teoria ergódica

PROJETO
EUCLIDES

CAPÍTULO 0

TEORIA DA MEDIDA

O propósito deste capítulo é apresentar as definições e teoremas básicos da Teoria da Medida. Naturalmente, não demonstraremos os teoremas, exceto nos casos de resultados que não sejam standard na literatura ou quando a forma em que os enunciamos aqui apresentar alguma diferença significativa com as usuais. As referências básicas para as definições e teoremas que seguem são P. Fernandez [F2] e Munroe [M10].

I. Medidas

Seja X um conjunto. Uma família de subconjuntos $\mathcal{A} \subset X$ é uma *álgebra* se

$$X \in \mathcal{A}$$
$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$$
$$A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$$

Segue destas propriedades que:

$$A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B = (A^c \cup B^c) \in \mathcal{A}$$
$$A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{A} \Rightarrow A - B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$$

$\mathcal{A}$ é uma *σ-álgebra* se

$$A_i \in \mathcal{A},\ i = 1, 2, \ldots \Rightarrow \bigcup_i A_i \in \mathcal{A}.$$

Se $\mathcal{A}_0$ é uma família de subconjuntos de X, dizemos que $\mathcal{A}$ é *gerada* por $\mathcal{A}_0$ se $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ e toda σ-álgebra $\mathcal{A}'$ de subconjuntos de X tal que $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}'$ satisfaz $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$. Se $\mathcal{A}_n$ é uma família de subconjuntos de X, $n = 1, 2, \ldots$, denotamos por $\bigvee_{n \geq 1} \mathcal{A}_n$ a σ-álgebra gerada por $\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{A}_n$.

Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de subconjuntos de X, dizemos que μ: $\mathcal{A} \to [0, +\infty]$ é uma *medida* se, para toda família $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \ldots$ de conjuntos disjuntos tal que $\bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{A}$, vale:

$$\mu(\bigcup_{i \geq 1} A_i) = \sum_{i \geq 1} \mu(A_i).$$

Se X é um espaço topológico denomina-se σ-álgebra de Borel de X à σ-álgebra gerada pela família dos conjuntos abertos. Os conjuntos em $\mathcal{A}$ denominam-se boreleanos de X.

TEOREMA I.1. *Se $\mathcal{A}$ é a σ-álgebra dos boreleanos de $\mathbb{R}^n$ existe uma única medida λ: $\mathcal{A} \to [0, +\infty]$ tal que, se $A = (a_1, b_1) \times \overset{n}{\cdots} \times (a_n, b_n)$,*

$$\lambda(A) = (b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n).$$

Esta medida denomina-se *medida de Lebesgue*.

Um espaço de medida é uma terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ onde $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X e μ: $[0, +\infty]$ uma medida. Dizemos que X é totalmente σ-finito se X pode-se escrever como uma união enumerável $X = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ tal que $\mu(A_n) < +\infty$ para todo n. Dizemos que é um *espaço de probabilidade* se $\mu(X) = 1$.

Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida, dizemos que um conjunto $A \subset X$ é de medida zero se existe $A_1 \in \mathcal{A}$ tal que $A \subset A_1$ e $\mu(A_1) = 0$. Dizemos que dois conjuntos $A_1 \subset X$, $A_2 \subset X$ coincidem mod(0), e o denotamos $A_1 = A_2$ mod(0) se $A_1 \Delta A_2$ é de medida zero. Se $\mathcal{S}$ é uma família de subconjuntos de X, escrevemos $A \in \mathcal{S}$ mod(0) se $A = A_0$ mod(0) para algum $A_0 \in \mathcal{S}$ e definimos

$$\mathcal{S} \bmod (0) = \{A \subset X \mid A \in \mathcal{S} \bmod (0)\}.$$

Dizemos que $\mathcal{S}$ gera $\mathcal{A}$ mod(0) se $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$ mod(0), onde $\mathcal{A}_0$ é a σ-álgebra gerada por $\mathcal{S}$. $A \subset B$ mod(0) significa que $B - A$ é de medida zero. Uma propriedade aplicável a pontos de um conjunto $S \subset X$ vale em *quase todo ponto* $x \in S$ (abreviadamente q.t.p.) se o conjunto dos pontos de S onde é falsa é de medida zero.

TEOREMA I.2 (TEOREMA DE APROXIMAÇÃO). *Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de probabilidade, uma subálgebra $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ gera $\mathcal{A}$ mod(0) se e só se, para todo $A \in \mathcal{A}$ e $\varepsilon > 0$ existe $A_0 \in \mathcal{A}_0$ tal que $\mu(A \Delta A_0) \leq \varepsilon$.*

TEOREMA I.3 (TEOREMA DE LUSIN). *Seja X um espaço métrico separável, $\mathcal{A}$ a σ-álgebra dos boreleanos de X e μ: $\mathcal{A} \to [0, 1]$ uma medida. Então para todo boreleano $A \subset X$ e todo $\varepsilon > 0$ existe um compacto $K \subset A$ tal que $\mu(A - K) \leq \varepsilon$.*

Prova. No caso em que X é completo a prova pode-se encontrar em [F2] pág. 64. Se não é, tomamos o completamento $\tilde{X}$ e definimos uma medida $\tilde{\mu}$: $\mathcal{A} \to [0, 1]$, onde $\mathcal{A}$ é a σ-álgebra dos boreleanos de $\tilde{X}$, como $\tilde{\mu}(A) = \mu(A \cap X)$. Se $A \subset X$ é um boreleano, como também é um boreleano de $\tilde{X}$, para todo $\varepsilon > 0$ existe um compacto $K \subset A$ tal que $\tilde{\mu}(A - K) \leq \varepsilon$. Como $K \subset A \subset X$ resulta que $\mu(A - K) = \tilde{\mu}(A - K)$, o que completa a prova.

TEOREMA I.4 (CRITÉRIO DE ADITIVIDADE). *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de subconjuntos de X e μ: $\mathcal{A} \to [0, 1]$ uma função tal que*

$$\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_m) = \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i)$$

para toda família $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, \ldots, m$ de conjuntos disjuntos.

Suponhamos que exista uma família $\mathscr{C}$ tal que:

a) $\mathscr{C}$ é uma classe compacta, isto é, se $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ são elementos de $\mathscr{C}$, então $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \neq \varnothing$.

b) $\mathscr{C}$ possui a propriedade da aproximação, isto é $\mu(A) = \sup \{\mu(C) \mid C \in \mathscr{C},\ C \subset A\}$ para todo $A \in \mathcal{A}$.

Então μ é uma medida.

O exemplo mais natural de classe compacta são os conjuntos compactos de um espaço topológico. Outro exemplo se obtém considerando uma função F: $X \to Y$ onde Y é um espaço topológico. Então, se F é sobrejetiva, os conjuntos da forma $F^{-1}(C)$, onde $C \subset Y$ é compacto, forma uma classe compacta.

TEOREMA I.5 (TEOREMA DE EXTENSÃO DE HAHN-KOLMOGOROV). *Seja X um conjunto, $\mathcal{A}_0$ uma álgebra de subconjuntos de X e μ_0: $\mathcal{A}_0 \to [0, 1]$ uma medida. Então se $\mathcal{A}$ a σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}_0$ existe uma e só uma medida μ: $\mathcal{A} \to [0, 1]$ tal que $\mu/\mathcal{A}_0 = \mu_0$.*

II. Funções mensuráveis

Sejam X e Y dois conjuntos e $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ σ-álgebras de subconjuntos de X e Y respectivamente. Uma função $T: X \to Y$ é *mensurável* com respeito às σ-álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ se $T^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ para todo $B \in \mathcal{B}$. Se X e Y são espaços topológicos dizemos que $T: X \to Y$ é mensusurável se o é com respeito às σ-álgebras de boreleanos. Toda função contínua é mensurável.

TEOREMA II.1. *Seja X um espaço topológico e Y um espaço métrico separável. Seja $f_n: X \to Y$ uma sequência de funções mensuráveis e $f: X \to Y$ tal que $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$ para todo x. Então f é mensurável.*

TEOREMA II.2. (Egorov). *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade, $f: X \to \mathbb{R}$ uma função $f_n: X \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ uma sequência de funções mensuráveis tal que $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ em q.t.p. $x \in X$. Então a seqüência f_n converge quase uniformemente a f, isto é, para todo $\varepsilon > 0$ existe $A \in \mathcal{A}$ com $\mu(A) \leq \varepsilon$ tal que a seqüência f_n/A^c converge uniformemente a f/A^c.*

Dizemos que uma seqüência de funções mensuráveis $f_n: X \to \mathbb{C}$ *converge em medida* à função mensurável $f: X \to \mathbb{C}$ se para todo $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \to +\infty} \mu(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

As convergências em medida e em q.t.p. relacionam-se pelo seguinte resultado:

TEOREMA II.3. *Uma sequência que converge em medida possui subsequência que converge em q.t.p.. Se $\mu(X) < +\infty$ a convergência em q.t.p. implica a convergência em medida.*

III. Funções Integráveis

Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Se $A \subset X$ denotamos f_A à *função característica* de A definida como:

$$f_A(x) = 0 \quad \text{se} \quad x \in A^c$$
$$f_A(x) = 1 \quad \text{se} \quad x \in A$$

Dizemos que uma função $f: X \to \mathbb{C}$ é *simples* pode-se escrever na forma $f = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i f_{A_i}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, \ldots, N$. Dizemos que uma função simples é integrável se

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mu(A_i) < +\infty$$

e neste caso definimos a *integral* de f como:

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mu(A_i)$$

Pode-se provar que este número é independente da forma de escrever f como combinação linear de funções características. Dizemos que $f: X \to \mathbb{C}$ é *integrável* se existe uma seqüência $f_n: X \to \mathbb{C}$ $n = 1, 2, \ldots$ de funções simples integráveis tais que

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{q.t.p.} \quad x \in X \tag{1}$$

$$\lim_{n, m \to +\infty} \int_X |f_n - f_m| \, d\mu = 0. \tag{2}$$

Neste caso definimos a *integral* de f como

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu \tag{3}$$

Prova-se que o limite em (3) existe e que é independente da sequência f_n. Dizemos que $f: X \to \mathbb{C}$ é integrável sobre o conjunto $A \subset X$ se ff_A é integrável e definimos:

$$\int_A f \, d\mu = \int_X ff_A \, d\mu.$$

As funções integráveis não precisam ser mensuráveis, mas sempre coincidem com uma mensurável em q.t.p.. Uma função $f: X \to \mathbb{C}$ é integrável se e só se $|f|$ é integrável.

TEOREMA III.1. *Se $f: X \to \mathbb{C}$ é integrável, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:*

$$\int_A |f| \, d\mu \leq \varepsilon$$

se $A \in \mathcal{A}$ e $\mu(A) \leq \delta$.

Seja $p \geq 1$. Denota-se $\mathscr{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ o conjunto das funções $f: X \to \mathbb{C}$ tais que $|f|^p$ é integrável, identificando funções que coincidem em q.t.p. Em $\mathscr{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ definimos a norma $\|\cdot\|_p$ como:

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

O fato de $\|\cdot\|_p$ ser uma norma segue da *desigualdade de Minkowski* que estabelece que, se f e g pertencem a $\mathscr{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, então $f + g \in \mathscr{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$ e

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Define-se $\mathscr{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ como o conjunto das $f: X \to \mathbb{C}$ tais que existe $K > 0$ tal que $|f(x)| \leq K$ para q.t.p. $x \in X$ identificando funções que coincidem em q.t.p.. O ínfimo dos K com esta propriedade denota-se $\|f\|_\infty$ e define uma norma em $\mathscr{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$. Para todo $1 \leq p \leq \infty$, $\mathscr{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ provido da norma $\|\cdot\|_p$ é um espaço de Banach. A *desigualdade de Hölder* estabelece que, se $1 \leq p \leq \infty$ e q satisfaz $1/p + 1/q = 1$, se $p < \infty$, ou $q = 1$, se $p = \infty$, então, se $f \in \mathscr{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $g \in \mathscr{L}^q(X, \mathcal{A}, \mu)$, o produto fg pertence a $\mathscr{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ e satisfaz

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_p.$$

TEOREMA III.2 (Fatou). *Seja $f_n : X \to \mathbb{C}$ uma sequência de funções integráveis positivas. Se*

$$\liminf_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu < +\infty$$

então a função $x \mapsto \liminf_{n \to +\infty} f_n(x)$ é integrável e

$$\int_X \liminf_{n \to +\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

TEOREMA III.3 (TEOREMA DA CONVERGÊNCIA MONÓTONA). *Se $f_n: X \to \mathbb{C}$ é uma sequência de funções integráveis tais que para q.t.p. $x \in X$ a sequência $f_n(x)$ é monótona crescente e*

$$\sup_n \int_X f_n \, d\mu < +\infty.$$

Então a função $x \mapsto \lim f_n(x)$ é integrável e

$$\int_X \lim f_n \, d\mu = \lim \int_X f_n \, d\mu.$$

TEOREMA III.4(TEOREMA DA CONVERGÊNCIA DOMINADA). *Seja $f_n: X \to \mathbb{C}$ uma sequência dominada de funções integráveis, isto é, tal que existe $g \in \mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu)$, tal que para todo $n \geq 1$ $|f_n(x)| \leq |g(x)|$ para q.t.p. $x \in X$. Então as funções $x \mapsto \limsup_{n \to +\infty} f_n(x)$, $x \mapsto \liminf_{n \to +\infty} f_n(x)$ são integráveis e*

$$\int \limsup_{n \to +\infty} f_n \, d\mu \geq \limsup_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu,$$

$$\int_X \liminf_{n \to +\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu,$$

Em particular, se $f_n(x)$ é convergente para q.t.p. $x \in X$, então

$$\int_X \lim_{n \to +\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

IV. Derivação e Integração

Seja X um conjunto e $\mathscr{A}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de X. Se μ: $\mathscr{A} \to [0, +\infty]$ e ν: $\mathscr{A} \to [0, +\infty]$ são medidas, dizemos que μ é absolutamente contínua com respeito a ν, e denotamos $\mu \ll \nu$, se $A \in \mathscr{A}$ e $\nu(A) = 0$ implicam $\mu(A) = 0$.

TEOREMA IV.1 (Radon-Nikodym). *Se $(X, \mathscr{A}, \nu)$ é totalmente σ-finito então $\mu \ll \nu$ se e só se existe $f: X \to \mathbb{R}$, ν-integrável sobre todo conjunto $A \in \mathscr{A}$ com $\nu(A) < +\infty$, tal que para todo $A \in \mathscr{A}$:*

$$\mu(A) = \int_A f \, d\nu$$

A função f é única em q.t.p. e g: $X \to \mathbb{C}$ pertence a $\mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ se e só se $gf \in \mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \nu)$. Neste caso:

$$\int_X g\, d\mu = \int_X gf\, d\nu.$$

Se $\mu(X) < +\infty$ então $f \in \mathscr{L}^1(X, \mathcal{A}, \nu)$.

A função f denomina-se derivada de μ com respeito a ν e denota-se $d\mu/d\nu$.

TEOREMA IV.2 (TEOREMA DO RECOBRIMENTO DE VITALI). *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um boreleano. Suponhamos que a cada $x \in A$ está associada uma família de boreleanos $\{U_n(x) \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$ tal que:*

I) *Existe $K > 0$ tal que*

$$\sup\{d(y, x) \mid y \in U_n(x)\} \leq K \inf\{d(y, x) \mid y \in U_n(x)^c\}$$

para todo x e n;

II) $\bigcap_{n \geq 1} U_n(x) = \{x\}$ *para todo $x \in A$.*

Então para todo $\varepsilon > 0$ existem sequências $x_j \in A$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, $n_j \in \mathbb{Z}^+$, $j = 1, 2, \ldots$ tal que $U_{n_j}(x_j)$ são disjuntos e

$$\lambda(\bigcup_{j \geq 1} U_{n_j} - A) \leq \varepsilon,$$

$$\lambda(A - \bigcup_{j \geq 1} U_{n_j}(x_j)) = 0,$$

onde λ denota a medida de Lebesgue.

Este importante teorema é aplicado para provar:

TEOREMA IV.3 (TEOREMA DE DERIVAÇÃO DE LEBESGUE). *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um boreleano e $f: A \to C$ uma função integrável com respeito à medida de Lebesgue. Então para q.t.p. $x \in A$ vale:*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f\, d\lambda = f(x)$$

onde $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) \leq r\}$.

Aplicando este teorema à função característica f_A de um boreleano obtemos:

TEOREMA IV.4. *Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um boreleano, para q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$ o limite:*

$$\lim_{r \to 0} \frac{\lambda(B_r(x) \cap A)}{\lambda(B_r(x))}$$

existe e vale 0 se $x \notin A$ e 1 se $x \in A$.

V. Partições e Derivação

Uma participação $\mathscr{P}$ de um espaço de probabilidade $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é uma família de subconjuntos em $\mathcal{A}$ com medida $\neq 0$ tais que:

$$A \in \mathscr{P},\ B \in \mathscr{P} \Rightarrow \mu(A \cap B) = 0$$
$$\mu(X - \bigcup_{A \in \mathscr{P}} A) = 0.$$

Segue destas propriedades que $\mathscr{P}$ é uma família finita ou enumerável. Os conjuntos da família denominam-se átomos da partição se $\mathscr{P}_n$, $n = 1, \ldots, N$, são partições, definimos a partição $\bigvee_1^N \mathscr{P}_n$ como aquela cujos átomos são todos os conjuntos da forma $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ com $A_i \in \mathscr{P}_i$, $i = 1, \ldots, n$, e tais que

$$\mu(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \neq 0.$$

Se $\mathscr{P}$ e Q são partições, dizemos que Q é mais fina que $\mathscr{P}$, o que dedenotamos $\mathscr{P} \leq Q$, se todo átomo de Q está contido mod (0) em algum átomo de $\mathscr{P}$. Isto implica que todo átomo de $\mathscr{P}$ pode-se escrever como uma união de átomos de Q mod (0).

TEOREMA V.1. *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $\mathscr{P}_1 \leq \leq \mathscr{P}_2 \leq \ldots$ uma seqüência de partições tal que $\bigvee_{n \geq 1} \mathscr{P}_n = \mathcal{A}$ mod (0). Então, se $\mathscr{P}_n(x)$ denota o átomo de $\mathscr{P}_n$ que contém x, e $f \in \mathscr{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, para q.t.p. $x \in X$ vale:*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\mu(\mathscr{P}_n(x))} \int_{\mathscr{P}_n(x)} f \, d\mu = f(x) \tag{4}$$

e se $f_n \colon X \to \mathbb{C}$ é a função definida como:

$$f_n(x) = \frac{1}{\mu(\mathscr{P}_n(x))} \int_{\mathscr{P}_n(x)} f \, d\mu \tag{5}$$

então $f_n \to f$ em $\mathscr{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Prova. Usaremos o seguinte Lema:

LEMA. *Seja $A \in \alpha$. Suponhamos que a cada $x \in A$ está associada uma sequência de inteiros positivos $\nu(x) = \{n_1(x), n_2(x), \ldots\}$ que diverge a $+\infty$. Então para todo $\varepsilon > 0$ existem pontos $x_1, \ldots, x_n$ em A*

e $n_j \in \nu(x_j)$, $j = 1, \ldots, m$ *tais que os conjuntos* $\mathscr{P}_{n_j}(x_j)$ $j = 1, \ldots, m$ *são disjuntos e*:

$$\mu\left(A \,\Delta \bigcup_{j=1}^{m} \mathscr{P}_{n_j}(x_j)\right) \leq \varepsilon \tag{5}$$

Começaremos por provar o teorema no caso $f = f_A$, $A \in \mathscr{A}$. É suficiente mostrar que:

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{\mu(\mathscr{P}_n(x))} \int_{\mathscr{P}_n(x)} f_A \, d\mu \leq f_A(x) \tag{6}$$

$$\liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{\mu(\mathscr{P}_n(x))} \int_{\mathscr{P}_n(x)} f_A \, d\mu \geq f_A(x) \tag{7}$$

em q.t.p. $x \in X$. Só provaremos (7). A relação (6) segue de aplicar (7) ao complementar de A. Para provar (7) observemos que vale trivialmente em pontos de A^c. Resta mostrar que (7) vale em q.t.p. $x \in A$. Seja A_δ o conjunto dos $x \in A$ tais que:

$$\liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{\mu(\mathscr{P}_n(x))} \int_{\mathscr{P}_n(x)} f_A \, d\mu \leq f_A(x) - 2\delta.$$

É suficiente provar que $\mu(A_\delta) = 0$ para todo $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Se $\mu(A_\delta) > 0$ podemos tomar δ' tão pequeno que $(1 - \delta/2)\,\mu(A_\delta) >$ $> (1 - \delta)(\mu(A_\delta) + \delta')$. Para cada $x \in A_\delta$ podemos tomar uma seqüência $\nu(x)$ de inteiros positivos que diverge a $+\infty$ tal que:

$$\frac{1}{\mu(\mathscr{P}_n(x))} \int_{\mathscr{P}_n(x)} f_A \, d\mu \leq f_A(x) - \delta$$

para todo $n \in \nu(x)$. Sejam $x_1, \ldots, x_m$ em A_δ e $n_j \in \nu(x_j)$, $j = 1, \ldots, m$ satisfazendo (5), onde ε foi selecionado tal que $\varepsilon < \delta'$ e

$$\int_S |f_A| \, d\mu \leq \frac{\delta}{2}\, \mu(A_\delta)$$

para todo $S \in \mathscr{A}$ com $\mu(S) \leq \varepsilon$. Então, se $\tilde{A} = \bigcup_{j=1}^{m} \mathscr{P}_{n_j}(x_j)$:

$$\left| \int_A f_A \, d\mu - \int_{A_\delta} f_A \, d\mu \right| \leq \int_{A_\delta \Delta \tilde{A}} |f_A| \leq \frac{\delta}{2}\, \mu(A_\delta) \tag{8}$$

Mas:

$$\int_{\tilde{A}} f_A\, d\mu = \sum_{j=1}^{m} \int_{\mathscr{P}_{n_j}(x_j)} f_A\, d\mu \leq \sum_{j=1}^{m} (f_A(x_j) - \delta)\, \mu(\mathscr{P}_{n_j}(x_j))$$

$$= (1-\delta)\, \mu(A) \leq (1-\delta)(\mu(A_\delta) + \delta')$$

e por outra parte, segue de (8) que:

$$\int_A f_A\, d\mu \geq \mu(A_\delta) - \frac{\delta}{2}\, \mu(A_\delta) = \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \mu(A_\delta)$$

contradizendo a escolha de δ'. Consideremos agora o caso $f \in \mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu)$. Dado $\varepsilon > 0$ seja $S_m = \{x \mid m\varepsilon < f(x) \leq (m+1)\varepsilon\}$, $m \in \mathbb{Z}$. Aplicando o teorema a $f_m = \sum_m m\, \varepsilon\, f_{S_m}$ resulta que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\mu(\mathscr{P}_n(x))} \int_{\mathscr{P}_n(x)} f_m\, d\mu = f_m(x) \tag{9}$$

para q.t.p. $x \in X$. Então:

$$\left| \frac{1}{\mu(\mathscr{P}_n(x))} \int_{\mathscr{P}_n(x)} f\, d\mu - \frac{1}{\mu(\mathscr{P}_n(x))} \int_{\mathscr{P}_n(x)} f_m\, d\mu \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\mu(\mathscr{P}_n(x))} \int_{\mathscr{P}_n(x)} |f - f_m|\, d\mu \leq \varepsilon \tag{10}$$

para todo n. Segue de (9) e (10) que q.t.p. $x \in X$, vale:

$$f(x) - \varepsilon \leq f_m(x) \leq \varepsilon + \liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{\mu(\mathscr{P}_n(x))} \int_{\mathscr{P}_n(x)} f\, d\mu \leq$$

$$\leq \varepsilon + \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{\mu(\mathscr{P}_n(x))} \int_{\mathscr{P}_n(x)} f\, d\mu \leq f_m(x) + 2\varepsilon \leq f(x) + 3\varepsilon.$$

Resulta que em q.t.p. $x \in X$:

$$f(x) - 3\varepsilon \leq \liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{\mu(\mathscr{P}_n(x))} \int_{\mathscr{P}_n(x)} f\, d\mu \leq$$

$$\leq \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{\mu(\mathscr{P}_n(x))} \int_{\mathscr{P}_n(x)} f\, d\mu \leq f(x) + 3\varepsilon.$$

Como ε é arbitrário a igualdade (4) está provada. Para provar (5) observemos que se $f \in \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$, as funções f_n satisfazem

$$\| f_n \|_\infty \leq \| f \|_\infty.$$

e então (5) decorre de (4) e do Teorema da Convergência Dominada. Se $f \in \mathscr{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $m > 0$ definimos $F_m \in \mathscr{L}^\alpha(X, \mathcal{A}, \mu)$ como $F_m(x) = f(x)$ quando $|f(x)| \leq m$ e $F_m(x) = 0$ se $|f(x)| > m$. Pelo teorema da Convergência Monótona:

$$\lim_{m \to +\infty} \|f - F_m\|_1 = 0. \tag{11}$$

Seja $F_m^{(n)}$ definida como:

$$F_m^{(n)}(x) = \frac{1}{\mu(\mathscr{P}_n(x))} \int_{\mathscr{P}_n(x)} F_m \, d\mu.$$

Então para todo m:

$$\lim_{n \to +\infty} \|F_m^{(n)} - F_m\|_1 = 0.$$

Por outra parte:

$$f_n(x) - F_m^{(n)}(x) = \frac{1}{\mu(\mathscr{P}_n(x))} \int_{\mathscr{P}_n(x)} (f - F_m) \, d\mu$$

e

$$\int_X |f_n - F_m^{(n)}| \, d\mu = \sum_{P \in \mathscr{P}_n} \left| \int_P (f - F_m) \, d\mu \right| \leq \int_X |f - F_m| \, d\mu = \|f - F_m\|_1 .$$

De modo que

$$\begin{aligned} \|f - f_n\|_1 &\leq \|f - F_m\|_1 + \|F_m - F_m^{(n)}\|_1 + \|F_m^{(n)} - F_n\|_1 \leq \\ &\leq \|f - F_m\|_1 + \|F_m - F_m^{(n)}\|_1 + \|f - F_m\|_1 \end{aligned}$$

e então de (11) e (12) segue (5).

Prova do lema: Seja $\mathscr{S}$ a família dos conjuntos $A \subset \mathcal{A}$ que possuem a propriedade do Lema. $\mathscr{S}$ é uma σ-algebra (verificar). De modo que para provar o Lema só temos que mostrar que todo $A \in \bigcup_{n \geq 1} \mathscr{P}_n$ pertence a $\mathscr{S}$. Seja $A \in \mathscr{P}_N$. Se $n > N$ seja $A_n = \{x \in A \mid n \in \nu(x),$ $j \notin \nu(x)$ para todo $N \leq j < n\}$. Então

$$A_n \cap A_m = \varnothing$$

se $n \neq m$ e

$$\bigcup_{n > N} A_n = A.$$

Além disso cada A_n pode-se escrever como uma união de átomos disjuntos $\mathscr{P}_n(x_1^{(n)})$, $\mathscr{P}_n(x_2^{(n)})$, ... com $n \in \nu(x_i^{(n)})$ para todo i. De modo que:

$$A = \bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ i \geq 1}} \mathscr{P}_n(x_i^{(n)})$$

com $n \in \nu(x_i^{(n)})$. Dado $\varepsilon > 0$, tomando n_0 e i_0 suficientemente grandes obtemos:

$$\mu(A - \bigcup_{\substack{1 \leq n \leq n_0 \\ 1 \leq i \leq i_0}} \mathscr{P}^{(n)}(x_i^{(n)})) \leq \varepsilon$$

o que prova $A \in \mathscr{S}$ e completa a prova do Lema.

Vamos agora estudar o caso em que a sequência de partições $\mathscr{P}_1 \leq \mathscr{P}_2 \leq \ldots$ não satisfaz $\bigvee_{n \geq 1} \mathscr{P} = \mathscr{A} \bmod (0)$. Mostraremos que o limite em (4) ainda existe mas seu valor não é f.

Se $f \in \mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ e $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ é uma sub σ-álgebra, definimos $f_{\mathscr{B}}$ pelas propriedades:

$$f_{\mathscr{B}} \in \mathscr{L}^1(X, \mathscr{B}, \mu/\mathscr{B}) \tag{13}$$

$$\int_S f_{\mathscr{B}}\, d\mu = \int_S f\, d\mu \tag{14}$$

para todo $S \in \mathscr{B}$. Para mostrar que $f_{\mathscr{B}}$ existe escrevemos $f = f^+ - f^-$ com $f^+ = \sup\{f, 0\}$, $f^- = \sup\{-f, 0\}$. Definimos medidas $\mu^+ : \mathscr{B} \to \mathbb{R}$ e $\mu^- : \mathscr{B} \to \mathbb{R}$ como:

$$\mu^+(S) = \int_S f^+\, d\mu, \qquad \mu^-(S) = \int_S f^-\, d\mu.$$

Obviamente $\mu^+ \ll \mu/\mathscr{B}$, $\mu^- \ll \mu/\mathscr{B}$. Então

$$f_{\mathscr{B}} = \frac{d\mu^+}{d(\mu/\mathscr{B})} - \frac{d\mu^-}{d(\mu/\mathscr{B})}$$

satisfaz (13) e (14). A unicidade segue de que, se $f_{\mathscr{B}}$ satisfaz (13) e (14), podemos supor sem perda de generalidade que $f_{\mathscr{B}}$ é mensurável com respeito à σ-álgebra de $\mathscr{B}$. Então $S_0 = \{x \mid f_{\mathscr{B}}(x) \geq 0\} \in \mathscr{B}$ e, se consideramos a medida $\tilde{\mu}_0$: $S_0 \cap \mathscr{B} \to \mathbb{R}$ definida como

$$\tilde{\mu}_0(S) = \int_S f\, d\mu,$$

resulta $\tilde{\mu}_0 \ll \mu/(S_0 \cap \mathscr{B})$. Então por (14):

$$f_{\mathscr{B}}/S_0 = \frac{d\tilde{\mu}_0}{d(\mu/S_0 \cap \mathscr{B})}$$

o que implica que $f_{\mathscr{B}}/S_0$ está determinada univocamente em q.t.p.. Analogamente prova-se que $f_{\mathscr{B}}/S_0^c$ também o está.

Observe-se que a condição (13) implica que $f_{\mathscr{B}}$ coincide em q.t.p. com uma função mensurável com respeito à σ-álgebra $\mathscr{B}$. Como exemplo consideramos o espaço $(X, \mathcal{A}, \lambda)$ onde $X = (0, 1) \times (0, 1)$, $\mathcal{A}$ são os boreleanos e λ a medida de Lebesgue. Seja $\mathscr{B}$ a sub σ-álgebra dos boreleanos "verticais", isto é, boreleanos tais que, se contém um ponto (x, y), então contém o segmento $\{(x, t) \mid t \in (0, 1)\}$. Se $f \in \mathscr{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ então $f_{\mathscr{B}}$ é dada por:

$$f_{\mathscr{B}}(x, y) = \int_0^1 f(x, t)\, dt.$$

Para provar esta igualdade é preciso, usando o Teorema de Fubini, verificar (13) e (14). Outro exemplo interessante é obtido considerando um espaço de probabilidade $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e tomando com sub-σ-álgebra *a* formada pelos conjuntos de $\mathcal{A}$ que coincidem mod (0) com uniões de átomos de uma partição $\mathscr{P}$. Então se $f \in \mathscr{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, $f_{\mathscr{P}}$ é

$$f_{\mathscr{P}} = \sum_{P \in \mathscr{P}} \frac{1}{\mu(P)} \left(\int_P f\, d\mu \right) f_P.$$

TEOREMA V.2. *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $\mathscr{P}_1 \leq \leq \mathscr{P}_2 \leq \ldots$ uma sequência de partições. Se $f \in \mathscr{L}^1$ $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $\mathscr{P} = \bigvee_{n \geq 1} \mathscr{P}_n$:*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\mu(\mathscr{P}_n(x))} \int_{\mathscr{P}_n(x)} f\, d\mu = f_{\mathscr{P}}(x)$$

para q.t.p. $x \in X$.

Este teorema segue imediatamente do anterior aplicado ao espaço $(X, \mathscr{P}, \mu/\mathscr{P})$, à função $f_{\mathscr{P}} \in \mathscr{L}^1(X, \mathscr{P}, \mu/\mathscr{P})$ e a sequência de partições $\mathscr{P}_1 \leq \mathscr{P}_2 \leq \ldots$. Então, usando a definição de $f_{\mathscr{P}}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\mu(\mathscr{P}_n(x))} \int_{\mathscr{P}_n(x)} f\, d\mu = \lim \frac{1}{\mu(\mathscr{P}_n(x))} \int_{\mathscr{P}_n(x)} f_{\mathscr{P}}\, d\mu = f_{\mathscr{P}}(x)$$

Vejamos agora um resultado análogo a V.1 mas que não requer a condição $\mathscr{P}_1 \leq \mathscr{P}_2 \leq \ldots$.

TEOREMA V.3. *Seja* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *um espaço de probabilidade e* $\mathscr{P}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, *uma sequência de partições tais que para todo* $A \in \mathscr{A}$ *e* $\varepsilon > 0$ *existe* $N = N(A, \varepsilon) > 0$ *tal que se* $n \geq N$, *existe um conjunto* $A_n \in \mathscr{A}$ *que é união de átomos de* $\mathscr{P}_n$ *e que satisfaz:*

$$\mu(A \,\Delta\, A_n) \leq \varepsilon.$$

Então para todo $A \in \mathscr{A}$, *a sequência de funções*

$$F_n(x) = \frac{\mu(A \cap \mathscr{P}_n(x))}{\mu(A)}$$

converge em medida à função característica f_A. *Em particular existe uma sequência* m_n, $n = 1, 2, \ldots$ *tal que* $f_{m_n} \to f_A$ *em q.t.p.*

Prova. Dados $A \in \mathscr{A}$ e $0 < \lambda < 1$ seja $A(\lambda, n)$ o conjunto dos pontos $x \in X$ onde:

$$\mu(A \cap \mathscr{P}_n(x)) \leq \lambda \mu(A).$$

Seja $\varepsilon > 0$ e $N = N(A, \varepsilon) > 0$ dado pela hipótese do enunciado. Se $n \geq N$ tomemos $A_n \in \mathscr{A}$ tal que seja união de átomos de $\mathscr{P}_n$ e $\mu(A \,\Delta\, A_n) \leq \varepsilon$. Observe-se que $A(\lambda, n)$ também é união de átomos de $\mathscr{P}_n$. Daí segue que pode-se escrever como união disjunta:

$$A_n \cap A(\lambda, n) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathscr{P}_n(x_j)$$

onde $x_1, \ldots, x_n$ estão em $A(\lambda, n)$. Então:

$$\mu(A \cap A_n \cap A(\lambda, n)) = \sum_i \mu(\mathscr{P}_n(x_j) \cap A) \leq \lambda \sum_i \mu(\mathscr{P}_n(x_j)) =$$
$$= \lambda \mu(A_n \cap A(\mathscr{P}, n)).$$

Por outro lado $\mu(A \,\Delta\, A_n) \leq \varepsilon$ implica

$$\mu(A_n \cap A(\lambda, n)) \leq \varepsilon + \mu(A \cap A(\lambda, n))$$

$$\mu(A \cap A_n \cap A(\lambda, n)) \geq \mu(A \cap A(\lambda, n)) - \varepsilon$$

Concluimos que:

$$\mu(A \cap A(\lambda, n)) - \varepsilon \leq \lambda\, \varepsilon + \lambda \mu(A \cap A(\lambda, n)).$$

Ou seja:

$$\mu(A \cap A(\lambda, n)) \leq \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}\, \varepsilon.$$

Isto mostra que

$$\lim_{n \to +\infty} \mu(A \cap A(\lambda, n)) = 0$$

para todo $0 < \lambda < 1$. Como $F_n(x) < 1$ para todo x, e λ pode ser tomado arbitrariamente próximo de 1, obtemos que f_n/A converge em medida a 1. Aplicando este resultado a A^c completamos a prova do teorema.

O seguinte Teorema dá um critério simples para reconhecer, no caso de espaços métricos, quando uma sequência de partições satisfaz as hipóteses dos teoremas anteriores:

TEOREMA V.4. *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade onde X é um espaço métrico e separável e $\mathcal{A}$ é a σ-álgebra dos borelianos de X. Seja $\mathcal{P}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ uma sequência de partições tal que*

$$\lim_{n \to +\infty} (\sup_{P \in \mathcal{P}_n} \operatorname{diam}(P)) = 0.$$

Então a sequência $\mathcal{P}_n$ satisfaz as hipóteses do Teorema V.3. Em particular, pelo Teorema I.2, $\bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n = \mathcal{A}$ mod(0).

Prova: Seja $A \in \mathcal{A}$ e $\varepsilon > 0$. Pelo teorema de Lusin existe um compacto $K \subset A$ tal que $\mu(A - K) \leq \varepsilon/2$. Seja $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \ldots$ uma sequência de abertos tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = K$. Então $\lim_{n \to +\infty} \mu(U_n - K) = 0$. Seja $m > 0$ tal que

$$\mu(U_m - K) \leq \varepsilon/2.$$

Selecionemos $N > 0$ tal que

$$\sup_{P \in \mathcal{P}_n} \operatorname{diam}(P) \leq d(K, U_m^c).$$

para $n \geq N$. Então, se $n \geq N$, o conjunto

$$A_n = \cup \{P \in \mathcal{P}_n \mid P \cap K \neq \emptyset)$$

satisfaz

$$U_n \supset A_n \supset K.$$

De modo que:

$$\mu(A_n \Delta A) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \mu(A_n - K) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \mu(U_n - K) \leq \varepsilon.$$

TEOREMA V.5. *Seja* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de probabilidade onde* X *é um espaço métrico separável e* $\mathcal{A}$ *a* σ*-álgebra dos boreleanos. Seja* $\mathcal{P}_1 \leq \mathcal{P}_2 \leq \dots$ *uma sequência de partições tais que:*

$$\lim_{n \to +\infty} (\sup_{P \in \mathcal{P}_n} \operatorname{diam}(P)) = 0.$$

Então a σ*-álgebra dos boreleanos de* X *coincide com* $\bigvee_{n \leq 1} \mathcal{P}_n$ *mod*(0).

Prova. Seja $\mathcal{A}_0$ a álgebra formada por todos os conjuntos que são uniões finitas de átomos das partições $\mathcal{P}_n$, $n \geq 1$. É fácil ver que σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}_0$ coincide com $\bigvee_{n \geq 1} \mathcal{P}_n$. De modo que é suficiente mostrar que $\mathcal{A}$ é gerada mod(0) por $\mathcal{A}_0$. Pelo Teorema de Aproximação (Teorema I.2) temos que provar que, para todo $A \in \mathcal{A}$ e todo $\varepsilon > 0$, existe $A' \in \mathcal{A}_0$ tal que $\mu(A \,\Delta\, A') \leq \varepsilon$. Pelo Teorema de Lusin (Teorema I.3) existe um compacto $K \subset A$ tal que $\mu(A - K) \leq \varepsilon/2$. K pode-se escrever como $K = \bigcap_{m \geq 1} U_m$ onde os conjuntos U_m são abertos. Então, se m é suficientemente grande $\mu(U_m - K) \leq \varepsilon/2$. Seja $\delta = \inf\{d(x, y) \mid x \in K,\ y \in U_m^c\}$ e n tal que $\operatorname{diam}(P) \leq \delta/2$ se $P \in \mathcal{P}_n$. Definimos

$$A_0 = \cup\{P \in \mathcal{P}_n \mid P \cap K \neq \varnothing\}.$$

Então $U_m \supset A_0 \supset K$ mod (0). De modo que $\mu(A_0 \,\Delta\, K) = \mu(A_0 - K) \leq$ $\leq \mu(U_m - K) \leq \varepsilon/2$ e

$$\mu(A \,\Delta\, A_0) \leq \mu(A \,\Delta\, K) + \mu(K \,\Delta\, A_0) \leq \varepsilon.$$

Finalmente daremos um critério para reconhecer quando, dado um espaço de probabilidade $(X, \mathcal{A}, \mu)$, existe uma família enumerável $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ que gera $\mathcal{A}$ mod (0). Este tipo de espaços de probabilidade denominam-se *separáveis*.

TEOREMA V.6. *Dado um espaço de probabilidade* $(X, \mathcal{A}, \mu)$, *as seguintes propriedades são equivalentes:*

I) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é separável;

II) $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ é separável;

III) $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ é separável para todo $1 \leq p < \infty$;

IV) Existe uma subálgebra enumerável $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ que gera $\mathcal{A}$ mod (0);

V) Existe uma sequência de partições $\mathcal{P}_1 \leq \mathcal{P}_2 \leq \dots$ tais que $\bigvee_{n \leq 1} \mathcal{P}_n = \mathcal{A}$ mod (0).

BIBLIOGRAFIA

[A1] R. L. Adler – *F*-expansions revisited, Lecture Notes in Mathematics 318 (1975), 1-5.

[A2] R. L. Adler, A. G. Konheim, M. H. Mc Andrew – Topological Entropy, Trans. Amer. Math. Soc. 114 (1965), 309-311.

[A3] D. V. Anosov – Geodesic flows on closed Riemannian manifolds with negative curvature, Proc. Inst. Steklov, 90 (1967), 1-235.

[A4] V. I. Arnold – Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics, Russian Math. Surveys 18 (1963), 85-191.

[A5] V. I. Arnold, A. Avez – Problèmes Ergodiques de la Mécanique Classique, Gauthier-Villars (1967).

[A6] V. I. Arnold – Methods Mathematiques de la Mécanique Classique, Editions MIR (1976).

[B1] G. D. Birkhoff – Proof of the Ergodic Theorem, Proc. Nat. Acad. of Sciences U.S.A., 17 (1931), 656-660.

[B2] P. Billingsley – Ergodic Theory and Information, Wiley Series in Prob. and Math. Stat. (1965).

[B3] R. Bowen – Topological Entropy and Axiom A, Proc. of Symp. on Pure Math. XIV (1968), 23-41.

[B4] R. Bowen – Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms, Amer. Journal of Math. 92 (1970), 907-918.

[B5] R. Bowen – ω-limit sets for Axiom A diffeomorphisms, J. Diff. Eqns., 18 (1975), 333-339.

[B6] R. Bowen – Equilibrium States and Ergodic Theory of Anosov diffeomorphisms, Lecture Notes in Mathematics 470 (1975).

[B7] R. Bowen – Entropy and the fundamental group, Lecture Notes in Mathematics, 668 (1978), 21-29.

[B8] R. Bowen – On Axiom A diffeomorphisms, CBMS Regional Conference Series # 35 (1978).

[B9] R. Bowen – Markov partitions are not smooth, Proc. of the Amer. Math. Soc. 71 (1968), 130-132.

[B10] R. Bowen – Invariant measures for Markov maps of the interval, Comm. Math. Physics 69 (1979), 1-17.

[B11] L. Breiman – The individual theorem of information theory, Ann. of Math. Stat. 28 (1957), 809-811, errata 31 (1960), 809-810.

[B12] L. Breiman – Probability and Stochastic Processes, Houghton and Mifflin (1969).

[B13] M. Brin, J. Feldman, A. Katok – Bernouilli diffeomorphisms and group extensions of dynamical systems, Ann. of Math. 113 (1981), 159-179.

[B14] M. Brin, A. Katok – On local entropy (a aparecer).

[B15] J. R. Brown – Ergodic Theory and Topological Dynamics, Academic Press, 1976.

[B16] L. A. Bunimovitch – On the ergodic properties of certain billiards, Functional Analysis and Appl. 8 (1974), 268-269).

[B17] L. A. Bunimovitch, Ya. Sinai – On a fundamental theorem of the theory of seattering billiards, Math. Sb. 19 (1973), 407-423.

[D1] M. Denker, C. Grillenberg, K. Sigmund – Ergodic Theory on Compacta Spaces, Lecture Notes in Mathematics 527 (1976).

[D2] E. I. Dinaburg – The relation between topological entropy and metric entropy, Soviet Math. Dokl. 11 (1970), 13-16.

[F1] F. T. Farrell, L. E. Jones – Markov cell structures, Bull. of the Amer. Math. Soc. 83 (1977), 739-740.

[F2] P. Fernandez – Medida e Integração, Projeto Euclides, IMPA (1976).

[F3] J. Franks – Anosov diffeomorphisms, Proc. of Symposia in Pure Mathematics Vol. XIV (1970).

[F4] J. Franks – Anosov diffeomorphisms on tori, Trans. Amer. Math. Soc. 145 (1969), 117-124.

[F5] J. Franks, R. Williams – Anomalous Anosov Flows, Global Theory of Dynamical Systems, Lecture Notes in Mathematics 819 (1980).

[F6] N. A. Friedman, D. S. Ornstein – An isomorphism of weak Bernouilli transformations, Advances in Mathematics, 5 (1970), 365-374.

[F7] H. Furstenberg – Strict ergodicity and transformations of the torus, Amer. J. of Math. 83 (1961), 573-601.

[G1] G. Gallavotti – Lectures on the billiard, Dynamical Systems and its applications, Lecture Notes in Physics 38 (1975).

[G2] K. F. Gauss – Werke X, 1, 371, 552-553.

[G3] T. N. T. Goodman – Relating topological entropy and measure entropy, Bull. London Math. Soc. 3 (1971), 176-180.

[G4] L. W. Goodwyn – Comparing topological entropy with measure theorical entropy, Amer. J. of Math. 94 (1972), 366-387.

[G5] M. Gromov – Expanding maps and groups of polynomial growth, Preprint IHES (1979).

[G6] B. M. Gurevic – The entropy of horocycle flows, Sov. Math. Dok. 2 (1961), 124-138.

[H1] P. R. Halmos, J. Von Neuman – Operators methods in classical mechanics II, Annals of Math. 43 (1942), 235-247.

[H2] G. A. Hedlund – On the metric transitivity of the geodesics on closed surface of constant negative curvature, Ann. of Math. 35 (1935).

[H3] M. Herman – Sur le théorème des courbes invariantes pour les diffeomorphismes du anneau, Preprint (1981).

[H4] M. Hirsch, C. Pugh – Stable manifolds and hyperbolic sets, Proc. of Symp. in Pure Math. Vol. XIV, (1970).

[H5] M. Hirsch, C. Pugh, M. Shub – Invariant Manifolds, Lecture Notes in Mathematics.

[H6] E. Hopf – Statistik der geodätischen linen in Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung, Ber. Verh. Sochs. Akad. Wiss. Leipzing 91 (1939), 261-304.

[H7] E. Hopf – A mathematical example displaying the features of turbulence, Comm. Pure and Applied Math. 1 (1948), 303-322.

[K1] A. Katok – Bernouilli diffeomorphisms on surfaces, Ann. of Math. 110 (1977), 529-574.

[K2] A. Katok – Smooth non-Bernouilli diffeomorphisms on surfaces, Inv. Math. 61 (1980), 271-300.

[K3] A. Katok – Lyapounov exponents, entropy and periodic orbits of diffeomorphisms, Publ. Math. IHES, 51 (1980).

[K4] Y. Katznelson – Ergodic automorphisms of T^n are Bernouilli shifts, Israel Journal of Mathematics 10 (1975), 186-195.

[K5] M. Keane – Interval Exchange Transformation, Math. Z. 141 (1975), 25-31.

[K6] M. Keane – Non-ergodic Interval Exchange Transformations, Israel J. Math. 26 (1977), 188-196.

[K7] A. I. Khinchin – Mathematical Foundations of Statistical Mechanics, Dover 1949.

[L1] F. Ledrappier – Some properties of absolutely continuous invariant measures on an interval, Ergodic Theory and Dynamical Systems I - 1 (1981).

[M1] G. W. Mackey – Ergodic Theory and its significance for Statistical Mechanics and Probability Theory, Adv. in Math. 12 (1974), 178-268.

[M2] B. Mc Millan – The basics theorems of information theory, Ann. of Math. Statistics 24 (196-219).

[M3] A. Manning – There are no new Anosov diffeomorphisms on tori, Amer. J. of Math. 96 (1974), 422-429.

[M4] A. Manning – Topological entropy and the first homology group, Dynamical Systems, Warwick 1974, Lecture Notes in Mathematics 468.

[M5] R. Mañé – Orbits of paths under hyperbolic toral automorphisms, Proc. Amer. Math. Soc. 73 (1979), 121-125.

[M6] R. Mañé – Expansive homeomorphisms and topological dimension. Trans. Amer. Math. Soc. 252 (1979), 313-319.

[M7] R. Mañé – An ergodic Closing Lemma Ann. of Math. 116 (1982) 503-541.

[M8] M. Misiurevicz – Diffeomorphisms without any measure with maximal entropy, Bull. Acad. Pol. Sci. 21 (1973), 903-910.

[M9] J. Moser – On invariant curves of area preserving mappings of an annulus, Nachr. Acad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. K1. (1962), 1-20.

[M10] M. E. Munroe – Introduction to Measure and Integration, Addison e Wesley (1953).

[N1] V. V. Nemitsky, V. V. Stepanov – Qualitative Theory of Differential Equations, Princeton Univerisity Press.

[N2] S. Newhouse – Dynamical Systems, Progress in Mathematics 8, Birkhauser (1980).

[N3] S. Newhouse – On codimension one Anosov diffeomorphisms, Amer. Jour. of Math. 92 (1970), 761-762.

[O1] D. S. Ornstein – Bernouilli shifts with the same entropy or isomorphic, Adv. in Math. 4 (1970), 337-352.

[O2] D. S. Ornstein – An example of a K-system that is not a Bernouilli shifts, Adv. in Math. 10 (1973), 49-62.

[O3] T. V. O'Brien, W. L. Reddy – Each compact orientable surface of positive genus admits an expansive homeomorphism, Pac. J. Math. 35 (1970), 737-741.

[O4] V. I. Oseledec – A multiplicative ergodic theorem, Trans. Moscow Math. Soc. 19 (1968), 197-231.

[O5] J. C. Oxtoby, S. M. Ulom – Measure preserving homeomorphisms and metrical transitivity, Ann. of Math. 42 (1941), 874-920.

[P1] J. Parry – Intrinsec Markov Chains, Trans. Amer. Math. Soc. 112 (1964), 55-66.

[P2] Ya. Pesin – Characteristic Lya ounov exponents and smooth ergodic theory, Russian Math. Surveys 32 (1977), 54-114.

[P3] H. Poincaré – Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste, Vol. 3, Gauthier Villars (1899).

[P4] L. S. Pontrjaguin – Topological Groups, Gordon and Breach (1966).

[P5] C. Pugh – On the entropy conjectures, Lecture Notes in Mathematics, 468 (1975), 257-261.

[P6] H. Porteus – Anosov diffeomorphisms of flat manifolds, Topology 11-3 (1972).

[R1] V. A. Rohlin, Ya. Sinai – Construction and properties of invariant measureable partitions, Sov. Math. 2 (1966), 1611-1614.

[R2] C. Robinson – Lecture Notes on Hamiltonian Systems, Monografias do IMPA (1971).

[R3] C. Robinson, L. S. Young – Non absolutely continuous foliations for an Anosov diffeomorphism, Preprint (1978).

[R4] D. Ruelle – An inequality for the entropy of differentiable maps, Bol. Soc. Bras. de Mat. 9 (1978), 83-87.

[R5] D. Ruelle – Ergodic Theory of differentiable dynamical systems, Publications IHES, 50 (1979).

[R6] H. Rüssman – Uber invariante Kurven differenzierbarer Abbildungen eines Kreisringes, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys. K1. (1970), 67-105.

[S1] C. Shannon – A mathematical theory of communication, Bell Syst. Tech. Journal 27 (1948), 379-423, 623-656.

[S2] P. Shields – The theory of Bernouilli shifts, The University of Chicago Press (1973).

[S3] M. Shub – Stability Globale des Systèmes Dynamiques, Astérisque 56 (1978), 1-210.

[S4] M. Shub, R. Williams – Entropy and Stability, Topology 14 (1975), 329-339.

[S5] M. Shub – Endomorphisms of compact differentiable manifolds. American Journal of Math. 91 (1969), 129-155.

[S6] Ya. Sinai – On a weak isomorphism of transformation with invariant measure. Mat. Sbornik 63 (1964), 23-42.

[S7] Ya. Sinai – Dynamical Systems with elastic reflections: Ergodic properties of scattering billiards, Russian Math. Surveys 25-1 (1970), 137-189.

[S8] Ya. Sinai – Markov partitions and C-diffeomorphisms. Anal. and Appl. 2 (1968), 70-80.

[S9] S. Smale – Differentiable Dynamical Systems. Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 97-116.

[V1] W. A. Veech – Interval Exchange Transformations, Journal D'Analyse Math. 33 (1978), 222-272.

[V2] W. A. Veech – Projective Swiss Cheeses and Uniquely Ergodic Interval Exchange Transformations, Progress in Mathematics, 10 (1979-1980).

[W1] A. Weinstern – Lectures on sympletic manifolds, NBMS Conf. Series n.º 29 (1977).

[Z1] A. N. Zmlyakov, A. Katok – Topological transitivity of billiards in polygons. Math. Notes (1975), 760-764.

ricardo mañé

Mañé é uruguaio de Montevidéu, onde começou seus estudos de Matemática que concluiu no IMPA, obtendo o Doutoramento em 1973 sob a orientação de Jacob Palis. Desenvolveu sua carreira matemática integralmente nesta instituição, onde atualmente ocupa o cargo de Pesquisador Titular. Especialista em Sistemas Dinâmicos e Teoria Ergódica Diferenciável, tem, sobre estes temas, publicado vários trabalhos de pesquisa, participado em diversos Simpósios e proferido conferências nas Universidades de Berkeley, Warwick, Northwestern, École Polytechnique e o Institut des Hautes Études Scientifiques.

[As linhas acima, escritas pelo próprio Ricardo Mañé, dão uma amostra do seu caráter. As linhas de dentro do livro atestam a qualidade da Matemática que ele pratica.]

teoria ergódica

CNPq Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

impa Instituto de Matemática Pura e Aplicada