CAPÍTULO 5

TRANSFORMAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO

5.1 INTRODUÇÃO

Tendo sido obtido o sistema de coordenadas que permite discretizar o domínio de cálculo o passo seguinte é obter as equações aproximadas para cada volume elementar. Estas equações são obtidas realizando-se balanços da propriedade envolvida sobre os volumes elementares ou integrando-se a forma conservativa das equações sobre estes volumes, que são procedimentos equivalentes.

Quando uma malha estruturada é empregada, como é o presente caso, é necessário, antes de integrar as equações, decidir,

i - se estas equações estarão escritas no sistema coordenado do plano físico ou do plano transformado, e

ii - optando-se pelas equações escritas nas coordenadas do plano transformado, quais serão as variáveis dependentes no caso de grandezas vetoriais, como a velocidade.

Na primeira questão, caso opte-se em manter as equações nas coordenadas do plano físico, por exemplo, cartesiano, as integrações se darão sobre volumes elementares irregulares. Este procedimento é semelhante ao adotado em elementos finitos onde é necessário definir um sistema cartesiano local sobre o qual descreve-se as fronteiras arbitrárias do elemento. Este procedimento é, claro, obrigatório quando a malha é não estruturada. Neste trabalho a opção é transformar as equações para o plano (ξ-η) e integrá-las neste plano. O procedimento de integração é bem mais simples e os termos resultantes possuem uma interpretação física fácil.

Com relação a questão *ii* a opção é manter como variáveis dependentes do plano computacional as mesmas variáveis do plano físico [33]. Este procedimento é largamente empregado na literatura recente. Logo, se o sistema de coordenadas cartesianas é empregado as componentes do vetor velocidade neste sistema serão as variáveis dependentes no plano computacional. Então, as equações da conservação da quantidade de movimento nas direções x e y quando transformadas continuarão sendo as equações que representam a conservação da quantidade de movimento nas direções x e y, apenas que agora escritas no sistema (ξ, η) e não mais no (x,y). Poder-se-ia, além de mudar as variáveis independentes, mudar também a variável dependente e escrever as equações de conservação da quantidade de movimento nas direções ξ e η no sistema (ξ, η). Esta foi a opção adotada em [18]. As equações resultantes são, entretanto, extremamente complexas e seus termos perdem totalmente o significado físico.

5.2 - A TRANSFORMAÇÃO

Conforme comentado a forma conservativa das equações governantes serão tranformadas com o objetivo de obtê-las, no plano computacional, também na forma conservativa. Por simplicidade, como temos feito ao longo do trabalho, o sistema bidimensional será empregado.

Seja a seguinte equação de conservação escrita na forma vetorial

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla . \vec{F} = S \tag{5.1}$$

onde

$$\vec{F} = E\vec{\imath} + F\vec{\jmath} \tag{5.2}$$

$$Q = \rho\phi \tag{5.3}$$

$$E = \rho u \phi - \Gamma^{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{5.4}$$

$$F = \rho v \phi - \Gamma^{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{5.5}$$

onde ϕ é um escalar genérico que representa as propriedades conservadas como massa, quantidade de movimento, energia, etc, e Γ^{ϕ} representa o coeficiente de transporte.

Empregando a regra da cadeia para a seguinte transformação

$$\xi = \xi(x, y, t) \tag{5.6}$$

$$\eta = \eta(x, y, t) \tag{5.7}$$

$$\tau = t \tag{5.8}$$

encontramos

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial \xi}\xi_x + \frac{\partial E}{\partial \eta}\eta_x + \frac{\partial E}{\partial \tau}\tau_x \tag{5.9}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \xi}\xi_y + \frac{\partial F}{\partial \eta}\eta_y + \frac{\partial F}{\partial \tau}\tau_y \tag{5.10}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial \xi}\xi_t + \frac{\partial Q}{\partial \eta}\eta_t + \frac{\partial Q}{\partial \tau}\tau_t \tag{5.11}$$

onde o último termo das Eqs. (5.9) e (5.10) são iguais a zero. Dividindo por J e somando e subtraindo termos do tipo $E\frac{\partial}{\xi}\left(\frac{\xi_x}{J}\right)$, $Q\frac{\partial}{\xi}\left(\frac{\xi_t}{J}\right)$, etc, para que a equação resulte na forma conservativa, encontramos

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{Q}{J}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi_t Q + \xi_x E + \xi_y F}{J}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\eta_t Q + \eta_x E + \eta_y F}{J}\right) - \\
E\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi_x}{J}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\eta_x}{J}\right)\right] - F\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi_y}{J}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\eta_y}{J}\right)\right] - \\
Q\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi_t}{J}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\eta_t}{J}\right)\right] = \frac{S}{J}
\end{gathered} \tag{5.12}$$

É fácil mostrar, usando as relações da função inversa, que os últimos três termos do lado esquerdo são iguais a zero, encontrando-se

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{Q}{J}\right)+\frac{\partial}{\partial \xi}\left[(x_\eta y_\tau - x_\tau y_\eta)Q + y_\eta E - x_\eta F\right]+ \\
&\frac{\partial}{\partial \eta}\left[(y_\xi x_\tau - y_\tau x_\xi)Q - y_\xi E + x_\xi F\right] = \frac{S}{J}
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

Definindo

$$\hat{Q} = \frac{Q}{J} \tag{5.14}$$

$$\hat{S} = \frac{S}{J} \tag{5.15}$$

$$\hat{E} = (x_\eta y_\tau - x_\tau y_\eta)Q + y_\eta E - x_\eta F \tag{5.16}$$

$$\hat{F} = (y_\xi x_\tau - y_\tau x_\xi)Q - y_\xi E + x_\xi F \tag{5.17}$$

encontramos

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} = \hat{S} \tag{5.18}$$

que é a equação transformada em uma forma conservativa. Os termos da Eq. (5.18) possuem uma interpretação física importante. Introduzindo as Eqs. (5.3)–(5.5) em (5.16) e (5.17), encontramos

$$\hat{E} = \rho[y_\eta(u - x_\tau) - x_\eta(v - y_\tau)]\phi - \Gamma^\phi J\left(\alpha\frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \beta\frac{\partial \phi}{\partial \eta}\right) \tag{5.19}$$

$$\hat{F} = \rho[x_\xi(v - y_\tau) - y_\xi(u - x_\tau)]\phi - \Gamma^\phi J\left(\gamma\frac{\partial \phi}{\partial \eta} - \beta\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right) \tag{5.20}$$

Definindo

$$\tilde{U} = y_\eta(u - x_\tau) - x_\eta(v - y_\tau) \tag{5.21}$$

$$\tilde{V} = x_\xi(v - y_\tau) - y_\xi(u - x_\tau) \tag{5.22}$$

obtém-se, então

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\rho\frac{\phi}{J}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\rho\tilde{U}\phi\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\rho\tilde{V}\phi\right)=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\Gamma^{\phi}J\alpha\frac{\partial\phi}{\partial\xi}-\Gamma^{\phi}J\beta\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)+$$
$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\Gamma^{\phi}J\gamma\frac{\partial\phi}{\partial\eta}-\Gamma^{\phi}J\beta\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)+\hat{S} \tag{5.23}$$

A Eq. (5.23) é a equação transformada na forma conservativa para a variável genérica ϕ. Observe-se que ela mantém uma forma bastante simples, identificando-se claramente os termos convectivos e difusivos, cujos últimos são adicionados de um termo com derivadas cruzadas devido a não ortogonalidade do sistema coordenado.

Para interpretar fisicamente as Eqs. (5.21) e (5.22) vamos reescrever abaixo a Eq. (3.61) considerando a coordenada $x^2 = \eta$.

$$\dot{m} = \rho(uy_\eta - vx_\eta)\Delta\eta \tag{3.61}$$

Confrontando a Eq. (3.61) com a Eq. (5.21) observamos que a expressão entre parêntesis em (3.61) é igual a $\tilde{U}$ quando x_τ e y_τ forem iguais a zero. Definindo, então

$$U = uy_\eta - vx_\eta \tag{5.24}$$

$$V = vx_\xi - uy_\xi \tag{5.25}$$

temos

$$\tilde{U} = U - U_M \tag{5.26}$$

$$\tilde{V} = V - V_M \tag{5.27}$$

onde U_M e V_M são as componentes contravariantes, sem normalização métrica, da velocidade da malha. $\tilde{U}$ e $\tilde{V}$ são as componentes contravariantes do vetor velocidade, e já levam em consideração o movimento da malha nos balanços de conservação, ou seja, são as componentes da velocidade relativa. A Eq. (5.23) pode então ser empregada para resolver

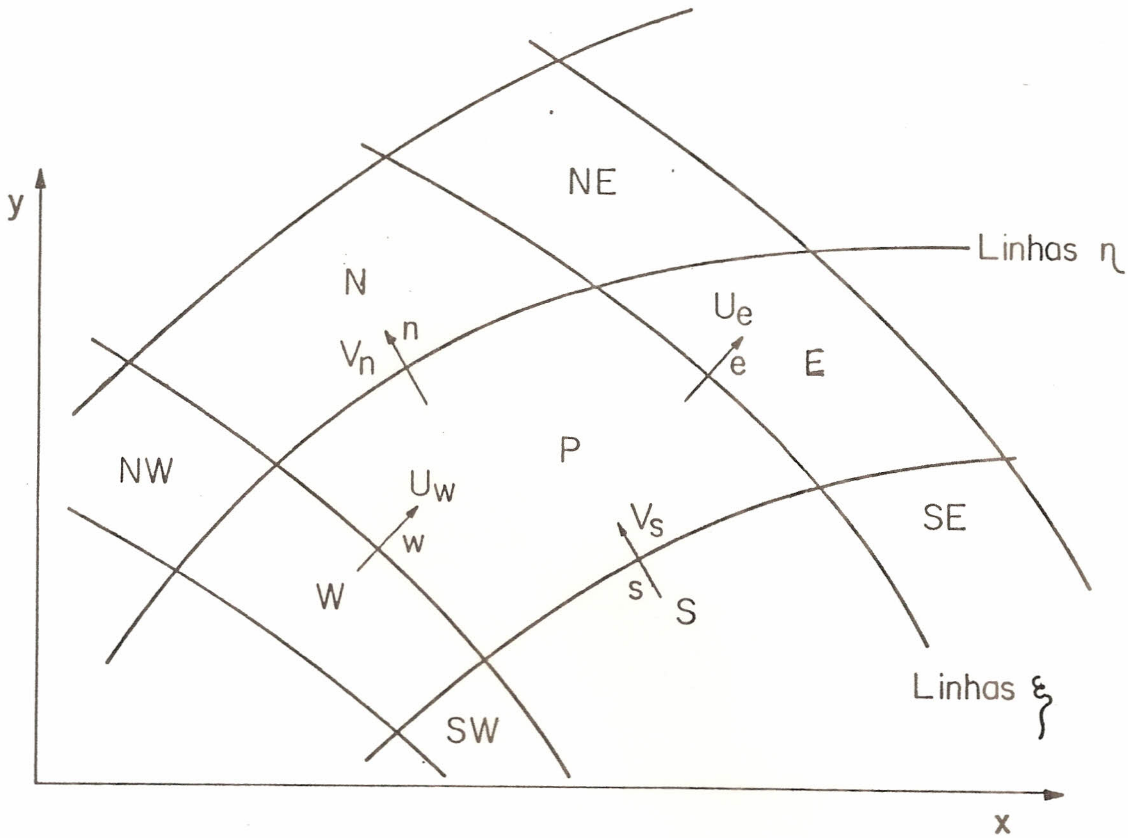

Fig. 5.1 - Volume elementar no plano físico

problemas onde a malha varia com o tempo mas o plano computacional é fixo com as dimensões dos volumes elementares neste plano também fixas.

A Eq. (5.23) pode também ser obtida através da realização do balanço da propriedade em questão sobre um volume elementar arbitrário, conforme Fig. 5.1. Para exemplificar consideremos o balanço de calor sobre o elemento centrado em P. De acordo com a Eq. (3.59) e Fig. 3.6, temos

$$\rho\overline{U}\sqrt{\alpha}\,c_p T\Delta\eta|_w - \rho\overline{U}\sqrt{\alpha}\,c_p T\Delta\eta|_e + \rho\overline{V}\sqrt{\gamma}\,c_p T\Delta\xi|_s - \rho\overline{V}\sqrt{\gamma}\,c_p T\Delta\xi|_n -$$

$$k\sqrt{\alpha}\,\frac{\partial T}{\partial \overrightarrow{n}}\Delta\eta|_w + k\sqrt{\alpha}\,\frac{\partial T}{\partial \overrightarrow{n}}\Delta\eta|_e - k\sqrt{\gamma}\,\frac{\partial T}{\partial \overrightarrow{n}}\Delta\xi|_s + k\sqrt{\gamma}\,\frac{\partial T}{\partial \overrightarrow{n}}\Delta\xi|_n + \tag{5.28}$$

$$\dot{q}\frac{\Delta\xi\Delta\eta}{J} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho c_p \frac{\Delta\xi\Delta\eta}{J}T\right)$$

Expressando as derivadas normais em termos de ξ e η e lembrando da relação entre $\overline{U}$ e U e $\overline{V}$ e V, dada pelas Eqs. (3.59) e (3.61), temos, para o caso de malha fixa no tempo, e após dividir a equação toda por c_p.

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho T\right) + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\rho U T\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\rho V T\right) = \\
\frac{\partial}{\partial \xi}\left(J\alpha\frac{k}{c_p}\frac{\partial T}{\partial \xi} - J\beta\frac{k}{c_p}\frac{\partial T}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(J\gamma\frac{k}{c_p}\frac{\partial T}{\partial \eta} - J\beta\frac{k}{c_p}\frac{\partial T}{\partial \xi}\right) + \frac{\dot{q}}{Jc_p}
\end{gathered}
\tag{5.29}
$$

A Eq. (5.29) é exatamente a Eq. (5.23) para $\phi = T$. As outras equações do sistema são obtidas fazendo-se ϕ igual as propriedades transportadas por unidade de massa. As outras equações também podem ser obtidas fazendo-se os respectivos balanços, como massa, quantidade de movimento, etc.