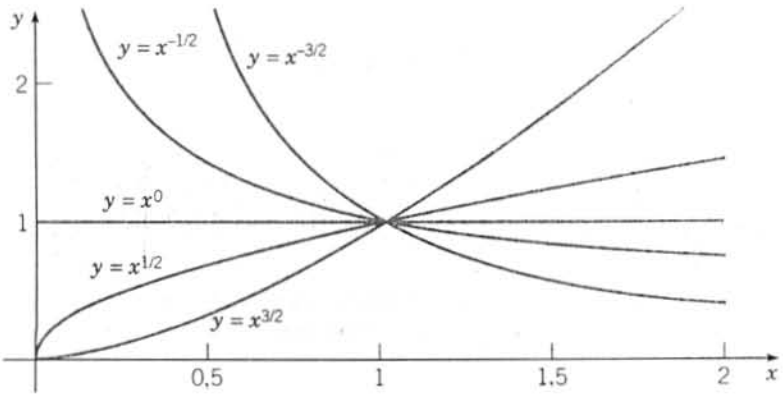

FIGURA 5.4.1 Soluções de uma equação de Euler; raízes reais.

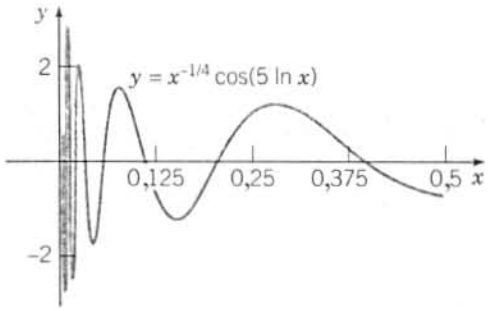

FIGURA 5.4.2 Solução de uma equação de Euler; raízes complexas com parte real negativa.

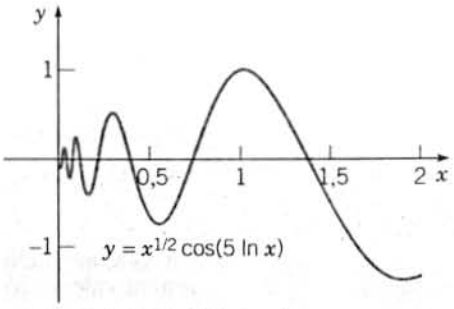

FIGURA 5.4.3 Solução de uma equação de Euler; raízes complexas com parte real positiva.

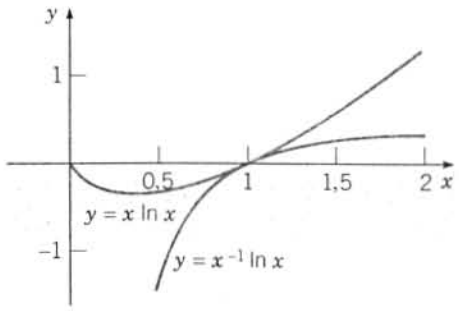

FIGURA 5.4.4 Segundas soluções típicas de uma equação de Euler com raízes iguais.

A extensão das soluções da Eq. (2) para o intervalo $x < 0$ pode ser feita de modo relativamente direto. A dificuldade está em compreender o significado de x^r quando r é negativo e não é inteiro; analogamente, $\ln x$ não está definido para $x < 0$. As soluções da equação de Euler que encontramos para $x > 0$ são válidas para $x < 0$ mas são, em geral, complexas. Assim, no Exemplo 1, a solução $x^{1/2}$ é imaginária para $x < 0$.

Sempre é possível obter soluções reais da equação de Euler (2) no intervalo $x < 0$ fazendo a mudança de variável a seguir. Seja $x = -\xi$, onde $\xi > 0$, e seja $y = u(\xi)$. Temos, então,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = -\frac{du}{d\xi}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\xi}\left(-\frac{du}{d\xi}\right)\frac{d\xi}{dx} = \frac{d^2u}{d\xi^2}. \tag{22}$$

Assim, para $x < 0$, a Eq. (2) fica na forma

$$\xi^2\frac{d^2u}{d\xi^2} + \alpha\xi\frac{du}{d\xi} + \beta u = 0, \qquad \xi > 0. \tag{23}$$

Mas, exceto pelos nomes das variáveis, esta é exatamente igual à Eq. (2); das Eqs. (7), (12) e (19) temos

$$u(\xi) = \begin{cases} c_1\xi^{r_1} + c_2\xi^{r_2} \\ (c_1 + c_2\ln\xi)\xi^{r_1} \\ c_1\xi^{\lambda}\cos(\mu\ln\xi) + c_2\xi^{\lambda}\operatorname{sen}(\mu\ln\xi), \end{cases} \tag{24}$$

dependendo de os zeros de $F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta$ serem reais e diferentes, reais e iguais ou complexos conjugados. Para obter u em função de x, substituímos ξ por $-x$ nas Eqs. (24).

Podemos combinar os resultados para $x > 0$ e $x < 0$ lembrando que $|x| = x$ quando $x > 0$ e $|x| = -x$ quando $x < 0$. Logo, precisamos apenas substituir x por $|x|$ nas Eqs. (7), (12) e (19) para obter soluções reais válidas em qualquer intervalo que não contém a origem.

Portanto, a solução geral da equação de Euler (2)

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$$

em qualquer intervalo que não contém a origem é determinada pelas raízes r_1 e r_2 da equação

$$F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta = 0$$

como segue. Se as raízes forem reais e diferentes, então

$$y = c_1|x|^{r_1} + c_2|x|^{r_2}. \tag{25}$$

Se as raízes forem iguais, então

$$y = (c_1 + c_2\ln|x|)|x|^{r_1}. \tag{26}$$

Se as raízes forem complexas, então

$$y = |x|^{\lambda}\left[c_1\cos(\mu\ln|x|) + c_2\operatorname{sen}(\mu\ln|x|)\right], \tag{27}$$

onde $r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$.

As soluções de uma equação de Euler da forma

$$(x - x_0)^2y'' + \alpha(x - x_0)y' + \beta y = 0 \tag{28}$$

são semelhantes. Se procurarmos soluções da forma $y = (x - x_0)^r$, então a solução geral é dada por uma das Eqs. (25), (26) ou (27) com $(x - x_0)$ no lugar de x. De outro modo, podemos reduzir a Eq. (28) à forma da Eq. (2) fazendo uma mudança da variável independente $t = x - x_0$.

Pontos Singulares Regulares. Agora vamos voltar a considerar a equação geral

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

onde x_0 é um ponto singular. Isso significa que $P(x_0) = 0$ e que pelo menos um entre Q e R não se anula em x_0.

Infelizmente, se tentarmos usar os métodos das duas seções precedentes para resolver a Eq. (1) na vizinhança de um ponto singular x_0, descobriremos que esses métodos não funcionam. Isso se deve ao fato de que frequentemente as soluções da Eq. (1) não são analíticas em x_0 e, portanto, não podem ser representadas por uma série de Taylor em potências de $x - x_0$. Os Exemplos 1, 2 e 3 anteriores ilustram esse fato; em cada um desses exemplos a solução não tem uma expansão em séries de potências em torno do ponto singular $x = 0$. Portanto, para ter alguma chance de resolver a Eq. (1) na vizinhança de um ponto singular precisamos usar um tipo de expansão em série mais geral.

Como uma equação diferencial tem, em geral, poucos pontos singulares, poderíamos especular se eles não poderiam ser simplesmente ignorados, uma vez que já sabemos como construir soluções em torno de pontos ordinários. No entanto, isso não é possível porque os pontos singulares determinam as características principais das soluções de forma muito mais profunda do que poderíamos suspeitar à primeira vista. Em uma vizinhança de um ponto singular a solução torna-se, muitas vezes, muito grande em módulo ou experimenta mudanças rápidas em seu módulo. Assim, o comportamento de um sistema físico modela-

do por uma equação diferencial é, com frequência, mais interessante em uma vizinhança de um ponto singular. Muitas vezes, singularidades geométricas em um problema físico, como bicos ou arestas, geram pontos singulares na equação diferencial correspondente. Então, embora queiramos inicialmente evitar os poucos pontos onde uma equação diferencial é singular, é precisamente nesses pontos que é necessário estudar a equação com mais cuidado.

Como alternativa aos métodos analíticos poderia ser considerada a utilização de métodos numéricos, que serão discutidos no Capítulo 8. Entretanto, esses métodos não são adequados para o estudo de soluções na proximidade de um ponto singular. Dessa forma, mesmo adotando uma abordagem numérica é vantajoso combiná-la com os métodos analíticos deste capítulo para que se possa examinar o comportamento das soluções na proximidade de um ponto singular.

Sem qualquer informação adicional sobre o comportamento de Q/P e R/P na vizinhança do ponto singular é impossível descrever o comportamento das soluções da Eq. (1) perto de $x = x_0$. Pode acontecer de existirem duas soluções distintas da Eq. (1) que permanecem limitadas quando $x \to x_0$ (como no Exemplo 3); ou uma delas pode permanecer limitada enquanto a outra se torna ilimitada quando $x \to x_0$ (como no Exemplo 1); ou ambas podem tornar-se ilimitadas quando $x \to x_0$ (como no Exemplo 2). Se a Eq. (1) tem soluções que se tornam ilimitadas quando $x \to x_0$, muitas vezes é importante determinar como essas soluções se comportam quando $x \to x_0$. Por exemplo, $y \to \infty$ do mesmo modo que $(x - x_0)^{-1}$, ou como $(x - x_0)^{-1/2}$ ou de alguma outra maneira?

Nosso objetivo é estender o método já desenvolvido para resolver a Eq. (1) perto de um ponto ordinário de modo que ele possa também ser aplicado na vizinhança de um ponto singular x_0. Para fazer isso de modo razoavelmente simples é necessário nos restringirmos a casos onde as singularidades das funções Q/P e R/P em $x = x_0$ não são muito severas – ou seja, o que poderíamos chamar de "singularidades fracas". Neste ponto não é claro o que seria exatamente uma singularidade aceitável. No entanto, ao desenvolvermos o método de solução você verá que as condições apropriadas (veja também o Problema 21 na Seção 5.6) para distinguirmos "singularidades fracas" são

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)\frac{Q(x)}{P(x)} \quad \text{é finito} \tag{29}$$

e

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)} \quad \text{é finito.} \tag{30}$$

Isso significa que a singularidade em Q/P não pode ser pior do que $(x - x_0)^{-1}$ e a singularidade em R/P não pode ser pior do que $(x - x_0)^{-2}$. Tal ponto é chamado de **ponto singular regular** da Eq. (1). Para equações com coeficientes mais gerais do que polinômios, x_0 é um ponto singular regular da Eq. (1) se for um ponto singular e se ambas as funções[11]

$$(x - x_0)\frac{Q(x)}{P(x)} \quad \text{e} \quad (x - x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)} \tag{31}$$

tiverem séries de Taylor convergentes em torno de x_0 – ou seja, se as funções na Eq. (31) forem analíticas em $x = x_0$. As Eqs. (29) e (30) implicam que isso será verdade quando P, Q e R forem polinômios. Qualquer ponto singular da Eq. (1) que não seja um ponto singular regular é chamado de **ponto singular irregular** da Eq. (1).

Note que as condições nas Eqs. (29) e (30) são satisfeitas pela equação de Euler (28). Logo, a singularidade em uma equação de Euler é um ponto singular regular. De fato, veremos que todas as equações da forma (1) se comportam de modo muito parecido com as equações de Euler perto de um ponto singular regular. Ou seja, soluções perto de um ponto singular regular podem incluir potências de x com expoentes negativos ou que não sejam inteiros, logaritmos ou senos ou cossenos com argumentos logarítmicos.

Nas seções a seguir discutiremos como resolver a Eq. (1) na vizinhança de um ponto singular regular. Uma discussão de soluções de equações diferenciais na vizinhança de pontos singulares irregulares é mais complicada e pode ser encontrada em livros mais avançados.

EXEMPLO 4

Determine os pontos singulares da equação de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0 \tag{32}$$

e determine se eles são regulares ou irregulares.

[11] As funções dadas na Eq. (31) podem não estar definidas em x_0; nesse caso, são atribuídos seus valores em x_0 como seus limites quando $x \to x_0$.

Neste caso $P(x) = 1 - x^2$, de modo que os pontos singulares são $x = 1$ e $x = -1$. Observe que quando dividimos a Eq. (32) por $1 - x^2$ os coeficientes de y' e de y ficam iguais a $-2x/(1 - x^2)$ e $\alpha(\alpha + 1)/(1 - x^2)$, respectivamente. Vamos considerar primeiro o ponto $x = 1$. Então, das Eqs. (29) e (30) calculamos

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\frac{-2x}{1-x^2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(-2x)}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x\to 1}\frac{2x}{1+x} = 1$$

e

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^2\frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2\alpha(\alpha+1)}{(1-x)(1+x)}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(-\alpha)(\alpha+1)}{1+x} = 0.$$

Como esses limites são finitos, o ponto $x = 1$ é um ponto singular regular. Pode-se mostrar, de maneira semelhante, que $x = -1$ também é um ponto singular regular.

EXEMPLO 5

Determine os pontos singulares da equação diferencial

$$2x(x-2)^2y'' + 3xy' + (x-2)y = 0$$

e classifique-os como regulares ou irregulares.

Dividindo a equação diferencial por $2x(x-2)^2$, temos

$$y'' + \frac{3}{2(x-2)^2}y' + \frac{1}{2x(x-2)}y = 0,$$

de modo que $p(x) = Q(x)/P(x) = 3/2(x-2)^2$ e $q(x) = R(x)/P(x) = 1/2x(x-2)$. Os pontos singulares são $x = 0$ e $x = 2$. Considere $x = 0$. Temos

$$\lim_{x\to 0} xp(x) = \lim_{x\to 0} x\frac{3}{2(x-2)^2} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0} x^2q(x) = \lim_{x\to 0} x^2\frac{1}{2x(x-2)} = 0.$$

Como esses limites são finitos, $x = 0$ é um ponto singular regular. Para $x = 2$, temos

$$\lim_{x\to 2}(x-2)p(x) = \lim_{x\to 2}(x-2)\frac{3}{2(x-2)^2} = \lim_{x\to 2}\frac{3}{2(x-2)},$$

de modo que o limite não existe; portanto, $x = 2$ é um ponto singular irregular.

EXEMPLO 6

Determine os pontos singulares de

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 y'' + (\cos x)y' + (\operatorname{sen} x)y = 0$$

e classifique-os como regulares ou irregulares.

O único ponto singular é $x = \pi/2$. Para estudá-lo, vamos considerar as funções

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)p(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{\cos x}{x - \pi/2}$$

e

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 q(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\frac{R(x)}{P(x)} = \operatorname{sen} x.$$

A partir da série de Taylor para $\cos x$ em torno de $x = \pi/2$ encontramos

$$\frac{\cos x}{x - \pi/2} = -1 + \frac{(x-\pi/2)^2}{3!} - \frac{(x-\pi/2)^4}{5!} + \cdots,$$

que converge para todo x. Analogamente, $\operatorname{sen} x$ é analítica em $x = \pi/2$. Portanto, concluímos que $\pi/2$ é um ponto singular regular para esta equação.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 12, determine a solução geral da equação diferencial dada, válida em qualquer intervalo que não inclui o ponto singular.

1. $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$
2. $(x+1)^2y'' + 3(x+1)y' + 0{,}75y = 0$
3. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$
4. $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$
5. $x^2y'' - xy' + y = 0$
6. $(x-1)^2y'' + 8(x-1)y' + 12y = 0$
7. $x^2y'' + 6xy' - y = 0$
8. $2x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$
9. $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$
10. $(x-2)^2y'' + 5(x-2)y' + 8y = 0$
11. $x^2y'' + 2xy' + 4y = 0$
12. $x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$

Em cada um dos Problemas de 13 a 16, encontre a solução do problema de valor inicial dado. Faça o gráfico da solução e descreva como ela se comporta quando $x \to 0$.

13. $2x^2y'' + xy' - 3y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 4$
14. $4x^2y'' + 8xy' + 17y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -3$
15. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0, \quad y(-1) = 2, \quad y'(-1) = 3$
16. $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -1$

Em cada um dos Problemas de 17 a 34, encontre todos os pontos singulares da equação dada e determine se cada um deles é regular ou irregular.

17. $xy'' + (1-x)y' + xy = 0$
18. $x^2(1-x)^2y'' + 2xy' + 4y = 0$
19. $x^2(1-x)y'' + (x-2)y' - 3xy = 0$
20. $x^2(1-x^2)y'' + (2/x)y' + 4y = 0$
21. $(1-x^2)^2y'' + x(1-x)y' + (1+x)y = 0$
22. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$ equação de Bessel
23. $(x+3)y'' - 2xy' + (1-x^2)y = 0$
24. $x(1-x^2)^3y'' + (1-x^2)^2y' + 2(1+x)y = 0$
25. $(x+2)^2(x-1)y'' + 3(x-1)y' - 2(x+2)y = 0$
26. $x(3-x)y'' + (x+1)y' - 2y = 0$
27. $(x^2 + x - 2)y'' + (x+1)y' + 2y = 0$
28. $xy'' + e^xy' + (3\cos x)y = 0$
29. $y'' + (\ln|x|)y' + 3xy = 0$
30. $x^2y'' + 2(e^x - 1)y' + (e^{-x}\cos x)y = 0$
31. $x^2y'' - 3(\operatorname{sen} x)y' + (1 + x^2)y = 0$
32. $xy'' + y' + (\cot x)y = 0$
33. $(\operatorname{sen} x)y'' + xy' + 4y = 0$
34. $(x \operatorname{sen} x)y'' + 3y' + xy = 0$
35. Encontre todos os valores de α para os quais todas as soluções de $x^2y'' + \alpha xy' + (5/2)y = 0$ tendem a zero quando $x \to 0$.
36. Encontre todos os valores de β para os quais todas as soluções de $x^2y'' + \beta y = 0$ tendem a zero quando $x \to 0$.
37. Encontre γ de modo que a solução do problema de valor inicial $x^2y'' - 2y = 0, y(1) = 1, y'(1) = \gamma$ permaneça limitada quando $x \to 0$.
38. Encontre todos os valores de α para os quais todas as soluções de $x^2y'' + \alpha xy' + (5/2)y = 0$ tendem a zero quando $x \to \infty$.
39. Considere a equação de Euler $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$. Encontre condições sobre α e β para que:
    (a) Todas as soluções tendam a zero quando $x \to 0$.
    (b) Todas as soluções permaneçam limitadas quando $x \to 0$.
    (c) Todas as soluções tendam a zero quando $x \to \infty$.
    (d) Todas as soluções permaneçam limitadas quando $x \to \infty$.
    (e) Todas as soluções permaneçam limitadas quando $x \to 0$ e quando $x \to \infty$.
40. Usando o método de redução de ordem, mostre que se r_1 é uma raiz repetida de

$$r(r-1) + \alpha r + \beta = 0,$$

então x^{r_1} e $x^{r_1}\ln x$ são soluções de $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$ para $x > 0$.

Em cada um dos Problemas 41 e 42, mostre que o ponto $x = 0$ é um ponto singular regular. Tente, em cada problema, encontrar soluções da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Mostre que (exceto por múltiplos constantes) existe apenas uma solução não nula dessa forma para o Problema 41 e que não existem soluções não nulas dessa forma para

o Problema 42. Assim, em nenhum dos casos a solução geral pode ser encontrada desse modo. Isso é típico de equações com pontos singulares.

41. $2xy'' + 3y' + xy = 0$

42. $2x^2y'' + 3xy' - (1 + x)y = 0$

43. **Singularidades no Infinito.** As definições de ponto ordinário e ponto singular regular dadas nas seções precedentes só se aplicam se o ponto x_0 é finito. Em trabalhos mais avançados de equações diferenciais é necessário, muitas vezes, discutir o ponto no infinito. Isso é feito através da mudança de variável $\xi = 1/x$ e estudando-se a equação resultante em $\xi = 0$. Mostre que, para a equação diferencial

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0,$$

o ponto no infinito é um ponto ordinário se

$$\frac{1}{P(1/\xi)}\left[\frac{2P(1/\xi)}{\xi} - \frac{Q(1/\xi)}{\xi^2}\right] \quad \text{e} \quad \frac{R(1/\xi)}{\xi^4 P(1/\xi)}$$

têm expansões em série de Taylor em torno de $\xi = 0$. Mostre, também, que o ponto no infinito é um ponto singular regular se pelo menos uma dessas funções não tem expansão em série de Taylor, mas ambas as funções

$$\frac{\xi}{P(1/\xi)}\left[\frac{2P(1/\xi)}{\xi} - \frac{Q(1/\xi)}{\xi^2}\right] \quad \text{e} \quad \frac{R(1/\xi)}{\xi^2 P(1/\xi)}$$

têm tais expansões.

Em cada um dos Problemas de 44 a 49, use os resultados do Problema 43 para determinar se o ponto no infinito é um ponto ordinário, singular regular ou singular irregular da equação diferencial dada.

44. $y'' + y = 0$

45. $x^2y'' + xy' - 4y = 0$

46. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$, Equação de Legendre

47. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, Equação de Bessel

48. $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$, Equação de Hermite

49. $y'' - xy = 0$, Equação de Airy

5.5 Soluções em Série Perto de um Ponto Singular Regular, Parte I

Vamos considerar, agora, o problema de resolver a equação geral linear de segunda ordem

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \tag{1}$$

em uma vizinhança de um ponto singular regular $x = x_0$. Vamos supor, por conveniência, que $x_0 = 0$. Se $x_0 \neq 0$, podemos transformar a equação em uma equação para a qual o ponto singular regular está na origem igualando $x - x_0$ a t.

O fato de que $x = 0$ é um ponto singular regular da Eq. (1) significa que $xQ(x)/P(x) = xp(x)$ e $x^2R(x)/P(x) = x^2q(x)$ têm limites finitos quando $x \to 0$ e são analíticas em $x = 0$. Logo, têm expansão em séries de potências convergentes da forma

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \qquad x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \tag{2}$$

em algum intervalo $|x| < \rho$ em torno da origem, onde $\rho > 0$. Para fazer com que as funções $xp(x)$ e $x^2q(x)$ apareçam na Eq. (1), é conveniente dividi-la por $P(x)$ e depois multiplicá-la por x^2, obtendo

$$x^2y'' + x[xp(x)]y' + [x^2q(x)]y = 0, \tag{3}$$

ou

$$\begin{aligned} x^2y'' + x(p_0 + p_1x + \cdots + p_nx^n + \cdots)y' \\ + (q_0 + q_1x + \cdots + q_nx^n + \cdots)y = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Se todos os coeficientes p_n e q_n forem nulos, com a possível exceção de

$$p_0 = \lim_{x\to 0} \frac{xQ(x)}{P(x)} \quad \text{e} \quad q_0 = \lim_{x\to 0} \frac{x^2R(x)}{P(x)}, \tag{5}$$

então a Eq. (4) se reduz à equação de Euler

$$x^2y'' + p_0xy' + q_0y = 0, \tag{6}$$

que foi discutida na seção precedente. É claro que, em geral, alguns dos p_n e q_n, $n \geq 1$ não são nulos. Entretanto, o caráter essencial das soluções da Eq. (4) é idêntico ao das soluções da equação de Euler (6). A presença dos termos $p_1x + \ldots + p_nx^n + \ldots$ e $q_1x + \ldots + q_nx^n + \ldots$ só complica os cálculos.

Vamos restringir nossa discussão principalmente ao intervalo $x > 0$. O intervalo $x < 0$ pode ser tratado, como para a equação de Euler, pela mudança de variável $x = -\xi$ e posterior resolução da equação resultante para $\xi > 0$.

Como os coeficientes da Eq. (4) são "coeficientes de Euler" multiplicados por série de potências, é natural procurar soluções da forma "soluções de Euler" multiplicadas por série de potências. Supomos, então, que

$$y = x^r(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots) = x^r\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{r+n}, \tag{7}$$

onde $a_0 \neq 0$. Em outras palavras, r é o expoente do primeiro termo da série e a_0 é seu coeficiente. Como parte da solução, temos que determinar:

1. Os valores de r para os quais a Eq. (1) tem uma solução da forma (7).
2. A relação de recorrência para os coeficientes a_n.
3. O raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$.

A teoria geral é devida a Frobenius,[12] e é razoavelmente complicada. Em vez de tentar apresentar essa teoria vamos supor, simplesmente, nesta e nas duas próximas seções, que existe uma solução da forma especificada. Em particular, vamos supor que qualquer série de potências em uma expressão para a solução tem raio de convergência não nulo e vamos nos concentrar em mostrar como determinar os coeficientes em tal série. Para ilustrar o método de Frobenius, vamos considerar primeiro um exemplo.

EXEMPLO 1

Resolva a equação diferencial

$$2x^2y'' - xy' + (1 + x)y = 0. \tag{8}$$

É fácil mostrar que $x = 0$ é um ponto singular regular da Eq. (8). Além disso, $xp(x) = -1/2$ e $x^2q(x) = (1 + x)/2$. Assim, $p_0 = -1/2$, $q_0 = 1/2$, $q_1 = 1/2$ e todos os outros coeficientes p_n e q_n são nulos. Então, da Eq. (6), a equação de Euler correspondente à Eq. (8) é

$$2x^2y'' - xy' + y = 0. \tag{9}$$

Para resolver a Eq. (8), vamos supor que existe uma solução da forma (7). Logo, y' e y'' são dados por

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r + n)x^{r+n-1} \tag{10}$$

e

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r + n)(r + n - 1)x^{r+n-2}. \tag{11}$$

Substituindo as expressões para y, y' e y'' na Eq. (8), obtemos

$$2x^2y'' - xy' + (1 + x)y = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(r + n)(r + n - 1)x^{r+n} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r + n)x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{r+n+1}. \tag{12}$$

O último termo na Eq. (12) pode ser escrito como $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{r+n}$, de modo que, combinando os termos na Eq. (12), obtemos

$$\begin{aligned} 2x^2y'' - xy' + (1 + x)y &= a_0[2r(r - 1) - r + 1]x^r \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{[2(r + n)(r + n - 1) - (r + n) + 1]a_n + a_{n-1}\right\} x^{r+n} = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

[12]Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) foi (como Fuchs) estudante e depois professor na University of Berlim. Mostrou como construir soluções em série em torno de pontos singulares regulares em 1874. Seu trabalho mais importante, no entanto, foi em álgebra, onde foi um dos expoentes entre os primeiros a desenvolver a teoria dos grupos.

Como a Eq. (13) tem que ser satisfeita para todo x, o coeficiente de cada potência de x na Eq. (13) tem que ser zero. Como $a_0 \neq 0$, obtemos do coeficiente de x^r

$$2r(r-1) - r + 1 = 2r^2 - 3r + 1 = (r-1)(2r-1) = 0. \tag{14}$$

A Eq. (14) é chamada de **equação indicial** para a Eq. (8). Note que ela é exatamente a equação polinomial que obteríamos para a equação de Euler (9) associada à Eq. (8). As raízes da equação indicial são

$$r_1 = 1, \qquad r_2 = 1/2. \tag{15}$$

Esses valores de r são chamados de **expoentes na singularidade** para o ponto singular regular $x = 0$. Eles determinam o comportamento qualitativo da solução (7) na vizinhança do ponto singular.

Vamos voltar, agora, para a Eq. (13) e igualar o coeficiente de x^{r+n} a zero. Isso nos fornece a relação

$$[2(r+n)(r+n-1) - (r+n) + 1]\,a_n + a_{n-1} = 0, \qquad n \geq 1, \tag{16}$$

ou

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{a_{n-1}}{2(r+n)^2 - 3(r+n) + 1} \\ &= -\frac{a_{n-1}}{[(r+n)-1][2(r+n)-1]}, \qquad n \geq 1. \end{aligned} \tag{17}$$

Para cada raiz r_1 e r_2 da equação indicial, usamos a relação de recorrência (17) para determinar um conjunto de coeficientes $a_1, a_2, \ldots$ Para $r = r_1 = 1$, a Eq. (17) fica

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{(2n+1)n}, \qquad n \geq 1.$$

Logo,

$$a_1 = -\frac{a_0}{3 \cdot 1},$$

$$a_2 = -\frac{a_1}{5 \cdot 2} = \frac{a_0}{(3 \cdot 5)(1 \cdot 2)},$$

e

$$a_3 = -\frac{a_2}{7 \cdot 3} = -\frac{a_0}{(3 \cdot 5 \cdot 7)(1 \cdot 2 \cdot 3)}.$$

Em geral, temos

$$a_n = \frac{(-1)^n}{[3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)]n!}a_0, \qquad n \geq 4. \tag{18}$$

Multiplicando o numerador e o denominador da expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (18) por $2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n = 2^n n!$, podemos reescrever a_n como

$$a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)!}a_0, \qquad n \geq 1.$$

Portanto, se omitirmos a constante multiplicativa a_0, uma solução da Eq. (8) é

$$y_1(x) = x\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)!}x^n\right], \qquad x > 0. \tag{19}$$

Para determinar o raio de convergência da série na Eq. (19), usamos o teste da razão:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2|x|}{(2n+2)(2n+3)} = 0$$

para todo x. Logo, a série converge para todo x.

Vamos proceder de modo análogo para a segunda raiz $r = r_2 = \frac{1}{2}$. Da Eq. (17), temos

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{2n\left(n - \frac{1}{2}\right)} = -\frac{a_{n-1}}{n(2n-1)}, \qquad n \geq 1.$$

Portanto,

$$a_1 = -\frac{a_0}{1 \cdot 1},$$

$$a_2 = -\frac{a_1}{2 \cdot 3} = \frac{a_0}{(1 \cdot 2)(1 \cdot 3)},$$

$$a_3 = -\frac{a_2}{3 \cdot 5} = -\frac{a_0}{(1 \cdot 2 \cdot 3)(1 \cdot 3 \cdot 5)},$$

e, em geral,

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n![1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)]} a_0, \qquad n \geq 4. \tag{20}$$

Como no caso da primeira raiz r_1, multiplicamos o numerador e o denominador por $2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n = 2^n n!$. Temos, então,

$$a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n)!} a_0, \qquad n \geq 1.$$

Omitindo novamente a constante multiplicativa a_0, obtemos a segunda solução

$$y_2(x) = x^{1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(2n)!} x^n\right], \qquad x > 0. \tag{21}$$

Como anteriormente, podemos mostrar que a série na Eq. (21) converge para todo x. Como y_1 e y_2 se comportam como x e $x^{1/2}$, respectivamente, perto de $x = 0$, estas funções formam um conjunto fundamental de soluções. Logo, a solução geral da Eq. (8) é

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \qquad x > 0.$$

O exemplo precedente ilustra o fato de que se $x = 0$ for um ponto singular regular, então algumas vezes existirão duas soluções da forma (7) em uma vizinhança desse ponto. Analogamente, se existir um ponto singular regular em $x = x_0$, poderão existir duas soluções da forma

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{22}$$

que são válidas perto de $x = x_0$. No entanto, assim como uma equação de Euler pode não ter duas soluções da forma $y = x^r$, uma equação mais geral com um ponto singular regular pode não ter duas soluções da forma (7) ou (22). Em particular, vamos mostrar na próxima seção que se as raízes r_1 e r_2 da equação indicial forem iguais ou diferirem por um inteiro, então a segunda solução terá normalmente uma estrutura mais complicada. Em todos os casos, no entanto, é possível encontrar pelo menos uma solução da forma (7) ou (22); se r_1 e r_2 diferirem por um inteiro, essa solução corresponderá ao maior valor de r. Se existir apenas uma dessas soluções, então a segunda solução envolverá um termo logarítmico, como na equação de Euler quando as raízes da equação característica são iguais. O método de redução de ordem ou algum outro procedimento pode ser usado para se determinar a segunda solução nesse caso. Isso será discutido nas Seções 5.6 e 5.7.

Se as raízes da equação indicial forem complexas, então elas não poderão ser iguais nem diferir por um inteiro, de modo que sempre existirão duas soluções da forma (7) ou (22). É claro que essas soluções são funções complexas de x. No entanto, como para a equação de Euler, é possível obter soluções reais tomando-se as partes real e imaginária das soluções complexas.

Finalmente, vamos mencionar uma questão prática. Se P, Q e R forem polinômios, será bem melhor, muitas vezes, trabalhar diretamente com a Eq. (1) do que com a Eq. (3). Isso evita a necessidade de expandir $xQ(x)/P(x)$ e $x^2R(x)/P(x)$ em séries de potências. Por exemplo, é mais conveniente considerar a equação

$$x(1 + x)y'' + 2y' + xy = 0$$

do que escrevê-la na forma

$$x^2 y'' + \frac{2x}{1+x} y' + \frac{x^2}{1+x} y = 0,$$

o que implicaria expandir $2x/(1 + x)$ e $x^2/(1 + x)$ em séries de potências.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 10:

(a) Mostre que a equação diferencial dada tem um ponto singular regular em $x = 0$.

(b) Determine a equação indicial, a relação de recorrência e as raízes da equação indicial.

(c) Encontre a solução em série ($x > 0$) correspondente à maior raiz.

(d) Se as raízes forem diferentes e não diferirem por um inteiro, encontre, também, a solução em série correspondente à menor raiz.

1. $2xy'' + y' + xy = 0$
2. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0$
3. $xy'' + y = 0$
4. $xy'' + y' - y = 0$
5. $3x^2y'' + 2xy' + x^2y = 0$
6. $x^2y'' + xy' + (x-2)y = 0$
7. $xy'' + (1-x)y' - y = 0$
8. $2x^2y'' + 3xy' + (2x^2 - 1)y = 0$
9. $x^2y'' - x(x+3)y' + (x+3)y = 0$
10. $x^2y'' + \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)y = 0$
11. A equação de Legendre de ordem α é

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0.$$

A solução desta equação perto do ponto ordinário $x = 0$ foi discutida nos Problemas 22 e 23 da Seção 5.3. O Exemplo 4 da Seção 5.4 mostrou que $x = \pm 1$ são pontos singulares regulares.

(a) Determine a equação indicial e suas raízes para o ponto $x = 1$.

(b) Encontre uma solução em série de potências de $x - 1$ para $x - 1 > 0$.

Sugestão: escreva $1 + x = 2 + (x-1)$ e $x = 1 + (x-1)$. Outra maneira é fazer a mudança de variável $x - 1 = t$ e determinar uma solução em série de potências de t.

12. A equação de Chebyshev é

$$(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0,$$

onde α é constante; veja o Problema 10 da Seção 5.3.

(a) Mostre que $x = 1$ e $x = -1$ são pontos singulares regulares e encontre os expoentes em cada uma dessas singularidades.

(b) Encontre duas soluções em torno de $x = 1$.

13. A equação diferencial de Laguerre[13] é

$$xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0.$$

(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular.

(b) Determine a equação indicial, suas raízes e a relação de recorrência.

(c) Encontre uma solução ($x > 0$). Mostre que se $\lambda = m$ for um inteiro positivo, essa solução se reduzirá a um polinômio. Quando normalizado apropriadamente, esse polinômio é conhecido como o polinômio de Laguerre, $L_m(x)$.

14. A equação de Bessel de ordem zero é

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0.$$

(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular.

(b) Mostre que as raízes da equação indicial são $r_1 = r_2 = 0$.

(c) Mostre que uma solução para $x > 0$ é

$$J_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

(d) Mostre que a série para $J_0(x)$ converge para todo x. A função J_0 é conhecida como a função de Bessel de primeira espécie de ordem zero.

15. Com referência ao Problema 14, use o método de redução de ordem para mostrar que a segunda solução da equação de Bessel de ordem zero contém um termo logarítmico.

Sugestão: se $y_2(x) = J_0(x)v(x)$, então

$$y_2(x) = J_0(x)\int \frac{dx}{x[J_0(x)]^2}.$$

Encontre o primeiro termo na expansão em série de $1/x[J_0(x)]^2$.

16. A equação de Bessel de ordem um é

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0.$$

(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular.

(b) Mostre que as raízes da equação indicial são $r_1 = 1$ e $r_2 = -1$.

[13] Edmond Nicolas Laguerre (1834-1886), um geômetra e analista francês, estudou os polinômios que levam seu nome em torno de 1879.

(c) Mostre que uma solução para $x > 0$ é

$$J_1(x) = \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(n+1)!\,n!\,2^{2n}}.$$

(d) Mostre que a série converge para $J_1(x)$ para todo x. A função J_1 é conhecida como a função de Bessel de primeira espécie de ordem um.

(e) Mostre que é impossível determinar uma segunda solução da forma

$$x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \qquad x > 0.$$

5.6 Soluções em Série Perto de um Ponto Singular Regular, Parte II

Vamos considerar, agora, o problema geral de determinar uma solução da equação

$$L[y] = x^2y'' + x[xp(x)]y' + [x^2q(x)]y = 0, \tag{1}$$

onde

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \qquad x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \tag{2}$$

e ambas as séries convergem em um intervalo $|x| < \rho$ para algum $\rho > 0$. O ponto $x = 0$ é um ponto singular regular, e a equação de Euler correspondente é

$$x^2y'' + p_0xy' + q_0y = 0. \tag{3}$$

Procuramos uma solução da Eq. (1) para $x > 0$ e supomos que ela tem a forma

$$y = \phi(r,x) = x^r\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}, \tag{4}$$

onde $a_0 \neq 0$, e escrevemos $y = \phi(r,x)$ para enfatizar que ϕ depende tanto de r quanto de x. Segue que

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n x^{r+n-1}, \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n x^{r+n-2}. \tag{5}$$

Então, substituindo as Eqs. (2), (4) e (5) na Eq. (1), obtemos

$$\begin{aligned}
&a_0r(r-1)x^r + a_1(r+1)rx^{r+1} + \cdots + a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n} + \cdots \\
&\quad + (p_0 + p_1x + \cdots + p_nx^n + \cdots) \\
&\qquad \times [a_0rx^r + a_1(r+1)x^{r+1} + \cdots + a_n(r+n)x^{r+n} + \cdots] \\
&\quad + (q_0 + q_1x + \cdots + q_nx^n + \cdots) \\
&\qquad \times (a_0x^r + a_1x^{r+1} + \cdots + a_nx^{r+n} + \cdots) = 0.
\end{aligned}$$

Multiplicando as séries infinitas e depois juntando os termos semelhantes, temos

$$\begin{aligned}
&a_0F(r)x^r + [a_1F(r+1) + a_0(p_1r + q_1)]x^{r+1} \\
&\quad + \left\{a_2F(r+2) + a_0(p_2r + q_2) + a_1[p_1(r+1) + q_1]\right\}x^{r+2} \\
&\quad + \cdots + \left\{a_nF(r+n) + a_0(p_nr + q_n) + a_1[p_{n-1}(r+1) + q_{n-1}]\right. \\
&\quad + \left. \cdots + a_{n-1}[p_1(r+n-1) + q_1]\right\}x^{r+n} + \cdots = 0,
\end{aligned}$$

ou, em forma mais compacta,

$$L[\phi](r,x) = a_0F(r)x^r + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{F(r+n)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k[(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}]\right\}x^{r+n} = 0, \tag{6}$$

onde

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0. \tag{7}$$

Para que a Eq. (6) seja satisfeita para todo $x > 0$, o coeficiente de cada potência de x tem que ser igual a zero.

Como $a_0 \neq 0$, o termo envolvendo x^r leva à equação $F(r) = 0$. Esta equação é chamada de **equação indicial**; note que é exatamente a equação que obteríamos procurando por soluções da forma $y = x^r$ da equação de Euler (3). Vamos denotar as raízes da equação indicial por r_1 e r_2, com $r_1 \geq r_2$ se as raízes forem reais. Se as raízes forem complexas, não importa sua designação. Só podemos esperar encontrar soluções da Eq. (1) da forma (4) para esses valores de r. As raízes r_1 e r_2 são chamadas de **expoentes na singularidade**; elas determinam a natureza qualitativa das soluções em uma vizinhança do ponto singular.

Igualando a zero o coeficiente de x^{r+n} na Eq. (6), obtemos a **relação de recorrência**

$$F(r+n)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k[(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}] = 0, \qquad n \geq 1. \tag{8}$$

A Eq. (8) mostra que, em geral, a_n depende do valor de r e de todos os coeficientes anteriores $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. Ela mostra, também, que podemos calcular sucessivamente os valores de $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ em função de a_0 e dos coeficientes das séries para $xp(x)$ e para $x^2q(x)$ desde que $F(r+1), F(r+2), \ldots, F(r+n), \ldots$ não sejam nulos. Os únicos valores de r para os quais $F(r) = 0$ são $r = r_1$ e $r = r_2$; como $r_1 \geq r_2$, segue que $r_1 + n$ não é igual a r_1 nem a r_2 se $n \geq 1$. Em consequência, $F(r_1 + n) \neq 0$ para $n \geq 1$. Logo, sempre podemos determinar uma solução da Eq. (1) da forma (4), a saber,

$$y_1(x) = x^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right], \qquad x > 0. \tag{9}$$

Introduzimos a notação $a_n(r_1)$ para indicar que a_n foi determinado da Eq. (8) com $r = r_1$. Para especificar a constante arbitrária na solução, escolhemos a_0 como 1.

Se r_2 não for igual a r_1 e se $r_1 - r_2$ não for um inteiro positivo, então $r_2 + n$ será diferente de r_1 para todo valor de $n \geq 1$; portanto, $F(r_2 + n) \neq 0$ e sempre podemos obter uma segunda solução

$$y_2(x) = x^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n\right], \qquad x > 0. \tag{10}$$

Da mesma forma que para as soluções em série em torno de um ponto ordinário, discutidas na Seção 5.3, as séries nas Eqs. (9) e (10) convergem pelo menos no intervalo $|x| < \rho$ onde ambas as séries para $xp(x)$ e $x^2q(x)$ convergem. Dentro de seus raios de convergência, as séries de potências $1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n$ e $1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n$ definem funções analíticas em $x = 0$. Assim, o comportamento singular das funções y_1 e y_2, se existir, será devido aos fatores x^{r_1} e x^{r_2} que multiplicam essas duas funções analíticas. A seguir, para obter soluções reais para $x < 0$ podemos fazer a substituição $x = -\xi$ com $\xi > 0$. Como poderíamos esperar da nossa discussão sobre a equação de Euler, basta substituir x^{r_1} na Eq. (9) e x^{r_2} na Eq. (10) por $|x|^{r_1}$ e $|x|^{r_2}$, respectivamente. Finalmente, note que se r_1 e r_2 forem números complexos, então serão necessariamente complexos conjugados e $r_2 \neq r_1 + N$ para qualquer inteiro positivo N. Assim, nesse caso sempre podemos encontrar duas soluções em série da forma (4); no entanto, elas são funções complexas de x. Soluções reais podem ser obtidas tomando-se as partes real e imaginária das soluções complexas. Os casos excepcionais em que $r_1 = r_2$ ou $r_1 - r_2 = N$, onde N é um inteiro positivo, necessitam de uma discussão maior e serão considerados mais tarde, nesta seção.

É importante compreender que r_1 e r_2, os expoentes no ponto singular, são fáceis de encontrar e que eles determinam o comportamento qualitativo das soluções. Para calcular r_1 e r_2, basta resolver a equação indicial de segundo grau

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0, \tag{11}$$

cujos coeficientes são dados por

$$p_0 = \lim_{x \to 0} xp(x), \qquad q_0 = \lim_{x \to 0} x^2 q(x). \tag{12}$$

Note que esses são exatamente os limites que precisam ser calculados para se classificar o ponto singular como ponto singular regular; assim, em geral eles já foram determinados em um estágio anterior da investigação.

Além disso, se $x = 0$ é um ponto singular regular da equação

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0, \tag{13}$$

onde as funções P, Q e R são polinômios, então $xp(x) = xQ(x)/P(x)$ e $x^2q(x) = x^2R(x)/P(x)$. Então,

$$p_0 = \lim_{x\to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)}, \qquad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\frac{R(x)}{P(x)}. \tag{14}$$

Finalmente, os raios de convergência das séries nas Eqs. (9) e (10) são, pelo menos, iguais à distância da origem ao zero mais próximo de $P(x)$ diferente do próprio $x = 0$.

EXEMPLO 1

Discuta a natureza das soluções da equação

$$2x(1+x)y'' + (3+x)y' - xy = 0$$

perto dos pontos singulares.

Esta equação é da forma (13) com $P(x) = 2x(1+x)$, $Q(x) = 3+x$ e $R(x) = -x$. Os pontos $x = 0$ e $x = -1$ são os únicos pontos singulares. O ponto $x = 0$ é um ponto singular regular, já que

$$\lim_{x\to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} x\frac{3+x}{2x(1+x)} = \frac{3}{2},$$

$$\lim_{x\to 0} x^2\frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} x^2\frac{-x}{2x(1+x)} = 0.$$

Além disso, da Eq. (14), $p_0 = \frac{3}{2}$ e $q_0 = 0$. Logo, a equação indicial é $r(r-1) + \frac{3}{2}r = 0$ e as raízes são $r_1 = 0$, $r_2 = -\frac{1}{2}$. Como essas raízes não são iguais nem diferem por um inteiro, existem duas soluções da forma

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)x^n \quad \text{e} \quad y_2(x) = |x|^{-1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(-\tfrac{1}{2}\right)x^n\right]$$

para $0 < |x| < \rho$. Uma cota inferior para o raio de convergência de cada série é 1, a distância de $x = 0$ a $x = -1$, o outro zero de $P(x)$. Note que a solução $y_1(x)$ permanece limitada quando $x \to 0$, é, de fato, analítica aí, e que a segunda solução y_2 torna-se ilimitada quando $x \to 0$.

O ponto $x = -1$ também é um ponto singular regular, pois

$$\lim_{x\to -1} (x+1)\frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(3+x)}{2x(1+x)} = -1,$$

$$\lim_{x\to -1} (x+1)^2\frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)^2(-x)}{2x(1+x)} = 0.$$

Nesse caso, $p_0 = -1$, $q_0 = 0$, de modo que a equação indicial é $r(r-1) - r = 0$. As raízes da equação indicial são $r_1 = 2$ e $r_2 = 0$. Correspondendo à maior raiz existe uma solução da forma

$$y_1(x) = (x+1)^2\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(2)(x+1)^n\right].$$

A série converge pelo menos para $|x+1| < 1$ e y_1 é uma função analítica aí. Como as duas raízes diferem por um inteiro positivo, pode existir ou não uma segunda solução da forma

$$y_2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)(x+1)^n.$$

Não podemos dizer mais nada sem uma análise mais profunda.

Note que não foram necessários cálculos complicados para se descobrir informações sobre as soluções apresentadas neste exemplo. Só precisamos calcular alguns limites e resolver duas equações de segundo grau.

Vamos considerar, agora, os casos nos quais a equação indicial tem raízes iguais ou que diferem por um inteiro positivo, $r_1 - r_2 = N$. Como mostramos anteriormente, sempre existe uma solução da forma (9) correspondente à maior raiz r_1 da equação indicial. Por analogia com a equação de Euler, poderíamos esperar que, se $r_1 = r_2$, então a segunda solução conteria um termo logarítmico. Isso também poderá ser verdade se as raízes diferirem por um inteiro positivo.

Raízes Iguais. O método para encontrar a segunda solução é essencialmente o mesmo que usamos para encontrar a segunda solução da equação de Euler (veja a Seção 5.4) quando as raízes da equação indicial eram iguais. Vamos considerar r como uma variável contínua e determinar a_n em função de r resolvendo a relação de recorrência (8). Para essa escolha de $a_n(r)$ para $n \geq 1$, a Eq. (6) se reduz a

$$L[\phi](r,x) = a_0F(r)x^r = a_0(r-r_1)^2x^r, \tag{15}$$

já que r_1 é uma raiz repetida de $F(r)$. Fazendo $r = r_1$ na Eq. (15), encontramos que $L[\phi](r_1, x) = 0$; logo, como já sabíamos, $y_1(x)$ dado pela Eq. (9) é uma solução da Eq. (1). Mas, mais importante, segue também da Eq. (15), da mesma forma que para a equação de Euler, que

$$\begin{aligned} L\left[\frac{\partial\phi}{\partial r}\right](r_1,x) &= a_0\frac{\partial}{\partial r}[x^r(r-r_1)^2]\Big|_{r=r_1} \\ &= a_0[(r-r_1)^2x^r\ln x + 2(r-r_1)x^r]\Big|_{r=r_1} = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Portanto, uma segunda solução da Eq. (1) é

$$\begin{aligned} y_2(x) = \frac{\partial\phi(r,x)}{\partial r}\Bigg|_{r=r_1} &= \frac{\partial}{\partial r}\left\{x^r\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r)x^n\right]\right\}\Bigg|_{r=r_1} \\ &= (x^{r_1}\ln x)\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right] + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(r_1)x^n \\ &= y_1(x)\ln x + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(r_1)x^n, \qquad x > 0, \end{aligned} \tag{17}$$

onde $a_n'(r_1)$ denota a derivada da_n/dr calculada em $r = r_1$.

Pode ser difícil determinar $a_n(r)$ como função de r a partir da relação de recorrência (8) e depois diferenciar a expressão resultante em relação a r. Outro maneira é simplesmente supor que y tem a *forma* da Eq. (17). Ou seja, suponha que

$$y = y_1(x)\ln x + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} b_nx^n, \qquad x > 0, \tag{18}$$

onde $y_1(x)$ já foi encontrado. Os coeficientes b_n são calculados, como de hábito, substituindo na equação diferencial, juntando os termos correspondentes e igualando os coeficientes de cada potência de x a zero. Uma terceira possibilidade é usar o método de redução de ordem para encontrar $y_2(x)$ uma vez conhecido $y_1(x)$.

Raízes r_1 e r_2 Diferindo por um Inteiro N. Nesse caso a dedução da segunda solução é bem mais complicada, e não será dada aqui. A forma dessa solução é dada pela Eq. (24) no próximo teorema. Os coeficientes $c_n(r_2)$ na Eq. (24) são dados por

$$c_n(r_2) = \frac{d}{dr}[(r-r_2)a_n(r)]\Big|_{r=r_2}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{19}$$

onde $a_n(r)$ é determinado da relação de recorrência (8) com $a_0 = 1$. Além disso, o coeficiente de a na Eq. (24) é

$$a = \lim_{r\to r_2}(r-r_2)a_N(r). \tag{20}$$

Se $a_N(r_2)$ for finito, então $a = 0$ e y_2 não tem termo logarítmico. Uma dedução completa das fórmulas (19) e (20) pode ser encontrada no livro de Coddington (Capítulo 4).

Na prática, a melhor maneira de determinar se $a = 0$ na segunda solução é tentar simplesmente calcular os a_n correspondentes à raiz r_2 e ver se é possível determinar $a_N(r_2)$. Se for, não há problema. Se não, precisamos usar a forma (24) com $a \neq 0$.

Quando $r_1 - r_2 = N$ existem, novamente, três maneiras de se encontrar uma segunda solução. Primeiro, podemos calcular a e $c_n(r_2)$ diretamente, substituindo y pela expressão (24) na Eq. (1). Segundo, podemos calcular $c_n(r_2)$ e a da Eq. (24) usando as fórmulas (19) e (20). Se esse for o procedimento planejado, ao calcular a solução correspondente a $r = r_1$ não se esqueça de obter a fórmula geral para $a_n(r)$, em vez de encontrar apenas $a_n(r_1)$. A terceira maneira é usar o método de redução de ordem.

Teorema 5.6.1 Considere a equação diferencial (1),

$$x^2y'' + x[xp(x)]y' + [x^2q(x)]y = 0,$$

onde $x = 0$ é um ponto singular regular. Então, $xp(x)$ e $x^2q(x)$ são analíticas em $x = 0$ com expansão em séries de potências convergentes

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \qquad x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

para $|x| < \rho$, onde $\rho > 0$ é o mínimo entre os raios de convergência das séries de potências para $xp(x)$ e $x^2q(x)$. Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação indicial

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0,$$

com $r_1 \geq r_2$, se r_1 e r_2 forem reais. Então, em um dos intervalos $-\rho < x < 0$ ou $0 < x < \rho$, existe uma solução da forma

$$y_1(x) = |x|^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right], \tag{21}$$

onde os $a_n(r_1)$ são dados pela relação de recorrência (8) com $a_0 = 1$ e $r = r_1$.

Se $r_1 - r_2$ não é zero nem um inteiro positivo, então em um dos intervalos $-\rho < x < 0$ ou $0 < x < \rho$ existe uma segunda solução da forma

$$y_2(x) = |x|^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n\right]. \tag{22}$$

Os $a_n(r_2)$ também são determinados pela relação de recorrência (8), com $a_0 = 1$ e $r = r_2$. As séries de potências nas Eqs. (21) e (22) convergem pelo menos para $|x| < \rho$.

Se $r_1 = r_2$, então a segunda solução é

$$y_2(x) = y_1(x)\ln|x| + |x|^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_1)x^n. \tag{23}$$

Se $r_1 - r_2 = N$, um inteiro positivo, então

$$y_2(x) = ay_1(x)\ln|x| + |x|^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r_2)x^n\right]. \tag{24}$$

Os coeficientes $a_n(r_1)$, $b_n(r_1)$, $c_n(r_2)$ e a constante a podem ser determinados substituindo-se a forma da solução em série y na Eq. (1). A constante a pode ser nula, caso em que a solução (24) não tem termo logarítmico. Cada uma das séries nas Eqs. (23) e (24) converge pelo menos para $|x| < \rho$ e define uma função analítica em alguma vizinhança de $x = 0$.

Em todos os três casos as duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ formam um conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial dada.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 12:

(a) Encontre todos os pontos singulares regulares da equação diferencial dada.

(b) Determine a equação indicial e os expoentes na singularidade para cada ponto singular regular.

1. $xy'' + 2xy' + 6e^x y = 0$
2. $x^2y'' - x(2+x)y' + (2+x^2)y = 0$
3. $x(x-1)y'' + 6x^2y' + 3y = 0$
4. $y'' + 4xy' + 6y = 0$
5. $x^2y'' + 3(\operatorname{sen} x)y' - 2y = 0$
6. $2x(x+2)y'' + y' - xy = 0$
7. $x^2y'' + \frac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x)y' + y = 0$
8. $(x+1)^2y'' + 3(x^2-1)y' + 3y = 0$
9. $x^2(1-x)y'' - (1+x)y' + 2xy = 0$
10. $(x-2)^2(x+2)y'' + 2xy' + 3(x-2)y = 0$
11. $(4-x^2)y'' + 2xy' + 3y = 0$
12. $x(x+3)^2y'' - 2(x+3)y' - xy = 0$

Em cada um dos Problemas de 13 a 17:

(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular da equação diferencial dada.

(b) Encontre os expoentes no ponto singular $x = 0$.

(c) Encontre os três primeiros termos não nulos em cada uma das duas soluções (que não são múltiplas uma da outra) em torno de $x = 0$.

13. $xy'' + y' - y = 0$
14. $xy'' + 2xy' + 6e^x y = 0$; Veja o Problema 1
15. $x(x-1)y'' + 6x^2y' + 3y = 0$; Veja o Problema 3
16. $xy'' + y = 0$
17. $x^2y'' + (\operatorname{sen} x)y' - (\cos x)y = 0$
18. (a) Mostre que

$$(\ln x)y'' + \tfrac{1}{2}y' + y = 0$$

tem um ponto singular regular em $x = 1$.

(b) Determine as raízes da equação indicial em $x = 1$.

(c) Determine os três primeiros termos não nulos na série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^{r+n}$ correspondente à raiz maior. Tome $x - 1 > 0$.

(d) Qual o valor que você esperaria para o raio de convergência da série?

19. Em diversos problemas em física matemática é necessário estudar a equação diferencial

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (1 + \alpha + \beta)x]y' - \alpha\beta y = 0, \tag{i}$$

onde α, β e γ são constantes. Essa equação é conhecida como **equação hipergeométrica**.

(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular e que as raízes da equação indicial são 0 e $1 - \gamma$.

(b) Mostre que $x = 1$ é um ponto singular regular e que as raízes da equação indicial são 0 e $\gamma - \alpha - \beta$.

(c) Supondo que $1 - \gamma$ não é um inteiro positivo, mostre que uma solução da Eq. (i) em uma vizinhança de $x = 0$ é

$$y_1(x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma \cdot 1!}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)2!}x^2 + \cdots.$$

Qual o valor que você esperaria para o raio de convergência desta série?

(d) Supondo que $1 - \gamma$ não é inteiro, mostre que uma segunda solução para $0 < x < 1$ é

$$y_2(x) = x^{1-\gamma}\left[1 + \frac{(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)}{(2-\gamma)1!}x + \frac{(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)(\beta-\gamma+1)(\beta-\gamma+2)}{(2-\gamma)(3-\gamma)2!}x^2 + \cdots\right].$$

(e) Mostre que o ponto no infinito é um ponto singular regular e que as raízes da equação indicial são α e β. Veja o Problema 43 da Seção 5.4.

20. Considere a equação diferencial

$$x^3y'' + \alpha xy' + \beta y = 0,$$

onde α e β são constantes reais e $\alpha \neq 0$.

(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular irregular.

(b) Ao tentar encontrar uma solução da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$, mostre que a equação indicial para r é linear e, portanto, existe apenas uma solução formal dessa forma suposta.

(c) Mostre que se $\beta/\alpha = -1, 0, 1, 2, \ldots$, então a solução formal em série termina e é, portanto, uma solução de fato. Para os outros valores de β/α mostre que a solução formal em série tem raio de convergência nulo, logo não representa uma solução de fato em nenhum intervalo.

21. Considere a equação diferencial

$$y'' + \frac{\alpha}{x^s}y' + \frac{\beta}{x^t}y = 0, \tag{i}$$

onde $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$ são números reais e s e t são inteiros positivos, arbitrários por enquanto.

(a) Mostre que, se $s > 1$ ou $t > 2$, então o ponto $x = 0$ é um ponto singular irregular.

(b) Tente encontrar uma solução da Eq. (i) da forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}, \qquad x > 0. \tag{ii}$$

Mostre que se $s = 2$ e $t = 2$, então existe apenas um valor possível para r para o qual existe uma solução formal da Eq. (i) da forma (ii).

(c) Mostre que se $s = 1$ e $t = 3$, então não existem soluções da Eq. (i) da forma (ii).

(d) Mostre que os valores máximos de s e de t para os quais a equação indicial é de segundo grau em r [e, portanto, podemos esperar encontrar duas soluções da forma (ii)] são $s = 1$ e $t = 2$. Estas são precisa-

mente as condições que distinguem uma "singularidade fraca", ou um ponto singular regular, de um ponto singular irregular, como definimos na Seção 5.4.

Como aviso, deveríamos esclarecer que embora seja possível, algumas vezes, obter uma solução formal em série da forma (ii) em um ponto singular irregular, a série pode não ter raio de convergência positivo. Veja o Problema 20 para um exemplo.

5.7 Equação de Bessel

Nesta seção vamos ilustrar a discussão na Seção 5.6 considerando três casos especiais da equação de Bessel,[14]

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \tag{1}$$

onde ν é uma constante. É fácil mostrar que $x = 0$ é um ponto singular regular da Eq. (1). Temos

$$p_0 = \lim_{x\to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} x\frac{1}{x} = 1,$$

$$q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} x^2\frac{x^2 - \nu^2}{x^2} = -\nu^2.$$

Logo, a equação indicial é

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = r(r-1) + r - \nu^2 = r^2 - \nu^2 = 0,$$

com raízes $r = \pm\nu$. Consideraremos os três casos $\nu = 0$, $\nu = \frac{1}{2}$ e $\nu = 1$ para o intervalo $x > 0$.

Equação de Bessel de Ordem Zero. Neste caso $\nu = 0$, de modo que a Eq. (1) fica reduzida a

$$L[y] = x^2y'' + xy' + x^2y = 0, \tag{2}$$

e as raízes da equação indicial são iguais. Substituindo

$$y = \phi(r,x) = a_0x^r + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{r+n}, \tag{3}$$

na Eq. (2), obtemos

$$\begin{aligned} L[\phi](r,x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n[(r+n)(r+n-1) + (r+n)]x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2} \\ &= a_0[r(r-1) + r]x^r + a_1[(r+1)r + (r+1)]x^{r+1} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{a_n[(r+n)(r+n-1) + (r+n)] + a_{n-2}\right\} x^{r+n} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Como já observamos, as raízes da equação indicial $F(r) = r(r-1) + r = 0$ são $r_1 = 0$ e $r_2 = 0$, logo temos o caso de raízes iguais. A relação de recorrência é

$$a_n(r) = -\frac{a_{n-2}(r)}{(r+n)(r+n-1) + (r+n)} = -\frac{a_{n-2}(r)}{(r+n)^2}, \qquad n \geq 2. \tag{5}$$

Para determinar $y_1(x)$ fazemos r igual a 0. Então, da Eq. (4) segue que, para que o coeficiente de x^{r+1} seja zero, temos que escolher $a_1 = 0$. Portanto, da Eq. (5), $a_3 = a_5 = a_7 = \ldots = 0$. Além disso,

$$a_n(0) = -a_{n-2}(0)/n^2, \qquad n = 2, 4, 6, 8, \ldots,$$

ou, fazendo $n = 2m$, obtemos

[14]Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) começou uma carreira em negócios quando jovem, mas se interessou logo por astronomia e matemática. Foi designado diretor do observatório em Königsberg em 1810 e manteve essa posição até sua morte. Seu estudo de perturbações planetárias levou-o, em 1824, a fazer a primeira análise sistemática das soluções da Eq. (1), conhecidas como funções de Bessel. É famoso, também, por fazer o primeiro cálculo preciso da distância da Terra a uma estrela em 1838.

$$a_{2m}(0) = -a_{2m-2}(0)/(2m)^2, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots .$$

Assim,

$$a_2(0) = -\frac{a_0}{2^2}, \qquad a_4(0) = \frac{a_0}{2^4 2^2}, \qquad a_6(0) = -\frac{a_0}{2^6(3 \cdot 2)^2},$$

e, em geral,

$$a_{2m}(0) = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m!)^2}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots . \tag{6}$$

Portanto,

$$y_1(x) = a_0 \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2} \right], \qquad x > 0. \tag{7}$$

A função entre colchetes é conhecida como a *função de Bessel de primeira espécie de ordem zero*, e é denotada por $J_0(x)$. Segue do Teorema 5.6.1 que a série converge para todo x e que J_0 é analítica em $x = 0$. Algumas das propriedades importantes de J_0 estão discutidas nos problemas. A Figura 5.7.1 mostra os gráficos de $y = J_0(x)$ e de algumas das somas parciais da série (7).

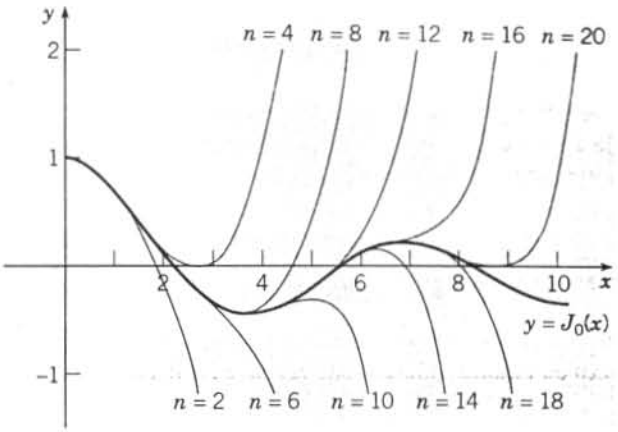

FIGURA 5.7.1 Aproximações polinomiais de $J_0(x)$. O valor de n é o grau do polinômio na aproximação.

Para determinar $y_2(x)$, vamos calcular $a'_n(0)$.[15] Primeiro, note que devido ao coeficiente de x^{r+1} na Eq. (4) $(r+1)^2 a_1(r) = 0$. Logo, $a_1(r) = 0$ para todo r próximo de $r = 0$. Então, não só $a_1(0) = 0$, mas também $a'_1(0) = 0$. Da relação de recorrência (5) segue que $a'_3(0) = a'_5(0) = \ldots = a'_{2n+1}(0) = \ldots = 0$; logo, precisamos apenas calcular $a'_{2m}(0)$, $m = 1, 2, 3, \ldots$. Da Eq. (5), temos

$$a_{2m}(r) = -a_{2m-2}(r)/(r + 2m)^2, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots .$$

Resolvendo esta relação de recorrência, obtemos

$$a_2(r) = -\frac{a_0}{(r+2)^2}, \qquad a_4(r) = \frac{a_0}{(r+2)^2(r+4)^2},$$

e, em geral,

$$a_{2m}(r) = \frac{(-1)^m a_0}{(r+2)^2 \cdots (r+2m)^2}, \qquad m \geq 3. \tag{8}$$

Podemos efetuar os cálculos de $a'_{2m}(r)$ de maneira mais conveniente notando que, se

$$f(x) = (x - \alpha_1)^{\beta_1}(x - \alpha_2)^{\beta_2}(x - \alpha_3)^{\beta_3} \cdots (x - \alpha_n)^{\beta_n},$$

e se x for diferente de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, então

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\beta_1}{x - \alpha_1} + \frac{\beta_2}{x - \alpha_2} + \cdots + \frac{\beta_n}{x - \alpha_n}.$$

[15] O Problema 10 esquematiza um procedimento alternativo no qual simplesmente substituímos a fórmula (23) da Seção 5.6 na Eq. (2) e depois determinamos os b_n.

Aplicando este resultado a $a_{2m}(r)$ na Eq. (8), vemos que

$$\frac{a'_{2m}(r)}{a_{2m}(r)} = -2\left(\frac{1}{r+2} + \frac{1}{r+4} + \cdots + \frac{1}{r+2m}\right),$$

e fazendo r igual a 0, obtemos

$$a'_{2m}(0) = -2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2m}\right] a_{2m}(0).$$

Substituindo $a_{2m}(0)$ dado pela Eq. (6) e fazendo

$$H_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}, \tag{9}$$

obtemos, finalmente,

$$a'_{2m}(0) = -H_m \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m!)^2}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

A segunda solução da equação de Bessel de ordem zero é encontrada fazendo-se $a_0 = 1$ e substituindo-se, na Eq. (23) da Seção 5.6, $y_1(x)$ e $b_{2m}(0) = a'_{2m}(0)$. Obtemos

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} H_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m}, \qquad x > 0. \tag{10}$$

Em vez de y_2, a segunda solução considerada, em geral, é uma determinada combinação linear de J_0 e y_2. Ela é conhecida como a função de Bessel de segunda espécie de ordem zero, e é denotada por Y_0. Seguindo Copson (Capítulo 12), definimos[16]

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}[y_2(x) + (\gamma - \ln 2)J_0(x)]. \tag{11}$$

Aqui, γ é uma constante, conhecida como a constante de Euler-Máscheroni;[17] ela é definida pela equação

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) \cong 0{,}5772. \tag{12}$$

Substituindo $y_2(x)$ na Eq. (11), obtemos

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right)J_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} H_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m}\right], \qquad x > 0. \tag{13}$$

A solução geral da equação de Bessel de ordem zero para $x > 0$ é

$$y = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x).$$

Note que $J_0(x) \to 1$ quando $x \to 0$ e que $Y_0(x)$ tem uma singularidade logarítmica em $x = 0$, ou seja, $Y_0(x)$ se comporta como $(2/\pi)\ln x$ quando $x \to 0$ por valores positivos. Então, se estivermos interessados em soluções da equação de Bessel de ordem zero que sejam finitas na origem, o que ocorre muitas vezes, temos que descartar Y_0. Os gráficos das funções $J_0(x)$ e $Y_0(x)$ estão ilustrados na Figura 5.7.2.

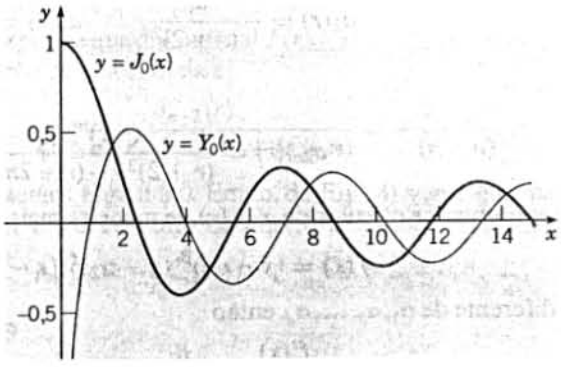

FIGURA 5.7.2 As funções de Bessel J_0 e Y_0.

[16]Outros autores usam outras definições de Y_0. Esta escolha para Y_0 também é conhecida como função de Weber, em homenagem a Heinrich Weber (1842-1913), que ensinou em diversas universidades alemãs.

[17]Lorenzo Máscheroni (1750-1800) era um padre italiano que foi professor na University of Pavia. Ele calculou corretamente as 19 primeiras casas decimais γ em 1790.

É interessante observar na Figura 5.7.2 que para x grande, ambas as funções $J_0(x)$ e $Y_0(x)$ oscilam. Poderíamos ter antecipado tal comportamento a partir da equação original; de fato, isso é verdade para as soluções da equação de Bessel de ordem ν. Dividindo a Eq. (1) por x^2, obtemos

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0.$$

Para x muito grande é razoável suspeitar que os termos $(1/x)y'$ e $(\nu^2/x^2)y$ são pequenos e, portanto, podem ser desprezados. Se isso for verdade, então a equação de Bessel de ordem ν pode ser aproximada por

$$y'' + y = 0.$$

As soluções desta equação são sen x e cos x; poderíamos, então, antecipar que as soluções da equação de Bessel para valores grandes de x são semelhantes a combinações lineares de sen x e cos x. Isso está correto no sentido em que as funções de Bessel são oscilatórias; no entanto, está apenas parcialmente correto. Para x grande, as funções J_0 e Y_0 também decaem quando x aumenta; assim, a equação $y'' + y = 0$ não fornece uma aproximação adequada para a equação de Bessel para valores grandes de x, e é necessário uma análise mais delicada. De fato, é possível mostrar que

$$J_0(x) \cong \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{quando } x \to \infty, \tag{14}$$

e que

$$Y_0(x) \cong \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{quando } x \to \infty. \tag{15}$$

Essas aproximações assintóticas, quando $x \to \infty$, são, de fato, muito boas. Por exemplo, a Figura 5.7.3 mostra que a aproximação assintótica (14) para $J_0(x)$ é razoavelmente precisa para todo $x \geq 1$. Assim, para aproximar $J_0(x)$ em todo o intervalo de zero a infinito podemos usar dois ou três termos da série (7) para $x \leq 1$ e a aproximação assintótica (14) para $x \geq 1$.

Equação de Bessel de Ordem Meio. Este caso ilustra a situação na qual as raízes da equação indicial diferem por um inteiro positivo, mas a segunda solução não tem termo logarítmico. Fazendo $\nu = \frac{1}{2}$ na Eq. (1), obtemos

$$L[y] = x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \tfrac{1}{4}\right)y = 0. \tag{16}$$

Substituindo $y = \phi(r, x)$ pela série (3), obtemos

$$\begin{aligned} L[\phi](r,x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[(r+n)(r+n-1) + (r+n) - \tfrac{1}{4}\right]a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2} \\ &= \left(r^2 - \tfrac{1}{4}\right)a_0 x^r + \left[(r+1)^2 - \tfrac{1}{4}\right]a_1 x^{r+1} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty}\left\{\left[(r+n)^2 - \tfrac{1}{4}\right]a_n + a_{n-2}\right\}x^{r+n} = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

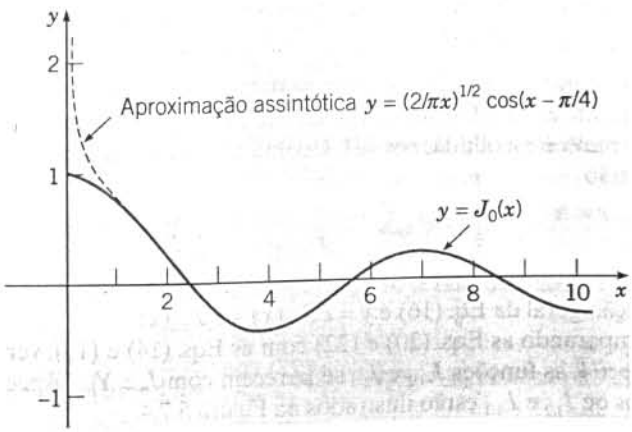

FIGURA 5.7.3 Aproximação assintótica de $J_0(x)$.

As raízes da equação indicial são $r_1 = \frac{1}{2}$ e $r_2 = -\frac{1}{2}$; logo, as raízes diferem por um inteiro. A relação de recorrência é

$$\left[(r+n)^2 - \tfrac{1}{4}\right] a_n = -a_{n-2}, \qquad n \geq 2. \tag{18}$$

Correspondendo à raiz maior $r_1 = \frac{1}{2}$, pelo coeficiente de x^{r+1} na Eq. (17) vemos que $a_1 = 0$. Logo, da Eq. (18), $a_3 = a_5 = \ldots = a_{2n+1} = \ldots = 0$. Além disso, para $r = \frac{1}{2}$,

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+1)}, \qquad n = 2, 4, 6 \ldots,$$

ou, fazendo $n = 2m$, obtemos

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{2m(2m+1)}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Resolvendo a relação de recorrência, encontramos

$$a_2 = -\frac{a_0}{3!}, \qquad a_4 = \frac{a_0}{5!}, \ldots$$

e, em geral,

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{(2m+1)!}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Portanto, fazendo $a_0 = 1$, obtemos

$$y_1(x) = x^{1/2}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m+1)!}\right] = x^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}, \qquad x > 0. \tag{19}$$

A segunda série de potências na Eq. (19) é precisamente a série de Taylor para sen x; logo, uma solução para a equação de Bessel de ordem meio é $x^{-1/2}$ sen x. A função de Bessel de primeira espécie de ordem meio, $J_{1/2}$, é definida como $(2/\pi)^{1/2} y_1$. Assim,

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \operatorname{sen} x, \qquad x > 0. \tag{20}$$

Correspondendo à raiz $r = -\frac{1}{2}$, é possível que encontremos dificuldade em calcular a_1, já que $N = r_1 - r_2 = 1$. No entanto, da Eq. (17) para $r = -\frac{1}{2}$, os coeficientes de x^r e de x^{r+1} são ambos nulos, independente da escolha de a_0 e a_1. Portanto, a_0 e a_1 podem ser escolhidos arbitrariamente. Da relação de recorrência (18) obtemos um conjunto de coeficientes com índices pares correspondendo a a_0 e um conjunto de coeficientes com índices ímpares correspondendo a a_1. Então não é necessário um termo logarítmico para se obter uma segunda solução nesse caso. Deixamos como exercício mostrar que, para $r = -\frac{1}{2}$,

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}, \qquad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Logo,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x^{-1/2}\left[a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] \\ &= a_0 \frac{\cos x}{x^{1/2}} + a_1 \frac{\operatorname{sen} x}{x^{1/2}}, \qquad x > 0. \end{aligned} \tag{21}$$

A constante a_1 simplesmente introduz um múltiplo de $y_1(x)$. A segunda solução da equação de Bessel de ordem meio é escolhida, em geral, como a solução para a qual $a_0 = (2/\pi)^{1/2}$ e $a_1 = 0$. Ela é denotada por $J_{-1/2}$. Então

$$J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x, \qquad x > 0. \tag{22}$$

A solução geral da Eq. (16) é $y = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x)$.

Comparando as Eqs. (20) e (22) com as Eqs. (14) e (15), vemos que, exceto por um deslocamento de fase de $\pi/4$, as funções $J_{-1/2}$ e $J_{1/2}$ se parecem com J_0 e Y_0, respectivamente, para valores grandes de x. Os gráficos de $J_{1/2}$ e $J_{-1/2}$ estão ilustrados na Figura 5.7.4.

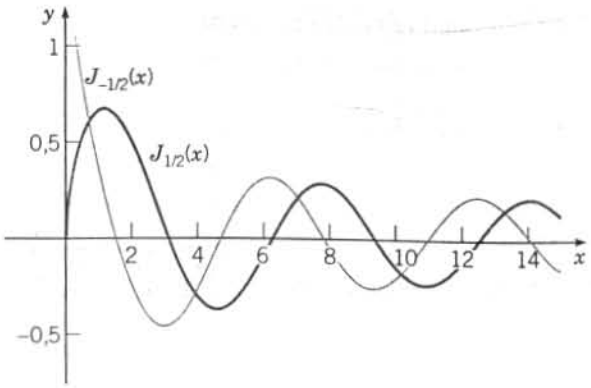

FIGURA 5.7.4 As funções de Bessel $J_{1/2}$ e $J_{-1/2}$.

Equação de Bessel de Ordem Um. Este caso ilustra a situação na qual as raízes da equação indicial diferem por um inteiro positivo e a segunda solução envolve um termo logarítmico. Fazendo $\nu = 1$ na Eq. (1), temos

$$L[y] = x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0. \tag{23}$$

Substituindo $y = \phi(r, x)$ pela série em (3) e juntando os termos como nos casos precedentes, obtemos

$$L[\phi](r,x) = a_0(r^2 - 1)x^r + a_1[(r+1)^2 - 1]x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left[(r+n)^2 - 1\right] a_n + a_{n-2} \right\} x^{r+n} = 0. \tag{24}$$

As raízes da equação indicial são $r_1 = 1$ e $r_2 = -1$. A relação de recorrência é

$$[(r+n)^2 - 1]a_n(r) = -a_{n-2}(r), \qquad n \geq 2. \tag{25}$$

Correspondendo à raiz maior $r = 1$, a relação de recorrência fica

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+2)n}, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Pelo coeficiente de x^{r+1} na Eq. (24), vemos também que $a_1 = 0$; logo, pela relação de recorrência, $a_3 = a_5 = \ldots = 0$. Para valores pares de n, seja $n = 2m$; então

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{(2m+2)(2m)} = -\frac{a_{2m-2}}{2^2(m+1)m}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Resolvendo essa relação de recorrência, obtemos

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m+1)!m!}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots. \tag{26}$$

A função de Bessel de primeira espécie de ordem um, denotada por J_1, é obtida escolhendo-se $a_0 = 1/2$. Portanto,

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m+1)!m!}. \tag{27}$$

A série converge absolutamente para todo x, de modo que J_1 é analítica em toda parte.

Ao determinar uma segunda solução da equação de Bessel de ordem um vamos ilustrar o método de substituição direta. O cálculo do termo geral na Eq. (28) abaixo é bastante complicado, mas os primeiros poucos coeficientes podem ser encontrados facilmente. De acordo com o Teorema 5.6.1, vamos supor que

$$y_2(x) = aJ_1(x)\ln x + x^{-1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right], \qquad x > 0. \tag{28}$$

Calculando $y'_2(x)$, $y''_2(x)$, substituindo na Eq. (23) e usando o fato de que J_1 é uma solução da Eq. (23), obtemos

$$2axJ_1'(x) + \sum_{n=0}^{\infty} [(n-1)(n-2)c_n + (n-1)c_n - c_n]x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0, \tag{29}$$

onde $c_0 = 1$. Substituindo $J_1(x)$ por sua expressão na Eq. (27), mudando os índices dos somatórios nas duas séries e efetuando diversos cálculos algébricos, chegamos a

$$-c_1 + [0 \cdot c_2 + c_0]x + \sum_{n=2}^{\infty}[(n^2-1)c_{n+1} + c_{n-1}]x^n = -a\left[x + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m+1)x^{2m+1}}{2^{2m}(m+1)!\,m!}\right]. \quad (30)$$

Da Eq. (30) notamos primeiro que $c_1 = 0$ e $a = -c_0 = -1$. Além disso, como a expressão à direita do sinal de igualdade contém apenas potências ímpares de x, o coeficiente de cada potência par de x na expressão à esquerda do sinal de igualdade tem que ser nulo. Então, como $c_1 = 0$, temos $c_3 = c_5 = \ldots = 0$. Correspondendo às potências ímpares de x, obtemos a relação de recorrência [seja $n = 2m + 1$ na série à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (30)]

$$[(2m+1)^2 - 1]c_{2m+2} + c_{2m} = \frac{(-1)^m(2m+1)}{2^{2m}(m+1)!\,m!}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots. \quad (31)$$

Fazendo $m = 1$ na Eq. (31), obtemos

$$(3^2 - 1)c_4 + c_2 = (-1)3/(2^2 \cdot 2!).$$

Note que c_2 pode ser escolhido *arbitrariamente*, e esta equação, então, determina c_4. Note, também, que na equação para o coeficiente de x, c_2 aparece multiplicado por 0, e essa equação foi usada para determinar a. Não é surpreendente que c_2 seja arbitrário, já que c_2 é o coeficiente de x na expressão $x^{-1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right]$. Em consequência, c_2 gera simplesmente um múltiplo de J_1 e y_2 só está determinado a menos de múltiplos de J_1. De acordo com a prática usual, escolhemos $c_2 = 1/2^2$. Obtemos, então,

$$c_4 = \frac{-1}{2^4 \cdot 2}\left[\frac{3}{2} + 1\right] = \frac{-1}{2^4 2!}\left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) + 1\right]$$

$$= \frac{(-1)}{2^4 \cdot 2!}(H_2 + H_1).$$

É possível mostrar que a solução da relação de recorrência (31) é

$$c_{2m} = \frac{(-1)^{m+1}(H_m + H_{m-1})}{2^{2m}m!(m-1)!}, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

com a convenção de que $H_0 = 0$. Assim,

$$y_2(x) = -J_1(x)\ln x + \frac{1}{x}\left[1 - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(H_m + H_{m-1})}{2^{2m}m!(m-1)!}x^{2m}\right], \qquad x > 0. \quad (32)$$

O cálculo de $y_2(x)$ usando outro procedimento [veja as Eqs. (19) e (20) da Seção 5.6], no qual determinamos $c_n(r_2)$, é ligeiramente mais fácil. Em particular, este último procedimento fornece uma fórmula geral para c_{2m} sem a necessidade de se resolver uma relação de recorrência da forma (31) (veja o Problema 11). Nesse aspecto você pode querer, também, comparar os cálculos da segunda solução da equação de Bessel de ordem zero no texto e no Problema 10.

A segunda solução da Eq. (23), a função de Bessel de segunda espécie de ordem um, Y_1, é escolhida, em geral, como uma determinada combinação linear de J_1 e y_2. Seguindo Copson (Capítulo 12), Y_1 é definida como

$$Y_1(x) = \frac{2}{\pi}[-y_2(x) + (\gamma - \ln 2)J_1(x)], \quad (33)$$

onde γ é definido pela Eq. (12). A solução geral da Eq. (23) para $x > 0$ é

$$y = c_1 J_1(x) + c_2 Y_1(x).$$

Note que enquanto J_1 é analítica em $x = 0$, a segunda solução Y_1 torna-se ilimitada do mesmo modo que $1/x$ quando $x \to 0$. A Figura 5.7.5 mostra os gráficos de J_1 e Y_1.

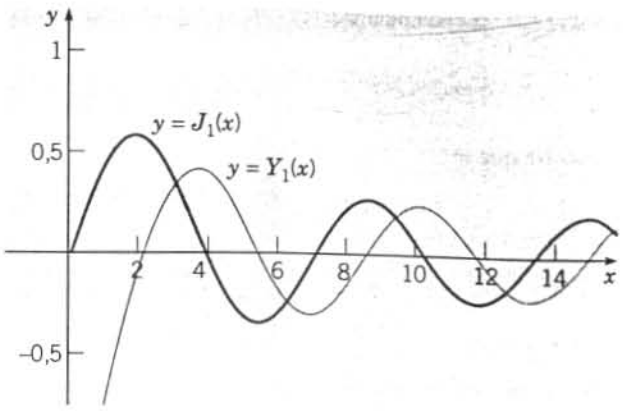

FIGURA 5.7.5 As funções de Bessel J_1 e Y_1.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 4, mostre que a equação diferencial dada tem um ponto singular regular em $x = 0$ e determine duas soluções para $x > 0$.

1. $x^2y'' + 2xy' + xy = 0$
2. $x^2y'' + 3xy' + (1 + x)y = 0$
3. $x^2y'' + xy' + 2xy = 0$
4. $x^2y'' + 4xy' + (2 + x)y = 0$
5. Encontre duas soluções para a equação de Bessel de ordem $\frac{3}{2}$,

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \tfrac{9}{4}\right)y = 0, \qquad x > 0.$$

6. Mostre que a equação de Bessel de ordem meio

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \tfrac{1}{4}\right)y = 0, \qquad x > 0$$

pode ser reduzida à equação

$$v'' + v = 0$$

pela mudança da variável dependente $y = x^{-1/2}v(x)$. Conclua disso que $y_1(x) = x^{-1/2}\cos x$ e $y_2(x) = x^{-1/2}\operatorname{sen} x$ são soluções da equação de Bessel de ordem meio.

7. Mostre diretamente que a série para $J_0(x)$, Eq. (7), converge absolutamente para todo x.
8. Mostre diretamente que a série para $J_1(x)$, Eq. (27), converge absolutamente para todo x e que $J_0'(x) = -J_1(x)$.
9. Considere a equação de Bessel de ordem ν,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \qquad x > 0,$$

onde ν é real e positivo.

(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular e que as raízes da equação indicial são ν e $-\nu$.

(b) Correspondendo à raiz maior ν, mostre que uma solução é

$$y_1(x) = x^{\nu}\left[1 - \frac{1}{1!(1+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(1+\nu)(2+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \sum_{m=3}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(1+\nu)\cdots(m+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\right].$$

(c) Se 2ν não for inteiro, mostre que a segunda solução será

$$y_2(x) = x^{-\nu}\left[1 - \frac{1}{1!(1-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(1-\nu)(2-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \sum_{m=3}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(1-\nu)\cdots(m-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\right].$$

Note que $y_1(x) \to 0$ quando $x \to 0$ e que $y_2(x)$ torna-se ilimitado quando $x \to 0$.

(d) Verifique, por métodos diretos, que as séries de potências nas expressões para $y_1(x)$ e $y_2(x)$ convergem absolutamente para todo x. Verifique, também, que y_2 é uma solução, bastando apenas que ν não seja inteiro.

10. Mostramos, nesta seção, que uma solução da equação de Bessel de ordem zero

$$L[y] = x^2y'' + xy' + x^2y = 0$$

é J_0, onde $J_0(x)$ é dada pela Eq. (7) com $a_0 = 1$. De acordo com o Teorema 5.6.1, uma segunda solução tem a forma $(x > 0)$

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n.$$

(a) Mostre que

$$L[y_2](x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+2} + 2xJ_0'(x). \tag{i}$$

(b) Substituindo a representação em série de $J_0(x)$ na Eq. (i), mostre que

$$b_1 x + 2^2 b_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (n^2 b_n + b_{n-2})x^n = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}. \tag{ii}$$

(c) Note que aparecem apenas potências pares de x na expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (ii). Mostre que $b_1 = b_3 = b_5 = \ldots = 0$, $b_2 = \frac{1}{2}(1!)^2$ e que

$$(2n)^2 b_{2n} + b_{2n-2} = -2(-1)^n(2n)/2^{2n}(n!)^2, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Deduza que

$$b_4 = -\frac{1}{2^2 4^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) \quad \text{e} \quad b_6 = \frac{1}{2^2 4^2 6^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right).$$

A solução geral da relação de recorrência é $b_{2n} = (-1)^{n+1}H_n/2^{2n}(n!)^2$. Substituindo b_n na expressão para $y_2(x)$, obtemos a solução dada na Eq. (10).

11. Encontre uma segunda solução da equação de Bessel de ordem um calculando os $c_n(r_2)$ e a da Eq. (24) da Seção 5.6 de acordo com as fórmulas (19) e (20) daquela seção. Algumas diretrizes para esse cálculo são as seguintes. Primeiro, use a Eq. (24) desta seção para mostrar que $a_1(-1)$ e $a_1'(-1)$ são iguais a 0. Depois mostre que $c_1(-1) = 0$ e, da relação de recorrência, que $c_n(-1) = 0$ para $n = 3, 5, \ldots$. Finalmente, use a Eq. (25) para mostrar que

$$a_2(r) = -\frac{a_0}{(r+1)(r+3)}, \qquad a_4(r) = \frac{a_0}{(r+1)(r+3)(r+3)(r+5)},$$

e que

$$a_{2m}(r) = \frac{(-1)^m a_0}{(r+1)\cdots(r+2m-1)(r+3)\cdots(r+2m+1)}, \qquad m \geq 3.$$

Depois mostre que

$$c_{2m}(-1) = (-1)^{m+1}(H_m + H_{m-1})/2^{2m}m!(m-1)!, \qquad m \geq 1.$$

12. Através de uma mudança adequada de variável é possível, algumas vezes, transformar outra equação diferencial em uma equação de Bessel. Por exemplo, mostre que uma solução de

$$x^2 y'' + \left(\alpha^2\beta^2 x^{2\beta} + \tfrac{1}{4} - \nu^2\beta^2\right)y = 0, \qquad x > 0$$

é dada por $y = x^{1/2}f(\alpha x^\beta)$, onde $f(\xi)$ é uma solução da equação de Bessel de ordem ν.

13. Usando o resultado do Problema 12, mostre que a solução geral da equação de Airy

$$y'' - xy = 0, \qquad x > 0$$

é $y = x^{1/2}[c_1 f_1(\frac{2}{3}ix^{3/2}) + c_2 f_2(\frac{2}{3}ix^{3/2})]$, onde $f_1(\xi)$ e $f_2(\xi)$ formam um conjunto fundamental de soluções da equação de Bessel de ordem um terço.

14. Pode-se mostrar que J_0 tem uma infinidade de zeros para $x > 0$. Em particular, os três primeiros zeros são aproximadamente iguais a 2,405; 5,520 e 8,653 (veja a Figura 5.7.1). Denote por λ_j, $j = 1, 2, 3, \ldots$ os zeros de J_0; segue que

$$J_0(\lambda_j x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

Verifique que $y = J_0(\lambda_j x)$ satisfaz a equação diferencial

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \lambda_j^2 y = 0, \qquad x > 0.$$

Mostre que, portanto,

$$\int_0^1 xJ_0(\lambda_i x)J_0(\lambda_j x)\,dx = 0 \quad \text{se} \quad \lambda_i \neq \lambda_j.$$

Esta propriedade importante de $J_0(\lambda_r x)$, conhecida como propriedade de ortogonalidade, é útil na resolução de problemas de valores de contorno.

Sugestão: escreva a equação diferencial para $J_0(\lambda_r x)$. Multiplique-a por $xJ_0(\lambda_r x)$ e a subtraia de $xJ_0(\lambda_r x)$ vezes a equação diferencial para $J_0(\lambda_r x)$. Depois integre de 0 a 1.

REFERÊNCIAS

Coddington, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1961; New York: Dover, 1989).

Copson, E. T., *An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable* (Oxford: Oxford University Press, 1935).

Demonstrações dos Teoremas 5.3.1 e 5.6.1 podem ser encontradas em livros intermediários ou avançados; veja, por exemplo, os Capítulos 3 e 4 de Coddington, ou os Capítulos 3 e 4 de

Rainville, E. D., *Intermediate Differential Equations* (2nd ed.) (New York: Macmillan, 1964).

Veja também esses textos para uma discussão do ponto no infinito, mencionado no Problema 43 da Seção 5.4. O comportamento de soluções perto de um ponto singular irregular é um tópico ainda mais avançado; uma discussão sucinta pode ser encontrada no Capítulo 5 de

Coddington, E.A.,and Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential Equations* (NewYork: McGraw-Hill, 1955).

Discussões mais completas da equação de Bessel, da equação de Legendre e de muitas outras equações que levam o nome de pessoas podem ser encontradas em livros avançados de equações diferenciais, de métodos de matemática aplicada e de funções especiais. Um livro que trata de funções especiais, como os polinômios de Legendre e as funções de Bessel, é

Hochstadt, H., *Special Functions of Mathematical Physics* (New York: Holt, 1961).

Uma compilação excelente de fórmulas, gráficos e tabelas de funções de Bessel, funções de Legendre e outras funções especiais da física matemática pode ser encontrada em

Abramowitz, M., and Stegun, I. A. (eds.), *Handbook of Mathematical Functions* (NewYork: Dover, 1965); publicado originalmente pelo Departamento Nacional de Padrões, Washington, DC, 1964.

CAPÍTULO

6

A Transformada de Laplace

Muitos problemas práticos de engenharia envolvem sistemas mecânicos ou elétricos sob a ação de forças descontínuas ou de impulsos. Os métodos descritos no Capítulo 3 são, muitas vezes, complicados de usar em tais problemas. Outro método particularmente adequado para esses problemas, embora possa ser usado mais geralmente, baseia-se na transformada de Laplace. Vamos descrever, neste capítulo, como esse método importante funciona, enfatizando problemas típicos que aparecem nas aplicações de engenharia.

6.1 Definição da Transformada de Laplace

Integrais Impróprias. Como a transformada de Laplace envolve uma integral de zero a infinito, é necessário conhecimento sobre integrais impróprias desse tipo para apreciar o desenvolvimento subsequente das propriedades da transformada. Vamos fornecer aqui uma revisão rápida de tais integrais impróprias. Se você já estiver familiarizado com integrais impróprias, pode querer pular esta revisão. Por outro lado, se uma integral imprópria é novidade para você, então você deveria, provavelmente, consultar um livro de Cálculo, onde encontrará muito mais detalhes e exemplos.

Uma integral imprópria em um intervalo limitado é definida como um limite de integrais em intervalos finitos; assim,

$$\int_a^\infty f(t)\,dt = \lim_{A\to\infty}\int_a^A f(t)\,dt, \tag{1}$$

onde A é um número real positivo. Se a integral de a até A existe para todo $A > a$ e se existe o limite quando $A \to \infty$, dizemos que a integral imprópria **converge** para esse valor-limite. Caso contrário, a integral **diverge** ou não existe. Os exemplos a seguir ilustram ambas as possibilidades.

EXEMPLO 1

Seja $f(t) = e^{ct}, t \geq 0$, onde c é uma constante real não nula. Então

$$\int_0^\infty e^{ct}\,dt = \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{ct}\,dt = \lim_{A\to\infty}\left.\frac{e^{ct}}{c}\right|_0^A$$

$$= \lim_{A\to\infty}\frac{1}{c}(e^{cA}-1).$$

Segue que a integral imprópria converge para o valor $-1/c$ se $c < 0$ e diverge se $c > 0$. Se $c = 0$, o integrando $f(t)$ é a função constante igual a 1 e a integral novamente diverge.

EXEMPLO 2

Seja $f(t) = 1/t, t \geq 1$. Então

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t} = \lim_{A\to\infty}\int_1^A \frac{dt}{t} = \lim_{A\to\infty}\ln A.$$

Como $\lim_{A\to\infty}\ln A = \infty$, a integral imprópria diverge.

EXEMPLO 3

Seja $f(t) = t^{-p}, t \geq 1$, onde p é uma constante real e $p \neq 1$; o caso $p = 1$ foi considerado no Exemplo 2. Então

$$\int_1^\infty t^{-p}\,dt = \lim_{A\to\infty}\int_1^A t^{-p}\,dt = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{1-p}(A^{1-p}-1).$$

Quando $A \to \infty, A^{1-p} \to 0$ se $p > 1$, mas $A^{1-p} \to \infty$ se $p < 1$. Portanto, $\int_1^\infty t^{-p}\,dt$ converge para o valor $1/(p-1)$ para $p > 1$, mas diverge (incorporando o resultado do Exemplo 2) para $p \leq 1$. Esses resultados são análogos àqueles para a série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$.

Antes de discutir a possível existência de $\int_a^\infty f(t)\,dt$, vamos definir alguns termos. Uma função é dita **seccionalmente contínua** ou **contínua por partes** em um intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$ se o intervalo puder ser dividido por um número finito de pontos $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ de modo que

1. f seja contínua em cada subintervalo aberto $t_{i-1} < t < t_i$.
2. f tenda a um limite finito nos extremos de cada subintervalo por pontos no interior do intervalo.

Em outras palavras, f é seccionalmente contínua em um intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$ se for contínua aí exceto por um número finito de descontinuidades do tipo salto. Se f for seccionalmente contínua em $\alpha \leq t \leq \beta$ para todo $\beta > \alpha$, então dizemos que f é seccionalmente contínua para $t \geq \alpha$. A Figura 6.1.1 mostra um exemplo de uma função seccionalmente contínua.

A integral de uma função seccionalmente contínua em um intervalo finito é simplesmente a soma das integrais nos subintervalos criados pelos pontos da partição. Por exemplo, para a função $f(t)$ na Figura 6.6.1, temos

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int_\alpha^{t_1} f(t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt + \int_{t_2}^{\beta} f(t)\,dt. \tag{2}$$

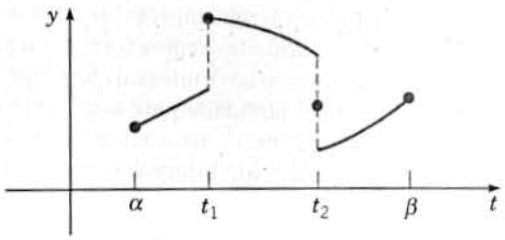

FIGURA 6.1.1 Uma função seccionalmente contínua $y = f(t)$.

Para a função na Figura 6.1.1 atribuímos valores para a função nos extremos α e β e nos pontos da partição t_1 e t_2. No entanto, para as integrais na Eq. (2) não importa se a função $f(t)$ está definida nesses pontos, ou quais os valores atribuídos a $f(t)$ neles. Os valores das integrais na Eq. (2) permanecem os mesmos.

Logo, se f for seccionalmente contínua no intervalo $a \leq t \leq A$, a integral $\int_a^A f(t)\,dt$ existe. Portanto, se f for seccionalmente contínua para $t \geq a$, então $\int_a^A f(t)\,dt$ existe para todo $A > a$. No entanto, a continuidade por partes não é suficiente para garantir a convergência da integral imprópria $\int_a^\infty f(t)\,dt$, como mostram os exemplos precedentes.

Se f não puder ser integrada facilmente em termos de funções elementares, a definição de convergência de $\int_a^\infty f(t)\,dt$ pode ser difícil de aplicar. Muitas vezes a maneira mais conveniente de testar a convergência ou divergência de uma integral imprópria é usando o teorema de comparação a seguir, análogo a um teorema semelhante para séries infinitas.

Teorema 6.1.1 Se f for seccionalmente contínua para $t \geq a$, se $|f(t)| \leq g(t)$ quando $t \geq M$ para alguma constante positiva M e se $\int_M^\infty g(t)\,dt$ converge, então $\int_a^\infty f(t)\,dt$ também converge. Por outro lado, se $f(t) \geq g(t) \geq 0$ para $t \geq M$ e se $\int_M^\infty g(t)\,dt$ diverge, então $\int_a^\infty f(t)\,dt$ também diverge.

A demonstração deste resultado de Cálculo não será dada aqui. Ele se torna plausível, no entanto, se compararmos as áreas representadas por $\int_M^\infty g(t)\,dt$ e por $\int_M^\infty |f(t)|\,dt$. As funções mais úteis para efeitos de comparação são e^{ct} e t^p, que consideramos nos Exemplos 1, 2 e 3.

A Transformada de Laplace. Entre as ferramentas muito úteis para a resolução de equações diferenciais estão as **transformadas integrais**. Uma transformada integral é uma relação da forma

$$F(s) = \int_\alpha^\beta K(s,t)f(t)\,dt, \tag{3}$$

onde $K(s, t)$ é uma função dada, chamada de **núcleo** da transformação, e os limites de integração α e β também são dados. É possível que $\alpha = -\infty$ ou $\beta = \infty$, ou ambos. A relação (3) transforma a função f em outra função F, que é chamada a transformada de f.

Existem diversas transformadas integrais úteis em matemática aplicada, mas vamos considerar, neste capítulo, apenas a transformada de Laplace.[1] Essa transformada é definida da seguinte maneira. Suponha que $f(t)$ é uma função definida para $t \geq 0$ e que f satisfaz certas condições que serão especificadas mais adiante. Então a transformada de Laplace de f, que denotaremos por $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ou por $F(s)$, é definida pela equação

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt, \tag{4}$$

sempre que essa integral imprópria convergir. A transformada de Laplace usa o núcleo $K(s,t) = e^{-st}$. Como as soluções das equações diferenciais lineares com coeficientes constantes estão baseadas na função exponencial, a transformada de Laplace é particularmente útil para essas equações. A ideia geral ao se usar a transformada de Laplace para se resolver uma equação diferencial é a seguinte:

1. Use a relação (4) para transformar um problema de valor inicial para uma função desconhecida f no domínio dos t em um problema mais simples (de fato, um problema algébrico) para F, no domínio dos s.
2. Resolva esse problema algébrico para encontrar F.
3. Recupere a função desejada f de sua transformada F. Essa última etapa é conhecida como "inverter a transformada".

Em geral, o parâmetro s pode ser complexo, e todo o poder da transformada de Laplace só se torna disponível quando $F(s)$ é considerada uma função de variável complexa. No entanto, para os problemas discutidos aqui é suficiente considerar apenas valores reais de s. A transformada de Laplace F de uma função f vai existir se f satisfizer determinadas condições, como as enunciadas no teorema a seguir.

Teorema 6.1.2 Suponha que

1. f é seccionalmente contínua no intervalo $0 \leq t \leq A$ para qualquer A positivo.
2. $|f(t)| \leq Ke^{at}$ quando $t \geq M$. Nesta desigualdade, K, a e M são constantes reais com K e M necessariamente positivas.

Então, a transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, definida pela Eq. (4), existe para $s > a$.

Para estabelecer este teorema, vamos mostrar que a integral na Eq. (4) converge para s > a. Separando a integral imprópria em duas partes, temos

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = \int_0^M e^{-st}f(t)\,dt + \int_M^\infty e^{-st}f(t)\,dt. \tag{5}$$

A primeira integral à direita do sinal de igualdade na Eq. (5) existe pela hipótese (1) do teorema; logo, a existência de $F(s)$ depende da convergência da segunda integral. Pela hipótese (2), temos, para $t \geq M$,

$$|e^{-st}f(t)| \leq Ke^{-st}e^{at} = Ke^{(a-s)t},$$

[1] A transformada de Laplace tem esse nome em homenagem ao eminente matemático francês P. S. Laplace, que estudou a relação (3) em 1782. No entanto, as técnicas descritas neste capítulo só foram desenvolvidas um século depois ou mais tarde. Elas se devem, principalmente, a Oliver Heaviside (1850-1925), um engenheiro elétrico inglês inovador, mas pouco convencional, que fez contribuições importantes para o desenvolvimento e a aplicação da teoria eletromagnética.

e assim, pelo Teorema 6.1.1, $F(s)$ existe se $\int_M^\infty e^{(a-s)t}\,dt$ convergir. Pelo Exemplo 1, com $a-s$ no lugar de c, vemos que essa última integral converge quando $a-s<0$, o que estabelece o Teorema 6.1.2.

A menos que seja dito especificamente o contrário, vamos tratar, neste capítulo, quase que exclusivamente de funções que satisfazem as condições do Teorema 6.1.2. Tais funções são descritas como seccionalmente contínuas e de **ordem exponencial** quando $t\to\infty$. Note que existem funções que não são de ordem exponencial quando $t\to\infty$. Uma dessas funções é $f(t)=e^{t^2}$. Quando $t\to\infty$, esta função cresce mais rapidamente do que Ke^{at}, independentemente de quão grande sejam as constantes K e a.

As transformadas de Laplace de algumas funções elementares importantes são dadas nos exemplos a seguir.

EXEMPLO 4

Seja $f(t)=1, t\geq 0$. Então, como no Exemplo 1,

$$\mathcal{L}\{1\}=\int_0^\infty e^{-st}\,dt=-\lim_{A\to\infty}\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_0^A=\frac{1}{s},\qquad s>0.$$

EXEMPLO 5

Seja $f(t)=e^{at}, t\geq 0$. Então, novamente referindo-nos ao Exemplo 1,

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}\,dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}\,dt$$

$$=\frac{1}{s-a},\qquad s>a.$$

EXEMPLO 6

Seja

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0\leq t<1,\\ k, & t=1,\\ 0, & t>1,\end{cases}$$

onde k é uma constante. Em contextos de engenharia, $f(t)$ representa muitas vezes um impulso unitário, talvez uma força ou uma tensão.

Note que f é uma função seccionalmente contínua. Então

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt=\int_0^1 e^{-st}\,dt=-\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_0^1=\frac{1-e^{-s}}{s},\qquad s>0.$$

Observe que $\mathcal{L}\{f(t)\}$ não depende de k, o valor da função no ponto de descontinuidade. Mesmo que $f(t)$ não esteja definida neste ponto, a transformada de Laplace de f permanece a mesma. Logo, existem muitas funções, diferindo de valor em um único ponto, que têm a mesma transformada de Laplace.

EXEMPLO 7

Seja $f(t)=\operatorname{sen} at, t\geq 0$. Então

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} at\}=F(s)=\int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen} at\,dt,\qquad s>0.$$

Como

$$F(s)=\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}\operatorname{sen} at\,dt,$$

integrando por partes, obtemos

$$F(s)=\lim_{A\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}\cos at}{a}\bigg|_0^A-\frac{s}{a}\int_0^A e^{-st}\cos at\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{a}-\frac{s}{a}\int_0^\infty e^{-st}\cos at\,dt.$$

Uma segunda integração por partes fornece

$$F(s)=\frac{1}{a}-\frac{s^2}{a^2}\int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen} at\,dt$$

$$=\frac{1}{a}-\frac{s^2}{a^2}F(s).$$

Portanto, resolvendo para $F(s)$, temos

$$F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \qquad s > 0.$$

Vamos supor que f_1 e f_2 são duas funções cujas transformadas de Laplace existem para $s > a_1$ e $s > a_2$, respectivamente. Então, para s maior do que o máximo de a_1 e a_2,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)]\,dt \\ &= c_1 \int_0^\infty e^{-st} f_1(t)\,dt + c_2 \int_0^\infty e^{-st} f_2(t)\,dt;\end{aligned}$$

logo

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\}. \tag{6}$$

A Eq. (6) afirma que a transformada de Laplace é um **operador linear**, e faremos uso frequente dessa propriedade mais tarde. A soma na Eq. (6) pode ser prontamente estendida para um número arbitrário de parcelas.

EXEMPLO 8

Encontre a transformada de Laplace de $f(t) = 5e^{-2t} - 3\,\text{sen}\,4t$, $t \geq 0$.

Usando a Eq. (6), escrevemos

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} - 3\mathcal{L}\{\text{sen}4t\}.$$

Então, dos Exemplos 5 e 6, obtemos

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{5}{s+2} - \frac{12}{s^2+16}, \qquad s > 0.$$

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 4, esboce o gráfico da função dada. Em cada caso determine se f é contínua, seccionalmente contínua ou nenhuma das duas no intervalo $0 \leq t \leq 3$.

1. $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 + t, & 1 < t \leq 2 \\ 6 - t, & 2 < t \leq 3 \end{cases}$

2. $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ (t-1)^{-1}, & 1 < t \leq 2 \\ 1, & 2 < t \leq 3 \end{cases}$

3. $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & 1 < t \leq 2 \\ 3 - t, & 2 < t \leq 3 \end{cases}$

4. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 3 - t, & 1 < t \leq 2 \\ 1, & 2 < t \leq 3 \end{cases}$

5. Encontre a transformada de Laplace de cada uma das funções a seguir:
   (a) $f(t) = t$
   (b) $f(t) = t^2$
   (c) $f(T) = t^n$, onde n é um inteiro positivo.
6. Encontre a transformada de Laplace de $f(t) = \cos at$, onde a é uma constante real.

Lembre que $\cosh bt = (e^{bt} + e^{-bt})/2$ e $\text{senh}\, bt = (e^{bt} - e^{-bt})/2$. Em cada um dos Problemas de 7 a 10, encontre a transformada de Laplace da função dada; a e b são constantes reais.

7. $f(t) = \cosh bt$
8. $f(t) = \text{senh}\, bt$
9. $f(t) = e^{at} \cosh bt$
10. $f(t) = e^{at}\text{senh}\, bt$

Em cada um dos Problemas de 11 a 14, lembre que $\cos bt = (e^{ibt} + e^{-ibt})/2$ e $\text{sen}\, bt = (e^{ibt} - e^{-ibt})/2i$. Supondo que as fórmulas de integração elementares podem ser estendidas para esse caso, encontre a transformada de Laplace da função dada; a e b são constantes reais.

11. $f(t) = \text{sen}bt$
12. $f(t) = \cos bt$
13. $f(t) = e^{at}\,\text{sen}bt$
14. $f(t) = e^{at} \cos bt$

Em cada um dos Problemas de 15 a 20, use integração por partes para encontrar a transformada de Laplace da função dada; n é um inteiro positivo e a é uma constante real.

15. $f(t) = te^{at}$
16. $f(t) = t \operatorname{sen} at$
17. $f(t) = t \cosh at$
18. $f(t) = t^n e^{at}$
19. $f(t) = t^2 \operatorname{sen} at$
20. $f(t) = t^2 \operatorname{senh} at$

Em cada um dos Problemas de 21 a 24, determine se a integral dada converge ou diverge.

21. $\int_0^\infty (t^2+1)^{-1}\,dt$
22. $\int_0^\infty te^{-t}\,dt$
23. $\int_1^\infty t^{-2}e^t\,dt$
24. $\int_0^\infty e^{-t}\cos t\,dt$

25. Suponha que f e f' são contínuas em $t \geq 0$ e de ordem exponencial quando $t \to \infty$. Integrando por partes, mostre que, se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, então $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$. O resultado continua válido sob condições menos restritivas, como as do Teorema 6.1.2.

26. **A Função Gama.** A função gama é denotada por $\Gamma(p)$ e definida pela integral

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^p\,dx. \tag{i}$$

A integral converge quando $x \to \infty$ para todo p. Para $p < 0$ também é imprópria, porque o integrando torna-se ilimitado quando $x \to 0$. No entanto, pode-se mostrar que a integral converge em $x = 0$ para $p > -1$.

(a) Mostre que, para $p > 0$,

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p).$$

(b) Mostre que $\Gamma(1) = 1$.

(c) Se p for um inteiro positivo, mostre que

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

Como $\Gamma(p)$ também está definido quando p não é inteiro, esta função fornece uma extensão da função fatorial para valores não inteiros da variável independente. Note que também é consistente definir $0! = 1$.

(d) Mostre que, para $p > 0$,

$$p(p+1)(p+2)\cdots(p+n-1) = \Gamma(p+n)/\Gamma(p).$$

Assim, $\Gamma(p)$ pode ser determinado para todos os valores positivos de p se $\Gamma(p)$ for conhecido em um único intervalo de comprimento um, digamos, em $0 < p \leq 1$. É possível mostrar que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Encontre $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$ e $\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)$.

27. Considere a transformada de Laplace de t^p, onde $p > -1$.

(a) Usando o Problema 26, mostre que

$$\mathcal{L}\{t^p\} = \int_0^\infty e^{-st}t^p\,dt = \frac{1}{s^{p+1}}\int_0^\infty e^{-x}x^p\,dx$$

$$= \Gamma(p+1)/s^{p+1}, \qquad s > 0.$$

(b) Seja p igual a um inteiro positivo n em (a); mostre que

$$\mathcal{L}\{t^n\} = n!/s^{n+1}, \qquad s > 0.$$

(c) Mostre que

$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \frac{2}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx, \qquad s > 0.$$

É possível mostrar que

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

portanto,

$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \sqrt{\pi/s}, \qquad s > 0.$$

(d) Mostre que

$$\mathcal{L}\{t^{1/2}\} = \sqrt{\pi}/(2s^{3/2}), \qquad s > 0.$$

6.2 Solução de Problemas de Valores Iniciais

Nesta seção vamos mostrar como a transformada de Laplace pode ser usada para resolver problemas de valor inicial para equações diferenciais lineares com coeficientes constantes. A utilidade da transformada de Laplace nesse contexto reside no fato de que a transformada de f' está relacionada de maneira simples à transformada de f. Esta relação está explicitada no teorema a seguir.

Teorema 6.2.1 Suponha que f é contínua e que f' é seccionalmente contínua em qualquer intervalo $0 \le t \le A$. Suponha, além disso, que existem constantes K, a e M tais que $|f(t)| \le Ke^{at}$ para $t \ge M$. Então $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > a$ e, além disso,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0). \tag{1}$$

Para provar este teorema, vamos considerar a integral

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)\, dt.$$

Se f' tem pontos de descontinuidade no intervalo $0 \le t \le A$, vamos denotá-los por $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Podemos, então, escrever essa integral como

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)\, dt = \int_0^{t_1} e^{-st} f'(t)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f'(t)\, dt + \cdots + \int_{t_n}^{A} e^{-st} f'(t)\, dt.$$

Integrando cada parcela à direita do sinal de igualdade por partes, obtemos

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)\, dt = e^{-st} f(t)\Big|_0^{t_1} + e^{-st} f(t)\Big|_{t_1}^{t_2} + \cdots + e^{-st} f(t)\Big|_{t_n}^{A}$$
$$+ s\left[\int_0^{t_1} e^{-st} f(t)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f(t)\, dt + \cdots + \int_{t_n}^{A} e^{-st} f(t)\, dt\right].$$

Como f é contínua, as contribuições em $t_1, t_2, \ldots, t_n$ das parcelas integradas se cancelam. Combinando as integrais, obtemos

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)\, dt = e^{-sA} f(A) - f(0) + s\int_0^A e^{-st} f(t)\, dt.$$

Para $A \ge M$, temos $|f(A)| \le Ke^{aA}$; em consequência, $|e^{-sA} f(A)| \le Ke^{-(s-a)A}$. Portanto, $e^{-sA} f(A) \to 0$ quando $A \to \infty$ sempre que $s > a$. Logo, para $s > a$,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0),$$

o que prova o teorema.

Se f' e f'' satisfazem as mesmas condições impostas em f e f', respectivamente, no Teorema 6.2.1, então a transformada de Laplace de f'' também existe para $s > a$ e é dada por

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0). \tag{2}$$

De fato, desde que a função f e suas derivadas satisfaçam condições adequadas pode-se obter uma expressão para a n-ésima derivada $f^{(n)}$ através de aplicações sucessivas desse teorema. O resultado é dado no corolário a seguir.

Corolário 6.2.2 Suponha que as funções $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ são contínuas e que $f^{(n)}$ é seccionalmente contínua em qualquer intervalo $0 \le t \le A$. Suponha, além disso, que existem constantes K, a e M tais que $|f(t)| \le Ke^{at}$, $|f'(t)| \le Ke^{at}, \ldots, |f^{(n)}(t)| \le Ke^{at}$ para $t \ge M$. Então, $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}$ existe para $s > a$ e é dado por

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \tag{3}$$

Vamos mostrar, agora, como a transformada de Laplace pode ser usada para resolver problemas de valor inicial. Sua utilidade maior é em problemas envolvendo equações diferenciais não homogêneas,

como mostraremos em seções mais adiante neste capítulo. Entretanto, vamos começar olhando algumas equações homogêneas, que são um pouco mais simples.

EXEMPLO 1

Vamos considerar a equação diferencial

$$y'' - y' - 2y = 0 \tag{4}$$

com condições iniciais

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0. \tag{5}$$

Este problema pode ser resolvido facilmente pelos métodos da Seção 3.1. A equação característica é

$$r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1) = 0, \tag{6}$$

e, em consequência, a solução geral da Eq. (4) é

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}. \tag{7}$$

Para satisfazer as condições iniciais (5), precisamos ter $c_1 + c_2 = 1$ e $-c_1 + 2c_2 = 0$; logo, $c_1 = \frac{2}{3}$ e $c_2 = \frac{1}{3}$, de modo que a solução do problema de valor inicial (4) e (5) é

$$y = \phi(t) = \tfrac{2}{3}e^{-t} + \tfrac{1}{3}e^{2t}. \tag{8}$$

Vamos agora resolver o mesmo problema usando a transformada de Laplace. Para fazer isso precisamos supor que o problema tem uma solução $y = \phi(t)$ tal que as duas primeiras derivadas satisfaçam as condições do Corolário 6.2.2. Então, calculando a transformada de Laplace da equação diferencial (4), obtemos

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0, \tag{9}$$

onde usamos a linearidade da transformada para escrever a transformada de uma soma como a soma das transformadas separadas. Usando o corolário para expressar $\mathcal{L}\{y''\}$ e $\mathcal{L}\{y'\}$ em função de $\mathcal{L}\{y\}$, a Eq. (9) fica

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) - [s\mathcal{L}\{y\} - y(0)] - 2\mathcal{L}\{y\} = 0,$$

ou

$$(s^2 - s - 2)Y(s) + (1-s)y(0) - y'(0) = 0, \tag{10}$$

onde $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$. Substituindo os valores de $y(0)$ e $y'(0)$ dados pelas condições iniciais (5) na Eq. (10) e depois resolvendo para $Y(s)$, obtemos

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2 - s - 2} = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)}. \tag{11}$$

Obtivemos, assim, uma expressão para a transformada de Laplace $Y(s)$ da solução $y = \phi(t)$ do problema de valor inicial dado. Para determinar a função ϕ precisamos encontrar a função cuja transformada de Laplace é $Y(s)$ dada pela Eq. (11).

Isso pode ser feito mais facilmente expandindo-se a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (11) em frações parciais. Escrevemos, então,

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} = \frac{a}{s-2} + \frac{b}{s+1} = \frac{a(s+1) + b(s-2)}{(s-2)(s+1)}, \tag{12}$$

onde os coeficientes a e b têm que ser determinados. Igualando os numeradores da segunda com a quarta expressão na Eq. (12), obtemos

$$s - 1 = a(s+1) + b(s-2),$$

uma equação que tem que ser satisfeita para todos os valores de s. Em particular, fazendo $s = 2$ temos que $a = \frac{1}{3}$. Analogamente, se $s = -1$, então $b = \frac{2}{3}$. Substituindo esses valores para a e b, respectivamente, temos

$$Y(s) = \frac{1/3}{s-2} + \frac{2/3}{s+1}. \tag{13}$$

Finalmente, usando o resultado do Exemplo 5 da Seção 6.1, temos que $\frac{1}{3}e^{2t}$ tem transformada $\frac{1}{3}(s-2)^{-1}$; analogamente, a transformada de $\frac{2}{3}e^{-t}$ é $\frac{2}{3}(s+1)^{-1}$. Portanto, pela linearidade da transformada de Laplace,

$$y = \phi(t) = \tfrac{1}{3}e^{2t} + \tfrac{2}{3}e^{-t}$$

tem transformada (13) e é, portanto, solução do problema de valor inicial (4), (5). Note que ela satisfaz as condições do Corolário 6.2.2, como supusemos inicialmente. É claro que essa é a mesma solução que obtivemos antes.

O mesmo procedimento pode ser aplicado a equações lineares gerais de segunda ordem com coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = f(t).1 \tag{14}$$

Supondo que a solução $y = \phi(t)$ satisfaz as condições do Corolário 6.2.2 para $n = 2$, podemos calcular a transformada da Eq. (14) obtendo, assim,

$$a[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + b[sY(s) - y(0)] + cY(s) = F(s), \tag{15}$$

onde $F(s)$ é a transformada de $f(t)$. Resolvendo a Eq. (15) para $Y(s)$, encontramos

$$Y(s) = \frac{(as + b)y(0) + ay'(0)}{as^2 + bs + c} + \frac{F(s)}{as^2 + bs + c}. \tag{16}$$

O problema, então, está resolvido, desde que possamos encontrar a função $y = \phi(t)$ cuja transformada é $Y(s)$.

Mesmo nesse estágio inicial de nossa discussão, podemos apontar algumas das características essenciais do método de transformada. Em primeiro lugar, a transformada $Y(s)$ da função desconhecida $y = \phi(t)$ é encontrada resolvendo-se uma *equação algébrica* em vez de uma *equação diferencial*, a Eq. (10) em vez da Eq. (4) no Exemplo 1, ou, em geral, a Eq. (15) em vez da Eq. (14). Essa é a chave da utilidade da transformada de Laplace para resolver equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes — o problema é reduzido de uma equação diferencial para uma equação algébrica. A seguir, a solução satisfazendo as condições iniciais dadas é encontrada automaticamente, de modo que a tarefa de determinar os valores apropriados para as constantes arbitrárias na solução geral não aparece. Além disso, como indicado na Eq. (15), as equações não homogêneas são tratadas exatamente da mesma forma que as homogêneas; não é necessário resolver primeiro a equação homogênea correspondente. Finalmente, o método pode ser aplicado da mesma forma para equações de ordem maior, desde que suponhamos que a solução satisfaz as condições do corolário para o valor apropriado de n.

Observe que o polinômio $as^2 + bs + c$, no denominador da fração à direita do sinal de igualdade na Eq. (16), é precisamente o polinômio característico associado à Eq. (14). Como a expansão de $Y(s)$ em frações parciais para determinar $\phi(t)$ necessita da fatoração desse polinômio, a utilização da transformada de Laplace não evita a necessidade de se encontrar as raízes da equação característica. Para equações de ordem maior do que dois isso pode ser um problema algébrico difícil, especialmente se as raízes forem irracionais ou complexas.

A dificuldade maior que ocorre ao se resolver um problema de valor inicial pela técnica da transformada está na determinação da função $y = \phi(t)$ correspondente à transformada $Y(s)$. Esse problema é conhecido como o problema de inversão da transformada de Laplace; $\phi(t)$ é chamada a transformada inversa correspondente a $Y(s)$ e o processo de encontrar $\phi(t)$ a partir de $Y(s)$ é conhecido como inverter a transformada. Usamos, também, a notação $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ para denotar a transformada inversa de $Y(s)$. Existe uma fórmula geral para a transformada de Laplace inversa, mas ela precisa de familiaridade com a teoria de funções de uma variável complexa, e não vamos considerá-la neste livro. No entanto, ainda é possível desenvolver muitas propriedades importantes da transformada de Laplace e resolver muitos problemas interessantes sem usar variáveis complexas.

Ao resolver o problema de valor inicial (4), (5) não consideramos o problema da possível existência de outras funções, além da dada pela Eq. (8), que também tenham a transformada (13). Sabemos, do Teorema 3.2.1, que o problema de valor inicial não tem outras soluções. Consistente com esse fato, pode-se mostrar que se f e g são funções contínuas com a mesma transformada de Laplace, então f e g são idênticas. Por outro lado, se f e g só são seccionalmente contínuas, elas podem diferir em um ou mais pontos de descontinuidade e ainda terem a mesma transformada de Laplace; veja o Exemplo 6 na Seção 6.1. Essa falta de unicidade da transformada de Laplace inversa para funções seccionalmente contínuas não tem importância prática nas aplicações.

Então, existe, essencialmente, uma bijeção entre as funções e suas transformadas de Laplace. Esse fato sugere a compilação de uma tabela, como a Tabela 6.2.1, que fornece as transformadas das funções encontradas com mais frequência e vice-versa. As funções na segunda coluna da Tabela 6.2.1 são as transformadas das funções na primeira coluna. Talvez mais importante, as funções na primeira coluna são as transformadas inversas das funções na segunda coluna. Assim, por exemplo, se a transformada da solução de uma equação diferencial é conhecida a solução pode ser encontrada, muitas vezes, olhando-se simplesmente na tabela. Algumas das funções na Tabela 6.2.1 foram usadas como exemplos, outras aparecem como problemas na Seção 6.1, enquanto outras vão ser encontradas mais adiante neste capítulo. A terceira coluna da tabela indica onde pode ser encontrada a dedução da transformada dada. Embora a Tabela 6.2.1 seja suficiente para os exemplos e problemas dados neste livro, estão disponíveis tabelas muito mais

TABELA 6.2.1 Transformadas de Laplace Elementares

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Notas
1. 1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$	Seção 6.1; Ex. 4
2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$	Seção 6.1; Ex. 5
3. $t^n, \quad n =$ inteiro positivo	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$	Seção 6.1; Prob. 27
4. $t^p, \quad p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$	Seção 6.1; Prob. 27
5. $\operatorname{sen} at$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$	Seção 6.1; Ex. 7
6. $\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$	Seção 6.1; Prob. 6
7. $\operatorname{senh} at$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a\rvert$	Seção 6.1; Prob. 8
8. $\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a\rvert$	Seção 6.1; Prob. 7
9. $e^{at}\operatorname{sen} bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$	Seção 6.1; Prob. 13
10. $e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$	Seção 6.1; Prob. 14
11. $t^n e^{at}, \quad n =$ inteiro positivo	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$	Seção 6.1; Prob. 18
12. $u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$	Seção 6.3
13. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	Seção 6.3
14. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	Seção 6.3
15. $f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right), \quad c > 0$	Seção 6.3; Prob. 25
16. $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$	Seção 6.6
17. $\delta(t-c)$	e^{-cs}	Seção 6.5
18. $f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$	Seção 6.2
19. $(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$	Seção 6.2; Prob. 28

completas (veja a lista de referências no final deste capítulo). Transformadas e transformadas inversas também podem ser encontradas através da utilização de sistemas algébricos computacionais.

Com frequência, uma transformada de Laplace $F(s)$ pode ser expressa como uma soma de diversas parcelas,

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \cdots + F_n(s). \tag{17}$$

Suponha que $f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\}, \ldots, f_n(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_n(s)\}$. Então, a função

$$f(t) = f_1(t) + \cdots + f_n(t)$$

tem a transformada de Laplace $F(s)$. Pela unicidade enunciada anteriormente não existe outra função contínua f tendo a mesma transformada. Assim,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + \cdots + \mathcal{L}^{-1}\{F_n(s)\}; \tag{18}$$

ou seja, a transformada de Laplace inversa também é um operador linear.

É conveniente, em muitos problemas, usar essa propriedade decompondo uma transformada dada em uma soma de funções cujas transformadas inversas já são conhecidas ou podem ser encontradas em uma tabela. Expansões em frações parciais são particularmente úteis nesse contexto, e um resultado geral cobrindo muitos casos é dado no Problema 38. Outras propriedades úteis da transformada de Laplace serão deduzidas mais tarde neste capítulo.

Os exemplos a seguir fornecem ilustrações adicionais da técnica de resolução de problemas de valor inicial usando transformada de Laplace e expansão em frações parciais.

EXEMPLO 2

Encontre a solução da equação diferencial

$$y'' + y = \operatorname{sen} 2t, \tag{19}$$

satisfazendo as condições iniciais

$$y(0) = 2, \qquad y'(0) = 1. \tag{20}$$

Vamos supor que esse problema de valor inicial tem uma solução $y = \phi(t)$ com as duas primeiras derivadas satisfazendo as condições do Corolário 6.2.2. Então, calculando a transformada de Laplace da equação diferencial, temos

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = 2/(s^2 + 4),$$

onde a transformada de sen $2t$ foi obtida da linha 5 na Tabela 6.2.1. Substituindo $y(0)$ e $y'(0)$ pelos valores dados nas condições iniciais e resolvendo para $Y(s)$, obtemos

$$Y(s) = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}. \tag{21}$$

Usando frações parciais, podemos escrever $Y(s)$ na forma

$$Y(s) = \frac{as + b}{s^2 + 1} + \frac{cs + d}{s^2 + 4} = \frac{(as + b)(s^2 + 4) + (cs + d)(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}. \tag{22}$$

Expandindo o numerador da fração à direita do segundo sinal de igualdade na Eq. (22) e igualando-o ao numerador na Eq. (21), encontramos

$$2s^3 + s^2 + 8s + 6 = (a + c)s^3 + (b + d)s^2 + (4a + c)s + (4b + d)$$

para todo s. Então, comparando os coeficientes de mesma potência de s, temos

$$a + c = 2, \qquad b + d = 1,$$
$$4a + c = 8, \qquad 4b + d = 6.$$

Em consequência, $a = 2, c = 0, b = \frac{5}{3}$ e $d = -\frac{2}{3}$, donde

$$Y(s) = \frac{2s}{s^2 + 1} + \frac{5/3}{s^2 + 1} - \frac{2/3}{s^2 + 4}. \tag{23}$$

Das linhas 5 e 6 na Tabela 6.2.1, a solução do problema de valor inicial dado é

$$y = \phi(t) = 2\cos t + \tfrac{5}{3}\operatorname{sen} t - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen} 2t. \tag{24}$$

EXEMPLO 3

Encontre a solução do problema de valor inicial

$$y^{(4)} - y = 0, \tag{25}$$

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1, \qquad y''(0) = 0, \qquad y'''(0) = 0. \tag{26}$$

Neste problema precisamos supor que a solução $y = \phi(t)$ satisfaz as condições do Corolário 6.2.2 para $n = 4$. A transformada de Laplace da equação diferencial (25) é

$$s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0) - Y(s) = 0.$$

Então, usando as condições iniciais (26) e resolvendo para $Y(s)$, temos

$$Y(s) = \frac{s^2}{s^4 - 1}. \tag{27}$$

Uma expansão em frações parciais para $Y(s)$ é

$$Y(s) = \frac{as + b}{s^2 - 1} + \frac{cs + d}{s^2 + 1},$$

e segue que

$$(as + b)(s^2 + 1) + (cs + d)(s^2 - 1) = s^2 \tag{28}$$

para todo s. Fazendo $s = 1$ e $s = -1$, respectivamente, na Eq. (28), obtemos o par de equações

$$2(a + b) = 1, \qquad 2(-a + b) = 1,$$

e, portanto, $a = 0$ e $b = \frac{1}{2}$. Se fizermos $s = 0$ na Eq. (28), então $b - d = 0$, de modo que $d = \frac{1}{2}$. Finalmente, igualando as parcelas contendo as potências cúbicas nos dois lados da Eq. (28), encontramos que $a + c = 0$, logo $c = 0$. Assim,

$$Y(s) = \frac{1/2}{s^2 - 1} + \frac{1/2}{s^2 + 1}, \tag{29}$$

e, das linhas 7 e 5 da Tabela 6.2.1, a solução do problema de valor inicial (25), (26) é

$$y = \phi(t) = \frac{\operatorname{senh} t + \operatorname{sen} t}{2}. \tag{30}$$

As aplicações elementares mais importantes da transformada de Laplace estão no estudo de vibrações mecânicas e na análise de circuitos elétricos; as equações que governam esses fenômenos foram deduzidas na Seção 3.7. Um sistema mola-massa em vibração tem equação de movimento

$$m\frac{d^2v}{dt^2} + \gamma\frac{dv}{dt} + kv = F(t), \tag{31}$$

onde m é a massa, γ é o coeficiente de amortecimento, k é a constante da mola e $F(t)$ é a força externa que está sendo aplicada. A equação que descreve um circuito elétrico com indutância L, resistência R e capacitância C (um circuito LRC) é

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t), \tag{32}$$

onde $Q(t)$ é a carga no capacitor e $E(t)$ é a tensão aplicada. Em termos da corrente $I(t) = dQ(t)/dt$, podemos diferenciar a Eq. (32) e escrever

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt}(t). \tag{33}$$

Também têm que ser dadas condições iniciais adequadas para v, Q ou I.

Observamos anteriormente, na Seção 3.7, que a Eq. (31) para o sistema mola-massa e a Eq. (32) ou (33) para o circuito elétrico são idênticas matematicamente, diferindo, apenas, pela interpretação das constantes e variáveis que aparecem nelas. Existem outros problemas físicos que levam à mesma equação diferencial. Assim, uma vez resolvido o problema matemático sua solução pode ser interpretada para cada problema físico correspondente de interesse atual.

Nas listas de problemas ao final desta e de outras seções neste capítulo são dados muitos problemas de valor inicial para equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes. Muitos podem ser interpretados como modelos de sistemas físicos particulares, mas, em geral, não explicitamos isso.

PROBLEMAS Em cada um dos Problemas de 1 a 10, encontre a transformada de Laplace inversa da função dada.

1. $F(s) = \dfrac{3}{s^2+4}$
2. $F(s) = \dfrac{4}{(s-1)^3}$
3. $F(s) = \dfrac{2}{s^2+3s-4}$
4. $F(s) = \dfrac{3s}{s^2-s-6}$
5. $F(s) = \dfrac{2s+2}{s^2+2s+5}$
6. $F(s) = \dfrac{2s-3}{s^2-4}$
7. $F(s) = \dfrac{2s+1}{s^2-2s+2}$
8. $F(s) = \dfrac{8s^2-4s+12}{s(s^2+4)}$
9. $F(s) = \dfrac{1-2s}{s^2+4s+5}$
10. $F(s) = \dfrac{2s-3}{s^2+2s+10}$

Em cada um dos Problemas de 11 a 23, use a transformada de Laplace para resolver o problema de valor inicial dado.

11. $y'' - y' - 6y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$
12. $y'' + 3y' + 2y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
13. $y'' - 2y' + 2y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
14. $y'' - 4y' + 4y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
15. $y'' - 2y' + 4y = 0; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$
16. $y'' + 2y' + 5y = 0; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$
17. $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 1$
18. $y^{(4)} - y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1, \quad y'''(0) = 0$
19. $y^{(4)} - 4y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -2, \quad y'''(0) = 0$
20. $y'' + \omega^2 y = \cos 2t, \quad \omega^2 \neq 4; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
21. $y'' - 2y' + 2y = \cos t; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
22. $y'' - 2y' + 2y = e^{-t}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
23. $y'' + 2y' + y = 4e^{-t}; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$

Em cada um dos Problemas de 24 a 26, encontre a transformada de Laplace $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$ da solução do problema de valor inicial dado. Será desenvolvido um método para determinar a transformada inversa na Seção 6.3.

24. $y'' + 4y = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \pi, \\ 0, & \pi \le t < \infty; \end{cases} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

OK

25. $y'' + y = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1, \\ 0, & 1 \le t < \infty; \end{cases} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

26. $y'' + 4y = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1, \\ 1, & 1 \le t < \infty; \end{cases} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

27. As transformadas de Laplace de certas funções podem ser encontradas de modo conveniente pelas suas expansões em séries de Taylor.

(a) Use a série de Taylor para sen t

$$\operatorname{sen} t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

e, supondo que a transformada de Laplace desta série pode ser calculada termo a termo, verifique que

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} = \frac{1}{s^2+1}, \qquad s > 1.$$

(b) Seja

$$f(t) = \begin{cases} (\operatorname{sen} t)/t, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Encontre a série de Taylor de f em torno de $t = 0$. Supondo que a transformada de Laplace desta função pode ser calculada termo a termo, verifique que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \arctan(1/s), \qquad s > 1.$$

(c) A função de Bessel de primeira espécie de ordem zero J_0 tem série de Taylor (veja a Seção 5.7)

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Supondo que as transformadas de Laplace a seguir podem ser calculadas termo a termo, verifique que

$$\mathcal{L}\{J_0(t)\} = (s^2+1)^{-1/2}, \qquad s > 1,$$

e

$$\mathcal{L}\{J_0(\sqrt{t})\} = s^{-1}e^{-1/(4s)}, \qquad s > 0.$$

Os Problemas de 28 a 36 tratam da diferenciação de transformadas de Laplace.

28. Seja

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt.$$

É possível mostrar que enquanto f satisfizer as condições do Teorema 6.1.2, pode-se diferenciar sob o sinal de integral em relação ao parâmetro s quando $s > a$.

(a) Mostre que $F'(s) = \mathcal{L}\{-tf(t)\}$.

(b) Mostre que $F^{(n)}(s) = \mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\}$; portanto, derivar a transformada de Laplace corresponde a multiplicar a função original por $-t$.

Em cada um dos problemas de 29 a 34, use o resultado do Problema 28 para encontrar a transformada de Laplace da função dada; a e b são números reais e n é um inteiro positivo.

29. $f(t) = te^{at}$

30. $f(t) = t^2 \operatorname{sen} bt$

31. $f(t) = t^n$

32. $f(t) = t^n e^{at}$

33. $f(t) = te^{at} \operatorname{sen} bt$

34. $f(t) = te^{at} \cos bt$

35. Considere a equação de Bessel de ordem zero

$$ty'' + y' + ty = 0.$$

Lembre da Seção 5.4 que $t = 0$ é um ponto singular regular para esta equação e, portanto, as soluções podem se tornar ilimitadas quando $t \to 0$. No entanto, vamos tentar determinar se existem soluções que permanecem limitadas em $t = 0$ e têm derivadas finitas aí. Supondo que existe uma tal solução $y = \phi(t)$, seja $Y(s) = \mathcal{L}\{\phi(t)\}$.

(a) Mostre que $Y(s)$ satisfaz

$$(1+s^2)Y'(s) + sY(s) = 0.$$

(b) Mostre que $Y(s) = c(1+s^2)^{-1/2}$, onde c é uma constante arbitrária.

(c) Escrevendo $(1+s^2)^{-1/2} = s^{-1}(1+s^{-2})^{-1/2}$, expandindo em uma série binomial válida para $s > 1$ e supondo que é permitido inverter a transformada termo a termo, mostre que

$$y = c\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} = cJ_0(t),$$

onde J_0 é a função de Bessel de primeira espécie de ordem zero. Note que $J_0(0) = 1$ e que J_0 tem derivada finita de todas as ordens em $t = 0$. Foi demonstrado na Seção 5.7 que a segunda solução desta equação torna-se ilimitada quando $t \to 0$.

36. Para cada um dos problemas de valor inicial a seguir, use os resultados do Problema 28 para encontrar a equação diferencial satisfeita por $Y(s) = \mathcal{L}\{\phi(t)\}$, onde $y = \phi(t)$ é a solução do problema de valor inicial dado.

(a) $y'' - ty = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$ (equação de Airy)

(b) $(1-t^2)y'' - 2ty' + \alpha(\alpha+1)y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$ (equação de Legendre)

Note que a equação diferencial para $Y(s)$ é de primeira ordem no item (a), mas é de segunda ordem no item (b). Isso ilustra o fato de que a transformada de Laplace nem sempre é útil para se resolver equações diferenciais com coeficientes variáveis, a menos que todos os coeficientes sejam, no máximo, funções lineares da variável independente.

37. Suponha que

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau.$$

Se $G(s)$ e $F(s)$ são as transformadas de Laplace de $g(t)$ e $f(t)$, respectivamente, mostre que

$$G(s) = F(s)/s.$$

38. Vamos mostrar, neste problema, como se pode usar uma expansão geral em frações parciais para se calcular muitas transformadas de Laplace inversas. Suponha que

$$F(s) = P(s)/Q(s),$$

onde $Q(s)$ é um polinômio de grau n com raízes distintas $r_1, \ldots, r_n$, e $P(s)$ é um polinômio de grau menor do que n. Nesse caso, é possível mostrar que $P(s)/Q(s)$ tem uma expansão em frações parciais da forma

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s - r_1} + \cdots + \frac{A_n}{s - r_n}, \tag{i}$$

onde os coeficientes $A_1, \ldots, A_n$ precisam ser determinados.

(a) Mostre que

$$A_k = P(r_k)/Q'(r_k), \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{ii}$$

Sugestão: um modo de fazer isso é multiplicar a Eq. (i) por $s - r_k$ e depois tomar o limite quando $s \to r_k$.

(b) Mostre que

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(r_k)}{Q'(r_k)} e^{r_k t}. \tag{iii}$$

6.3 Funções Degrau

Na Seção 6.2 esboçamos o procedimento geral usado ao se resolver um problema de valor inicial através da transformada de Laplace. Algumas das aplicações elementares mais interessantes do método de transformada ocorrem na solução de equações diferenciais lineares sob a ação de funções descontínuas ou de impulso. Equações desse tipo aparecem com frequência na análise do fluxo de corrente em circuitos elétricos ou nas vibrações de sistemas mecânicos. Nesta e nas seções seguintes vamos desenvolver algumas propriedades adicionais da transformada de Laplace úteis na solução de tais problemas. A menos que se diga explicitamente o contrário, supomos que todas as funções a seguir são seccionalmente contínuas e de ordem exponencial, de modo que suas transformadas de Laplace existem pelo menos para s suficientemente grande.

Para tratar de maneira efetiva funções com saltos, é útil definir uma função conhecida como **função degrau unitário**, ou **função de Heaviside**.

Esta função será denotada por u_c e é definida por

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c, \\ 1, & t \geq c, \end{cases} \qquad c \geq 0. \tag{1}$$

A Figura 6.3.1 mostra o gráfico de $y = u_c(t)$. Atribuímos, de forma um tanto arbitrária, o valor um a u_c em $t = c$. Entretanto, para uma função seccionalmente contínua como u_c lembre-se de que em geral o valor em um ponto de descontinuidade é irrelevante. O degrau também pode ser negativo. Por exemplo, a Figura 6.3.2 mostra o gráfico de $y = 1 - u_c(t)$.

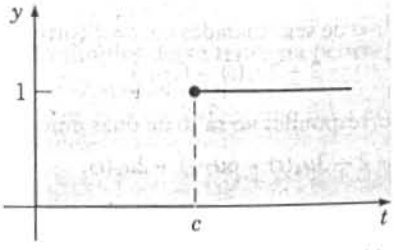

FIGURA 6.3.1 Gráfico de $y = u_c(t)$.

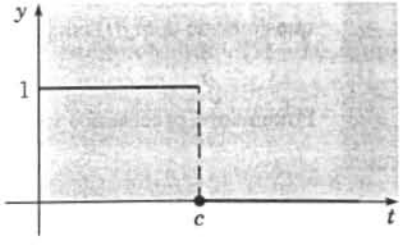

FIGURA 6.3.2 Gráfico de $y = 1 - u_c(t)$.

EXEMPLO 1

Esboce o gráfico de $y = h(t)$, onde

$$h(t) = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t), \qquad t \geq 0.$$

Da definição de $u_c(t)$ na Eq. (1), temos

$$h(t) = \begin{cases} 0 - 0 = 0, & 0 \le t < \pi, \\ 1 - 0 = 1, & \pi \le t < 2\pi, \\ 1 - 1 = 0, & 2\pi \le t < \infty. \end{cases}$$

Logo, a equação $y = h(t)$ tem o gráfico ilustrado na Figura 6.3.3. Pode-se pensar nessa função como um pulso retangular.

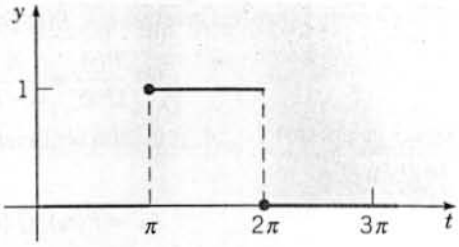

FIGURA 6.3.3 Gráfico de $y = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t)$.

EXEMPLO 2

Considere a função

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t < 4, \\ 5, & 4 \le t < 7, \\ -1, & 7 \le t < 9, \\ 1, & t \ge 9, \end{cases} \tag{2}$$

cujo gráfico aparece na Figura 6.3.4. Expresse $f(t)$ em termos de $u_c(t)$.

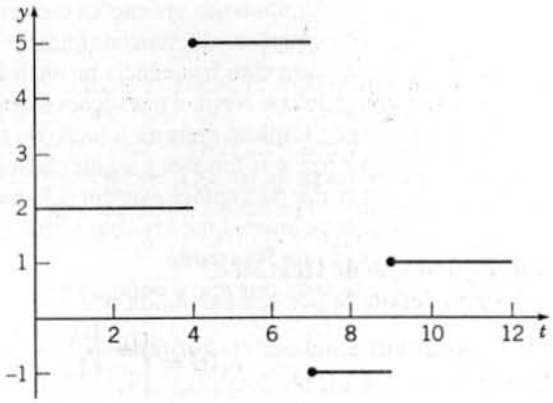

FIGURA 6.3.4 Gráfico da função na Eq. (2).

Começamos com a função $f_1(t) = 2$, que coincide com $f(t)$ em $[0, 4)$. Para produzir o salto de três unidades em $t = 4$ somamos $3u_4(t)$ a $f_1(t)$, obtendo

$$f_2(t) = 2 + 3u_4(t),$$

que coincide com $f(t)$ em $[0, 7)$. O salto negativo de seis unidades em $t = 7$ corresponde a somar $-6u_7(t)$, o que dá

$$f_3(t) = 2 + 3u_4(t) - 6u_7(t).$$

Finalmente, precisamos somar $2u_9(t)$ para corresponder ao salto de duas unidades em $t = 9$. Obtemos, então,

$$f(t) = 2 + 3u_4(t) - 6u_7(t) + 2u_9(t). \tag{3}$$

A transformada de Laplace de u_c é determinada facilmente:

$$\mathcal{L}\{u_c(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} u_c(t)\, dt = \int_c^\infty e^{-st}\, dt$$

$$= \frac{e^{-cs}}{s}, \qquad s > 0. \tag{4}$$

Para uma função f dada, definida para $t \geq 0$, vamos considerar muitas vezes a função relacionada g definida por

$$y = g(t) = \begin{cases} 0, & t < c, \\ f(t-c), & t \geq c, \end{cases}$$

que representa uma translação de f por uma distância c no sentido dos t positivos; veja a Figura 6.3.5. Em termos da função degrau unitário, podemos escrever $g(t)$ na forma conveniente

$$g(t) = u_c(t)f(t-c).$$

A função degrau unitário é particularmente importante no uso da transformada devido à relação dada a seguir entre a transformada de $f(t)$ e a de sua translação $u_c(t)f(t-c)$.

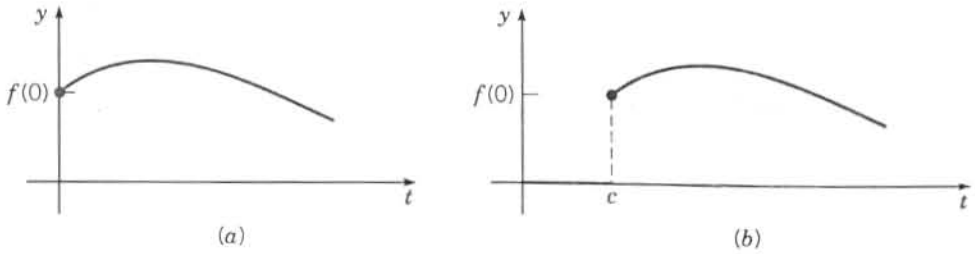

FIGURA 6.3.5 Uma translação da função dada. (*a*) $y = f(t)$; (*b*) $y = u_c(t)f(t-c)$.

Teorema 6.3.1 Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > a \geq 0$ e se c é uma constante positiva, então

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-cs}F(s), \qquad s > a. \tag{5}$$

Reciprocamente, se $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, então

$$u_c(t)f(t-c) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}F(s)\}. \tag{6}$$

O Teorema 6.3.1 diz simplesmente que a translação de $f(t)$ por uma distância c no sentido dos t positivos corresponde à multiplicação de $F(s)$ por e^{-cs}. Para provar o Teorema 6.3.1 basta calcular a transformada de $u_c(t)f(t-c)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} &= \int_0^\infty e^{-st}u_c(t)f(t-c)\,dt \\ &= \int_c^\infty e^{-st}f(t-c)\,dt. \end{aligned}$$

Fazendo uma mudança na variável de integração $\xi = t - c$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} &= \int_0^\infty e^{-(\xi+c)s}f(\xi)\,d\xi = e^{-cs}\int_0^\infty e^{-s\xi}f(\xi)\,d\xi \\ &= e^{-cs}F(s). \end{aligned}$$

Isso estabelece a Eq. (5); a Eq. (6) segue calculando-se a transformada inversa na Eq. (5).

Um exemplo simples desse teorema ocorre quando $f(t) = 1$. Lembrando que $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$, temos imediatamente, da Eq. (5), que $\mathcal{L}\{u_c(t)\} = e^{-cs}/s$. Esse resultado está de acordo com o da Eq. (4). Os Exemplos 3 e 4 ilustram ainda mais como o Teorema 6.3.1 pode ser usado no cálculo de transformadas e transformadas inversas.

EXEMPLO 3

Se a função f for definida por

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \leq t < \pi/4, \\ \operatorname{sen} t + \cos(t - \pi/4), & t \geq \pi/4, \end{cases}$$

encontre $\mathcal{L}\{f(t)\}$. O gráfico de $y = f(t)$ está ilustrado na Figura 6.3.6.

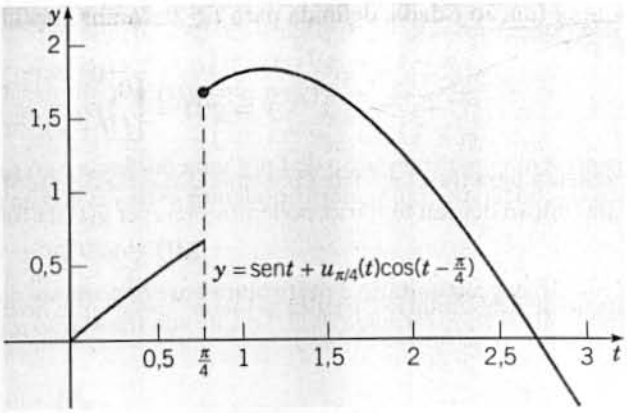

FIGURA 6.3.6 Gráfico da função no Exemplo 3.

Note que $f(t) = \text{sen}\, t + g(t)$, onde

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi/4, \\ \cos(t - \pi/4), & t \geq \pi/4. \end{cases}$$

Logo,

$$g(t) = u_{\pi/4}(t)\cos(t - \pi/4),$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{\text{sen}t\} + \mathcal{L}\{u_{\pi/4}(t)\cos(t - \pi/4)\} \\ &= \mathcal{L}\{\text{sen}t\} + e^{-\pi s/4}\mathcal{L}\{\cos t\}. \end{aligned}$$

Introduzindo as transformadas de sen t e cos t, obtemos

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s/4}\frac{s}{s^2+1} = \frac{1 + se^{-\pi s/4}}{s^2+1}.$$

Você deve comparar esse método com o cálculo de $\mathcal{L}\{f(t)\}$ diretamente da definição.

EXEMPLO 4

Encontre a transformada inversa de

$$F(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s^2}.$$

Da linearidade da transformada inversa, temos

$$\begin{aligned} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\} \\ &= t - u_2(t)(t-2). \end{aligned}$$

A função f também pode ser escrita como

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2, \\ 2, & t \geq 2. \end{cases}$$

O teorema a seguir contém outra propriedade bastante útil das transformadas de Laplace, semelhantes às dadas no Teorema 6.3.1.

Teorema 6.3.2 Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > a \geq 0$ e se c é uma constante, então

$$\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\} = F(s-c), \qquad s > a + c. \tag{7}$$

Reciprocamente, se $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, então

$$e^{ct}f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s-c)\}. \tag{8}$$

De acordo com o Teorema 6.3.2, a multiplicação de $f(t)$ por e^{ct} resulta na translação da transformada $F(s)$ uma distância c no sentido dos s positivos e reciprocamente. Para provar este teorema, vamos calcular $\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\}$. Então,

$$\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{ct}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-c)t}f(t)\,dt$$
$$= F(s-c),$$

que é a Eq. (7). A restrição $s > a + c$ segue da observação que de acordo com a hipótese (ii) do Teorema 6.1.2 é $|f(t)| \le Ke^{at}$; portanto, $|e^{ct}f(t)| \le Ke^{(a+c)t}$. A Eq. (8) é obtida calculando-se a transformada inversa da Eq. (7), e a demonstração está completa.

A aplicação principal do Teorema 6.3.2 está no cálculo de determinadas transformadas inversas, como ilustrado no Exemplo 5.

EXEMPLO 5

Encontre a transformada inversa de

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 4s + 5}.$$

Completando os quadrados no denominador, podemos escrever

$$G(s) = \frac{1}{(s-2)^2 + 1} = F(s-2),$$

onde $F(s) = (s^2 + 1)^{-1}$. Como $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \operatorname{sen} t$, segue do Teorema 6.3.2 que

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = e^{2t}\operatorname{sen} t.$$

Os resultados desta seção são muitas vezes úteis na resolução de equações diferenciais, particularmente aquelas sob a ação de funções descontínuas. A próxima seção é devotada a exemplos que ilustram esse fato.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6, esboce o gráfico da função dada no intervalo $t \ge 0$.

1. $g(t) = u_1(t) + 2u_3(t) - 6u_4(t)$
2. $g(t) = (t-3)u_2(t) - (t-2)u_3(t)$
3. $g(t) = f(t-\pi)u_\pi(t)$, onde $f(t) = t^2$
4. $g(t) = f(t-3)u_3(t)$, onde $f(t) = \operatorname{sen} t$
5. $g(t) = f(t-1)u_2(t)$, onde $f(t) = 2t$
6. $g(t) = (t-1)u_1(t) - 2(t-2)u_2(t) + (t-3)u_3(t)$

Em cada um dos Problemas de 7 a 12:

(a) Esboce o gráfico da função dada.

(b) Expresse $f(t)$ em termos da função degrau unitário $u_c(t)$.

7. $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 3, \\ -2, & 3 \le t < 5, \\ 2, & 5 \le t < 7, \\ 1, & t \ge 7. \end{cases}$

8. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1, \\ -1, & 1 \le t < 2, \\ 1, & 2 \le t < 3, \\ -1, & 3 \le t < 4, \\ 0, & t \ge 4. \end{cases}$

9. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 2, \\ e^{-(t-2)}, & t \ge 2. \end{cases}$

10. $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \le t < 2, \\ 1, & t \ge 2. \end{cases}$

11. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1, \\ t-1, & 1 \le t < 2, \\ t-2, & 2 \le t < 3, \\ 0, & t \ge 3. \end{cases}$

12. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 2, \\ 2, & 2 \le t < 5, \\ 7-t, & 5 \le t < 7, \\ 0, & t \ge 7. \end{cases}$

Em cada um dos Problemas de 13 a 18, encontre a transformada de Laplace da função dada.

13. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ (t-2)^2, & t \ge 2 \end{cases}$

14. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ t^2 - 2t + 2, & t \ge 1 \end{cases}$

15. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi \\ t - \pi, & \pi \le t < 2\pi \\ 0, & t \ge 2\pi \end{cases}$

16. $f(t) = u_1(t) + 2u_3(t) - 6u_4(t)$

17. $f(t) = (t-3)u_2(t) - (t-2)u_3(t)$

18. $f(t) = t - u_1(t)(t-1), \quad t \ge 0$

Em cada um dos Problemas de 19 a 24, encontre a transformada de Laplace inversa da função dada.

19. $F(s) = \dfrac{3!}{(s-2)^4}$

20. $F(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s^2+s-2}$

21. $F(s) = \dfrac{2(s-1)e^{-2s}}{s^2-2s+2}$

22. $F(s) = \dfrac{2e^{-2s}}{s^2-4}$

23. $F(s) = \dfrac{(s-2)e^{-s}}{s^2-4s+3}$

24. $F(s) = \dfrac{e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s}-e^{-4s}}{s}$

25. Suponha que $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > a \geq 0$.

(a) Mostre que se c é uma constante positiva, então

$$\mathcal{L}\{f(ct)\} = \frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right), \qquad s > ca.$$

(b) Mostre que se k é uma constante positiva, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(ks)\} = \frac{1}{k}f\left(\frac{t}{k}\right).$$

(c) Mostre que se a e b são constantes com $a > 0$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(as+b)\} = \frac{1}{a}e^{-bt/a}f\left(\frac{t}{a}\right).$$

Em cada um dos Problemas de 26 a 29, use os resultados do Problema 25 para encontrar a transformada de Laplace inversa da função dada.

26. $F(s) = \dfrac{2^{n+1}n!}{s^{n+1}}$

27. $F(s) = \dfrac{2s+1}{4s^2+4s+5}$

28. $F(s) = \dfrac{1}{9s^2-12s+3}$

29. $F(s) = \dfrac{e^2e^{-4s}}{2s-1}$

Em cada um dos Problemas de 30 a 33, encontre a transformada de Laplace da função dada. No Problema 33, suponha que é permitido integrar a série infinita termo a termo.

30. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$

31. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 2 \\ 1, & 2 \leq t < 3 \\ 0, & t \geq 3 \end{cases}$

32. $f(t) = 1 - u_1(t) + \cdots + u_{2n}(t) - u_{2n+1}(t) = 1 + \sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^k u_k(t)$

33. $f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k u_k(t)$. Veja a Figura 6.3.7.

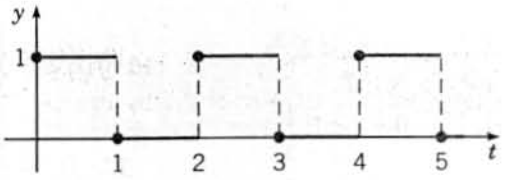

FIGURA 6.3.7 Uma onda quadrada.

34. Suponha que f satisfaz $f(t+T) = f(t)$ para todo $t \geq 0$ e para algum número positivo fixo T; f é dita periódica com período T em $0 \leq t < \infty$. Mostre que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt}{1-e^{-sT}}.$$

Em cada um dos Problemas de 35 a 38, use o resultado do Problema 34 para encontrar a transformada de Laplace da função dada.

35. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1, \\ 0, & 1 \le t < 2; \end{cases}$
$f(t+2) = f(t)$.
Compare com o Problema 33.

36. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1, \\ -1, & 1 \le t < 2; \end{cases}$
$f(t+2) = f(t)$.
Veja a Figura 6.3.8.

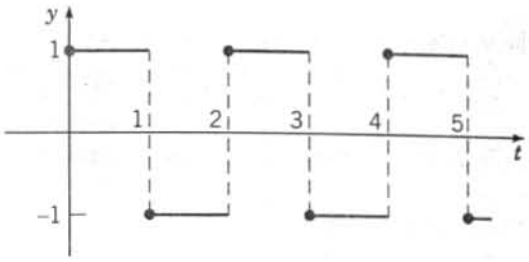

FIGURA 6.3.8 Uma onda quadrada.

37. $f(t) = t, \quad 0 \le t < 1;$
$f(t+1) = f(t)$.
Veja a Figura 6.3.9.

38. $f(t) = \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t < \pi;$
$f(t+\pi) = f(t)$.
Veja a Figura 6.3.10.

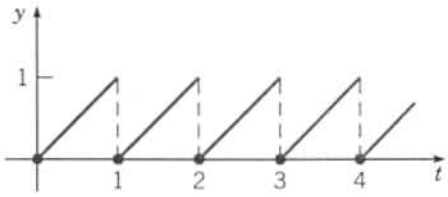

FIGURA 6.3.9 Uma onda dente de serra.

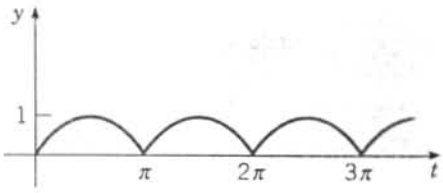

FIGURA 6.3.10 Uma onda seno retificada.

39. (a) Se $f(t) = 1 - u_1(t)$, encontre $\mathcal{L}\{f(t)\}$; compare com o Problema 30. Esboce o gráfico de $y = f(t)$.
(b) Seja $g(t) = \int_0^t f(\xi)\,d\xi$, onde a função f está definida em (a). Esboce o gráfico de $y = g(t)$ e encontre $\mathcal{L}\{g(t)\}$.
(c) Seja $h(t) = g(t) - u_1(t)g(t-1)$, onde g está definida em (b). Esboce o gráfico de $y = h(t)$ e encontre $\mathcal{L}\{h(t)\}$.

40. Considere a função p definida por

$$p(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1, \\ 2 - t, & 1 \le t < 2; \end{cases} \qquad p(t+2) = p(t).$$

(a) Esboce o gráfico de $y = p(t)$.
(b) Encontre $\mathcal{L}\{p(t)\}$ notando que p é a extensão periódica da função h no Problema 39(c) e usando, depois, o resultado do Problema 34.
(c) Encontre $\mathcal{L}\{p(t)\}$ observando que

$$p(t) = \int_0^t f(t)\,dt,$$

onde f é a função no Problema 36, e usando, depois, o Teorema 6.2.1.

6.4 Equações Diferenciais sob a Ação de Funções Descontínuas

Nesta seção, vamos voltar nossa atenção para alguns exemplos onde o termo não homogêneo, ou força externa, é descontínuo.

EXEMPLO 1

Encontre a solução da equação diferencial

$$2y'' + y' + 2y = g(t), \tag{1}$$

onde

$$g(t) = u_5(t) - u_{20}(t) = \begin{cases} 1, & 5 \le t < 20, \\ 0, & 0 \le t < 5 \quad \text{e} \quad t \ge 20. \end{cases} \tag{2}$$

Suponha que as condições iniciais são

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0. \tag{3}$$

Este problema representa a carga em um capacitor em um circuito elétrico simples, onde a tensão é um pulso unitário para $5 \le t < 20$. Ele pode representar, também, a resposta de um oscilador amortecido sob a ação de uma força $g(t)$.

A transformada de Laplace da Eq. (1) é

$$2s^2Y(s) - 2sy(0) - 2y'(0) + sY(s) - y(0) + 2Y(s) = \mathcal{L}\{u_5(t)\} - \mathcal{L}\{u_{20}(t)\} = (e^{-5s} - e^{-20s})/s.$$

Usando as condições iniciais (3) e resolvendo para $Y(s)$, obtemos

$$Y(s) = \frac{e^{-5s} - e^{-20s}}{s(2s^2 + s + 2)}. \tag{4}$$

Para encontrar $y = \phi(t)$, é conveniente escrever $Y(s)$ como

$$Y(s) = (e^{-5s} - e^{-20s})H(s), \tag{5}$$

onde

$$H(s) = \frac{1}{s(2s^2 + s + 2)}. \tag{6}$$

Então, se $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$, temos

$$y = \phi(t) = u_5(t)h(t-5) - u_{20}(t)h(t-20). \tag{7}$$

Observe que usamos o Teorema 6.3.1 para escrever a transformada inversa de $e^{-5s}H(s)$ e de $e^{-20s}H(s)$, respectivamente. Finalmente, para determinar $h(t)$ usamos a expansão em frações parciais de $H(s)$:

$$H(s) = \frac{a}{s} + \frac{bs + c}{2s^2 + s + 2}. \tag{8}$$

Determinando os coeficientes, encontramos $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$ e $c = -\frac{1}{2}$. Logo,

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1/2}{s} - \frac{s + \frac{1}{2}}{2s^2 + s + 2} \\ &= \frac{1/2}{s} - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{\left(s + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}}, \end{aligned} \tag{9}$$

de modo que, pelas linhas 9 e 10 da Tabela 6.2.1, obtemos

$$h(t) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\left[e^{-t/4}\cos(\sqrt{15}\,t/4) + (\sqrt{15}/15)e^{-t/4}\operatorname{sen}\sqrt{15}\,t/4)\right]. \tag{10}$$

Na Figura 6.4.1, o gráfico da solução $y = \phi(t)$ das Eqs. (7) e (10) mostra que a solução tem três partes distintas. Para $0 < t < 5$, a equação diferencial é

$$2y'' + y' + 2y = 0 \tag{11}$$

e as condições iniciais são dadas pela Eq. (3). Como as condições iniciais não fornecem energia ao sistema e como não há força externa, o sistema permanece em repouso, ou seja, $y = 0$ para $0 < t < 5$. Isso pode ser confirmado resolvendo-se a Eq. (11) sujeita às condições iniciais (3). Em particular, calculando a solução e suas derivadas em $t = 5$ ou, mais precisamente, quando t tende a 5 por valores menores, temos

$$y(5) = 0, \qquad y'(5) = 0. \tag{12}$$

Quando $t > 5$, a equação diferencial fica

$$2y'' + y' + 2y = 1, \tag{13}$$

cuja solução é a soma de uma constante (a resposta à força externa constante) com uma oscilação amortecida (a solução da equação homogênea correspondente). O gráfico na Figura 6.4.1 mostra claramente esse compor-

tamento no intervalo $5 \leq t \leq 20$. Pode-se encontrar uma expressão para essa parte da solução resolvendo-se a equação diferencial (13) sujeita às condições iniciais (12). Finalmente, para $t > 20$ a equação diferencial torna-se novamente a Eq. (11) e as condições iniciais são obtidas calculando-se a solução das Eqs. (13), (12) e suas derivadas em $t = 20$. Esses valores são

$$y(20) \cong 0{,}50162, \qquad y'(20) \cong 0{,}01125. \tag{14}$$

O problema de valor inicial (11), (14) não contém força externa, de modo que sua solução é uma oscilação amortecida em torno de $y = 0$, como pode ser visto na Figura 6.4.1.

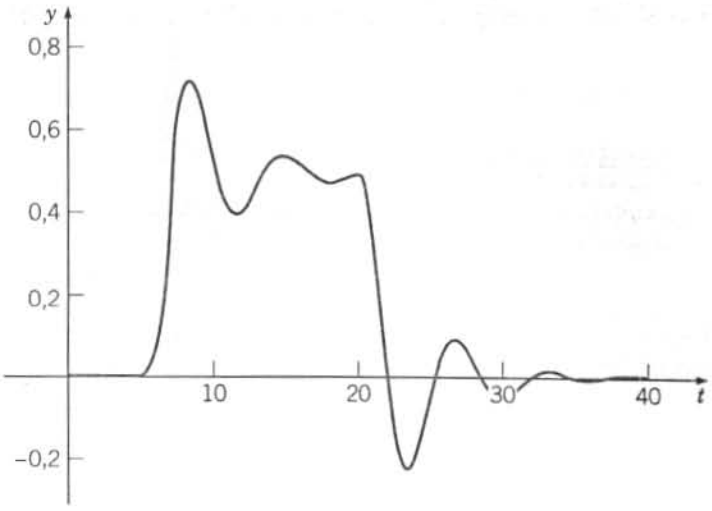

FIGURA 6.4.1 Solução do problema de valor inicial (1), (2), (3).

Embora possa ser útil visualizar a solução na Figura 6.4.1 como composta de três problemas separados de valor inicial em três intervalos diferentes, é um tanto tedioso encontrar a solução resolvendo-se esses três problemas separados. O método da transformada de Laplace fornece uma abordagem muito mais conveniente e elegante para esse e outros problemas sob a ação de uma força externa descontínua.

O efeito da descontinuidade da força externa pode ser visto se examinarmos a solução $\phi(t)$ do Exemplo 1 com mais cuidado. De acordo com o Teorema 3.2.1 de existência e unicidade, a solução ϕ e suas duas primeiras derivadas são contínuas exceto, possivelmente, nos pontos $t = 5$ e $t = 20$, onde g é descontínua. Isso também pode ser visto imediatamente da Eq. (7). Pode-se mostrar, também, por cálculos diretos a partir da Eq. (7), que ϕ e ϕ' são contínuas mesmo em $t = 5$ e $t = 20$. No entanto, se calcularmos ϕ'', veremos que

$$\lim_{t \to 5-} \phi''(t) = 0, \qquad \lim_{t \to 5+} \phi''(t) = 1/2.$$

Em consequência, $\phi''(t)$ tem um salto de 1/2 em $t = 5$. De maneira semelhante, pode-se mostrar que $\phi''(t)$ tem um salto de $-1/2$ em $t = 20$. Assim, o salto do termo não homogêneo $g(t)$ nesses pontos é balanceado por um salto correspondente no termo de maior ordem $2y''$ à esquerda do sinal de igualdade na equação.

Considere, agora, a equação linear de segunda ordem geral

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \tag{15}$$

onde p e q são contínuas em algum intervalo $\alpha < t < \beta$, mas g só é seccionalmente contínua aí. Se $y = \psi(t)$ é uma solução da Eq. (15), então ψ e ψ' são contínuas em $\alpha < t < \beta$, mas ψ'' tem descontinuidades do tipo salto nos mesmos pontos que g. Observações semelhantes podem ser feitas para equações de ordem maior; a derivada da solução de ordem igual à ordem mais alta que aparece na equação diferencial tem saltos nos mesmos pontos que o termo não homogêneo, mas a solução e suas derivadas de ordem mais baixa são contínuas, inclusive nesses pontos.

EXEMPLO 2

Descreva a natureza qualitativa da solução do problema de valor inicial

$$y'' + 4y = g(t), \tag{16}$$

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0, \tag{17}$$

onde

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 5, \\ (t-5)/5, & 5 \le t < 10, \\ 1, & t \ge 10, \end{cases} \tag{18}$$

e depois encontre a solução.

Neste exemplo, o termo não homogêneo tem o gráfico ilustrado na Figura 6.4.2, que é conhecido como rampa crescente. É relativamente fácil identificar a forma geral da solução. Para $t < 5$ a solução é simplesmente $y = 0$. Por outro lado, para $t > 10$ a solução tem a forma

$$y = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t + 1/4. \tag{19}$$

A constante 1/4 é uma solução particular da equação não homogênea, enquanto os outros dois termos formam a solução geral da equação homogênea associada. Assim, a solução (19) corresponde a uma oscilação harmônica simples em torno de $y = 1/4$. Analogamente, no intervalo intermediário $5 < t < 10$ a solução oscila em torno de uma certa função linear. Em um contexto de engenharia, por exemplo, poderíamos estar interessados em saber a amplitude da oscilação estado estacionário final.

Para resolver o problema, é conveniente escrever

$$g(t) = \left[u_5(t)(t-5) - u_{10}(t)(t-10)\right]/5, \tag{20}$$

como você pode verificar. Calculando a transformada de Laplace da equação diferencial e usando as condições iniciais, obtemos

$$(s^2+4)Y(s) = (e^{-5s} - e^{-10s})/5s^2$$

ou

$$Y(s) = (e^{-5s} - e^{-10s})H(s)/5, \tag{21}$$

onde

$$H(s) = \frac{1}{s^2(s^2+4)}. \tag{22}$$

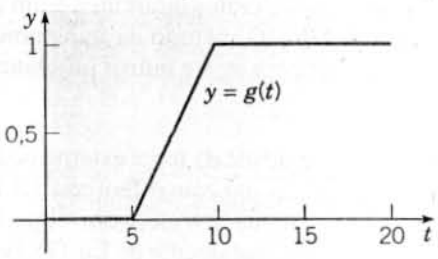

FIGURA 6.4.2 Rampa crescente: $y = g(t)$ da Eq. (18).

Logo, a solução do problema de valor inicial (16), (17), (18) é

$$y = \phi(t) = \left[u_5(t)h(t-5) - u_{10}(t)h(t-10)\right]/5, \tag{23}$$

onde $h(t)$ é a transformada inversa de $H(s)$. A expansão em frações parciais de $H(s)$ é

$$H(s) = \frac{1/4}{s^2} - \frac{1/4}{s^2+4}, \tag{24}$$

e segue, então, das linhas 3 e 5 da Tabela 6.2.1 que

$$h(t) = \tfrac{1}{4}t - \tfrac{1}{8}\operatorname{sen} 2t. \tag{25}$$

A Figura 6.4.3 mostra o gráfico de $y = \phi(t)$. Note que ele tem o aspecto qualitativo indicado anteriormente. Para encontrar a amplitude da oscilação estado estacionário basta localizar um dos pontos de máximo ou mínimo para $t > 10$. Igualando a derivada da solução (23) a zero, vemos que o primeiro máximo está localizado aproximadamente em (10,642; 0,2979), de modo que a amplitude da oscilação é de aproximadamente 0,0479.

Note que neste exemplo o termo não homogêneo g é contínuo, mas g' é descontínua em $t = 5$ e $t = 10$. Então a solução ϕ e suas duas primeiras derivadas são contínuas em toda parte, mas ϕ''' tem descontinuidades em $t = 5$ e $t = 10$ do mesmo tipo das descontinuidades de g' nesses pontos.

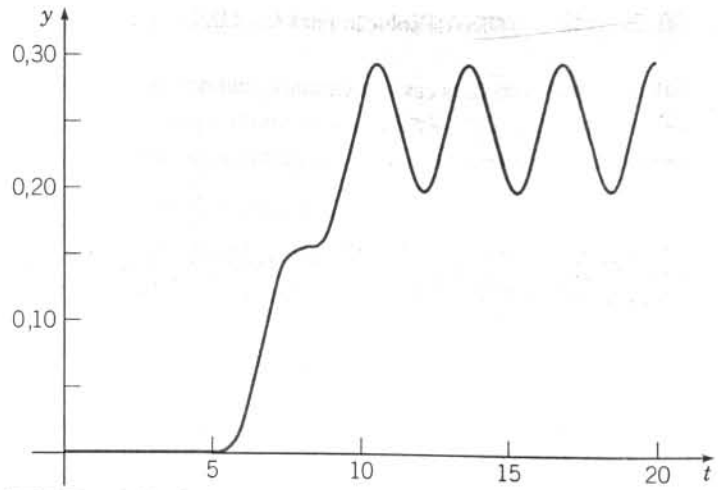

FIGURA 6.4.3 Solução do problema de valor inicial (16), (17), (18).

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 13:

(a) Encontre a solução do problema de valor inicial dado.

(b) Desenhe os gráficos da solução e do termo não homogêneo; explique a relação entre eles.

1. $y'' + y = f(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1; \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 3\pi \\ 0, & 3\pi \le t < \infty \end{cases}$

2. $y'' + 2y' + 2y = h(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1; \quad h(t) = \begin{cases} 1, & \pi \le t < 2\pi \\ 0, & 0 \le t < \pi \quad \text{e} \quad t \ge 2\pi \end{cases}$

3. $y'' + 4y = \operatorname{sen} t - u_{2\pi}(t) \operatorname{sen}(t - 2\pi); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

4. $y'' + 4y = \operatorname{sen} t + u_{\pi}(t) \operatorname{sen}(t - \pi); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

5. $y'' + 3y' + 2y = f(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0; \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 10 \\ 0, & t \ge 10 \end{cases}$

6. $y'' + 3y' + 2y = u_2(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

7. $y'' + y = u_{3\pi}(t); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

8. $y'' + y' + \frac{5}{4}y = t - u_{\pi/2}(t)(t - \pi/2); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

9. $y'' + y = g(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1; \quad g(t) = \begin{cases} t/2, & 0 \le t < 6 \\ 3, & t \ge 6 \end{cases}$

10. $y'' + y' + \frac{5}{4}y = g(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0; \quad g(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \le t < \pi \\ 0, & t \ge \pi \end{cases}$

11. $y'' + 4y = u_{\pi}(t) - u_{3\pi}(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

12. $y^{(4)} - y = u_1(t) - u_2(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0$

13. $y^{(4)} + 5y'' + 4y = 1 - u_{\pi}(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0$

14. Encontre uma expressão envolvendo $u_c(t)$ para uma função f cujo gráfico é uma rampa crescente de zero em $t = t_0$ até o valor h em $t = t_0 + k$.

15. Encontre uma expressão envolvendo $u_c(t)$ para uma função g cujo gráfico é uma rampa crescente de zero em $t = t_0$ até o valor h em $t = t_0 + k$, seguida de uma rampa decrescente que chega a zero em $t = t_0 + 2k$.

16. Um determinado sistema mola-massa satisfaz o problema de valor inicial

$$u'' + \tfrac{1}{4}u' + u = kg(t), \qquad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0,$$

onde $g(t) = u_{3/2}(t) - u_{5/2}(t)$ e $k > 0$ é um parâmetro.

(a) Esboce o gráfico de $g(t)$. Note que é um pulso de tamanho unitário que se estende por uma unidade de tempo.

(b) Resolva o problema de valor inicial.

(c) Desenhe o gráfico da solução para $k = 1/2$, $k = 1$ e $k = 2$. Descreva as características principais da solução e como elas dependem de k.

(d) Encontre, com duas casas decimais, o menor valor de k para o qual a solução $u(t)$ alcança o valor 2.

(e) Suponha que $k = 2$. Encontre o instante τ após o qual $|u(t)| < 0{,}1$ para todo $t > \tau$.

17. Modifique o problema no Exemplo 2 desta seção substituindo o termo não homogêneo $g(t)$ por

$$f(t) = \left[u_5(t)(t-5) - u_{5+k}(t)(t-5-k)\right]/k.$$

(a) Esboce o gráfico de $f(t)$ e descreva como ele depende de k. Para que valores de k a função $f(t)$ é igual a $g(t)$ no exemplo?

(b) Resolva o problema de valor inicial

$$y'' + 4y = f(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

(c) A solução no item (b) depende de k, mas para t suficientemente grande a solução sempre é uma oscilação harmônica simples em torno de $y = 1/4$. Tente decidir como a amplitude dessa oscilação depende, finalmente, de k. Depois confirme sua conclusão fazendo o gráfico da solução para alguns valores diferentes de k.

18. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + \tfrac{1}{3}y' + 4y = f_k(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

onde

$$f_k(t) = \begin{cases} 1/2k, & 4-k \le t < 4+k \\ 0, & 0 \le t < 4-k \quad \text{e} \quad t \ge 4+k \end{cases}$$

e $0 < k < 4$.

(a) Esboce o gráfico de $f_k(t)$. Note que a área sob o gráfico é independente de k. Se $f_k(t)$ representa uma força, isso significa que o produto do módulo da força e do intervalo de tempo durante o qual ela age não depende de k.

(b) Escreva $f_k(t)$ em termos da função degrau unitário e depois resolva o problema de valor inicial dado.

(c) Desenhe o gráfico da solução para $k = 2$, $k = 1$ e $k = 1/2$. Descreva como a solução depende de k.

Ressonância e Batimento. Na Seção 3.8 observamos como um oscilador harmônico não amortecido (como um sistema mola-massa) sob a ação de uma força senoidal entra em ressonância se a frequência do termo não homogêneo é igual à frequência natural. Se a frequência da força é ligeiramente diferente da frequência natural, então o sistema apresenta um batimento. Nos Problemas de 19 a 23 exploramos o efeito de alguns termos não homogêneos periódicos não senoidais.

19. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + y = f(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

onde

$$f(t) = u_0(t) + 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_{k\pi}(t).$$

(a) Desenhe o gráfico de $f(t)$ em um intervalo como $0 \le t \le 6\pi$.

(b) Encontre a solução do problema de valor inicial.

(c) Seja $n = 15$ e desenhe o gráfico da solução para $0 \le t \le 60$. Descreva a solução e explique por que ela se comporta dessa maneira.

(d) Investigue como a solução muda quando n cresce. O que acontece quando $n \to \infty$?

20. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + 0{,}1y' + y = f(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

onde $f(t)$ é a mesma do Problema 19.

(a) Desenhe o gráfico da solução. Use um valor de n e um intervalo de tempo suficientemente grandes para que a parte transiente da solução torne-se desprezível e o estado estacionário apareça claramente.

(b) Estime a amplitude e a frequência da parte correspondente ao estado estacionário da solução.

(c) Compare os resultados do item (b) com os da Seção 3.8 para um oscilador sob a ação de uma força senoidal.

21. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + y = g(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

onde

$$g(t) = u_0(t) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k u_{k\pi}(t).$$

(a) Desenhe o gráfico de $g(t)$ em um intervalo como $0 \le t \le 6\pi$. Compare com o gráfico de $f(t)$ no Problema 19(a).

(b) Encontre a solução do problema de valor inicial.

(c) Seja $n = 15$ e desenhe o gráfico da solução para $0 \le t \le 60$. Descreva a solução e explique por que ela se comporta dessa maneira. Compare com a solução do Problema 19.

(d) Investigue como a solução muda quando n cresce. O que acontece quando $n \to \infty$?

22. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + 0.1y' + y = g(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

onde $g(t)$ é a mesma do Problema 21.

(a) Desenhe o gráfico da solução. Use um valor de n e um intervalo de tempo suficientemente grandes para que a parte transiente da solução torne-se desprezível e o estado estacionário apareça claramente.

(b) Estime a amplitude e a frequência da parte correspondente ao estado estacionário da solução.

(c) Compare os resultados do item (b) com os do Problema 20 e os da Seção 3.8 para um oscilador sob a ação de uma força senoidal.

23. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + y = h(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

onde

$$f(t) = u_0(t) + 2\sum_{k=1}^{n} (-1)^k u_{11k/4}(t).$$

Observe que este problema é idêntico ao Problema 19, exceto que a frequência do termo não homogêneo foi um pouco aumentada.

(a) Encontre a solução deste problema de valor inicial.

(b) Seja $n \ge 33$ e desenhe o gráfico da solução para um intervalo $0 \le t \le 90$ ou maior. Seu gráfico deve mostrar um batimento claramente reconhecível.

(c) Do gráfico no item (b), estime o "período lento" e o "período rápido" para este oscilador.

(d) Para um oscilador sob a ação de uma força senoidal mostramos, na Seção 3.8, que a "frequência lenta" é dada por $|\omega - \omega_0|/2$, onde ω_0 é a frequência natural do sistema e ω é a frequência do termo não homogêneo. Analogamente, a "frequência rápida" é $(\omega + \omega_0)/2$. Use essas expressões para calcular o "período rápido" e o "período lento" para o oscilador neste problema. Quão próximos esses resultados estão de suas estimativas no item (c)?

6.5 Funções de Impulso

Em algumas aplicações é necessário tratar fenômenos de natureza impulsiva – por exemplo, tensões ou forças de módulo grande que agem por um período de tempo muito curto. Tais problemas levam, com frequência, a equações diferenciais da forma

$$ay'' + by' + cy = g(t), \tag{1}$$

onde $g(t)$ é grande em um intervalo pequeno $t_0 - \tau < t < t_0 + \tau$ e é zero nos outros pontos.

A integral $I(t)$, definida por

$$I(\tau) = \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} g(t)\,dt, \tag{2}$$

ou, como $g(t) = 0$ fora do intervalo $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$,

$$I(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt, \tag{3}$$

é uma medida da força do termo não homogêneo. Em um sistema mecânico, onde $g(t)$ é uma força, $I(\tau)$ é o **impulso** total da força $g(t)$ sobre o intervalo de tempo $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$. Analogamente, se y é a corrente

em um circuito elétrico e $g(t)$ é a derivada em relação ao tempo da tensão, então $I(\tau)$ representa a tensão total impressa no circuito durante o intervalo de tempo $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$.

Em particular, vamos supor que t_0 é zero e que $g(t)$ é dada por

$$g(t) = d_\tau(t) = \begin{cases} 1/2\tau, & -\tau < t < \tau, \\ 0, & t \le -\tau \quad \text{ou} \quad t \ge \tau, \end{cases} \tag{4}$$

onde τ é uma constante positiva pequena (veja a Figura 6.5.1). De acordo com a Eq. (2) ou (3), segue imediatamente que nesse caso $I(\tau) = 1$, independentemente do valor de τ, desde que $\tau \neq 0$. Vamos agora usar um termo não homogêneo d_τ ideal, fazendo com que ele aja em intervalos de tempo cada vez mais curtos, ou seja, vamos fazer $\tau \to 0$, como indicado na Figura 6.5.2. Como resultado desse limite, obtemos

$$\lim_{\tau \to 0} d_\tau(t) = 0, \qquad t \neq 0. \tag{5}$$

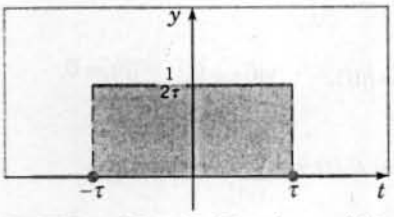

FIGURA 6.5.1 Gráfico de $y = d_\tau(t)$.

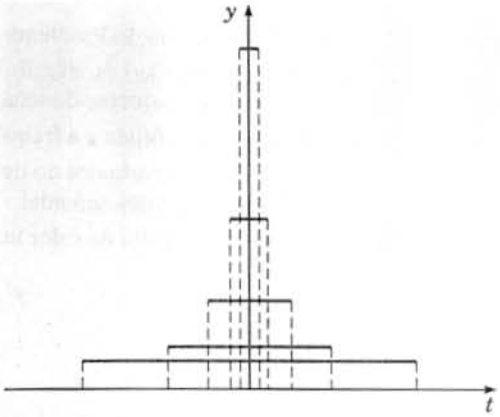

FIGURA 6.5.2 Gráficos de $y = d_\tau(t)$ quando $\tau \to 0$.

Além disso, como $I(\tau) = 1$ para todo $\tau \neq 0$, segue que

$$\lim_{\tau \to 0} I(\tau) = 1. \tag{6}$$

As Eqs. (5) e (6) podem ser usadas para se definir uma **função impulso unitário** δ, que funciona como um impulso de tamanho 1 em t = 0 mas é zero para todos os outros valores de t diferentes de zero. Em outras palavras, a "função" δ é definida como tendo as propriedades

$$\delta(t) = 0, \qquad t \neq 0; \tag{7}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1. \tag{8}$$

Não existe uma função, no sentido usual da palavra, estudada em Cálculo que satisfaça ambas as Eqs. (7) e (8). A "função" δ definida por essas equações é um exemplo de algo conhecido como funções generalizadas, e é chamada de **função delta** de Dirac.[2] Como $\delta(t)$ corresponde a um impulso unitário em $t = 0$, um impulso unitário em um ponto arbitrário $t = t_0$ é dado por $\delta(t - t_0)$. Das Eqs. (7) e (8), segue que

$$\delta(t - t_0) = 0, \qquad t \neq t_0; \tag{9}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\, dt = 1. \tag{10}$$

A função δ não satisfaz as condições do Teorema 6.1.2, mas ainda assim sua transformada de Laplace pode ser definida formalmente. Como $\delta(t)$ é definida como o limite de $d_\tau(t)$ quando $\tau \to 0$, é natural definir a transformada de Laplace de δ como um limite análogo da transformada de d_τ. Em particular, vamos supor que $t_0 > 0$ e vamos definir $\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\}$ pela equação

[2]Paul A. M. Dirac (1902-1984), físico matemático inglês, recebeu seu Ph.D. de Cambridge em 1926 e foi professor de matemática dessa universidade até 1969. Recebeu o prêmio Nobel em 1933 (junto com Erwin Schrödinger) por seu trabalho fundamental em mecânica quântica. Seu resultado mais conhecido foi a equação relativística para o elétron, publicado em 1928. Dessa equação ele previu o "antielétron", ou pósitron, que foi observado pela primeira vez em 1932. Depois de se aposentar em Cambridge, Dirac se mudou para os Estados Unidos, onde teve uma posição de professor pesquisador na Florida State University.

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \lim_{\tau\to 0} \mathcal{L}\{d_\tau(t-t_0)\}. \tag{11}$$

Para calcular o limite na Eq. (11), note primeiro que se $\tau < t_0$, o que vai acabar acontecendo quando $\tau \to 0$, então $t_0 - \tau > 0$. Como $d_\tau(t-t_0)$ é diferente de zero apenas no intervalo de $t_0 - \tau$ até $t_0 + \tau$, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{d_\tau(t-t_0)\} &= \int_0^\infty e^{-st} d_\tau(t-t_0)\,dt \\ &= \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} e^{-st} d_\tau(t-t_0)\,dt.\end{aligned}$$

Substituindo $d_\tau(t-t_0)$ pela expressão na Eq. (4), obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{d_\tau(t-t_0)\} &= \frac{1}{2\tau}\int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} e^{-st}\,dt = -\frac{1}{2s\tau}e^{-st}\Big|_{t=t_0-\tau}^{t=t_0+\tau} \\ &= \frac{1}{2s\tau}e^{-st_0}(e^{s\tau} - e^{-s\tau})\end{aligned}$$

ou

$$\mathcal{L}\{d_\tau(t-t_0)\} = \frac{\operatorname{senh} s\tau}{s\tau}e^{-st_0}. \tag{12}$$

O quociente $(\operatorname{senh} s\tau)/s\tau$ é indeterminado quando $\tau \to 0$, mas seu limite pode ser calculado através da regra de L'Hôspital. Obtemos

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\operatorname{senh} s\tau}{s\tau} = \lim_{\tau\to 0}\frac{s\cosh s\tau}{s} = 1.$$

Então, segue da Eq. (11) que

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}. \tag{13}$$

A Eq. (13) define $\mathcal{L}\{\delta\,(t-t_0)\}$ para qualquer $t_0 > 0$. Vamos estender esse resultado, para permitir a t_0 ser igual a zero, fazendo $t_0 \to 0$ à direita do sinal de igualdade na Eq. (13); assim,

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{t_0\to 0} e^{-st_0} = 1. \tag{14}$$

De maneira análoga, é possível definir a integral do produto da função δ por qualquer função contínua f. Temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)f(t)\,dt = \lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} d_\tau(t-t_0)f(t)\,dt. \tag{15}$$

Usando a definição (4) de $d_\tau(t)$ e o teorema do valor médio para integrais, encontramos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} d_\tau(t-t_0)f(t)\,dt &= \frac{1}{2\tau}\int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\tau}\cdot 2\tau\cdot f(t^*) = f(t^*),\end{aligned}$$

onde $t_0 - \tau < t^* < t_0 + \tau$. Portanto, $t^* \to t_0$ quando $\tau \to 0$, e segue da Eq. (15) que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)f(t)\,dt = f(t_0). \tag{16}$$

O exemplo a seguir ilustra o uso da função delta na resolução de um problema de valor inicial com um termo não homogêneo impulsivo.

EXEMPLO 1

Encontre a solução do problema de valor inicial

$$2y'' + y' + 2y = \delta(t-5), \tag{17}$$

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0. \tag{18}$$

Este problema de valor inicial vem do estudo do mesmo circuito elétrico ou oscilador mecânico do Exemplo 1 da Seção 6.4. A única diferença é o termo não homogêneo.

Para resolver o problema dado, calculamos a transformada de Laplace da equação diferencial e usamos as condições iniciais, obtendo

$$(2s^2 + s + 2)Y(s) = e^{-5s}.$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{e^{-5s}}{2s^2 + s + 2} = \frac{e^{-5s}}{2} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}}. \tag{19}$$

Pelo Teorema 6.3.2 ou pela linha 9 da Tabela 6.2.1,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}}\right\} = \frac{4}{\sqrt{15}} e^{-t/4} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{15}}{4} t. \tag{20}$$

Portanto, pelo Teorema 6.3.1 temos

$$y = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{2}{\sqrt{15}} u_5(t) e^{-(t-5)/4} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{15}}{4} (t - 5), \tag{21}$$

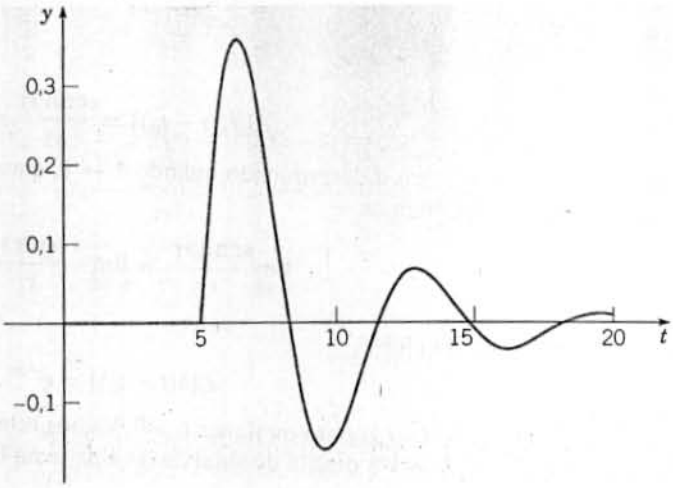

FIGURA 6.5.3 Solução do problema de valor inicial (17), (18).

que é a solução formal do problema dado. Também é possível escrever y na forma

$$y = \begin{cases} 0, & t < 5, \\ \dfrac{2}{\sqrt{15}} e^{-(t-5)/4} \operatorname{sen} \dfrac{\sqrt{15}}{4} (t - 5), & t \geq 5. \end{cases} \tag{22}$$

O gráfico da Eq. (22) aparece na Figura 6.5.3. Como as condições iniciais em $t = 0$ são homogêneas e não existe excitação externa até $t = 5$, não há resposta no intervalo $0 < t < 5$. O impulso em $t = 5$ produz uma oscilação que decai, mas persiste indefinidamente. A resposta é contínua em $t = 5$, apesar da singularidade do termo não homogêneo nesse ponto. No entanto, a derivada primeira da solução tem um salto em $t = 5$, e a derivada segunda tem uma descontinuidade infinita aí. Isso tem que acontecer pela equação diferencial (17), já que uma singularidade em um dos lados do sinal de igualdade tem que ser balanceada por uma singularidade correspondente do outro lado.

Ao se trabalhar com problemas envolvendo um termo não homogêneo impulsivo, muitas vezes a utilização da função delta simplifica bastante os cálculos matemáticos. No entanto, se a excitação atual se estende a um intervalo de tempo curto, mas não nulo, será introduzido um erro ao se modelar a excitação como instantânea. Esse erro pode ser muito pequeno, mas não deve ser desprezado em um problema prático sem ser analisado. Pede-se que você investigue essa questão no Problema 16 para um oscilador harmônico simples.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 12:

(a) Encontre a solução do problema de valor inicial dado.

(b) Desenhe um gráfico da solução.

1. $y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
2. $y'' + 4y = \delta(t - \pi) - \delta(t - 2\pi); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
3. $y'' + 3y' + 2y = \delta(t - 5) + u_{10}(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1/2$
4. $y'' - y = -20\delta(t - 3); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
5. $y'' + 2y' + 3y = \operatorname{sen} t + \delta(t - 3\pi); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
6. $y'' + 4y = \delta(t - 4\pi); \quad y(0) = 1/2, \quad y'(0) = 0$
7. $y'' + y = \delta(t - 2\pi)\cos t; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
8. $y'' + 4y = 2\delta(t - \pi/4); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
9. $y'' + y = u_{\pi/2}(t) + 3\delta(t - 3\pi/2) - u_{2\pi}(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
10. $2y'' + y' + 4y = \delta(t - \pi/6)\operatorname{sen} t; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
11. $y'' + 2y' + 2y = \cos t + \delta(t - \pi/2); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
12. $y^{(4)} - y = \delta(t - 1); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0$
13. Considere, novamente, o sistema no Exemplo 1 desta seção, no qual uma oscilação é excitada por um impulso unitário em $t = 5$. Suponha que desejamos colocar o sistema em repouso após exatamente um ciclo – ou seja, quando a resposta volta, pela primeira vez, à posição de equilíbrio movendo-se no sentido positivo.
    (a) Determine o impulso $k\delta(t - t_0)$ que deve ser aplicado ao sistema para se alcançar esse objetivo. Note que k é o tamanho do impulso e t_0 é o instante de sua aplicação.
    (b) Resolva o problema de valor inicial resultante e faça o gráfico de sua solução para confirmar que se comporta da maneira especificada.
14. Considere o problema de valor inicial
$$y'' + \gamma y' + y = \delta(t - 1), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$
onde γ é o coeficiente de amortecimento (ou resistência).
    (a) Seja $\gamma = \frac{1}{2}$. Encontre a solução do problema de valor inicial e desenhe seu gráfico.
    (b) Encontre o instante t_1 no qual a solução atinge seu valor máximo. Encontre, também, esse valor máximo y_1 da solução.
    (c) Seja $\gamma = \frac{1}{4}$ e repita os itens (a) e (b).
    (d) Determine como t_1 e y_1 variam quando γ diminui. Quais são os valores de t_1 e de y_1 quando $\gamma = 0$?
15. Considere o problema de valor inicial
$$y'' + \gamma y' + y = k\delta(t - 1), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$
onde k é o tamanho de um impulso em $t = 1$ e γ é o coeficiente de amortecimento (ou resistência).
    (a) Seja $\gamma = \frac{1}{2}$. Encontre o valor de k para o qual a resposta tem um valor máximo de 2; chame esse valor de k_1.
    (b) Repita o item (a) para $\gamma = \frac{1}{4}$.
    (c) Determine como k_1 varia quando γ diminui. Qual o valor de k_1 quando $\gamma = 0$?
16. Considere o problema de valor inicial
$$y'' + y = f_k(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$
onde $f_k(t) = [u_{4-k}(t) - u_{4+k}(t)]/2k$ com $0 < k \leq 1$.
    (a) Encontre a solução $y = \phi(t, k)$ do problema de valor inicial.
    (b) Calcule $\lim_{k \to 0} \phi(t, k)$ da solução encontrada no item (a).
    (c) Observe que $\lim_{k \to 0} f_k(t) = \delta(t - 4)$. Encontre a solução $\phi_0(t)$ do problema de valor inicial dado com $f_k(t)$ substituído por $\delta(t - 4)$. É verdade que $\phi_0(t) = \lim_{k \to 0} \phi(t, k)$?
    (d) Faça os gráficos de $\phi(t, 1/2)$, $\phi(t, 1/4)$ e $\phi_0(t)$ nos mesmos eixos. Descreva a relação entre $\phi(t, k)$ e $\phi_0(t)$.

Os Problemas de 17 a 22 tratam do efeito de uma sequência de impulsos aplicados em um oscilador não amortecido. Suponha que
$$y'' + y = f(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$
Para cada uma das escolhas para $f(t)$:
(a) Tente prever a natureza da solução sem resolver o problema.

(b) Teste sua previsão encontrando a solução e desenhando seu gráfico.

(c) Determine o que acontece após o final da sequência de impulsos.

17. $f(t) = \sum_{k=1}^{20} \delta(t - k\pi)$

18. $f(t) = \sum_{k=1}^{20} (-1)^{k+1}\delta(t - k\pi)$

19. $f(t) = \sum_{k=1}^{20} \delta(t - k\pi/2)$

20. $f(t) = \sum_{k=1}^{20} (-1)^{k+1}\delta(t - k\pi/2)$

21. $f(t) = \sum_{k=1}^{15} \delta[t - (2k-1)\pi]$

22. $f(t) = \sum_{k=1}^{40} (-1)^{k+1}\delta(t - 11k/4)$

23. A posição de um determinado oscilador ligeiramente amortecido satisfaz o problema de valor inicial

$$y'' + 0{,}1y' + y = \sum_{k=1}^{20} (-1)^{k+1}\delta(t - k\pi), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Note que, exceto pelo termo de amortecimento, este problema é igual ao Problema 18.

(a) Tente prever a natureza da solução sem resolver o problema.

(b) Teste sua previsão encontrando a solução e desenhando seu gráfico.

(c) Determine o que acontece após o final da sequência de impulsos.

24. Proceda como no Problema 23 para o oscilador, satisfazendo

$$y'' + 0{,}1y' + y = \sum_{k=1}^{15} \delta[t - (2k-1)\pi], \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Note que, exceto pelo termo de amortecimento, este problema é igual ao Problema 21.

25. (a) Mostre, pelo método de variação dos parâmetros, que a solução do problema de valor inicial

$$y'' + 2y' + 2y = f(t); \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

é

$$y = \int_0^t e^{-(t-\tau)} f(\tau)\,\mathrm{sen}(t - \tau)\,d\tau.$$

(b) Mostre que, se $f(t) = \delta(t - \pi)$, então a solução do item (a) se reduz a

$$y = u_\pi(t)e^{-(t-\pi)}\mathrm{sen}(t - \pi).$$

(c) Use uma transformada de Laplace para resolver o problema de valor inicial dado com $f(t) = \delta(t - \pi)$ e confirme que a solução coincide com a encontrada no item (b).

6.6 A Convolução

Algumas vezes é possível identificar uma transformada de Laplace $H(s)$ como o produto de duas outras transformadas $F(s)$ e $G(s)$, estas últimas correspondendo a funções conhecidas f e g, respectivamente. Nesse caso, poderíamos pensar que $H(s)$ seria a transformada do produto de f e g. Isso não acontece, no entanto; em outras palavras, a transformada de Laplace não comuta com a multiplicação usual. Por outro lado, se definirmos convenientemente um "produto generalizado", então a situação muda, conforme enunciado no teorema a seguir.

Teorema 6.6.1 Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ e $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ existem para $s > a \geq 0$, então

$$H(s) = F(s)G(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}, \qquad s > a, \tag{1}$$

onde

$$h(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)\,d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)\,d\tau. \tag{2}$$

A função h é conhecida como a convolução de f e g; algumas vezes as integrais na Eq. (2) são chamadas de integrais de convolução.

A igualdade das duas integrais na Eq. (2) segue da mudança de variável $t - \tau = \xi$ na primeira integral. Antes de demonstrar esse teorema, vamos fazer algumas observações sobre a convolução. De acordo com esse teorema, é a transformada da convolução de duas funções, em vez da transformada de seu produto usual, que é dada pelo produto das transformadas separadas. É conveniente enfatizar que a convolução pode ser considerada como um "produto generalizado" escrevendo-se

$$h(t) = (f * g)(t). \tag{3}$$

Em particular, a notação $(f * g)(t)$ serve para indicar a primeira integral na Eq. (2).

A convolução $(f * g)(t)$ tem muitas das propriedades da multiplicação usual. Por exemplo, é relativamente simples mostrar que

$$f * g = g * f \qquad \text{(comutatividade)} \tag{4}$$

$$f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2 \qquad \text{(distributividade)} \tag{5}$$

$$(f * g) * h = f * (g * h) \qquad \text{(associatividade)} \tag{6}$$

$$f * 0 = 0 * f = 0. \qquad \text{(elemento neutro)} \tag{7}$$

Na Eq. (7) os zeros não denotam o número, mas a função identicamente nula. As demonstrações desses resultados são deixadas a cargo do leitor.

No entanto, a multiplicação usual tem outras propriedades que a convolução não tem. Por exemplo, não é verdade, em geral, que $f * 1$ seja igual a f. Para ver isso, note que

$$(f * 1)(t) = \int_0^t f(t - \tau) \cdot 1 \, d\tau = \int_0^t f(t - \tau) \, d\tau.$$

Se, por exemplo, $f(t) = \cos t$, então

$$\begin{aligned}(f * 1)(t) &= \int_0^t \cos(t - \tau) \, d\tau = -\operatorname{sen}(t - \tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} \\ &= -\operatorname{sen} 0 + \operatorname{sen} t \\ &= \operatorname{sen} t.\end{aligned}$$

É claro que $(f * 1)(t) \neq f(t)$. Analogamente, pode não ser verdade que $f * f$ seja não negativa. Veja o Problema 3 para um exemplo.

As convoluções aparecem em diversas aplicações onde o comportamento do sistema em qualquer instante t não depende apenas do estado no instante t, mas também de sua história passada. Sistemas desse tipo são chamados, algumas vezes, de sistemas hereditários e ocorrem em campos tão diversos quanto transporte, viscoelasticidade e dinâmica populacional, entre outros.

Voltando à demonstração do Teorema 6.6.1, observe, em primeiro lugar, que, se

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} f(\xi) \, d\xi$$

e

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau) \, d\tau,$$

então

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} f(\xi) \, d\xi \int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau) \, d\tau. \tag{8}$$

Como o integrando na primeira integral não depende da variável de integração da segunda integral, podemos escrever $F(s)G(s)$ como uma integral iterada,

$$\begin{aligned}F(s)G(s) &= \int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau) \left[\int_0^\infty e^{-s\xi} f(\xi) \, d\xi \right] d\tau \\ &= \int_0^\infty g(\tau) \left[\int_0^\infty e^{-s(\xi+\tau)} f(\xi) \, d\xi \right] d\tau. \end{aligned} \tag{9}$$

Essa última expressão pode ser colocada em uma forma mais conveniente através de novas variáveis de integração. Seja $\xi = t - \tau$ para τ fixo, de modo que $d\xi = dt$. Além disso, $\xi = 0$ corresponde a $t = \tau$ e $\xi = \infty$ corresponde a $t = \infty$; então a integral em relação a ξ na Eq. (9) vira uma integral em relação a t:

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty g(\tau)\left[\int_\tau^\infty e^{-st} f(t-\tau)\, dt\right] d\tau. \tag{10}$$

A integral à direita do sinal de igualdade na Eq. (10) é calculada sobre a região ilimitada em forma de cunha no plano $t\tau$ que aparece sombreada na Figura 6.6.1. Supondo que se pode trocar a ordem de integração, obtemos, finalmente,

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau\right] dt \tag{11}$$

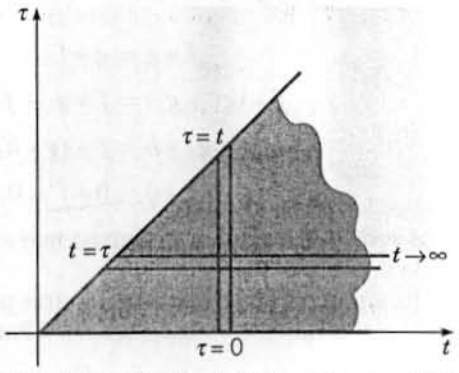

FIGURA 6.6.1 Região de integração para $F(s)G(s)$.

ou

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^\infty e^{-st} h(t)\, dt \\ &= \mathcal{L}\{h(t)\}, \end{aligned} \tag{12}$$

onde $h(t)$ é definida pela Eq. (2). Isso completa a demonstração do Teorema 6.6.1.

EXEMPLO 1

Encontre a transformada inversa de

$$H(s) = \frac{a}{s^2(s^2+a^2)}. \tag{13}$$

É conveniente pensar em $H(s)$ como o produto de s^{-2} e $a/(s^2+a^2)$, que são, de acordo com as linhas 3 e 5 da Tabela 6.2.1, as transformadas de t e de sen at, respectivamente. Portanto, pelo Teorema 6.6.1 a transformada inversa de $H(s)$ é

$$h(t) = \int_0^t (t-\tau)\operatorname{sen} a\tau\, d\tau = \frac{at - \operatorname{sen} at}{a^2}. \tag{14}$$

Você pode verificar que se obtém o mesmo resultado se a função $h(t)$ for escrita na forma alternativa

$$h(t) = \int_0^t \tau \operatorname{sen} a(t-\tau)\, d\tau,$$

o que confirma a Eq. (2) nesse caso. É claro que $h(t)$ também pode ser encontrada expandindo-se $H(s)$ em frações parciais.

EXEMPLO 2

Encontre a solução do problema de valor inicial

$$y'' + 4y = g(t), \tag{15}$$

$$y(0) = 3, \qquad y'(0) = -1. \tag{16}$$

Calculando a transformada de Laplace da equação diferencial e usando as condições iniciais, obtemos

$$s^2Y(s) - 3s + 1 + 4Y(s) = G(s)$$

ou

$$Y(s) = \frac{3s-1}{s^2+4} + \frac{G(s)}{s^2+4}. \tag{17}$$

Note que a primeira e a segunda parcelas à direita do sinal de igualdade na Eq. (17) contêm, respectivamente, a dependência de $Y(s)$ nas condições iniciais e no termo não homogêneo. É conveniente escrever $Y(s)$ na forma

$$Y(s) = 3\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4} + \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4}G(s). \tag{18}$$

Então, usando as linhas 5 e 6 da Tabela 6.2.1 e o Teorema 6.6.1, temos

$$y = 3\cos 2t - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t + \tfrac{1}{2}\int_0^t \operatorname{sen} 2(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \tag{19}$$

Se um termo não homogêneo específico g é dado, então a integral na Eq. (19) pode ser calculada (por métodos numéricos, se necessário).

O Exemplo 2 ilustra a força da convolução como ferramenta para se escrever a solução de um problema de valor inicial em função de uma integral. De fato, é possível proceder de um modo bastante semelhante em problemas mais gerais. Considere o problema que consiste na equação diferencial

$$ay'' + by' + cy = g(t), \tag{20}$$

onde a, b e c são constantes reais e g é uma função dada, com as condições iniciais

$$y(0) = y_0, \qquad y'(0) = y_0'. \tag{21}$$

A abordagem de transformada fornece uma compreensão mais profunda sobre a estrutura da solução de qualquer problema desse tipo.

É comum a referência ao problema de valor inicial (20), (21) como um problema de entrada-saída. Os coeficientes a, b e c descrevem as propriedades de algum sistema físico, e $g(t)$ corresponde à força externa (entrada) agindo sobre o sistema. Os valores y_0 e y_0' descrevem o estado inicial, e a solução y é a resposta (saída) no instante t.

Calculando a transformada de Laplace da Eq. (20) e usando as condições iniciais (21), obtemos

$$(as^2 + bs + c)Y(s) - (as + b)y_0 - ay_0' = G(s).$$

Se definirmos

$$\Phi(s) = \frac{(as+b)y_0 + ay_0'}{as^2+bs+c}, \qquad \Psi(s) = \frac{G(s)}{as^2+bs+c}, \tag{22}$$

podemos escrever

$$Y(s) = \Phi(s) + \Psi(s). \tag{23}$$

Em consequência,

$$y = \phi(t) + \psi(t), \tag{24}$$

onde $\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\}$ e $\psi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Psi(s)\}$. Note que $\phi(t)$ é a solução do problema de valor inicial

$$ay'' + by' + cy = 0, \qquad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0', \tag{25}$$

obtida das Eqs. (20) e (21) fazendo $g(t)$ igual a zero. Analogamente, $\psi(t)$ é a solução de

$$ay'' + by' + cy = g(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \tag{26}$$

na qual os valores iniciais y_0 e y_0' são substituídos por zero.

Uma vez dados valores específicos para a, b e c, podemos encontrar $\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\}$ usando a Tabela 6.2.1, possivelmente em conjunto com uma translação ou uma expansão em frações parciais. Para encontrar $\psi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Psi(s)\}$, é conveniente escrever $\psi(s)$ como

$$\Psi(s) = H(s)G(s), \tag{27}$$

onde $H(s) = (as^2 + bs + c)^{-1}$. A função H é conhecida como a **função de transferência**[3] e depende apenas das propriedades do sistema em questão, ou seja, $H(s)$ fica inteiramente determinada pelos coeficientes a, b e c. Por outro lado, $G(s)$ depende exclusivamente da excitação externa $g(t)$ que é aplicada ao sistema. Pelo teorema sobre convoluções, podemos escrever

[3]Essa terminologia vem do fato de que $H(s)$ é a razão entre as transformadas da resposta (saída) e da função externa (entrada) do problema (26).

$$\psi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)G(s)\} = \int_0^t h(t-\tau)g(\tau)\,d\tau, \tag{28}$$

onde $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ e $g(t)$ é o termo não homogêneo dado.

Para obter uma compreensão melhor do significado de $h(t)$, vamos considerar o caso em que $G(s) = 1$; então, $g(t) = \delta(t)$ e $\psi(s) = H(s)$. Isso significa que $y = h(t)$ é solução do problema de valor inicial

$$ay'' + by' + cy = \delta(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \tag{29}$$

obtido da Eq. (26) substituindo-se $g(t)$ por $\delta(t)$. Logo, $h(t)$ é a resposta do sistema a um impulso unitário aplicado em $t = 0$, e é natural chamar $h(t)$ de **resposta ao impulso** do sistema. A Eq. (28) diz, então, que $\psi(t)$ é a convolução da resposta ao impulso com a força externa.

Com referência ao Exemplo 2, observamos que nesse caso a função de transferência é $H(s) = 1/(s^2 + 4)$ e a resposta ao impulso é $h(t) = (\operatorname{sen} 2t)/2$. Além disso, as duas primeiras parcelas à direita do sinal de igualdade na Eq. (19) constituem a função $\phi(t)$, a solução da equação homogênea associada que satisfaz as condições iniciais dadas.

PROBLEMAS

1. Prove a comutatividade, a distributividade e a associatividade para a convolução.
   (a) $f * g = g * f$
   (b) $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$
   (c) $f * (g * h) = (f * g) * h$
2. Encontre um exemplo diferente do que foi dado no texto mostrando que $(f * 1)(t)$ não precisa ser igual a $f(t)$.
3. Mostre, através do exemplo $f(t) = \operatorname{sen} t$, que $f * f$ não precisa ser não negativa.

Em cada um dos Problemas de 4 a 7, encontre a transformada de Laplace da função dada.

4. $f(t) = \displaystyle\int_0^t (t-\tau)^2 \cos 2\tau\, d\tau$
5. $f(t) = \displaystyle\int_0^t e^{-(t-\tau)} \operatorname{sen} \tau\, d\tau$
6. $f(t) = \displaystyle\int_0^t (t-\tau)e^{\tau}\, d\tau$
7. $f(t) = \displaystyle\int_0^t \operatorname{sen}(t-\tau) \cos \tau\, d\tau$

Em cada um dos Problemas de 8 a 11, encontre a transformada de Laplace inversa da função dada usando o teorema sobre convoluções.

8. $F(s) = \dfrac{1}{s^4(s^2+1)}$
9. $F(s) = \dfrac{s}{(s+1)(s^2+4)}$
10. $F(s) = \dfrac{1}{(s+1)^2(s^2+4)}$
11. $F(s) = \dfrac{G(s)}{s^2+1}$

12. (a) Se $f(t) = t^m$ e se $g(t) = t^n$, onde m e n são inteiros positivos, mostre que
$$f * g = t^{m+n+1} \int_0^1 u^m (1-u)^n\, du.$$
    (b) Use o teorema sobre convoluções para mostrar que
$$\int_0^1 u^m (1-u)^n\, du = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}.$$
    (c) Estenda o resultado do item (b) para o caso em que m e n são números positivos, mas não necessariamente inteiros.

Em cada um dos Problemas de 13 a 20, expresse a solução do problema de valor inicial dado em função de uma convolução.

13. $y'' + \omega^2 y = g(t); \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
14. $y'' + 2y' + 2y = \operatorname{sen} \alpha t; \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
15. $4y'' + 4y' + 17y = g(t); \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
16. $y'' + y' + \frac{5}{4}y = 1 - u_\pi(t); \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$
17. $y'' + 4y' + 4y = g(t); \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3$
18. $y'' + 3y' + 2y = \cos \alpha t; \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
19. $y^{(4)} - y = g(t); \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0$
20. $y^{(4)} + 5y'' + 4y = g(t); \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0$

21. Considere a equação

$$\phi(t) + \int_0^t k(t-\xi)\phi(\xi)\,d\xi = f(t),$$

na qual f e k são funções conhecidas e ϕ deve ser determinada. Como a função desconhecida ϕ aparece debaixo do sinal de integral, a equação dada é dita uma **equação integral**; em particular, ela pertence à classe de equações integrais conhecidas como equações integrais de Volterra. Calcule a transformada de Laplace da equação integral dada e obtenha uma expressão para $\mathcal{L}\{\phi(t)\}$ em função das transformadas $\mathcal{L}\{f(t)\}$ e $\mathcal{L}\{k(t)\}$ das funções dadas f e k. A transformada inversa de $\mathcal{L}\{\phi(t)\}$ é a solução da equação integral original.

22. Considere a equação integral de Volterra (veja o Problema 21)

$$\phi(t) + \int_0^t (t-\xi)\phi(\xi)\,d\xi = \operatorname{sen} 2t. \tag{i}$$

(a) Resolva a equação integral (i) usando a transformada de Laplace.

(b) Diferenciando a Eq. (i) duas vezes, mostre que $\phi(t)$ satisfaz a equação diferencial

$$\phi''(t) + \phi(t) = -4\operatorname{sen} 2t.$$

Mostre também que as condições iniciais são

$$\phi(0) = 0, \qquad \phi'(0) = 2.$$

(c) Resolva o problema de valor inicial do item (b) e verifique que a solução é a mesma obtida no item (a).

Em cada um dos Problemas de 23 a 25:

(a) Resolva a equação de Volterra dada usando a transformada de Laplace.

(b) Converta a equação integral a um problema de valor inicial, como no Problema 22(b).

(c) Resolva o problema de valor inicial no item (b) e verifique que a solução é a mesma encontrada no item (a).

23. $\phi(t) + \int_0^t (t-\xi)\phi(\xi)\,d\xi = 1$

24. $\phi(t) - \int_0^t (t-\xi)\phi(\xi)\,d\xi = 1$

25. $\phi(t) + 2\int_0^t \cos(t-\xi)\phi(\xi)\,d\xi = e^{-t}$

Existem também equações, conhecidas como **equações íntegro-diferenciais**, onde aparecem derivadas e integrais da função desconhecida. Em cada um dos Problemas de 26 a 28:

(a) Resolva a equação íntegro-diferencial dada usando a transformada de Laplace.

(b) Diferenciando a equação íntegro-diferencial um número suficiente de vezes, converta-a em um problema de valor inicial.

(c) Resolva o problema de valor inicial no item (b) e verifique que a solução é a mesma encontrada no item (a).

26. $\phi'(t) + \int_0^t (t-\xi)\phi(\xi)\,d\xi = t, \qquad \phi(0) = 0$

27. $\phi'(t) - \frac{1}{2}\int_0^t (t-\xi)^2\phi(\xi)\,d\xi = -t, \qquad \phi(0) = 1$

28. $\phi'(t) + \phi(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(t-\xi)\phi(\xi)\,d\xi, \qquad \phi(0) = 1$

29. **A Tautócrona.** Um problema de interesse na história da matemática é o de encontrar a tautócrona[4] — a curva descrita por uma partícula deslizando livremente sob a ação apenas da gravidade, atingindo o fundo no mesmo instante independentemente de seu ponto de partida na curva. Esse problema apareceu na construção de um relógio com pêndulo, cujo período é independente da amplitude de seu movimento. A tautócrona foi encontrada por Christian Huygens (1629-1695) em 1673 por métodos geométricos e, mais tarde, por Leibniz e Jakob Bernoulli usando argumentos analíticos. A solução de Bernoulli (em 1690) foi uma das primeiras ocasiões em que se resolveu explicitamente uma equação diferencial. A configuração geométrica está ilustrada na Figura 6.6.2.

[4]A palavra "tautócrana" tem origem nas palavras gregas *tauto*, que significa o mesmo, e *chronos*, que significa tempo.

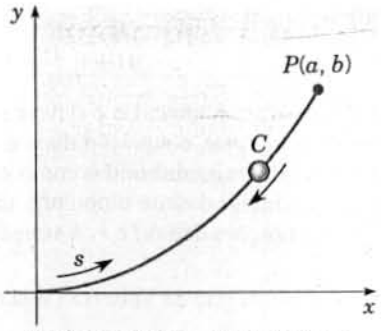

FIGURA 6.6.2 A tautócrona.

O ponto inicial $P(a, b)$ é unido ao ponto final $(0, 0)$ pelo arco C. O comprimento de arco s é medido a partir da origem e $f(y)$ denota a taxa de variação de s em relação a y:

$$f(y) = \frac{ds}{dy} = \left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{i}$$

Segue então, do princípio de conservação de energia, que o tempo $T(b)$ necessário para uma partícula deslizar de P até a origem é

$$T(b) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \frac{f(y)}{\sqrt{b-y}}\, dy. \tag{ii}$$

(a) Suponha que $T(b) = T_0$, uma constante, para cada b. Calculando a transformada de Laplace da Eq. (ii) nesse caso e usando o teorema sobre convoluções, mostre que

$$F(s) = \sqrt{\frac{2g}{\pi}}\, \frac{T_0}{\sqrt{s}}; \tag{iii}$$

depois, mostre que

$$f(y) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi}\, \frac{T_0}{\sqrt{y}}. \tag{iv}$$

Sugestão: veja o Problema 27 da Seção 6.1.

(b) Combinando as Eqs. (i) e (iv), mostre que

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{2\alpha - y}{y}}, \tag{v}$$

onde $\alpha = gT_0^2/\pi^2$.

(c) Use a substituição $y = 2\alpha\, \text{sen}^2(\theta/2)$ para resolver a Eq. (v) e mostre que

$$x = \alpha(\theta + \text{sen}\,\theta), \qquad y = \alpha(1 - \cos\theta). \tag{vi}$$

As Eqs. (vi) podem ser identificadas como equações paramétricas de uma cicloide. Assim, a tautócrona é um arco de uma cicloide.

REFERÊNCIAS

Os livros listados a seguir contêm informações adicionais sobre a transformada de Laplace e suas aplicações:

Churchill, R. V., *Operational Mathematics* (3rd ed.) (New York: McGraw-Hill, 1971).
Doetsch, G., *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transform* (trans. W. Nader) (New York: Springer, 1974).
Kaplan, W., *Operational Methods for Linear Systems* (Reading, MA: Addison-Wesley, 1962).
Kuhfittig, P. K. F., *Introduction to the Laplace Transform* (New York: Plenum, 1978).
Miles, J. W., *Integral Transforms in Applied Mathematics* (London: Cambridge University Press, 1971).
Rainville, E. D., *The Laplace Transform: An Introduction* (New York: Macmillan, 1963).

Cada um dos livros mencionados acima contém uma tabela de transformadas. Também estão disponíveis tabelas mais extensas; veja, por exemplo:

Erdelyi, A. (ed.), *Tables of Integral Transforms* (Vol. 1) (New York: McGraw-Hill, 1954).
Roberts, G. E., and Kaufman, H., *Table of Laplace Transforms* (Philadelphia: Saunders, 1966).

Mais detalhes sobre funções generalizadas podem ser encontrados em

Lighthill, M. J., *Fourier Analysis and Generalized Functions* (London: Cambridge University Press, 1958).

CAPÍTULO

7

Sistemas de Equações Lineares de Primeira Ordem

Existem muitos problemas físicos que envolvem diversos elementos separados associados de alguma forma. Por exemplo, circuitos elétricos têm essa característica, assim como problemas em mecânica e em outros campos. Nesses e em casos semelhantes, o problema matemático correspondente consiste em um *sistema* de duas ou mais equações diferenciais, que sempre podem ser escritas como equações de primeira ordem. Vamos estudar, neste capítulo, sistemas de equações *lineares* de primeira ordem, em particular equações com coeficientes constantes, utilizando alguns aspectos elementares da álgebra linear para unificar a apresentação. Em muitos aspectos, este capítulo segue a mesma linha do tratamento dado às equações lineares de segunda ordem no Capítulo 3.

7.1 Introdução

Sistemas de equações diferenciais ordinárias simultâneas aparecem naturalmente em problemas envolvendo diversas variáveis dependentes, cada uma delas função da mesma variável independente única. Vamos denotar a variável independente por t e as variáveis dependentes, que são funções de t, por $x_1, x_2, x_3, \ldots$ A diferenciação em relação a t será denotada por uma linha.

Por exemplo, considere o sistema mola-massa na Figura 7.1.1. As duas massas se movem em uma superfície sem atrito sob a influência de forças externas $F_1(t)$ e $F_2(t)$ e são, também, restringidas em seu movimento pelas três molas com constantes k_1, k_2 e k_3, respectivamente. Usando argumentos semelhantes aos da Seção 3.7, encontramos as seguintes coordenadas x_1 e x_2 para as duas massas:

$$\begin{aligned} m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} &= k_2(x_2 - x_1) - k_1x_1 + F_1(t) \\ &= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2 + F_1(t), \\ m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} &= -k_3x_2 - k_2(x_2 - x_1) + F_2(t) \\ &= k_2x_1 - (k_2 + k_3)x_2 + F_2(t). \end{aligned} \tag{1}$$

A dedução das Eqs. (1) está esquematizada no Problema 17.

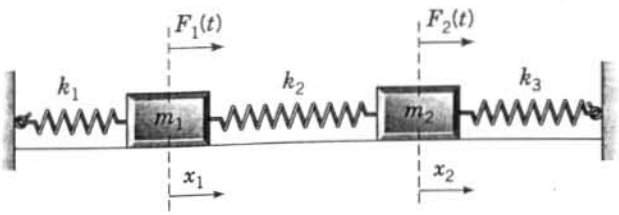

FIGURA 7.1.1 Um sistema com duas massas e três molas.

Vamos considerar, agora, o circuito LRC em paralelo ilustrado na Figura 7.1.2. Seja V a diferença de tensão no capacitor e I a corrente passando pelo indutor. Então, de acordo com a Seção 3.7 e com o Problema 19 desta seção, podemos mostrar que a diferença de tensão e a corrente são descritas pelo sistema de equações

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{V}{L}, \\ \frac{dV}{dt} &= -\frac{I}{C} - \frac{V}{RC}, \end{aligned} \tag{2}$$

onde L é a indutância, C a capacitância e R a resistência.

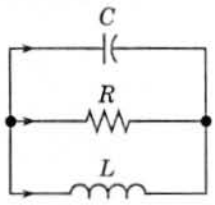

FIGURA 7.1.2 Um circuito RLC em paralelo.

Uma razão pela qual sistemas de equações de primeira ordem são particularmente importantes é que equações de ordem maior sempre podem ser transformadas em tais sistemas. Isso, normalmente, é necessário se é planejada uma abordagem numérica, já que quase todos os códigos para gerar soluções numéricas aproximadas de equações diferenciais são escritos para sistemas de equações de primeira ordem. O exemplo a seguir ilustra como é fácil fazer a transformação.

EXEMPLO 1

O movimento de um determinado sistema mola-massa (veja o Exemplo 3 da Seção 3.7) é descrito pela equação diferencial de segunda ordem

$$u'' + 0{,}125u' + u = 0. \tag{3}$$

Escreva essa equação como um sistema de equações de primeira ordem.

Sejam $x_1 = u$ e $x_2 = u'$. Então, $x_1' = x_2$. Além disso, $u'' = x_2'$. Então, substituindo u, u' e u'' na Eq. (3), obtemos

$$x_2' + 0{,}125x_2 + x_1 = 0.$$

Logo, x_1 e x_2 satisfazem o seguinte sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -x_1 - 0{,}125x_2. \end{aligned} \tag{4}$$

A equação geral de movimento de um sistema mola-massa,

$$mv'' + \gamma v' + kv = F(t), \tag{5}$$

pode ser transformada em um sistema de primeira ordem do mesmo modo. Definindo $x_1 = v$ e $x_2 = v'$ e procedendo como no Exemplo 1, obtemos rapidamente o sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -(k/m)x_1 - (\gamma/m)x_2 + F(t)/m. \end{aligned} \tag{6}$$

Para transformar uma equação arbitrária de ordem n

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{7}$$

em um sistema de n equações de primeira ordem, estendemos o método do Exemplo 1 definindo as variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ por

$$x_1 = y, \quad x_2 = y', \quad x_3 = y'', \quad \ldots, \quad x_n = y^{(n-1)}. \tag{8}$$

Segue imediatamente que

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n, \end{aligned} \tag{9}$$

e, da Eq. (7),

$$x_n' = F(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{10}$$

As Eqs. (9) e (10) são casos particulares do sistema mais geral

$$\begin{aligned} x_1' &= F_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2' &= F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\vdots \\ x_n' &= F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{11}$$

De maneira análoga, o sistema (1) pode ser reduzido a um sistema de quatro equações de primeira ordem da forma (11), enquanto o sistema (2) já está nessa forma. De fato, sistemas da forma (11) incluem quase todos os casos de interesse, de modo que a maior parte da teoria mais avançada de equações diferenciais é dedicada a tais sistemas.

Uma **solução** do sistema (11) no intervalo I: $\alpha < t < \beta$ é um conjunto de n funções

$$x_1 = \phi_1(t), \quad x_2 = \phi_2(t), \quad \ldots, \quad x_n = \phi_n(t) \tag{12}$$

diferenciáveis em todos os pontos do intervalo I e que satisfazem o sistema de equações (11) em todos os pontos desse intervalo. Além do sistema de equações diferenciais dado, podem ser fornecidas, também, condições iniciais da forma

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad \ldots, \quad x_n(t_0) = x_n^0, \tag{13}$$

onde t_0 é um valor especificado de t em I e $x_1^0, \ldots, x_n^0$ são números dados. As equações diferenciais (11) e as condições iniciais (13) juntas formam um problema de valor inicial.

Uma solução (12) pode ser vista como um conjunto de equações paramétricas em um espaço de dimensão n. Para um valor de t dado, as Eqs. (12) fornecem valores para as coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ de um ponto no espaço. À medida que t varia, as coordenadas, em geral, também mudam. A coleção de pontos correspondentes para $\alpha < t < \beta$ forma uma curva no espaço. Às vezes é útil pensar na curva como a trajetória ou o caminho percorrido por uma partícula movendo-se de acordo com o sistema de equações diferenciais (11). As condições iniciais (13) determinam o ponto inicial da partícula em movimento.

As condições a seguir sobre $F_1, F_2, \ldots, F_n$, facilmente verificadas em problemas específicos, são suficientes para garantir que o problema de valor inicial (11), (13) tenha uma solução única. O Teorema 7.1.1 é análogo ao Teorema 2.4.2, o teorema de existência e unicidade para uma única equação de primeira ordem.

Teorema 7.1.1 Suponha que cada uma das funções $F_1, \ldots, F_n$ e suas derivadas parciais, $\partial F_1/\partial x_1, \ldots, \partial F_1/\partial x_n, \ldots, \partial F_n/\partial x_1, \ldots, \partial F_n/\partial x_n$, são contínuas em uma região R do espaço $tx_1x_2\ldots x_n$ definida por $\alpha < t < \beta$, $\alpha_1 < x_1 < \beta_1, \ldots, \alpha_n < x_n < \beta_n$, e suponha que o ponto $(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ está em R. Então, existe um intervalo $|t - t_0| < h$ no qual existe uma única solução $x_1 = \phi_1(t), \ldots, x_n = \phi_n(t)$ do sistema de equações diferenciais (11) que também satisfaz as condições iniciais (13).

A demonstração deste teorema pode ser construída generalizando-se o argumento dado na Seção 2.8, mas não faremos isso aqui. No entanto, note que não se diz nada nas hipóteses do teorema sobre as derivadas parciais de $F_1, \ldots, F_n$ em relação à variável independente t. Além disso, na conclusão o comprimento $2h$ do intervalo no qual a solução existe não está especificado exatamente e, em alguns casos, pode ser muito curto. Finalmente, o mesmo resultado pode ser provado sob hipóteses mais fracas, mas muito mais complicadas, de modo que o teorema, como enunciado, não é o mais geral conhecido e as condições dadas são suficientes, mas não necessárias, para a conclusão ser válida.

Se cada uma das funções $F_1, \ldots, F_n$ nas Eqs. (11) for uma função linear das variáveis dependentes $x_1, \ldots, x_n$, então o sistema de equações é dito **linear**; caso contrário, é **não linear**. Assim, o sistema mais geral de n equações lineares tem a forma

$$
\begin{aligned}
x_1' &= p_{11}(t)x_1 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t),\\
x_2' &= p_{21}(t)x_1 + \cdots + p_{2n}(t)x_n + g_2(t),\\
&\vdots\\
x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + \cdots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t).
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Se todas as funções $g_1(t), \ldots, g_n(t)$ forem identicamente nulas no intervalo I, então o sistema (14) é dito **homogêneo**; caso contrário, ele é **não homogêneo**. Observe que os sistemas (1) e (2) são ambos lineares. O sistema (1) é não homogêneo, a menos que $F_1(t) = F_2(t) = 0$, enquanto o sistema (2) é homogêneo. Para o sistema linear (14), o teorema de existência e unicidade é mais simples e também tem uma conclusão mais forte. É análogo aos Teoremas 2.4.1 e 3.2.1.

Teorema 7.1.2 Se as funções $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{nn}, g_1, \ldots, g_n$ forem contínuas em um intervalo aberto $I: \alpha < t < \beta$, então existirá uma única solução $x_1 = \phi_1(t), \ldots, x_n = \phi_n(t)$ do sistema (14) que também satisfaz as condições iniciais (13), onde t_0 é qualquer ponto em I e $x_1^0, \ldots, x_n^0$ são números dados. Além disso, a solução existe em todo o intervalo I.

Note que em contraste com a situação para um sistema não linear a existência e a unicidade de solução para um sistema linear estão garantidas em todo o intervalo no qual as hipóteses são satisfeitas. Além disso, para um sistema linear os valores iniciais $x_1^0, \ldots, x_n^0$ em $t = t_0$ são inteiramente arbitrários, enquanto no caso não linear o ponto inicial tem que estar contido na região R definida no Teorema 7.1.1.

O restante deste capítulo é dedicado a sistemas lineares de equações de primeira ordem (sistemas não lineares estarão incluídos nas discussões dos Capítulos 8 e 9). Nossa apresentação utiliza notação matricial e supõe que o leitor esteja familiarizado com as propriedades de matrizes. Os fatos básicos sobre matrizes estão resumidos nas Seções 7.2 e 7.3, e material mais avançado será revisto quando necessário em seções posteriores.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 4, transforme a equação dada em um sistema de equações de primeira ordem.

1. $u'' + 0{,}5u' + 2u = 0$
2. $u'' + 0{,}5u' + 2u = 3\operatorname{sen} t$
3. $t^2u'' + tu' + (t^2 - 0{,}25)u = 0$
4. $u^{(4)} - u = 0$

Em cada um dos Problemas 5 e 6, transforme o problema de valor inicial dado em um problema de valor inicial para duas equações de primeira ordem.

5. $u'' + 0{,}25u' + 4u = 2\cos 3t, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = -2$
6. $u'' + p(t)u' + q(t)u = g(t), \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_0'$

7. Sistemas de equações de primeira ordem podem ser transformados, algumas vezes, em uma única equação de ordem maior. Considere o sistema

$$x_1' = -2x_1 + x_2, \qquad x_2' = x_1 - 2x_2.$$

(a) Resolva a primeira equação para x_2 e substitua na segunda equação, obtendo, assim, uma equação de segunda ordem para x_1. Resolva essa equação para x_1 e determine x_2.

(b) Encontre a solução do sistema dado que também satisfaz as condições iniciais $x_1(0) = 2, x_2(0) = 3$.

(c) Esboce a curva, para $t \geq 0$, dada em forma paramétrica pelas expressões para x_1 e x_2 encontradas em (b).

Em cada um dos Problemas de 8 a 12, proceda como no Problema 7.

(a) Transforme o sistema dado em uma única equação de segunda ordem.

(b) Encontre x_1 e x_2 que satisfazem, também, as condições iniciais dadas.

(c) Esboce o gráfico da solução no plano x_1x_2 para $t \geq 0$.

8. $x_1' = 3x_1 - 2x_2, \quad x_1(0) = 3$
   $x_2' = 2x_1 - 2x_2, \quad x_2(0) = \frac{1}{2}$
9. $x_1' = 1{,}25x_1 + 0{,}75x_2, \quad x_1(0) = -2$
   $x_2' = 0{,}75x_1 + 1{,}25x_2, \quad x_2(0) = 1$
10. $x_1' = x_1 - 2x_2, \quad x_1(0) = -1$
    $x_2' = 3x_1 - 4x_2, \quad x_2(0) = 2$
11. $x_1' = 2x_2, \quad x_1(0) = 3$
    $x_2' = -2x_1, \quad x_2(0) = 4$

12. $x_1' = -0{,}5x_1 + 2x_2, \qquad x_1(0) = -2$
$x_2' = -2x_1 - 0{,}5x_2, \qquad x_2(0) = 2$

13. Transforme as Eqs. (2) para o circuito em paralelo em uma única equação de segunda ordem.

14. Mostre que se a_{11}, a_{12}, a_{21} e a_{22} forem constantes, com a_{12} e a_{21} sem serem nulos ao mesmo tempo, e se as funções g_1 e g_2 forem diferenciáveis, então o problema de valor inicial

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1(t), \qquad x_1(0) = x_1^0$$
$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2(t), \qquad x_2(0) = x_2^0$$

poderá ser transformado em um problema de valor inicial para uma única equação de segunda ordem. Pode-se usar o mesmo procedimento se $a_{11}, \ldots, a_{22}$ forem funções de t?

15. Considere o sistema linear homogêneo

$$x' = p_{11}(t)x + p_{12}(t)y,$$
$$y' = p_{21}(t)x + p_{22}(t)y.$$

Mostre que se $x = x_1(t), y = y_1(t)$ e $x = x_2(t), y = y_2(t)$ forem duas soluções do sistema dado, então $x = c_1x_1(t) + c_2x_2(t), y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ também será solução, quaisquer que sejam as constantes c_1 e c_2. Este é o princípio da superposição.

16. Sejam $x = x_1(t), y = y_1(t)$ e $x = x_2(t), y = y_2(t)$ duas soluções do sistema linear não homogêneo

$$x' = p_{11}(t)x + p_{12}(t)y + g_1(t),$$
$$y' = p_{21}(t)x + p_{22}(t)y + g_2(t).$$

Mostre que $x = x_1(t) - x_2(t), y = y_1(t) - y_2(t)$ é uma solução do sistema homogêneo associado.

17. As Eqs. (1) podem ser deduzidas desenhando-se um diagrama mostrando as forças agindo sobre cada massa. A Figura 7.1.3*a* mostra a situação quando os deslocamentos x_1 e x_2 das duas massas são ambos positivos (para a direita) e $x_2 > x_1$. Nesse caso, as molas 1 e 2 estão alongadas e a mola 3 está comprimida, gerando as forças ilustradas na Figura 7.1.3*b*. Use a lei de Newton ($F = ma$) para deduzir as Eqs. (1).

18. Transforme o sistema (1) em um sistema de primeira ordem fazendo $y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = x_1', y_4 = x_2'$.

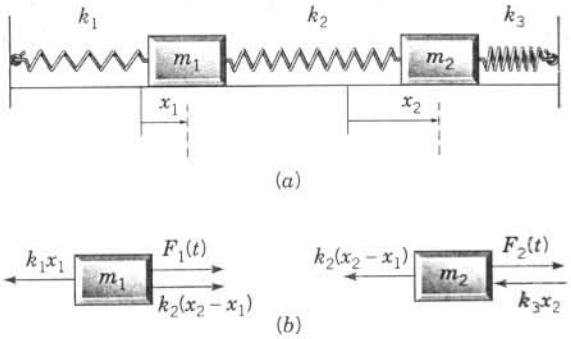

FIGURA 7.1.3 (*a*) Os deslocamentos x_1 e x_2 são ambos positivos. (*b*) O diagrama de forças para o sistema mola-massa.

Circuitos Elétricos. A teoria de circuitos elétricos, do tipo ilustrado na Figura 7.1.2, consistindo em indutores, resistências e capacitores, baseia-se nas leis de Kirchhoff: (1) o fluxo total de corrente atravessando cada nó (ou junção) é zero; (2) a diferença de tensão total em cada laço fechado é zero. Além das leis de Kirchhoff temos, também, a relação entre a corrente I em ampères passando por elemento do circuito e a diferença de potencial V naquele elemento:

$$V = RI, \qquad R = \text{resistência em ohms;}$$
$$C\frac{dV}{dt} = I, \qquad C = \text{capacitância em farads}^1;$$
$$L\frac{dI}{dt} = V, \qquad L = \text{indutância em henrys.}$$

As leis de Kirchhoff e a relação entre corrente e diferença de tensão em cada elemento do circuito fornecem um sistema de equações algébricas e diferenciais de onde é possível determinar a diferença de tensão e a corrente em todo o circuito. Os Problemas 19 a 21 ilustram o procedimento que acabamos de descrever.

[1]Capacitores têm de fato, capacitâncias medidas tipicamente em microfarads. Usamos farad como unidade de medida por conveniência numérica.

19. Considere o circuito ilustrado na Figura 7.1.2. Sejam I_1, I_2 e I_3 as correntes atravessando respectivamente o capacitor, a resistência e o indutor. Analogamente, sejam V_1, V_2 e V_3 as diferenças de tensão correspondentes. As setas denotam as direções, escolhidas arbitrariamente, nas quais as correntes e diferenças de tensão serão consideradas positivas.

(a) Aplicando a segunda lei de Kirchhoff no laço superior do circuito, mostre que

$$V_1 - V_2 = 0. \tag{i}$$

De maneira análoga, mostre que

$$V_2 - V_3 = 0. \tag{ii}$$

(b) Aplicando a primeira lei de Kirchhoff em qualquer dos nós do circuito, mostre que

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0. \tag{iii}$$

(c) Use a relação entre a corrente e a diferença de tensão em cada elemento do circuito para obter as equações

$$CV_1' = I_1, \qquad V_2 = RI_2, \qquad LI_3' = V_3. \tag{iv}$$

(d) Elimine V_2, V_3, I_1 e I_2 das equações (i) a (iv) para obter

$$CV_1' = -I_3 - \frac{V_1}{R}, \qquad LI_3' = V_1. \tag{v}$$

Observe que se omitirmos os índices nas Eqs. (v) teremos o sistema (2) desta seção.

20. Considere o circuito ilustrado na Figura 7.1.4. Use o método esboçado no Problema 19 para mostrar que a corrente I através do indutor e a diferença de tensão V através do capacitor satisfazem o sistema de equações diferenciais

$$\frac{dI}{dt} = -I - V, \qquad \frac{dV}{dt} = 2I - V.$$

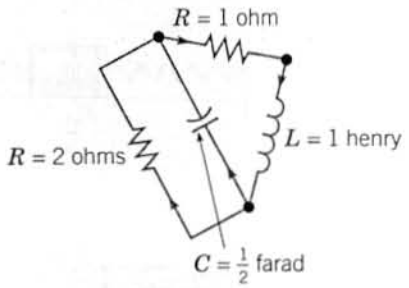

FIGURA 7.1.4 O circuito no Problema 20.

21. Considere o circuito ilustrado na Figura 7.1.5. Use o método esboçado no Problema 19 para mostrar que a corrente I através do indutor e a diferença de tensão V através do capacitor satisfazem o sistema de equações diferenciais

$$L\frac{dI}{dt} = -R_1 I - V, \qquad C\frac{dV}{dt} = I - \frac{V}{R_2}.$$

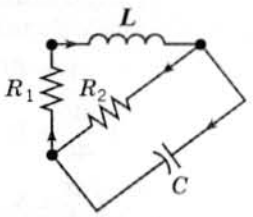

FIGURA 7.1.5 O circuito no Problema 21.

22. Considere os dois tanques interligados ilustrados na Figura 7.1.6.* O Tanque 1 contém, inicialmente, 30 gal de água e 25 oz de sal, enquanto o Tanque 2 contém, inicialmente, 20 gal de água e 15 oz de sal. Entra no

*Usamos as abreviações *gal* para galões, *oz* para onças e *min* para minutos; 1 oz ≅ 28,3495 g e 1 gal ≅ 4,546 l. (N.T.)

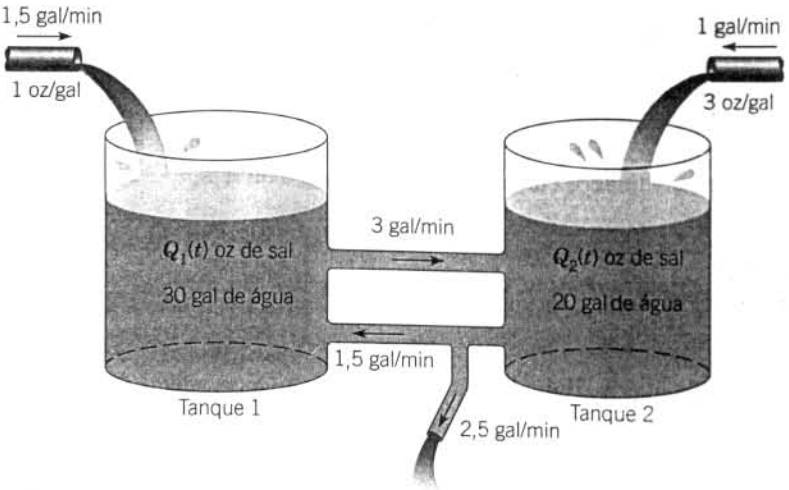

FIGURA 7.1.6 Dois tanques interligados (Problema 22).

Tanque 1 uma mistura de água contendo 1 oz/gal de sal a uma taxa de 1,5 gal/min. A mistura flui do Tanque 1 para o Tanque 2 a uma taxa de 3 gal/min. Entra, também, no Tanque 2 (vinda de fora) uma mistura de água contendo 3 oz/gal de sal a uma taxa de 1 gal/min. A mistura escorre do Tanque 2 a uma taxa de 4 gal/min, e parte dela volta para o Tanque 1 a uma taxa de 1,5 gal/min, enquanto o restante deixa o sistema.

(a) Sejam $Q_1(t)$ e $Q_2(t)$, respectivamente, as quantidades de sal em cada tanque no instante t. Escreva as equações diferenciais e as condições iniciais que modelam o processo de fluxo. Observe que o sistema de equações diferenciais é não homogêneo.

(b) Encontre os valores de Q_1 e Q_2 para os quais o sistema está em equilíbrio, ou seja, não varia com o tempo. Sejam Q_1^E e Q_2^E os valores de equilíbrio. Você pode prever qual tanque atingirá seu estado de equilíbrio mais rapidamente?

(c) Sejam $x_1 = Q_1(t) - Q_1^E$ e $x_2 = Q_2(t) - Q_2^E$. Determine um problema de valor inicial para x_1 e x_2. Observe que o sistema de equações para x_1 e x_2 é homogêneo.

23. Considere dois tanques interligados de maneira análoga aos da Figura 7.1.6. O Tanque 1 contém, inicialmente, 60 gal de água e Q_1^0 oz de sal, enquanto o Tanque 2 contém, inicialmente, 100 gal de água e Q_2^0 oz de sal. Está entrando no Tanque 1, a uma taxa de 3 gal/min, uma mistura de água contendo q_1 oz/gal. A mistura no Tanque 1 sai a uma taxa de 4 gal/min, da qual metade entra no Tanque 2, enquanto o restante deixa o sistema. O Tanque 2 recebe de fora uma mistura de água com q_2 oz/gal de sal a uma taxa de 1 gal/min. A mistura no Tanque 2 sai a uma taxa de 3 gal/min, mas uma parte disso volta para o Tanque 1 a uma taxa de 1 gal/min, enquanto o restante deixa o sistema.

(a) Desenhe um diagrama que ilustre o processo de fluxo aqui descrito. Sejam $Q_1(t)$ e $Q_2(t)$, respectivamente, as quantidades de sal em cada tanque no instante t. Escreva as equações diferenciais e as condições iniciais para Q_1 e Q_2 que modelam o processo de fluxo.

(b) Encontre os valores de equilíbrio Q_1^E e Q_2^E em função das concentrações q_1 e q_2.

(c) É possível (ajustando q_1 e q_2) obter $Q_1^E = 60$ e $Q_2^E = 50$ como um estado de equilíbrio?

(d) Descreva os estados de equilíbrio possíveis para esse sistema para diversos valores de q_1 e q_2.

7.2 Revisão de Matrizes

Por razões tanto teóricas quanto computacionais, é recomendável ter em mente alguns dos resultados de álgebra matricial[2] para resolver um problema de valor inicial para um sistema de equações diferenciais

[2]As propriedades de matrizes foram exploradas pela primeira vez em um artigo de 1858 escrito pelo algebrista inglês Arthur Cayley (1821-1895), embora a palavra "matriz" tenha sido introduzida por seu amigo James Sylvester (1814-1897) em 1850. Cayley fez parte de seu trabalho matemático mais importante enquanto advogava, de 1849 até 1863; tornou-se, depois, professor de matemática em Cambridge, uma posição que manteve até o fim de sua vida. Depois do trabalho pioneiro de Cayley, o desenvolvimento da teoria de matrizes foi rápido, com contribuições importantes de Charles Hermite, Georg Frobenius e Camille Jordan, entre outros.

lineares. Para facilitar, esta e a próxima seção serão dedicadas a um pequeno resumo dos fatos sobre matrizes que usaremos depois. Maiores detalhes podem ser encontrados em qualquer livro elementar de álgebra linear. Supomos, no entanto, que você conhece determinantes e sabe calculá-los.

Vamos denotar matrizes por letra maiúsculas em negrito, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$, usando, de vez em quando, letras gregas maiúsculas como $\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Psi}, \ldots$ Uma matriz $\mathbf{A}$ consiste em um arranjo retangular de números ou elementos arrumados em m linhas e n colunas – ou seja,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Dizemos que $\mathbf{A}$ é uma matriz $m \times n$. Embora mais adiante neste capítulo façamos, muitas vezes, a hipótese de que os elementos de determinadas matrizes são números reais, nesta seção vamos supor que os elementos podem ser números complexos. O elemento que está na i-ésima linha e na j-ésima coluna será denotado por a_{ij}, onde o primeiro índice identifica a linha e o segundo, a coluna. Algumas vezes utiliza-se a notação (a_{ij}) para denotar a matriz cujo elemento genérico é a_{ij}.

Associada a cada matriz $\mathbf{A}$ existe a matriz $\mathbf{A}^T$, conhecida como a **transposta** de $\mathbf{A}$, que é obtida de $\mathbf{A}$ permutando-se as linhas e colunas de $\mathbf{A}$. Assim, se $\mathbf{A} = (a_{ij})$, então $\mathbf{A}^T = (a_{ji})$. Além disso, denotaremos o complexo conjugado de a_{ij} por $\overline{a}_{ij}$ e a matriz obtida de $\mathbf{A}$ trocando-se todos os elementos pelos seus conjugados por $\overline{\mathbf{A}}$. A matriz $\overline{\mathbf{A}}$ é a **conjugada** de $\mathbf{A}$. Será necessário, também, considerar a transposta da conjugada, $\overline{\mathbf{A}}^T$. Essa matriz é chamada de **adjunta** de $\mathbf{A}$ e denotada por $\mathbf{A}^*$.

Por exemplo, considere

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 4+3i & -5+2i \end{pmatrix}.$$

Então

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & 4+3i \\ 2-i & -5+2i \end{pmatrix}, \qquad \overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 2+i \\ 4-3i & -5-2i \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 3 & 4-3i \\ 2+i & -5-2i \end{pmatrix}.$$

Estamos particularmente interessados em dois tipos especiais de matrizes: matrizes quadradas, que têm o mesmo número de linhas e colunas – ou seja, $m = n$; e vetores (ou vetores colunas), que podem ser considerados como matrizes $n \times 1$, ou matrizes tendo apenas uma coluna. Dizemos que uma matriz quadrada com n linhas e n colunas é de ordem n. Denotaremos vetores (colunas) por letras minúsculas em negrito, $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots$ A transposta $\mathbf{x}^T$ de uma coluna $n \times 1$ é um vetor linha, isto é, a matriz consistindo em apenas uma linha cujos elementos são iguais aos elementos nas posições correspondentes de $\mathbf{x}$.

Propriedades de Matrizes.

1. **Igualdade.** Duas matrizes $m \times n$ $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são ditas iguais se todos os elementos correspondentes são iguais – ou seja, se $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i e todo j.

2. **Matriz Nula.** O símbolo $\mathbf{0}$ será usado para denotar a matriz (ou vetor) com todos os elementos iguais a 0.

3. **Soma.** A soma de duas matrizes $m \times n$ $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ é definida como a matriz obtida somando-se os elementos correspondentes:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}). \tag{2}$$

Com essa definição, segue que a soma de matrizes é comutativa e associativa, de modo que

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \qquad \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}. \tag{3}$$

4. **Multiplicação por um Número.** O produto de uma matriz $\mathbf{A}$ por um número complexo α é definido da seguinte maneira:

$$\alpha\mathbf{A} = \alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij}); \tag{4}$$

ou seja, cada elemento de $\mathbf{A}$ é multiplicado por α. As propriedades distributivas

$$\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}, \qquad (\alpha+\beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A} \tag{5}$$

são satisfeitas por esse tipo de multiplicação. Em particular, a matriz negativa de $\mathbf{A}$, denotada por $-\mathbf{A}$, é definida por

$$-\mathbf{A} = (-1)\mathbf{A}. \tag{6}$$

5. **Subtração.** A diferença $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ de duas matrizes $m \times n$ é definida por

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}). \tag{7}$$

Logo,

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (a_{ij}) - (b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij}), \tag{8}$$

que é semelhante à Eq. (2).

6. **Multiplicação.** O produto $\mathbf{AB}$ de duas matrizes está definido sempre que o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda. Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são matrizes $m \times n$ e $n \times r$, respectivamente, então o produto $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ é uma matriz $m \times r$. O elemento na i-ésima linha e na j-ésima coluna de $\mathbf{C}$ é encontrado multiplicando-se cada elemento da i-ésima linha de $\mathbf{A}$ pelo elemento correspondente da j-ésima coluna de $\mathbf{B}$ e, depois, somando-se os produtos resultantes. Simbolicamente,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}. \tag{9}$$

Pode-se mostrar, através de um cálculo direto, que a multiplicação de matrizes é associativa

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \tag{10}$$

e distributiva

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}. \tag{11}$$

No entanto, em geral a multiplicação de matrizes não é comutativa. Para que ambos os produtos $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{BA}$ existam e sejam de mesmo tamanho, é necessário que as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sejam quadradas de mesma ordem. Mesmo nesse caso os produtos são normalmente diferentes, de modo que em geral

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}. \tag{12}$$

EXEMPLO 1

Para ilustrar a multiplicação de matrizes e o fato de que a multiplicação não é comutativa, considere as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da definição de multiplicação dada pela Eq. (9), temos

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2-2+2 & 1+2-1 & -1+0+1 \\ 0+2-2 & 0-2+1 & 0+0-1 \\ 4+1+2 & 2-1-1 & -2+0+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, vemos que

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 4 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

É claro que $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

7. **Multiplicação de Vetores.** Existem diversas maneiras de se formar um produto de dois vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, cada um com n componentes. Uma é a extensão direta do produto escalar usual da Física e do Cálculo; denotamos esse produto por $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$ e escrevemos

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{13}$$

O resultado da Eq. (13) é um número (complexo), e segue diretamente da Eq. (13) que

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}^T(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \mathbf{x}^T\mathbf{y} + \mathbf{x}^T\mathbf{z}, \qquad (\alpha\mathbf{x})^T\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x}^T\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T(\alpha\mathbf{y}). \tag{14}$$

Existe um outro produto entre vetores definido para dois vetores quaisquer com o mesmo número de componentes. Esse produto, denotado por $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, é chamado de **produto interno*** e é definido por

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i. \tag{15}$$

O produto interno também é um número (complexo), e comparando as Eqs. (13) e (15) vemos que

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\overline{\mathbf{y}}. \tag{16}$$

Então, se todos os elementos forem reais, os dois produtos (13) e (15) são idênticos. Segue da Eq. (15) que

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}, & (\mathbf{x}, \mathbf{y}+\mathbf{z}) &= (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z}), \\ (\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}), & (\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}) &= \overline{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned} \tag{17}$$

Note se mesmo que o vetor $\mathbf{x}$ tenha elementos com parte imaginária não nula, o produto interno de $\mathbf{x}$ consigo mesmo é um número real não negativo

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x}_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2. \tag{18}$$

A quantidade não negativa $(\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}$, denotada muitas vezes por $\|\mathbf{x}\|$, é chamada de **comprimento** ou **tamanho** de $\mathbf{x}$. Se $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, os dois vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são ditos **ortogonais**. Por exemplo, os vetores unitários $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$, da geometria vetorial tridimensional, formam um conjunto ortogonal. Por outro lado, se alguns dos elementos de $\mathbf{x}$ não são reais, então o produto

$$\mathbf{x}^T\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{19}$$

pode não ser um número real.

Por exemplo, sejam

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ 1+i \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2-i \\ i \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T\mathbf{y} &= (i)(2-i) + (-2)(i) + (1+i)(3) = 4+3i, \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (i)(2+i) + (-2)(-i) + (1+i)(3) = 2+7i, \\ \mathbf{x}^T\mathbf{x} &= (i)^2 + (-2)^2 + (1+i)^2 = 3+2i, \\ (\mathbf{x}, \mathbf{x}) &= (i)(-i) + (-2)(-2) + (1+i)(1-i) = 7. \end{aligned}$$

8. **Matriz Identidade.** A identidade multiplicativa, ou simplesmente a matriz identidade $\mathbf{I}$, é dada por

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

*Em português este produto também é chamado, muitas vezes, de produto escalar. No entanto, para não confundir com o produto definido pela Eq. (13), reservaremos a nomenclatura "escalar" para o produto definido por (13).