

FUNDAMENTOS  
DE FÍSICA

---

2  
*Gravitação, Ondas  
e Termodinâmica*

HALLIDAY RESNICK WALKER

---

LTC

4<sup>a</sup>  
EDIÇÃO

# **FUNDAMENTOS DE FÍSICA 2**

## Gravitação, Ondas e Termodinâmica

**4.<sup>a</sup> EDIÇÃO**

**David Halliday**

Universidade de Pittsburgh

**Robert Resnick**

Instituto Politécnico de Rensselaer

**Jearl Walker**

Universidade Estadual de Cleveland

Tradução

**Amy Bello Barbosa de Oliveira** (Cap. 17)

**Gerson Bazo Costamilan** (Apêndices A a H)

**Henrique Cesar Leão** (Cap. 14)

**José Antonio e Souza** (Caps. 15, 18, 19, 20, 21 e 22)

**Lucília Marques Pereira da Silva** (Cap. 13)

**Sílvia Teixeira de Matos** (Cap. 16)

Revisão Técnica

**Gerson Bazo Costamilan** (Apêndices A a H)

Professor de Física do Instituto Militar de Engenharia — IME

Mestre e Doutorando em Física pelo Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

**J. A. Souza** (Caps. 14 a 22)

Instituto de Física da Universidade Federal Fluminense — UFF

**Vicente Roberto Dumke** (Cap. 13)

Professor Titular de Física da Universidade Federal do Paraná — UFPR

# SUMÁRIO GERAL

## Volume 1 MECÂNICA

- Capítulo 1 Medição 1
- Capítulo 2 Movimento Retilíneo 13
- Capítulo 3 Vetores 39
- Capítulo 4 Movimento em Duas e Três Dimensões 55
- Capítulo 5 Força e Movimento — I 81
- Capítulo 6 Força e Movimento — II 109
- Capítulo 7 Trabalho e Energia Cinética 131
- Capítulo 8 Conservação da Energia 155
- Capítulo 9 Sistemas de Partículas 187
- Capítulo 10 Colisões 213
- Capítulo 11 Rotação 239
- Capítulo 12 Rolamento, Torque e Momento Angular 267
- Apêndices 299
- Respostas dos Exercícios e Problemas 323
- Créditos das Fotos 327
- Índice 329

## Volume 2 GRAVITAÇÃO, ONDAS E TERMODINÂMICA

- Capítulo 13 Equilíbrio e Elasticidade 1
- Capítulo 14 Oscilações 25
- Capítulo 15 Gravitação 57
- Capítulo 16 Fluidos 81
- Capítulo 17 Ondas — I 111
- Capítulo 18 Ondas — II 137
- Capítulo 19 Temperatura 169
- Capítulo 20 Calor e Primeira Lei da Termodinâmica 183
- Capítulo 21 A Teoria Cinética dos Gases 207
- Capítulo 22 Entropia e a Segunda Lei da Termodinâmica 237
- Apêndices 263
- Respostas dos Exercícios e Problemas 287
- Créditos das Fotos 289
- Índice 291

## Volume 3 ELETROMAGNETISMO

- Capítulo 23 Carga Elétrica 1
- Capítulo 24 O Campo Elétrico 17
- Capítulo 25 Lei de Gauss 39
- Capítulo 26 Potencial Elétrico 63
- Capítulo 27 Capacitância 91
- Capítulo 28 Corrente e Resistência 113
- Capítulo 29 Circuito 133
- Capítulo 30 O Campo Magnético 157
- Capítulo 31 Lei de Ampère 183
- Capítulo 32 Lei da Indução de Faraday 207
- Capítulo 33 Indutância 235
- Capítulo 34 O Magnetismo e a Matéria 257
- Capítulo 35 Oscilações Eletromagnéticas 277
- Capítulo 36 Correntes Alternadas 291
- Capítulo 37 As Equações de Maxwell 309
- Apêndices 319
- Respostas dos Exercícios e Problemas 343
- Créditos das Fotos 345
- Índice 349

## Volume 4 ÓTICA E FÍSICA MODERNA

- Capítulo 38 Ondas Eletromagnéticas 1
- Capítulo 39 Ótica Geométrica 25
- Capítulo 40 Interferência 61
- Capítulo 41 Difração 91
- Capítulo 42 Relatividade 123
- Capítulo 43 Física Quântica — I 151
- Capítulo 44 Física Quântica — II 173
- Capítulo 45 Modelos Atômicos 199
- Capítulo 46 Condução de Eletricidade nos Sólidos 227
- Capítulo 47 Física Nuclear 253
- Capítulo 48 Energia Nuclear 277
- Capítulo 49 Quarks, Léptons e o Big-Bang 299
- Apêndices 321
- Respostas dos Exercícios e Problemas 345
- Créditos das Fotos 347
- Índice 349

# SUMÁRIO DESTE VOLUME

## CAPÍTULO 13

### EQUILÍBRIO E ELASTICIDADE 1

*Durante a escalada de um desfiladeiro, o alpinista pode descansar em segurança usando as paredes da fenda?*

- 13-1 Equilíbrio 1
  - 13-2 Condições para o Equilíbrio 2
  - 13-3 O Centro de Gravidade 3
  - 13-4 Alguns Exemplos de Equilíbrio Estático 4
  - 13-5 Estruturas Indeterminadas 10
  - 13-6 Elasticidade 10
- Resumo 14  
Questionário 15  
Exercícios e Problemas 15  
Problemas Adicionais 22

## CAPÍTULO 14

### OSCILAÇÕES 25

*Por que somente um trecho da Freeway Nimitz (Oakland, California, 1919) desmoronou?*

- 14-1 Oscilações 25
  - 14-2 Movimento Harmônico Simples 25
  - 14-3 Movimento Harmônico Simples: A Lei de Força 28
  - 14-4 Movimento Harmônico Simples: Considerações Sobre Energia 30
  - 14-5 Um Oscilador Harmônico Simples Angular 31
  - 14-6 Pêndulos 32
  - 14-7 Movimento Harmônico Simples e Movimento Circular Uniforme 36
  - 14-8 Movimento Harmônico Simples Amortecido (Opcional) 38
  - 14-9 Oscilações Forçadas e Ressonância (Opcional) 39
- Resumo 40  
Questionário 41  
Exercícios e Problemas 42  
Problemas Adicionais 48

## CAPÍTULO 15

### GRAVITAÇÃO 51

*Como podemos detectar um buraco negro?*

- 15-1 O Universo e a Força Gravitacional 51
- 15-2 A Lei da Gravitação de Newton 51
- 15-3 Gravitação e o Princípio da Superposição 53
- 15-4 Gravitação Próximo à Superfície da Terra 54

- 15-5 Medida da Constante Gravitacional  $G$  56
  - 15-6 Gravitação no Interior da Terra 57
  - 15-7 Energia Potencial Gravitacional 58
  - 15-8 Planetas e Satélites: Leis de Kepler 61
  - 15-9 Órbitas de Satélites e Energia (Opcional) 64
  - 15-10 Uma Visão mais Profunda da Gravitação (Opcional) 66
- Resumo 67  
Questionário 69  
Exercícios e Problemas 70  
Problemas Adicionais 76

LEITURA COMPLEMENTAR 3 A FÍSICA NA AUSÊNCIA DE PESO 77  
Sally Ride

## CAPÍTULO 16

### FLUIDOS 81

*O que às vezes causa a morte de um mergulhador principiante?*

- 16-1 Fluidos e o Mundo ao Nosso Redor 81
  - 16-2 O Que É um Fluido? 81
  - 16-3 Densidade e Pressão 82
  - 16-4 Fluidos em Repouso 83
  - 16-5 Medindo a Pressão 86
  - 16-6 O Princípio de Pascal 87
  - 16-7 O Princípio de Arquimedes 88
  - 16-8 Fluidos Ideais em Movimento 90
  - 16-9 Linhas de Corrente e a Equação da Continuidade 91
  - 16-10 A Equação de Bernoulli 93
  - 16-11 Algumas Aplicações da Equação de Bernoulli 94
  - 16-12 O escoamento de Fluidos Reais (Opcional) 96
- Resumo 98  
Questionário 98  
Exercícios e Problemas 100  
Problemas Adicionais 107

LEITURA COMPLEMENTAR 4 A FÍSICA E OS ESPORTES 108  
Peter Brancaccio

## CAPÍTULO 17

### ONDAS — I 111

*De que modo um escorpião detecta um besouro sem usar a visão ou a audição?*

- 17-1 Ondas e Partículas 111
- 17-2 Ondas 112
- 17-3 Ondas numa Corda Esticada 113
- 17-4 Comprimento de Onda e Frequência 113
- 17-5 A Velocidade Escalar de Propagação de uma Onda 115

- 17-6 Velocidade Escalar da Onda numa Corda Esticada 117
- 17-7 Velocidade da Luz 119
- 17-8 Energia e Potência numa Onda Progressiva (Opcional) 119
- 17-9 O Princípio da Superposição 121
- 17-10 Dispersão (Opcional) 122
- 17-11 Interferência de Ondas 123
- 17-12 Ondas Estacionárias 124
- 17-13 Ondas Estacionárias e Ressonância 126
  - Resumo 129
  - Questionário 130
  - Exercícios e Problemas 131
  - Problemas Adicionais 135

## CAPÍTULO 18

### ONDAS — II 137

*De que modo um morcego detecta uma mariposa na escuridão total?*

- 18-1 Ondas Sonoras 137
- 18-2 A Velocidade do Som 138
- 18-3 Propagação de Ondas Sonoras 140
- 18-4 Intensidade e Nível do Som 143
- 18-5 Fontes Sonoras Musicais 146
- 18-6 Batimentos 149
- 18-7 O Efeito Doppler 150
- 18-8 O Efeito Doppler para a Luz (Opcional) 154
  - Resumo 155
  - Questionário 156
  - Exercícios e Problemas 157

LEITURA COMPLEMENTAR 5 A ACÚSTICA NUMA SALA DE CONCERTOS 161  
John S. Rigden

## CAPÍTULO 19

### TEMPERATURA 169

*Que características da água permitem a vida aquática num clima frio?*

- 19-1 Termodinâmica: Um Novo Conceito 169
- 19-2 Temperatura 169
- 19-3 A Lei Zero da Termodinâmica 170
- 19-4 Medindo a Temperatura 171
- 19-5 A Escala Internacional de Temperatura 173
- 19-6 As Escalas Celsius e Fahrenheit 173
- 19-7 Expansão Térmica 174
  - Resumo 178
  - Questionário 179
  - Exercícios e Problemas 179

## CAPÍTULO 20

### CALOR E A PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA 183

*Por que se usam roupas pretas em climas extremamente quentes?*

- 20-1 Calor 183
- 20-2 Medindo o Calor: Unidades 184
- 20-3 Absorção de Calor por Sólidos e Líquidos 184
- 20-4 Uma Observação Mais Detalhada de Calor e Trabalho 187
- 20-5 A Primeira Lei da Termodinâmica 189
- 20-6 Alguns Casos Especiais da Primeira Lei da Termodinâmica 190
- 20-7 A Transmissão de Calor 191
  - Resumo 195
  - Questionário 196
  - Exercícios e Problemas 197
  - Problemas Adicionais 202

LEITURA COMPLEMENTAR 6 A EBULIÇÃO E O EFEITO LEIDENFROST 203  
Jearyl Walker

## CAPÍTULO 21

### A TEORIA CINÉTICA DOS GASES 207

*Quando o ar de uma sala é aquecido, a energia interna dele aumenta?*

- 21-1 Uma Nova Maneira de Ver os Gases 207
- 21-2 Número de Avogadro 207
- 21-3 Gases Ideais 209
- 21-4 Pressão e Temperatura: Uma Visão Molecular 210
- 21-5 Energia Cinética de Translação 212
- 21-6 Livre Caminho Médio 213
- 21-7 Distribuição de Velocidades Moleculares (Opcional) 215
- 21-8 Calores Específicos Molares de um Gás Ideal 217
- 21-9 A Equipartição da Energia 220
- 21-10 Uma Sugestão da Teoria Quântica 221
- 21-11 Expansão Adiabática de um Gás Ideal 222
  - Resumo 224
  - Questionário 225
  - Exercícios e Problemas 226
  - Problemas Adicionais 231

LEITURA COMPLEMENTAR 7 AS EMISSÕES INDUSTRIAIS DE CO<sub>2</sub> ESTÃO AQUECENDO NOSSO MEIO AMBIENTE? 232  
Barbara Levi

## CAPÍTULO 22

### ENTROPIA E A SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA 237

*O que nos diz em que direção vai o tempo?*

- 22-1 Algumas Coisas que Não Acontecem 237
- 22-2 Máquinas 238
- 22-3 Refrigeradores 241
- 22-4 A Segunda Lei da Termodinâmica 242
- 22-5 Uma Máquina Ideal 243

22-6	O Ciclo de Carnot	243
22-7	A Eficiência das Máquinas Reais	245
22-8	Entropia: Uma Nova Variável	247
22-9	Variações de Entropia para Processos Irreversíveis	250
22-10	Entropia e a Segunda Lei da Termodinâmica	252
22-11	O Que É Entropia, Afinal de Contas?	253
22-12	A Natureza das Leis Físicas: Uma Digressão	255
	<i>Resumo</i>	255
	<i>Questionário</i>	256
	<i>Exercícios e Problemas</i>	257
	<i>Problemas Adicionais</i>	260

## APÊNDICES

A	O SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI)	263
B	ALGUMAS CONSTANTES FUNDAMENTAIS DA FÍSICA	265
C	ALGUNS DADOS ASTRONÔMICOS	267
D	PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS	269
E	TABELA PERIÓDICA DOS ELEMENTOS	271
F	FATORES DE CONVERSÃO	273
G	FÓRMULAS MATEMÁTICAS	277
H	LAUREADOS COM O PRÊMIO NOBEL DE FÍSICA	281
	RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS E PROBLEMAS	287
	CRÉDITOS DAS FOTOS	289
	ÍNDICE	291

## ALGUMAS CONSTANTES FÍSICAS\*

Velocidade da luz	$c$	$3,00 \times 10^8$ m/s
Constante gravitacional	$G$	$6,67 \times 10^{-11}$ N·m <sup>2</sup> /kg <sup>2</sup>
Constante de Avogadro	$N_A$	$6,02 \times 10^{23}$ mol <sup>-1</sup>
Constante universal dos gases	$R$	8,31 J/mol·K
Relação massa-energia	$c^2$	$8,99 \times 10^{16}$ J/kg
		931,5 MeV/u
Constante de permissividade do vácuo	$\epsilon_0$	$8,85 \times 10^{-12}$ F/m
Constante de permeabilidade do vácuo	$\mu_0$	$1,26 \times 10^{-6}$ H/m
Constante de Planck	$h$	$6,63 \times 10^{-34}$ J·s
		$4,14 \times 10^{-15}$ eV·s
Constante de Boltzmann	$k$	$1,38 \times 10^{-23}$ J/K
		$8,62 \times 10^{-5}$ eV/K
Carga elementar	$e$	$1,60 \times 10^{-19}$ C
Massa de repouso do elétron	$m_e$	$9,11 \times 10^{-31}$ kg
Massa de repouso do próton	$m_p$	$1,67 \times 10^{-27}$ kg
Raio de Bohr	$r_B$	$5,29 \times 10^{-11}$ m
Magnéton de Bohr	$\mu_B$	$9,27 \times 10^{-24}$ J/T
		$5,79 \times 10^{-5}$ eV/T

\*Para uma lista mais completa, que também mostre os melhores valores experimentais, consultar o Apêndice B.

## PREFIXOS SI

FATOR	PREFIXO	SÍMBOLO	FATOR	PREFIXO	SÍMBOLO
$10^{24}$	iota	Y	$10^{-1}$	deci	d
$10^{21}$	zeta	Z	$10^{-2}$	centi	c
$10^{18}$	exa	E	$10^{-3}$	mili	m
$10^{15}$	peta	P	$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^{12}$	tera	T	$10^{-9}$	nano	n
$10^9$	giga	G	$10^{-12}$	pico	p
$10^6$	mega	M	$10^{-15}$	femto	f
$10^3$	quilo	k	$10^{-18}$	ato	a
$10^2$	hecto	h	$10^{-21}$	zepto	z
$10^1$	deca	da	$10^{-24}$	iocto	y

# ALGUMAS PROPRIEDADES FÍSICAS

## Ar (seco, a 20°C e 1 atm)

Densidade	1,21 kg/m <sup>3</sup>
Calor molar específico a pressão constante	1.010 J/kg·K
Razão de calor molar	1,40
Velocidade do som	343 m/s
Tensão de rotura do campo elétrico	3 × 10 <sup>6</sup> V/m
Massa molar eficaz	0,0289 kg/mol

## Água

Densidade	1.000 kg/m <sup>3</sup>
Velocidade do som	1.460 m/s
Calor específico a pressão constante	4.190 J/kg·K
Ponto de fusão (0°C)	333 kJ/kg
Ponto de ebulição (100°C)	2.260 kJ/kg
Índice de refração (λ = 589 nm)	1,33
Massa molar	0,0180 kg/mol

## Terra

Massa	5,98 × 10 <sup>24</sup> kg
Raio médio	6,37 × 10 <sup>6</sup> m
Aceleração normal da gravidade	9,81 m/s <sup>2</sup>
Atmosfera padrão	1,01 × 10 <sup>5</sup> Pa
Período do satélite a 100 km de altitude	86,3 min
Raio da órbita geossíncronica	42.200 km
Velocidade de escape	11,2 km/s
Momento de dipolo magnético	8,0 × 10 <sup>22</sup> A·m <sup>2</sup>
Campo elétrico médio na superfície	150 V/m. baixa

## Distância até a(o):

Lua	3,82 × 10 <sup>8</sup> m
Sol	1,50 × 10 <sup>11</sup> m
Estrela mais próxima	4,04 × 10 <sup>16</sup> m
Centro da galáxia	2,2 × 10 <sup>20</sup> m
Galáxia Andrômeda	2,1 × 10 <sup>22</sup> m
Limite do universo observável	~ 10 <sup>26</sup> m

# ALFABETO GREGO

Alfa	Α	α	Iota	Ι	ι	Rô	Ρ	ρ
Beta	Β	β	Kapa	Κ	κ	Sigma	Σ	σ
Gama	Γ	γ	Lâmbda	Λ	λ	Tau	Τ	τ
Delta	Δ	δ	Mi	Μ	μ	Úpsilon	Υ	υ
Épsilon	Ε	ε	Ni	Ν	ν	Fi	Φ	φ, ϕ
Zeta	Ζ	ζ	Xi	Ξ	ξ	Qui	Χ	χ
Eta	Η	η	Ômicron	Ο	ο	Psi	Ψ	ψ
Teta	Θ	θ	Pi	Π	π	Ômega	Ω	ω



# CONVENÇÕES DE ALGUNS SINAIS

DESCRIÇÃO	CONVENÇÃO												
<b>Efeito Doppler</b> Seção 18-7 (Vol. 2) Seção 42-12 (Vol. 4)	Associamos o <i>aumento de frequência</i> com o sentido <i>para a frente</i> e arbitramos um sinal para isso; consideramos o efeito de cada movimento separadamente.												
<b>Termodinâmica</b> Seção 20-5 (Vol. 2)	<i>Calor</i> : Positivo quando <i>transferido</i> ao sistema. <i>Trabalho</i> : Positivo quando <i>realizado</i> pelo sistema.												
<b>Diferenças de potencial nos elementos de um circuito</b> Seção 29-3 (Vol. 3)	<i>Resistor</i> : Positiva quando atravessado pela corrente elétrica em sentido contrário à diferença de potencial. <i>fem</i> $\mathcal{E}$ : Positiva no sentido do pólo negativo para o positivo da fonte.												
<b>Correntes alternadas</b> Cap. 36 (Vol. 3)	Relações de fase entre a corrente $i$ , <i>fem</i> $\mathcal{E}$ , capacitância $C$ e indutância $L$ . $\mathcal{E}$ gera $i$ em circuitos indutivos; $i$ produz $\mathcal{E}$ em circuitos capacitivos.												
<b>Ótica geométrica</b> Cap. 39 (Vol. 4)	Para espelhos, superfícies únicas e lentes, convencionamos que a <i>imagem real</i> , o lado $R$ (do inglês <i>Right</i> ) e a <i>imagem direita</i> são <i>positivos</i> . Logo, são positivos: <table border="0" style="margin-left: 40px;"> <tr> <td><math>p</math></td> <td>Objeto real</td> <td><math>f</math></td> <td>Foco real (no ponto focal no lado <math>R</math>)</td> </tr> <tr> <td><math>i</math></td> <td>Imagem real (no lado <math>R</math>)</td> <td><math>m</math></td> <td>Amplificação lateral para uma imagem direita</td> </tr> <tr> <td><math>r</math></td> <td>Centro da curvatura no lado <math>R</math></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	$p$	Objeto real	$f$	Foco real (no ponto focal no lado $R$ )	$i$	Imagem real (no lado $R$ )	$m$	Amplificação lateral para uma imagem direita	$r$	Centro da curvatura no lado $R$		
$p$	Objeto real	$f$	Foco real (no ponto focal no lado $R$ )										
$i$	Imagem real (no lado $R$ )	$m$	Amplificação lateral para uma imagem direita										
$r$	Centro da curvatura no lado $R$												

# ALGUNS FATORES DE CONVERSÃO\*

## Massa e Densidade

$$1 \text{ kg} = 1.000 \text{ g} = 6,02 \times 10^{26} \text{ u}$$

$$1 \text{ slug} = 14,6 \text{ kg}$$

$$1 \text{ u} = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$1 \text{ kg/m}^3 = 10^{-3} \text{ g/cm}^3$$

## Comprimento e Volume

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm} = 39,4 \text{ in.} = 3,28 \text{ ft}$$

$$1 \text{ mi} = 1,61 \text{ km} = 5.280 \text{ ft}$$

$$1 \text{ in.} = 2,54 \text{ cm}$$

$$1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m} = 10 \text{ \AA}$$

$$1 \text{ ano-luz} = 9,46 \times 10^{15} \text{ m}$$

$$1 \text{ m}^3 = 1.000 \text{ l} = 35,3 \text{ ft}^3 = 264 \text{ gal}$$

## Tempo

$$1 \text{ d} = 86.400 \text{ s}$$

$$1 \text{ ano} = 365 \frac{1}{4} \text{ d} = 3,16 \times 10^7 \text{ s}$$

## Medida Angular

$$1 \text{ rad} = 57,3^\circ = 0,159 \text{ rev}$$

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ = \frac{1}{2} \text{ rev}$$

## Velocidade

$$1 \text{ m/s} = 3,28 \text{ ft/s} = 2,24 \text{ mi/h}$$

$$1 \text{ km/h} = 0,621 \text{ mi/h} = 0,278 \text{ m/s}$$

## Força e Pressão

$$1 \text{ N} = 10^5 \text{ dinas} = 0,225 \text{ lb}$$

$$1 \text{ lb} = 4,45 \text{ N}$$

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2 = 10 \text{ dinas/cm}^2$$

$$= 1,45 \times 10^{-4} \text{ lb/in.}^2$$

$$1 \text{ atm} = 1,01 \times 10^5 \text{ Pa} = 14,7 \text{ lb/in.}^2$$

$$= 76 \text{ cm Hg}$$

## Trabalho e Potência

$$1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg} = 0,239 \text{ cal} = 0,738 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

$$1 \text{ kW} \cdot \text{h} = 3,6 \times 10^6 \text{ J}$$

$$1 \text{ cal} = 4,19 \text{ J}$$

$$1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ cavalo vapor} = 746 \text{ W} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s}$$

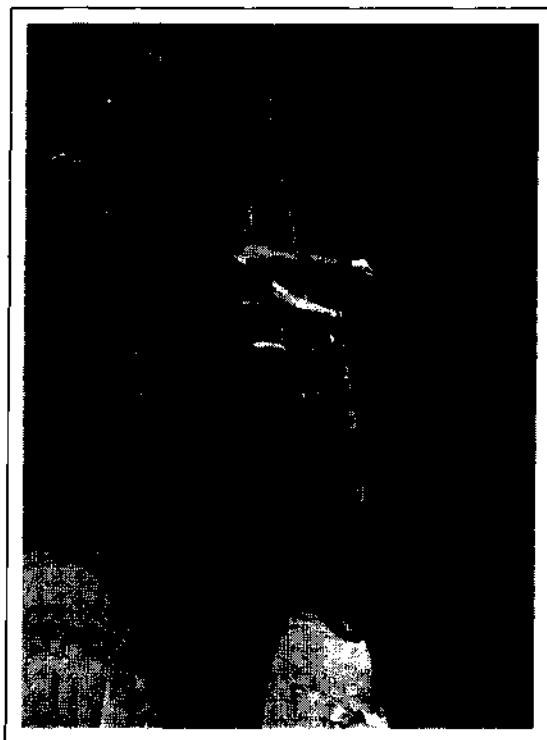
## Eletricidade e Magnetismo

$$1 \text{ T} = 1 \text{ Wb/m}^2 = 10^4 \text{ gauss}$$

\*Ver no Apêndice F uma lista mais completa.

***FUNDAMENTOS  
DE FÍSICA 2***

Gravitação, Ondas e  
Termodinâmica



*O alpinismo pode ser considerado o derradeiro exame de Física. A reprovação pode significar a morte e, mesmo se você acertar "metade da questão", pode acabar com ferimentos graves. Na longa subida de uma chaminé, por exemplo, em que seus ombros são pressionados contra a parede de uma larga fissura vertical, enquanto seus pés são pressionados contra a parede oposta, você precisa descansar de vez em quando, ou irá cair devido à exaustão. Neste caso, o exame consiste numa única questão: Como você pode relaxar a força que faz contra as paredes, a fim de descansar? Se você relaxar sem levar em conta a Física, as paredes não vão segurá-lo. Este exame de questão única, de vida ou morte, é resolvido neste capítulo.*

## 13-1 Equilíbrio

Considere os seguintes objetos: (1) um livro em repouso sobre uma mesa, (2) um disco de hóquei deslizando no gelo, (3) as pás de um ventilador de teto em rotação e (4) a roda de uma bicicleta que se move em linha reta com velocidade constante. Para cada um desses quatro objetos:

1. O momento linear  $\mathbf{P}$  do centro de massa é constante.
2. O momento angular  $\mathbf{L}$ , em torno do centro de massa ou em torno de qualquer outro ponto é também constante.

Diz-se que tais objetos estão em **equilíbrio**. As duas condições para o equilíbrio são, então

$$\mathbf{P} = \text{constante} \quad \text{e} \quad \mathbf{L} = \text{constante} \quad (13-1)$$

Neste capítulo, estudamos situações nas quais as constantes que aparecem na Eq. 13-1 são, de fato, iguais a zero.

Isto é, estamos interessados em objetos que não estão em movimento — seja de translação ou de rotação — em relação ao referencial a partir do qual os observamos. Tais objetos estão em **equilíbrio estático**. Dos quatro objetos mencionados no início desta seção, apenas um — o livro em repouso sobre a mesa — está em equilíbrio estático.

A rocha que aparece na Fig. 13-1 é outro exemplo de um objeto que, pelo menos por enquanto, está em equilíbrio estático. Ela compartilha esta propriedade com inúmeras outras estruturas, tais como catedrais, casas, estantes e carrocinhas de cachorro-quente, que permanecem estacionárias ao longo do tempo.

Conforme discutimos na Seção 8-5 (Vol. I), se um corpo retorna ao estado de equilíbrio estático, após ter sido retirado desse estado pela ação de uma força, dizemos que o corpo está em equilíbrio estático *estável*. Uma bolinha de gude colocada no fundo de um recipiente hemisférico é um exemplo disso. No entanto, se uma pequena força pode deslocar o corpo e romper o equilíbrio, o corpo está em



Fig. 13-1 Uma rocha equilibrada próximo ao Parque Nacional da Floresta Petrificada, no Arizona, EUA. Embora o seu apoio pareça precário, a rocha está em equilíbrio estático.



Fig. 13-2 Um operário da construção civil em New York está em equilíbrio estático instável.

equilíbrio estático *instável*. O operário que aparece na Fig. 13-2 é um exemplo deste caso.

A análise do equilíbrio estático é muito importante na engenharia. O engenheiro projetista precisa isolar e identificar todas as forças externas e torques que atuam sobre uma estrutura e, através da elaboração de um bom projeto e da escolha certa dos materiais, deve assegurar que a estrutura suportará essas cargas. Tais análises são necessárias, por exemplo, para garantir que as pontes não desabem sob o peso do tráfego ou sob a ação do vento, e para assegurar que os trens de aterrissagem dos aviões suportem os impactos durante pousos difíceis.

### 13-2 Condições para o Equilíbrio

O movimento de translação de um corpo é governado pela segunda lei de Newton, em sua forma linear, dada pela Eq. 9-28 (Vol. 1)

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}. \quad (13-2)$$

Se o corpo está em equilíbrio translacional, isto é, se  $\mathbf{P}$  é uma constante, então  $d\mathbf{P}/dt = 0$  e devemos ter

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0 \quad (\text{equilíbrio de forças}). \quad (13-3)$$

O movimento rotacional de um corpo é governado pela segunda lei de Newton, em sua forma angular, dada pela Eq. 12-37 (Vol.1)

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \quad (13-4)$$

Se o corpo está em equilíbrio rotacional, isto é, se  $\mathbf{L}$  é uma constante, então  $d\mathbf{L}/dt = 0$  e devemos ter

$$\sum \tau_{\text{ext}} = 0 \quad (\text{equilíbrio de torques}). \quad (13-5)$$

Assim, as duas condições para que um corpo esteja em equilíbrio são as seguintes:

1. A soma vetorial de todas as forças externas que atuam sobre o corpo deve ser igual a zero.
2. A soma vetorial de todos os torques externos que atuam sobre o corpo, medidos em relação a *qualquer* ponto, deve também ser igual a zero.

É óbvio que essas condições se aplicam tanto ao equilíbrio *estático* quanto ao caso mais geral de equilíbrio em que  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{L}$  são constantes, não nulas.

Se você tem dúvidas de que as estruturas são mantidas em equilíbrio por meio de um balanceamento perfeito das forças e torques externos, observe a Fig. 13-3. O peso do edifício esteve compensado, talvez durante décadas, por

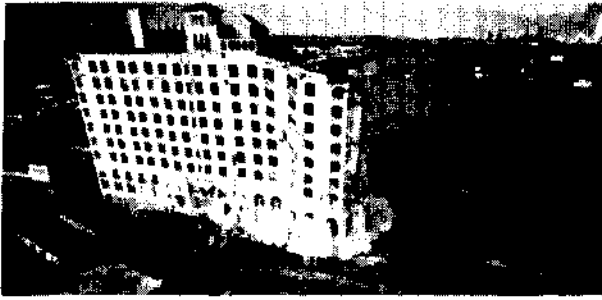


Fig. 13-3 Se as forças que mantêm uma estrutura em equilíbrio são removidas, a estrutura não pode mais permanecer em equilíbrio.

forças de sentido oposto a ele, aplicadas pelas fundações sobre a estrutura. Quando as fundações foram dinamitadas, algumas das forças foram subitamente eliminadas e a primeira condição para o equilíbrio, a Eq. 13-3, deixou de ser válida. No instante em que a fotografia foi tirada, a estrutura estava sendo acelerada para baixo e, certamente, não estava em equilíbrio, nem estático nem de qualquer outro tipo.

As Eqs. 13-3 e 13-5, sendo equações vetoriais, são equivalentes, cada uma, a três equações escalares independentes, uma para cada direção dos eixos coordenados:

Equilíbrio das forças	Equilíbrio dos torques	
$\Sigma F_x = 0$	$\Sigma \tau_x = 0$	
$\Sigma F_y = 0$	$\Sigma \tau_y = 0$	(13-6)
$\Sigma F_z = 0$	$\Sigma \tau_z = 0$	

Por conveniência, não colocamos o subscrito ext.

Simplificamos as coisas considerando apenas situações nas quais as forças que atuam no corpo estão no plano  $xy$ . Isto significa que os únicos torques que podem atuar no corpo tendem a causar rotação em torno de um eixo paralelo ao eixo  $z$ . Com essa hipótese eliminamos uma equação de força e duas equações de torque da Eq. 13-6, deixando apenas

$$\Sigma F_x = 0 \quad (\text{equilíbrio de forças}), \quad (13-7)$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad (\text{equilíbrio de forças}), \quad (13-8)$$

e

$$\Sigma \tau_z = 0 \quad (\text{equilíbrio de torques}), \quad (13-9)$$

Nessas equações,  $F_x$  e  $F_y$  são, respectivamente, as componentes  $x$  e  $y$  das forças externas que atuam sobre o corpo, e  $\tau_z$  representa os torques exercidos por essas forças em torno do eixo  $z$ , ou em torno de qualquer eixo paralelo a este.

Um disco de hóquei deslizando no gelo com velocidade constante satisfaz as Eqs. 13-7, 13-8 e 13-9, estando assim em equilíbrio, *mas não em equilíbrio estático*. Para que haja equilíbrio estático, o momento linear  $\mathbf{P}$  do disco deve ser não apenas constante, mas nula; o disco deve estar em repouso sobre o gelo. Como dizem os matemáticos, as Eqs. 13-7, 13-8 e 13-9 são condições *necessárias* para que haja equilíbrio estático, mas não são *suficientes*.

### 13-3 O Centro de Gravidade

Uma força que atua sobre qualquer corpo que esteja próximo à superfície da Terra é o peso, a força gravitacional. Antes, não hesitamos em descrever essa força por meio de um único vetor  $M\mathbf{g}$  aplicado ao centro de massa do corpo. Entretanto, o peso é uma *força* que atua separadamente sobre cada átomo do corpo. O vetor soma de todas essas forças minúsculas só pode ser substituído por uma única força atuando no centro de massa, quando o vetor aceleração gravitacional  $\mathbf{g}$  tem o mesmo módulo e o mesmo sentido em todos os pontos do espaço ocupado pelo corpo. Vamos provar essa afirmação.

Considere um corpo de forma arbitrária, como na Fig. 13-4. Existe um ponto, denominado **centro de gravidade** do corpo (cg), onde dizemos que atua o vetor-resultante de todas as forças peso exercidas sobre os átomos. Se o corpo for suspenso por esse ponto, ele estará em equilíbrio estático em qualquer orientação e a força de sustentação necessária para isso será igual ao peso do corpo,  $M\mathbf{g}$ . O centro de gravidade pode ou não coincidir com o centro de massa.

Para demonstrar essas características do centro de gravidade e localizá-lo, colocamos a origem  $O$  de um sistema de coordenadas no centro de gravidade e dividimos o corpo em pequenos elementos de massa  $\Delta m$ , um dos quais é mostrado na Fig. 13-4. O peso  $\Delta m\mathbf{g}$  desse elemento atua para baixo. Suponhamos que  $\mathbf{g}$  tenha o mesmo valor (módulo e sentido) em todos os pontos do corpo. Aplicamos uma força para cima  $\mathbf{F}'$  em  $O$  e esperamos demonstrar que essa única força manterá o corpo em equilíbrio (1) se, e somente se, o módulo de  $\mathbf{F}'$  for igual a  $M\mathbf{g}$  e (2) se  $O$ , que

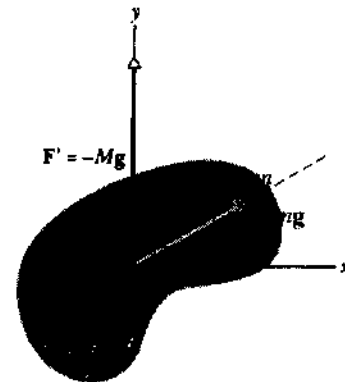


Fig. 13-4 O peso de um corpo, embora distribuído por todo o seu volume, pode ser contrabalançado por uma única força de magnitude  $M\mathbf{g}$  atuando no centro de gravidade do corpo. Se  $\mathbf{g}$  é o mesmo em todo o corpo, o centro de gravidade coincide com o centro de massa do corpo.

#### 4 GRAVITAÇÃO, ONDAS E TERMODINÂMICA

identificamos como sendo o centro de gravidade, for de fato o centro de massa.

Para que o corpo esteja em equilíbrio, as Eqs. 13-3 e 13-5 devem ser satisfeitas. Examinemos, primeiramente, a Eq. 13-3, que trata do equilíbrio das forças. Podemos escrever esta equação como

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} &= \mathbf{F}' + \sum \Delta m \mathbf{g} = \mathbf{F}' + \mathbf{g} \left( \sum \Delta m \right) \\ &= \mathbf{F}' + M\mathbf{g} = 0,\end{aligned}\quad (13-10)$$

na qual o somatório se estende a todos os elementos de massa que compõem o corpo. A Eq. 13-10 mostra que a Eq. 13-3, condição de equilíbrio das forças, será satisfeita se  $\mathbf{F}'$  tiver o mesmo módulo que  $M\mathbf{g}$  e sentido oposto. Provamos, então, o primeiro ponto. Observe que, na Eq. 13-10, só foi possível remover  $\mathbf{g}$  do somatório porque havíamos presumido que esse vetor era o mesmo para todos os pontos do corpo.

Vejam agora a Eq. 13-5, que trata do equilíbrio dos torques. O vetor  $\mathbf{F}'$  na Fig. 13-4, que passa através de  $O$ , não exerce torque em torno do eixo  $z$ . Portanto, a Eq. 13-5 pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\sum \tau_{\text{ext}} &= \sum \mathbf{r} \times (\Delta m \mathbf{g}) \\ &= \left( \sum \Delta m \mathbf{r} \right) \times \mathbf{g} = 0.\end{aligned}\quad (13-11)$$

Nessa equação, o termo  $\sum \Delta m \mathbf{r}$ , que mostra como a massa do corpo está distribuída em torno do ponto  $O$ , é zero se o ponto  $O$  for o centro de massa; veja a Eq. 9-8 (Vol. 1). Assim, a Eq. 13-11 estabelece que a Eq. 13-5, condição de equilíbrio dos torques, será satisfeita se o ponto  $O$  for de fato o centro de massa.\* O segundo ponto está provado.

As Figs. 13-5a e 13-5b sugerem que, se a força  $\mathbf{F}'$ , que é igual a  $-M\mathbf{g}$ , for aplicada a  $S$ , um ponto arbitrário de um corpo, este estará em equilíbrio *somente* se o seu centro de gravidade estiver localizado, verticalmente, abaixo do seu ponto de suspensão. Se isso não acontece,  $\sum \tau_{\text{ext}}$  não é zero (a Eq. 13-11 não é satisfeita) e o corpo roda até que o seu centro de gravidade *esteja* abaixo do ponto de suspensão. (Na realidade, este fato pode ser usado na localização do centro de massa de um corpo, conforme vimos no Exemplo 9-2 Vol.1.) Entretanto, se  $\mathbf{F}'$  for aplicada no centro de gravidade do corpo, como na Fig. 13-5c, o corpo estará em equilíbrio, não importa qual seja a sua orientação. Isto é, você pode girar o corpo como quiser em torno daquele ponto, que ele permanecerá em equilíbrio.

Se  $\mathbf{g}$  não tem o mesmo valor em todos os pontos ocupados pelo corpo, ela não pode ser removida como uma constante do somatório que aparece na Eq. 13-10 e a nossa demonstração falha. Em casos como esse, não há mais garantia de que o centro de gravidade e o centro de massa sejam coincidentes.

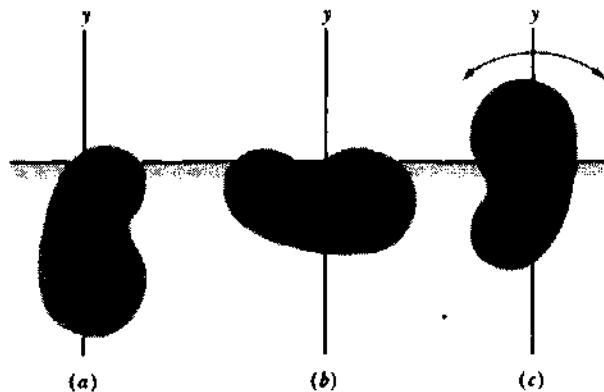


Fig. 13-5 Um corpo suspenso por um ponto arbitrário  $S$ , como em (a) e (b), estará em equilíbrio estável somente se o seu centro de gravidade estiver posicionado, verticalmente, abaixo do seu ponto de suspensão. (c) Se um corpo for suspenso pelo seu centro de gravidade, ele estará em equilíbrio, não importa qual seja a sua orientação.

#### 13-4 Alguns Exemplos de Equilíbrio Estático

Nesta seção examinaremos seis exemplos que envolvem o equilíbrio estático. Em cada um deles, selecionamos um sistema composto de um ou mais objetos e aplicamos a ele as equações do equilíbrio (Eqs. 13-7, 13-8 e 13-9). As forças envolvidas no equilíbrio estão todas no plano  $xy$  o que significa que os torques são todos paralelos ao eixo  $z$ . Deste modo, ao aplicarmos a Eq. 13-9, o equilíbrio dos torques, selecionamos um eixo paralelo ao eixo  $z$ . Embora a Eq. 13-9 deva ser satisfeita para *qualquer* escolha de eixos, veremos que certas escolhas em particular simplificam a aplicação desta equação pela eliminação de um ou mais termos de força desconhecidos.

**EXEMPLO 13-1** Uma trave uniforme de comprimento  $L$  e massa  $m = 1,8$  kg está em repouso com as extremidades apoiadas sobre duas balanças digitais, como vemos na Fig. 13-6a. Um bloco uniforme de massa  $M = 2,7$  kg está apoiado sobre a trave e o seu centro está situado a uma distância  $L/4$  da extremidade esquerda da trave. Qual é a leitura das balanças?

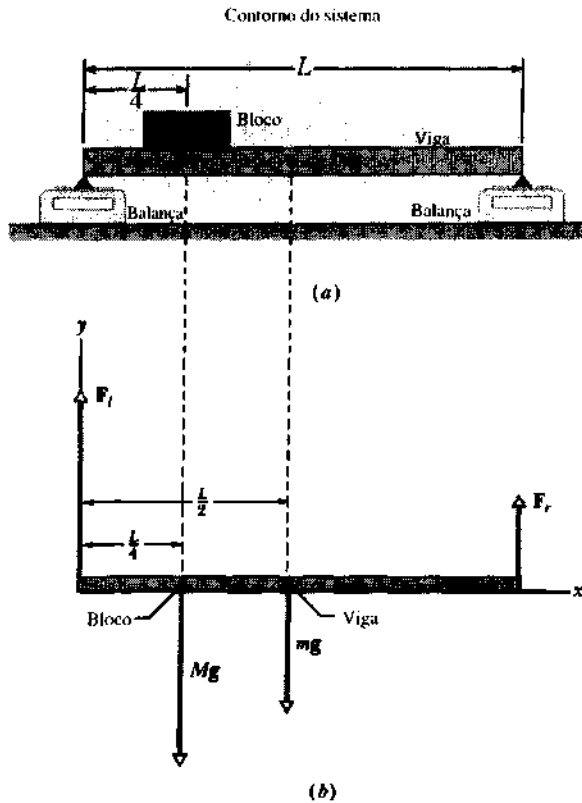
Escolhemos a trave e o bloco juntos como sendo o nosso sistema. A Fig. 13-6b é um diagrama de corpo isolado representando esse sistema, onde aparecem todas as forças que atuam sobre ele. As balanças empurram para cima as extremidades da trave com forças  $\mathbf{F}_e$  e  $\mathbf{F}_d$ . Os módulos dessas duas forças são as leituras que vemos nas balanças. O peso da trave,  $m\mathbf{g}$ , atua para baixo no centro de massa da trave. Do mesmo modo,  $M\mathbf{g}$ , o peso do bloco atua para baixo no seu centro de massa. Na Fig. 13-6b, o bloco é representado por um ponto dentro do contorno da trave, e o vetor  $M\mathbf{g}$  está desenhado com sua origem nesse ponto. (Ao girarmos a Fig. 13-6b a partir da Fig. 13-6a, o vetor  $M\mathbf{g}$  foi deslocado no sentido em que ele aponta, ou seja, ao longo de sua linha de ação. O deslocamento não altera  $M\mathbf{g}$ , nem qualquer torque devido a esta força em torno de qualquer eixo perpendicular à figura.)

Nosso sistema está em equilíbrio estático, de modo que as equações de equilíbrio das forças e dos torques (Eqs. 13-7 e 13-8) se aplicam. Resolveremos este problema de duas maneiras equivalentes.

**PRIMEIRA SOLUÇÃO** As forças não têm componentes  $x$ , de modo que a Eq. 13-7, que é  $\sum F_x = 0$ , não fornece informação alguma. A Eq. 13-8 dá os módulos das componentes  $y$  como

$$\sum F_y = F_e + F_d - M\mathbf{g} - m\mathbf{g} = 0.\quad (13-12)$$

\* No produto vetorial da Eq. 13-11, tivemos o cuidado de não mudar a ordem em que os vetores  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{g}$  aparecem. Entretanto, pudemos mover  $\Delta m$  livremente para a esquerda, porque a massa é uma grandeza escalar.



**Fig. 13-6** Exemplo 13-1. (a) Uma viga de massa  $m$  sustenta um bloco de massa  $M$ . Quais são as leituras nas balanças digitais que sustentam as extremidades da viga? O contorno do sistema está assinalado. (b) Diagrama das forças que atuam sobre o sistema viga + bloco.

Temos duas forças desconhecidas ( $F_c$  e  $F_d$ ) mas não podemos encontrá-las separadamente porque temos apenas uma equação. Felizmente, existe outra equação disponível, isto é, a Eq. 13-9, a equação de equilíbrio dos torques.

Podemos aplicar a Eq. 13-9 a *qualquer* eixo perpendicular ao plano da Fig. 13-6. Escolhamos, então, um eixo que passe através da extremidade esquerda da trave. Consideramos como positivos os torques que — atuando isoladamente — produziram na trave uma rotação, em torno do eixo que escolhemos, de sentido oposto ao do movimento dos ponteiros do relógio. Temos, então, a partir da Eq. 13-9,

$$\begin{aligned}\sum \tau_z &= (F_c)(0) + (F_d)(L) - (mg)(L/2) - (Mg)(L/4) \\ &= 0, \\ \text{ou} \\ F_d &= (g/4)(2m + M) \\ &= (1/4)(9,8 \text{ m/s}^2)(2 \times 1,8 \text{ kg} + 2,7 \text{ kg}) \\ &= 15 \text{ N.} \quad (\text{Resposta}) \quad (13-13)\end{aligned}$$

Observe como a escolha de um eixo que passa através do ponto de aplicação de uma das forças desconhecidas,  $F_c$ , elimina aquela força da Eq. 13-9 e nos permite resolver a equação diretamente, determinando a outra força.

Se resolvermos a Eq. 13-12 para encontrar  $F_c$  e substituirmos os valores conhecidos, encontraremos

$$\begin{aligned}F_c &= (M + m)g - F_d \\ &= (2,7 \text{ kg} + 1,8 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2) - 15 \text{ N} \\ &= 29 \text{ N.} \quad (\text{Resposta})\end{aligned}$$

**SEGUNDA SOLUÇÃO** Só para conferir, vamos resolver esse problema de um modo diferente, aplicando a equação de equilíbrio dos torques em torno de dois eixos diferentes. Escolhendo, primeiramente, um eixo que passe através da extremidade esquerda da trave, como fizemos acima, chegamos à Eq. 13-13 e a solução  $F_d = 15 \text{ N}$ .

Para um eixo passando pela extremidade direita da trave, a Eq. 13-9 fornece

$$\begin{aligned}\sum \tau_z &= (F_d)(0) - (F_c)(L) + (mg)(L/2) \\ &\quad + (Mg)(3L/4) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Resolvendo para  $F_c$ , encontramos

$$\begin{aligned}F_c &= (g/4)(2m + 3M) \\ &= (1/4)(9,8 \text{ m/s}^2)(2 \times 1,8 \text{ kg} + 3 \times 2,7 \text{ kg}) \\ &= 29 \text{ N,} \quad (\text{Resposta})\end{aligned}$$

em concordância, portanto, com o nosso resultado anterior. Observe que o comprimento da trave não entra explicitamente nesse problema, sendo relevante apenas no modo como ele influi na massa da trave.

**EXEMPLO 13-2** Um jogador de boliche segura uma bola de massa  $M$  igual a 7,2 kg, na palma da mão. Conforme mostra a Fig. 13-7a, seu braço está na vertical e seu antebraço, na horizontal. Que forças devem ser aplicadas pelo bíceps e pela estrutura óssea do braço sobre o conjunto formado pelo antebraço e a mão (que chamaremos de braço inferior)? O braço inferior possui massa  $m$  igual a 1,8 kg e as medidas relevantes são mostradas na Fig. 13-7a.

**Solução** Nosso sistema é constituído pelo braço inferior (antebraço e mão) e pela bola de boliche. A Fig. 13-7b mostra um diagrama de forças para o sistema. (A bola é representada por um ponto dentro do contorno do braço inferior; o vetor peso da bola,  $Mg$ , tem sua origem nesse ponto. Ao desenharmos a Fig. 13-7b a partir da 13-7a, o vetor  $Mg$  foi deslocado ao longo da sua linha de ação; o deslocamento não altera  $Mg$  nem qualquer torque devido a essa força em torno de qualquer eixo perpendicular à figura.) As forças desconhecidas são  $T$ , que é a força exercida pelo bíceps, e  $F$ , a força exercida pelo braço sobre o antebraço. As forças são todas verticais.

Da Eq. 13-8, que é  $\sum F_y = 0$ , encontramos, considerando apenas os módulos,

$$\sum F_y = T - F - mg - Mg = 0. \quad (13-14)$$

Aplicando a Eq. 13-9 em torno de um eixo que passa por  $O$  no cotovelo, e dando sinal positivo aos torques que poderiam causar rotações em sentido oposto ao do movimento dos ponteiros do relógio, obtemos

$$\begin{aligned}\sum \tau_z &= (T)(d) + (F)(0) - (mg)(D) - (Mg)(L) \\ &= 0, \quad (13-15)\end{aligned}$$

Ao escolhermos nosso eixo passando através do ponto  $O$ , eliminamos a variável  $F$  da Eq. 13-15. Resolvendo-a para obter  $T$ , encontramos

$$\begin{aligned}T &= g \frac{mD + ML}{d} \\ &= (9,8 \text{ m/s}^2) \frac{(1,8 \text{ kg})(15 \text{ cm}) + (7,2 \text{ kg})(33 \text{ cm})}{4,0 \text{ cm}} \\ &= 648 \text{ N} \approx 650 \text{ N.} \quad (\text{Resposta})\end{aligned}$$

Assim, o bíceps precisa puxar o antebraço para cima com uma força que é cerca de nove vezes maior do que o peso da bola de boliche.

6 GRAVITAÇÃO, ONDAS E TERMODINÂMICA

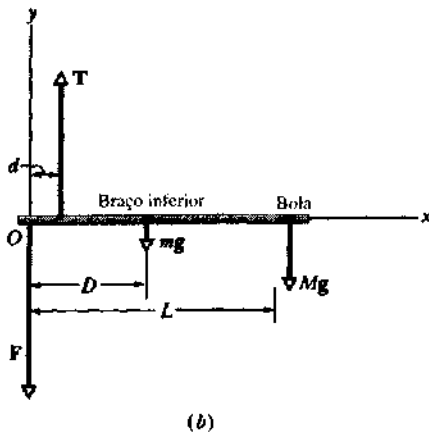
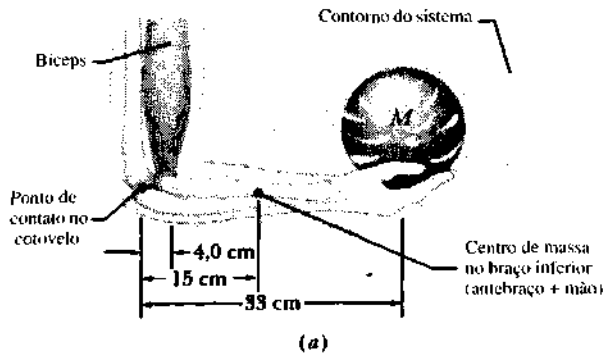


Fig. 13-7 Exemplo 13-2. (a) A mão segura uma bola de boliche. O contorno do sistema está assinalado. (b) Diagrama das forças que atuam sobre o sistema antebraço + mão + bola. Os vetores não estão em escala; as forças poderosas exercidas pelo bíceps e pela junta do cotovelo são muito maiores do que qualquer um dos pesos mostrados.

Se resolvermos a Eq. 13-14 para obtermos o valor de  $F$  e substituirmos nela os valores das grandezas conhecidas, encontraremos

$$\begin{aligned} F &= T - g(M + m) \\ &= 648 \text{ N} - (9,8 \text{ m/s}^2)(7,2 \text{ kg} + 1,8 \text{ kg}) \\ &= 560 \text{ N}, \end{aligned} \quad \text{(Resposta)}$$

que é cerca de oito vezes o peso da bola de boliche.

**EXEMPLO 13-3** Uma escada de pintor de comprimento  $L$  igual a 12 metros e massa  $m$  igual a 45 kg está encostada a uma parede. Sua extremidade superior está situada a uma distância  $h$  igual a 9,3 metros acima do solo, como mostra a Fig. 13-8a. O centro de massa da escada está localizado a  $1/3$  do seu comprimento, a partir da extremidade inferior. Um bombeiro, cuja massa  $M$  é de 72 kg, sobe a escada até que o seu centro de massa esteja a meio caminho do topo. Suponha que não haja atrito com a parede, mas que exista atrito com o chão. Quais as forças que são exercidas sobre a escada pela parede e pelo chão?

**Solução** A Fig. 13-8b mostra o diagrama de forças do sistema bombeiro + escada. (O bombeiro é representado por um ponto dentro do contorno da escada; o seu vetor peso  $Mg$  tem origem nesse ponto. Ao desenharmos a Fig. 13-8b a partir da 13-8a, o vetor  $Mg$  foi deslocado ao longo da sua linha de ação; o deslocamento não altera  $Mg$  nem qualquer torque devido a este vetor em torno de qualquer eixo perpendicular ao plano da figura.) A parede exerce uma força horizontal  $F_p$  sobre a escada; ela não pode exercer nenhuma força vertical porque, conforme estabelecemos de início, não existe atrito entre a parede e a escada. O chão exerce uma força  $F_c$  sobre a escada, com uma componente horizontal

$F_c$ , (devido ao atrito) e uma componente vertical  $F_{cy}$  (a força normal). Escolhemos os eixos coordenados, como mostra a figura, com a origem  $O$  coincidindo com o ponto onde a escada toca o chão. A distância  $a$ , entre a parede e o pé da escada, pode ser facilmente obtida a partir de

$$a = \sqrt{L^2 - h^2} = \sqrt{(12 \text{ m})^2 - (9,3 \text{ m})^2} = 7,58 \text{ m}.$$

Aplicando as Eqs. 13-7 e 13-8, as equações de equilíbrio de forças, obtemos, respectivamente,

$$\sum F_x = F_p - F_{cx} = 0 \quad (13-16)$$

e

$$\sum F_y = F_{cy} - Mg - mg = 0. \quad (13-17)$$

A Eq. 13-17 fornece

$$\begin{aligned} F_{cy} &\approx g(M + m) = (9,8 \text{ m/s}^2)(72 \text{ kg} + 45 \text{ kg}) \\ &= 1146,6 \text{ N} \approx 1.100 \text{ N}. \end{aligned} \quad \text{(Resposta)}$$

Em seguida, equilibramos os torques que atuam sobre o sistema, escolhendo um eixo através de  $O$ , perpendicular ao plano da figura. Os braços de alavanca em torno de  $O$  para  $F_p$ ,  $Mg$ ,  $mg$  e  $F_c$  são, respectivamente,  $h$ ,  $a/2$ ,  $a/3$  e zero. Observe que o fato de braço alavanca de  $F_c$  ser igual a zero significa que esta força não produz torque em torno de  $O$ . Da Eq. 13-9, a equação de equilíbrio de torques, temos

$$\begin{aligned} \sum \tau_z &= -(F_p)(h) + (Mg)(a/2) + (mg)(a/3) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (13-18)$$

Observe que a escolha que fizemos para a localização do eixo eliminou duas variáveis,  $F_{cy}$  e  $F_{cx}$ , da equação de equilíbrio dos torques. Resolvendo a Eq. 13-18 para  $F_p$ , encontramos

$$\begin{aligned} F_p &= \frac{ga(M/2 + m/3)}{h} \\ &= \frac{(9,8 \text{ m/s}^2)(7,58 \text{ m})(72/2 \text{ kg} + 45/3 \text{ kg})}{9,3 \text{ m}} \\ &= 407 \text{ N} \approx 410 \text{ N}. \end{aligned} \quad \text{(Resposta)}$$

Da Eq. 13-16, temos então

$$F_{cx} \approx F_p = 410 \text{ N}. \quad \text{(Resposta)}$$

**EXEMPLO 13-4** No Exemplo 13-3, o coeficiente de atrito estático  $\mu$ , entre a escada e o chão é igual a 0,53. Até que altura pode o bombeiro subir sem que ela comece a deslizar?

**Solução** As forças que atuam no sistema têm os mesmos subscritos usados na Fig. 13-8. Seja  $q$  a fração do comprimento da escada que o bombeiro sobe, antes que ocorra o deslizamento (ela estará, então, a uma distância horizontal  $qa$  do ponto  $O$ ). No instante em que a escada começa a escorregar, temos

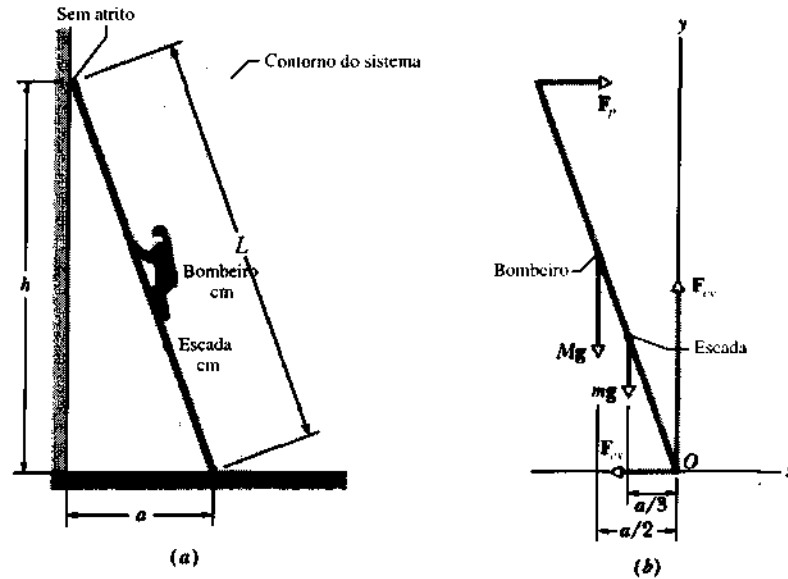
$$F_{cx} = \mu_s F_{cy}, \quad (13-19)$$

onde  $F_{cx}$  é a força de atrito estático (geralmente escrita como  $f_s$ ) e  $F_{cy}$  é a força normal (geralmente escrita como  $N$ ).

Se aplicarmos a Eq. 13-9, a equação do equilíbrio dos torques, em torno de um eixo que passa por  $O$ , no instante em que se inicia o deslizamento, teremos

$$\sum \tau_z = -(F_p)(h) + (mg)(a/3) + (Mg)(qa) = 0,$$





**Fig. 13-8** Exemplos 13-3 e 13-4. (a) Um bombeiro sobe até a metade de uma escada que está encostada numa parede sem atrito. O chão tem atrito. (b) Um diagrama mostra (em escala) as forças que atuam sobre o sistema.

ou

$$F_p = \frac{ga}{h} \left( \frac{1}{2}m + Mq \right). \quad (13-20)$$

Esta equação nos mostra que, à medida que o bombeiro sobe a escada, isto é, à medida que  $q$  aumenta, a força  $F_p$ , exercida pela parede, precisa aumentar para que o equilíbrio seja mantido. Para determinar o valor de  $q$  no momento em que o deslizamento se inicia precisamos, primeiramente, determinar  $F_p$ .

A Eq. 13-7, a equação do equilíbrio das forças na direção  $x$ , fornece

$$\sum F_x = F_p - F_{cx} = 0.$$

Se combinarmos esta equação com a Eq. 13-19 encontraremos que, no instante do deslizamento,

$$F_p = F_{cx} = \mu F_{cy}. \quad (13-21)$$

Da Eq. 13-8, a equação do equilíbrio das forças na direção  $y$ , temos

$$\sum F_y = F_{cy} - Mg - mg,$$

ou

$$F_{cy} = (M + m)g. \quad (13-22)$$

Combinando, agora, as Eqs. 13-21 e 13-22, encontramos

$$F_p = \mu g(M + m). \quad (13-23)$$

Se, finalmente, combinarmos as Eqs. 13-20 e 13-23 e resolvermos para encontrar  $q$ , teremos

$$\begin{aligned} q &= \frac{\mu h}{a} \frac{(M + m)}{M} - \frac{m}{3M} \\ &= \frac{(0,53)(9,3 \text{ m})}{7,6 \text{ m}} \frac{(72 \text{ kg} + 45 \text{ kg})}{72 \text{ kg}} - \frac{45 \text{ kg}}{(3)(72 \text{ kg})} \end{aligned}$$

$$= 0,85.$$

(Resposta) (13-24)

O bombeiro pode subir 85% do comprimento da escada antes que ela comece a deslizar.

Você pode mostrar, usando a Eq. 13-24, que o bombeiro pode subir até o topo da escada (que corresponde a  $q = 1$ ), sem deslizar, se  $\mu$ , for maior que 0,61. Por outro lado, a escada deslizará assim que um peso qualquer for colocado no primeiro degrau (que corresponde a  $q \approx 0$ ) se  $\mu$  for menor que 0,11.

**EXEMPLO 13-5** A Fig. 13-9a mostra um cofre, de massa  $M$  igual a 430 kg, suspenso por uma corda presa a uma haste cujas dimensões  $a$  e  $b$  são, respectivamente, 1,9 m e 2,5 m. A haste é uniforme e tem massa  $m$  igual a 85 kg; a massa do cabo horizontal é desprezível.

a. Determine o valor da tensão  $T$  que atua no cabo.

**Solução** A Fig. 13-9b é o diagrama de forças sobre a haste, que é o nosso sistema. As forças que atuam sobre ele são a tensão  $T$  exercida pelo cabo, o peso do cofre,  $Mg$ , o peso da própria haste,  $mg$ , e as componentes  $F_h$  e  $F_v$  da força exercida sobre a haste pela dobradiça que a prende à parede.

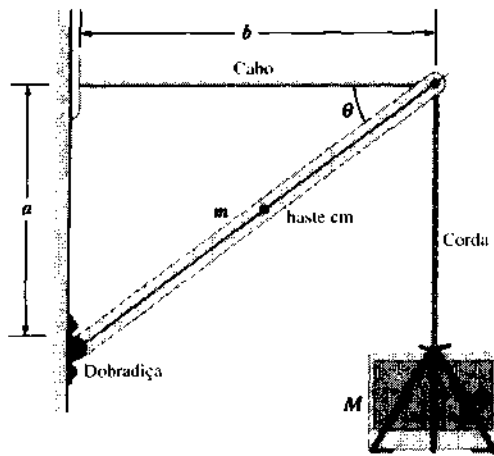
Vamos aplicar a Eq. 13-9, a equação do equilíbrio dos torques, a um eixo passando através da dobradiça e perpendicular ao plano da figura. Considerando como positivos os torques que produziram rotações em sentido contrário ao do movimento dos ponteiros do relógio, temos

$$\sum \tau_z = (T)(a) - (Mg)(b) - (mg)\left(\frac{1}{2}b\right) = 0.$$

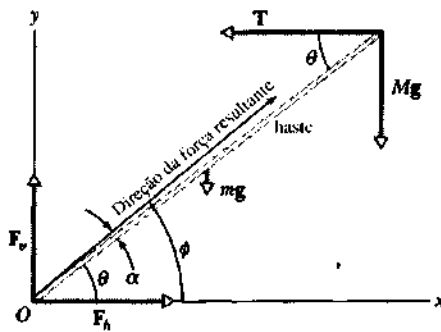
Devido à nossa escolha de um eixo apropriado, eliminamos dessa equação as forças desconhecidas  $F_h$  e  $F_v$  (já que elas não produzem torque em torno do eixo escolhido), deixando apenas a força desconhecida  $T$ . Resolvendo a equação para  $T$ , obtemos

$$\begin{aligned} T &= \frac{gb(M + \frac{1}{2}m)}{a} \\ &= \frac{(9,8 \text{ m/s}^2)(2,5 \text{ m})(430 \text{ kg} + 85/2 \text{ kg})}{1,9 \text{ m}} \\ &= 6.090 \text{ N} \approx 6.100 \text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

b. Encontre as forças  $F_h$  e  $F_v$  exercidas pela dobradiça sobre a haste.



(a)



(b)

**Fig. 13-9** Exemplo 13-5. (a) Um cofre pesado está suspenso por uma corda em uma haste presa à parede por um cabo de aço horizontal e que pode girar em torno do ponto *O*. (b) Diagrama de forças para a haste. Observe que a força resultante devida a  $F_v$  e  $F_h$  que atua sobre a haste não está alinhada com o eixo da haste.

**Solução** Apliquemos agora as equações de equilíbrio das forças. Usando a Eq. 13-7, temos

$$\sum F_x = F_h - T = 0,$$

e, assim,

$$F_h = T = 6090 \text{ N} \approx 6.100 \text{ N.} \quad (\text{Resposta})$$

Da Eq. 13-8, temos

$$\sum F_y = F_v - mg - Mg = 0,$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} F_v &= g(m + M) = (9,8 \text{ m/s}^2)(85 \text{ kg} + 430 \text{ kg}) \\ &= 5.047 \text{ N} \approx 5.000 \text{ N.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

c. Qual é o módulo  $F$  da força exercida pela dobradiça sobre a haste?

**Solução** Examinando a figura, vemos que

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_h^2 + F_v^2} \\ &= \sqrt{(6.090 \text{ N})^2 + (5.047 \text{ N})^2} \approx 7.900 \text{ N.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Observe que  $F$  é consideravelmente maior que a soma dos pesos do cofre e da haste, 5.000 N, e que a tensão aplicada no cabo horizontal, 6.100 N.

d. Qual é o ângulo  $\alpha$  entre a direção da força  $F$  exercida pela dobradiça sobre a haste e a linha central da haste?

**Solução** Observando a figura, vemos que

$$\theta = \tan^{-1} \frac{a}{b} = \tan^{-1} \frac{1,9 \text{ m}}{2,5 \text{ m}} = 37,2^\circ,$$

e

$$\phi = \tan^{-1} \frac{F_v}{F_h} = \tan^{-1} \frac{5.047 \text{ N}}{6.090 \text{ N}} = 39,6^\circ.$$

E, portanto,

$$\alpha = \phi - \theta = 39,6^\circ - 37,2^\circ = 2,4^\circ. \quad (\text{Resposta})$$

Se o peso da haste fosse suficientemente pequeno para ser desprezado, você encontraria  $\alpha = 0$ ; isto é, a força da dobradiça apontaria na mesma direção do eixo da haste.

**EXEMPLO 13-6** Na Fig. 13-10, uma alpinista com massa  $m$  igual a 55 kg descansa durante a subida de uma "chaminé", numa fissura de largura  $l = 1,0$  m. Seu centro de massa está situado a uma distância horizontal  $d = 0,20$  m da parede na qual suas costas se apoiam. O coeficiente de atrito estático entre os seus sapatos e a parede é  $\mu_1 = 1,1$  e entre suas costas e a parede é  $\mu_2 = 0,70$ .

a. Qual é a força horizontal mínima que ela precisa exercer sobre as paredes para não cair?

**Solução** A força horizontal que ela exerce sobre as paredes é a mesma tanto nas suas costas quanto nos seus pés. O módulo dessa força deve ser igual ao da força normal  $N$  exercida sobre ela pela parede naqueles dois pontos. Assim, não há força horizontal resultante atuando sobre ela e a Eq. 13-7,  $\sum F_x = 0$  é satisfeita.

Como o peso,  $mg$ , da alpinista atua de modo a fazê-la escorregar paredes abaixo, as forças de atrito estático  $f_1$  e  $f_2$  automaticamente atuam para cima, nos pés e ombros, respectivamente, para contrabalançar a tendência ao deslizamento. Portanto, a Eq. 13-8,  $\sum F_y = 0$ , é satisfeita e temos

$$f_1 + f_2 = mg \quad (13-25)$$

Vamos supor que ela, inicialmente, exerça grande pressão contra as paredes e, depois, diminua. À medida que o seu esforço diminui, o módulo  $N$  da força normal decresce, e o mesmo ocorre com os produtos  $\mu_1 N$  e  $\mu_2 N$  que limitam o atrito estático nos seus pés e costas, respectivamente (veja Eq. 6-1, Vol. 1.)

Suponha que  $N$  diminua até que o limite  $\mu_1 N$  seja igual ao módulo  $f_1$  da força de atrito nos pés da alpinista, e o limite  $\mu_2 N$  seja igual ao módulo  $f_2$  da força de atrito nas suas costas. Ela estará, então, na iminência de escorregar em ambos os pontos. Se ela relaxasse a sua força ainda mais, o decréscimo resultante nos limites  $\mu_1 N$  e  $\mu_2 N$  faria  $f_1 + f_2$  menor que  $mg$  e ela cairia. Assim, para a situação em que o deslizamento é iminente, a Eq. 13-25 assume a forma

$$\mu_1 N + \mu_2 N = mg, \quad (13-26)$$

que resulta em

$$N = \frac{mg}{\mu_1 + \mu_2} = \frac{(55 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)}{1,1 + 0,70} = 299 \text{ N} \approx 300 \text{ N.}$$

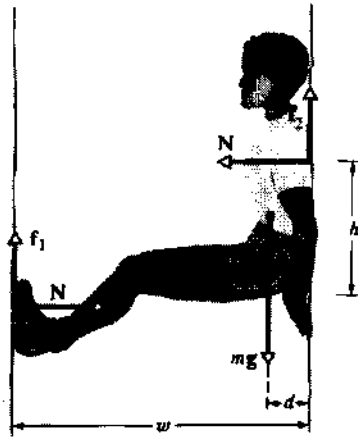


Fig. 13-10 Exemplo 13-6. As forças que atuam sobre uma alpinista em repouso numa chaminé de rocha. A força exercida pela alpinista sobre as paredes da chaminé dá origem às forças normais  $N$  (que são iguais em módulo) e às forças de atrito  $f_1$  e  $f_2$ .

Assim, a sua força horizontal mínima deve ser de aproximadamente 300 N.

b. Considerando-se essa força, qual deve ser a distância vertical  $h$  entre os pés e os ombros para que a alpinista fique estável?

**Solução** Para satisfazer a Eq. 13-9,  $\Sigma \tau = 0$ , as forças que atuam sobre a alpinista não devem criar torque resultante em torno de *qualquer* eixo de rotação. Consideremos um eixo de rotação perpendicular ao plano da página, passando por seus ombros. O torque resultante em torno desse eixo é dado por

$$\Sigma \tau = -f_1 w + Nh + mgd = 0 \quad (13-27)$$

Resolvendo esta equação para obter  $h$ , fazendo  $f_1 = \mu_1 N$ , e substituindo  $N = 299$  N e outros valores conhecidos, encontramos

$$\begin{aligned} h &= \frac{f_1 w - mgd}{N} = \frac{\mu_1 N w - mgd}{N} = \mu_1 w - \frac{mgd}{N} \\ &= (1,1)(1,0 \text{ m}) - \frac{(55 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)(0,20 \text{ m})}{299 \text{ N}} \\ &= 0,739 \text{ m} \approx 0,74 \text{ m}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Encontraríamos o mesmo valor para  $h$  se escolhêssemos qualquer outro eixo de rotação perpendicular à página como, por exemplo, um eixo passando pelos seus pés.

c. Quais são as magnitudes das forças de atrito que sustentam a alpinista?

**Solução** Para  $N = 299$  N temos

$$\begin{aligned} f_1 &= \mu_1 N = (1,1)(299 \text{ N}) \\ &= 328,9 \text{ N} \approx 330 \text{ N}, \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

e da Eq. 13-25 temos então

$$\begin{aligned} f_2 &= mg - f_1 = (55 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2) - 328,9 \text{ N} \\ &= 210,1 \text{ N} \approx 210 \text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

d. Ela continua estável exercendo a mesma força (299 N) sobre a rocha, quando seus pés estão mais altos, com  $h = 0,37$  m?

**Solução** Novamente,  $N = 299$  N e o torque total sobre a alpinista, em torno de qualquer eixo de rotação, deve ser nulo. Para o eixo que passa pelas seus ombros obtemos  $f_1$  a partir da Eq. 13-27:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{Nh + mgd}{w} \\ &= \frac{(299 \text{ N})(0,37 \text{ m}) + (55 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)(0,20 \text{ m})}{1,0 \text{ m}} \\ &= 218 \text{ N}. \end{aligned}$$

Esse valor é maior que o limite  $\mu_1 N (= 329 \text{ N})$  e, portanto, é possível ser alcançado.

Em seguida, usamos a Eq. 13-25 para encontrar o valor de  $f_2$  tal que  $\Sigma F_y = 0$ :

$$f_2 = mg - f_1 = (55 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2) - 218 \text{ N} = 321 \text{ N}.$$

Esse valor é menor que o limite  $\mu_2 N (= 209 \text{ N})$  e, portanto, impossível de ser alcançado com uma força de 299 N. O único modo da alpinista evitar o deslizamento, quando  $h = 0,37$  m (ou qualquer valor de  $h$  menor que 0,74 m), é empurrando com força superior a 299 N, de modo a aumentar o limite  $\mu_2 N$ .

De modo semelhante, se  $h > 0,74$  m, ela precisa exercer uma força maior que 299 N sobre a rocha para permanecer estável. Eis aqui, portanto, a vantagem de saber Física antes de escalar uma chaminé. Quando você precisar descansar, deverá evitar o (terrível) erro dos alpinistas novatos, que colocam os pés altos ou baixos demais. Você saberá que existe uma "ótima" distância entre os ombros e os pés, necessitando da aplicação de uma força menor, dando-lhe melhores condições para descansar.

## RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

### TÁTICA 1: PROBLEMAS DE EQUILÍBRIO ESTÁTICO

Ao resolvermos os Exemplos 13-1 a 13-6, seguimos os seguintes procedimentos:

1. Fazer um desenho *esquemático* do problema.
2. Selecionar o *sistema* ao qual irá aplicar as leis do equilíbrio, desenhando uma curva fechada em torno dele no seu esquema, para que ele se fixe em sua mente de forma clara. Em algumas situações você pode selecionar um único objeto para ser o seu sistema; é o objeto escolhido para estar em equilíbrio (como a alpinista no Exemplo 13-6). Em outras situações, pode incluir outros objetos no sistema, se a inclusão deles simplificar os cálculos. Por exemplo, suponha que nos Exemplos 13-3 e 13-4 você selecione apenas a escada como sendo o sistema. Desse modo, na Fig. 13-8b, teria de levar em conta forças desconhecidas adicionais, exercidas pelas mãos e pelos pés do bombeiro sobre a escada. Essas forças desconhecidas adicionais complicam os cálculos do equilíbrio. O sistema da Fig. 13-8 foi escolhido de modo a incluir o bombeiro, para que aquelas forças desconhecidas fossem *internas* ao sistema e assim não fossem necessárias nas soluções dos Exemplos 13-3 e 13-4.
3. Desenhar o *diagrama de forças* do sistema. Mostre todas as forças que atuam no sistema, rotulando-as claramente e certificando-se de que seus pontos de aplicação e linhas de ação estejam corretamente indicados.
4. Desenhar os *eixos x e y* de um sistema de coordenadas. Escolha-os de forma que pelo menos um eixo seja paralelo a uma ou mais das forças desconhecidas. Separe as componentes das forças que não atuam ao longo de um dos eixos. Em todos os nossos exemplos fez sentido escolher o eixo  $x$  horizontal e o eixo  $y$  vertical.
5. Escrever as duas *equações de equilíbrio de forças*, sempre usando símbolos.

6. Escolher um ou mais eixos perpendiculares ao plano da figura e escrever a equação de equilíbrio dos torques para cada eixo. Se escolher um eixo que passe através da linha de ação de uma força desconhecida, a equação será simplificada porque aquela força em particular não aparecerá na equação.
7. Resolver algebricamente as equações que escreveu para obter as incógnitas. Alguns estudantes se sentem mais confiantes substituindo, neste estágio, os números com suas unidades nas equações independentes, principalmente se a álgebra for particularmente complicada. Entretanto, com a experiência, verá que é preferível proceder algebricamente; veja a Tática 6 do Cap. 4 (Vol. 1).
8. Finalmente, substituir os números com suas unidades nas suas soluções algébricas, obtendo valores numéricos para as incógnitas.

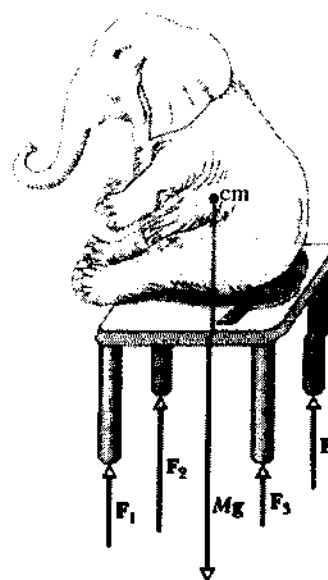


Fig. 13-11 A mesa é uma estrutura indeterminada. As quatro forças que atuam sobre as pernas da mesa têm módulos diferentes e não podem ser determinadas usando-se apenas as leis do equilíbrio estático.

### 13-5 Estruturas Indeterminadas

Para os problemas deste capítulo, temos à nossa disposição apenas três equações independentes, duas equações de equilíbrio de forças e uma equação de equilíbrio de torques em torno de um dado eixo. Deste modo, se um problema tiver mais do que três incógnitas, não podemos resolvê-lo.

É fácil encontrar problemas desse tipo. Nos Exemplos 13-3 e 13-4, poderíamos, por exemplo, ter suposto que existisse atrito entre a parede e a escada. Neste caso, haveria uma força de atrito vertical atuando no ponto em que a escada toca a parede, totalizando quatro forças desconhecidas. Com apenas três equações não teríamos podido resolver esse problema.

Pense agora num carro que transporta uma carga distribuída de forma assimétrica. Quais são as forças — todas diferentes — que atuam sobre os quatro pneus? Mais uma vez, não podemos determiná-las porque temos somente três equações independentes. De modo semelhante, podemos resolver um problema de equilíbrio para uma mesa com três pernas, mas não para uma com quatro. Problemas como estes, em que há mais incógnitas do que equações, são denominados **indeterminados**.

Ainda assim, no mundo real existem soluções para os problemas indeterminados. Se você apoiar os pneus do carro em quatro balanças, cada uma delas registrará uma leitura bem definida e a soma das leituras será igual ao peso do carro. O que nos impede de encontrar as leituras individuais das balanças?

O problema é que imaginamos — sem fazer grande alarde disso — que os corpos aos quais aplicamos as equações de equilíbrio estático são perfeitamente rígidos. Isto significa que não se deformam quando forças são aplicadas sobre eles. Estritamente falando, tais corpos não existem. Os pneus de um carro, por exemplo, deformam-se facilmente sob o peso da carga até que o carro chega a uma posição de equilíbrio estático.

Todos nós já nos deparamos com uma mesa de restaurante que balança, problema que geralmente é resolvido colocando-se um pedaço de papel dobrado sob uma das pernas da mesa. Entretanto, se um elefante se sentasse sobre aquela mesa, você pode estar certo de que, se a mesa não se quebrasse, se deformaria tal como os pneus de um carro. Todas

as suas pernas tocariam o chão. As forças que atuam para cima sobre as pernas da mesa assumiriam valores bem definidos, como na Fig. 13-11, e a mesa não mais balançaria. Mas como encontrar os valores das forças que atuam para cima sobre as pernas da mesa?

Para resolver tais problemas de equilíbrio indeterminados, precisamos adicionar às equações de equilíbrio alguns conhecimentos de *elasticidade*, o ramo da Física e da Engenharia que descreve o modo como os corpos reais se deformam, quando forças são aplicadas sobre eles. A próxima seção faz uma introdução ao assunto.

### 13-6 Elasticidade

Quando um grande número de átomos se junta formando um sólido, como um prego de ferro por exemplo, eles ocupam posições de equilíbrio numa rede tridimensional, que é um arranjo repetitivo em que cada átomo está a uma distância bem definida de seus vizinhos mais próximos. Os átomos são mantidos juntos por intermédio de forças interatômicas que estão representadas por molas na Fig. 13-12.\* A rede é extraordinariamente rígida ou, em outras palavras, as “molas interatômicas” são extremamente duras. É por esta razão que muitos objetos comuns, tais como escadas, mesas e colheres, nos parecem perfeitamente rígidos. É claro que alguns outros objetos comuns como mangueiras de jardim e luvas de borracha não nos parecem de

\* Objetos metálicos comuns, como pregos de ferro, são compostos de grãos de ferro, sendo que cada grão constitui-se de uma rede mais ou menos perfeita, como a da Fig. 13-12. As forças que atuam entre os grãos são muito mais fracas do que aquelas que mantêm a rede coesa, de modo que as rupturas ocorrem, geralmente, ao longo dos contornos dos grãos.

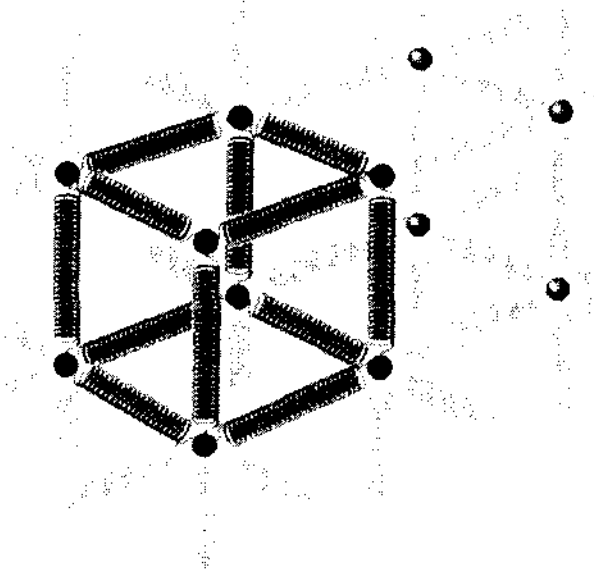


Fig. 13-12 Os átomos de um sólido metálico se distribuem numa rede tridimensional repetitiva. As molas representam forças interatômicas.

forma alguma rígidos. Os átomos que compõem esses objetos *não* formam uma rede firme como a da Fig. 13-12, mas, em vez disso, se alinham em longas cadeias moleculares flexíveis, cada uma delas fracamente ligada às suas vizinhas.

Todos os corpos “rígidos” reais são, até certo ponto, **elásticos**, o que significa que podemos mudar suas dimensões ligeiramente puxando-os, empurrando-os, torcendo-os ou comprimindo-os. Para ter uma idéia das ordens de grandeza envolvidas, considere uma barra de aço com 1 m de comprimento e 1 cm de diâmetro. Se você suspender um carro supercompacto pela extremidade dessa barra ela irá

esticar, mas apenas cerca de 0,5 mm ou 0,05%. Além disso, a barra voltará ao seu comprimento original quando o carro for removido.

Se suspender dois carros, a barra será permanentemente deformada e não voltará mais ao seu comprimento original quando a carga for removida. Se pendurar três carros, a barra se quebrará. Um pouco antes da ruptura a elongação da barra será menor que 0,2%. Embora deformações dessas proporções pareçam pequenas, elas são importantes na Engenharia aplicada. (A importância de saber se a asa de um avião permanecerá presa a ele, mesmo sob carga, é óbvia.)

A Fig. 13-13 mostra três modos pelos quais um sólido pode modificar suas dimensões quando atuam forças sobre ele. Na Fig. 13-13a, um cilindro é esticado. Na Fig. 13-13b, um cilindro é deformado por uma força, do mesmo modo como se poderia deformar uma pilha de cartas de baralho ou um livro. Na Fig. 13-13c, um objeto sólido é imerso num fluido a alta pressão e comprimido uniformemente em todos os lados. O que os três modos têm em comum é que uma **tensão**, ou força deformante por unidade de área, produz uma **deformação** unitária. Na Fig. 13-13, em (a) ocorre uma **tração** (associada ao estiramento), em (b) um **cisalhamento** e em (c) uma **compressão hidráulica**.

As tensões e deformações assumem diferentes formas em cada um dos três casos da Fig. 13-13, mas, dentro dos limites de utilização prática na Engenharia, a tensão e a deformação são proporcionais uma à outra. A constante de proporcionalidade é chamada de **módulo de elasticidade**, de modo que podemos escrever

$$\text{tensão} = \text{módulo} \times \text{deformação} \quad (13-28)$$

A Fig. 13-14 mostra a relação entre tensão e deformação para um cilindro de ensaio de aço, como o da Fig. 13-

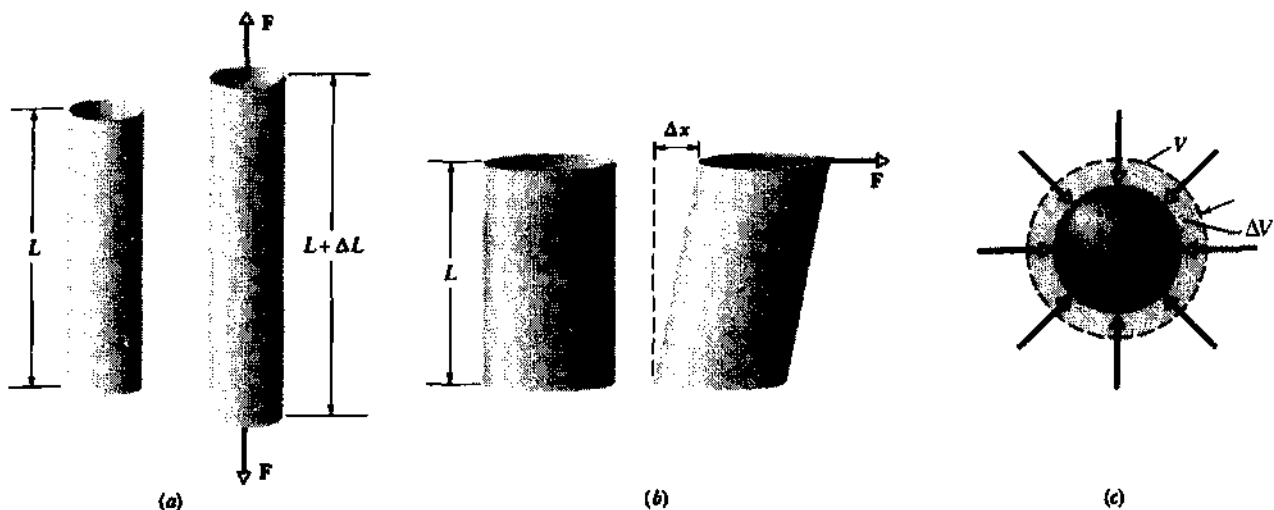


Fig. 13-13 (a) Um cilindro submetido a **tração** é esticado e o seu tamanho aumenta uma quantidade  $\Delta L$ . (b) Um cilindro sujeito a uma **tensão de cisalhamento** se deforma como uma pilha de cartas de baralho. (c) Uma esfera sólida submetida a uma **tensão hidráulica**, dentro de um fluido, diminui de volume. Todas as deformações mostradas estão muito exageradas.

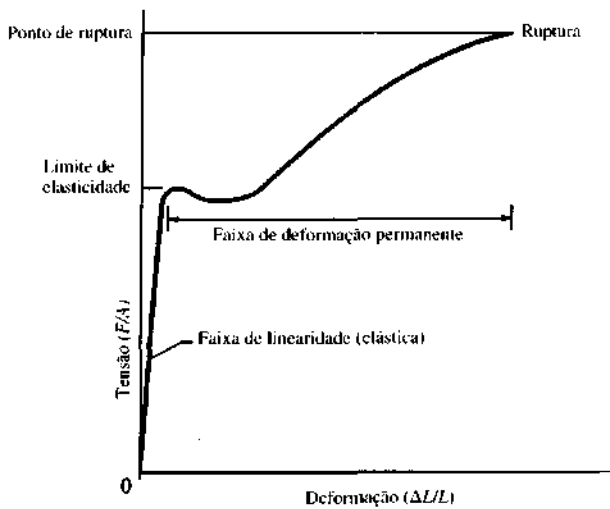


Fig. 13-14 Uma curva tensão-deformação para uma amostra de teste feita em aço, como a da Fig. 13-15. A amostra se deforma, permanentemente, quando a tensão é igual ao limite de elasticidade do material. Ela quebra quando a tensão é igual ao ponto de ruptura do material.

15. Num ensaio padrão, a tensão sobre um cilindro de ensaio aumenta, lentamente, a partir de zero até o ponto em que ocorre a fratura do cilindro, e a deformação é medida cuidadosamente. Para uma faixa considerável de tensões aplicadas, a relação tensão-deformação é linear e é dentro desta faixa que a Eq. 13-28 se aplica. Se a tensão é aumentada além do limite de elasticidade  $L_E$  da amostra, esta fica permanentemente deformada e não recupera suas dimensões originais quando a tensão é removida. Se esta continua a aumentar, a amostra finalmente se rompe, num valor denominado ponto de ruptura,  $S_R$ .

### Tensão e Compressão

Para a tração ou compressão simples, a tensão é definida como  $F/A$ , a força deformante dividida pela área sobre a qual ela atua (a força é perpendicular à área, como você pode ver na Fig. 13-13a). A deformação é, portanto, a grandeza adimensional  $\Delta L/L$ , a alteração fracionária (ou, às vezes, percentual) no comprimento da amostra. Se a amostra é uma barra longa e a tensão não excede o limite de elasticidade, então não apenas toda a barra mas também qualquer seção dela experimenta a mesma deformação, quando se aplica uma dada tensão. Como a deformação é adimensional, o módulo na Eq. 13-28 tem as mesmas dimensões da tensão, isto é, força por unidade de área.

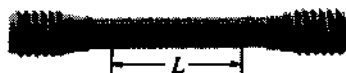


Fig. 13-15 Um espécime de teste usado para determinar uma curva tensão-deformação como a da Fig. 13-14. A alteração de um comprimento  $L$  predeterminado é medida num teste de deformação por tração.



Fig. 13-16 Um calibrador de deformação, cujas dimensões totais são 9,8 mm por 4,6 mm. O calibrador é preso com adesivo ao objeto cuja deformação se deseja medir. A resistência elétrica do calibrador varia com a deformação, permitindo que deformações de até cerca de 3% sejam medidas.

O módulo para trações e compressões é chamado **módulo de Young**, que é representado na Engenharia aplicada pelo símbolo  $E$ . A Eq. 13-28 se torna

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L} \quad (13-29)$$

Geralmente, a deformação  $\Delta L/L$  em uma amostra pode ser convenientemente determinada através de um *calibrador de deformação* (*strain gage*; Fig. 13-16). Esses dispositivos simples e úteis, que podem ser fixados diretamente à maquinaria em operação por meio de adesivos, baseiam-se no fato de que as propriedades elétricas do calibrador dependem da deformação que ele sofre.

Embora o módulo para um corpo possa ter quase o mesmo valor tanto para a tração quanto para a compressão, o ponto de ruptura pode ser muito diferente. O concreto, por exemplo, é muito resistente à compressão, mas é tão fraco quando tracionado que quase nunca é usado desse modo. A Tabela 13-1 mostra os valores do Módulo de Young e de outras propriedades elásticas para alguns materiais úteis em Engenharia.

### Cisalhamento

No caso do cisalhamento, a tensão é também uma força por unidade de área, mas o vetor força atua no plano da área em vez de fazer com ela um ângulo reto. A deformação é a razão adimensional  $\Delta x/L$ , sendo as grandezas definidas conforme mostra a Fig. 13-13b. O módulo que na Engenharia é representado pela letra  $G$  é chamado **módulo de cisalhamento**. No caso do cisalhamento, a Eq. 13-28 é escrita como

$$\frac{F}{A} = G \frac{\Delta x}{L} \quad (13-30)$$

As tensões de cisalhamento desempenham um papel crítico no empenamento de mancais que giram submetidos a uma carga e nas fraturas de ossos que são fletidos.

**Tabela 13-1**  
**Algumas Propriedades Elásticas de Materiais Usados em Engenharia**

Material	Densidade $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Módulo de Young $E$ (10 <sup>9</sup> N/m <sup>2</sup> )	Ponto de Rupturas $S_R$ (10 <sup>6</sup> N/m <sup>2</sup> )	Limite de Elasticidade $S_e$ (10 <sup>6</sup> N/m <sup>2</sup> )
Aço <sup>a</sup>	7.860	200	400	250
Alumínio	2.710	70	110	95
Vidro	2.190	65	50 <sup>b</sup>	—
Concreto <sup>c</sup>	2.320	30	40 <sup>b</sup>	—
Madeira <sup>d</sup>	525	13	50 <sup>b</sup>	—
Ossos	1.900	9 <sup>b</sup>	170 <sup>b</sup>	—
Poliestireno	1.050	3	48	—

<sup>a</sup>Aço estrutural (ASTM-A36).

<sup>c</sup>Alta resistência.

<sup>b</sup>Na compressão.

<sup>d</sup>Pinho.

### Compressão Hidráulica

Na Fig. 13-13c, a tensão é igual à pressão  $p$  exercida pelo fluido sobre o objeto, mais uma vez uma força por unidade de área, e a deformação é  $\Delta V/V$ , onde  $V$  é o volume da amostra e  $\Delta V$  é o valor absoluto da alteração de volume. O módulo, simbolizado pela letra  $B$ , é chamado **módulo de elasticidade volumétrica** do material. Diz-se que o objeto está sob *compressão hidráulica* e a pressão que ele sofre pode ser denominada *tensão hidráulica*.

Para tal situação, escrevemos a Eq. 13-28 como

$$p = B \frac{\Delta V}{V} \quad (13-31)$$

O módulo de elasticidade volumétrica da água é  $2,2 \times 10^9$  N/m<sup>2</sup>, e o do aço é  $16 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>. A pressão no fundo do Oceano Pacífico, numa profundidade média de cerca de 4.000 m, é de  $4,0 \times 10^7$  N/m<sup>2</sup>. A compressão fracionária  $\Delta V/V$  de um volume de água àquela profundidade, causada apenas pela pressão, é de 1,8%; para um objeto de aço, é de apenas cerca de 0,025%. Em geral, os sólidos — com suas redes atômicas rígidas — são menos compressíveis que os líquidos, nos quais os átomos ou moléculas estão mais fracamente acoplados aos seus vizinhos.

**EXEMPLO 13-7** Uma barra de aço estrutural possui raio  $R = 9,5$  mm e comprimento  $L = 81$  cm. Uma força  $F$  de  $6,2 \times 10^4$  N (cerca de 7 toneladas) estica a barra axialmente.

a. Qual é a tensão na barra?

**Solução** Por definição, a tensão é

$$\begin{aligned} \text{Tensão} &= \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi R^2} = \frac{6,2 \times 10^4 \text{ N}}{(\pi)(9,5 \times 10^{-3} \text{ m})^2} \\ &= 2,2 \times 10^8 \text{ N/m}^2. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

O limite de elasticidade do aço estrutural é  $2,5 \times 10^8$  N/m<sup>2</sup>, de modo que essa barra está perigosamente próxima do seu limite de ruptura.

b. Qual é a elongação que a barra sofre ao ser submetida a essa carga? Qual é a deformação?

**Solução** Da Eq. 13-29, usando o resultado que acabamos de calcular e o valor de  $E$  para o aço estrutural (Tabela 13-1), obtemos

$$\begin{aligned} \Delta L &= \frac{(F/A)L}{E} = \frac{(2,2 \times 10^8 \text{ N/m}^2)(0,81 \text{ m})}{2,0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2} \\ &= 8,9 \times 10^{-4} \text{ m} = 0,89 \text{ mm}. \end{aligned}$$

E, portanto, a deformação é

$$\begin{aligned} \Delta L/L &= (8,9 \times 10^{-4} \text{ m})/(0,81 \text{ m}) \\ &= 1,1 \times 10^{-3} = 0,11\%. \end{aligned}$$

**EXEMPLO 13-8** O fêmur, que é o principal osso da perna, tem um diâmetro mínimo, no adulto do sexo masculino, de aproximadamente 2,8 cm, correspondendo a uma seção reta de área  $A$  igual a  $6 \times 10^{-4}$  m<sup>2</sup>. Qual o valor da carga compressiva necessária para quebrá-lo?

**Solução** Na Tabela 13-1, vemos que o ponto de ruptura para um osso sob compressão é de  $170 \times 10^6$  N/m<sup>2</sup>. A força de compressão na fratura é a força  $F$  que produz a tensão  $S_R$ , ou seja

$$\begin{aligned} F &= S_R A = (170 \times 10^6 \text{ N/m}^2)(6 \times 10^{-4} \text{ m}^2) \\ &= 1,0 \times 10^5 \text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Isto representa 11 toneladas. Embora seja uma força de valor considerável, ela pode ser encontrada, por exemplo, num salto de pára-quedas malfeito sobre um chão duro. A força não precisa ser exercida durante muito tempo para quebrar o osso; alguns milissegundos são suficientes.

**EXEMPLO 13-9** Uma mesa possui três pernas com 1,00 m de comprimento e uma quarta que tem uma porção  $d = 0,50$  mm a mais, de modo que a mesa balança ligeiramente. Um pesado cilindro de aço de massa  $M = 290$  kg é colocado verticalmente sobre a mesa, de modo que todas as quatro pernas são comprimidas e a mesa não balança mais. As pernas da mesa são cilindros de madeira cuja seção reta tem área  $A = 1,0$  cm<sup>2</sup>. O módulo de Young,  $E$ , para a madeira é igual a  $1,3 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>. Suponha que o tampo da mesa permanece nivelado e que as pernas não entortam. Com que força o chão empurra para cima cada uma das pernas da mesa?

**Solução** Consideremos a mesa e o cilindro como sendo o nosso sistema. A situação é semelhante à da Fig. 13-11, exceto pelo fato de que agora há um cilindro de aço sobre a mesa. Se o tampo da mesa permanece nivelado, cada uma das três pernas mais curtas deve estar sendo comprimida na mesma proporção  $\Delta L$ , e, portanto, pela mesma força  $F_3$ .

## 14 GRAVITAÇÃO, ONDAS E TERMODINÂMICA

A perna mais longa deve ter uma compressão maior  $\Delta L_1$ , efetuada por uma força maior  $F_1$ , e nós devemos ter

$$\Delta L_1 = \Delta L_3 + d. \quad (13-32)$$

Nós podemos reescrever a Eq. 13-29 como  $\Delta L = FL/EA$ . Substituímos, então, esta relação na Eq. 13-32, onde  $L$  representa o comprimento inicial das três pernas curtas e o comprimento aproximado da perna longa. A Eq. 13-32 se torna, então

$$F_1 L = 3F_3 L + dAE. \quad (13-33)$$

Da Eq. 13-8, que dá o equilíbrio das forças na direção vertical, temos para o nosso sistema

$$\sum F_y = 3F_3 + F_1 - Mg = 0. \quad (13-34)$$

Se resolvermos as Eqs. 13-33 e 13-34 para obtermos a força desconhecida  $F_3$ , encontraremos

$$F_3 = \frac{Mg}{4} - \frac{dAE}{4L}$$

$$= \frac{(290 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)}{4}$$

$$- \frac{(5,0 \times 10^{-4} \text{ m})(10^{-4} \text{ m}^2)(1,3 \times 10^{10} \text{ N/m}^2)}{(4)(1,00 \text{ m})}$$

$$= 711 \text{ N} - 163 \text{ N} = 548 \text{ N}. \quad (\text{Resposta})$$

De modo semelhante, obtemos

$$F_1 = \frac{Mg}{4} + \frac{3dAE}{4L} \\ = 711 \text{ N} + 489 \text{ N} = 1.200 \text{ N}$$

Você pode mostrar que, para alcançar sua configuração de equilíbrio, cada uma das três pernas mais curtas sofreu uma compressão de 0,42 mm e a perna mais longa foi comprimida 0,92 mm, sendo a diferença igual a 0,50 mm.

## RESUMO

### Equilíbrio Estático

Diz-se que um corpo rígido em repouso está em **equilíbrio estático**. Para este corpo, a soma vetorial das forças externas que atuam sobre ele é zero:

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0 \quad (\text{equilíbrio de forças}) \quad (13-3)$$

Se todas as forças atuam no plano  $xy$ , essa equação vetorial é equivalente a duas equações escalares componentes:

$$\sum F_x = 0 \quad \text{e} \quad \sum F_y = 0 \quad (\text{equilíbrio de forças}) \quad (13-7, 13-8)$$

O equilíbrio estático implica também que a soma vetorial dos torques externos que atuam sobre o corpo, em relação a *qualquer* ponto, é zero, ou seja,

$$\sum \tau_{\text{ext}} = 0 \quad (\text{equilíbrio de torques}) \quad (13-5)$$

Se as forças atuam no plano  $xy$ , qualquer torque é paralelo ao eixo  $z$ , e a Eq. 13-5 é equivalente a uma única equação escalar

$$\sum \tau_z = 0 \quad (\text{equilíbrio de torques}) \quad (13-9)$$

### Centro de Gravidade

A força gravitacional atua individualmente sobre todas as partículas de um corpo. O efeito total dessas ações individuais pode ser obtido imaginando-se uma força gravitacional total equivalente  $Mg$  atuando sobre um ponto específico chamado **centro de gravidade**. Se a aceleração gravitacional  $g$  é a mesma para todas as partículas de um corpo, o centro de gravidade coincide com o centro de massa.

### Módulos Elásticos

Três **módulos elásticos** são usados para descrever o comportamento elástico (deformação) de objetos em resposta às forças que atuam sobre eles. A **deformação** (alteração fracionária no tamanho) está relaciona-

da linearmente com a **tensão** aplicada (força por unidade de área) em cada caso. A relação geral é

$$\text{tensão} = \text{módulo} \times \text{deformação} \quad (13-28)$$

### Tração e Compressão

Quando um objeto está sob tração ou compressão, a Eq. 13-28 é escrita como

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L}, \quad (13-29)$$

onde  $\Delta L/L$  é a deformação do objeto,  $F$  é a magnitude da força  $\mathbf{F}$ , que causa a deformação,  $A$  é a área da seção reta sobre a qual  $\mathbf{F}$  é aplicada (perpendicularmente a  $A$ , conforme mostra a Fig. 13-13a), e  $E$  é o **módulo de Young** para o objeto.

### Cisalhamento

Quando um objeto sofre uma tensão de cisalhamento, a Eq. 13-28 é escrita como

$$\frac{F}{A} = G \frac{\Delta x}{L}, \quad (13-30)$$

onde  $\Delta x/L$  é a deformação do objeto,  $\Delta x$  é o deslocamento de uma extremidade do objeto no sentido da força aplicada  $\mathbf{F}$  (conforme a Fig. 13-13b) e  $G$  é o **módulo de cisalhamento** do objeto.

### Compressão Hidráulica

Quando um objeto sofre **compressão hidráulica** devido a uma tensão exercida por um fluido circundante, a Eq. 13-28 é escrita como

$$p = B \frac{\Delta V}{V}, \quad (13-31)$$

onde  $p$  é a pressão (*tensão hidráulica*) que o fluido exerce sobre o objeto,  $\Delta V/V$  (deformação) é o valor absoluto da alteração fracionária no volume do objeto devido àquela pressão, e  $B$  é o **módulo de elasticidade volumétrica** do objeto.



## QUESTIONÁRIO

1. Um pêndulo simples está em equilíbrio em algum ponto durante a sua oscilação?

2. Se um determinado corpo rígido for atirado para cima, sem rotação, ele não irá iniciar uma rotação durante o voo, desde que a resistência do ar seja desprezível. O que este resultado revela sobre a localização do centro de gravidade desse corpo?

3. Uma roda, girando com uma velocidade angular constante  $\omega$  em torno de um eixo fixo, está em equilíbrio porque nenhuma força ou torque externo atua sobre ela. Entretanto, as partículas que compõem a roda sofrem uma aceleração centrípeta  $a$  na direção do eixo. Já que  $a$  é diferente de zero, como pode a roda estar em equilíbrio?

4. Dê vários exemplos de corpos que não estejam em equilíbrio, mesmo que a resultante de todas as forças que atuam sobre eles seja zero.

5. De que maneira é mais provável que uma maca se quebre ao ser usada: quando ela é esticada com força ou quando ela arqueia um pouco? Por quê?

6. Uma escada está em repouso com sua extremidade superior encostada numa parede e a inferior apoiada no chão. É mais provável que ela escorregue quando uma pessoa está sobre ela no degrau de baixo ou quando está no topo? Por quê?

7. Um quadro está pendurado na parede, suspenso por dois fios. Como devem ser posicionados os fios para que a tensão sobre eles seja mínima? Explique por que a tensão é maior para outras posições dos fios.

8. Um quadro retangular está pendurado por um fio num prego sem atrito. Por que o quadro fica em equilíbrio instável se o fio for "curto demais" (esta é uma das razões pelas quais um quadro fica torto) e em equilíbrio estável se o fio for "suficientemente longo"? Defina experimentalmente "curto demais" e "suficientemente longo" por meio do ângulo  $\theta$  que o fio faz no prego e o ângulo  $\alpha$  entre as diagonais do quadro, conforme mostra a Fig. 13-17.

9. Fique de pé em frente à borda de uma porta aberta e coloque um pé de cada lado da porta. Você vai perceber que não consegue ficar na ponta dos pés. Por quê?

10. Sente-se numa cadeira de espaldar reto e tente ficar de pé sem se dobrar para a frente. Por que você não consegue fazê-lo?

11. Por que uma vara longa ajuda o equilibrista a manter-se em equilíbrio na corda bamba?

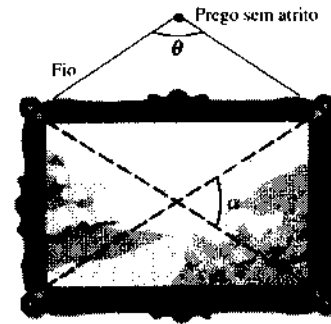


Fig. 13-17 Questão 8.

12. Um bloco composto de madeira e metal está em repouso sobre o tampo (áspero) de uma mesa. Em qual das duas situações mostradas na Fig. 13-18 você consegue virá-lo, utilizando a menor força  $F$  aplicada à mesma altura sobre o bloco?

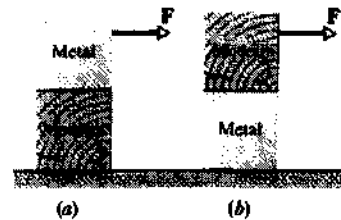


Fig. 13-18 Questão 12.

13. Se, enquanto o seu avião atravessa uma turbulência, você tiver uma lata de refrigerante sobre a sua bandeja, para que níveis do líquido é mais provável e menos provável que a lata vire?

14. Existe um desafio popular entre os bebedores de cerveja que consiste em equilibrar uma lata de cerveja em sua borda. Como se consegue isso?

15. Uma viga horizontal, apoiada em ambas as extremidades, recebe uma carga no centro. Mostre que a parte superior da viga está sob compressão, enquanto que a parte inferior está sob tração.

16. Por que se usam vergalhões em estruturas de concreto? (Compare a resistência do concreto às tensões com a sua resistência às compressões.)

## EXERCÍCIOS &amp; PROBLEMAS

## Seção 13-4 Alguns Exemplos de Equilíbrio Estático

1E. Uma família de oito pessoas, cujas massas em quilogramas estão indicadas na Fig. 13-19, está em equilíbrio numa gangorra. Qual é o número da pessoa que causa o maior torque em torno do eixo de rotação que passa pelo *pivot*, com sentido (a) saindo da página e (b) entrando na página?

2E. Um objeto quadrado e rígido, de peso desprezível, sofre a ação de três forças que estão aplicadas em seus vértices, conforme mostra, em escala, a Fig. 13-20. (a) A primeira condição para o equilíbrio é satisfeita? (b) A segunda condição para o equilíbrio é satisfeita? (c) Se a

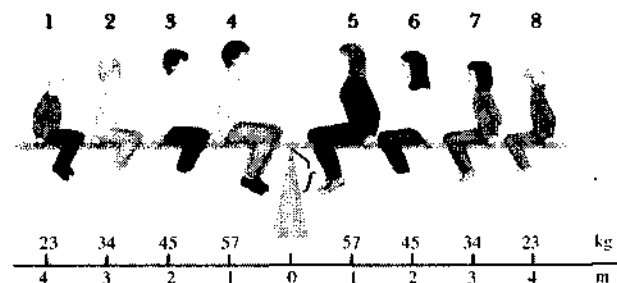


Fig. 13-19 Exercício 1.

## 16 GRAVITAÇÃO, ONDAS E TERMODINÂMICA

resposta ao item (a) ou (b) for não, poderia uma quarta força restaurar o equilíbrio do objeto? Se assim for, especifique o módulo, a direção e o ponto de aplicação da força necessária.

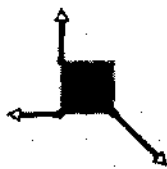


Fig. 13-20 Exercício 2.

3E. Sabe-se que uma determinada noz requer que forças de 40 N sejam aplicadas de ambos os lados de sua casca para quebrá-la. Que forças  $F$  serão necessárias se ela for colocada no quebra-nozes mostrado na Fig. 13-21?

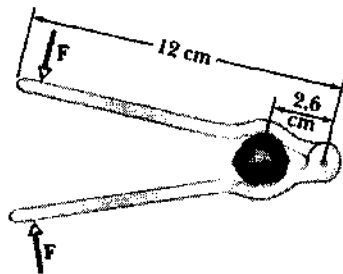


Fig. 13-21 Exercício 3.

4E. A torre inclinada de Pisa (veja Fig. 13-22) tem 55 m de altura e 7,0 m de diâmetro. O alto da torre está deslocado 4,5 m em relação à vertical. Modelando a torre por um cilindro circular uniforme, (a) que deslocamento adicional, medido no topo, deixará a torre na iminência de tombar? (b) Que ângulo fará a torre com a vertical nesse instante?

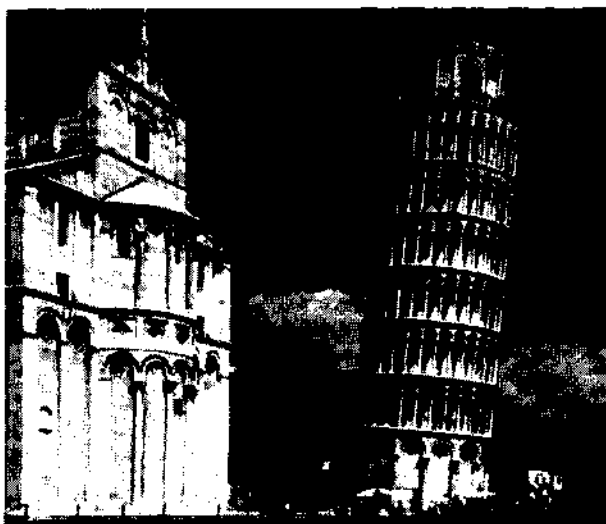


Fig. 13-22 Exercício 4.

5E. Sobre uma partícula atuam forças dadas, em newtons, por  $F_1 = 10\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$  e  $F_2 = 17\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ . (a) Qual a força  $F_3$  que equilibra as outras duas? (b) Que direção tem  $F_3$  em relação ao eixo  $x$ ?

6E. Um arco é puxado até que a tensão no fio seja igual à força exercida pelo arqueiro. Qual é o ângulo entre as duas partes do fio?

7E. Uma corda, suposta sem massa, é esticada horizontalmente entre dois suportes que distam 3,44 m um do outro. Quando um objeto de peso igual a 3.160 N é pendurado no centro da corda, observa-se que ela arqueia 35,0 cm. Qual é a tensão na corda?

8E. Na Fig. 13-23, um homem está tentando tirar o seu carro da lama no acostamento de uma estrada. Ele amarra firmemente um extremo de uma corda ao pára-choque dianteiro do carro, e o outro extremo ele prende em torno de um poste, a 60 ft de distância. Ele então puxa lateralmente o meio da corda com uma força de 125 lb, deslocando o centro da corda 1,0 ft em relação à sua posição anterior, e o carro quase não se mexe. Que força a corda exerce sobre o carro? (A corda se distende um pouco.)

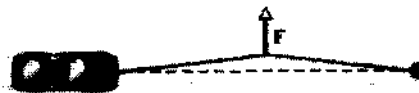


Fig. 13-23 Exercício 8.

9E. O sistema da Fig. 13-24 está em equilíbrio, mas ele começa a deslizar se qualquer massa adicional é acrescentada ao objeto de 5,0 kg. Qual é o coeficiente de atrito estático entre o bloco de 10 kg e o plano sobre o qual ele está apoiado?

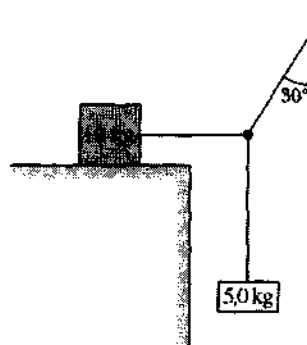


Fig. 13-24 Exercício 9.

10E. Uma esfera uniforme de peso  $P$  e raio  $r$  é mantida no lugar por uma corda presa a uma parede, sem atrito, situada a uma distância  $L$  acima do centro da esfera, conforme a Fig. 13-25. Encontre (a) a tensão na corda e (b) a força exercida pela parede sobre a esfera.

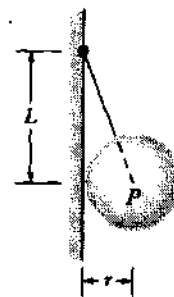


Fig. 13-25 Exercício 10.

11E. Um automóvel com massa de 1.360 kg tem uma distância de 3,05 m entre os eixos dianteiro e traseiro. O seu centro de gravidade está situa-

do a 1,78 m atrás do eixo dianteiro. Determine (a) a força exercida sobre cada uma das rodas dianteiras (supostas iguais) e (b) a força exercida sobre cada uma das rodas traseiras (supostas iguais) pelo chão plano.

12E. Um homem de 72 kg está atravessando uma ponte plana e pára a  $1/4$  da distância a partir de uma das extremidades. A ponte é uniforme e tem massa de 272 kg. Quais são as forças verticais exercidas sobre a ponte pelos seus suportes (a) na extremidade mais distante e (b) na extremidade mais próxima?

13E. Um mergulhador de peso igual a 580 N está de pé sobre a extremidade de um trampolim de 4,5 m de comprimento e peso desprezível. O trampolim está preso a dois pedestais que distam 1,5 m entre si, conforme mostra a Fig. 13-26. Quais são o módulo e a direção da força exercida sobre o trampolim (a) pelo pedestal esquerdo e (b) pelo pedestal direito? (c) Qual dos dois pedestais está sendo tracionado e qual está sendo comprimido?

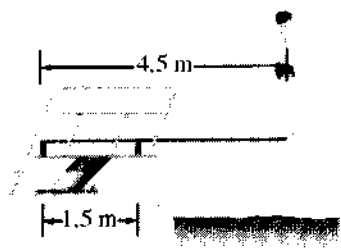


Fig. 13-26 Exercício 13.

14E. Um bastão de medida está equilibrado horizontalmente sobre um pivô na marca dos 50,0 cm. Com duas moedas empilhadas na marca dos 12,0 cm, o bastão fica equilibrado na marca dos 45,5 cm. Uma moeda tem uma massa de 5,0 g. Qual é a massa do bastão?

15E. Uma viga é transportada por três homens, estando um homem em uma das extremidades e os outros dois sustentando a viga por meio de uma trave transversal, colocada de modo que a carga esteja igualmente dividida entre os três homens. Em que posição está colocada a trave transversal? (Despreze a massa desta trave.)

16E. Um lavador de janelas de 75 kg usa uma escada de 10 kg que tem 5,0 m de comprimento. Ele coloca uma extremidade da escada no chão a 2,5 m da parede e apoia o extremo superior numa janela rachada, e sobe a escada. Ele sobe 3,0 m da escada e então a janela se quebra. Desprezando o atrito entre a escada e a janela e supondo que a base da escada não escorregou, encontre (a) a força exercida pela escada sobre a janela, pouco antes dela se quebrar e (b) a magnitude e a direção da força exercida pelo chão sobre a escada, pouco antes da janela se quebrar.

17E. A Fig. 13-27 mostra as estruturas anatômicas da parte inferior da perna e do pé que estão envolvidas no ato de ficar na ponta do pé, com o calcanhar elevado acima do solo, de modo que o pé toca o solo efetivamente em apenas um ponto, marcado com a letra  $P$  na figura. Calcule, considerando uma pessoa de peso  $P$ , as forças que devem ser exercidas sobre o pé (a) pelo músculo da panturrilha (em  $A$ ) e (b) pelos ossos da perna (em  $B$ ) quando a pessoa está na ponta do pé numa perna só. Suponha que  $a = 5,0$  cm e  $b = 15$  cm.

18E. Um caixote cúbico uniforme tem 0,750 m de aresta e pesa 500 N. Ele está em repouso sobre o solo com uma aresta encostada contra um obstáculo fixo muito pequeno. A que altura acima do chão deve ser aplicada uma força horizontal de 350 N sobre o caixote para incliná-lo?

19P. Duas esferas idênticas, uniformes e sem atrito, cada uma de peso  $P$ , estão em repouso num recipiente rígido retangular, conforme mostra a Fig. 13-28. Encontre, em termos de  $P$ , as forças que atuam sobre as

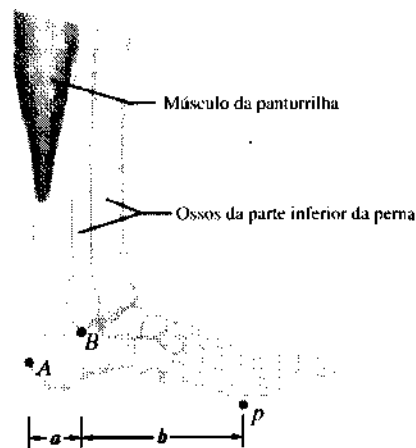


Fig. 13-27 Exercício 17.

esferas devido (a) às superfícies do recipiente e (b) uma à outra, se a linha que une os centros das esferas faz um ângulo de  $45^\circ$  com a horizontal.

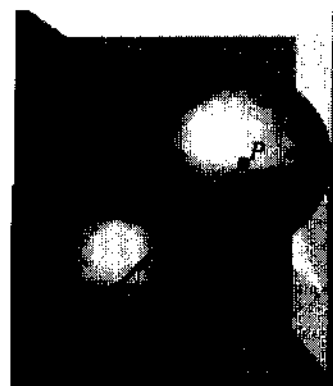


Fig. 13-28 Problema 19.

20P. Um balde de construção de 815 kg é suspenso por um cabo  $A$  que está preso em  $O$  a dois outros cabos  $B$  e  $C$ , fazendo ângulos de  $51^\circ$  e  $66^\circ$  com a horizontal (Fig. 13-29). Encontre a tensão no (a) cabo  $A$ , (b) cabo  $B$  e (c) cabo  $C$ . (Sugestão: Para evitar resolver duas equações com duas incógnitas, posicione os eixos conforme mostrado na figura.)

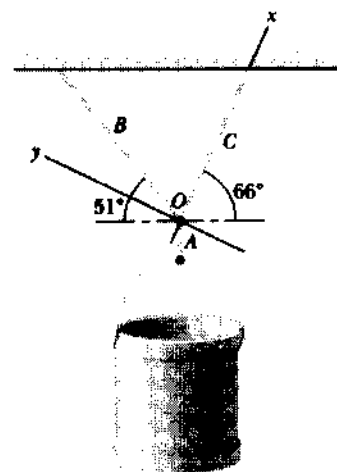


Fig. 13-29 Problema 20.

## 18 GRAVITAÇÃO, ONDAS E TERMODINÂMICA

**21P.** O sistema na Fig. 13-30 está em equilíbrio com o fio do centro exatamente na horizontal. Encontre (a) a tensão  $T_1$ , (b) a tensão  $T_2$ , (c) a tensão  $T_3$  e (d) o ângulo  $\theta$ .

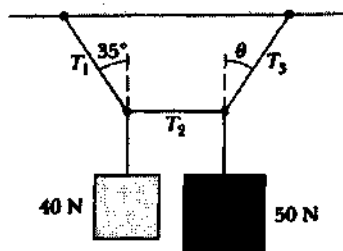


Fig. 13-30 Problema 21.

**22P.** A força  $F$  na Fig. 13-31 é suficiente apenas para manter o bloco de 6 kg e as polias, sem peso, em equilíbrio. Não há atrito apreciável. Calcule a tensão  $T$  no cabo superior.

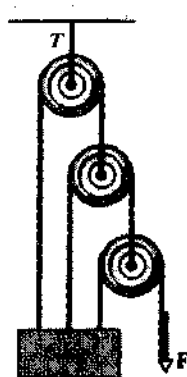


Fig. 13-31 Problema 22.

**23P.** Uma balança é constituída de uma barra rígida de massa  $M$  pivotada em um ponto diferente do seu centro e livre para rodar em torno deste ponto. Ela é equilibrada por pesos desiguais colocados nos pratos em cada um dos extremos da barra. Quando uma desconhecida massa  $m$  é colocada no prato da esquerda, ela é equilibrada pela massa  $m_1$  colocada no prato da direita. Quando a massa  $m$  é colocada no prato da direita, ela é equilibrada pela massa  $m_2$  colocada no prato da esquerda. Mostre que  $m = \sqrt{m_1 m_2}$ .

**24P.** Um peso de 15 kg está sendo levantado pelo sistema de polias mostrado na Fig. 13-32. O braço está na vertical, enquanto que o antebraço faz um ângulo de  $30^\circ$  com a horizontal. Que forças são exercidas sobre o antebraço (a) pelo músculo tríceps e (b) pelo osso do braço (o úmero)? O antebraço e a mão juntos têm uma massa de 2,0 kg, com centro de massa situado a 15 cm (medidos ao longo do braço) do ponto onde o braço e o antebraço se articulam. O músculo tríceps atua verticalmente para cima, num ponto situado a 2,5 cm atrás do ponto de contato.

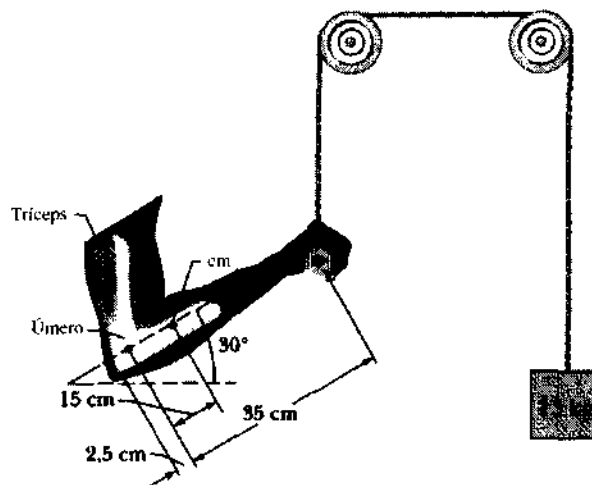


Fig. 13-32 Problema 24.

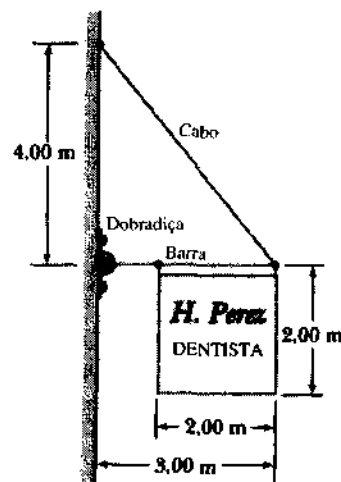


Fig. 13-33 Problema 25.

alpinista está situado a uma distância horizontal  $d = 0,40$  m da fissura. O coeficiente de atrito estático entre as mãos e a rocha é  $\mu_1 = 0,40$ , enquanto entre as botas e a rocha é  $\mu_2 = 1,2$ . (a) Qual é o menor valor da força horizontal que deve ser aplicada, pelas mãos e pelos pés, para que o alpinista fique estável? (b) Para o puxão horizontal de (a), qual deve ser a distância vertical  $h$  entre as mãos e os pés? (c) Se o alpinista encontra rocha molhada de modo que  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são reduzidos, o que acontece com as respostas dadas em (a) e (b), respectivamente?

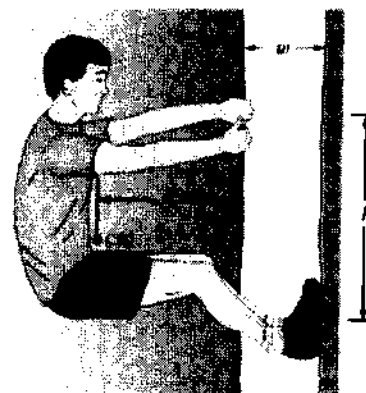


Fig. 13-34 Problema 26.

**25P.** Uma placa quadrada uniforme, pesando 50,0 kg e tendo 2,00 m de lado, está pendurada em uma haste de 3,00 m de comprimento e massa desprezível. Um cabo está preso à extremidade da haste e a um ponto na parede situado 4,00 m acima do ponto onde a haste é fixada à parede, conforme mostra a Fig. 13-33. (a) Qual é a tensão no cabo? Quais são (b) a componente horizontal e (c) a componente vertical da força exercida pela parede sobre a haste?

**26P.** Na Fig. 13-34, um alpinista de 55 kg está subindo uma fissura. Com as mãos, ele puxa um dos lados da fissura e, com os pés, pressiona contra o lado oposto. A fissura tem largura  $l = 0,20$  m, e o centro de massa do

27P. Na Fig. 13-35, qual a magnitude da força  $F$ , aplicada horizontalmente no eixo da roda, necessária para fazer a roda ultrapassar um obstáculo de altura  $h$ ? Considere  $r$  como sendo o raio da roda e  $P$  como o seu peso.

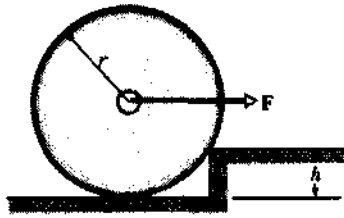


Fig. 13-35 Problema 27.

28P. As forças  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$  atuam sobre a estrutura da Fig. 13-36 que mostra uma vista superior. Deseja-se colocar a estrutura em equilíbrio, aplicando uma força, num ponto  $P$ , cujas componentes vetoriais são  $F_h$  e  $F_v$ . É dado que  $a = 2,0$  m,  $b = 3,0$  m,  $c = 1,0$  m,  $F_1 = 20$  N,  $F_2 = 10$  N e  $F_3 = 5,0$  N. Encontre (a)  $F_h$ , (b)  $F_v$  e (c)  $d$ .

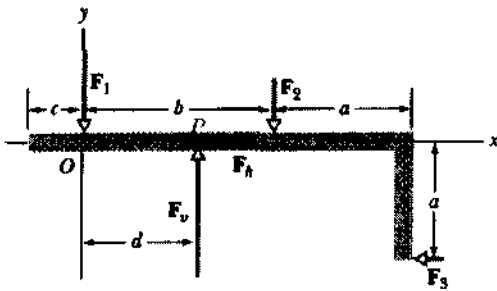


Fig. 13-36 Problema 28.

29P. Num teto há um alçapão quadrado de 0,91 m de lado e massa de 11 kg, que é preso por dobradiças de um lado e tem um ferrolho do lado oposto. Se o centro de gravidade do alçapão está situado a 10 cm do centro do quadrado, na direção do lado que tem as dobradiças, que forças devem (a) o ferrolho e (b) as dobradiças sustentar?

30P. Quatro tijolos idênticos, cada um de comprimento  $L$ , são colocados um sobre o outro (Fig. 13-37), de modo que uma parte de cada um deles avança além da extremidade do que está abaixo. Encontre, em termos de  $L$ , os valores máximos de (a)  $a_1$ , (b)  $a_2$ , (c)  $a_3$ , (d)  $a_4$  e (e)  $h$  para os quais a pilha fica equilibrada.

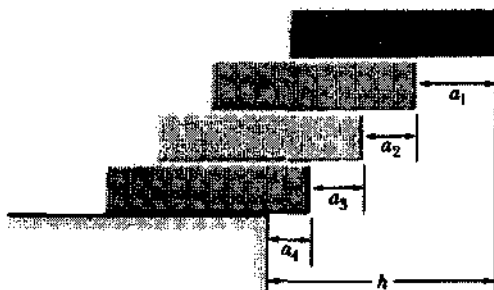


Fig. 13-37 Problema 30.

31P. Uma extremidade de uma viga uniforme pesando 222,4 N e tendo 0,914 m de comprimento é presa à parede por meio de uma dobradiça. A outra extremidade é sustentada por um fio (veja Fig. 13-38). (a) Encontre a tensão no fio. Quais são as componentes (b) horizontal e (c) vertical da força exercida pela dobradiça?

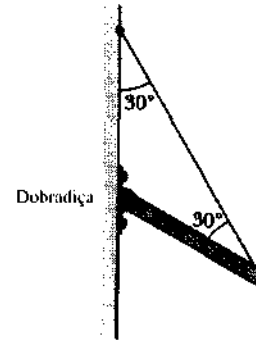


Fig. 13-38 Problema 31.

32P. Uma porta com 2,1 m de altura e 0,91 m de largura tem uma massa de 27 kg. Uma dobradiça colocada a 0,30 m do alto da porta e outra a 0,30 m da base suportam, cada uma, metade do peso da porta. Suponha que o centro de gravidade coincida com o centro geométrico da porta e determine as componentes (a) vertical e (b) horizontal da força exercida por cada dobradiça sobre a porta.

33P. O sistema da Fig. 13-39 está em equilíbrio. 225 kg de massa pendem da extremidade de um suporte que, por sua vez, tem massa de 45,0 kg. Encontre (a) a tensão  $T$  no cabo e as componentes (b) horizontal e (c) vertical da força exercida sobre o suporte pela dobradiça.

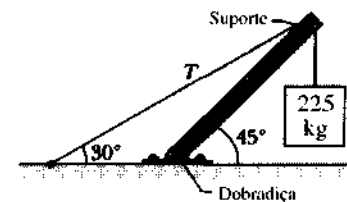


Fig. 13-39 Problema 33.

34P. Uma barra de peso  $P$  está suspensa em repouso, na horizontal, por duas cordas sem massa, como mostra a Fig. 13-40. Uma corda faz um ângulo  $\theta = 36,9^\circ$  com a vertical e a outra faz um ângulo  $\phi = 53,1^\circ$ , também com a vertical. Se o comprimento  $L$  da barra é 6,10 m, calcule a distância  $x$  entre a extremidade esquerda da barra e o seu centro de gravidade.

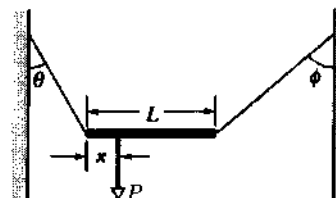


Fig. 13-40 Problema 34.

35P. Na Fig. 13-41, uma barra horizontal fina  $AB$ , de massa desprezível e comprimento  $L$ , é presa a uma dobradiça em uma parede vertical no ponto  $A$  e é sustentada, em  $B$ , por um fio  $BC$ , fino, que faz um ângulo  $\theta$  com a horizontal. Um peso  $P$  pode ser movido para qualquer posição ao longo da barra, sendo sua posição definida pela distância  $x$  desde a parede até o seu centro de massa. Encontre (a) a tensão no fio e as componentes (b) horizontal e (c) vertical da força exercida sobre a barra pelo pino em  $A$ , como função da distância  $x$ .

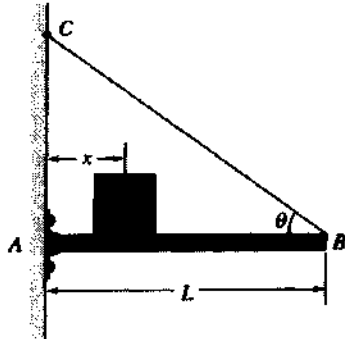


Fig. 13-41 Problemas 35 e 36.

36P. Na Fig. 13-41, suponha que o comprimento  $L$  da barra uniforme seja 3,0 m e o seu peso seja de 200 N. Além disso, seja  $P = 300$  N e  $\theta = 30^\circ$ . O fio pode suportar uma tensão máxima de 500 N. (a) Qual é a maior distância possível  $x$  que o bloco pode atingir antes que o fio arrebente? Com  $P$  colocado nesta distância máxima, quais são as componentes (b) horizontal e (c) vertical da força exercida sobre a barra pelo pino em  $A$ ?

37P. Duas travessas uniformes,  $A$  e  $B$ , são fixas a uma parede por meio de dobradiças e então são unidas livremente uma à outra por um pino, como na Fig. 13-42. Encontre as componentes horizontal e vertical, respectivamente, da força sobre (a) a trave  $A$ , devido à sua dobradiça, (b) a trave  $A$ , devido ao pino, (c) a trave  $B$ , devido à sua dobradiça e (d) a trave  $B$ , devido ao pino.

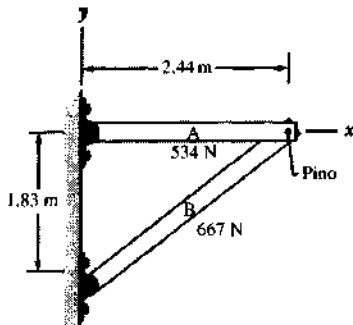
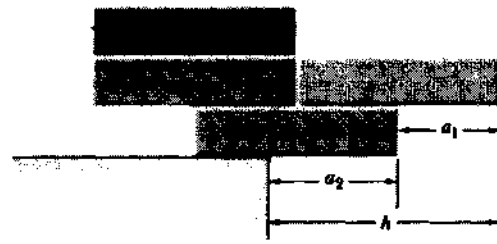


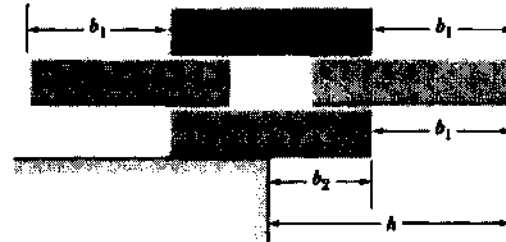
Fig. 13-42 Problema 37.

38P. Quatro tijolos idênticos, uniformes, de comprimento  $L$ , são empilhados sobre uma mesa de duas maneiras, como mostra a Fig. 13-43 (compare com o Problema 30). Deseja-se maximizar a distância de projeção  $h$  nos dois tipos de empilhamento. Encontre as distâncias máximas  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  e  $b_2$ , e calcule  $h$  para os dois tipos de empilhamento. (Veja "The Amateur Scientist" [O Cientista Amador], *Scientific American*, junho de 1985, para uma discussão e até mesmo uma versão melhor do arranjo (b).)

39P. Uma tábua uniforme de comprimento  $L = 6,1$  m e peso  $P = 444,8$  N está em repouso no chão, encostada num rolamento, sem atrito, situado no alto de uma parede de altura  $h = 3,0$  m (veja Fig. 13-44). A tábua permanece em equilíbrio para qualquer valor do ângulo  $\theta$  maior ou igual a  $70^\circ$ , mas escorrega se  $\theta < 70^\circ$ . Encontre o coeficiente de atrito entre a tábua e o chão.



(a)



(b)

Fig. 13-43 Problema 38.

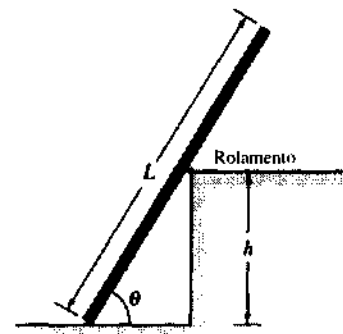


Fig. 13-44 Problema 39.

40P. Os lados  $AC$  e  $CE$  da escada mostrada na Fig. 13-45 têm, cada um, 2,49 m de comprimento e possuem dobradiças em  $C$ . A barra  $BD$  é um limitador de abertura composto de um bastão de 0,76 m de comprimento, situado a meia altura da escada. Um homem pesando 854 N sobe 1,83 m ao longo da escada. Supondo que o chão seja sem atrito e desprezando o peso da escada, encontre (a) a tensão no bastão limitador e as forças exercidas sobre a escada pelo chão em (b)  $A$  e (c)  $E$ . (Suges-

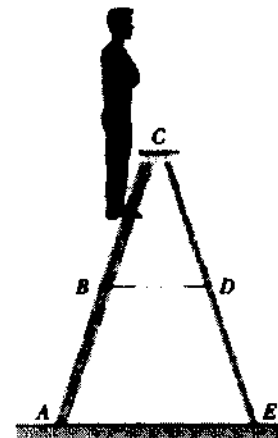


Fig. 13-45 Problema 40.

tão: Você terá mais facilidade se isolar partes da escada ao aplicar as condições de equilíbrio.)

**41P.** A barra  $AB$  da armação quadrada  $ABCD$ , da Fig. 13-46, é tensionada por meio do esticador  $G$ , como se os seus extremos  $A$  e  $B$  estivessem sujeitos às forças horizontais  $T$ , que apontam para fora e estão mostradas na figura. Determine as forças sobre as outras barras; identifique as barras que estão sob tensão e as que estão sob compressão. As diagonais  $AC$  e  $BD$  passam uma pela outra livremente em  $E$ . Considerações de simetria podem simplificar, consideravelmente, este e outros problemas semelhantes.

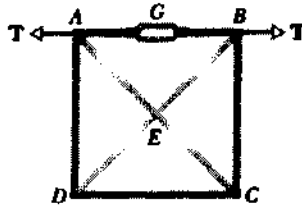


Fig. 13-46 Problema 41.

**42P.** Um cubo uniforme de aresta  $L$  está em repouso sobre um piso horizontal. O coeficiente de atrito estático entre o cubo e o chão é  $\mu$ . Uma força horizontal  $P$  é aplicada perpendicularmente a uma das faces verticais do cubo, a uma distância  $h$  acima do chão, na linha média vertical da face do cubo. À medida que  $P$  aumenta lentamente, o cubo começa a (a) deslizar ou (b) inclinar-se. Qual é a condição que  $\mu$  deve satisfazer para que (a) ocorra? Para que (b) ocorra? (Sugestão: Na iminência da inclinação, onde está localizada a força normal?)

**43P.** Uma caixa cúbica está cheia de areia e pesa 890 N. Deseja-se "rolar" a caixa empurrando-a horizontalmente em uma das arestas superiores. (a) Qual é a força mínima necessária? (b) Qual é o coeficiente de atrito estático mínimo necessário? (c) Existe um modo mais eficiente de rolar a caixa? Se existir, qual a menor força possível que teria de ser aplicada diretamente sobre a caixa para rolá-la. (Sugestão: Veja a sugestão para o Problema 42.)

**44P.** Um caixote, na forma de um cubo com aresta de 1,2 m, contém uma peça de maquinaria cujo desenho é tal que o centro de gravidade do caixote e de seu conteúdo está situado 0,30 m acima do seu centro geométrico. O caixote está em repouso sobre uma rampa que faz um ângulo  $\theta$  com a horizontal. O ângulo  $\theta$  vai aumentando a partir de zero até que atinge um valor para o qual ou o caixote começa a escorregar pela rampa ou então ele vira. Qual desses eventos ocorrerá (a) quando o coeficiente de atrito estático for de 0,60 e (b) quando ele for 0,70? Determine, em cada caso, o ângulo para o qual o evento ocorre. (Sugestão: Veja a sugestão para o problema 42.)

**45P\*.** Um carro numa estrada horizontal faz uma parada de emergência, aplicando os freios de modo que todas as quatro rodas travam e der-

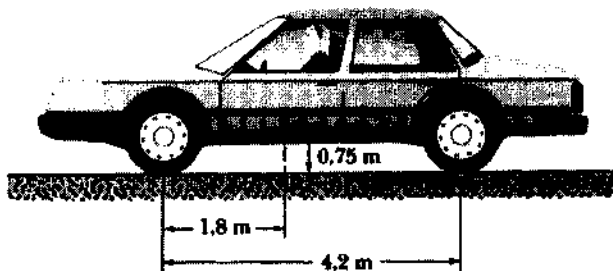


Fig. 13-47 Problema 45.

rapam ao longo da estrada. O coeficiente de atrito cinemático entre os pneus e a estrada é de 0,40. A separação entre os eixos dianteiro e traseiro é de 4,2 m, e o centro de massa do carro está localizado a 1,8 m atrás do eixo dianteiro e a 0,75 m acima da estrada; veja a Fig. 13-47. O carro pesa 11 kN. Calcule (a) a desaceleração do carro durante a frenada, (b) a força normal sobre cada roda e (c) a força de frenagem em cada roda. (Sugestão: Embora o carro não esteja em equilíbrio translacional, ele está em equilíbrio rotacional.)

### Seção 13-6 Elasticidade

**46E.** A Fig. 13-48 mostra a curva tensão-deformação para o quartzo. Quais são (a) o módulo de Young e (b) o limite de elasticidade aproximado para este material?

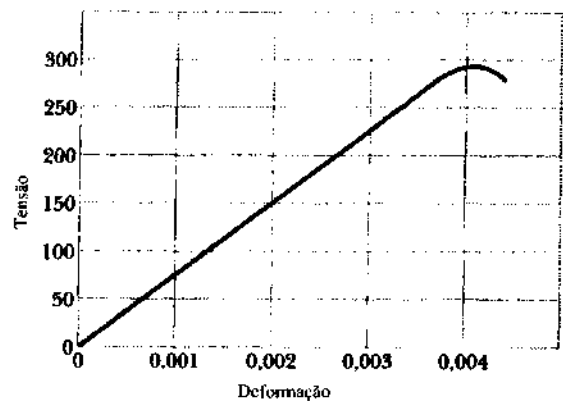


Fig. 13-48 Problema 46.

**47E.** Depois de uma queda, um alpinista de 95 kg fica balançando na extremidade de uma corda que tinha 15 m de comprimento e 9,6 mm de diâmetro, mas que esticou 2,8 cm. Calcule para a corda (a) a deformação, (b) a tensão e (c) o módulo de Young.

**48E.** O elevador de uma mina é sustentado por um único cabo de aço de 2,5 cm de diâmetro. A massa total da gaiola do elevador mais os ocupantes é de 670 kg. De quanto o cabo é esticado quando o elevador está (a) na superfície, 12 m abaixo do motor do elevador, e (b) no fundo do poço de 350 m de profundidade? (Despreze a massa do cabo.)

**49E.** Imagine que o suporte (quadrado) da Fig. 13-9a seja feito de madeira de pinho. Qual deve ser sua espessura para que a tensão de compressão sobre ele seja mantida a 1/6 do valor do seu ponto de ruptura? (Veja o Exemplo 13-5.)

**50E.** Uma barra de alumínio horizontal de 4,8 cm de diâmetro projeta-se 5,3 cm para fora de uma parede. Um objeto de 1.200 kg está pendurado na extremidade dessa barra. O módulo de cisalhamento do alumínio é de  $3,0 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>. Desprezando o peso da barra, determine (a) a tensão de cisalhamento na barra e (b) a deflexão vertical da extremidade da barra.

**51E.** Um cubo sólido de cobre tem uma aresta de 85,5 cm. Qual a pressão que deve ser feita sobre o cubo para reduzir o comprimento da aresta para 85,0 cm? O módulo de elasticidade volumétrica do cobre é de  $1,4 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>.

**52P.** Um túnel de 150 m de comprimento, 7,2 m de altura e 5,8 m de largura (com teto plano) vai ser construído a 60 m abaixo da superfície. (Veja a Fig. 13-49). O teto do túnel será inteiramente sustentado por colunas quadradas de aço, cada uma tendo seção reta de área igual a 960 cm<sup>2</sup>. A densidade do material do solo é de 2,8 g/cm<sup>3</sup>. (a) Qual é o peso total que as colunas terão de sustentar? (b) Quantas colunas serão necessárias para manter a compressão sobre cada coluna, igual à metade do valor do seu ponto de ruptura?

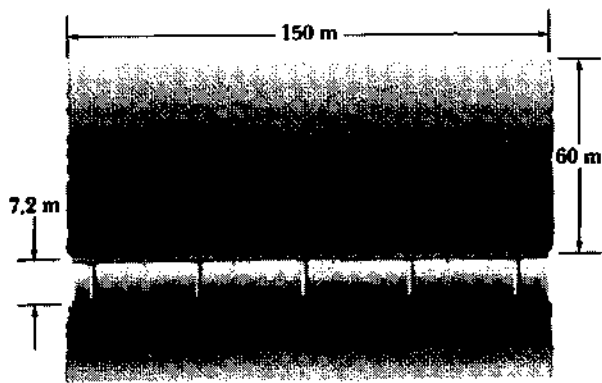


Fig. 13-49 Problema 52.

53P. Uma laje de pedra repousa sobre um plano inclinado de  $26^\circ$ . Fig. 13-50. A laje mede 43 m de comprimento, 2,5 m de espessura e 12 m de largura. Sua densidade é de  $3,2 \text{ g/cm}^3$ . O coeficiente de atrito estático entre a laje e o plano inclinado é igual a 0,39. (a) Calcule a componente do peso da laje paralela ao plano inclinado. (b) Calcule a força de atrito estático. Comparando (a) e (b), pode-se perceber que a laje está prestes a deslizar e isto só não ocorre devido a protuberâncias casuais existentes entre as faces da laje e do plano. (c) Para estabilizar a laje, foram introduzidos parafusos perpendicularmente ao plano inclinado. Se cada parafuso tem seção reta de área igual a  $6,4 \text{ cm}^2$ , e se parte sob uma tensão de cisalhamento de  $3,6 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ , qual será o número mínimo de parafusos necessários? Suponha que os parafusos não afetem a força normal.

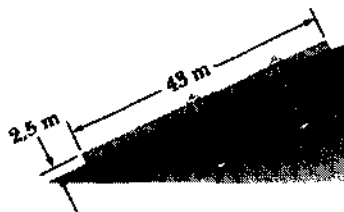


Fig. 13-50 Problema 53.

54P. Na Fig. 13-51, um bloco de chumbo está em repouso horizontalmente sobre os cilindros A e B. As áreas das faces superiores dos cilindros estão relacionadas por  $A_A = 2A_B$ ; os módulos de Young dos cilindros estão relacionados por  $E_A = 2E_B$ . Os cilindros tinham comprimentos idênticos antes do bloco ser colocado sobre eles. (a) Que fração do peso do bloco é suportada pelo cilindro A, e (b) pelo cilindro B? As distâncias horizontais entre o centro de massa do bloco e os eixos centrais dos cilindros são  $d_A$  para o cilindro A e  $d_B$  para o cilindro B. (c) Qual é o valor da razão  $d_A/d_B$ ?

55P. Na Fig. 13-52, uma tora uniforme de 103 kg está suspensa por dois cabos de aço A e B, ambos de raio igual a 1,20 mm. Inicialmente o cabo

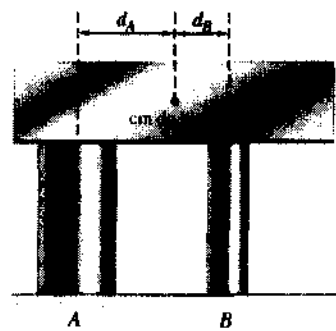


Fig. 13-51 Problema 54.

A tinha 2,50 m e era 2,00 mm mais curto que o cabo B. A tora está agora na horizontal. Quais as forças exercidas sobre ela pelo (a) cabo A e (b) cabo B? (c) Qual é o valor da razão  $d_A/d_B$ ?

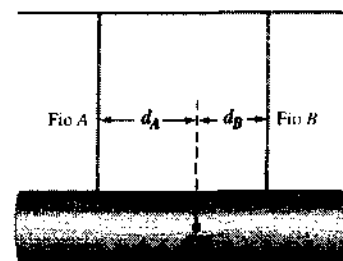


Fig. 13-52 Problema 55.

56P. A Fig. 13-53 é uma vista superior de uma barra rígida que gira em torno de um eixo vertical, até que os calços de borracha idênticos A e B sejam pressionados contra paredes rígidas a distâncias  $r_A$  e  $r_B$  do eixo, respectivamente. Inicialmente, os calços tocam as paredes sem serem comprimidos. A seguir, a força  $F$  é aplicada perpendicularmente à barra a uma distância  $R$  do eixo. Quais são as forças que comprimem (a) A e (b) B?

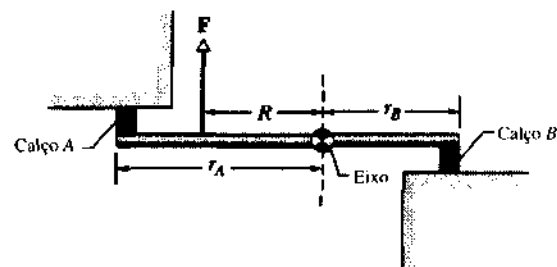


Fig. 13-53 Problema 56.

### PROBLEMAS ADICIONAIS

57. Uma trave uniforme de comprimento igual a 12 m é sustentada por um cabo horizontal e um pino, como mostra a Fig. 13-54. A tensão no cabo é de 400 N. Quais são (a) o peso da trave e (b) as componentes horizontal e vertical da força que o pino exerce sobre a barra?

58. Um andaime de massa igual a 60 kg e comprimento de 5,0 m é sustentado na posição horizontal por cabos verticais em cada uma de suas extremidades. Um lavador de janelas de massa igual a 80 kg fica de pé

num ponto situado a uma distância de 1,5 m de uma das extremidades. Qual é a tensão no cabo (a) mais próximo do lavador de janelas e (b) mais afastado dele?

59. Uma trave uniforme pesando 60 N e de comprimento igual a 3,2 m está presa a um pino na extremidade inferior e sofre a ação de uma força  $F$  de magnitude igual a 50 N, na sua parte superior (Fig. 13-55). A trave é mantida na vertical por um cabo que faz um ângulo de  $25^\circ$  com



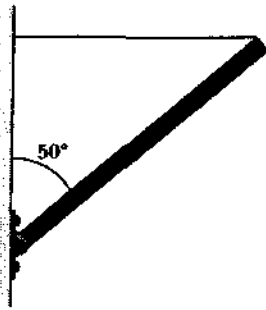


Fig. 13-54 Problema 57.

o solo. Quais são (a) a tensão no cabo e (b) as componentes horizontal e vertical da força que o pino exerce sobre a trave?

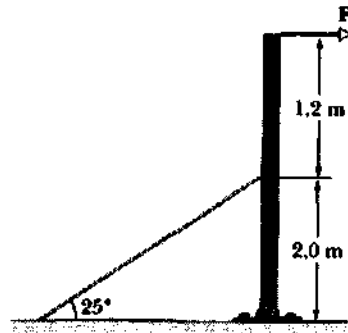


Fig. 13-55 Problema 59.

60. Uma escada uniforme de  $10\text{ m}$  de comprimento pesa  $200\text{ N}$ . A escada está encostada em uma parede vertical, sem atrito, num ponto situado a  $8,0\text{ m}$  acima do solo, como mostra a Fig. 13-56. Uma força horizontal  $F$  é aplicada à escada em um ponto localizado a  $2,0\text{ m}$  de distância da sua

base (medidos ao longo da escada). (a) Se  $F = 50\text{ N}$ , qual é a força que o solo exerce sobre a escada, em termos dos vetores unitários indicados na figura? (b) Se  $F = 150\text{ N}$ , qual é a força exercida pelo solo sobre a escada, em termos dos vetores unitários? (c) Suponha que o coeficiente de atrito estático entre a escada e o solo seja igual a  $0,38$ . Para qual valor mínimo de  $F$  a base da escada começará a se mover em direção à parede?

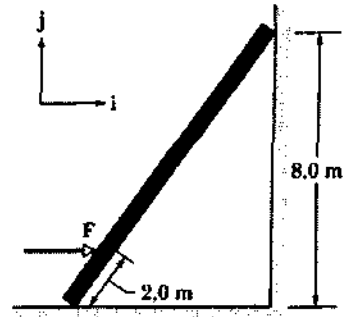


Fig. 13-56 Problema 60.

61. O sistema mostrado na Fig. 13-57 está em equilíbrio. Se  $M = 2,0\text{ kg}$ , qual é a tensão (a) no fio  $ab$  e (b) no fio  $bc$ ?

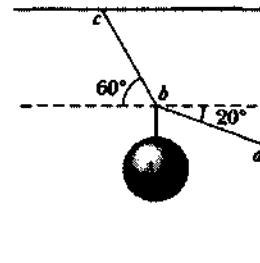


Fig. 13-57 Problema 61.



*Quando o terceiro jogo do Campeonato Mundial de 1989 estava para começar em Oakland, Califórnia, ondas sísmicas de um terremoto de magnitude 7,5 próximo de Loma Prieta, a 100 km de distância, atingiram a área causando grandes danos e matando 67 pessoas. Esta fotografia mostra parte de uma seção de 1,4 km de comprimento do Elevado Nimitz, onde o pavimento superior caiu sobre o inferior, fechando-se como uma armadilha e causando dezenas de mortes. Obviamente, o colapso foi devido ao violento balanço causado pelas ondas sísmicas. Mas por que aquela seção em particular foi tão severamente danificada, enquanto o resto do elevado, construído de forma quase idêntica, escapou ao colapso?*

## 14-1 Oscilações

Estamos cercados de oscilações — movimentos que se repetem. Temos lustres oscilantes, barcos balançando no cais e o movimento dos pistões nos motores dos carros. Existem cordas vibrantes nos violões, tambores, sinos, diafragmas nos telefones e alto-falantes, e cristais de quartzo nos relógios de pulso. Menos evidentes são as oscilações das moléculas do ar que transmitem a sensação de som, dos átomos de um sólido que dão a sensação de temperatura e dos elétrons nas antenas dos transmissores de rádio e televisão.

O formalismo matemático que descreve as oscilações não se aplica apenas a objetos materiais, como cordas de violino e elétrons. É usado também no estudo das ondas eletromagnéticas (luz, ondas de rádio, raios X, raios gama, microondas). Você irá estudar esses fenômenos alguns capítulos mais adiante e será muito auxiliado, então, pela

analogia com as oscilações mecânicas que vai começar a estudar aqui.

Oscilações no mundo real são em geral *amortecidas*, isto é, o movimento se reduz gradualmente, transformando energia mecânica em energia térmica, pela ação das forças de atrito. Não podemos eliminar totalmente tais perdas de energia mecânica, mas é possível recarregar a energia a partir de alguma fonte. As crianças na Fig. 14-1, por exemplo, sabem que balançando suas pernas ou troncos podem impulsionar o balanço e manter ou aumentar as oscilações. Fazendo isto, transformam energia bioquímica em energia mecânica do sistema oscilante.

## 14-2 Movimento Harmônico Simples

A Fig. 14-2 mostra uma série de “instantâneos” de um sistema oscilatório simples, uma partícula movendo-se repetidamente para a frente e para trás em torno da origem, no



Fig. 14-1 Uma criança logo aprende como manter as oscilações de um balanço, transferindo energia para o seu movimento.

eixo  $x$ . Nesta seção apenas descrevemos o movimento. Mais tarde, iremos discutir como obter tal movimento.

Uma propriedade importante do movimento oscilatório é a sua **frequência**, ou número de oscilações que são completadas em cada segundo. O símbolo para frequência é  $f$  e sua unidade SI é o **hertz** (abreviado como Hz), onde

$$1 \text{ hertz} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ oscilação por segundo} = 1 \text{ s}^{-1}. \quad (14-1)$$

O **período**  $T$  do movimento, que é o tempo para completar uma oscilação, está relacionado à frequência por

$$T = \frac{1}{f} \quad (14-2)$$

Qualquer movimento que se repita a intervalos regulares é chamado **movimento periódico** ou **movimento harmônico**. Estamos interessados aqui em um movimento que se repete de uma forma particular, especificamente, como aquele da Fig. 14-2. Pode-se demonstrar que em tal movimento o deslocamento da partícula, desde a origem, é dado como uma função do tempo por

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{deslocamento}), \quad (14-3)$$

onde  $x_m$ ,  $\omega$  e  $\phi$  são constantes. Este movimento é denominado **movimento harmônico simples** (MHS), significando que a posição é uma função senoidal do tempo.

A quantidade  $x_m$  na Eq. 14-3, uma constante positiva cujo valor depende de como o movimento foi iniciado, é chamada de **amplitude** do movimento; o índice  $m$  representa **máximo**, porque a amplitude é a magnitude do deslocamento máximo da partícula em qualquer direção. A função cosseno na Eq. 14-3 varia entre os limites  $\pm 1$ , logo o des-

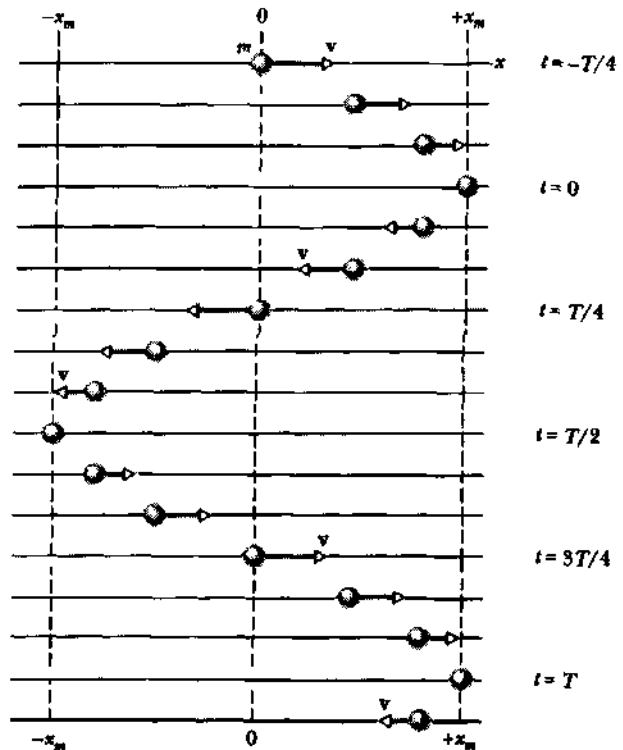


Fig. 14-2 Uma seqüência de “instantâneos” (tomados em intervalos iguais de tempo) mostrando a posição de uma partícula enquanto oscila para frente e para trás, em torno da origem ao longo do eixo  $x$ , entre os limites  $+x_m$  e  $-x_m$ . As setas dos vetores estão em escala para indicar a velocidade da partícula. A velocidade é máxima, quando ela está na origem, e zero, quando em  $\pm x_m$ . Se o tempo  $t$  é arbitrado como zero, quando a partícula está em  $+x_m$ , então a partícula retorna a  $+x_m$  em  $t = T$ , onde  $T$  é o período do movimento. Este é, então, repetido.

locamento  $x(t)$  varia entre os limites  $\pm x_m$ , como mostra a Fig. 14-2.

A quantidade que varia com o tempo ( $\omega t + \phi$ ) na Eq. 14-3 é denominada **fase** do movimento e a constante  $\phi$  é chamada **fase inicial** (ou **ângulo de fase**). O valor de  $\phi$  depende do deslocamento e da velocidade da partícula em  $t = 0$ . Nos gráficos  $x(t)$  da Fig. 14-3a, a constante de fase  $\phi$  é zero (compare o gráfico e a Eq. 14-3 para  $t = 0$ ).

Resta interpretar a constante  $\omega$ . O deslocamento  $x(t)$  deve retornar a seu valor inicial depois de um período  $T$  do movimento. Isto é,  $x(t)$  deve ser igual a  $x(t + T)$  para qualquer  $t$ . Para simplificar nossa análise, façamos com que  $\phi = 0$  na Eq. 14-3. Daquela equação, temos então,

$$x_m \cos \omega t = x_m \cos \omega(t + T).$$

A função cosseno se repete pela primeira vez quando seu argumento (a fase) aumentou de  $2\pi$  radianos, de forma que devemos ter, na equação anterior,

$$\omega(t + T) = \omega t + 2\pi$$

ou

$$\omega T = 2\pi.$$

Então na Eq. 14.2

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f. \quad (14-4)$$

A quantidade  $\omega$  é chamada **freqüência angular** do movimento; sua unidade SI é o radiano por segundo. (Para ser consistente, então  $\phi$  deve estar em radianos.) A Fig. 14-3 compara  $x(t)$  para dois movimentos harmônicos simples que se distinguem ou em amplitude, em período (desta forma em freqüência e freqüência angular) ou em fase inicial.

**MHS — A Velocidade**

Derivando a Eq. 14-3, podemos encontrar a velocidade de uma partícula com um movimento harmônico simples. Isto é,

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} [x_m \cos(\omega t + \phi)]$$

ou

$$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi) \quad (\text{velocidade}). \quad (14-5)$$

A Fig. 14-4a é um gráfico da Eq. 14-3 com  $\phi = 0$ . A Fig. 14-4b mostra a Eq. 14-5, também com  $\phi = 0$ . Analogamente à amplitude  $x_m$  na Eq. 14-3, a quantidade positiva  $\omega x_m$  na Eq. 14-5 é denominada **amplitude de velocidade**  $v_m$ . Como você pode ver na Fig. 14-4b, a velocidade da partícula oscilante varia entre os limites  $\pm v_m = \pm \omega x_m$ . Note também naquela figura como a curva de  $v(t)$  é *deslocada* (para a esquerda) em relação à curva de  $x(t)$  de um quarto de período; quando a magnitude do deslocamento é máxima (isto é,  $x(t) = x_m$ ), a da velocidade é mínima (isto é,  $v(t) = 0$ ). E quando a magnitude do deslocamento é mínima (isto é, zero), a magnitude da velocidade é máxima (isto é,  $v_m$ ).

**MHS — A Aceleração**

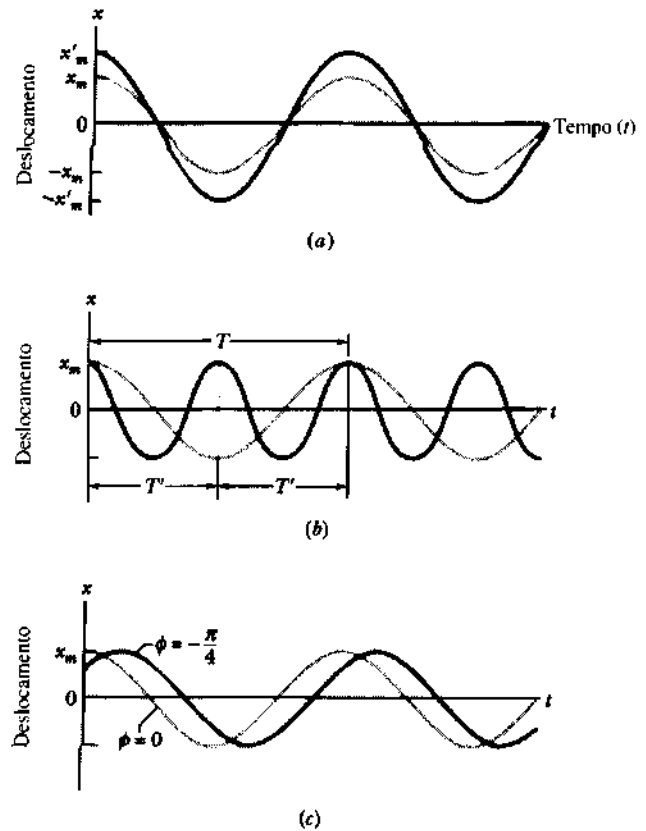
Conhecendo a velocidade  $v(t)$  para um movimento harmônico simples, podemos encontrar a **aceleração da partícula** derivando mais uma vez. Então temos, da Eq. 14-5

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} [-\omega x_m \sin(\omega t + \phi)]$$

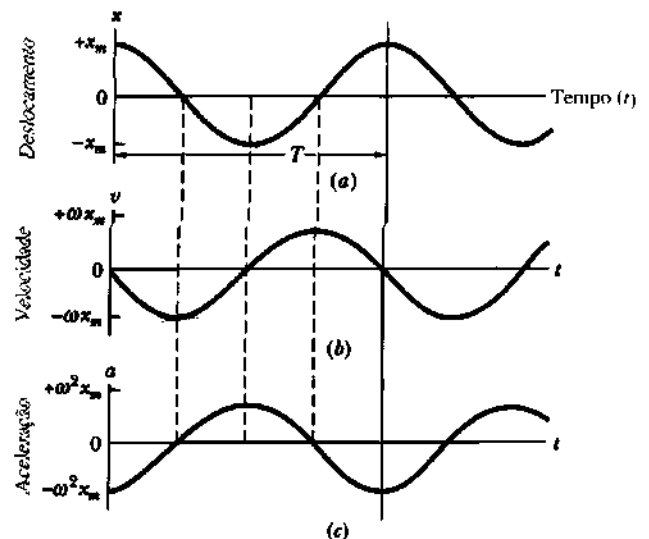
ou

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{aceleração}). \quad (14-6)$$

A Fig. 14-4c é uma representação da Eq. 14-6 quando  $\phi = 0$ . A quantidade positiva  $\omega^2 x_m$  na Eq. 14-6 é chamada **amplitude de aceleração**  $a_m$ . Isto é, a aceleração da partícula varia entre os limites  $\pm a_m = \pm \omega^2 x_m$ , como mostra a Fig. 14-4c. Observe também que a curva de  $a(t)$  é deslocada



**Fig. 14-3** Em todos os três casos, a curva mais clara (cinza) é obtida da Eq. 14-3 com  $\phi = 0$ . (a) A curva vermelha difere da azul apenas em sua amplitude  $x'_m$  que é maior. (b) A curva vermelha difere da azul apenas em seu período que é  $T' = T/2$ . (c) A curva mais escura (preta) difere da outra apenas em  $\phi = -\pi/4$  rad, em lugar de zero.



**Fig. 14-4** (a) O deslocamento  $x(t)$  de uma partícula oscilando em MHS com um ângulo de fase  $\phi = 0$  (veja Eq. 14-3). O período  $T$  marca uma oscilação completa. (b) A velocidade  $v(t)$  da partícula (veja Eq. 14-5). (c) A aceleração  $a(t)$  da partícula (veja Eq. 14-6). Note o deslocamento relativo (ou diferença de fase) entre as curvas.

(para a esquerda) de um quarto de período em relação à curva de  $v(t)$ .

Podemos combinar as Eqs. 14-3 e 14-6 para obter

$$a(t) = -\omega^2 x(t), \quad (14-7)$$

que é a equação característica do movimento harmônico simples: a aceleração é proporcional ao deslocamento, mas com o sinal oposto, e as duas quantidades são relacionadas pelo quadrado da frequência angular. Assim, quando o deslocamento tem seu maior valor positivo, a aceleração tem seu maior valor negativo e vice-versa. Quando o deslocamento é zero, a aceleração também é zero.

### TÁTICAS PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

#### TÁTICA 1: FASES INICIAIS

Note o efeito da fase inicial  $\phi$  num gráfico de  $x(t)$ . Quando  $\phi = 0$ , o gráfico de  $x(t)$  é como aquele da Fig. 14-4a, uma típica curva de cosseno. Um valor *negativo* para  $\phi$  desloca a curva para a *direita* ao longo do eixo  $t$  (como na Fig. 14-3c), enquanto um valor *positivo* desloca para a *esquerda*.

Diz-se que dois gráficos de MHS com diferentes fases iniciais têm *diferença de fase*, ou cada um é *deslocado de fase* do outro ou está *fora de fase* em relação ao outro. As curvas na Fig. 14-3c, por exemplo, têm uma diferença de fase de  $\pi/4$  rad.

Como o MHS repete-se a cada período  $T$  e a função cosseno a cada  $2\pi$  rad, um período  $T$  representa uma diferença de fase de  $2\pi$  rad. Na Fig. 14-4,  $x(t)$  tem um deslocamento de fase para a direita em relação a  $v(t)$  de um quarto de período ou  $-\pi/2$  rad, e para a direita em relação a  $a(t)$  por meio período ou  $-\pi$  rad. Um desvio de fase de  $2\pi$  rad faz com que a curva do MHS coincida com ela mesma. O gráfico do seno é deslocado de  $-\pi/2$  rad em relação ao do cosseno.

### 14-3 Movimento Harmônico Simples: A Lei de Força

Quando sabemos como a aceleração de uma partícula varia com o tempo, podemos usar a segunda lei de Newton para descobrir qual força deve agir na partícula para causar aquela aceleração. Se combinarmos a segunda lei de Newton e a Eq. 14-7, encontramos, para o movimento harmônico simples,

$$F = ma = -(m\omega^2)x. \quad (14-8)$$

Este resultado — uma força proporcional ao deslocamento, mas com o sinal oposto — é familiar. É a lei de Hooke

$$F = -kx \quad (14-9)$$

para uma mola, sendo aqui a constante elástica

$$k = m\omega^2. \quad (14-10)$$

Podemos de fato adotar a Eq. 14-9 como uma definição alternativa do movimento harmônico simples, que diz:

Movimento harmônico simples é o movimento executado por uma partícula de massa  $m$  sujeita a uma força que é proporcional ao deslocamento da partícula, mas com o sinal oposto.

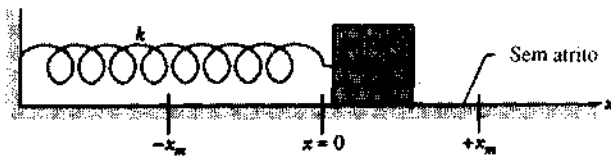


Fig. 14-5 Um oscilador harmônico simples. O bloco — como a partícula da Fig. 14-2 — move-se em movimento harmônico simples quando é puxado para o lado e liberado. Seu deslocamento é então dado pela Eq. 14-3.

O sistema massa-mola da Fig. 14-5 forma um **oscilador harmônico linear simples** (oscilador linear, simplificando), onde “linear” indica que  $F$  é proporcional a  $x$  em lugar de alguma outra potência de  $x$ . A frequência angular do movimento harmônico simples do bloco é relacionada à constante de mola  $k$  e à massa  $m$  do bloco pela Eq. 14-10, que nos dá

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{frequência angular}) \quad (14-11)$$

Combinando as Eqs. 14-4 e 14-11, podemos escrever, para o **período** do oscilador linear da Fig. 14-5,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (\text{período}) \quad (14-12)$$

As Eqs. 14-11 e 14-12 nos mostram que uma grande frequência angular (e logo, um período pequeno) está ligada a uma mola forte ( $k$  grande) e um bloco leve ( $m$  pequena).

Todo sistema oscilante, seja o oscilador linear da Fig. 14-5, um trampolim ou uma corda de violino, tem alguma propriedade ligada à “elasticidade” e outra à “inércia” ou massa, e logo, se parece com um oscilador linear. No oscilador linear da Fig. 14-5, esses elementos estão localizados em partes separadas do sistema, a elasticidade inteiramente na mola que consideramos sem massa, e a inércia localizada inteiramente no bloco, que consideramos rígido. Numa corda de violino, entretanto, os dois elementos estão presentes, como veremos no Cap. 17.

**EXEMPLO 14-1** Um bloco cuja massa  $m$  é de 680 g está preso a uma determinada mola cuja constante de elasticidade  $k$  é 65 N/m. O bloco é puxado à distância  $x = 11$  cm de sua posição de equilíbrio em  $x = 0$ , numa superfície sem atrito e liberado a partir do repouso em  $t = 0$  (veja Fig. 14-5).

a. Qual a força que a mola exerce sobre o bloco, logo antes que este seja solto?

**Solução** Da lei de Hooke,

$$\begin{aligned} F &= -kx = -(65 \text{ N/m})(0,11 \text{ m}) \\ &= -7,2 \text{ N.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

O sinal menos indica que a força da mola sobre o bloco, que aponta para a origem, é oposta ao deslocamento do bloco, que aponta para fora da origem.

b. Qual a frequência angular, a frequência e o período da oscilação resultante?

**Solução** Da Eq. 14-11, temos

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{65 \text{ N/m}}{0,68 \text{ kg}}} = 9,78 \text{ rad/s}$$

$$\approx 9,8 \text{ rad/s.} \quad (\text{Resposta})$$

A frequência vem da Eq. 14-4, que nos dá

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{9,78 \text{ rad/s}}{2\pi} = 1,56 \text{ Hz} \approx 1,6 \text{ Hz,} \quad (\text{Resposta})$$

e o período da Eq. 14-3, que nos dá

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1,56 \text{ Hz}} = 0,64 \text{ s} = 640 \text{ ms} \quad (\text{Resposta})$$

c. Qual a amplitude da oscilação?

**Solução** Como discutido na Seção 8-4, a energia mecânica de um sistema massa-mola, como aquele na Fig. 14-5, é conservada porque o sistema é suposto sem atrito. Como o bloco é liberado do repouso a 11 cm de seu ponto de equilíbrio, tem uma energia cinética zero, sempre que estiver de novo a 11 cm daquele ponto (veja Fig. 8-5). Então, seu deslocamento máximo é de 11 cm; isto é,

$$x_m = 11 \text{ cm.} \quad (\text{Resposta})$$

d. Qual a velocidade máxima do bloco oscilante?

**Solução** Da Eq. 14-5 vemos que a amplitude de velocidade é

$$v_m = \omega x_m = (9,78 \text{ rad/s})(0,11 \text{ m})$$

$$= 1,1 \text{ m/s.} \quad (\text{Resposta})$$

Esta velocidade máxima ocorre quando o bloco em oscilação está passando pela origem; compare as Figs. 14-4a e 14-4b.

e. Qual o módulo da aceleração máxima do bloco?

**Solução** Da Eq. 14-6 vemos que a amplitude de aceleração é

$$a_m = \omega^2 x_m = (9,78 \text{ rad/s})^2(0,11 \text{ m})$$

$$= 11 \text{ m/s}^2. \quad (\text{Resposta})$$

Esta aceleração máxima ocorre quando o bloco está nos extremos de sua trajetória. Nesses pontos, a força agindo no bloco tem intensidade máxima; compare as Figs. 14-4a e 14-4c.

f. Qual a fase inicial  $\phi$  do movimento?

**Solução** Em  $t = 0$ , o instante em que o bloco é liberado, o deslocamento dele é máximo ( $x_m$ ) e a sua velocidade é zero. Se colocarmos estas condições iniciais, como são chamadas, nas Eqs. 14-3 e 14-5, achamos

$$1 = \cos \phi \quad \text{e} \quad 0 = \sin \phi,$$

respectivamente. O menor ângulo que satisfaz às duas condições é  $\phi = 0$ . (Qualquer ângulo que seja um múltiplo inteiro de  $2\pi$  rad também satisfaz a esses requisitos.)

**EXEMPLO 14-2** Em  $t = 0$ , o deslocamento  $x(0)$  de um bloco num oscilador linear, como aquele da Fig. 14-5, é  $-8,50$  cm. Sua velocidade  $v(0)$  então é  $-0,920$  m/s e sua aceleração  $a(0)$  é de  $+47,0$  m/s<sup>2</sup>.

a. Qual a frequência angular  $\omega$  e a frequência  $f$  do sistema?

**Solução** Se colocarmos  $t = 0$  nas Eqs. 14-3, 14-5 e 14-6, acharemos

$$x(0) = x_m \cos \phi, \quad (14-13)$$

$$v(0) = -\omega x_m \sin \phi, \quad (14-14)$$

e

$$a(0) = -\omega^2 x_m \cos \phi. \quad (14-15)$$

Essas três equações contêm três incógnitas, ou seja,  $x_m$ ,  $\phi$  e  $\omega$ . Podemos encontrar todas as três, mas aqui precisamos apenas de  $\omega$ .

Se dividirmos a Eq. 14-15 pela Eq. 14-13, o resultado é

$$\omega = \sqrt{-\frac{a(0)}{x(0)}} = \sqrt{-\frac{47,0 \text{ m/s}^2}{-0,0850 \text{ m}}}$$

$$= 23,5 \text{ rad/s.} \quad (\text{Resposta})$$

A frequência  $f$  vem da Eq. 14-4 e é

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{23,5 \text{ rad/s}}{2\pi} = 3,74 \text{ Hz.} \quad (\text{Resposta})$$

b. Qual a fase inicial  $\phi$ ?

**Solução** Se dividirmos a Eq. 14-14 pela Eq. 14-13, acharemos

$$\frac{v(0)}{x(0)} = \frac{-\omega x_m \sin \phi}{x_m \cos \phi} = -\omega \tan \phi.$$

Resolvendo para  $\tan \phi$ , achamos

$$\tan \phi = -\frac{v(0)}{\omega x(0)} = -\frac{-0,920 \text{ m/s}}{(23,5 \text{ rad/s})(-0,0850 \text{ m})}$$

$$= -0,461.$$

Esta equação tem duas soluções:

$$\phi = -25^\circ \quad \text{e} \quad \phi = 155^\circ.$$

Você verá na parte (c) como escolher entre elas.

c. Qual a amplitude  $x_m$  do movimento?

**Solução** Da Eq. 14-13 temos, fazendo  $\phi = 155^\circ$

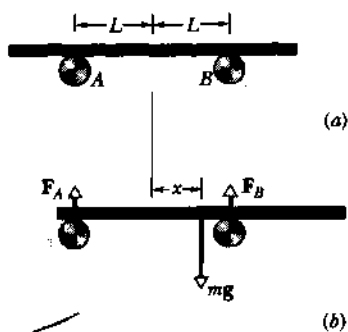
$$x_m = \frac{x(0)}{\cos \phi} = \frac{-0,0850 \text{ m}}{\cos 155^\circ} = 0,094 \text{ m}$$

$$= 9,4 \text{ cm.} \quad (\text{Resposta})$$

Se tivéssemos escolhido  $\phi = -25^\circ$ , teríamos achado  $x_m = -9,4$  cm. Entretanto, a amplitude do movimento deve sempre ser uma constante *positiva*, então  $-25^\circ$  não pode ser a fase inicial correta. Desta forma devemos escolher, na parte (b).

$$\phi = 155^\circ. \quad (\text{Resposta})$$

**EXEMPLO 14-3** Na Fig. 14-6a, uma barra uniforme com massa  $m$  está colocada simetricamente sobre dois cilindros fixos,  $A$  e  $B$ , que giram rapidamente com uma distância  $L = 2,0$  cm entre o centro de massa da



**Fig. 14-6** Exemplo 14-3. (a) Uma barra está em equilíbrio sobre dois cilindros giratórios, A e B, que deslizam sob ela. (b) A barra é deslocada de  $x$  e então liberada.

barra e cada cilindro. Os cilindros, cujas direções de rotação estão indicadas na figura, deslizam contra a barra com coeficiente de atrito cinético de  $\mu_c = 0,40$ . Suponha que a barra seja deslocada horizontalmente da distância  $x$ , como na Fig. 14-6b, e então liberada.

a. Qual a frequência angular  $\omega$  do movimento harmônico resultante (para a frente e para trás) da barra?

**Solução** Para encontrar  $\omega$ , achamos uma expressão para a aceleração horizontal  $a$  da barra como uma função de  $x$  e comparamos com a Eq. 14-7. Fazemos isto aplicando a segunda lei de Newton vertical e horizontalmente; então, usamos a lei na forma angular em relação ao ponto de contato entre a barra e o cilindro A.

As forças verticais agindo na barra são seu peso  $mg$ , e as forças  $F_A$  devido ao cilindro A e  $F_B$  devido ao cilindro B. Como não há uma força resultante vertical agindo sobre a barra, a segunda lei de Newton nos dá

$$\sum F_y = F_A + F_B - mg = 0. \quad (14-16)$$

As forças horizontais agindo sobre a barra são as forças de atrito cinético  $f_{cA} = \mu_c F_A$  (para a direita) devido ao cilindro A, e  $f_{cB} = -\mu_c F_B$  (para a esquerda) devido ao cilindro B. Horizontalmente, a segunda lei de Newton nos dá

$$\mu_c F_A - \mu_c F_B = ma,$$

ou

$$a = \frac{\mu_c F_A - \mu_c F_B}{m}. \quad (14-17)$$

A barra não sofre nenhum torque resultante no eixo perpendicular ao plano da Fig. 14-6, através do ponto de contato entre a barra e o cilindro A. Então, a segunda lei de Newton para torques sobre um eixo nos dá

$$\sum \tau = F_A(0) + F_B 2L - mg(L+x) + f_{cA}(0) + f_{cB}(0) = 0, \quad (14-18)$$

onde as forças  $F_A$ ,  $F_B$ ,  $mg$ ,  $f_{cA}$  e  $f_{cB}$  têm braços de alavanca sobre este eixo 0,  $L$ ,  $L+x$ , 0 e 0, respectivamente.

Resolvendo as Eqs. 14-16 e 14-18 para  $F_A$  e  $F_B$ , encontramos

$$F_A = \frac{mg(L-x)}{2L} \quad \text{e} \quad F_B = \frac{mg(L+x)}{2L}.$$

Substituindo estes resultados na Eq. 14-17 obtemos

$$a = -\frac{\mu_c g}{L} x. \quad (14-19)$$

A comparação entre as Eqs. 14-19 e 14-7 revela que a barra está sujeita a um movimento harmônico simples com uma frequência angular  $\omega$  dada por

$$\omega^2 = \frac{\mu_c g}{L}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{\mu_c g}{L}} = \sqrt{\frac{(0,40)(9,8 \text{ m/s}^2)}{0,020 \text{ m}}} \\ &= 14 \text{ rad/s.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

b. Qual o período  $T$  do movimento da barra?

**Solução** Da Eq. 14-4, achamos

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{14 \text{ rad/s}} = 0,45 \text{ s.} \quad (\text{Resposta})$$

Note que, enquanto a barra for capaz de deslizar sobre os cilindros,  $\omega$  e  $T$  são independentes da massa  $m$ .

## 14-4 Movimento Harmônico Simples: Considerações Sobre Energia

A Fig. 8-5 mostra como a energia de um oscilador linear se alterna entre as formas cinética e potencial, enquanto sua soma — a energia mecânica  $E$  — permanece constante. Agora, vamos considerar esta situação quantitativamente.

A energia potencial de um oscilador linear, como aquele da Fig. 14-5, é associada inteiramente à mola. Seu valor depende de quanto ela foi esticada ou comprimida, isto é, de  $x(t)$ . Usamos a Eq. 14-3 para achar

$$U(t) = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kx_m^2 \cos^2(\omega t + \phi). \quad (14-20)$$

A energia cinética do sistema está associada inteiramente com a massa. Seu valor depende de quão rápido o bloco está se movendo, isto é, de  $v(t)$ . Usamos a Eq. 14-5 para achar

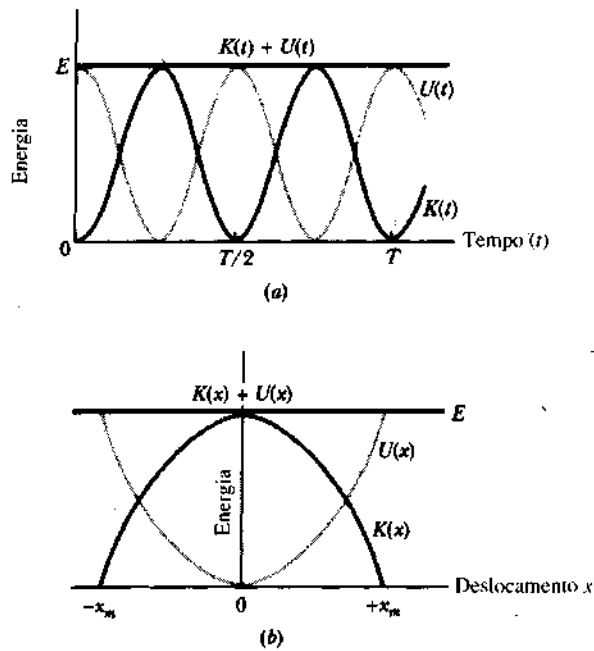
$$K(t) = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (-\omega x_m)^2 \sin^2(\omega t + \phi). \quad (14-21)$$

Se usarmos a Eq. 14-11 para substituir  $k/m$  por  $\omega^2$ , podemos escrever a Eq. 14-21 como

$$K(t) = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k x_m^2 \sin^2(\omega t + \phi). \quad (14-22)$$

A energia mecânica é obtida das Eqs. 14-20 e 14-22 e é

$$\begin{aligned} E &= U + K \\ &= \frac{1}{2} k x_m^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} k x_m^2 \sin^2(\omega t + \phi) \\ &= \frac{1}{2} k x_m^2 [\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)]. \end{aligned}$$



**Fig. 14-7** (a) A energia potencial  $U(t)$ , a energia cinética  $K(t)$  e a energia mecânica total  $E$  como funções do tempo, para um oscilador harmônico linear. Note que todas as energias são positivas e que a energia potencial e a cinética têm dois máximos em cada período. (b) A energia potencial  $U(x)$ , a energia cinética  $K(x)$  e a energia mecânica  $E$  como funções da posição, para um oscilador harmônico linear com amplitude  $x_m$ . Note que para  $x = 0$  a energia é toda cinética e para  $x = \pm x_m$  é toda potencial.

Entretanto, para qualquer ângulo  $\alpha$ ,

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Desta forma, a quantidade entre colchetes acima é igual à unidade e temos

$$E = U + K = \frac{1}{2} k x_m^2 \quad (14-23)$$

que é realmente uma constante, independente do tempo. A energia potencial e a energia cinética de um oscilador linear são mostradas como uma função do tempo na Fig. 14-7a, e como uma função do deslocamento na Fig. 14-7b.

Agora, você pode entender por que um sistema oscilante normalmente contém um elemento de elasticidade e outro de inércia: usa o primeiro para armazenar sua energia potencial e o último para acumular sua energia cinética. O sistema no Exemplo 14-3 é uma exceção, porque não há energia potencial envolvida. Em vez disso, a energia transferida pelos cilindros para a barra varia com o tempo.

**EXEMPLO 14-4** a. Qual a energia mecânica do oscilador linear do Exemplo 14-1?

**Solução** Acharmos, substituindo os dados do Exemplo 14-1 na Eq. 14-23,

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} k x_m^2 = \left(\frac{1}{2}\right)(65 \text{ N/m})(0,11 \text{ m})^2 \\ &= 0,393 \text{ J} \approx 0,39 \text{ J.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Este valor permanece constante durante o movimento.

b. Qual a energia potencial deste oscilador quando a partícula está a meio caminho do extremo da trajetória, isto é, quando  $x = \pm x_m/2$ ?

**Solução** Para cada deslocamento, a energia potencial é dada pela Eq. 14-20:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k \left(\frac{1}{2} x_m\right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} k x_m^2\right) \\ &= \frac{1}{4} E = \left(\frac{1}{4}\right)(0,393 \text{ J}) = 0,098 \text{ J.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

c. Qual a energia cinética do oscilador quando  $x = x_m/2$ ?

**Solução** Encontramos isto a partir de

$$\begin{aligned} K &= E - U \\ &= 0,393 \text{ J} - 0,098 \text{ J} \approx 0,30 \text{ J.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Assim, neste ponto da oscilação, 25% da energia está em forma potencial e 75% em forma cinética.

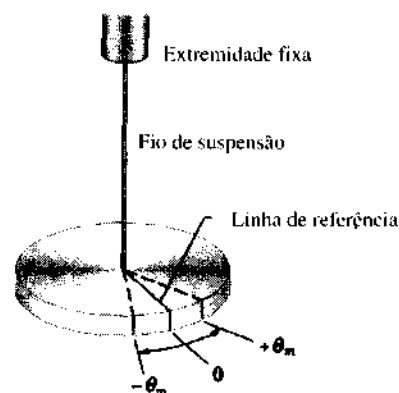
### 14-5 Um Oscilador Harmônico Simples Angular

A Fig. 14-8 mostra uma versão angular de um oscilador harmônico linear simples; o elemento de elasticidade é associado à torção de um fio de suspensão, em lugar da extensão e compressão da mola. O artefato é denominado **pêndulo de torção**, onde *torção* se refere ao fio.

Se girarmos o disco da Fig. 14-8, a partir de sua posição de repouso (indicada pela linha de referência marcada com 0), e depois o soltarmos, ele irá oscilar em torno daquela posição num **movimento harmônico angular simples**. Rodando o disco de um ângulo  $\theta$ , em qualquer direção, fazemos aparecer um torque restaurador dado por

$$\tau = -\kappa\theta. \quad (14-24)$$

Aqui,  $\kappa$  (a letra grega *kappa*) é uma constante, denominada **constante de torção**, que depende do comprimento, do diâmetro e do material do fio de suspensão.



**Fig. 14-8** Um oscilador harmônico simples angular ou pêndulo de torção é uma versão angular do oscilador harmônico simples linear da Fig. 14-5. O disco oscila no plano horizontal; a linha de referência oscila com amplitude angular  $\theta_m$ . A torção no fio de suspensão armazena energia potencial como se fosse uma mola e fornece o torque de recuperação.



A comparação da Eq. 14-24 com a Eq. 14-9 nos leva a suspeitar que a primeira é a forma angular da lei de Hooke, e que podemos transformar a Eq. 14-12, que dá o período de um MHS linear, em uma equação para o período de um MHS angular: substituímos a constante elástica  $k$  na Eq. 14-12 pelo seu equivalente, a constante  $\kappa$  da Eq. 14-24, e substituímos a massa  $m$  na Eq. 14-12 pelo seu equivalente, o momento de inércia  $I$  do disco oscilante. Essas substituições nos levam a

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\kappa}} \quad (\text{pêndulo de torção}) \quad (14-25)$$

para o período do oscilador harmônico simples angular, ou pêndulo de torção.

**EXEMPLO 14-5** Como a Fig. 14-9a mostra, uma haste fina cujo comprimento  $L$  é de 12,4 cm e cuja massa  $m$  é de 135 g está suspensa em seu ponto médio por um fio longo. O período  $T_a$  do MHS angular foi medido como sendo 2,53 s. Um objeto irregular, que chamaremos de objeto X, é então suspenso no mesmo fio, como na Fig. 14-9b, e encontramos para seu período  $T_b$ , 4,76 s.

a. Qual o momento de inércia do objeto X em relação ao eixo de suspensão?

**Solução** Da Tabela 11-2(e), a inércia rotacional (ou momento de inércia) de uma haste fina sobre um eixo perpendicular através de seu ponto médio é  $mL^2/12$ . Então, temos

$$I_a = \frac{1}{12} mL^2 = \left(\frac{1}{12}\right)(0,135 \text{ kg})(0,124 \text{ m})^2 = 1,73 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Agora, vamos escrever a Eq. 14-25 duas vezes, uma para a haste e outra para o objeto X:

$$T_a = 2\pi \sqrt{\frac{I_a}{\kappa}} \quad \text{e} \quad T_b = 2\pi \sqrt{\frac{I_b}{\kappa}}.$$

Aqui os índices referem-se às Figs. 14-9a e 14-9b. A constante  $\kappa$ , que é uma propriedade do fio, é a mesma para ambas; apenas os períodos e os momentos de inércia são diferentes.

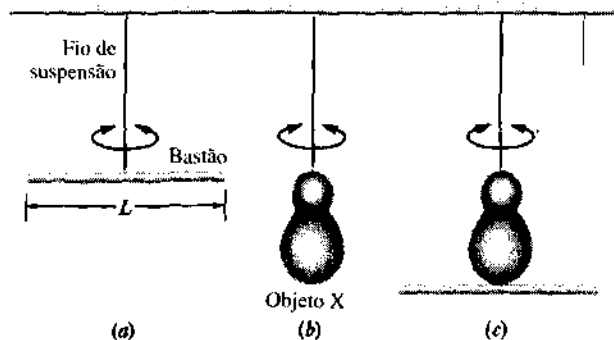


Fig. 14-9 Exemplo 14-5. Três pêndulos de torção: (a) uma haste, (b) um objeto irregular e (c) os objetos conectados rigidamente.

Vamos elevar ao quadrado cada uma dessas duas equações, dividir a segunda pela primeira e resolver a equação resultante para  $I_b$ . O resultado é

$$I_b = I_a \frac{T_a^2}{T_b^2} = (1,73 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2) \frac{(4,76 \text{ s})^2}{(2,53 \text{ s})^2} = 6,12 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2. \quad (\text{Resposta})$$

b. Qual seria o período de oscilação, se ambos os objetos fossem ligados e pendurados no fio, como na Fig. 14-9c?

Podemos novamente escrever a Eq. 14-25 duas vezes, desta vez como

$$T_a = 2\pi \sqrt{\frac{I_a}{\kappa}} \quad \text{e} \quad T_c = 2\pi \sqrt{\frac{I_c}{\kappa}}.$$

Achamos, após dividir de novo e colocando  $I_c = I_a + I_b$ , que

$$T_c = T_a \sqrt{\frac{I_c}{I_a}} = T_a \sqrt{\frac{I_a + I_b}{I_a}} = T_a \sqrt{1 + \frac{I_b}{I_a}} = (2,53) \sqrt{1 + \frac{6,12 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{1,73 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}} = 5,39 \text{ s}. \quad (\text{Resposta})$$

## 14-6 Pêndulos

Passamos agora para uma classe de osciladores harmônicos simples em que a força restauradora está associada à gravidade, em lugar das propriedades elásticas de um fio torcido ou de uma mola comprimida ou esticada.

### O Pêndulo Simples

Se você pendurar uma maçã na extremidade de um fio longo fixado em sua extremidade superior, puxar a maçã por uma pequena distância para a esquerda ou para a direita e depois soltá-la, notará facilmente que o movimento subsequente da maçã é periódico. Ele é, de fato, um movimento harmônico simples? Vamos construir um modelo ideal

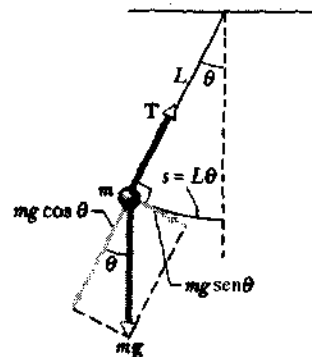


Fig. 14-10 Um pêndulo simples. As forças agindo sobre a partícula são seu peso  $mg$  e a tensão  $T$  no fio. A componente tangencial  $mg \sin \theta$  do peso é uma força de restauração que leva o pêndulo de volta à posição central.

desta situação, considerando um **pêndulo simples**, que consiste em uma partícula de massa  $m$  suspensa em um fio inextensível e sem massa, de comprimento  $L$  (Fig. 14-10). A massa é livre para oscilar em um plano, à esquerda e à direita de uma linha vertical que passa através do ponto em que a extremidade superior do fio está fixada.

O elemento de inércia nesse pêndulo é a massa da partícula e o elemento de restauração está na atração gravitacional entre a partícula e a Terra. A energia potencial pode ser associada com a distância vertical variável entre a partícula que oscila e a Terra; podemos fazer uma analogia entre essa distância variável e o comprimento variável de uma fictícia "mola gravitacional".

As forças que agem sobre a partícula na Fig. 14-10 são seu peso  $mg$  e a tensão  $T$  no fio. Decompomos  $mg$  numa componente radial  $mg \cos \theta$  e na componente  $mg \sin \theta$  que é tangente à trajetória da partícula. Esta componente tangencial é a força de restauração, porque sempre age em oposição ao deslocamento da partícula, de forma a trazê-la de volta à sua localização central, a *posição de equilíbrio* ( $\theta = 0$ ) onde estaria em repouso, se não estivesse oscilando. Escrevemos a força de restauração como

$$F = -mg \sin \theta, \quad (14-26)$$

onde o sinal negativo indica que  $F$  age em oposição ao deslocamento.

Se supormos que o ângulo  $\theta$  na Fig. 14-10 é pequeno, então  $\sin \theta$  será quase igual a  $\theta$  em radianos. Por exemplo, quando  $\theta = 5,00^\circ (= 0,0873 \text{ rad})$ ,  $\sin \theta = 0,0872$ , uma diferença de apenas 0,1%, aproximadamente. O deslocamento  $s$  da partícula medido ao longo de seu arco é igual a  $L\theta$ . Então, para  $\theta$  pequeno, temos que  $\sin \theta \approx \theta$ , e a Eq. 14-26 torna-se

$$F \approx -mg\theta = -mg \frac{s}{L} = -\left(\frac{mg}{L}\right)s. \quad (14-27)$$

Uma consulta à Eq. 14-9 mostra que temos, de novo, a lei de Hooke, com o deslocamento agora sendo o comprimento do arco  $s$  em lugar de  $x$ . Então, *se um pêndulo simples oscila com pequenas amplitudes*, se comporta como um oscilador linear, por exemplo o sistema massa-mola da Fig. 14-5; isto é, executa um movimento harmônico simples. Aqui, a amplitude do movimento é a **amplitude angular**  $\theta_m$ , o ângulo máximo de oscilação. E a constante elástica  $k$  é  $mg/L$ , a constante elástica efetiva da "mola gravitacional" que associamos ao pêndulo.

Substituindo  $mg/L$  por  $k$  na Eq. 14-12, achamos, para o período de um pêndulo simples,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{mg/L}} \quad (14-28)$$

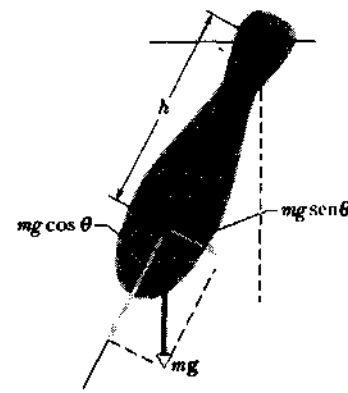


Fig. 14-11 Um pêndulo físico. O torque de restauração é  $(mg \sin \theta)(h)$ . Quando  $\theta = 0$ , o centro de gravidade  $C$  está diretamente abaixo do ponto de suspensão  $O$ .

ou

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (\text{pêndulo simples}). \quad (14-29)$$

A Eq. 14-29 permanece válida apenas se a amplitude angular  $\theta_m$  for pequena (nos exercícios e problemas deste capítulo, a menos que indicado de outra forma, esta suposição estará implícita).

O elemento de inércia parece estar faltando na Eq. 14-29 porque o período é independente da massa da partícula. Isto ocorre porque o elemento de "elasticidade", que é a "constante da mola gravitacional"  $mg/L$ , é ele mesmo proporcional à massa da partícula, e as duas massas cancelam-se na Eq. 14-28.\* A Fig. 8-6 (Vol. 1) mostra como a energia alterna-se entre as formas cinética e potencial durante cada oscilação de um pêndulo simples.

### O Pêndulo Físico

A maior parte dos pêndulos no mundo real não é nem ao menos aproximadamente "simples". A Fig. 14-11 ilustra o caso de um **pêndulo físico**, como costuma ser denominado, com o peso  $mg$  agindo sobre seu centro de massa  $C$ .

Quando o pêndulo da Fig. 14-11 é deslocado de um ângulo  $\theta$  em qualquer direção de sua posição de equilíbrio, surge um torque restaurador. Este torque age em torno de um eixo que atravessa o ponto de suspensão  $O$  na Fig. 14-11 e tem a magnitude

$$\tau = -(mg \sin \theta)(h). \quad (14-30)$$

Aqui,  $mg \sin \theta$  é a componente tangencial do peso  $mg$  e  $h$  (que é igual a  $OC$ ) é o braço de alavanca desta componente. O sinal negativo indica que o torque é de restauração.

\* Neste cancelamento, está implícita a igualdade entre as massas inercial e gravitacional. Ver o Cap. 15, Seção 15-10. "Uma Visão Mais Aprofundada da Gravitacão". (N. do R.)

Isto é, é um torque que tende sempre a reduzir o ângulo  $\theta$  a zero.

Novamente vamos nos limitar a pequenas amplitudes, tais que  $\sin \theta \approx \theta$ . Então, a Eq. 14-30 torna-se

$$\tau = -(mgh)\theta \quad (14-31)$$

Comparando com a Eq. 14-24, fica evidente que de novo temos a lei de Hooke em forma angular. Assim, um pêndulo físico executa um movimento harmônico simples, se a amplitude angular  $\theta_m$  do seu movimento for pequena ( $\theta_m \leq 5^\circ$ ). O termo  $mgh$  da Eq. 14-31 é análogo à constante de torção  $\kappa$  na Eq. 14-24. Substituindo  $mgh$  por  $\kappa$  na Eq. 14-25, achamos

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} \quad (\text{pêndulo físico}) \quad (14-32)$$

para o período de um pêndulo físico quando  $\theta_m$  for pequeno. Aqui,  $I$  é o momento de inércia do pêndulo — em relação a um eixo que passa através de seu ponto de suspensão, perpendicular ao plano de oscilação — e  $h$  é a distância entre o ponto de suspensão e o centro de massa do pêndulo oscilante. É evidente que um pêndulo físico não irá oscilar se o suspendermos pelo seu centro de massa. Formalmente, isto corresponde a fazermos  $h = 0$  na Eq. 14-32. Aquela equação prevê então que  $T \rightarrow \infty$  isto implica que tal pêndulo nunca completará uma oscilação.

O pêndulo físico da Fig. 14-11 inclui o pêndulo simples como um caso especial. Para este último,  $h$  seria o comprimento  $L$  do fio e  $I$  seria  $mL^2$ . Fazendo estas substituições na Eq. 14-32, obtemos

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2}{mgL}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}},$$

que é exatamente a Eq. 14-29, a expressão para o período de um pêndulo simples.

### Medindo $g$

Podemos usar um pêndulo físico para medir a aceleração de queda livre  $g$ . (Milhares de medidas deste tipo são feitas em prospecção geofísica.)

Para analisar um caso simples, considere o pêndulo como uma haste uniforme de comprimento  $L$ , suspensa por uma extremidade. Para este pêndulo,  $h$  na Eq. 14-32, a distância entre o ponto de suspensão e o centro de massa é  $L/2$ . A Tabela 11-2 (f) nos diz que o momento de inércia deste pêndulo em relação a um eixo perpendicular a uma extremidade é  $mL^2/3$ . Se colocarmos  $h = L/2$  e  $I = mL^2/3$  na Eq. 14-32 e explicitarmos  $g$ , encontraremos

$$g = \frac{8\pi^2 L}{3T^2} \quad (14-33)$$

Então, medindo  $L$  e o período  $T$ , podemos determinar o valor de  $g$ . (Se quisermos realizar medidas precisas, certos refinamentos serão necessários, tais como colocar o pêndulo oscilante em uma câmara de vácuo.)

**EXEMPLO 14-6** Uma haste de um metro, suspensa por uma extremidade, oscila como um pêndulo físico; veja a Fig. 14-12a.

a. Qual o período da oscilação?

**Solução** Da Tabela 11-2(f) vemos que o momento de inércia de uma barra ou haste com comprimento  $L$ , em relação ao eixo perpendicular a uma extremidade, é  $mL^2/3$ . A distância  $h$  do ponto de suspensão até o centro de massa, que é o ponto  $C$  na Fig. 14-12a, é  $L/2$ . Se substituirmos esses dois valores na Eq. 14-32, encontraremos

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL^2}{mg(\frac{1}{2}L)}} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}} \quad (14-34) \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{(2)(1,00 \text{ m})}{(3)(9,8 \text{ m/s}^2)}} = 1,64 \text{ s.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

b. Qual seria o comprimento  $L_0$  de um pêndulo simples que tivesse o mesmo período (veja Fig. 14-12b)?

**Solução** Igualando as Eqs. 14-29 e 14-34, temos

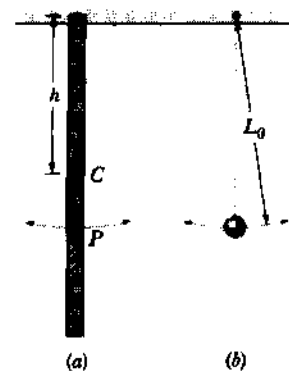
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L_0}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

Você pode verificar que

$$L_0 = \frac{2}{3}L = \left(\frac{2}{3}\right)(100 \text{ cm}) = 66,7 \text{ cm} \quad (\text{Resposta})$$

O comprimento do pêndulo simples equivalente é a distância do ponto de suspensão ao ponto  $P$  na Fig. 14-12a. Este ponto, chamado **centro da oscilação**, tem algumas propriedades interessantes (veja Exemplo 14-7). O centro de oscilação não é um ponto fixo no pêndulo, pois tem significado apenas com relação a um ponto de suspensão específico.

**EXEMPLO 14-7** Suponha que o pêndulo da Fig. 14-12a seja invertido e suspenso do ponto  $P$ , como na Fig. 14-13b. Qual será o seu período de oscilação?



**Fig. 14-12** Exemplo 14-6. (a) Uma haste de um metro suspensa de uma extremidade como um pêndulo físico. (b) Um pêndulo simples cujo comprimento  $L_0$  é escolhido de forma que os períodos dos dois pêndulos sejam iguais. O ponto  $P$  no pêndulo em (a) marca o *centro de oscilação*, a uma distância  $L_0$  do ponto de suspensão.

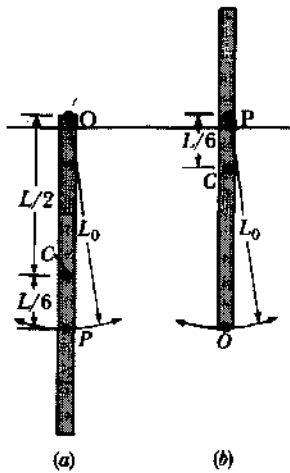


Fig. 14-13 Exemplo 14-7. (a) O pêndulo da Fig. 14-12a. (b) O pêndulo invertido e suspenso de seu centro de oscilação. Invertendo o pêndulo desta forma não alteramos seu período.

**Solução** Vamos inicialmente encontrar o momento de inércia da haste, em relação ao eixo perpendicular ao plano de oscilação, no ponto P. A Tabela 11-2(e) nos mostra que o momento de inércia em relação ao ponto C, o centro de massa, é  $mL^2/12$ . A distância  $h$  entre os pontos C e P, na Fig 14-13b, pode ser encontrada a partir da Fig. 14-13a e é

$$h = \frac{2L}{3} - \frac{L}{2} = \frac{L}{6}.$$

Do teorema de eixos paralelos temos para o momento de inércia do pêndulo, em relação ao eixo perpendicular ao plano de oscilação em P.

$$I = I_{cm} + mh^2 = \frac{1}{12}mL^2 + m(L/6)^2 = \frac{1}{3}mL^2.$$

Se substituirmos estes valores de  $h$  e  $I$  na Eq. 14-32, o resultado será

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL^2}{mg(L/6)}} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}. \end{aligned} \quad \text{(Resposta)}$$

Esta expressão é exatamente a Eq. 14-34. Ainda que tenhamos demonstrado este resultado apenas para um caso específico, o teorema seguinte é verdadeiro, em geral:

A cada ponto de suspensão  $O$  de um pêndulo físico, corresponde um centro de oscilação  $P$ , distando de  $O$  uma distância igual ao comprimento do pêndulo simples equivalente. O pêndulo físico tem o mesmo período tanto esteja suspenso por  $O$ , como na Fig. 14-13a, ou por  $P$ , como na Fig. 14-13b.

**EXEMPLO 14-8** Um disco cujo raio  $R$  é de 12,5 cm está suspenso, como um pêndulo físico, de um ponto a meio caminho entre sua borda e seu centro  $C$  (veja a Fig. 14-14). Medimos o período  $T$ , encontrando 0,871 s. Qual a aceleração de queda livre  $g$  no local do pêndulo?

**Solução** O momento de inércia  $I_{cm}$  de um disco em relação a seu eixo central é  $mR^2/2$ . Do teorema de eixos paralelos, o momento de inércia em relação a um eixo paralelo ao eixo central e passando pelo ponto de suspensão  $O$ , como na Fig. 14-14, é

$$I = I_{cm} + mh^2 = \frac{1}{2}mR^2 + m(\frac{1}{2}R)^2 = \frac{3}{4}mR^2.$$

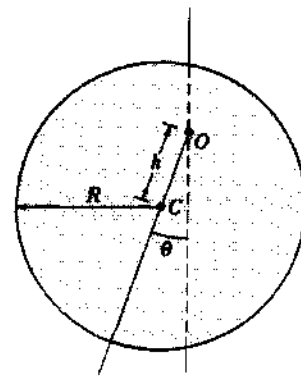


Fig. 14-14 Exemplo 14-8. Um pêndulo físico consistindo em um disco uniforme suspenso de um ponto ( $O$ ), na metade da distância do centro do disco para a borda.

Se colocarmos  $I = 3mR^2/4$  e  $h = R/2$  na Eq. 14-32, encontramos

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{3}{4}mR^2}{mg(\frac{1}{2}R)}} = 2\pi \sqrt{\frac{3R}{2g}}.$$

Resolvendo para  $g$ , então nos dá

$$g = \frac{6\pi^2 R}{T^2} = \frac{(6\pi^2)(0,125 \text{ m})}{(0,871 \text{ s})^2} = 9,76 \text{ m/s}^2. \quad \text{(Resposta)}$$

**EXEMPLO 14-9** Na Fig. 14-15a, um macaco de massa  $m_2$  agarra-se a uma corda sem massa, enrolada em torno de um disco, de raio  $R = 20$  cm e massa  $M = 8m_2$ , que gira em torno de um eixo horizontal que passa pelo seu centro  $O$ . A massa  $m_1$  ( $= 4m_2$ ) está presa ao disco a uma distância  $r = R/2$  de  $O$ .

a. Quando o sistema de disco + macaco +  $m_1$  estiver em equilíbrio, qual o ângulo  $\phi$  entre a vertical e a linha de  $O$  até  $m_1$  (Fig. 14-15b)?

**Solução** Em equilíbrio, o torque resultante no disco em relação a  $O$  é zero. Consideremos o sentido anti-horário como positivo. Então, os torques em  $O$  devidos a  $m_1$  e  $m_2$  são  $-m_1gr \sin \phi$  e  $m_2gR$ , respectivamente. Então, temos

$$\sum \tau = -m_1gr \sin \phi + m_2gR = 0,$$

ou

$$\sin \phi = \frac{m_2R}{m_1r}. \quad (14-35)$$

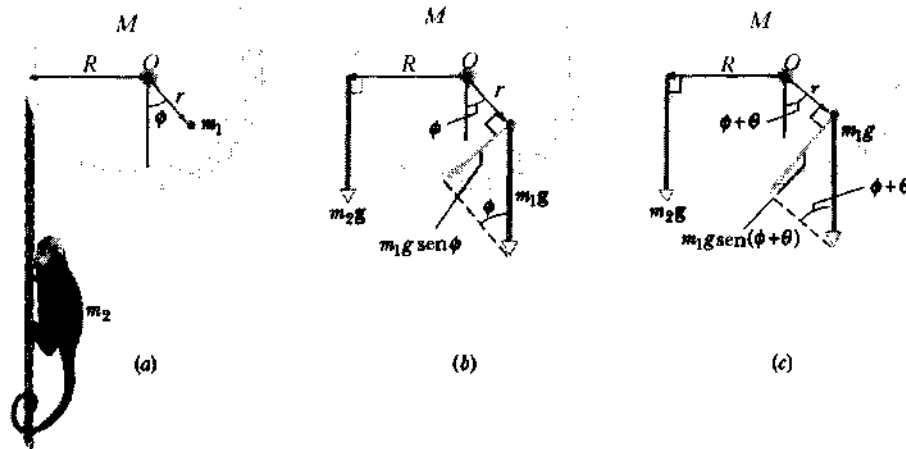
Com  $m_1 = 4m_2$  e  $r = R/2$ , a Eq. 14-35 dá

$$\sin \phi = \frac{m_2R}{(4m_2)(R/2)} = \frac{1}{2}, \text{ ou } \phi = 30^\circ. \quad \text{(Resposta)}$$

b. Em termos de  $m_2$  e  $R$ , qual o momento de inércia  $I$  do sistema em relação ao ponto  $O$ ?

**Solução** A massa do macaco  $m_2$  age como se estivesse colocada na borda do disco porque sua força sobre o disco, transmitida pela corda, está aplicada ali. Da Eq. 11-22, ela tem o momento de inércia  $m_2R^2$ , relativo a  $O$ . O momento de inércia em relação a  $O$  de  $m_1$ , e do disco são  $m_1r^2$  e  $MR^2/2$ , respectivamente (Tabela 11-2c). Então, o momento de inércia do sistema em relação a  $O$  é

$$I = m_2R^2 + m_1r^2 + \frac{1}{2}MR^2.$$



**Fig. 14-9** Exemplo 14-9. (a) Um sistema em equilíbrio consistindo da massa  $m_1$ , um macaco de massa  $m_2$  e um disco de raio  $R$  e massa  $M$  que gira em torno de  $O$ . (b) Forças agindo no disco na orientação de equilíbrio. (c) O mesmo que (b), mas para uma orientação diferente.

Com  $m_1 = 4m_2$ ,  $M = 8m_2$  e  $r = R/2$ , temos

$$\begin{aligned} I &= m_2 R^2 + m_2 R^2 + 4m_2 R^2 \\ &= 6m_2 R^2. \end{aligned} \quad (\text{Resposta}) \quad (14.36)$$

c. O disco é girado no sentido anti-horário a partir de sua posição de equilíbrio, de um pequeno ângulo  $\theta$  e liberado (Fig. 14-15c). Qual a frequência angular  $\omega$  do movimento harmônico simples resultante?

**Solução** Para encontrar  $\omega$ , achamos uma expressão para a aceleração angular  $\alpha$  (em torno de  $O$ ) em termos de  $\theta$  e a comparamos com a Eq. 14-7. Em relação a  $O$ , o torque devido a  $m_1$  é agora

$$\begin{aligned} -m_1 g r \sin(\phi + \theta) &= -m_1 g r (\sin\phi \cos\theta + \cos\phi \sin\theta) \\ &= -m_1 g r (\sin\phi + \theta \cos\phi). \end{aligned}$$

Aqui, porque  $\theta$  é pequeno, colocamos  $\sin\theta \approx \theta$  e  $\cos\theta \approx 1$ . Aqui também  $\phi = 30^\circ$ . O deslocamento angular  $\theta$  não altera o torque devido a  $m_2$ , então o torque resultante em relação a  $O$  é

$$\sum \tau = m_2 g R - m_1 g r (\sin\phi + \theta \cos\phi).$$

Usando a segunda lei de Newton na forma angular,  $\Sigma\tau = I\alpha$ , substituindo  $\sin\phi$  da Eq. 14-35, e substituindo  $I$  da Eq. 14-36, obtemos

$$m_2 g R - m_1 g r \left( \frac{m_2 R}{m_1 r} + \theta \cos\phi \right) = I\alpha = 6m_2 R^2 \alpha.$$

Resolvendo para  $\alpha$  em termos de  $\theta$ , obtemos

$$\alpha = -\frac{m_1 g r \cos\phi}{6m_2 R^2} \theta.$$

Com  $m_1 = 4m_2$  e  $r = R/2$ , obtemos

$$\alpha = -\frac{g \cos\phi}{3R} \theta. \quad (14.37)$$

A Eq. 14-37 é uma versão angular da Eq. 14-7. Isto implica um movimento harmônico simples com a aceleração angular  $\alpha$  e o deslocamento angular  $\theta$ . Comparando as Eqs. 14-37 e 14-7, vemos que

$$\omega^2 = \frac{g \cos\phi}{3R},$$

de forma que

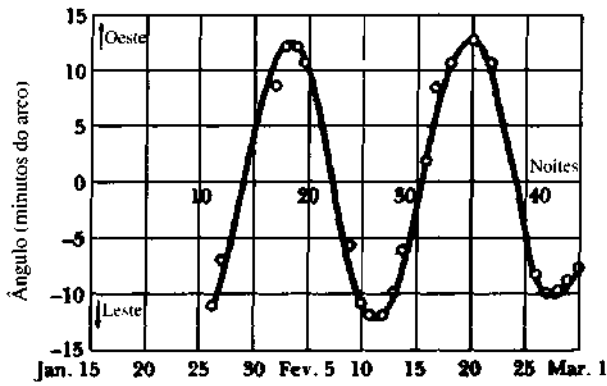
$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{g \cos\phi}{3R}} = \sqrt{\frac{(9.8 \text{ m/s}^2)(\cos 30^\circ)}{3(0.20 \text{ m})}} \\ &= 3.8 \text{ rad/s.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

(Baseado no "Oscilador de Artwood", de Thomas B. Greenslade, Jr., *American Journal of Physics*, Dezembro de 1988.)

## 14-7 Movimento Harmônico Simples e Movimento Circular Uniforme

Em 1610, Galileu, usando seu telescópio recém-construído, descobriu as quatro principais luas de Júpiter. Durante semanas de observação, parecia-lhe que cada lua estava se movendo para frente e para trás em relação ao planeta, no que hoje chamaríamos de movimento harmônico simples; o disco do planeta estava no ponto médio do movimento. As anotações das observações de Galileu, manuscritas por ele mesmo, ainda estão disponíveis. A.P. French, do MIT (Instituto de Tecnologia de Massachusets), usou os dados do trabalho de Galileu para encontrar a posição da lua Calisto em relação a Júpiter. Nos resultados mostrados na Fig. 14-16, os círculos estão baseados nas observações de Galileu e a curva é a melhor aproximação para os dados. A curva sugere fortemente uma equação do tipo da Eq. 14-3, que dá deslocamento para o MHS. Um período de 16,8 dias pode ser medido a partir do gráfico.

De fato, Calisto move-se essencialmente com velocidade constante e em uma órbita circular, em torno de Júpiter. O seu movimento real — longe de ser harmônico simples — é um movimento circular uniforme. O que Galileu viu — e o que você pode ver com um bom binóculo e um pou-



**Fig. 14-16** O ângulo entre Júpiter e sua lua Calisto visto da Terra. Os círculos estão baseados nas medições de 1610 de Galileu. A curva é uma melhor aproximação, indicando fortemente um movimento harmônico simples. A distância média de Júpiter, 10 minutos de arco, correspondem a aproximadamente  $2 \times 10^6$  km. O eixo do tempo cobre aproximadamente 6 semanas de observação. (Adaptado de A. P. French, *Newtonian Mechanics*, W. W. Norton & Company, Nova York, 1971, p. 288.)

co de paciência — é a projeção deste movimento circular uniforme numa linha no plano do movimento. Somos levados, pelas admiráveis observações de Galileu, à conclusão de que o movimento harmônico simples é um movimento circular uniforme visto lateralmente. Em linguagem mais formal:

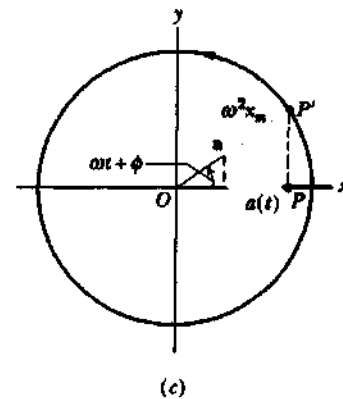
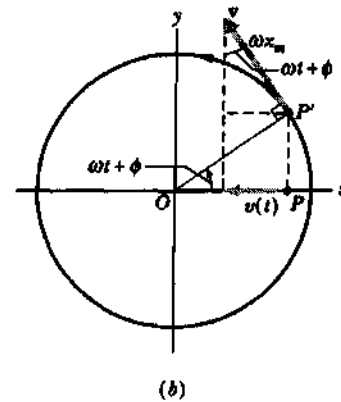
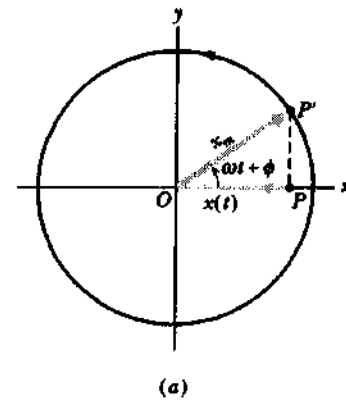
O movimento harmônico simples é a projeção do movimento circular uniforme num diâmetro do círculo, onde este último movimento ocorre.

Examinemos esta conclusão mais detalhadamente. A Fig. 14-17a mostra uma partícula  $P'$  — a partícula de referência — num movimento circular uniforme com velocidade angular  $\omega$  em um círculo — o círculo de referência — cujo raio é  $x_m$ . Em qualquer tempo  $t$ , a posição angular da partícula é  $\omega t + \phi$ , onde  $\phi$  é a sua posição angular inicial. Projeteamos  $P'$  no eixo  $x$ ; sua projeção é um ponto  $P$ , que imaginaremos ser uma segunda partícula. A localização de  $P$  como uma função do tempo é dada por

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi),$$

que é precisamente a Eq. 14-3. Nossa conclusão está correta. Se a partícula de referência  $P'$  desloca-se em um movimento circular uniforme, sua “partícula de projeção”  $P$  se deslocará em um movimento harmônico simples.

Esta relação lança uma nova luz sobre a frequência angular  $\omega$  do movimento harmônico simples, e você pode agora ver mais claramente de onde o termo “angular” se originou. A quantidade  $\omega$  é simplesmente a velocidade angular constante com que a partícula de referência  $P'$  se move ao longo de seu círculo de referência. A fase inicial  $\phi$  tem o valor determinado pela posição da partícula de referência  $P'$  em  $t = 0$ .



**Fig. 14-17** (a) Uma partícula de referência  $P'$  em movimento circular uniforme em um círculo de referência de raio  $x_m$ . Sua projeção  $P$  no eixo  $x$  executa um movimento harmônico simples. (b) A projeção da velocidade  $v$  da partícula de referência é a velocidade do movimento harmônico simples. (c) A projeção da aceleração  $a$  da partícula de referência é a aceleração do movimento harmônico simples.

A Fig. 14-17b mostra a velocidade da partícula de referência. A magnitude do vetor velocidade é  $\omega x_m$  e sua projeção no eixo  $x$  é

$$v(t) = -\omega x_m \text{sen}(\omega t + \phi),$$

que corresponde exatamente à Eq. 14-5. O sinal negativo aparece porque a componente de velocidade de  $P$  na Fig. 14-17b aponta para a esquerda, no sentido em que  $x$  decresce.

A Fig. 14-17c mostra a aceleração da partícula de referência. A magnitude do vetor aceleração é  $\omega^2 x_m$  e sua projeção no eixo  $x$  é

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi),$$

que é exatamente a Eq. 14-6. Então, se observarmos o deslocamento, a velocidade ou a aceleração, a projeção do movimento circular uniforme é realmente um movimento harmônico simples.

### 14-8 Movimento Harmônico Simples Amortecido (Opcional)

Um pêndulo dificilmente irá oscilar em baíxo d'água, porque esta exerce uma força viscosa no pêndulo, que rapidamente amortece o movimento. Um pêndulo oscilando no ar se sai melhor, mas ainda assim, o movimento vai lentamente diminuindo porque o ar exerce uma força viscosa sobre o pêndulo (e existe também o atrito agindo em seu suporte).

Quando o movimento de um oscilador é reduzido por uma força externa, o oscilador e seu movimento são ditos **amortecidos**. Um exemplo idealizado de um oscilador amortecido é mostrado na Fig. 14-18: um bloco com massa  $m$  oscila na mola com constante elástica  $k$ . A partir da massa, uma haste estende-se até um anteparo (supomos que ambos não tenham massa) que está submerso em um líquido. Conforme o anteparo move-se para cima e para baixo, o líquido exerce uma força viscosa que atua sobre todo o sistema oscilante. Ao longo do tempo, a energia mecânica do sistema bloco-mola é reduzida, à medida que é transformada em energia térmica no líquido e no anteparo.

Suponhamos que o líquido exerça uma **força de amortecimento**  $F_a$  que é proporcional em magnitude à veloci-

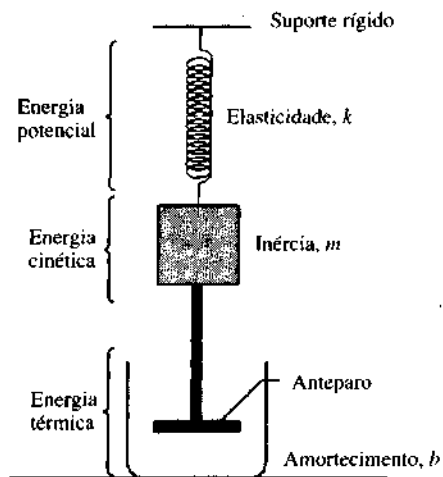


Fig. 14-18 Um oscilador harmônico simples amortecido ideal. Um anteparo imerso num líquido exerce, sobre o bloco oscilante, uma força de amortecimento dada por  $-b(dx/dt)$ , onde  $b$  é a constante de amortecimento.

dade  $v$  do anteparo e do bloco (uma suposição que está correta, se o anteparo mover-se devagar). Então,

$$F_a = -bv, \tag{14-38}$$

onde  $b$  é uma **constante de amortecimento** que depende das características do anteparo e do líquido, e o sinal negativo indica que  $F_a$  se opõe ao movimento. A força total agindo sobre o bloco é, então

$$\sum F = -kx - bv,$$

ou, se colocarmos  $v = dx/dt$

$$\sum F = -kx - b \frac{dx}{dt}. \tag{14-39}$$

Se uma partícula sofre a ação da força dada pela Eq. 14-39, seu deslocamento como uma função do tempo será

$$x(t) = x_m e^{-bt/2m} \cos(\omega_a t + \phi), \tag{14-40}$$

onde  $\omega_a$ , a frequência angular do oscilador amortecido, é dada por

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}. \tag{14-41}$$

Se  $b = 0$  (não há amortecimento), então a Eq. 14-41 reduz-se à Eq. 14-11 ( $\omega = \sqrt{k/m}$ ) para a frequência angular de um oscilador não amortecido, e a Eq. 14-40 reduz-se à Eq. 14-3 para o deslocamento de um oscilador não amortecido. Se a constante de amortecimento não for zero, mas pequena ( $b \ll \sqrt{km}$ ), então  $\omega_a \approx \omega$ .

Podemos ver a Eq. 14-40 como uma função cosseno cuja amplitude, que é  $x_m e^{-bt/2m}$ , decresce gradualmente com o tempo, como indicado pela Fig. 14-19. Para um oscilador não amortecido, a energia mecânica é constante e dada pela Eq. 14-23 ou  $E = kx_m^2/2$ . Se o oscilador for amortecido, a energia mecânica não é constante, mas decresce com o tempo. Se o amortecimento for pequeno, podemos achar  $E(t)$

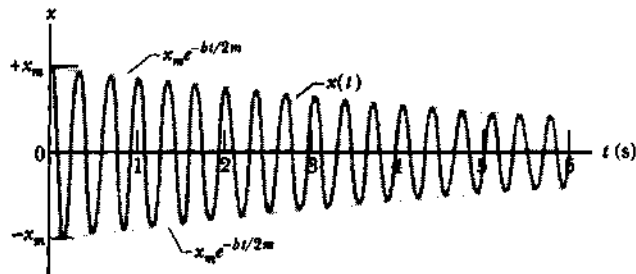


Fig. 14-19 O deslocamento  $x(t)$  para o oscilador amortecido da Fig. 14-18. Veja Exemplo 14-10. A amplitude, que é  $x_m e^{-bt/2m}$ , diminui exponencialmente com o tempo.

substituindo  $x_m$  na Eq. 14-23 por  $x_m e^{-bt/2m}$ , a amplitude das oscilações amortecidas. Fazendo isso, achamos

$$E(t) = \frac{1}{2} k x_m^2 e^{-bt/m}, \quad (14-42)$$

que nos diz que a energia mecânica diminui exponencialmente com o tempo.

**EXEMPLO 14-10** No oscilador amortecido da Fig. 14-18,  $m = 250$  g,  $k = 85$  N/m e  $b = 70$  g/s.

a. Qual o período do movimento?

**Solução** Da Eq. 14-12, temos

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{0,25 \text{ kg}}{85 \text{ N/m}}} = 0,34 \text{ s.} \quad (\text{Resposta})$$

b. Quanto tempo leva para que a amplitude do oscilador amortecido caia até a metade de seu valor inicial?

**Solução** A amplitude, mostrada na Eq. 14-40 como  $x_m e^{-bt/2m}$ , tem o valor de  $x_m$  em  $t = 0$ . Então, devemos encontrar  $t$  na expressão

$$\frac{1}{2} x_m = x_m e^{-bt/2m}.$$

Vamos dividir ambos os lados por  $x_m$  e tomar o logaritmo natural da equação que resta. Acharemos

$$\ln \frac{1}{2} = \ln(e^{-bt/2m}) = -bt/2m,$$

ou

$$t = \frac{-2m \ln \frac{1}{2}}{b} = \frac{-(2)(0,25 \text{ kg})(\ln \frac{1}{2})}{0,070 \text{ kg/s}} = 5,0 \text{ s.} \quad (\text{Resposta})$$

Note, a partir da resposta que obtivemos em (a), que isto corresponde a aproximadamente 15 períodos de oscilação.

c. Quanto tempo leva para que a energia mecânica caia até a metade de seu valor inicial?

**Solução** Da Eq. 14-42, vemos que a energia mecânica, que é  $kx_m^2/2 e^{-bt/m}$ , vale  $kx_m^2/2$  em  $t = 0$ . Então, devemos achar  $t$  em

$$\frac{1}{2} (\frac{1}{2} k x_m^2) = \frac{1}{2} k x_m^2 e^{-bt/m}.$$

Se dividirmos por  $kx_m^2/2$  e resolvermos para  $t$ , como fizemos acima, acharemos

$$t = \frac{-m \ln \frac{1}{2}}{b} = \frac{-(0,25 \text{ kg})(\ln \frac{1}{2})}{0,070 \text{ kg/s}} = 2,5 \text{ s.} \quad (\text{Resposta})$$

Isto é exatamente metade do tempo calculado em (b) ou aproximadamente 7,5 períodos de oscilação. A Fig. 14-19 ilustra este exemplo.

### 14-9 Oscilações Forçadas e Ressonância (Opcional)

Uma pessoa movendo-se passivamente em um balanço é um exemplo de *oscilação livre*. Se um amigo puxar ou



**Fig. 14-20** São sugeridas duas freqüências nesta pintura de Nicholas Lancret: (1) a natural em que a senhora — se estivesse sozinha — iria balançar e (2) aquela com que seu amigo puxa a corda. Se estas duas freqüências concordarem, teremos ressonância.

empurrar o balanço periodicamente, como na Fig. 14-20, temos *oscilações forçadas*. Temos agora *duas* freqüências angulares com que tratar: (1) a freqüência angular *natural* do sistema, que é a freqüência angular na qual ele iria oscilar se fosse deslocado e depois deixado oscilar livremente e (2) a freqüência angular da força externa. Até aqui, temos representado a freqüência angular natural por  $\omega$ , mas agora vamos representá-la por  $\omega_0$  e deixaremos que  $\omega$  represente a freqüência angular da força externa.

Podemos usar a Fig. 14-18 para representar um oscilador harmônico forçado simples idealizado, se admitirmos que a estrutura marcada como “suporte rígido” se mova para cima e para baixo com uma freqüência angular variável  $\omega$ . Um oscilador forçado *sempre* oscilará na freqüência angular  $\omega$  da força externa, seu deslocamento  $x(t)$  sendo dado por

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi), \quad (14-43)$$

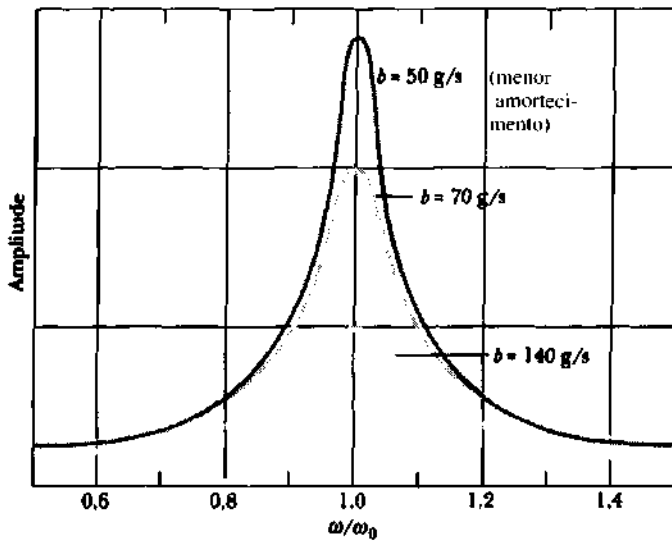
onde  $x_m$  é a amplitude da oscilação.

A amplitude do deslocamento,  $x_m$ , é uma função complicada de  $\omega$  e  $\omega_0$ . A amplitude da velocidade das oscilações,  $v_m$ , é mais fácil de descrever: ela é máxima quando

$$\omega = \omega_0 \quad (\text{ressonância}) \quad (14-44)$$

uma condição chamada **ressonância**. A Eq. 14-44 é também, *aproximadamente*, a condição em que a amplitude do deslocamento  $x_m$  das oscilações será máxima. Assim, se você empurrar um balanço em sua freqüência natural, as amplitudes de deslocamento e velocidade serão maiores, fato que as crianças aprendem rapidamente por tentativa e erro. Se empurrar em outras freqüências, maiores ou menores, as amplitudes de deslocamento e velocidade serão menores.

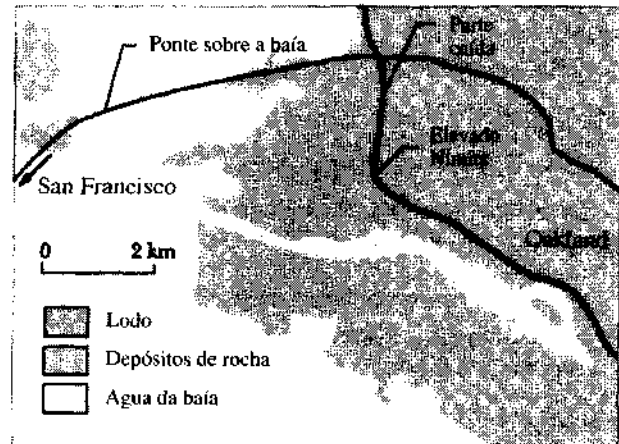




**Fig. 14-21** A amplitude de deslocamento  $x_m$  do oscilador forçado varia conforme a frequência angular  $\omega$  da força externa. Essas três curvas são aproximadamente simétricas em  $\omega/\omega_0 = 1$ , a condição de ressonância, na qual a amplitude é aproximadamente máxima. As curvas correspondem a três valores da constante de amortecimento  $b$ , o menor valor dando a maior amplitude na ressonância.

A Fig. 14-21 mostra de modo aproximado como a amplitude do deslocamento de um oscilador depende da frequência angular  $\omega$  da força externa, para três valores diferentes do coeficiente de amortecimento  $b$ . Note que para todos os três a amplitude  $x_m$  é aproximadamente máxima quando  $\omega/\omega_0 = 1$ , isto é, quando a condição de ressonância da Eq. 14-44 é satisfeita. As curvas da Fig. 14-21 mostram que, quanto menor o amortecimento, mais alto e estreito é o pico de ressonância.

Todas as estruturas mecânicas têm uma ou mais frequências naturais. Deve-se tomar cuidado para não submeter uma estrutura a uma força externa forte que seja igual a uma dessas frequências, ou as oscilações resultantes da estrutura poderão rompê-la. A imagem de um soprano quebrando uma taça de vinho nos vem imediatamente à cabeça. Os projetistas de aviões tomam cuidado para que nenhuma das



**Fig. 14-22** A estrutura geológica na parte de Oakland da área da Baía de São Francisco. A parte caída do Elevado Nimitz está indicada. (Adaptado de "Sediment-Induced Amplification and the Collapse of the Nimitz Freeway", de S. E. Hough et al., *Nature*, 26 de Abril, 1990.)

frequências naturais em que uma asa possa vibrar seja igual à frequência angular dos motores em velocidade de cruzeiro. Obviamente, seria perigoso que as asas balançassem violentamente para uma certa velocidade dos motores.

O colapso de uma seção de 1,4 km do Elevado Nimitz, mostrado na fotografia de abertura deste capítulo, é um exemplo da destruição que a ressonância pode causar. Oscilações do solo, devido às ondas sísmicas do terremoto, tiveram sua maior amplitude de velocidade numa frequência angular de aproximadamente 9 rad/s, que quase igualou exatamente a frequência angular natural das seções horizontais individuais do elevado. O colapso ficou confinado a uma seção particular de 1,4 km porque aquela seção do elevado foi construída em um aterro sobre lodo pouco compactado, cuja amplitude de velocidade era no mínimo cinco vezes maior do que aquela das rochas sob o resto do elevado (veja Fig. 14-22). A tragédia do Nimitz é uma lição para os engenheiros e geólogos, que devem se precaver contra terremotos ainda mais destrutivos na Califórnia.

## RESUMO

### Frequência

Todo o movimento oscilatório ou periódico tem uma frequência  $f$  (o número de oscilações por segundo) medida, no sistema SI, em hertz:

$$1 \text{ hertz} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ oscilação por segundo} \\ = 1 \text{ s}^{-1}. \quad (14-1)$$

### Período

O período  $T$ , o tempo necessário para uma oscilação completa ou ciclo, é relacionado à frequência por

$$T = \frac{1}{f}. \quad (14-2)$$

### Movimento Harmônico Simples

No movimento harmônico simples (MHS), o deslocamento  $x(t)$  da partícula de sua posição de equilíbrio é descrito pela equação

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{deslocamento}), \quad (14-3)$$

na qual  $x_m$  é a amplitude do deslocamento, a quantidade  $(\omega t + \phi)$  é a fase do movimento e  $\phi$  é a fase inicial. A frequência angular  $\omega$  é relacionada ao período e à frequência do movimento por

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (\text{frequência angular}). \quad (14-4)$$

Derivando a Eq. 14-3 obtemos as equações para velocidade e aceleração do MHS como funções do tempo:

$$v = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi) \quad (\text{velocidade}) \quad (14-5)$$

e

$$a = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{aceleração}). \quad (14-6)$$

Na Eq. 14-5, a quantidade positiva  $\omega x_m$  é a **amplitude da velocidade**  $v_m$  do movimento. Na Eq. 14-6, a quantidade positiva  $\omega^2 x_m$  é a **amplitude da aceleração**  $a_m$  do movimento.

**O Oscilador Linear**

Uma partícula com massa  $m$  que se mova sob a influência de uma força restauradora, como a da lei de Hooke, dada por  $F = -kx$ , executa um movimento harmônico simples com

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{frequência angular}) \quad (14-11)$$

e

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (\text{período}). \quad (14-12)$$

Tal sistema é denominado **oscilador harmônico simples linear**.

**Energia**

Uma partícula em movimento harmônico simples tem, a qualquer momento, energia cinética  $K = mv^2/2$  e energia potencial  $U = kx^2/2$ . Se não há atrito presente, a energia mecânica  $E = K + U$  continua constante, ainda que  $K$  e  $U$  variem.

**Pêndulos**

Exemplos de movimento harmônico simples são o **pêndulo de torção** da Fig. 14-8, o **pêndulo simples** da Fig. 14-10 e o **pêndulo físico** da Fig. 14-11. Seus períodos de oscilação para pequenas oscilações são, respectivamente,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\kappa}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad (14-25, 14-29)$$

e

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}}. \quad (14-32)$$

Em cada caso, o período é determinado por um termo de inércia dividido pelo termo de "elasticidade", que mede a intensidade da força de restauração do oscilador.

**Movimento Harmônico Simples e Movimento Circular Uniforme**

O movimento harmônico simples é a projeção de um movimento circular uniforme, sobre o diâmetro do círculo em que este último movimento ocorre. A Fig. 14-17 mostra que todos os parâmetros do movimento circular (posição, velocidade e aceleração) projetam-se com os valores correspondentes para o movimento harmônico simples.

**Movimento Harmônico Amortecido**

A energia mecânica  $E$  num sistema oscilatório real diminui durante as oscilações porque forças externas, como a força de viscosidade, inibem as oscilações e transformam energia mecânica em energia térmica. O oscilador e o movimento são ditos **amortecidos**. Se a **força de amortecimento** é dada por  $F_a = -bv$ , onde  $v$  é a velocidade do oscilador e  $b$  é a **constante de amortecimento**, então o deslocamento do oscilador é dado por

$$x(t) = x_m e^{-bt/2m} \cos(\omega_a t + \phi), \quad (14-40)$$

onde  $\omega_a$ , a frequência angular do oscilador amortecido, é dada por

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}. \quad (14-41)$$

Se a constante de amortecimento for pequena ( $b \ll [km]^{1/2}$ ), então  $\omega_a \approx \omega$ , onde  $\omega$  é a frequência angular do oscilador não amortecido. Para  $b$  pequeno, a energia mecânica  $E$  do oscilador é dada por

$$E(t) \approx \frac{1}{2} k x_m^2 e^{-bt/m}. \quad (14-42)$$

**Oscilações Forçadas e Ressonância**

Se uma força externa com frequência angular  $\omega$  age sobre um sistema oscilante com frequência angular *natural*  $\omega_0$ , o sistema oscila com a frequência angular  $\omega$ . A amplitude de velocidade  $v_m$  do sistema é máxima quando

$$\omega = \omega_0, \quad (14-44)$$

uma condição denominada **ressonância**. A amplitude  $x_m$  do sistema é (aproximadamente) máxima sob as mesmas condições.

**QUESTIONÁRIO**

1. Quais são as diferenças de fase de dois osciladores lineares, com massas e constantes elásticas idênticas, nas três situações vistas na Fig. 14-23?
2. Quando a massa  $m$ , é suspensa de uma determinada mola  $A$  e a massa menor  $m_2$  é suspensa da mola  $B$ , as molas são distendidas da mesma distância. Se os sistemas forem colocados em movimento harmônico simples vertical com a mesma amplitude, qual deles terá mais energia?
3. Uma certa mola tem uma constante de força  $k$ , com massa  $m$  suspensa nela. A mola é cortada pela metade e a mesma massa é suspensa de uma das duas metades. Como se relacionam as frequências de oscilação, antes e depois que a mola é cortada?
4. Suponhamos que um sistema consiste em um bloco de massa desconhecida e uma mola de constante também desconhecida. Mostre como podemos prever o período de oscilação deste sistema bloco-mola sim-

- plesmente medindo a extensão da mola produzida, quando penduramos o bloco nela.
5. Qualquer mola real tem massa. Se esta massa for levada em conta, explique qualitativamente como isto afetará o período de oscilação do sistema mola-massa.
6. Como cada uma das seguintes propriedades de um oscilador harmônico simples é afetada, se dobramos a amplitude: período, constante da mola, energia mecânica total, velocidade máxima e aceleração máxima.
7. Que alterações você pode fazer num oscilador harmônico para dobrar a velocidade máxima da massa oscilante?
8. Que aconteceria ao movimento de um sistema oscilante se o sinal da força  $-kx$ , na Eq. 14-9, fosse invertido?

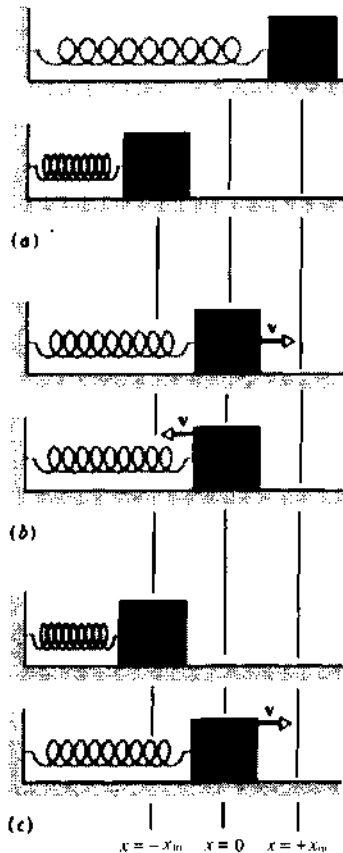


Fig. 14-23 Questão 1.

9. A frequência de oscilação de um pêndulo de torção mudaria, se você o levasse para a Lua? E quanto às frequências de um pêndulo simples, um oscilador massa-mola e um pêndulo físico, tal como uma tábua balançando de uma das extremidades?

10. Tente prever com argumentos qualitativos se o período de um pêndulo irá aumentar ou diminuir, quando sua amplitude for aumentada.

11. Um pêndulo suspenso do teto de uma cabine de elevador tem um período  $T$  quando o elevador está parado. Como o período é afetado quando o elevador move-se (a) para cima com velocidade constante, (b) para baixo com velocidade constante, (c) para baixo com aceleração constante para cima, (d) para cima com aceleração constante para cima, (e) para cima com aceleração constante para baixo  $a < g$ , e (f) para baixo com aceleração constante para baixo  $a > g$ ? (g) Em qual caso, se ocorre em algum, o pêndulo oscila de cabeça para baixo?

12. Um pêndulo montado em um carrinho tem um período  $T$ , quando este está estacionário no plano horizontal. Como o período será afetado, se o carrinho estiver em um plano inclinado de um ângulo  $\theta$  com a horizontal (Fig. 14-24), enquanto (a) permanece estacionário, (b) se move plano abaixo com velocidade constante, (c) se move plano acima com velocidade constante, (d) se move plano acima com aceleração constante plano acima, (e) se move plano abaixo com aceleração constante plano acima, (f) se move plano abaixo com aceleração constante  $a < g \sin \theta$  plano abaixo e (g) se move plano abaixo com aceleração constante  $a = g \sin \theta$  plano abaixo.

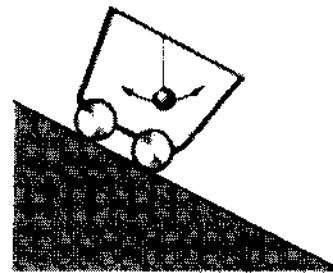


Fig. 14-24 Questões 12 e 13.

13. Qual o ângulo entre a vertical e a posição de equilíbrio do pêndulo nas sete situações da Questão 12?

14. Como podemos utilizar um pêndulo para traçar uma curva senoidal?

15. Por que amortecedores são normalmente utilizados em máquinas? Dê exemplos.

16. Um cantor, sustentando uma nota de frequência apropriada, pode quebrar uma taça de cristal, se este for de boa qualidade. Isto não pode ser feito, se o cristal for de baixa qualidade. Explique por quê, em termos da constante de amortecimento do vidro.

### EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

#### Seção 14-3 Movimento Harmônico Simples: A Lei de Força

1E. Um objeto sujeito a um movimento harmônico simples leva 0,25 s para ir de um ponto de velocidade zero até o próximo ponto onde isto ocorre. A distância entre estes pontos é de 36 cm. Calcule (a) o período, (b) a frequência e (c) a amplitude do movimento.

2E. Um sistema massa-mola oscilante leva 0,75 s para começar a repetir seu movimento. Ache (a) o período, (b) a frequência em hertz e (c) a frequência angular do sistema em radianos por segundo.

3E. Um bloco de 4,00 kg está suspenso de uma certa mola, estendendo-a 16,0 cm além de sua posição de repouso. (a) Qual é a constante da mola? (b) O bloco é removido e um corpo com 0,500 kg é suspenso da mesma mola. Se esta for então puxada e solta, qual o período da oscilação?

4E. Um oscilador consiste em um bloco com massa de 0,500 kg ligado a determinada mola. Quando colocado em oscilação com amplitude 35,0 cm, observa-se que repete seu movimento a cada 0,500 s. Ache (a) o período, (b) a frequência, (c) a frequência angular, (d) a constante da mola, (e) a velocidade máxima e (f) a força máxima exercida sobre o bloco.

5E. A frequência de vibração dos átomos nos sólidos, a temperaturas normais, é da ordem de  $10^{13}$  Hz. Imagine que os átomos estejam conectados uns aos outros por "molas". Suponha que um único átomo de prata em um sólido vibre com esta frequência e que todos os demais átomos estejam em repouso. Calcule a constante de mola efetiva. Um mol de prata tem massa de 108 g e contém  $6,02 \times 10^{23}$  átomos.

6E. Qual a aceleração máxima de uma plataforma que vibra com uma amplitude de 2,20 cm, numa frequência de 6,60 Hz?

**7E.** Um alto-falante produz sons musicais por meio da oscilação de um diafragma. Se a amplitude da oscilação for limitada a  $1,0 \times 10^{-3}$  mm, que frequências resultarão da aceleração do diafragma que exceda  $g$ ?

**8E.** A escala de uma balança de mola mede de 0 a 32,0 libras e tem o comprimento de 4,00 polegadas. Um pacote suspenso da balança oscila verticalmente com uma frequência de 2,0 Hz. (a) Qual a constante da mola? (b) Qual o peso do pacote?

**9E.** Um peso de 20 N é suspenso na parte inferior de certa mola vertical, fazendo com que esta estenda 20 cm. (a) Qual a constante da mola? (b) Esta mola é então colocada horizontalmente em mesa sem atrito. Uma extremidade dela é fixada e a outra é presa a um peso de 5,0 N. O peso é então deslocado (esticando a mola) e liberado do repouso. Qual o período da oscilação?

**10E.** Uma massa de 50,0 g é presa à extremidade inferior de mola vertical e colocada em vibração. Se a velocidade máxima da massa é 15,0 cm/s e o período 0,500 s, ache (a) a constante de elasticidade da mola, (b) a amplitude do movimento e (c) a frequência de oscilação.

**11E.** Uma partícula de  $1,00 \times 10^{-20}$  kg está vibrando com um movimento harmônico simples, com um período de  $1,00 \times 10^{-5}$  s e uma velocidade máxima de  $1,00 \times 10^3$  m/s. Calcule (a) a frequência angular e (b) o deslocamento máximo da partícula.

**12E.** Um pequeno corpo de massa 0,12 kg está executando um movimento harmônico simples com amplitude 8,5 cm e período 0,20 s. (a) Qual o valor máximo da força agindo sobre ele? (b) Se as oscilações são produzidas por uma mola, qual a sua constante de elasticidade?

**13E.** Num barbeador elétrico, as lâminas movem-se para a frente e para trás numa distância de 2,0 mm. O movimento é harmônico simples, com a frequência de 120 Hz. Ache (a) a amplitude, (b) a velocidade máxima da lâmina e (c) a aceleração máxima da lâmina.

**14E.** O diafragma de um alto-falante está vibrando num movimento harmônico simples com a frequência de 440 Hz e um deslocamento máximo é 0,75 mm. Quais são (a) a frequência angular, (b) a velocidade máxima e (c) a aceleração máxima deste diafragma?

**15E.** Podemos considerar que um automóvel esteja montado sobre quatro molas idênticas, no que concerne às suas oscilações verticais. As molas de um certo carro estão ajustadas de forma que as vibrações tenham uma frequência de 3,00 Hz. (a) Qual a constante de elasticidade de cada mola, se a massa do carro é de 1.450 kg e o peso está homoganeamente distribuído entre elas? (b) Qual será a frequência de vibração se cinco passageiros, com a média de 73,0 kg cada um, estiverem no carro? (Novamente, considere uma distribuição homogênea de peso.)

**16E.** Um corpo oscila com movimento harmônico simples de acordo com a equação

$$x = (6,0 \text{ m}) \cos[(3\pi \text{ rad/s})t + \pi/3 \text{ rad}].$$

Em  $t = 2,0$  s, quais são (a) o deslocamento, (b) a velocidade, (c) a aceleração e (d) a fase do movimento? Também, quais são (e) a frequência e (f) o período do movimento?

**17E.** Uma partícula executa um MHS linear com frequência de 0,25 Hz em torno do ponto  $x = 0$ . Em  $t = 0$ , ela tem um deslocamento de  $x = 0,37$  cm e velocidade zero. Para o movimento, determine (a) o período, (b) a frequência angular, (c) a amplitude, (d) o deslocamento no tempo  $t$ , (e) a velocidade no tempo  $t$ , (f) a velocidade máxima, (g) a aceleração máxima, (h) o deslocamento em  $t = 3,0$  s e (i) a velocidade em  $t = 3,0$  s.

**18E.** O pistão no cabeçote dos cilindros de uma locomotiva tem um deslocamento (duas vezes a amplitude) de 0,76 m. Se o pistão move-se com um movimento harmônico simples, com uma frequência angular equivalente a 180 rotações por minuto, qual sua velocidade máxima?

**19P.** A Fig. 14-25 mostra um astronauta num Aparelho de Medida de Massa Corporal (AMMC). Projetada para uso em veículos espaciais orbitais, seu objetivo é permitir que os astronautas meçam sua massa em condições de "falta de peso", em órbita em torno da Terra. A AMMC é uma cadeira montada sobre molas; um astronauta mede seu período de oscilação na cadeira; a massa é encontrada a partir da fórmula para o período de oscilação de um sistema massa-mola. (a) Se  $M$  é a massa do astronauta e  $m$  a massa "efetiva" desta parte da AMMC que também oscila, mostre que

$$M = (k/4\pi^2)T^2 - m,$$

onde  $T$  é o período de oscilação e  $k$  a constante da mola. (b) A constante da mola era  $k = 605,6$  N/m para a AMMC na Missão Dois do Skylab; o período de oscilação da cadeira vazia era 0,90149 s. Calcule a massa efetiva da cadeira. (c) Com um astronauta na cadeira, o período de oscilação passou para 2,08832 s. Calcule a massa do astronauta.

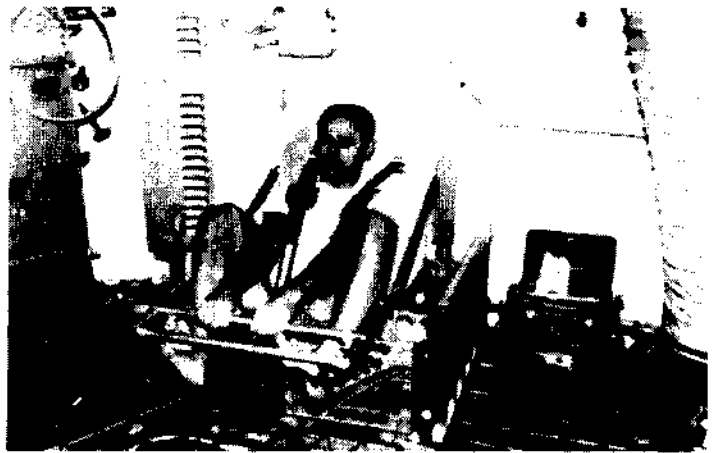


Fig. 14-25 Problema 19.

**20P.** Um bloco de 2,00 kg está suspenso de uma certa mola. Se suspendermos um corpo de 300 g embaixo do bloco, a mola esticará mais 2,00 cm. (a) Qual a constante da mola? (b) Se removermos o corpo de 300 g e o bloco for colocado em oscilação, ache o período do movimento.

**21P.** A extremidade de determinada mola vibra com um período de 2,0 s, quando certa massa  $m$  é ligada a ela. Quando esta massa é acrescida de 2,0 kg, o período passa para 3,0 s. Ache o valor de  $m$ .

**22P.** A extremidade de um dos braços de um diapasão executa um movimento harmônico simples com frequência de 1.000 Hz e amplitude de 0,40 mm. Ache (a) a aceleração máxima e (b) a velocidade máxima da extremidade do braço. Determine (c) a aceleração e (d) a velocidade da extremidade do braço, quando tem um deslocamento de 0,20 mm.

**23P.** Um bloco de 0,10 kg oscila para frente e para trás, ao longo de uma linha reta, numa superfície horizontal sem atrito. Seu deslocamento a partir da origem é dado por

$$x = (10 \text{ cm}) \cos[(10 \text{ rad/s})t + \pi/2 \text{ rad}].$$

(a) Qual a frequência de oscilação? (b) Qual a velocidade máxima alcançada pelo bloco? Em que valor de  $x$  isto acontece? (c) Qual a aceleração máxima do bloco? Em qual valor de  $x$  isto ocorre? (d) Que força, aplicada no bloco, resulta nesta dada oscilação?

**24P.** Num certo porto, a maré faz com que a superfície do mar suba e desça uma distância  $d$  num movimento harmônico simples, com um período de 12,5 h. Quanto tempo leva para que a água desça uma distância  $d/4$  de sua altura máxima?

#### 44 GRAVITAÇÃO, ONDAS E TERMODINÂMICA

**25P.** Dois blocos ( $m = 1.0$  kg e  $M = 10$  kg) e uma única mola ( $k = 200$  N/m) estão colocados em uma superfície horizontal sem atrito, como ilustra a Fig. 14-26. O coeficiente de atrito estático entre os dois blocos é de 0,40. Qual a máxima amplitude possível do movimento harmônico simples, se não houver deslizamento entre os blocos?

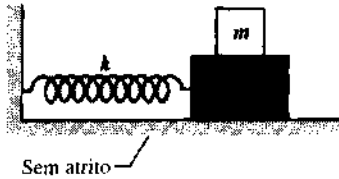


Fig. 14-26 Problema 25.

**26P.** Um bloco está numa superfície horizontal (uma mesa oscilante), que se agita horizontalmente em um movimento harmônico simples com a frequência de 2,0 Hz. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e a superfície é 0,50. Qual pode ser a maior amplitude do MHS, para que o bloco não deslize sobre a superfície?

**27P.** Um bloco está num pistom que se move verticalmente em um movimento harmônico simples. (a) Se o MHS tem um período de 1,0 s, em que amplitude do movimento o bloco e o pistom irão se separar? (b) Se o pistom tem uma amplitude de 5,0 cm, qual a frequência máxima em que o bloco e o pistom estarão continuamente em contato?

**28P.** Um oscilador consiste em um bloco preso a determinada mola ( $k = 400$  N/m). Num tempo  $t$ , a posição (medida a partir da posição de equilíbrio do sistema), velocidade e aceleração do bloco são  $x = 0,100$  m,  $v = -13,6$  m/s e  $a = -123$  m/s<sup>2</sup>. Calcule (a) a frequência, (b) a massa do bloco e (c) a amplitude do movimento.

**29P.** Um oscilador harmônico simples consiste em um bloco com massa 2,00 kg ligado a mola com constante 100 N/m. Quando  $t = 1,00$  s, a posição e a velocidade do bloco são  $x = 0,129$  m e  $v = 3,415$  m/s. (a) Qual a amplitude das oscilações? Quais eram (b) a posição e (c) a velocidade da massa em  $t = 0$  s?

**30P.** Certa mola sem massa está suspensa do teto com um pequeno objeto preso a sua extremidade inferior. O objeto é mantido inicialmente em repouso, numa posição  $y$ , tal que a mola não fique esticada. O objeto é então liberado e oscila para cima e para baixo, sendo sua posição mais baixa 10 cm de  $y$ . (a) Qual a frequência da oscilação? (b) Qual a velocidade do objeto quando está 8,0 cm abaixo da posição inicial? (c) Um objeto com massa de 300 g é ligado ao primeiro objeto; logo após, o sistema oscila com metade da frequência original. Qual a massa do primeiro objeto? (d) Com relação a  $y$ , onde é o novo ponto de equilíbrio (repouso) com ambos os objetos presos à mola?

**31P.** Duas partículas oscilam em um movimento harmônico simples ao longo de um segmento de reta comum de comprimento  $A$ . Cada partícula tem um período de 1,5 s, mas diferem em fase de  $\pi/6$  rad. (a) Qual a distância entre elas (em termos de  $A$ ), 0,50 s após a partícula mais atrasada deixar uma das extremidades do percurso? (b) Elas estão se movendo no mesmo sentido, em direção uma da outra ou estão se afastando?

**32P.** Duas partículas executam um movimento harmônico simples com as mesmas amplitudes e frequências ao longo da mesma linha reta. Elas passam uma pela outra, movendo-se em sentidos opostos, cada vez que seu deslocamento é metade da amplitude. Qual a diferença de fase entre elas?

**33P.** Duas molas idênticas estão ligadas a um bloco de massa  $m$  e aos dois suportes mostrados na Fig. 14-27. Mostre que a frequência da oscilação na superfície sem atrito é

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

**34P.** Suponha que as duas molas da Fig. 14-27 têm constantes diferentes  $k_1$  e  $k_2$ . Mostre que a frequência  $f$  da oscilação do bloco é então dada por

$$f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2},$$

onde  $f_1$  e  $f_2$  são as frequências nas quais o bloco oscilaria se estivesse conectado apenas à mola 1 ou à 2.

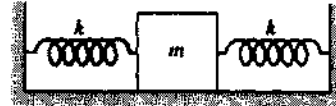


Fig. 14-27 Problemas 33 e 34.

**35P.** Duas molas são ligadas e conectadas a determinada massa  $m$ , como mostrado na Fig. 14-28. A superfície é sem atrito. Se ambas as molas tiverem uma constante de força  $k$ , mostre que a frequência da oscilação de  $m$  é

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{2m}}$$

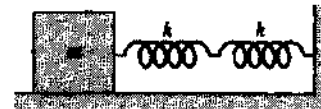


Fig. 14-28 Problema 35.

**36P.** Um bloco pesando 14,0 N, que desliza sem atrito num plano inclinado de 40,0°, está conectado ao topo do plano por uma mola sem massa, com o comprimento em repouso igual a 0,450 m e constante  $k = 120$  N/m, como mostrado na Fig. 14-29. (a) A que distância do topo do plano inclinado o bloco pára? (b) Se o bloco for puxado um pouco para baixo e liberado, qual o período das oscilações resultantes?

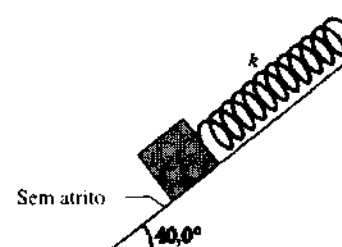


Fig. 14-29 Problema 36.

**37P.** Uma mola uniforme, cujo comprimento de repouso é  $L$ , tem uma constante de força  $k$ . A mola é cortada em duas partes com comprimentos de repouso  $L_1$  e  $L_2$ , com  $L_1 = nL_2$ . (a) Quais as correspondentes constantes de força  $k_1$  e  $k_2$  em termos de  $n$  e  $k$ ? (b) Se um bloco for ligado à mola original, como na Fig. 14-5, oscila com frequência  $f$ . Se esta última for substituída pelos pedaços  $L_1$  ou  $L_2$ , a frequência correspondente é  $f_1$  ou  $f_2$ . Ache  $f_1$  e  $f_2$  em termos de  $f$ .

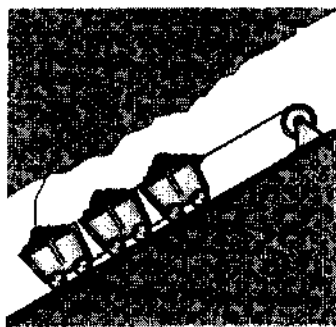


Fig. 14-30 Problema 38.

**38P.** Três vagões de minério com 10.000 kg são mantidos em repouso num plano inclinado de  $30^\circ$ , nos trilhos de uma mina, usando um cabo paralelo ao plano (Fig. 14-30). Observa-se que o cabo estica 15 cm, logo antes que a interligação entre os vagões inferiores se rompa, liberando o vagão mais baixo. Supondo que o cabo obedeça à lei de Hooke, ache (a) a frequência e (b) a amplitude das oscilações resultantes dos dois vagões que restam.

#### Seção 14-4 Movimento Harmônico Simples: Considerações Sobre Energia

**39E.** Ache a energia mecânica de um sistema massa-mola com uma constante de mola de 1,3 N/cm e uma amplitude de 2,4 cm.

**40E.** Um sistema massa-mola oscilante tem uma energia mecânica de 1,00 J, uma amplitude de 10,0 cm e uma velocidade máxima de 1,2 m/s. Ache (a) a constante da mola, (b) a massa e (c) a frequência da oscilação.

**41E.** Certa mola vertical estica 9,6 cm, quando um bloco de 1,3 kg é suspenso de sua extremidade. (a) Calcule a sua constante. Este bloco então é deslocado mais 5,0 cm para baixo e liberado do repouso. Ache (b) o período, (c) a frequência, (d) a amplitude, (e) a energia total e (f) a velocidade máxima do MHS resultante.

**42E.** Um objeto de 5,00 kg numa superfície horizontal sem atrito é ligado a mola uma com constante 1.000 N/m. O objeto é deslocado 50,0 cm horizontalmente e empurrado a uma velocidade inicial de 10,0 m/s, na direção do ponto de equilíbrio. (a) Qual a frequência do movimento? Quais são (b) a energia potencial inicial do sistema bloco-mola, (c) a energia cinética inicial e (d) a amplitude da oscilação?

**43E.** Uma (hipotética) atiradeira é esticada 1,5 m para atirar um projétil de 130 g com velocidade suficiente para escapar da Terra (11,2 km/s). Considere que os elásticos da atiradeira obedeçam à lei de Hooke. (a) Qual a constante de mola do aparelho, se toda a energia potencial elástica for convertida em energia cinética? (b) Considere que uma pessoa média pode exercer uma força de 220 N. Quantas pessoas seriam necessárias para esticar a atiradeira?

**44E.** Quando o deslocamento no MHS é metade da amplitude  $x_m$ , que fração da energia total é (a) cinética e (b) potencial? (c) Com qual deslocamento, em termos de amplitude, a energia do sistema é metade cinética e metade potencial?

**45E.** Um bloco de massa  $M$ , em repouso numa mesa horizontal sem atrito, é ligado a um suporte rígido por uma mola de constante  $k$ . Uma bala de massa  $m$  e velocidade  $v$  atinge o bloco como mostrado na Fig. 14-31. A bala penetra no bloco. Determine (a) a velocidade do bloco imediatamente após a colisão e (b) a amplitude do movimento harmônico simples resultante.

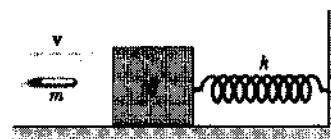


Fig. 14-31 Exercício 45.

**46P.** Uma partícula de 3,0 kg está em movimento harmônico simples em uma dimensão e move-se de acordo com a equação

$$x = (5,0 \text{ m})\cos[(\pi/3 \text{ rad/s})t - \pi/4 \text{ rad}].$$

(a) Em qual valor de  $x$  a energia potencial da partícula é igual à metade da energia total? Quanto tempo leva para que a partícula mova-se para esta posição  $x$ , a partir do ponto de equilíbrio?

**47P.** Uma partícula de 10 g está executando um movimento harmônico simples com uma amplitude de  $2,0 \times 10^{-3}$  m. A aceleração máxima sofrida pela partícula é de  $8,0 \times 10^3$  m/s<sup>2</sup>; a fase inicial é  $\pi/3$  rad. (a) Escreva a equação para a força na partícula como uma função do tempo. (b) Qual o período do movimento? (c) Qual a velocidade máxima da partícula? (d) Qual a energia mecânica total deste oscilador harmônico simples?

**48P.** Determinada mola sem massa com uma constante 19 N/m está suspensa verticalmente. Um corpo com massa de 0,20 kg é preso à sua extremidade livre e, então, liberado. Considere que a mola não estava esticada antes que o corpo fosse liberado. Ache (a) quanto abaixo da posição inicial o corpo desce e (b) a frequência e a amplitude do movimento resultante, que consideraremos harmônico simples.

**49P.** Um bloco de 4,0 kg está suspenso de uma mola com constante 500 N/m. Uma bala de 50 g é atirada no bloco de uma posição diretamente abaixo, com a velocidade de 150 m/s e fica presa ao bloco. (a) Ache a amplitude do movimento harmônico simples resultante. (b) Que fração da energia cinética original da bala aparece como energia mecânica no oscilador harmônico?

**50P\*.** Um cilindro sólido está ligado a uma mola horizontal sem massa de forma que ele possa rolar, sem deslizamento, sobre uma superfície horizontal (Fig. 14-32). A constante da mola  $k$  é 3,0 N/m. Se o sistema



Fig. 14-32 Problema 50.

for liberado de uma posição de repouso em que a mola esteja estendida de 0,25 m, ache (a) a energia cinética translacional e (b) a energia cinética rotacional do cilindro quando ele passa pela posição de equilíbrio. (c) Mostre que nestas condições o centro de massa do cilindro executa um movimento harmônico simples com período

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3M}{2k}},$$

onde  $M$  é a massa do cilindro. (Sugestão: Ache a derivada da energia mecânica total em relação ao tempo.)

#### Seção 14-5 Um Oscilador Harmônico Simples Angular

**51E.** Um disco uniforme tem massa de 3,00 kg e um raio de 70,0 cm. Está suspenso num plano horizontal por um fio vertical preso a seu cen-

tro. Se for girado de  $2,50$  rad em torno do fio, um torque de  $0,0600$  N·m é necessário para mantê-lo nesta posição. Calcule (a) o momento de inércia do disco em relação ao fio, (b) a constante de torção e (c) a frequência angular deste pêndulo de torção quando for posto a oscilar.

**52P.** Uma esfera sólida de  $95$  kg com um raio de  $15$  cm é suspensa de um fio vertical preso ao teto de uma sala. Um torque de  $0,20$  N·m é necessário para girar a esfera de um ângulo de  $0,85$  rad. Qual o período da oscilação, quando a esfera é liberada desta posição?

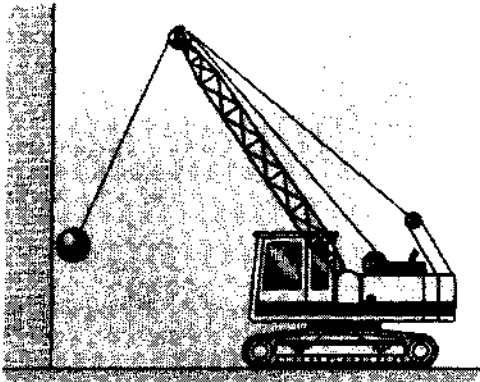
**53P.** Um engenheiro quer achar o momento de inércia de um objeto de forma irregular com massa de  $10$  kg em relação a um eixo, através de seu centro de massa. O objeto é suspenso com um fio ao longo do eixo desejado. O fio tem uma constante de torção  $\kappa = 0,50$  N·m. Se este pêndulo de torção passa por  $20$  ciclos completos de oscilação em  $50$  s, qual o momento de inércia do objeto irregular?

**54P.** A roda de balanço de um relógio oscila com uma amplitude angular de  $\pi$  rad e um período de  $0,500$  s. Ache (a) a velocidade angular máxima da roda e (b) a velocidade angular da roda quando seu deslocamento é de  $\pi/2$  rad e (c) a aceleração angular da roda, quando seu deslocamento é de  $\pi/4$  rad.

**Seção 14-6 Pêndulos**

**55E.** Qual o comprimento de um pêndulo simples cujo período é  $1,00$  s num ponto onde  $g = 32,2$  pés/s<sup>2</sup>?

**56E.** Uma bola de demolição de  $2.500$  kg balança na ponta de um guindaste, como mostrado na Fig. 14-33. O comprimento do segmento de cabo que balança é de  $17$  m. (a) Ache o período de balanço, considerando que o sistema pode ser tratado como um pêndulo simples. (b) O período depende da massa da bola?

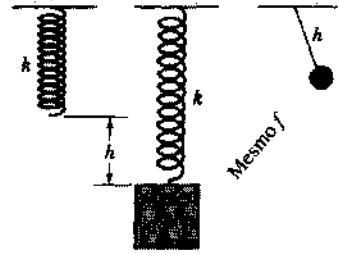


**Fig. 14-33** Exercício 56.

**57E.** Qual o comprimento de um pêndulo simples que marca os segundos completando um balanço completo para a esquerda e para a direita, a cada  $2,0$  s?

**58E.** Se um pêndulo simples com comprimento de  $1,50$  m faz  $72$  oscilações em  $180$  s, qual a aceleração da gravidade naquele local?

**59E.** Dois sistemas oscilantes que você estudou são o massa-mola e o pêndulo simples. Há uma relação interessante entre eles. Suponha que você suspenda um peso da extremidade de uma certa mola e, quando o peso está em repouso, ela fica esticada de uma distância  $h$ . Mostre que a frequência deste sistema massa-mola é a mesma que o de um pêndulo simples cujo comprimento é  $h$ . Veja Fig. 14-34.



**Fig. 14-34** Exercício 59.

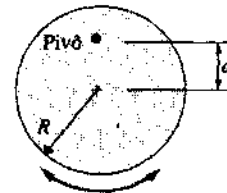
**60E.** Um artista, sentado num trapézio, está balançando para frente e para trás com um período de  $8,85$  s. Se ele ficar de pé, assim elevando o centro de massa do sistema *trapézio + artista* em  $35,0$  cm, qual será o novo período do trapézio? Trate o *trapézio + artista* como um pêndulo simples.

**61E.** Um pêndulo simples com comprimento  $L$  está balançando livremente com uma pequena amplitude angular. Quando o pêndulo passa por sua posição central (ou de equilíbrio), sua corda é súbita e rigidamente presa em seu ponto médio. Em termos do período original  $T$  do pêndulo, qual será o novo período?

**62E.** Um pêndulo é formado prendendo-se uma haste longa e fina de comprimento  $L$  e massa  $m$  em um dado ponto, que está a uma distância  $d$  acima do centro da haste. (a) Ache o período deste pêndulo em termos de  $d$ ,  $L$ ,  $m$  e  $g$ , considerando que oscile com uma pequena amplitude. O que acontece ao período, se (b)  $d$  é reduzido, (c)  $L$  é aumentado ou (d)  $m$  é aumentada?

**63E.** Um pêndulo físico consiste em uma haste com um metro, que é presa por um pequeno orifício feito através da haste, a uma distância  $x$  da marca de  $50$  cm. Observa-se que o período de oscilação é de  $2,5$  s. Ache a distância  $x$ .

**64E.** Um pêndulo físico consiste em um disco sólido uniforme (de massa  $M$  e raio  $R$ ), suportada num plano vertical por um eixo localizado a uma distância  $d$  do centro do disco (Fig. 14-35). O disco é deslocado de um pequeno ângulo e liberado. Ache uma expressão para o período do movimento harmônico simples resultante.



**Fig. 14-35** Exercício 64.

**65E.** Um disco circular uniforme cujo raio  $R$  é de  $12,5$  cm está suspenso, como um pêndulo físico, de um ponto em sua borda. (a) Qual o seu período de oscilação? (b) A que distância radial  $r < R$  há um ponto de suspensão que origina o mesmo período?

**66E.** Um pêndulo consiste em um disco uniforme com raio de  $10,0$  cm e massa de  $500$  g preso a uma haste uniforme, com comprimento  $500$  mm e massa  $270$  g; veja Fig. 14-36. (a) Calcule o momento de inércia do pêndulo em relação ao eixo. (b) Qual a distância entre o eixo e o centro de massa do pêndulo? (c) Calcule o período de oscilação.

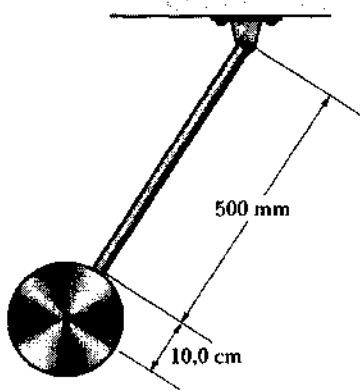


Fig. 14-36 Exercício 66.

67E. No Exemplo 14-6, vimos que um pêndulo físico tem um centro de oscilação a uma distância  $2l/3$  de seu ponto de suspensão. Mostre que a distância, entre o ponto de suspensão e o centro de oscilação, para um pêndulo físico de qualquer forma é  $h/mh$ , onde  $l$  e  $h$  têm os significados indicados para eles na Eq. 14-32, e  $m$  é a massa do pêndulo.

68E. Uma haste de um metro balançando de uma das extremidades oscila com uma frequência  $f_0$ . Qual seria a frequência, em termos de  $f_0$ , se a metade inferior da haste fosse cortada?

69P. Uma haste com comprimento  $L$  oscila como um pêndulo físico, com eixo no ponto  $O$  na Fig. 14-37. (a) Deduza uma expressão para o período do pêndulo em termos de  $L$  e  $x$ , a distância do ponto de suspensão ao centro de massa do pêndulo. (b) Para qual valor de  $x/L$  o período é mínimo? (c) Mostre que, se  $L = 1,00$  m e  $g = 9,80$  m/s<sup>2</sup>, este mínimo é 1,53 s.

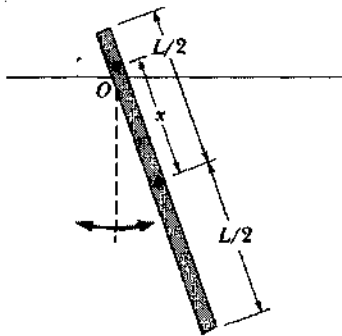


Fig. 14-37 Problema 69.

70P. O centro de oscilação de um pêndulo físico tem uma propriedade interessante: se uma força impulsiva (que supomos como horizontal e no plano de oscilação) age sobre o centro de oscilação, nenhuma reação é sentida no ponto de suspensão. Jogadores de beisebol (e jogadores de muitos outros esportes) sabem que, a menos que a bola atinja o taco neste ponto (chamado de "ponto doce" pelos atletas), a reação devida ao impacto irá machucar suas mãos. Para comprovar esta propriedade, façamos com que a haste na Fig. 14-13a simule um taco de beisebol. Suponhamos que uma força horizontal  $F$  (devido ao impacto da bola) age para a direita em  $P$ , o centro de oscilação. Supõe-se que o bateador segure o taco em  $O$ , o ponto de suspensão da haste. (a) Que aceleração o ponto  $O$  sofre como resultado da aplicação de  $F$ ? (b) Que aceleração angular é produzida por  $F$  em torno do centro de massa da haste? (c) Como resultado da aceleração angular em (b), que aceleração linear o ponto  $O$  sofre? (d) Considerando as magnitudes e as direções das acelerações em (a) e (c), convença-se de que  $P$  é realmente o "ponto doce".

71P. Qual a frequência de um pêndulo simples com 2,0 m de comprimento (a) em uma sala (b) em um elevador acelerando para cima a uma taxa de 2,0 m/s<sup>2</sup> e (c) em queda livre?

72P. Um pêndulo simples de comprimento  $L$  e massa  $m$  está suspenso em um carro que está viajando a uma velocidade constante  $v$ , em um círculo de raio  $R$ . Se o pêndulo executa pequenas oscilações numa direção radial em torno de sua posição de equilíbrio, qual será a sua frequência de oscilação?

73P. Para um pêndulo simples, ache a amplitude angular  $\theta_m$  em que o torque de restauração necessário para um movimento harmônico simples desvia do torque de restauração real em 1%. (Veja "Expansão das Funções Trigonômicas", no Apêndice G.)

74P. O peso em um pêndulo simples de comprimento  $R$  move-se em um arco de círculo. (a) Considerando que a aceleração do peso, conforme ele passa pela sua posição de equilíbrio, é aquela para movimento circular uniforme ( $mv^2/R$ ), mostre que a tensão no fio naquela posição é  $mg(1 + \theta_m^2)$ , se a amplitude angular  $\theta_m$  for pequena. (Veja "Expansão das Funções Trigonômicas", no Apêndice G.) (b) As tensões para outras posições do peso são maiores, menores ou iguais?

75P. Uma haste longa e uniforme de comprimento  $L$  e massa  $m$  roda livremente no plano horizontal em torno de um eixo vertical, através de seu centro. Uma determinada mola com constante de força  $k$  é ligada horizontalmente entre uma extremidade da haste e uma parede fixa. Veja Fig. 14-38. Quando a haste está em equilíbrio, fica paralela à parede. Qual o período das pequenas oscilações que resultam, quando a haste é ligeiramente girada e liberada?

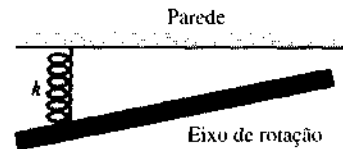


Fig. 14-38 Vista superior para o Problema 75.

76P. Uma roda gira livremente em torno de seu eixo fixo. Uma mola está ligada a um de seus raios, a uma distância  $r$  do eixo, como vemos na Fig. 14-39. (a) Considerando que a roda é um aro de massa  $m$  e raio  $R$ , obtenha a frequência angular de pequenas oscilações deste sistema em termos de  $m$ ,  $R$ ,  $r$  e a constante da mola  $k$ . Como mudaria o resultado se (b)  $r = R$  e (c)  $r = 0$ ?

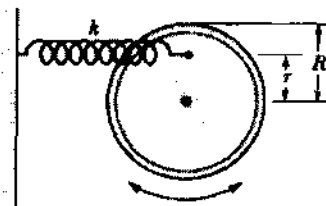


Fig. 14-39 Problema 76.

77P. Um disco de 2,5 kg com 42 cm de diâmetro é suportado por uma haste sem massa com 76 cm de comprimento, que está presa por um eixo em sua extremidade, como na Fig. 14-40. (a) Inicialmente, a mola de torção sem massa não está conectada. Qual o período da oscilação? (b) A mola de torção está conectada agora de forma que, em equilíbrio, a haste permanece vertical. Qual deveria ser a constante torcional da mola, de forma que o novo período de oscilação seja 0,50 s menor do que antes?



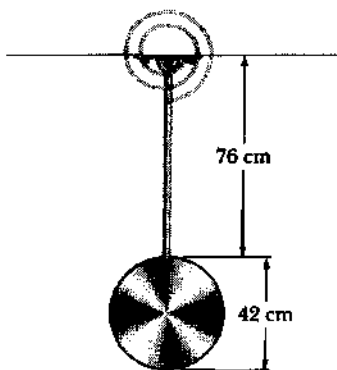


Fig. 14-40 Problema 77.

**78P.** Um pêndulo físico tem dois pontos possíveis *A* e *B* em torno dos quais pode oscilar; o ponto *A* tem uma posição fixa e o *B* é ajustável ao longo do comprimento do pêndulo, como mostrado na Fig. 14-41. Verifica-se que o período do pêndulo, quando suspenso por *A*, é *T*. O pêndulo é então invertido e suspenso por *B*, que é deslocado até que o pêndulo tenha de novo um período *T*. Mostre que a aceleração de queda livre *g* é dada por

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2},$$

na qual *L* é a distância entre *A* e *B* para iguais períodos *T*. (Note que *g* pode ser medida desta forma, sem que se saiba o momento de inércia do pêndulo ou qualquer de suas dimensões exceto *L*.)



Fig. 14-41 Problema 78.

**79P\*.** Uma haste uniforme com comprimento *L* oscila em torno de um eixo como um pêndulo físico. A que distância, em termos de *L*, deve o eixo estar do centro de massa para minimizar o período?

**Seção 14-8 Movimento Harmônico Simples Amortecido (Opcional)**

**80E.** A amplitude de um oscilador ligeiramente amortecido diminui 3,0% durante cada ciclo. Que fração da energia do oscilador é perdida em cada oscilação completa?

**81E.** No Exemplo 14-10, qual a relação entre a amplitude das oscilações amortecidas e a amplitude inicial, após serem realizadas 20 oscilações completas?

**82E.** No sistema visto na Fig. 14-18, o bloco tem massa de 1,50 kg e a mola uma constante de 8,00 N/m. A força de amortecimento é dada por  $-b(dx/dt)$ , onde  $b = 230 \text{ g/s}$ . Suponha que o bloco seja puxado para baixo por uma distância de 12,0 cm e liberado. (a) Calcule o tempo necessário para que a amplitude seja reduzida para um terço de seu valor inicial. (b) Quantas oscilações serão realizadas pelo bloco durante este tempo?

**83P.** Um oscilador harmônico amortecido consiste em um bloco ( $m = 2,00 \text{ kg}$ ), uma mola ( $k = 10,0 \text{ N/m}$ ) e uma força de amortecimento  $F = -bv$ . Inicialmente, ele oscila com uma amplitude de 25,0 cm; devido ao amortecimento, a amplitude é reduzida para três quartos de seu valor inicial, quando são completadas quatro oscilações. (a) Qual o valor de *b*? (b) Quanta energia foi “perdida” durante essas oscilações?

**84P.** (a) Na Eq. 14-39, ache a relação entre a força máxima de amortecimento ( $-b \, dx/dt$ ) e a força máxima da mola ( $-kx$ ), durante a primeira oscilação para os dados do Exemplo 14-10. (b) Esta relação se altera de forma apreciável durante as últimas oscilações?

**85P.** Considere que você está examinando as características do sistema de suspensão de um automóvel com 2.000 kg. A suspensão “cede” 10 cm, quando o peso do automóvel inteiro é colocado sobre ela. Além disso, a amplitude da oscilação diminui 50% durante uma oscilação completa. Estime os valores de *k* e *b* para o sistema de mola e amortecedor em uma roda, considerando que cada uma suporta 500 kg.

**Seção 14-9 Oscilações Forçadas e Ressonância (Opcional)**

**86E.** Para a Eq. 14-43, suponha que a amplitude  $x_m$  é dada por

$$x_m = \frac{F_m}{[m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2]^{1/2}},$$

onde  $F_m$  é a amplitude (constante) da força oscilante externa exercida sobre a mola pelo suporte rígido. Na ressonância, quais são (a) a amplitude e (b) a amplitude de velocidade do objeto oscilante?

**87P.** Um carro de 2.200 libras, transportando quatro pessoas de 180 libras, viaja em uma estrada de terra coberta de pequenas ondulações (costelas), com saliências separadas de 13 pés. O carro balança com amplitude máxima quando sua velocidade é de 10 milhas/h. O carro então pára e os quatro passageiros desembarcam. Quanto sobe a carroceria do carro em sua suspensão devido ao decréscimo de peso?

**PROBLEMAS ADICIONAIS**

**88.** Um oscilador harmônico simples consiste em um bloco ligado a uma mola de constante  $k = 200 \text{ N/m}$ . O bloco desliza para frente e para trás ao longo de uma linha reta, numa superfície sem atrito, com ponto de equilíbrio em  $x = 0$  e amplitude 0,20 m. Um gráfico da velocidade *v* do bloco como uma função do tempo *t* é mostrado na Fig. 14-42. Quais são (a) o período do movimento harmônico simples, (b) a massa do bloco, (c) o deslocamento do bloco em  $t = 0$ , (d) a aceleração do bloco em  $t = 0,10 \text{ s}$  e (e) a energia cinética máxima alcançada pelo bloco.

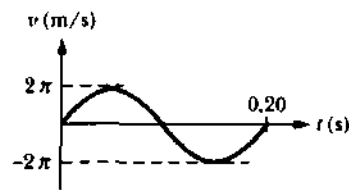


Fig. 14-42 Problema 88.

89. Um oscilador harmônico simples consiste em um bloco de massa 0,50 kg ligado a determinada mola. O bloco desliza para a frente e para trás ao longo de uma linha reta, numa superfície sem atrito, com ponto de equilíbrio em  $x = 0$ . Em  $t = 0$ , o bloco está em seu ponto de equilíbrio e se movendo na direção em que  $x$  aumenta. Um gráfico da magnitude da força resultante  $F$  no bloco, como uma função de sua posição, é mostrado na Fig. 14-43. Quais são (a) a amplitude e (b) o período do movimento harmônico simples, (c) a magnitude da aceleração máxima sofrida pelo bloco e (d) a energia cinética máxima alcançada pelo bloco?

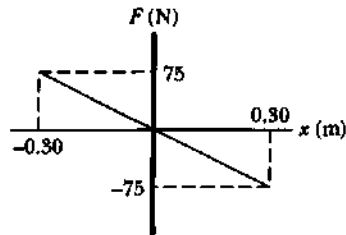


Fig. 14-43 Problema 89.

90. Um bloco pesando 20 N oscila na extremidade de uma mola vertical para a qual  $k = 100 \text{ N/m}$ ; a outra extremidade da mola está presa ao teto. Num certo instante, ela estica 0,30 m além de seu comprimento não esticado (o comprimento quando nenhum peso está pendurado), e o bloco tem velocidade zero. (a) Qual a força resultante no bloco neste instante? Quais são (b) a amplitude e (c) o período do movimento harmônico simples resultante? (d) Qual a energia cinética máxima do bloco, enquanto oscila?

91. Um pêndulo físico consiste em duas hastes com um metro de comprimento que são ligadas como mostra a Fig. 14-44. Qual o período de oscilação com um eixo inserido no ponto A?

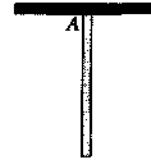
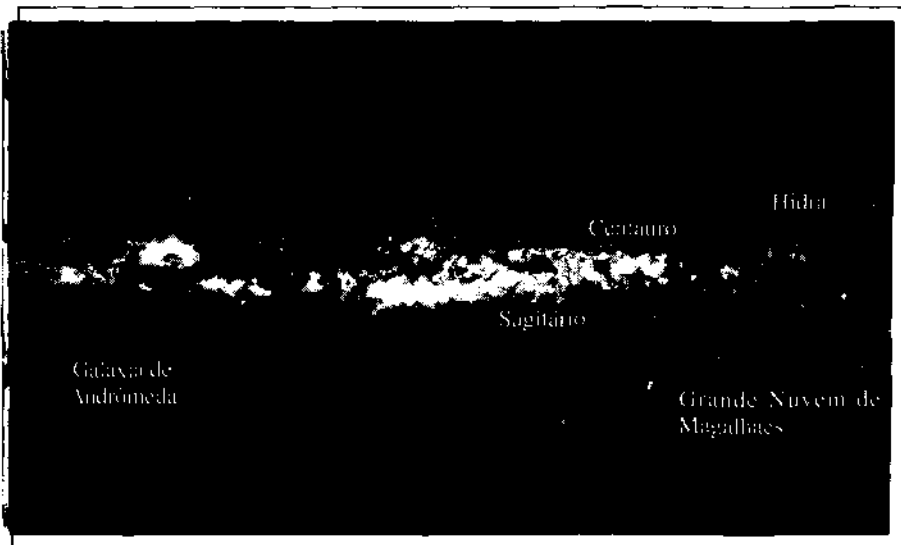


Fig. 14-44 Problema 91.



*A galáxia chamada Via Láctea é um aglomerado de poeira, planetas e bilhões de estrelas, em forma de disco, incluindo o nosso Sol e o sistema solar. A força que a mantém unida ou a qualquer outra galáxia é a mesma que mantém a Lua em órbita e você preso à Terra — a força gravitacional. Esta força é também responsável pela formação de um dos objetos mais estranhos da natureza, o buraco negro, que, supõe-se, é uma estrela que colapsou completamente sob a influência de sua própria gravitação. A gravidade é tão intensa próximo a um buraco negro que mesmo a luz não pode escapar da sua superfície. Mas, se isso é verdade, como é possível observar um buraco negro?*

### 15-1 O Universo e a Força Gravitacional

A ilustração que abre este capítulo mostra nossa visão da Via Láctea, galáxia a que pertence o nosso sistema solar. Estamos perto da borda do disco galáctico, a cerca de 26.000 anos-luz ( $2,5 \times 10^{20}$  m) do seu centro, que na gravura está na direção da constelação de Sagitário. Nossa galáxia é um membro do Grupo Local de galáxias, que inclui Andrômeda (Fig. 15-1), a uma distância de  $2,3 \times 10^6$  anos-luz, e várias galáxias anãs mais próximas, tais como a Grande Nuvem de Magalhães, também assinalada no desenho.

O Grupo Local é um entre cerca de 100 grupos que formam o Superaglomerado Local de galáxias. Medidas feitas desde a década de 80 sugerem que o Supergrupo Local de galáxias e o supergrupo formado pelos grupos de Hidra e Centauro estão, todos, em movimento na direção de uma região excepcionalmente massiva chamada o Grande Atra-

tor. Esta região parece estar a 150 milhões de anos-luz de nós, no lado oposto da Via Láctea, além dos aglomerados de Hidra e Centauro.

A força que mantém unidas essas estruturas, cada vez maiores, de galáxias a superaglomerados, e que pode estar puxando-os lentamente na direção do Grande Atrator, é a força gravitacional. Esta força não é apenas a responsável por você ficar preso à Terra, mas também alcança a imensidão do espaço intergaláctico.

### 15-2 A Lei da Gravitação de Newton

Os físicos gostam de examinar fenômenos que pareçam não estar relacionados para mostrar que, se forem examinados com cuidado suficiente, algum tipo de relação poderá ser encontrado. Essa busca pela unificação tem continuado através dos séculos. Em 1665, Isaac Newton, então com 23 anos, deu uma contribuição básica à Física mostrando que

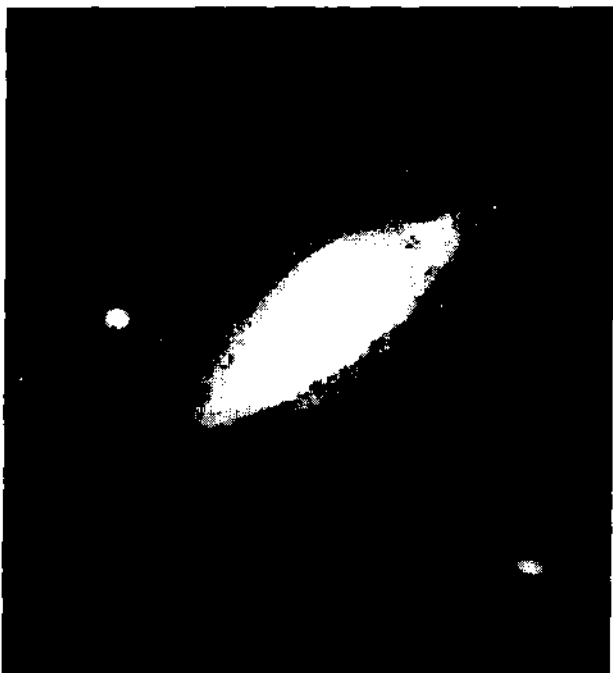


Fig. 15-1 A galáxia de Andrômeda. Localizada a  $2,3 \times 10^6$  anos luz da Via Láctea e fracamente visível a olho nu, ela é muito semelhante à nossa galáxia.

a força que mantém a Lua na sua órbita é a mesma que faz uma maçã cair. Hoje em dia, achamos isso tão natural que não é fácil compreender a visão antiga, segundo a qual o movimento dos corpos na Terra e o dos corpos celestes eram de espécies diferentes e também governados por leis diferentes.

Newton concluiu que não somente a Terra atrai uma maçã e também a Lua, mas que *qualquer corpo no universo atrai todos os outros*. É um pouco difícil se acostumar com esta idéia, porque a atração da Terra sobre corpos na sua superfície, que nos é familiar, é tão grande que mascara os efeitos de atração desses corpos uns pelos outros. Por exemplo, a Terra atrai uma maçã com uma força de, aproximadamente, 1 N. Duas maçãs colocadas a 20 cm uma da outra também se atraem, mas a força de atração, neste caso, é menor que o peso de um grão de poeira.

Quantitativamente, Newton propôs o que chamamos hoje de **lei da gravitação de Newton**: toda partícula atrai qualquer outra com uma **força gravitacional** cujo módulo é dado por

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (15-1)$$

(Lei da gravitação de Newton)

Onde  $m_1$  e  $m_2$  são as massas das partículas,  $r$  é a distância entre elas e  $G$  é a **constante de gravitação universal**, que vale

$$\begin{aligned} G &= 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \\ &= 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2. \end{aligned} \quad (15-2)$$

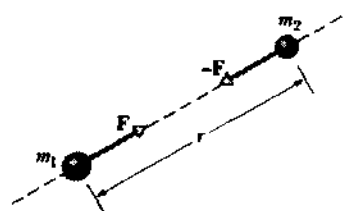


Fig. 15-2 Duas partículas, de massas  $m_1$  e  $m_2$ , separadas por uma distância  $r$ , atraem-se de acordo com a lei da gravitação de Newton, Eq. 15-1. As forças de atração,  $\mathbf{F}$  e  $-\mathbf{F}$ , têm o mesmo módulo e sentidos opostos.

Como se vê na Fig. 15-2, a partícula de massa  $m_2$  atrai a de massa  $m_1$  com uma força gravitacional  $\mathbf{F}$  dirigida para  $m_2$ . Já  $m_1$  atrai  $m_2$  com uma força gravitacional  $-\mathbf{F}$  na direção de  $m_1$ . As forças  $\mathbf{F}$  e  $-\mathbf{F}$  formam um par ação e reação, sendo iguais em módulo, mas de sentidos opostos. Elas dependem da separação entre as duas partículas, mas não da sua localização: poderiam estar numa caverna profunda ou no espaço distante. Além disso,  $\mathbf{F}$  e  $-\mathbf{F}$  não são afetadas pela presença de outros corpos, mesmo quando eles estão entre as duas partículas.

A intensidade da força gravitacional, isto é, o módulo da força com que duas massas conhecidas se atraem a uma dada distância, depende do valor da constante  $G$ . Se, devido a algum milagre,  $G$  fosse subitamente multiplicada por um fator 10, você ficaria grudado no chão, devido à atração gravitacional. Se, em vez disso,  $G$  fosse dividida pelo mesmo fator, a atração da Terra seria tão fraca que poderíamos saltar por cima de um edifício alto.

Embora a lei da gravitação de Newton só se aplique, rigorosamente falando, a partículas, podemos aplicá-la a objetos reais, desde que o tamanho deles seja pequeno, comparado com a distância existente entre eles. A distância entre a Terra e a Lua é grande o bastante para que possamos tratá-las como partículas, quando estudamos sua interação. E no caso da Terra atraindo uma maçã? Do ponto de vista da maçã, a Terra, estendendo-se em todas as direções até o horizonte, certamente não parece uma partícula.

Newton resolveu o problema da Terra e da maçã provando um teorema muito importante:

Uma casca esférica, uniforme, de matéria atrai uma partícula que está fora dela, como se toda sua massa estivesse concentrada no seu centro.

Podemos imaginar a Terra como uma superposição de cascas esféricas, cada uma atraindo uma partícula exterior ao planeta, como se a sua massa estivesse no centro dela. Assim, do ponto de vista da maçã, a Terra *se comporta* como uma partícula, localizada no seu centro e tendo a sua massa.

Suponha, como na Fig. 15-3, que a Terra puxe a maçã para baixo com uma força de 0,80 N. Então, a maçã deve atrair a Terra para cima com uma força de mesmo módulo,

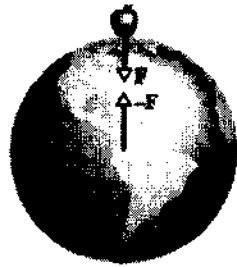


Fig. 15-3 A maçã puxa a Terra para cima com a mesma intensidade que é puxada pela Terra para baixo.

que vamos considerar no centro do planeta. Embora sejam iguais em módulo, essas forças produzem acelerações diferentes, quando deixamos a maçã cair. Para esta, a aceleração é cerca de  $9,8 \text{ m/s}^2$ , a conhecida aceleração da gravidade perto da superfície da Terra, que experimenta uma aceleração medida no sistema de referência associado ao centro de massa do sistema Terra-maçã, de somente  $1 \times 10^{-25} \text{ m/s}^2$ .

### 15-3 Gravitação e o Princípio da Superposição

Dado um grupo de partículas, encontramos a força gravitacional resultante sobre qualquer uma delas usando o **princípio da superposição**. Este princípio diz que o efeito resultante é a soma dos efeitos individuais, e é válido para qualquer teoria linear, que é o caso da teoria da gravitação de Newton (ele não é válido, por exemplo, na Relatividade Geral). Aqui, o princípio significa que calculamos a força exercida sobre uma partícula do grupo por atuação de cada uma das outras. Achamos, então, a força resultante, somando vetorialmente essas forças.

Para  $n$  partículas interagindo, podemos escrever o princípio da superposição gravitacional como

$$F_1 = F_{12} + F_{13} + F_{14} + F_{15} + \dots + F_{1n} \quad (15-3)$$

Onde  $F_1$  é a força resultante sobre a partícula 1 e, por exemplo,  $F_{13}$  é a força exercida sobre a partícula 1 pela partícula 3. Podemos escrever isso de maneira mais compacta como

$$F_1 = \sum_{i=2}^n F_{1i} \quad (15-4)$$

onde  $i$  é chamado de *índice*.

E no caso mais realístico da força gravitacional exercida sobre uma partícula por um objeto extenso? Ela é calculada dividindo-se o objeto em porções pequenas o suficiente para serem tratadas como partículas e, então, usando a Eq. 15-4 para encontrar a resultante das forças exercidas sobre a partícula por todos os pedaços do corpo. No limite, podemos dividir o objeto extenso em porções infinitesimais de massa  $dm$ , tais que cada uma exerça uma força infinite-

simal  $dF$  sobre a partícula. Neste caso, o somatório na Eq. 15-4 torna-se uma integral e temos

$$F_1 = \int dF, \quad (15-5)$$

onde a integral é calculada sobre toda a extensão do corpo. Se o corpo é uma esfera ou uma casca esférica, podemos evitar a integração da Eq. 15-5, supondo que a massa do corpo está concentrada no seu centro e, então, usando a Eq. 15-1.

**EXEMPLO 15-1** A Fig. 15-4a mostra um grupo de cinco massas, onde  $m_1 = 8,0 \text{ kg}$ ,  $m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = 2,0 \text{ kg}$ ,  $a = 2,0 \text{ cm}$  e  $\theta = 30^\circ$ . Qual a força gravitacional sobre  $m_1$  devida às outras massas?

**Solução** Da Eq. 15-4, sabemos que  $F_1$  é a soma vetorial de  $F_{12}$ ,  $F_{13}$ ,  $F_{14}$  e  $F_{15}$ , que são as forças gravitacionais sobre  $m_1$  devido às outras massas. Como  $m_2$  e  $m_4$  são iguais e estão à mesma distância  $r = 2a$  de  $m_1$ , a Eq. 15-1 fornece

$$F_{12} = F_{14} = \frac{Gm_1m_2}{(2a)^2} \quad (15-6)$$

Da mesma forma, como  $m_3$  e  $m_5$  são iguais e estão à mesma distância  $r = a$  de  $m_1$ , temos

$$F_{13} = F_{15} = \frac{Gm_1m_3}{a^2} \quad (15-7)$$

A Fig. 15-4b é um diagrama de corpo isolado para  $m_1$ . O diagrama e a Eq. 15-6 mostram que  $F_{12}$  e  $F_{14}$  têm o mesmo módulo, mas sentidos opostos: logo, essas forças se anulam. Um exame da Fig. 15-4b e da Eq. 15-7 mostra que as componentes na direção  $x$  de  $F_{13}$  e  $F_{15}$  também se anulam e que suas componentes  $y$  são iguais em módulo e apontam, ambas, no sentido de  $y$  positivo. Logo,  $F_1$  aponta no sentido crescente de  $y$  e seu módulo é igual a duas vezes o da componente  $y$  de  $F_{13}$ .

$$\begin{aligned} F_1 &= 2F_{13} \cos \theta = 2 \frac{Gm_1m_3}{a^2} \cos \theta \\ &= 2 \frac{(6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2) (8,0 \text{ kg}) (2,0 \text{ kg})}{(0,020 \text{ m})^2} \\ &\quad \times \cos 30^\circ \\ &= 4,6 \times 10^{-6} \text{ N.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

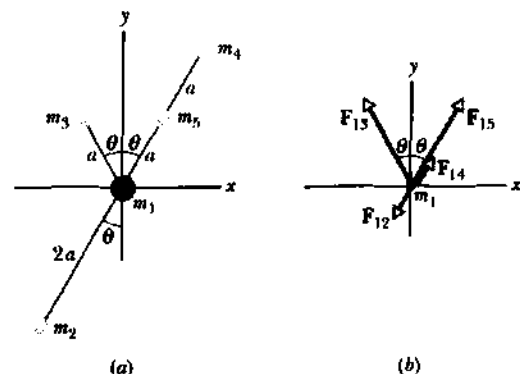
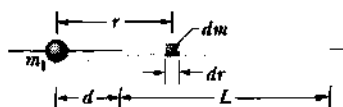


Fig. 15-4 Exemplo 15-1. (a) Uma distribuição de cinco massas. (b) As forças atuando sobre  $m_1$  devido às outras quatro massas.



**Fig. 15-5** Exemplo 15-2. Uma partícula de massa  $m_1$ , a uma distância  $d$  de um dos extremos de uma barra de comprimento  $L$ . Um elemento de massa  $dm$  da barra está à distância  $r$  de  $m_1$ .

Note que a presença de  $m_1$  na linha que liga  $m_1$  e  $m_2$  não afeta, de maneira alguma, a força gravitacional exercida sobre  $m_1$  por  $m_2$ .

**EXEMPLO 15-2** Na Fig. 15-5, uma partícula de massa  $m_1 = 0,67$  kg está a uma distância  $d = 23$  cm de um dos extremos de uma barra uniforme de comprimento  $L = 3,0$  m e  $M = 5,0$  kg. Qual o módulo da força gravitacional  $F_1$  exercida pela barra sobre a partícula?

**Solução** Consideramos um elemento de massa infinitesimal  $dm$  da barra, situado a uma distância  $r$  de  $m_1$  e tendo comprimento  $dr$ . Usando a Eq. 15-1, escrevemos a força gravitacional  $dF$  (em módulo) sobre  $m_1$  em virtude da  $dm$ , como

$$dF = \frac{Gm_1}{r^2} dm. \quad (15-8)$$

Para achar a força gravitacional resultante sobre  $m_1$ , devemos somar as contribuições de todos os elementos de massa  $dm$ , ou seja, integrá-las sobre o comprimento da barra. Para isso, usamos o fato da densidade da barra ser constante, e escrevemos

$$\frac{dm}{dr} = \frac{M}{L}, \quad (15-9)$$

de onde tiramos  $dm = (M/L) dr$  e substituímos na Eq. 15-8. Para obter  $F_1$ , substituímos  $dF$  na Eq. 15-5 e integramos:

$$\begin{aligned} F_1 &= \int dF = \int_d^{L+d} \frac{Gm_1}{r^2} \frac{M}{L} dr = \frac{Gm_1M}{L} \int_d^{L+d} \frac{dr}{r^2} \\ &= -\frac{Gm_1M}{L} \left[ \frac{1}{r} \right]_d^{L+d} = -\frac{Gm_1M}{L} \left[ \frac{1}{L+d} - \frac{1}{d} \right] \\ &= \frac{Gm_1M}{d(L+d)} \\ &= \frac{(6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2)(0,67 \text{ kg})(5,0 \text{ kg})}{(0,23 \text{ m})(3,0 \text{ m} + 0,23 \text{ m})} \\ &= 3,0 \times 10^{-10} \text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

## RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

### TÁTICA 1: SIMETRIA

No Exemplo 15-1, tiramos proveito da simetria da situação para reduzir o tempo e a quantidade de cálculos necessários para encontrar a solução. Notando que  $m_2$  e  $m_3$  estão em posições simétricas em relação a  $m_1$  e, assim, que  $F_{12}$  e  $F_{13}$  se cancelam, evitamos o cálculo dessas forças. Também, notando que as componentes  $x$  de  $F_{13}$  e  $F_{15}$  se anulam e que suas componentes  $y$  são iguais e se somam, diminuimos ainda mais o trabalho.

## 15-4 Gravitação Próximo à Superfície da Terra

Vamos ignorar, por enquanto, a rotação da Terra e supor que ela é uma esfera uniforme. O módulo da força gravita-

cional sobre uma partícula de massa  $m$ , situada fora do planeta, a uma distância  $r$  do seu centro, é então dado pela Eq. 15-1

$$F = G \frac{Mm}{r^2}, \quad (15-10)$$

onde  $M$  é a massa terrestre. Se a partícula é liberada, essa força gravitacional faz com que ela caia na direção do centro da Terra com uma aceleração que chamaremos de **aceleração da gravidade**  $a_g$ . Aplicando a segunda lei de Newton ao movimento da partícula, achamos

$$F = ma_g. \quad (15-11)$$

Substituindo  $F$  da Eq. 15-10 na Eq. 15-11 e tirando o valor de  $a_g$ , temos

$$a_g = \frac{GM}{r^2}. \quad (15-12)$$

A Tabela 15-1 mostra alguns dos valores de  $a_g$  para várias altitudes, medidas a partir da superfície da Terra.

A aceleração gravitacional  $a_g$  é devida exclusivamente à força gravitacional exercida sobre a partícula pela Terra. Ela é diferente da aceleração de queda livre  $g$  que medimos para uma partícula em queda, porque a Terra na realidade não é uniforme, nem exatamente esférica e, além disso, gira. Por estas mesmas razões, a força gravitacional exercida sobre a partícula é diferente do peso  $mg$  que medimos com uma balança. Vamos, agora, examinar essas razões:

**1. A Terra não é uniforme.** A densidade da Terra varia radialmente, como mostrado na Fig. 15-6, e a densidade da crosta terrestre varia de região para região, através da sua superfície.

**2. A Terra não é uma esfera.** É aproximadamente um elipsóide, achatada nos pólos e dilatada no equador. Seu raio equatorial excede o raio polar em cerca de 21 km. Assim, um ponto nos pólos está mais perto do núcleo denso da Terra do que um ponto no equador. Poderíamos esperar que a aceleração de queda livre  $g$  aumentasse à medida que nos movimentássemos, ao nível do mar, do equador para os

**Tabela 15-1**  
Variação de  $a_g$  com a Altitude

Altitude (km)	$a_g$ ( $\text{m/s}^2$ )
0	9,83
5	9,81
10	9,80
50	9,68
100	9,53
400*	8,70
35.700*	0,225
380.000*	0,0027

\*Altitude característica de um ônibus espacial.

\*Altitude para satélites de comunicação.

\*Distância Terra-Lua.

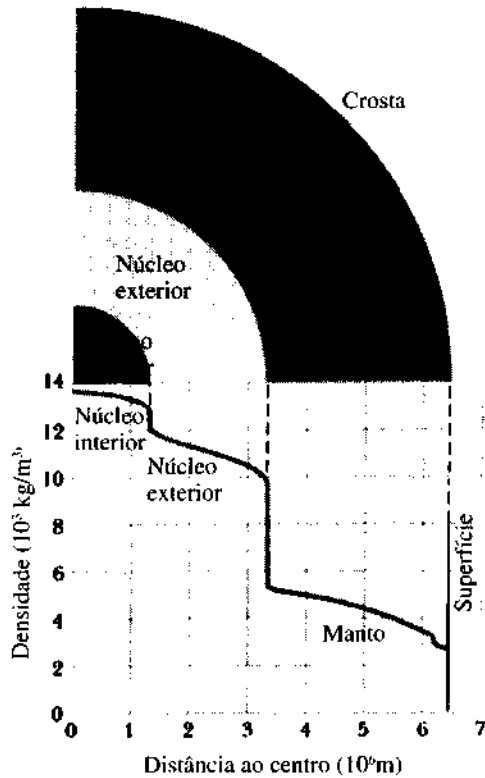


Fig. 15-6 A densidade da Terra como função da distância ao centro. Mostramos os limites do núcleo interior sólido, do núcleo exterior, que é líquido em sua maior parte, e do manto. A crosta da Terra, porém, na escala da figura, é demasiado fina para poder aparecer com clareza.

pólos. A Fig. 15-7 mostra que isto realmente acontece. Os valores de  $g$  usados nesta figura incluem tanto os efeitos do achatamento da Terra nos pólos, quanto os da rotação.

**3. A Terra gira.** O eixo de rotação passa pelos seus pólos norte e sul. Um objeto, em qualquer lugar na superfície do planeta com exceção dos pólos, deve descrever um círculo em torno do eixo de rotação e, assim, ter uma aceleração

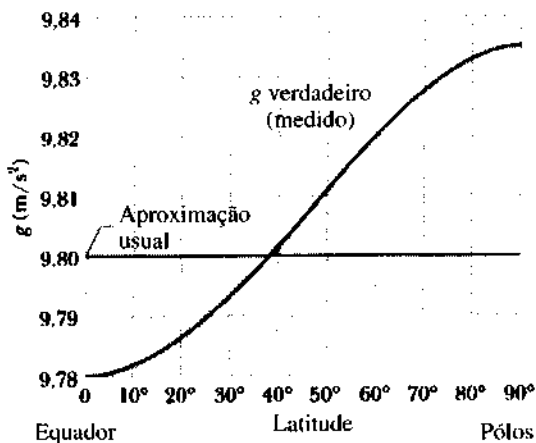


Fig. 15-7 Variação de  $g$  com a latitude ao nível do mar. Cerca de 65% do efeito é devido à rotação da Terra. Os 35% restantes se devem à não-esfericidade do nosso planeta.

centrípeta. Esta aceleração implica a existência de uma força centrípeta.

Para vermos como essa terceira razão implica não serem iguais a aceleração de queda livre  $g$  e a aceleração gravitacional  $a_g$ , e que o peso é diferente da força gravitacional, vamos analisar uma situação simples em que um caixote de massa  $m$  está sobre uma balança no equador. A Fig. 15-8a mostra esta situação vista de um ponto no espaço, acima do pólo norte.

A Fig. 15-8b é um diagrama de corpo isolado para o caixote. A aceleração centrípeta  $a$  do caixote aponta para o centro do círculo que ele descreve, que coincide com o centro da Terra (suposta esférica). Esta exerce uma força gravitacional sobre o caixote de módulo  $ma_g$  (Eq. 15-11). A balança exerce uma reação normal  $N$  para cima, sobre o caixote. Aplicando a segunda lei de Newton, escolhendo como positivo o sentido radial para o centro da Terra, achamos

$$\sum F = ma_g - N = ma. \quad (15-13)$$

O módulo de  $N$  é a leitura da balança e, logo, é igual ao peso  $mg$  do caixote. Substituindo  $N$  por  $mg$  na Eq. 15-13, obtemos

$$ma_g - mg = ma, \quad (15-14)$$

que mostra ser o peso do caixote diferente do módulo  $ma_g$  da força gravitacional sobre ele. Dividindo a Eq. 15-14 por  $m$ , vemos que  $g$  também é diferente de  $a_g$ .

Para levar em conta o efeito da aceleração centrípeta, substituímos  $a$  por  $\omega^2 R$ , onde  $\omega$  é a velocidade angular de

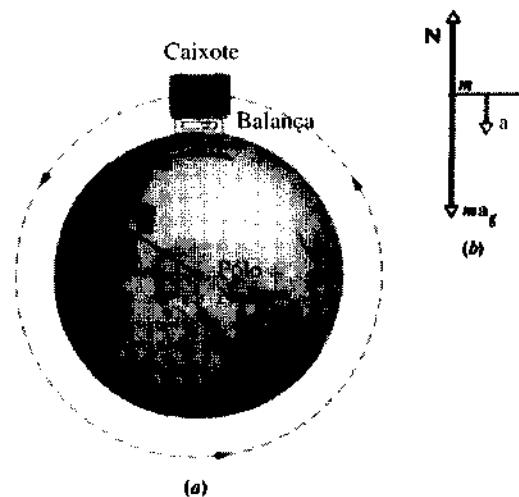


Fig. 15-8 (a) Um caixote colocado sobre uma balança no equador da Terra, que está em rotação, visto de um observador situado sobre o eixo de rotação, acima do Pólo Norte. (b) Um diagrama de corpo isolado para o caixote. Ele está em movimento circular uniforme, logo está acelerado na direção do centro da Terra. O módulo da força gravitacional sobre o caixote é  $ma_g$ . A reação normal da balança,  $N$  tem módulo  $mg$ , onde  $g$  é a aceleração de queda livre.

rotação da Terra e  $R$  é o raio da trajetória do caixote (essencialmente o raio da Terra, como mostra a Fig. 15-8). Para calcular  $\omega$ , usamos a expressão  $2\pi/T$ , onde  $T = 24$  h é, aproximadamente, o período de rotação da Terra. Fazendo essas substituições e dividindo por  $m$ , a Eq. 15-14 fornece

$$\begin{aligned} a_g - g &= \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R & (15-15) \\ &= 0,034 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

Logo, a aceleração de queda livre  $g$  ( $9,78 \text{ m/s}^2 \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ ) medida no equador da Terra real, que gira, é ligeiramente menor que a aceleração gravitacional  $a_g$  devido somente à força gravitacional. Essa diferença fica cada vez menor, à medida que o caixote é transportado para latitudes maiores, pois ele, então, descreve um círculo menor, tornando  $R$  na Eq. 15-15 menor. Na prática, em muitos casos, podemos tomar a aceleração de queda livre  $g$  como sendo igual à aceleração gravitacional  $a_g$ . Como consequência, também podemos igualar o peso  $mg$  de um objeto à força gravitacional (dada pela Eq. 15-10) que atua sobre ele.

**EXEMPLO 15-3** Considere um pulsar, que é uma estrela colapsada de densidade extremamente alta, com massa  $M$  igual à do Sol ( $1,98 \times 10^{30}$  kg) e raio  $R$  de somente 12 km. Seu período de rotação  $T$  é 0,041 s. Qual a diferença percentual entre a aceleração de queda livre  $g$  e a aceleração gravitacional  $a_g$  no seu equador?

**Solução** Para achar  $a_g$  na superfície da estrela, usamos a Eq. 15-12, com  $R$  no lugar de  $r$  e  $M$  sendo a massa da estrela. Substituindo os valores numéricos vem

$$\begin{aligned} a_g &= \frac{GM}{R^2} = \frac{(6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2)(1,98 \times 10^{30} \text{ kg})}{(12,000 \text{ m})^2} \\ &= 9,2 \times 10^{11} \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

Dividindo a Eq. 15-15 (que se aplica a qualquer corpo em rotação) por  $a_g$  e substituindo os valores conhecidos encontramos, agora,

$$\begin{aligned} \frac{a_g - g}{a_g} &= \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{R}{a_g} = \left(\frac{2\pi}{0,041 \text{ s}}\right)^2 \frac{12,000 \text{ m}}{9,2 \times 10^{11} \text{ m/s}^2} \\ &= 3,1 \times 10^{-4} = 0,031\%. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Embora um pulsar gire muito rápido, sua rotação reduz a aceleração de queda livre da aceleração gravitacional somente por um pequeno fator, pois o seu raio é muito pequeno.

**EXEMPLO 15-4** Sobre a superfície de um planeta esférico, uniforme e que não gira, com raio  $R_s = 15,1 \times 10^3$  km, qual é o decréscimo fracional no valor da aceleração de queda livre  $g$  sobre uma partícula, quando ela for erguida a partir da superfície até uma altura  $h = 1,5$  km?

**Solução** Sejam  $g_s$  e  $g_h$  os valores de  $g$  na superfície e na altura  $h$ , respectivamente. Como o planeta é uniforme, esférico e não gira, a aceleração de queda livre  $g$  é igual à gravitacional  $a_g$ . Assim, podemos usar a Eq. 15-12 (com  $M$  sendo a massa do planeta), para achar qualquer uma das duas. Na superfície, temos

$$g_s = \frac{GM}{R_s^2} \quad (15-16)$$

Na altura  $h$ , temos

$$g_h = \frac{GM}{(R_s + h)^2} \quad (15-17)$$

Como  $h \ll R_s$ , não devemos tentar calcular o valor numérico de  $g_h$  na Eq. 15-17 diretamente numa calculadora. Podemos, no entanto, transformar a Eq. 15-17 usando a expansão binomial (veja o Apêndice G e a Tática 3, no Cap. 7):

$$g_h = \frac{GM}{R_s^2 \left(1 + \frac{h}{R_s}\right)^2} = \frac{GM}{R_s^2} \left(1 + \frac{(-2)h}{R_s} + \dots\right).$$

Levando em conta somente os dois primeiros termos da expansão e usando  $g_s = GM/R_s^2$  (Eq. 15-16), obtemos

$$g_h \approx g_s \left(1 - \frac{2h}{R_s}\right),$$

o que dá

$$\frac{g_h - g_s}{g_s} \approx -\frac{2h}{R_s} \quad (15-18)$$

$$= -\frac{2(1,5 \text{ km})}{5,1 \times 10^3 \text{ km}} = -5,9 \times 10^{-4}. \quad (\text{Resposta})$$

Podemos também encontrar a resposta calculando  $dg/g_s$ , onde  $dg$  é a variação infinitesimal em  $g$  devido a uma variação  $dr$  em  $r$ . Da Eq. 15-12, com  $g$  no lugar de  $a_g$ , obtemos

$$dg = -\frac{2GM}{r^3} dr. \quad (15-19)$$

Como  $h \ll R_s$ ,  $r$  é aproximadamente  $R_s$  durante toda a subida, e podemos tratar  $h$  como sendo a variação infinitesimal  $dr$ . Com essas substituições e  $g_s = GM/R_s^2$ , a Eq. 15-19 fornece

$$\frac{dg}{g_s} = -\frac{2h}{R_s},$$

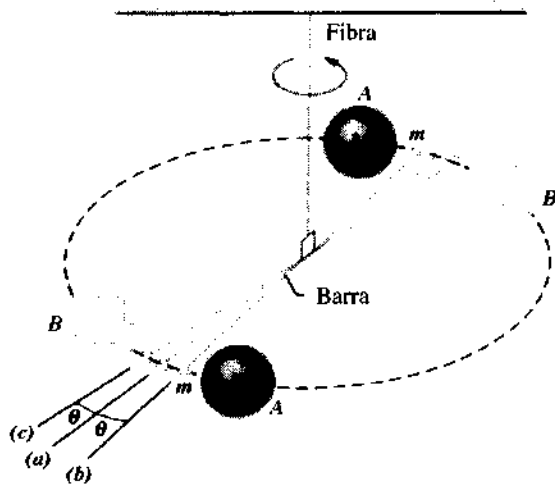
que é equivalente à Eq. 15-18.

## 15-5 Medida da Constante Gravitacional G

A constante  $G$  pode ser calculada da Eq. 15-1, se medirmos a atração gravitacional entre duas esferas de massa conhecida, separadas por uma distância estabelecida. O primeiro a efetuar esta média foi Henry Cavendish, em 1798, mais de um século depois de Newton ter publicado sua lei da gravitação.

A Fig. 15-9 mostra o aparelho de Cavendish. Duas esferas de chumbo pequenas, cada uma de massa  $m$ , estão presas nos extremos de uma barra pendurada no seu ponto médio por uma fibra fina, formando o que chamamos *balança de torção*. Duas esferas grandes de chumbo, cada uma de massa  $M$ , podem ser colocadas na configuração  $AA$  ou na  $BB$ , como mostra a figura. Em qualquer configuração, as esferas grandes atraem as pequenas, exercendo um torque sobre a barra. Esta, então, girará até alcançar uma orientação de equilíbrio em que esse torque gravitacional e o resultante da torção da fibra se equilibrarão. As duas orientações de equilíbrio da barra, correspondendo às duas configurações das esferas grandes, vão diferir por um ângulo





**Fig. 15-9** O aparelho usado em 1798 por Henry Cavendish para medir a constante gravitacional  $G$ . As esferas maiores de massa  $M$ , mostradas na configuração  $AA$ , podem ser deslocadas para a configuração  $BB$ . (a) Orientação da barra quando as esferas maiores estão ausentes e a fibra não está torcida. (b) Posição de equilíbrio quando as esferas maiores estão na configuração  $AA$ . (c) Posição de equilíbrio quando as esferas maiores estão na configuração  $BB$ . O ângulo  $\theta$  aparece exagerado na figura.

2 $\theta$ . O Exemplo 15-5 mostra como calcular  $G$  a partir dos dados observados.

Conhecendo  $G$ , podemos achar a massa  $M$  da Terra usando a Eq. 15-12. Na superfície da Terra,  $r$  é o seu raio  $R$ . Se fizermos a aproximação  $a_g \approx g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$  e rearrumarmos a Eq. 15-12, obtemos

$$M = \frac{gR^2}{G} = \frac{(9,8 \text{ m/s}^2)(6,37 \times 10^6 \text{ m})^2}{6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2} = 6,0 \times 10^{24} \text{ kg.} \quad (15-20)$$

Conhecendo a massa da Terra, podemos achar sua densidade média dividindo sua massa pelo seu volume. Obtemos um valor em torno de 5,5 vezes a densidade da água. No entanto, a densidade média das rochas que formam a crosta terrestre é somente cerca de três vezes a densidade da água. Isto nos mostra que o núcleo da Terra deve ser mais denso que a sua crosta (veja Fig. 15-6). Quem poderia pensar que, medindo a força gravitacional entre duas esferas de chumbo, você poderia “pesar a Terra” e também descobrir alguma coisa sobre seu núcleo, muito além da profundidade de qualquer escavação?

**EXEMPLO 15-5** Numa repetição da experiência de Cavendish (Fig. 15-9), vamos fazer  $M = 12,7 \text{ kg}$ ,  $m = 9,85 \text{ g}$  e o comprimento  $L$  da barra, ligando as duas esferas pequenas, igual a 52,4 cm. O ângulo  $2\theta$  entre as duas posições de equilíbrio da barra ( $b$  e  $c$  da Fig. 15-9) é  $0,516^\circ$ . Em qualquer das posições, a distância  $R$  entre os centros de  $m$  e  $M$  é 10,8 cm e a fibra torcida exerce um torque  $\tau$  de magnitude  $3,75 \times 10^{-10} \text{ N}\cdot\text{m}$  sobre a barra, em relação a um eixo vertical que passa pelo seu centro. Que valor da constante gravitacional  $G$  é obtido a partir desses dados?

**Solução** O torque exercido pela fibra é equilibrado por outros associados às forças gravitacionais que as esferas grandes exercem sobre as pequenas. O módulo da força  $F$  sobre cada esfera pequena é  $GMm/R^2$  e o braço de alavanca para cada força é  $L/2$ . O torque causado por ambas é, então,

$$\tau = (2F)(\frac{1}{2}L) = FL = \frac{GMmL}{R^2}.$$

Tirando o valor de  $G$ , obtemos

$$G = \frac{\tau R^2}{MmL} = \frac{(3,75 \times 10^{-10} \text{ N}\cdot\text{m})(0,108 \text{ m})^2}{(12,7 \text{ kg})(9,85 \times 10^{-3} \text{ kg})(0,524 \text{ m})} = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2, \quad (\text{Resposta})$$

concordando com o valor dado na Eq. 15-2.

## 15-6 Gravitação no Interior da Terra

O teorema de Newton sobre uma casca esférica uniforme demonstra que esta, para efeitos gravitacionais sobre uma partícula externa, se comportará como se toda a sua massa estivesse concentrada no seu interior. A dedução deste teorema, quando a partícula está *dentro* da casca, conduz ao seguinte resultado:

Uma casca uniforme de matéria exerce uma força gravitacional nula sobre uma partícula dentro dela.

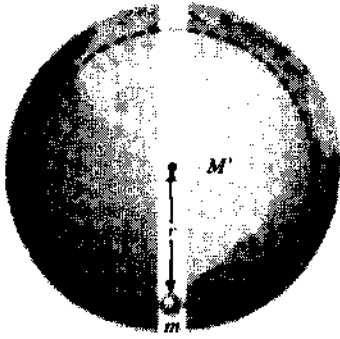
Se a densidade da Terra fosse uniforme, a força gravitacional sobre uma partícula seria máxima na sua superfície. Como seria de se esperar, ela diminuiria se nos movermos para cima. Se caminhássemos em direção ao centro da Terra, por exemplo descendo o poço de uma mina profunda, a força gravitacional mudaria por duas razões. (1) Tenderia a aumentar porque estaríamos nos aproximando do centro da Terra. (2) Tenderia a diminuir porque as camadas da crosta terrestre, que ficam acima da partícula, não exercem nenhuma força sobre ela.

No caso real da Terra, sua crosta externa é tão menos densa do que o núcleo, que a segunda influência é fortemente enfraquecida e a primeira prevalece. Isto é, a força gravitacional sobre uma partícula *aumentaria* levemente, se ela descresse o poço de uma mina profunda. Eventualmente, é claro, a força alcançaria um máximo e, então, chegaria a zero no centro da Terra.

No entanto, se a densidade da Terra fosse uniforme, prevaleceria a segunda influência e a força gravitacional diminuiria à medida que penetrássemos na Terra.

**EXEMPLO 15-6** Suponha um túnel cavado na Terra de um pólo ao outro, como na Fig. 15-10. Considere que ela seja uma esfera que não gira.

a. Calcule a força gravitacional sobre uma partícula de massa  $m$  largada no túnel, quando ela está a uma distância  $r$  do centro do planeta.



**Fig. 15-10** Exemplo 15-6. Uma partícula oscila em um túnel cavado através de um diâmetro terrestre. Quando largada de um dos extremos, chegará ao outro em 42 min.

**Solução** A força que atua sobre a partícula é devido somente à massa  $M'$  da Terra, que está dentro de uma esfera de raio  $r$ . A porção que está fora desta esfera não exerce nenhuma força sobre a partícula.

A massa  $M'$  é dada por

$$M' = \rho V' = \rho \frac{4\pi r^3}{3}, \quad (15-21)$$

onde  $V'$  é o volume ocupado por  $M'$  (que está dentro da região limitada pela linha tracejada na Fig. 15-10) e  $\rho$  é a densidade da Terra, suposta uniforme.

A força sobre a partícula é, então, usando as Eqs. 15-1 e 15-21,

$$F = -\frac{GmM'}{r^2} = -\frac{Gm\rho 4\pi r^3}{3r^2} = -\left(\frac{4\pi mG\rho}{3}\right)r \\ = -Kr, \quad (\text{Resposta}) \quad (15-22)$$

onde  $K$ , uma constante, é igual a  $4\pi mG\rho/3$ . O sinal negativo indica que a força  $F$  e o deslocamento  $r$  têm sentidos opostos, a primeira apontando para o centro da Terra e o segundo em sentido contrário. Assim, a Eq. 15-22 nos mostra que a força sobre a partícula é proporcional ao seu deslocamento, mas tem sentido oposto a ele, que é justamente a condição para o movimento ser harmônico simples (Seção 14-3).

b. (Opcional) Se esse túnel fosse usado para transportar correspondência, quanto tempo levaria a mala postal para atravessar a Terra? Suponha  $\rho = 5,5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , a densidade média da Terra.

**Solução** A força dada pela Eq. 15-22 fará com que a mala execute um movimento harmônico simples em torno do centro da Terra, levando metade de um período para ir de um pólo a outro. Da Eq. 14-12, esse meio período é dado por

$$\frac{1}{2}T = \left(\frac{1}{2}\right) 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} = \pi \sqrt{\frac{3m}{4\pi mG\rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{4G\rho}} \\ = \sqrt{\frac{3\pi}{(4)(6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2)(5,5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)}} \\ = 2530 \text{ s} = 42 \text{ min.} \quad (\text{Resposta})$$

Note que o tempo de entrega é independente da massa da mala.

## 15-7 Energia Potencial Gravitacional

Na Seção 8-3 (Vol. 1), discutimos a energia potencial gravitacional de uma partícula devido à sua interação com a Terra. Tomamos cuidado, naquela ocasião, em manter a

partícula próxima à sua superfície, podendo assim considerar a força gravitacional constante. Definimos, arbitrariamente, a energia potencial do sistema Terra-partícula como sendo zero, quando a partícula estava sobre a superfície do planeta.

Agora, vamos considerar uma situação mais geral, onde duas partículas, de massa  $m$  e  $M$ , separadas por uma distância  $r$ , interagem gravitacionalmente. Para sermos concretos, vamos supor  $M$  como sendo a massa da Terra e  $m$  como a de uma bola de tênis, mas nossas conclusões serão gerais, não importando as massas relativas das partículas. Tomaremos como zero de energia potencial a configuração em que a distância entre as partículas é infinita.

A energia potencial gravitacional do sistema de duas partículas é, como demonstraremos mais adiante,

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} \quad (\text{energia potencial gravitacional}) \quad (15-23)$$

De acordo com a Eq. 15-23,  $U(r)$  tende a zero, quando  $r$  tende a infinito. Isto está de acordo com a nossa hipótese inicial.

A energia potencial dada pela Eq. 15-23 é uma propriedade do sistema de duas partículas, em vez de ser de qualquer uma das partículas isoladas. É impossível dividir essa energia e dizer que uma parte pertence a uma partícula e o restante a outra. No entanto, se  $M \gg m$ , como certamente é o caso para a Terra e a bola de tênis, com frequência falamos da “energia potencial da bola de tênis”. Isto funciona porque, quando a bola se move nas vizinhanças da Terra, mudanças na energia potencial do sistema Terra-bola se manifestam, quase na totalidade, como alterações na energia cinética da bola, pois as mudanças na energia cinética do planeta são demasiado pequenas para ser medidas. Da mesma maneira, na Seção 15-9 falaremos da “energia potencial de um satélite artificial” em órbita terrestre, pois a massa do satélite é muito menor que a da Terra. No entanto, para corpos de massas da mesma ordem de grandeza, temos de tomar o cuidado de considerar sempre o sistema quando falamos de sua energia potencial.

Se nosso sistema contém mais de duas partículas, consideramos um par de cada vez, calculando a energia potencial gravitacional deste par usando a Eq. 15-23, como se as outras partículas não existissem e, depois, somando os resultados. Aplicando a Eq. 15-23 a cada um dos três pares da Fig. 15-11, por exemplo, obtemos para a energia potencial do sistema

$$U = -\left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}}\right). \quad (15-24)$$

Um aglomerado globular (Fig. 15-12) na constelação de Sagitário é um bom exemplo natural de um sistema de partículas. Contém cerca de 70.000 estrelas e  $2,5 \times 10^9$  pares de estrelas. A contemplação dessa estrutura sugere a enorme quantidade de energia potencial gravitacional armazenada no universo.

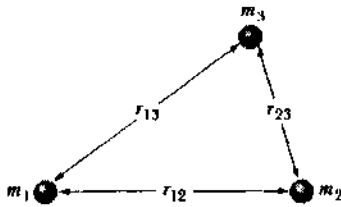


Fig. 15-11 Três partículas exercem forças gravitacionais entre si. A energia potencial gravitacional do sistema é a soma das energias potenciais gravitacionais de cada um dos três possíveis pares de partículas.

**Demonstração da Eq. 15-23**

Deixemos uma bola de tênis, partindo do repouso a uma grande distância da Terra, cair na direção do ponto *P*, como mostra a Fig. 15-13. A energia potencial do sistema Terra-bola, quando a última alcança *P*, é o trabalho (*w*) feito pela força gravitacional, com o sinal trocado, para movê-la até *P* desde a posição distante inicial. Assim, da Eq. 8-6 (na forma vetorial generalizada; Vol. 1), temos

$$U = -W = - \int_{\infty}^r \mathbf{F}(x) \cdot d\mathbf{x}. \quad (15-25)$$

Os limites de integração são a posição inicial da bola, que vamos supor esteja no infinito, e a posição final, a uma distância *r* do centro da Terra.

O vetor **F**(*x*) na Eq. 15-25 tem direção radial apontando para o centro da Terra (Fig. 15-13), e o vetor *dx* aponta radialmente no sentido oposto, fazendo com a força um ângulo  $\phi$  de 180°. Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x) \cdot d\mathbf{x} &= F(x)(\cos 180^\circ)(dx) \\ &= -F(x)dx. \end{aligned} \quad (15-26)$$

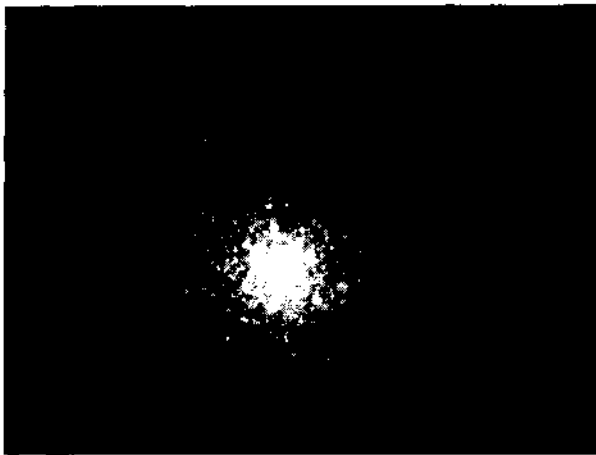


Fig. 15-12 Aglomerados globulares, como este na constelação de Sagitário, contêm dezenas de milhares de estrelas numa distribuição quase esférica. Há muitos destes aglomerados na nossa galáxia, alguns deles visíveis com o auxílio de um telescópio de pequeno porte.

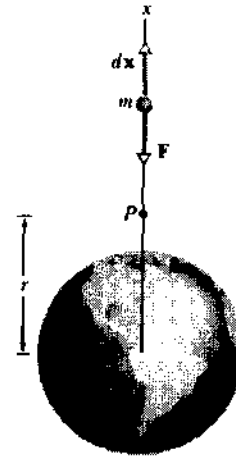


Fig. 15-13 Uma bola de tênis de massa *m* se desloca na direção da Terra, vinda do infinito, ao longo da linha radial que passa pelo ponto *P*, que está a uma distância *r* do centro da Terra.

Substituindo agora, na Eq. 15-26, **F**(*x*) dada pela lei da gravitação de Newton (Eq. 15-1), obtemos

$$\mathbf{F}(x) \cdot d\mathbf{x} = - \frac{GMm}{x^2} dx.$$

Colocando este resultado na Eq. 15-25, chegamos a

$$U = \int_{\infty}^r \left( \frac{GMm}{x^2} \right) dx = - \left[ \frac{GMm}{x} \right]_{\infty}^r = - \frac{GMm}{r},$$

que é a Eq. 15-23.

A validade da Eq. 15-23 não depende do caminho que a bola percorre ao se mover em direção à Terra. Considere uma trajetória construída com pequenos passos, como na Fig. 15-14. Nenhum trabalho é realizado quando a bola percorre trechos circulares como *AB*, porque nestes trechos

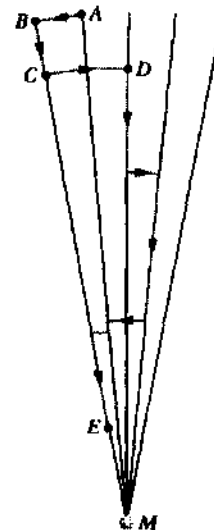


Fig. 15-14 O trabalho realizado pela força gravitacional, quando uma bola de tênis se move de *A* até *E*, é independente da trajetória seguida pela bola.

a força é perpendicular ao deslocamento. O trabalho total realizado ao longo de todos os trechos radiais, tais como  $BC$ , é o mesmo que o feito ao longo de uma única linha radial (Fig. 15-13). Logo, o trabalho realizado sobre uma partícula pela força gravitacional, quando ela se move entre dois pontos quaisquer, não depende do caminho percorrido, mas apenas das posições inicial e final. Esse trabalho é calculado como a variação da energia potencial entre os dois pontos com o sinal trocado:

$$W = -\Delta U = -(U_f - U_i), \quad (15-27)$$

onde  $U_f$  e  $U_i$  são as energias potenciais associadas com as posições final e inicial. Quando dizemos que a força gravitacional é *conservativa*, como fizemos na Seção 8-4, é esta a situação que temos em mente. Vale a pena lembrar também que, se o trabalho *dependesse* da trajetória, como é o caso da força de atrito, o conceito de energia potencial gravitacional não teria nenhum significado.

### A Energia Potencial e a Força

Quando provamos a Eq. 15-23, deduzimos a função energia potencial  $U$  a partir da força  $F$ . É possível fazer o caminho inverso, isto é, partir da função energia potencial e deduzir a força. Orientados pela Eq. 8-17 (Vol. 1), podemos escrever

$$\begin{aligned} F &= -\frac{dU}{dr} = -\frac{d}{dr} \left( -\frac{GMm}{r} \right) \\ &= -\frac{GMm}{r^2}. \end{aligned} \quad (15-28)$$

Esta é simplesmente a lei da gravitação de Newton, o sinal negativo servindo para lembrar que a força é atrativa.

### Velocidade de Escape

Se você jogar um objeto para cima, normalmente ele perderá velocidade até parar por um instante e retornar à Terra. Há, no entanto, uma certa velocidade inicial que fará com que ele suba para sempre, atingindo o repouso, teoricamente, só no infinito. Esta velocidade inicial é chamada **velocidade de escape**.

Considere um projétil de massa  $m$ , deixando a superfície da Terra com a velocidade de escape  $v$ . Ele possui energia cinética  $K$  dada, por  $\frac{1}{2}mv^2$  e energia potencial  $U$ , dada pela Eq. 15-23:

$$U = -\frac{GMm}{R},$$

onde  $M$  é a massa da Terra e  $R$ , o seu raio.

Quando o projétil atinge o infinito, pára; logo, não tem energia cinética. Também não tem energia potencial pois, neste ponto, arbitramos que a energia potencial é zero.

Assim, sua energia total no infinito é nula. Do princípio da conservação da energia vem que sua energia total, quando está sobre a superfície da Terra, deve também ser zero e, logo

$$K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \left( -\frac{GMm}{R} \right) = 0.$$

Isto fornece

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \quad (15-29)$$

A Eq. 15-29 pode ser aplicada para encontrar a velocidade de escape de qualquer corpo celeste, bastando para isso substituir a massa do corpo em  $M$  e o seu raio em  $R$ . A Tabela 15-2 mostra velocidades de escape para alguns corpos celestes.

**EXEMPLO 15-7** As massas da Terra e da Lua são, respectivamente,  $5,98 \times 10^{24}$  kg e  $7,36 \times 10^{22}$  kg. Sua separação média  $d$  é  $3,82 \times 10^8$  m. Qual é a energia potencial gravitacional do sistema Terra-Lua?

**Solução** Da Eq. 15-23,

$$\begin{aligned} U &= -\frac{GMm}{d} \\ &= -\frac{\left( 6,67 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \right) (5,98 \times 10^{24} \text{ kg}) (7,36 \times 10^{22} \text{ kg})}{3,82 \times 10^8 \text{ m}} \\ &= -7,68 \times 10^{26} \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Esta energia é da ordem de grandeza da que seria produzida mundialmente, caso fossem mantidas as atuais taxas de produção, em  $10^8$  anos.

**EXEMPLO 15-8** Confira o valor da velocidade de escape da Terra mostrado na Tabela 15-2. Ignore os efeitos do arraste da atmosfera e da rotação da Terra.

**Tabela 15-2**  
Algumas Velocidades de Escape

Corpo	Massa (kg)	Raio (m)	Velocidade de Escape (km/s)
Ceres <sup>a</sup>	$1,17 \times 10^{21}$	$3,8 \times 10^5$	0,64
Lua	$7,36 \times 10^{22}$	$1,74 \times 10^6$	2,38
Terra	$5,98 \times 10^{24}$	$6,37 \times 10^6$	11,2
Júpiter	$1,90 \times 10^{27}$	$7,15 \times 10^7$	59,5
Sol	$1,99 \times 10^{30}$	$6,96 \times 10^8$	618
Sírius B <sup>b</sup>	$2 \times 10^{30}$	$1 \times 10^7$	5.200
Estrela de nêutrons <sup>c</sup>	$2 \times 10^{30}$	$1 \times 10^4$	$2 \times 10^5$

<sup>a</sup>O asteroide de maior massa.

<sup>b</sup>Uma *anã branca* (estrela no estágio final de evolução), companheira da estrela brilhante Sírius.

<sup>c</sup>O núcleo colapsado que resta depois que uma estrela explode como *supernova*.

**Solução** Substituindo os valores na Eq. 15-29, temos

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2GM}{R}} \\ &= \sqrt{\frac{2(6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2)(5,98 \times 10^{24} \text{ kg})}{6,37 \times 10^6 \text{ m}}} \\ &= 1,12 \times 10^4 \text{ m/s} \\ &= 11,2 \text{ km/s ou } 25.000 \text{ mi/h.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

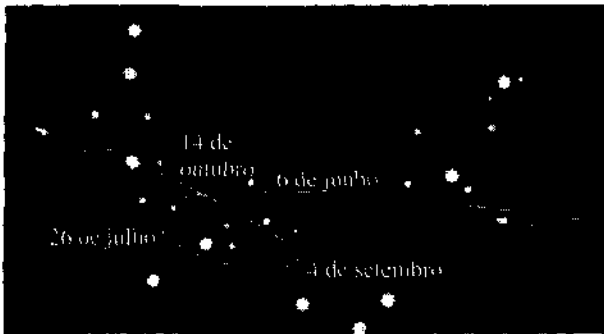
A velocidade de escape não depende da direção em que o projétil é arremessado. No entanto, é mais fácil atingir esta velocidade, se ele for lançado na direção em que a base de lançamento se move, devido à rotação da Terra. Por exemplo, os foguetes são lançados em Cabo Canaveral na direção Leste para tirar vantagem da velocidade desta base na mesma direção, aproximadamente 1.500 km/h.

## 15-8 Planetas e Satélites: Leis de Kepler

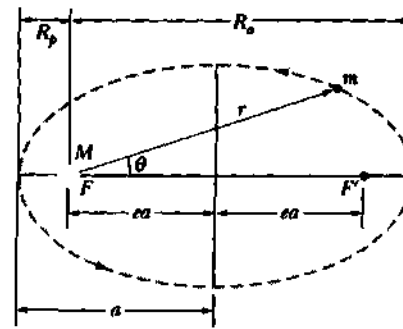
O movimento dos planetas, que aparenta ser desordenado quando visto em relação ao fundo de estrelas, tem sido um enigma desde os primórdios da história. O movimento “em laço” de Marte, mostrado na Fig. 15-15, era particularmente intrigante. Johannes Kepler (1571-1630), depois de uma vida dedicada aos estudos, desenvolveu as leis empíricas que governavam esses movimentos. Tycho Brahe (1546-1601), o último dos grandes astrónomos a fazer observações sem a ajuda de um telescópio, compilou a enorme quantidade de dados, a partir das quais Kepler deduziu as três leis do movimento planetário, que hoje levam seu nome. Mais tarde, Isaac Newton (1642-1727) mostrou que as leis empíricas de Kepler podiam ser deduzidas da sua lei da gravitação.

Vamos discutir as leis de Kepler uma a uma. Embora as aplicações que faremos aqui sejam para planetas em órbita em torno do Sol, as leis são válidas também para satélites, naturais ou artificiais, em torno da Terra ou de qualquer outro corpo celeste massivo.

**1. A LEI DAS ÓRBITAS:** Todos os planetas se movem em órbitas elípticas, com o Sol em um dos focos.



**Fig. 15-15** A trajetória de Marte em relação à constelação de Capricórnio, durante 1971. Mostramos sua posição em quatro dias selecionados. Tanto Marte quanto a Terra se movem ao redor do Sol, e observamos a posição de Marte relativa a nós; isto resulta, às vezes, em laços na trajetória de Marte, observada da Terra.



**Fig. 15-16** Um planeta de massa  $m$  numa órbita elíptica em torno do Sol. Este, de massa  $M$ , está num dos focos  $F$  da elipse.  $F'$  é o outro foco (foco “vazio”). Cada um dos focos está a uma distância  $ea$  do centro, onde  $e$  é a excentricidade da órbita. Mostramos também o semi-eixo maior  $a$  da elipse, o periélio  $R_p$  (posição mais próxima do Sol) e o afélio  $R_a$  (posição mais afastada do Sol).

A Fig. 15-16 mostra um planeta de massa  $m$  se movendo numa dessas órbitas em torno do Sol, cuja massa é  $M$ . Supomos que  $M \gg m$ , de tal modo que o centro de massa do sistema planeta-Sol está praticamente no centro do Sol.

A órbita na Fig. 15-16 é descrita ao darmos o seu **semi-eixo maior**  $a$  e a sua **excentricidade**  $e$ , esta última definida de tal maneira que  $ea$  é a distância do centro da elipse até qualquer um dos focos  $F$  ou  $F'$ . Uma excentricidade zero corresponde a um círculo, onde os dois focos coincidem no seu centro. A excentricidade das órbitas planetárias não é muito grande, assim — desenhadas no papel — elas parecem circulares. A excentricidade da elipse da Fig. 15-16 que, para maior clareza, foi escolhida com um valor considerável, é 0,74. A excentricidade da órbita da Terra é apenas 0,0167.

**2. A LEI DAS ÁREAS:** Uma linha que liga um planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais.

Em termos qualitativos, essa lei nos diz que o planeta se moverá mais devagar, quando estiver mais afastado do Sol, e mais rápido, quando mais perto. No final das contas, a segunda lei de Kepler é totalmente equivalente à lei de conservação do momento angular. Vamos provar esta afirmação.

A área sombreada na Fig. 15-17a é, com boa aproximação, a área varrida num tempo  $\Delta t$ . A área  $\Delta A$  é, aproximadamente, a de um triângulo com base  $r\Delta\theta$  e altura  $r$ . Assim,  $\Delta A \approx (1/2)r^2\Delta\theta$ . Esta expressão se torna mais exata à medida que  $\Delta t$  (e, logo,  $\Delta\theta$ ) tende a zero. A taxa instantânea com que a área está sendo varrida é, então,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\omega, \quad (15-30)$$

onde  $\omega$  é a velocidade angular da linha que liga o planeta ao Sol (que é a coordenada polar  $r$ ).

A Fig. 15-17b mostra o momento linear  $p$  do planeta, juntamente com suas componentes. Usando a Eq. 12-27, o módulo do momento angular  $L$  do planeta em relação ao

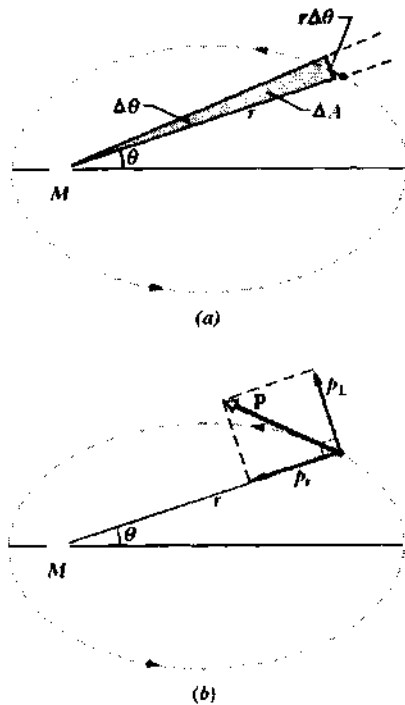


Fig. 15-17 (a) No intervalo de tempo  $\Delta t$ , a linha  $r$ , ligando o planeta ao Sol, gira de um ângulo  $\Delta\theta$ , varrendo uma área  $\Delta A$ . (b) O momento linear  $\mathbf{p}$  do planeta e suas componentes.

Sol é dado pelo produto de  $r$  e a componente de  $\mathbf{p}$  perpendicular a  $r$ , ou

$$L = r p_{\perp} = (r)(m v_{\perp}) = (r)(m \omega r) = m r^2 \omega, \quad (15-31)$$

onde substituímos  $v_{\perp}$  pelo seu equivalente  $\omega r$ . Eliminando  $r^2 \omega$  entre as Eq. 15-30 e 15-31, obtemos

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}. \quad (15-32)$$

Se  $dA/dt$  é constante, como Kepler afirmou, então a Eq. 15-32 significa que  $L$  deve também ser constante — o momento angular é conservado. Assim, a segunda lei de Kepler é equivalente à lei de conservação do momento angular.

**3. A LEI DOS PERÍODOS:** O quadrado do período de qualquer planeta é proporcional ao cubo do semi-eixo maior da sua órbita.

Vamos considerar uma órbita circular com raio  $r$  (o raio é equivalente ao semi-eixo maior). A aplicação da segunda lei de Newton,  $F = ma$ , ao planeta em órbita na Fig. 15-18, fornece

$$\frac{GMm}{r^2} = (m)(\omega^2 r). \quad (15-33)$$

Aqui, substituímos  $F$  pela sua expressão dada pela lei da gravitação de Newton, e escrevemos  $\omega^2 r$  para a aceleração

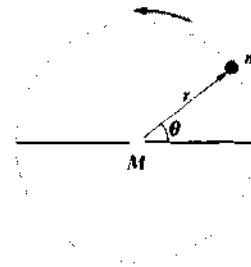


Fig. 15-18 Um planeta de massa  $m$  em órbita circular de raio  $r$  em torno do Sol.

centrípeta. Se substituirmos  $\omega$  por  $2\pi/T$ , onde  $T$  é o período do movimento, encontramos

$$T^2 = \left( \frac{4\pi^2}{GM} \right) r^3 \quad (\text{lei dos períodos}) \quad (15-34)$$

A quantidade entre parênteses é uma constante, seu valor dependendo somente da massa do corpo central.

A Eq. 15-34 vale também para órbitas elípticas, desde que substituamos  $r$  por  $a$ , o semi-eixo maior da elipse. A Tabela 15-3 mostra como essa lei é válida, com excelente aproximação, para as órbitas do sistema solar; ela prevê que a razão  $T^2/a^3$  é essencialmente a mesma para cada órbita planetária.

**EXEMPLO 15-9** Um satélite da Terra, em órbita circular a uma altura  $h$  de 230 km acima da superfície do planeta, tem um período  $T$  de 89 min. Qual a massa da Terra que se obtém a partir desses dados?

**Solução** Vamos aplicar a lei dos períodos ao sistema Terra-satélite. Tirando o valor de  $M$  na Eq. 15-34, obtemos

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}. \quad (15-35)$$

O raio  $r$  da órbita do satélite é

$$\begin{aligned} r &= R + h = 6.37 \times 10^6 \text{ m} + 230 \times 10^3 \text{ m} \\ &= 6.60 \times 10^6 \text{ m}, \end{aligned}$$

**Tabela 15-3**  
**Lei dos Períodos de Kepler para o Sistema Solar**

Planeta	Semi-eixo Maior $a$ ( $10^{10}$ m)	Período $T$ (anos)	$T^2/a^3$ ( $10^{-14}$ a <sup>2</sup> /m <sup>3</sup> )
Mercúrio	5.79	0,241	2,99
Vênus	10,8	0,615	3,00
Terra	15,0	1,00	2,96
Marte	22,8	1,88	2,98
Júpiter	77,8	11,9	3,01
Saturno	143	29,5	2,98
Urano	287	84,0	2,98
Netuno	450	165	2,99
Plutão	590	248	2,99

onde  $R$  é o raio da Terra. Substituindo este valor e o período  $T$  na Eq. 15-35, vem

$$M = \frac{(4\pi^2)(6,60 \times 10^6 \text{ m})^3}{(6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2)(89 \times 60 \text{ s})^2} = 6,0 \times 10^{24} \text{ kg.} \quad (\text{Resposta})$$

Da mesma forma, poderíamos achar a massa do Sol a partir do período e do raio da órbita da Terra (suposta circular), e a massa de Júpiter a partir do período e do raio orbital de uma das suas luas (sem precisar conhecer a massa dessa lua).

**EXEMPLO 15-10** O cometa de Halley tem um período de 76 anos e, em 1986 teve uma distância de máxima proximidade ao Sol, chamada *periélio*  $R_p$ , de  $8,9 \times 10^{10} \text{ m}$ . A Tabela 15-3 mostra que esta distância está entre as órbitas de Mercúrio e Vênus.

a. Qual o valor de  $R_a$ , a maior distância do cometa ao Sol, chamada *afélio*?

**Solução** Podemos achar o semi-eixo maior da órbita do Halley usando a Eq. 15-34. Trocando  $r$  por  $a$  naquela equação e tirando o valor de  $a$ , vem

$$a = \left( \frac{GMT^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}. \quad (15-36)$$

Se substituirmos a massa  $M$  do Sol,  $1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$ , e o período  $T$  do cometa, 76 anos ou  $2,4 \times 10^9 \text{ s}$ , na Eq. 15-36, encontraremos  $a = 2,7 \times 10^{12} \text{ m}$ .

A observação da Fig. 15-16 mostra que

$$R_p = a - ea \quad (15-37)$$

e

$$R_a = a + ea. \quad (15-38)$$

Somando essas equações, tiramos o valor de  $R_a$ ,

$$\begin{aligned} R_a &= 2a - R_p \\ &= (2)(2,7 \times 10^{12} \text{ m}) - 8,9 \times 10^{10} \text{ m} \\ &= 5,3 \times 10^{12} \text{ m.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

A Tabela 15-3 mostra que este resultado é ligeiramente menor que o semi-eixo maior da órbita de Plutão.

b. Qual é a excentricidade da órbita do Halley?

**Solução** Subtraindo a Eq. 15-37 da Eq. 15-38, obtemos para  $e$

$$\begin{aligned} e &= \frac{R_a - R_p}{2a} \\ &= \frac{5,3 \times 10^{12} \text{ m} - 8,9 \times 10^{10} \text{ m}}{(2)(2,7 \times 10^{12} \text{ m})} \\ &= 0,96. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Esta órbita, com uma excentricidade próxima da unidade, é uma elipse bastante alongada.

**EXEMPLO 15-11** Observações da luz, emitida de uma certa estrela, indicam que ela é parte de um sistema binário (de duas estrelas). A estrela visível tem velocidade orbital  $v = 270 \text{ km/s}$ , período orbital  $T = 1,70$  dias e massa  $m_1 = 6 M_\odot$ , aproximadamente, onde  $M_\odot$  é a massa do Sol,  $1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$ . Supondo que a estrela visível e sua companheira, que é escura e portanto invisível, estão em órbitas circulares (veja a Fig. 15-19), determine a massa aproximada  $m_2$  da estrela escura.

**Solução** O centro de massa desse sistema de duas estrelas está na linha que conecta os seus centros, como estava aquele do sistema de duas partículas na Seção 9-2. A posição do centro de massa é o ponto  $O$  na Fig. 15-19 e a estrela visível e a escura têm raios orbitais  $r_1$  e  $r_2$ , respectivamente, em torno de  $O$ , sendo  $r = r_1 + r_2$  sua separação. Da Eq. 15-1, a força gravitacional sobre a estrela visível, causada pela companheira escura, é

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}.$$

Aplicando a segunda lei de Newton,  $F = ma$ , à estrela visível, fornece então

$$\frac{Gm_1m_2}{r^2} = m_1a = (m_1)(\omega^2r_1), \quad (15-39)$$

onde  $\omega$  é a velocidade angular da estrela visível e  $\omega^2r_1$  é a sua aceleração centrípeta na direção de  $O$ .

Podemos obter outra equação, envolvendo as mesmas variáveis, calculando a posição do centro de massa  $O$ . Como  $O$  está a uma distância  $r_1$  da estrela visível, podemos usar a Eq. 9-1 para escrever

$$r_1 = \frac{m_2r}{m_1 + m_2}.$$

Isto implica

$$r = r_1 \frac{m_1 + m_2}{m_2}. \quad (15-40)$$

Substituindo agora o valor de  $r$  dado pela Eq. 15-40 e  $\omega$  por  $2\pi/T$  na Eq. 15-39, depois de algumas manipulações algébricas, ficamos com

$$\frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{4\pi^2}{GT^2} r_1^3. \quad (15-41)$$

Ainda temos duas incógnitas,  $m_2$  e  $r_1$ . No entanto, podemos achar  $r_1$  analisando o movimento orbital da estrela visível: o período orbital  $T$  é igual à circunferência da órbita ( $2\pi r_1$ ), dividido pela velocidade  $v$  da estrela. Isto nos dá

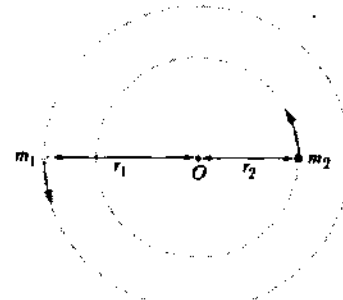
$$T = \frac{2\pi r_1}{v},$$

ou

$$r_1 = \frac{vT}{2\pi}. \quad (15-42)$$

Substituindo  $m_1 = 6M_\odot$  e usando a Eq. 15-42 para  $r_1$ , obtemos da Eq. 15-41

$$\begin{aligned} \frac{m_2^3}{(6M_\odot + m_2)^2} &= \frac{v^3 T}{2\pi G} \\ &= \frac{(2,7 \times 10^5 \text{ m/s})^3 (1,70 \text{ dias})(86,400 \text{ s/dia})}{(2\pi)(6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)} \\ &= 6,90 \times 10^{30} \text{ kg,} \end{aligned}$$



**Fig. 15-19** Exemplo 15-11. Uma estrela visível de massa  $m_1$ , e um objeto escuro invisível de massa  $m_2$  descrevem órbitas circulares em torno do centro de massa do sistema binário, o ponto  $O$ .

ou

$$\frac{m_2^3}{(6M_1 + m_2)^2} = 3,47 M_1, \quad (15-43)$$

Podemos resolver esta equação cúbica para  $m_2$ , ou, como estamos trabalhando com massas aproximadas, podemos substituir múltiplos inteiros de  $M_1$  para  $m_2$ , até encontrarmos

$$m_2 \approx 9M_1, \quad (\text{Resposta})$$

Os dados que usamos aqui são, aproximadamente, referentes ao sistema LMCX-3 que está na Grande Nuvem de Magalhães (mostrada na figura no começo deste capítulo). A partir de outros dados, sabemos que a estrela escura é muito compacta: pode ser uma estrela que colapsou sob a influência de sua própria atração gravitacional, tornando-se uma estrela de nêutrons ou um buraco negro. Como uma estrela de nêutrons não pode ter massa maior que cerca de  $2M_1$ , o resultado  $m_2 \approx 9M_1$  sugere fortemente que o objeto escuro deve ser um buraco negro.

### 15-9 Órbitas de Satélites e Energia (Opcional)

Enquanto um satélite orbita a Terra na sua trajetória elíptica, tanto a sua velocidade, que fixa a sua energia cinética  $K$ , quanto a sua distância do centro da Terra, que fixa a sua energia potencial  $U$ , variam periodicamente. No entanto, a energia total  $E$  do satélite permanece constante (como a massa do satélite é muito menor do que a da Terra, tomamos  $U$  e  $E$  do sistema Terra-satélite como associadas somente ao satélite).

A energia potencial é dada pela Eq. 15-23

$$U = -\frac{GMm}{r}$$

Aqui,  $r$  é o raio da órbita, suposta circular, por enquanto.

Para achar a energia cinética, usamos a segunda lei de Newton,  $F = ma$ , para o satélite

$$\frac{GMm}{r^2} = m \frac{v^2}{r}, \quad (15-44)$$

onde  $v^2/r$  é a sua aceleração centrípeta. Então, da Eq. 15-44, a energia cinética é

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}, \quad (15-45)$$

mostrando que, para um satélite em órbita circular,  $K = -U/2$ .

A energia mecânica total é

$$E = K + U = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}, \quad (15-46)$$

o que mostra que, para um satélite em órbita circular, a energia total  $E$  é igual à energia cinética  $K$  com o sinal negativo. Pode-se mostrar que a Eq. 15-46 continua válida, se substituirmos  $r$  por  $a$ , o semi-eixo maior de uma órbita elíptica. Então, encontramos, para a energia total em uma órbita elíptica,

$$E = -\frac{GMm}{2a} \quad (\text{energia mecânica total}) \quad (15-47)$$

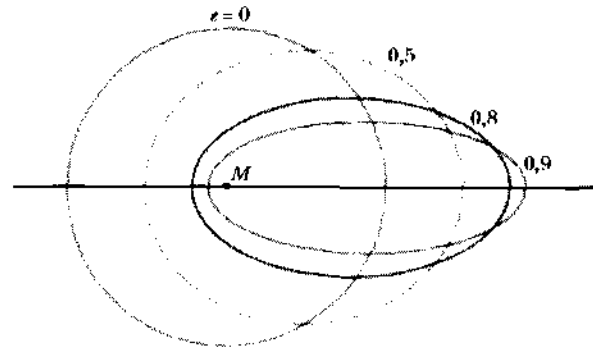


Fig. 15-20 Todas as quatro órbitas têm o mesmo semi-eixo maior  $a$ , e, logo, correspondem à mesma energia total  $E$ . As excentricidades das órbitas estão assinaladas.

A Eq. 15-47 nos diz que a energia total de um satélite em órbita depende somente do semi-eixo maior da órbita e não da sua excentricidade  $e$ . Por exemplo, quatro órbitas com o mesmo semi-eixo maior são mostradas na Fig. 15-20; um satélite teria a mesma energia total em qualquer dessas órbitas. A Fig. 15-21 mostra a variação de  $K$ ,  $U$  e  $E$  para um satélite em órbita circular em torno de um corpo central massivo.

Suponha que o ônibus espacial *Enterprise* está numa órbita circular de raio  $r$  e que, no ponto  $P$  na Fig. 15-22, o comandante ordena uma ignição de curta duração de um dos foguetes que apontam para a frente, logo, causando uma súbita diminuição da velocidade da nave. Que caminho o *Enterprise* seguirá então?

A emissão do foguete reduz a energia cinética da nave e, logo, reduz  $E$ ; isto é,  $E$  torna-se mais negativa. Da Eq. 15-47, vemos que isto implica uma diminuição de  $a$ , o semi-eixo maior da órbita. A Eq. 15-34, então, mostra que  $T$ , o período orbital, também deve diminuir. O *Enterprise* se-

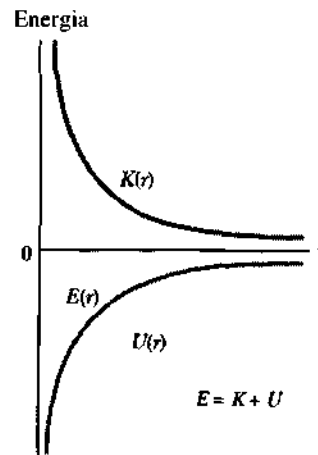


Fig. 15-21 As variações da energia cinética  $K$ , da energia potencial  $U$  e da energia total  $E$  com o raio  $r$  para um satélite em órbita circular. Para qualquer valor de  $r$ , os valores de  $U$  e  $E$  são negativos, o de  $K$  é positivo e  $E = -K$ . Quando  $r$  tende para infinito, todas as curvas de energia tendem para zero.



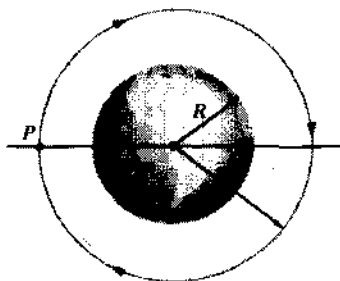


Fig. 15-22 Uma espaçonave em órbita circular em torno da Terra com raio  $r$ . No ponto  $P$ , o piloto aciona um impulso instantâneo para a frente, freando a nave, que passa, então, a percorrer a órbita elíptica tracejada.

guirá a órbita elíptica tracejada que vemos na Fig. 15-22. Essa manobra é analisada com mais detalhes no Exemplo 15-13.

**EXEMPLO 15-12** Um astronauta brincalhão coloca uma bola de boliche, de massa  $m$  igual a 7,20 kg, numa órbita circular em torno da Terra a uma altitude  $h$  de 350 km.

a. Qual é a energia cinética da bola?

**Solução** O raio da órbita  $r$  é dado por

$$r = R + h = 6.370 \text{ km} + 350 \text{ km} = 6.72 \times 10^6 \text{ m},$$

onde  $R$  é o raio da Terra. Da Eq. 15-45, a energia cinética é

$$\begin{aligned} K &= \frac{GMm}{2r} \\ &= \frac{(6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5,98 \times 10^{24} \text{ kg})(7,20 \text{ kg})}{(2)(6,72 \times 10^6 \text{ m})} \\ &= 2,14 \times 10^8 \text{ J} = 214 \text{ MJ}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

b. Qual a energia potencial da bola?

**Solução** Como a bola está em órbita circular, temos

$$U = -2K = -428 \text{ MJ}. \quad (\text{Resposta})$$

c. Qual a energia total da bola  $E$ ?

**Solução** De novo, como a bola está em órbita circular, temos

$$E = -K = -214 \text{ MJ}. \quad (\text{Resposta})$$

d. Qual era a energia  $E_0$  da bola na plataforma de lançamento em Cabo Canaveral?

**Solução** Na plataforma de lançamento, a bola tem um pouco de energia cinética por causa da rotação da Terra, mas é fácil mostrar que esta energia é praticamente desprezível. Logo, a energia total  $E_0$  é igual à energia potencial  $U_0$ , que é dada pela Eq. 15-23:

$$\begin{aligned} E_0 &\approx U_0 = -\frac{GMm}{R} \\ &= -\frac{(6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5,98 \times 10^{24} \text{ kg})(7,20 \text{ kg})}{6,37 \times 10^6 \text{ m}} \\ &= -4,51 \times 10^8 \text{ J} = -451 \text{ MJ}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$



Fig. 15-23 Lançamento do telescópio espacial Hubble, de um compartimento de um ônibus espacial.

Você pode estar tentado a dizer que a energia potencial da bola, na superfície da Terra, é zero. Lembre-se, no entanto, de que adotamos a convenção, quando deduzimos a expressão da energia potencial, que ela seria zero, quando os dois corpos estivessem infinitamente afastados. Você pode também pensar em usar a Eq. 15-47 para achar  $E_0$ , mas não esqueça que essa equação só se aplica a um corpo em órbita.

O aumento na energia total da bola, depois de lançada, foi

$$\begin{aligned} \Delta E &= E - E_0 = (-214 \text{ MJ}) - (-451 \text{ MJ}) \\ &= 237 \text{ MJ}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Você pode comprar esta energia da companhia que a fornece por um preço barato, pelas tarifas atuais. Em comparação, o aumento em energia mecânica do Telescópio Espacial Hubble, desde a plataforma de lançamento até a colocação em órbita (Fig. 15-23), corresponde a alguns milhares de dólares.

**EXEMPLO 15-13** Duas pequenas naves espaciais, cada uma com massa  $m = 2.000 \text{ kg}$ , estão em órbita circular em torno da Terra, como na Fig. 15-22, a uma altitude  $h$  de 400 km. Igor, o comandante de uma das naves, chega a um ponto fixo da órbita 90 s na frente de Sally, a comandante da outra nave.

a. Quais são os períodos e as velocidades das duas naves nessa órbita circular?

**Solução** O raio da órbita circular para ambas as naves é

$$\begin{aligned} r &= R + h = 6.370 \text{ km} + 400 \text{ km} \\ &= 6.770 \text{ km} = 6,77 \times 10^6 \text{ m}. \end{aligned}$$

O período é obtido, então, da Eq. 15-34

$$\begin{aligned} T_0 &= \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} \\ &= \sqrt{\frac{(4\pi^2)(6,77 \times 10^6 \text{ m})^3}{(6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2)(5,98 \times 10^{24} \text{ kg})}} \\ &= 5.540 \text{ s} (= 92,3 \text{ min}). \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

A velocidade orbital é conseguida dividindo-se a circunferência da órbita pelo período:

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{2\pi r}{T_0} = \frac{(2\pi)(6,77 \times 10^6 \text{ m})}{5.540 \text{ s}} \\ &= 7.680 \text{ m/s}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

b. Num ponto como  $P$  da Fig. 15-22, Sally, querendo ultrapassar Igor, inflama um dos foguetes para a frente, *reduzindo* sua velocidade em 1,00%. Depois de fazer isto, ela seguirá a órbita elíptica tracejada da Fig. 15-22. Quais são a velocidade, a energia cinética e a energia potencial de sua nave, logo após a ignição do retrofoguetes?

**Solução** A velocidade de Sally no ponto  $P$ , logo depois da ignição, é

$$\begin{aligned} v &= (0,99)v_0 = (0,99)(7.680 \text{ m/s}) \\ &= 7.600 \text{ m/s.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Sua nova energia cinética em  $P$  é, então,

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(2.000 \text{ kg})(7.60 \times 10^3 \text{ m/s})^2 \\ &= 5,78 \times 10^{10} \text{ J.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Sua energia potencial no ponto  $P$  não se modifica e vale

$$\begin{aligned} U &= -\frac{GMm}{r} \\ &= -\frac{(6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5,98 \times 10^{24} \text{ kg})(2.000 \text{ kg})}{6,77 \times 10^6 \text{ m}} \\ &= -11,8 \times 10^{10} \text{ J.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

(Note que, como a ignição joga Sally numa órbita elíptica, a relação  $U = -2K$  não se aplica, pois só é válida para órbitas circulares.)

c. Na sua nova órbita elíptica, quais são a energia total, o semi-eixo maior e o período orbital?

**Solução** A nova energia total de Sally, constante para a nova órbita, é a soma das energias cinética e potencial no ponto  $P$ :

$$\begin{aligned} E &= K + U = 5,78 \times 10^{10} \text{ J} + (-11,8 \times 10^{10} \text{ J}) \\ &= -6,02 \times 10^{10} \text{ J.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

(Note que a relação  $E = -K$ , válida para uma órbita circular, não se aplica à órbita elíptica de Sally.)

Da Eq. 15-47, o semi-eixo maior da nova órbita de Sally é

$$\begin{aligned} a &= -\frac{GMm}{2E} \\ &= -\frac{(6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2)(5,98 \times 10^{24} \text{ kg})(2.000 \text{ kg})}{(2)(-6,02 \times 10^{10} \text{ J})} \\ &= 6,63 \times 10^6 \text{ m.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Veja que  $a$  é menor, em 2,1%, que o raio  $r$  da órbita circular original.

O período da nova órbita de Sally é obtido da Eq. 15-34, trocando  $r$  por  $a$ :

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM}} \\ &= \sqrt{\frac{(4\pi^2)(6,63 \times 10^6 \text{ m})^3}{(6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2)(5,98 \times 10^{24} \text{ kg})}} \\ &= 5.370 \text{ s} (= 89,5 \text{ min}). \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Esse período é 170 s menor do que o da órbita de Igor. Assim, Sally chegará de novo ao ponto  $P$  na frente de Igor com uma diferença de  $170 - 90 = 80$  s. Ao frear, Sally conseguiu ultrapassar Igor! Para voltar à sua órbita circular original, ficando ainda 80 s na frente de Igor, tudo que Sally tem de fazer é voltar à sua velocidade original, acionando um retrofoguetes, quando passar pelo ponto  $P$ .

Sally conseguiu ultrapassar freando por duas razões. (1) Como mostra a Fig. 15-22, o comprimento da sua nova órbita é menor. (2) Ao diminuir sua velocidade no ponto  $P$ , mudou sua órbita e, até que ela retornasse a  $P$ , estaria mais perto do planeta, logo, transformando energia potencial

**Tabela 15-4**  
Propriedades das Duas Órbitas no Exemplo 15-13

Propriedade	Órbita Circular	Órbita Elíptica
Semi-eixo maior ( $a$ , $10^6$ m)	6,77	6,63
Menor distância ( $R_p$ , $10^6$ m)	6,77	6,49
Maior distância ( $R_a$ , $10^6$ m)	6,77	6,77
Excentricidade ( $e$ )	0	0,021
Período ( $T$ , s)	5.540	5.370
Energia ( $E$ , $10^{10}$ J)	-5,90	-6,02

em energia cinética e, assim, aumentando a sua velocidade. A Tabela 15-4 compara as propriedades da órbita circular original com a nova órbita elíptica.

## 15-10 Uma Visão mais Profunda da Gravitação (Opcional)

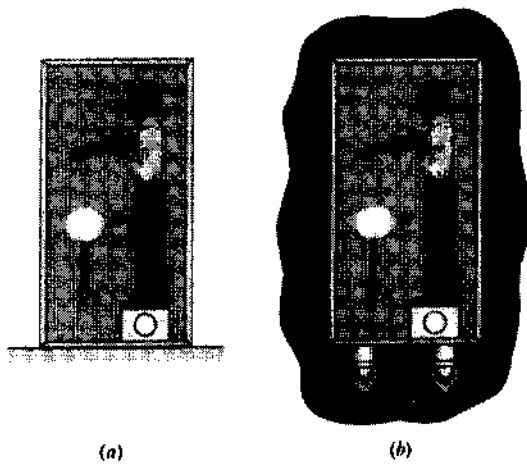
Einstein disse, certa vez: “Estava sentado numa cadeira no escritório de patentes em Berna, quando, de repente, me ocorreu um pensamento: ‘Se uma pessoa cai em queda livre, não sente o próprio peso.’ Fiquei estupefato. Este pensamento tão simples me causou profunda impressão e acabou me levando a formular uma teoria da gravitação.”

Assim, Einstein nos conta como foi levado a formular a *teoria geral da relatividade*,\* que não interpreta a gravitação como uma força e, sim, como curvatura do espaço-tempo. Embora não seja possível, num nível elementar, explorar os detalhes técnicos da teoria, podemos pelo menos discutir o seu postulado fundamental, o **princípio da equivalência**.

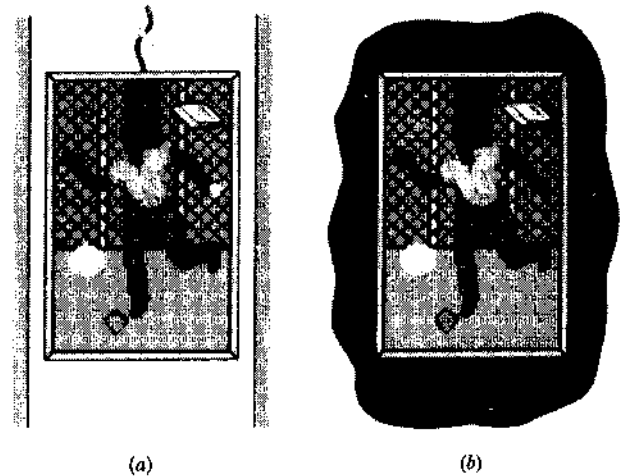
Se interpretarmos de maneira não muito rigorosa, este princípio diz que a gravidade é equivalente a uma aceleração. Se um físico está numa caixa fechada, como na Fig. 15-24, não consegue distinguir entre gravidade e aceleração. Suponha que ele está em pé sobre uma balança. Na Fig. 15-24a, a caixa está em repouso na superfície da Terra; na Fig. 15-24b, está em movimento uniforme acelerado, através do espaço interestelar, com aceleração igual a  $9,8 \text{ m/s}^2$ . O físico não é capaz de distinguir entre as duas situações. Além disso, se observar um objeto — por exemplo, uma bola plástica de massa  $m$  — em queda dentro da caixa, perceberá a mesma aceleração relativa nas duas situações.

A Fig. 15-25 ilustra outro efeito relacionado à equivalência entre aceleração e gravidade. Na Fig. 15-25a, o físico está flutuando dentro de um elevador em queda livre no campo gravitacional terrestre (estamos ignorando a rotação da Terra). Já na Fig. 15-25b, flutua dentro de um elevador em repouso no espaço interestelar. Novamente, é im-

\* Ela não deve ser confundida com a teoria *especial* da relatividade de Einstein, que é abordada no Cap. 42 (Vol. 4). Um resumo da Relatividade Geral, incluindo a teoria especial como um caso limite, é visto em *Basic Concepts*, de Robert Resnick e David Halliday, 2.ª Ed., John Wiley & Sons, New York, 1985, Tópico Suplementar C.



**Fig. 15-24** (a) Um físico numa caixa, em repouso sobre a Terra, vê uma bola cair com aceleração  $a = 9,8 \text{ m/s}^2$ . (b) Se ele e a caixa estão acelerados no espaço interestelar com a mesma aceleração do item anterior, a bola tem o mesmo comportamento desse item. Não é possível para o físico, fazendo experiência apenas dentro da caixa, distinguir entre as duas situações. A balança sobre a qual ele está também fornece a mesma leitura nas duas situações.



**Fig. 15-25** (a) Um físico num elevador em queda livre. (b) O elevador no espaço interestelar. Novamente, não é possível para o físico, fazendo experiências dentro do elevador, distinguir entre as duas situações.

possível para ele distinguir as duas situações; em ambas, ele tem a sensação de “peso zero”.

Do princípio da equivalência, podemos deduzir um fato familiar, ou seja, no vácuo, todos os corpos caem com a mesma aceleração. Se, por exemplo, pêras caíssem com uma aceleração maior do que bolas de plástico, as experiências ilustradas nas Figs. 15-24 e 15-25 não confirmariam o princípio da equivalência.

Nossa afirmativa acerca da queda dos corpos pode ser expressa, também, lembrando que há duas maneiras diferentes pelas quais podemos associar massa a um corpo. Uma delas é pendurá-lo em uma balança de mola (no Pólo Norte ou Sul, se quisermos evitar os efeitos da rotação da Terra). Podemos chamar o resultado dessa medida de **massa gravitacional**  $m_g$ , que é a mesma da lei da gravitação de Newton, podendo ser escrita como

$$F = G \frac{M m_g}{R^2}. \quad (15-48)$$

Por outro lado, podemos avaliar a massa de um corpo, medindo a sua aceleração adquirida, quando o submetemos à ação de uma força conhecida, obtendo o que podemos

chamar de **massa inercial**  $m_i$ . Esta é a massa que aparece na segunda lei de Newton, podendo ser escrita como

$$F = m_i a. \quad (15-49)$$

Essas massas não precisam ser iguais. A única maneira de verificar se são ou não idênticas é realizando as experiências e comparando os resultados. Essas experiências mostraram que, com uma precisão de uma parte em  $10^{12}$ , *as duas massas são idênticas*.

Na física newtoniana, a igualdade entre as massas inercial e gravitacional de um corpo só pode ser encarada como uma espantosa coincidência. Na teoria geral da relatividade de Einstein, a igualdade aparece, naturalmente, como uma consequência do princípio da equivalência: se aceleração e gravidade são equivalentes, então, massas medidas por métodos envolvendo a gravidade ou a aceleração devem ser iguais.

Em retrospecto, vemos uma linha de pensamento sobre a gravitação estendendo-se desde Galileu, na torre de Pisa (se ele realmente realizou a experiência), passando por Newton a observar a queda de uma maçã e chegando até Einstein, sonhando acordado na sua cadeira, no escritório de patentes na Suíça. A história da gravitação está ainda muito longe do final.

## RESUMO

### A Lei da Gravitação

Toda partícula do universo atrai qualquer outra com uma força gravitacional cujo módulo é dado por

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (\text{lei de Newton de gravitação}). \quad (15-1)$$

A **constante gravitacional**  $G$  é uma constante universal que vale  $6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$ .

### O Comportamento Gravitacional de uma Casca Esférica Uniforme

A Eq. 15-1 é válida apenas para partículas. Para calcular a força gravitacional entre corpos extensos, devemos adicionar (integrar) as forças individuais sobre cada uma das partículas que constituem o corpo. No entanto, se qualquer um dos corpos for uma casca esférica uniforme ou um sólido esféricamente simétrico, a força gravitacional que exercerá sobre um objeto externo poderá ser calculada como se toda a massa do corpo, esféricamente simétrico, estivesse concentrada em seu centro.

**Superposição**

A força gravitacional obedece ao **princípio da superposição**; isto é, a força gravitacional total sobre a partícula 1,  $F_1$ , é a soma das forças exercidas sobre ela por todas as outras partículas calculadas individualmente:

$$\mathbf{F}_1 = \sum_{i=2}^n \mathbf{F}_{1i}, \quad (15-4)$$

onde o total é uma soma vetorial das forças  $F_{1i}$ , exercidas sobre a partícula 1 pelas partículas 2, 3, ...,  $n$ . A força gravitacional  $F_1$ , exercida sobre a partícula por um corpo extenso, é calculada dividindo o corpo em elementos de massa  $dm$ , cada um exercendo uma força infinitesimal  $dF$  sobre a partícula e, então, integrando para achar a força resultante:

$$\mathbf{F}_1 = \int d\mathbf{F}. \quad (15-5)$$

**Aceleração Gravitacional**

A **aceleração gravitacional**  $a_g$  de uma partícula (de massa  $m$ ) é aquela devida somente à força gravitacional atuando sobre ela. Se a distância da partícula ao centro de um corpo uniforme e esfericamente simétrico de massa  $M$  é  $r$ , o módulo da força gravitacional é dado pela Eq. 15-1. Além disso, pela segunda lei de Newton,

$$F = ma_g, \quad (15-11)$$

e, logo,  $a_g$  é dada por

$$a_g = \frac{GM}{r^2}. \quad (15-12)$$

**Aceleração de Queda Livre e Peso**

A aceleração de queda livre  $g$  de uma partícula próxima à superfície da Terra difere ligeiramente da aceleração gravitacional  $a_g$ , e o peso  $mg$  da partícula é diferente da força gravitacional atuando sobre a partícula, pois a Terra não é uniforme nem exatamente esférica e, além disso, gira.

**Gravitação no Interior de uma Casca Esférica**

Uma casca esférica uniforme não exerce nenhuma força gravitacional sobre uma partícula localizada no seu interior. Então, se uma partícula está dentro de uma distribuição volumétrica uniforme, esfericamente simétrica de massa, a uma distância  $r$  do seu centro, a força gravitacional sobre ela deve-se apenas à massa  $M'$  contida na esfera de raio  $r$ , que é dada por

$$M' = \rho \frac{4\pi r^3}{3}, \quad (15-21)$$

onde  $\rho$  é a densidade da esfera.

**Energia Potencial Gravitacional**

A energia potencial gravitacional  $U(r)$  de duas partículas, com massa  $M$  e  $m$  e separadas por uma distância  $r$ , é igual ao trabalho realizado (como sinal invertido) pela força gravitacional exercida por uma sobre a outra, para trazer esta última desde uma distância muito grande (formalmente infinita) até uma distância  $r$  da primeira partícula. Esta energia é

$$U = -\frac{GMm}{r} \quad (\text{energia potencial gravitacional}). \quad (15-23)$$

**Energia Potencial Gravitacional de um Sistema de Várias Partículas**

Se um sistema contém mais de duas partículas, a energia potencial gravitacional total é a soma de termos representando a energia potencial de todos os pares de partículas; por exemplo, para três partículas de massas  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ , temos

$$U = -\left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}}\right). \quad (15-24)$$

**Velocidade de Escape**

Um objeto escapará da atração gravitacional de um corpo de massa  $M$  e raio  $R$ , se a sua velocidade próximo à superfície do corpo for, pelo menos, igual à **velocidade de escape**, dada por

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \quad (15-29)$$

**As Três Leis de Kepler**

A atração gravitacional mantém o sistema solar unido e também possibilita a existência de satélites em órbita em torno da Terra ou de qualquer outro planeta, sejam naturais ou artificiais. O movimento de um corpo sob a influência gravitacional de um outro central atrativo obedece às três leis de Kepler do movimento planetário, que podem ser todas deduzidas das leis do movimento e da gravitação de Newton:

1. **A lei das órbitas.** Todos os planetas se movem em órbitas elípticas com o Sol em um dos focos.
2. **A lei das áreas.** Uma reta ligando qualquer dos planetas ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais (o que equivale a afirmar que o momento angular do sistema se conserva).
3. **A lei dos períodos.** O quadrado do período orbital  $T$  de qualquer planeta em torno do Sol é proporcional ao cubo do semi-eixo maior  $a$  da órbita. No caso de órbitas circulares de raio  $r$ , o semi-eixo maior  $a$  é substituído pelo raio e esta lei se escreve

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3 \quad (\text{lei de períodos}), \quad (15-34)$$

onde  $M$  é a massa do corpo atrator — o Sol, no caso do nosso sistema solar. O resultado continua válido para órbitas elípticas, bastando substituir o raio  $r$  pelo semi-eixo maior  $a$ .

**Energia no Movimento Planetário**

Quando um planeta ou satélite de massa  $m$  descreve uma órbita circular de raio  $r$ , sua energia potencial  $U$  e sua energia cinética  $K$  são dadas por

$$U = -\frac{GMm}{r} \quad \text{e} \quad K = \frac{GMm}{2r}. \quad (15-23, 15-45)$$

A energia total  $E = K + U$  é

$$E = -\frac{GMm}{2a}, \quad (15-47)$$

onde o raio  $r$  foi substituído pelo semi-eixo maior  $a$ , para indicar que esta expressão também é válida para o caso mais geral de órbitas elípticas.

**O Princípio da Equivalência**

Einstein chamou a atenção para a equivalência entre a gravidade e a aceleração. Este **princípio da equivalência** levou-o a formular uma teoria da gravitação (a *teoria geral da relatividade*) que descreve os efeitos gravitacionais em termos da curvatura do espaço-tempo. Uma das conseqüências da teoria é que a **massa gravitacional**, que determina a intensidade com que um objeto participa da interação gravitacional, é equivalente à **massa inercial**, que aparece na segunda lei do movimento de Newton.

## QUESTIONÁRIO

- Se a intensidade da força gravitacional sobre qualquer corpo é diretamente proporcional à sua massa, por que um corpo mais pesado não cai mais depressa que outro mais leve?
- Como varia a força gravitacional resultante sobre uma sonda espacial, quando se desloca da superfície da Terra até a da Lua? Sua massa varia durante o trajeto?
- Haveria mais açúcar numa libra (unidade de peso utilizada nos EUA) no pólo norte ou no equador? E num quilograma?
- Como o raio equatorial da Terra é ligeiramente maior do que o polar, as nascentes do rio Mississippi, embora estejam acima do nível do mar, estão mais perto do centro da Terra do que a sua desembocadura. Como é possível o rio escoar "para cima"?
- Um relógio utiliza uma mola oscilante, enquanto outro usa de um pêndulo. Ambos são levados para a superfície de Marte. Funcionarão, da mesma maneira, na Terra e naquele planeta? Quando em Marte, as leituras dos dois relógios estarão em acordo? Justifique sua resposta. (A massa de Marte é um décimo da terrestre e seu raio, a metade.)
- Dois carros idênticos viajam em sentidos opostos com a mesma velocidade, numa rodovia retilínea de direção leste-oeste. Qual dos carros pressiona a estrada para baixo com mais intensidade?
- No Exemplo 15-6, o tempo de viagem dentro do túnel foi deduzido, supondo que a densidade da Terra é uniforme. Se uma distribuição de densidade mais realística para a Terra, levando em conta a densidade maior do seu núcleo interior, fosse utilizada na solução do problema, obteríamos um tempo maior ou menor? Justifique sua resposta.
- As massas  $m$  nas Figs. 15-26a e 15-26b são idênticas. Qual dos sistemas tem a menor energia potencial gravitacional?

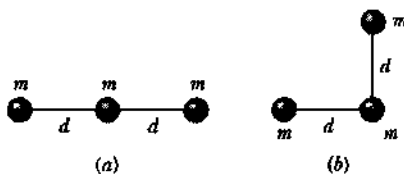


Fig. 15-26 Questão 8.

- Um satélite em órbita em torno do Círculo Polar Ártico seria muito útil para vigiar esta parte, estrategicamente, muito importante do planeta. Por que tal satélite não é colocado em órbita?
- Quando um carro faz uma curva, os passageiros tendem a se deslocar radialmente para fora da trajetória. Por que os astronautas do ônibus espacial não experimentam um efeito semelhante, enquanto o ônibus descreve sua órbita circular em torno da Terra?
- A força gravitacional exercida pelo Sol sobre a Lua é quase duas vezes maior do que aquela exercida pela Terra. Por que a Lua não escapa da Terra?
- Explique o que há de errado com o seguinte raciocínio: "O Sol atrai todos os corpos que estão sobre a superfície da Terra. À meia-noite, quando o Sol está diretamente abaixo de nós, atrai os objetos na mesma direção em que a Terra os atrai; já ao meio-dia, quando está diretamente acima de nós, atrai os objetos com uma força em direção oposta à de atração da Terra. Logo, todos os objetos deveriam ser mais leves à meia-noite (ou à noite) e mais pesados ao meio-dia (ou durante o dia)."

- Se as marés lunares diminuem a velocidade de rotação da Terra (devido ao atrito), o momento angular da Terra diminui. Supondo que o momento angular do sistema Terra-Lua se conserva, o que acontece com o movimento da Lua? O Sol (e as marés solares) têm alguma influência neste caso?
- Um satélite em órbita de baixa altitude sofre a ação de uma pequena força resistente devido à atmosfera da Terra. O que acontece com a sua velocidade devido a esta resistência? (Compare esta situação com a do Exemplo 15-13c.)
- A energia total do sistema solar deve ser constante? E o momento angular total? Justifique suas respostas.
- Qualquer corpo em repouso sobre a superfície da Terra descreve uma trajetória circular com um período de 24 h. Este corpo está "em órbita", no mesmo sentido em que um satélite está? Por que não? Qual deveria ser o período de rotação da Terra para que um corpo, nestas condições, estivesse em órbita?
- É possível colocar um satélite numa órbita cujo plano não passe através do centro da Terra? Justifique sua resposta.
- Considere dois satélites em órbitas equatoriais circulares próximas à Terra, um se movendo para oeste e outro para leste. Haverá alguma diferença nos períodos desses satélites para um observador terrestre?
- Depois que o *Sputnik I* foi colocado em órbita, alguns cientistas afirmaram que ele não retornaria à Terra, pois entraria em ignição e se consumiria totalmente ao *reentrar* na atmosfera terrestre. Considerando que esse problema não aconteceu na ocasião do *lançamento*, como poderia ocorrer na reentrada na atmosfera?
- O que acontece ao momento angular de um satélite artificial, à medida que ele desce através da atmosfera da Terra?
- Um satélite artificial está em órbita em torno da Terra. Como a órbita será afetada se um dos seus foguetes for momentaneamente acionado, dando ao satélite um impulso (a) na direção da Terra, (b) na direção oposta à do item a, (c) para a frente, (d) para trás e (e) na direção perpendicular ao plano da órbita?
- Qual a vantagem em lançar satélites da Flórida, em vez de lançá-los da Califórnia?

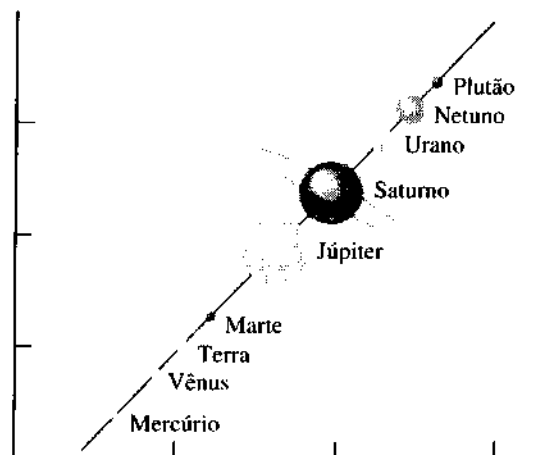


Fig. 15-27 Questão 25.

23. Para um vôo a Marte, os foguetes são lançados na direção da velocidade orbital da Terra. Já para um vôo a Vênus, são lançados na direção oposta. Explique por quê.

24. Saturno está cerca de seis vezes mais distante do Sol do que Marte. Qual dos dois planetas tem (a) o maior período orbital, (b) a maior velocidade orbital e (c) a maior velocidade angular orbital?

25. O que está sendo representado no gráfico da Fig. 15-27? Coloque números com unidades em cada eixo e, se necessário, ajuste o eixo horizontal.

26. Você é um passageiro a bordo do SS *Arthur C. Clarke*, a primeira espaçonave interestelar que gira em torno de um eixo central para simular a gravidade terrestre. Se você estiver trancado numa cabine, como poderá descobrir que não está na Terra?

## EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

### Seção 15-2 A Lei da Gravitação de Newton

1E. Qual deve ser a separação entre uma partícula de 5,2 kg e outra de 2,4 kg, para que sua força de atração gravitacional seja  $2,3 \times 10^{-12}$  N?

2E. Algumas pessoas acreditam que a posição dos planetas, na hora do nascimento, influencia os recém-nascidos. Outras negam esta crença e afirmam que a força gravitacional exercida sobre o bebê, pelo obstetra, é maior do que a dos planetas. Para verificar a validade desta afirmativa, calcule e compare as forças gravitacionais exercidas sobre um bebê de 6 kg (a) por um obstetra de 70 kg que está a 1 m do bebê, (b) pelo planeta Júpiter ( $m = 2 \times 10^{27}$  kg), quando ele está à menor distância da Terra ( $= 6,0 \times 10^{11}$  m) e (c) por Júpiter, quando ele está mais distante da Terra ( $= 9 \times 10^{11}$  m). (d) A afirmativa é correta?

3E. O Sol e a Terra exercem forças gravitacionais sobre a Lua. Qual a razão  $F_{S,L} / F_{T,L}$  entre estas duas forças? (A separação média entre o Sol e a Lua é igual à distância entre o Sol e a Terra.)

4E. Um dos satélites *Echo* consistia em um balão esférico de alumínio inflado, com 30 m de diâmetro e massa igual a 20 kg. Suponha que um meteoro de 7,0 kg passe a 3 m da superfície do satélite. Qual a força gravitacional sobre o meteoro, devido ao satélite, nesse instante?

5P. Um corpo de massa  $M$  é dividido em duas partes, de massas  $m$  e  $M - m$ , que são depois distanciadas uma da outra. Qual a razão  $m/M$  que torna máxima a força gravitacional entre as duas partes?

### Seção 15-3 Gravitação e o Princípio da Superposição

6E. A que distância da Terra, medida ao longo da linha que une os centros da Terra e do Sol, deve estar uma sonda espacial para que a atração gravitacional deste anule a da Terra?

7E. Uma espaçonave viaja numa trajetória retilínea da Terra à Lua. Quando a força gravitacional resultante sobre a nave for zero, a que distância estará da Terra?

8P. Qual a variação percentual na aceleração da Terra em direção ao Sol, quando o alinhamento da Terra, do Sol e da Lua passar de uma situação de eclipse do Sol (Lua entre a Terra e o Sol) para uma de eclipse da Lua (Terra entre a Lua e o Sol)?

9P. Quatro esferas, com massas  $m_1 = 400$  kg,  $m_2 = 350$  kg,  $m_3 = 2.000$  kg e  $m_4 = 500$  kg estão localizadas nas seguintes coordenadas: (0, 50 cm), (0, 0), (-80 cm, 0) e (40 cm, 0) respectivamente. Qual a força gravitacional resultante  $F_2$  sobre a esfera de 350 kg, devido às outras massas?

10P. Na Fig. 15-28, quatro esferas estão nos vértices de um quadrado de lado 2,0 m. Qual o módulo e a direção da força gravitacional resultante sobre uma esfera colocada no centro do quadrado com massa  $m_5 = 250$  kg?

11P. Na Fig. 15-29, duas esferas de massa  $m$  e uma terceira de massa  $M$  estão nos vértices de um triângulo equilátero, e uma quarta esfera de massa  $m_4$  está no baricentro do triângulo. Se a força gravitacional

resultante sobre a quarta esfera é nula, exprima a massa  $M$  em termos da massa  $m$ .

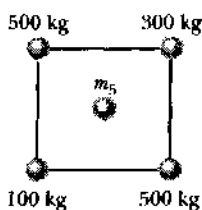


Fig. 15-28 Problema 10.

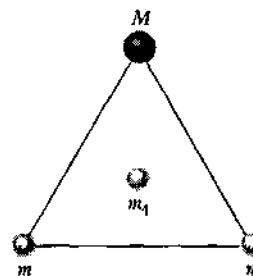


Fig. 15-29 Problema 11.

12P. Duas esferas de massas  $m_1 = 800$  kg e  $m_2 = 600$  kg estão separadas por 0,25 m. Qual a força gravitacional resultante (em módulo e direção) sobre uma esfera de 2,0 kg localizada a 0,20 m da primeira esfera e a 0,15 m da segunda, devido às massas de 800 kg e de 600 kg?

13P. As massas e as coordenadas dos centros de três esferas são as seguintes: 20 kg,  $x = 0,50$  m,  $y = 1,0$  m; 40 kg,  $x = -1,0$  m,  $y = -1,0$  m; 60 kg,  $x = 0$  m,  $y = -0,50$  m. Qual o módulo da força gravitacional resultante que estas esferas exercem sobre uma outra de 20 kg com centro na origem das coordenadas?

14P\*. Uma barra fina de massa  $M$  é deformada até adquirir a forma de um semicírculo de raio  $R$ , como na Fig. 15-30. (a) Qual é a força gravitacional (em módulo e direção) sobre uma partícula de massa  $m$  colocada em  $P$ , centro de curvatura da barra? (b) Qual seria a força gravitacional sobre  $m$ , se a barra tivesse a forma de um círculo completo?

Barra de massa  $M$

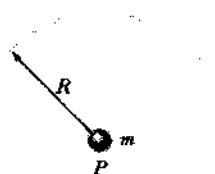


Fig. 15-30 Problema 14.

15P. O problema que se segue foi retirado do exame "Olimpico" de 1946, da Universidade Estatal de Moscou (veja Fig. 15-31). Fazemos uma cavidade esférica numa bola de chumbo de raio  $R$ , de tal modo que sua superfície toca o exterior da esfera de chumbo, passando também pelo seu centro. A massa da esfera, antes de ser feita a cavidade, era  $M$ . Qual a intensidade da força gravitacional com que a esfera côncava atrairá uma pequena esfera de massa  $m$ , que está a uma distância  $d$  do seu centro, medida ao longo da linha que passa pelos centros das esferas e da cavidade?

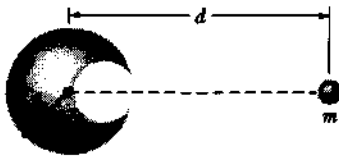


Fig. 15-31 Problema 15.

## Seção 15-4 Gravitação Próximo à Superfície da Terra

16E. Se o período de um pêndulo é exatamente 1,0 s no equador, qual será o seu período no pólo sul? Utilize a Fig. 15-7.

17E. (a) A partir dos valores da massa e do raio da Lua, dados no Apêndice C, calcule a aceleração gravitacional na superfície daquele satélite. (b) Qual será o período de um "pêndulo que bate o segundo" (período = 2,0 s na superfície da Terra) na superfície lunar?

18E. A que altura, medida a partir da superfície da Terra, a aceleração da gravidade será de  $4,9 \text{ m/s}^2$ ?

19E. Seu peso é 120 lb na calçada, do lado de fora do World Trade Center, em New York. Suponha que você vai agora para o alto de uma das torres, a 1.350 pés de altura. Ignorando a rotação da Terra, de quanto diminui o seu peso, pelo fato de estar um pouco mais distante do centro da Terra?

20E. Uma estrela de nêutrons típica tem massa igual à do Sol, mas um raio de apenas 10 km. (a) Qual a aceleração da gravidade na superfície de uma dessas estrelas? (b) Que velocidade adquire um objeto largado em queda livre, a partir do repouso, próximo à superfície da estrela, depois de cair 1 m? (Suponha que a estrela não gire.)

21E. Um objeto em repouso sobre o equador da Terra está acelerado (a) na direção do centro da Terra, visto que ela gira. (b) na direção do Sol por causa do movimento da Terra em torno dele, numa órbita quase circular e (c) na direção do centro da nossa galáxia. O período orbital do Sol em torno do centro da galáxia é  $2,5 \times 10^8$  anos, e a distância do Sol a esse centro é  $2,2 \times 10^{20}$  m. Calcule as três acelerações mencionadas acima, em termos de  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

22E. (a) Qual será o peso de um objeto, que pesa 100 N na superfície da Terra, na superfície da Lua? (b) A que distância do centro da Terra, medida em raios terrestres, deve estar este mesmo objeto, para pesar o mesmo que na superfície da Lua?

23P. O fato de  $g$  variar de acordo com a localização sobre a superfície da Terra, despertou a atenção quando Jean Richer transportou um relógio de pêndulo de Paris até Caiena, na Guiana Francesa, em 1672, e notou que ele atrasava 2,5 minutos por dia. Se  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  em Paris, qual o seu valor em Caiena?

24P. (a) Queremos medir  $g$  deixando um objeto cair exatamente 10 m. Que erro percentual, na medida do tempo da queda, resultaria num erro de 0,1% no valor de  $g$ ? (b) Com que precisão você teria de medir (em segundos) o tempo que um pêndulo de 10 m de comprimento leva para efetuar 100 oscilações, para que o erro percentual em  $g$  fosse o mesmo do item (a)?

25P. A maior velocidade de rotação possível para um planeta é aquela em que a força gravitacional, exercida sobre a matéria no seu equador, é exatamente igual à força centrípeta necessária para manter esta matéria em rotação. (Por quê?) (a) Mostre que o período de rotação mínimo, correspondente a tais condições, é dado por

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

onde  $\rho$  é a densidade do planeta, que supomos ser homogêneo. (b) Calcule o período de rotação, considerando uma densidade igual a  $3,0 \text{ g/cm}^3$ , que é típica de muitos planetas, satélites e asteróides. Nunca foi encontrado um objeto astronômico com período de rotação menor que o determinado pela análise feita neste problema.

26P. Acredita-se que certas estrelas de nêutrons (que são extremamente densas) estejam girando a cerca de 1 rot/s. Se uma dessas estrelas tem um raio de 20 km, qual o menor valor de sua massa para que a matéria não escape de sua superfície em consequência da rotação?

27P. Na Fig. 15-32, duas massas idênticas  $m$  estão penduradas em cordas de comprimentos diversos numa balança, na superfície da Terra. As cordas têm massas desprezíveis e a diferença entre seus comprimentos é  $h$ . Suponha que a Terra é perfeitamente esférica com densidade  $\rho = 5,5 \text{ g/cm}^3$ . (a) Mostre que a diferença entre os pesos das duas massas, causada pela desigualdade nas distâncias ao centro da Terra, é  $8\pi G\rho m h/3$ . (b) Qual a diferença nos comprimentos das cordas que ocasionaria uma diferença nos pesos de uma parte em um milhão?

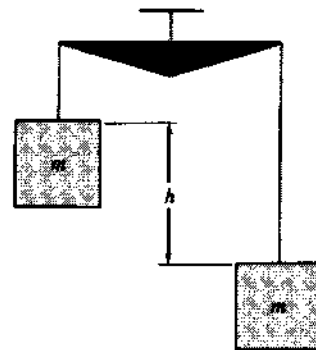


Fig. 15-32 Problema 27.

28P. Um cientista está medindo  $g$ , com precisão, num certo ponto do Oceano Índico (sobre o equador), observando as oscilações de um pêndulo construído com exatidão. Para diminuir os efeitos de possíveis perturbações, as medidas são feitas num submarino submerso. O cientista observa uma pequena diferença nos valores de  $g$ , dependendo do submarino estar se movendo para leste ou oeste. Em ambos os casos, a velocidade do submarino é de 16 km/h. Explique esta diferença e calcule o erro fracional  $\Delta g/g$ , para ambas as direções do movimento do submarino.

29P. Um corpo está suspenso numa balança de mola num navio que viaja ao longo do equador com velocidade  $v$ . (a) Mostre que a leitura da balança será muito próxima de  $W_0 (1 \pm 2 \omega v/g)$ , onde  $\omega$  é a velocidade angular da Terra e  $W_0$  é a leitura da balança, quando o navio está em repouso. (b) Explique o sinal de mais ou menos.

30P\*. Medidores muito sensíveis para a aceleração local da gravidade  $g$  podem ser usados para detectar a presença de rochas, próximo à superfície, de densidade consideravelmente maior ou menor do que a média da região considerada. Também se pode, com este método, descobrir cavernas subterrâneas e poços de minas abandonadas. (a) Mostre que a componente vertical de  $g$ , a uma distância  $x$  de um ponto diretamente acima do centro de uma caverna esférica (veja a Fig. 15-33), é menor do que aquela devido a uma distribuição uniforme de rochas, de densidade  $\rho$ , a diferença sendo

$$\Delta g = \frac{4\pi}{3} R^3 G\rho \frac{d}{(d^2 + x^2)^{3/2}}$$

onde  $R$  é o raio da caverna e  $d$ , a profundidade do seu centro. (b) Esses valores de  $\Delta g$ , chamados de *anomalias*, são em geral muito pequenos,

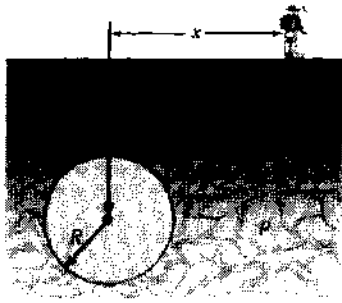


Fig. 15-33 Problema 30.

sendo expressos em miligals, onde  $1 \text{ gal} = 1 \text{ cm/s}^2$ . Suponha que uma equipe de prospecção geofísica, medindo a aceleração da gravidade ao longo de uma linha reta de 300 m de comprimento, verifica que  $\Delta g$  varia desde 10 miligals até um valor máximo de 14 miligals, no ponto médio da linha reta. Supondo que o maior valor da anomalia foi medido diretamente sobre o centro de uma caverna esférica, que se sabia existir na região pesquisada, calcule o raio da caverna e a profundidade a que está o seu teto. A densidade das rochas na vizinhança é  $2.8 \text{ g/cm}^3$ . (c) Considere, agora, que a caverna, em vez de vazia, esteja completamente cheia de água. Que valores as medidas mencionadas no item (b) indicariam, agora, para o raio da caverna e a profundidade do seu teto?

**Seção 15-6 Gravitação no Interior da Terra**

**31E.** Duas cascas concêntricas de densidade uniforme têm massas  $M_1$  e  $M_2$  e estão distribuídas como mostra a Fig. 15-34. Calcule a força gravitacional sobre uma partícula de massa  $m$ , quando ela está em (a)  $r = a$ , (b)  $r = b$  e (c)  $r = c$ . A coordenada  $r$  é medida a partir do centro comum das cascas.

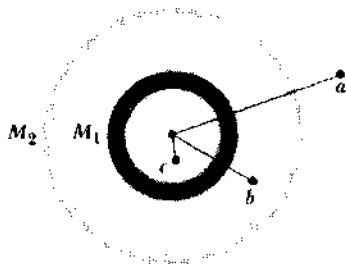


Fig. 15-34 Exercício 31.

**32E.** Se um objeto for largado no túnel mencionado no Exemplo 15-6, com que velocidade passará pelo centro da Terra?

**33E.** Mostre que, se efetuarmos uma medida de  $g$  no fundo de um poço de uma mina, cuja profundidade é  $D$ , encontraremos

$$g = g_s \left( 1 - \frac{D}{R} \right),$$

onde  $g_s$  é aceleração da gravidade na superfície. Imagine que a Terra é uma esfera uniforme de raio  $R$ .

**34P.** A Fig. 15-35 mostra, em corte, o interior da Terra (a figura não está em escala). Longe de ser uniforme, a Terra está dividida em três regiões: uma *crosta* exterior, o *manto* e um *núcleo* interior. A figura mostra as dimensões radiais destas regiões, bem como as massas contidas em cada uma. A massa total da Terra é  $5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$  e seu raio é 6.370 km. Supondo que a Terra é esférica e ignorando sua rotação, (a) calcule  $g$  na superfície. (b) Suponha que um poço (o *Moho*) é escavado

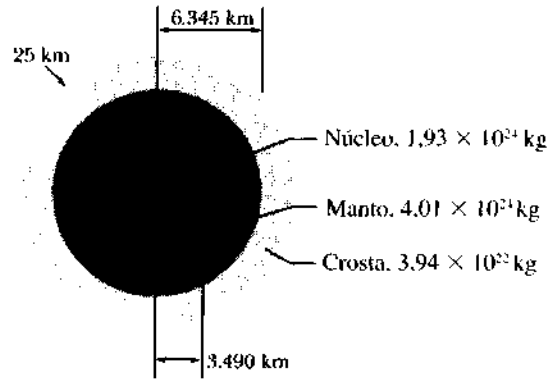
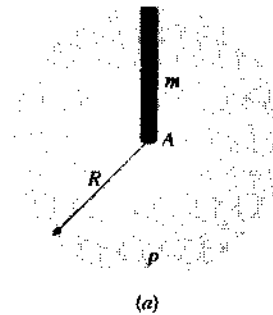


Fig. 15-35 Problema 34. Sem escala.

desde a superfície até a região que separa a crosta do manto, a 25 km de profundidade; qual o valor de  $g$  no fundo deste poço? (c) Considerando que a Terra é uma esfera uniforme com massa e raio iguais aos da verdadeira Terra, qual seria o valor de  $g$  a uma profundidade de 25 km? (Veja o Exercício 33.) (Medidas precisas de  $g$  funcionam como sondas bastante sensíveis para estudar a estrutura do interior da Terra, embora os resultados possam ser mascarados por variações de densidade locais.)

**35P.** (a) A Fig. 15-36 mostra um objeto astronômico de densidade uniforme  $\rho$  e raio  $R$ . Mostre que a tensão de compressão  $S$  sobre a matéria próxima ao seu centro, devido à gravidade, é

$$S = \frac{3}{8} \pi G \rho^2 R^2.$$



(b)

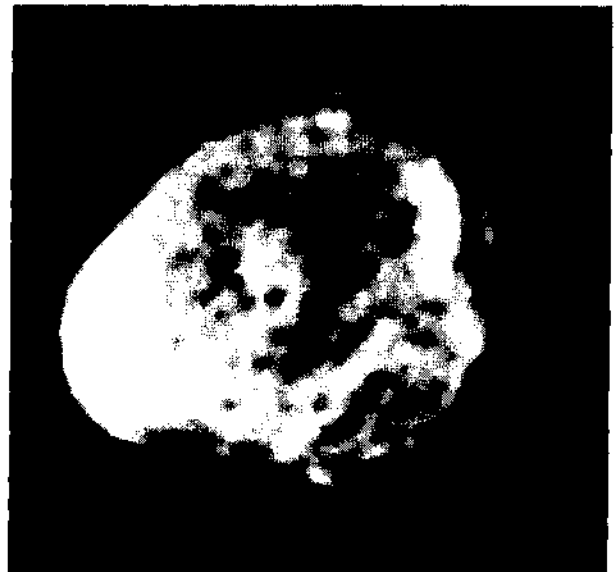


Fig. 15-36 Problema 35.



(Sugestão: Construa uma coluna estreita de matéria, com área de seção reta  $A$ , indo do centro do objeto até a sua superfície. O peso da coluna será  $mg_m$ , onde  $m$  é a massa do material contido na coluna e  $g_m$  é o valor de  $g$  no ponto médio entre o centro e a superfície do objeto.) (b) No nosso sistema solar, objetos (por exemplo, asteroídes, pequenos satélites naturais, cometas) com “diâmetros” menores que 600 km podem ter formas muito irregulares (veja a Fig. 15-36b, que mostra Hyperion, um pequeno satélite de Saturno), enquanto aqueles com diâmetros maiores são esféricos. Um objeto consegue manter um formato não esférico, somente se o material de que é feito for bastante resistente à compressão gravitacional. Calcule a intensidade da compressão causada pela rocha que constitui um asteroíde. Suponha que sua densidade é  $4.000 \text{ kg/m}^3$ . (c) Qual o maior “diâmetro” possível para um satélite não-esférico feito de concreto, cuja densidade vale  $\rho = 3.000 \text{ kg/m}^3$  (veja a Tabela 13-1).

**36P.** Para diminuir o congestionamento de tráfego entre duas cidades, Boston e Washington, por exemplo, alguns engenheiros propuseram a construção de um túnel ferroviário ao longo da corda (no sentido geométrico) que une as duas cidades (Fig. 15-37). Um trem, que não precisaria de locomotiva e nem de motores, partindo do repouso, cairia através da primeira metade do túnel e, então, subiria até a outra extremidade. Supondo que a Terra é uma esfera uniforme e ignorando o atrito e a resistência do ar, (a) mostre que a viagem entre as duas cidades é equivalente ao percurso da metade de um ciclo de um movimento harmônico simples, e (b) ache o tempo de viagem.

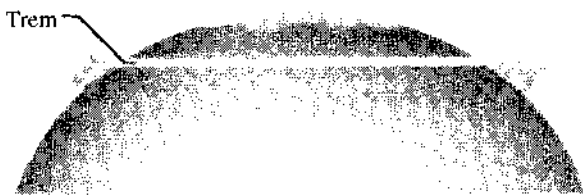


Fig. 15-37 Problema 36. Sem escala.

### Seção 15-7 Energia Potencial Gravitacional

**37E.** (a) Qual a energia potencial gravitacional do sistema de duas partículas do Exercício 1? Se você triplicar a separação entre as partículas, qual o trabalho realizado (b) pela força gravitacional entre as partículas e (c) por você?

**38E.** (a) No Problema 9, remova  $m_1$  e calcule a energia potencial gravitacional do sistema das três partículas restantes. (b) Se  $m_1$  é, então, recolocada na posição original, a energia potencial do sistema de quatro partículas, assim formada, é maior ou menor do que a do sistema do item (a)? (c) Em (a), o trabalho realizado por você é positivo ou negativo? (d) Quando você recoloca  $m_1$  na posição original no item (b), o trabalho que realiza é positivo ou negativo?

**39E.** No Problema 5, que razão  $m/M$  torna a energia potencial gravitacional do sistema a menor possível?

**40E.** Os diâmetros médios de Marte e da Terra são  $6.9 \times 10^3 \text{ km}$  e  $1.3 \times 10^4 \text{ km}$ , respectivamente. A massa de Marte é 0,11 vezes a massa da Terra. (a) Qual a razão entre as densidades médias de Marte e da Terra? (b) Qual o valor de  $g$  na superfície de Marte? (c) Qual a velocidade de escape em Marte?

**41E.** Uma nave espacial está passeando pela borda da nossa galáxia, a 80.000 anos-luz do seu centro. Qual a velocidade de escape da nave do campo gravitacional da galáxia? A massa da nossa galáxia é  $1.4 \times 10^{11}$  vezes a do Sol. Simplificando, suponha que a matéria que forma a galáxia está distribuída de modo uniforme num volume esférico.

**42E.** Calcule a quantidade de energia necessária para escapar (a) da Lua e (b) de Júpiter, relativa à energia necessária para escapar da Terra.

**43E.** Mostre que, para uma nave em repouso e a uma distância do Sol igual à distância média Terra-Sol, a velocidade inicial necessária para escapar da atração gravitacional do Sol é  $\sqrt{2}$  vezes a velocidade da Terra na sua órbita, suposta circular. (Este é um caso particular de um resultado geral, válido para órbitas circulares, ou seja,  $v_{\text{esc}} = \sqrt{2} v_{\text{orbital}}$ .)

**44E.** Uma partícula, de massa  $m$ , de poeira originária de um cometa está a uma distância  $R$  do centro da Terra e  $r$  do centro da Lua. Sendo  $M_T$  a massa da Terra e  $M_L$  a da Lua, qual a energia potencial gravitacional da partícula?

**45E.** Depois de “queimar” todo o seu combustível, uma estrela pode colapsar sob a influência de sua própria força gravitacional e tornar-se um buraco negro (estrela congelada, em russo). O raio da superfície da estrela,  $R_c$ , nestas condições, é tal que a remoção de uma partícula de massa  $m$ , dessa superfície até o infinito, implicaria a realização de um trabalho igual à energia de repouso da partícula,  $mc^2$ . Se a massa da estrela é  $M_c$ , mostre, usando a lei da gravitação de Newton, que  $R_c = GM_c/c^2$ . (O valor correto para este raio é, na realidade, o dobro do obtido. Só com a aplicação da teoria geral da relatividade de Einstein obteríamos o resultado correto.)

**46P.** As três esferas na Fig. 15-38, com massas  $m_1 = 800 \text{ g}$ ,  $m_2 = 100 \text{ g}$  e  $m_3 = 200 \text{ g}$ , estão com seus centros alinhados, sendo  $L = 12 \text{ cm}$  e  $d = 4,0 \text{ cm}$ . Você movimenta a esfera do meio até que a sua distância centro a centro de  $m_1$  seja  $d = 4,0 \text{ cm}$ . Qual o trabalho realizado sobre  $m_2$  (a) por você e (b) pela força gravitacional resultante sobre  $m_2$ , devido às outras esferas?

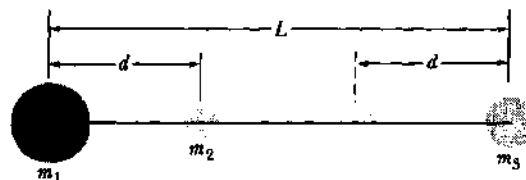


Fig. 15-38 Problema 46.

**47P.** Um foguete é acelerado até uma velocidade  $v = 2 \{gR_T\}^{1/2}$  próximo à superfície da Terra (aqui,  $R_T$  é o raio da Terra) e, então, orientado para cima. (a) Mostre que ele escapará da Terra. (b) Mostre que a sua velocidade, quando estiver muito distante da Terra, será  $v = [2gR_T]^{1/2}$ .

**48P.** (a) Qual é a velocidade de escape num asteroíde esférico cujo raio tem 500 km e cuja aceleração gravitacional na superfície, é de  $3,0 \text{ m/s}^2$ ? (b) A que distância da superfície irá uma partícula que deixe o asteroíde com uma velocidade radial de  $1.000 \text{ m/s}$ ? (c) Com que velocidade um objeto atingirá o asteroíde, se cair de uma distância de 1.000 km sobre a superfície.

**49P.** Um projétil é lançado da superfície da Terra, verticalmente, com uma velocidade inicial de  $10 \text{ km/s}$ . Desprezando a influência da atmosfera, que altura ele atingirá?

**50P.** Num sistema estelar binário, duas estrelas de massa  $3,0 \times 10^{30} \text{ kg}$ , cada uma, giram em torno do centro de massa do sistema num raio de  $1,0 \times 10^{11} \text{ m}$ . (a) Qual a velocidade angular comum às duas estrelas? (b) Se um meteorito passa pelo centro de massa do sistema, perpendicular ao plano da órbita das estrelas, que valor sua velocidade precisa exceder, naquele ponto, para ele escapar do sistema estelar rumo ao “infinito”?

**51P.** Duas estrelas de nêutrons estão separadas por uma distância de  $10^{10} \text{ m}$ . Ambas possuem massa de  $10^{30} \text{ kg}$  e raio de  $10^5 \text{ m}$ . Se estiverem ini-

cialmente em repouso uma em relação à outra, (a) com que rapidez estarão se movendo, quando sua separação tiver diminuído para a metade do valor inicial? (b) Qual a velocidade das duas estrelas, imediatamente antes de colidirem?

**52P.** Uma esfera de massa  $M$  e raio  $a$  tem uma cavidade concêntrica de raio  $b$ , como é mostrado na Fig. 15-39. (a) Faça um esboço do gráfico da força gravitacional  $F$  exercida pela esfera sobre uma partícula de massa  $m$ , a uma distância  $r$  do centro da esfera, em função de  $r$ , entre os limites  $0 \leq r \leq \infty$ . Considere, em particular, os pontos  $r = 0$ ,  $b$ ,  $a$  e  $\infty$ . (b) Esboce também o gráfico da energia potencial gravitacional  $U(r)$  do sistema.

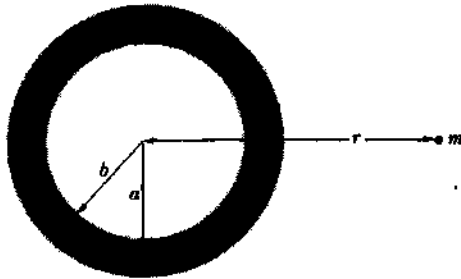


Fig. 15-39 Problema 52.

**53P\*.** Vários planetas (Júpiter, Saturno, Urano) possuem anéis quase circulares à sua volta, talvez compostos por material que não conseguiu formar um satélite. Além disso, muitas galáxias contêm estruturas em forma de anel. Considere um anel homogêneo de massa  $M$  e raio  $R$ . (a) Qual a intensidade da atração gravitacional que ele exerce sobre uma partícula de massa  $m$  que está a uma distância  $x$  do seu centro, medida ao longo do seu eixo? Veja a Fig. 15-40. (b) Suponha que a partícula se movimentava a partir do repouso, sob a influência gravitacional do anel. Calcule a velocidade com que ela passa pelo centro do anel.

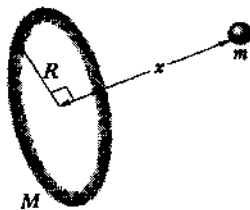


Fig. 15-40 Problema 53.

**54P\*.** A força gravitacional entre duas partículas de massas  $m$  e  $M$ , inicialmente em repouso e muito distantes uma da outra, faz com que elas se juntem. Mostre que, em qualquer instante, a velocidade relativa de qualquer uma das partículas em relação à outra é  $[2G(M+m)/d]^{1/2}$ , onde  $d$  é a distância entre elas neste instante. (Sugestão: Use as leis de conservação da energia e do momento linear.)

**Seção 15-8 Planetas e Satélites: Leis de Kepler**

**55E.** A distância média de Marte ao Sol é 1,52 a da Terra ao Sol. Usando a lei dos períodos de Kepler, calcule o número de anos necessários para Marte completar uma revolução em torno do Sol; compare sua resposta com o valor dado no Apêndice C.

**56E.** Um dos satélites de Marte, Fobos, está numa órbita circular de raio  $9,4 \times 10^6$  m com um período de 7 h e 39 min. A partir destes dados, calcule a massa de Marte.

**57E.** Determine a massa da Terra, a partir do período  $T = 27,3$  dias e raio  $r$  da órbita da Lua em torno da Terra, que vale  $3,82 \times 10^5$  km. Suponha o centro da órbita da Lua coincidente com o da Terra, em vez de com o centro de massa do sistema Terra-Lua.

**58E.** O Sol, cuja massa vale  $2,0 \times 10^{30}$  kg, orbita em torno do centro da Via Láctea, que está a uma distância de  $2,2 \times 10^{20}$  m, com período de  $2,5 \times 10^8$  anos. Supondo que todas as estrelas da galáxia têm massa igual à do Sol e que estão distribuídas de maneira uniforme num volume esférico em torno do centro da galáxia e, além disso, que o Sol está praticamente na superfície desta esfera, faça uma estimativa grosseira do número de estrelas na galáxia.

**59E.** Colocamos um satélite em órbita circular com raio igual à metade do raio da órbita da Lua. Qual é o período de revolução, medido em meses lunares? (Um mês lunar é o período de revolução da Lua.)

**60E.** (a) Qual a velocidade linear que um satélite da Terra deve ter para ficar em órbita circular a uma altitude de 160 km? (b) Qual é o período de revolução desse satélite?

**61E.** Existem muitos asteróides em órbita em torno do Sol, entre Marte e Júpiter. No entanto, muitos "asteróides Apolo", tendo diâmetros em torno de 30 km, se movem em órbitas que cortam a da Terra. Uma dessas órbitas é mostrada em escala na Fig. 15-41. Medindo diretamente na figura, deduza o período do asteróide em anos.

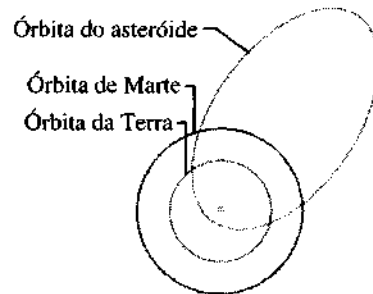


Fig. 15-41 Exercício 61.

**62E.** Um satélite da Terra está numa órbita elíptica com apogeu de 360 km e perigeu de 180 km. Calcule (a) o semi-eixo maior e (b) a excentricidade da órbita. (Sugestão: Veja o Exemplo 15-10.)

**63E.** O centro do Sol está em um dos focos da órbita da Terra. A que distância deste está o outro foco? Expresse sua resposta em termos do raio do Sol,  $6,96 \times 10^8$  m. A excentricidade da órbita da Terra é 0,0167 e para o semi-eixo maior podemos usar o valor  $1,50 \times 10^{11}$  m. Veja a Fig. 15-16.

**64E.** (a) Usando a terceira lei de Kepler (Eq. 15-34), expresse a constante gravitacional  $G$  usando a unidade astronômica, AU, como unidade de comprimento, massa solar,  $M_s$ , como unidade de massa, e o ano como unidade de tempo. (Uma unidade astronômica =  $1 \text{ AU} = 1,496 \times 10^{11}$  m. A massa solar =  $1 M_s = 1,99 \times 10^{30}$  kg. Um ano =  $1 \text{ a} = 3,156 \times 10^7$  s.) (b) Qual a forma da terceira lei de Kepler, se usarmos essas unidades?

**65E.** Um satélite é colocado numa órbita equatorial de tal maneira que permanece estacionário para um observador terrestre. (Estamos levando em conta a rotação da Terra.) Qual deve ser a altitude desta órbita (comumente chamada de *órbita geoestacionária*)?

**66E.** Devido a um erro grosseiro, o satélite do exercício 65 é colocado em órbita de modo que se desloca em direção oposta à rotação da Terra. Com que frequência este satélite na "contramão" passa sobre um ponto fixo do equador?

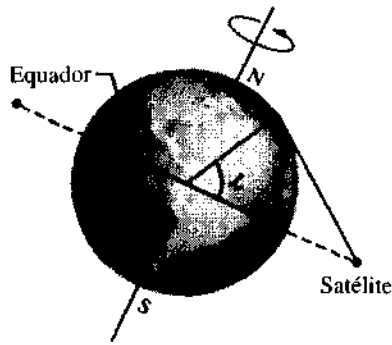


Fig. 15-42 Exercício 67.

**67E.** Qual é a maior latitude  $L$  "visível" para o satélite do exercício 65? Veja Fig. 15-42.

**68P.** Suponha que o satélite do exercício 65 está em órbita na longitude correspondente a Chicago. Você está nesta cidade (latitude  $47,5^\circ$ ) e quer detectar os sinais que o satélite emite. Em que direção você deve apontar a antena?

**69P.** Em 1610, Galileu usou o telescópio que havia construído para descobrir as quatro maiores luas de Júpiter. Os raios médios das órbitas  $a$  e os períodos  $T$  para estas luas são

Nome	$a$ ( $10^8$ m)	$T$ (dias)
Io	4,22	1,77
Europa	6,71	3,55
Ganimedes	10,7	7,16
Calisto	18,8	16,7

(a) Trace o gráfico de  $\log a$  (eixo dos  $y$ ) em função de  $\log T$  (eixo dos  $x$ ) constatando que se obtém uma linha reta. (b) Meça a inclinação desta linha reta e compare com o valor obtido a partir da terceira lei de Kepler. (c) A partir do valor de  $y$  correspondente ao ponto de interseção desta reta com o eixo dos  $y$ , calcule a massa de Júpiter. (Nota: Se quiser evitar o uso de logaritmos, use papel log-log.)

**70P.** Um sistema estelar binário é formado por duas estrelas, cada uma com massa igual à do Sol, orbitando em torno do seu centro de massa. A distância entre elas é igual à Terra-Sol. Qual o período da órbita, medido em anos?

**71P.** Mostre como, supondo a órbita circular e usando a terceira lei de Kepler, Newton poderia deduzir que a força que mantém a Lua em sua órbita depende do inverso do quadrado da distância ao centro da Terra.

**72P.** Um sistema particular de três estrelas é formado por duas estrelas, cada uma de massa  $m$ , em órbita ao redor de uma estrela central de massa  $M$ , ocupando a mesma órbita circular de raio  $r$ . As duas estrelas estão, sempre, uma em cada extremo de um diâmetro da órbita (Fig. 15-43). Deduza uma expressão para o período orbital das estrelas menores.

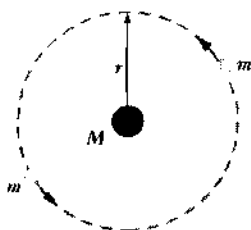


Fig. 15-43 Problema 72.

**73P.** (a) Para escapar do Sol, que velocidade deve ter um objeto que está a uma distância  $R$  do seu centro, sendo  $R$  o raio da órbita da Terra (não considere a influência dos planetas sobre o objeto). (b) Se um objeto já tem uma velocidade igual à orbital da Terra, de quanto deve aumentar sua velocidade para que ele escape, como no item (a)? (c) Imagine um objeto sendo lançado da Terra na direção do seu movimento orbital. Qual a velocidade de lançamento para que ele atinja a velocidade de escape calculada, quando estiver bem longe da Terra, mas ainda a uma distância  $R$ , aproximadamente, do Sol?

**74P\*.** Três estrelas idênticas, de massa  $M$ , estão nos vértices de um triângulo equilátero de lado  $L$ . Qual deve ser sua velocidade, se elas se movem numa órbita circular que circunscreve o triângulo, sob a influência somente de sua interação gravitacional mútua e mantendo suas posições relativas nos vértices do triângulo?

**75P\*.** Um satélite é colocado em uma órbita circular para ficar estacionário sobre um certo ponto da superfície da Terra. No entanto, por um erro de manobra, é colocado numa órbita cujo raio é 1 km maior que o da correta. Com que velocidade e em que direção se move o ponto da superfície da Terra, diretamente abaixo do satélite?

### Seção 15-9 Órbitas de Satélites e Energia

**76E.** Um asteroide, com massa  $2,0 \times 10^{-4}$  vezes a massa da Terra, está numa órbita circular em torno do Sol, a uma distância igual a duas vezes à distância da Terra ao Sol. (a) Calcule o período orbital do asteroide em anos. (b) Qual a razão entre a energia cinética do asteroide e a da Terra?

**77E.** Considere dois satélites,  $A$  e  $B$ , ambos com massa  $m$  e na mesma órbita circular de raio  $r$ , em torno da Terra (que tem massa  $M_T$ ), mas em sentidos opostos, ou seja, em rota de colisão (Fig. 15-44). (a) Ache a energia mecânica total do sistema formado pela Terra e os dois satélites,  $E_A + E_B$ , antes da colisão, em função de  $G$ ,  $M_T$ ,  $m$  e  $r$ . (b) Se a colisão for completamente inelástica, de modo que os dois satélites fiquem aglutinados num monte de sucata de massa  $= 2m$ , ache a energia mecânica total, imediatamente após a colisão. (c) Descreva o movimento subsequente do monte de sucata.

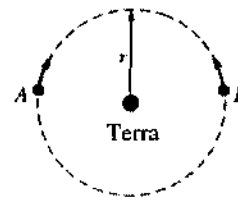


Fig. 15-44 Exercício 77.

**78P.** Pretendemos colocar dois satélites,  $A$  e  $B$ , ambos com massa  $m$ , em órbitas circulares em torno da Terra. O satélite  $A$  deve ficar numa órbita de altitude igual a 4.000 mi, enquanto o  $B$  numa de 12.000 mi. O raio da Terra,  $R_T$ , vale 4.000 mi. (a) Quando os dois satélites estão em órbita, qual a razão entre as suas energias potenciais? (b) E entre suas energias cinéticas? (c) Qual dos satélites tem maior energia total, se ambos têm massa igual a 1,0 slug? De quanto diferem essas energias?

**79P.** Usando a conservação da energia e a Eq. 15-47, mostre que, para um objeto em órbita elíptica em torno de um planeta de massa  $M$ , sua distância ao centro do planeta,  $r$ , e sua velocidade  $v$  estão relacionadas por

$$v^2 = GM \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

**80P.** Use o resultado do Problema 79 e os dados fornecidos no Exemplo 15-10 para calcular (a) a velocidade  $v_p$  do cometa de Halley no peri-

élio e (b) sua velocidade  $v_p$  no afélio. (c) Usando a conservação do momento angular em relação ao Sol, ache a razão entre as distâncias do cometa ao Sol, no afélio e no periélio,  $R_p$  e  $R_a$ , em função das velocidades nesses dois pontos.

**81P.** (a) O que gasta mais energia, levar um satélite da superfície da Terra até uma altitude de 1.000 mi, ou fazê-lo entrar em órbita circular, uma vez que ele já esteja a essa altitude? (Raio da Terra, 4.000 mi.) (b) E a 2.000 mi de altitude? (c) E a 3.000 mi?

**82P.** Para destruir um satélite em órbita da Terra, podemos colocar na órbita do satélite, mas com velocidade em sentido contrário, um grupo de pequenas pastilhas rígidas. Considere um satélite a uma altitude de 500 km, em órbita circular, colidindo com uma pastilha de massa 4,0 g. (a) Qual é a energia cinética da pastilha no referencial do satélite? (b) Ache a razão entre esta energia cinética e a de uma bala de 4,0 g que sai de um rifle com uma velocidade igual a 950 m/s.

**83P.** Considere um satélite em órbita circular em torno da Terra. De que maneira dependem do raio da órbita as seguintes quantidades relativas

a ele: (a) período, (b) energia cinética, (c) momento angular e (d) velocidade.

**84P.** Calcule (a) a velocidade e (b) o período de um satélite de 220 kg numa órbita, aproximadamente circular, em torno da Terra, a uma altitude de 640 km. Suponha, agora, que o satélite está perdendo energia a uma taxa média de  $1,4 \times 10^5$  J, em cada volta completa em torno da Terra. Tomando como aproximação razoável que a órbita passe a ser um "círculo cujo raio diminui lentamente", determine quais são, para este satélite, (c) a altitude, (d) a velocidade e (e) o período, quando o satélite completar 1.500 voltas. (f) Qual o módulo da força resistente média sobre o satélite? (g) O momento angular deste sistema em torno do centro da Terra é conservado?

**85P.** A órbita da Terra em torno do Sol é quase uma circunferência: a menor e a maior distâncias entre os astros são, respectivamente,  $1,47 \times 10^8$  km e  $1,52 \times 10^8$  km. Determine as variações correspondentes, quando a Terra passa de uma distância à outra (a) na energia total, (b) na energia potencial, (c) na energia cinética e (d) na velocidade orbital. (Sugestão: Use as leis de conservação da energia e do momento angular.)

## PROBLEMAS ADICIONAIS

**86.** Um projétil é lançado da superfície de um planeta de massa  $M$  e raio  $R$ ; a velocidade de lançamento é  $(GM/R)^{1/2}$ . Usando a conservação da energia, determine a distância máxima do centro do planeta alcançada pelo projétil. Expresse o resultado em termos de  $R$ .

**87.** Um planeta hipotético, chamado Zero, tem massa de  $5,0 \times 10^{23}$  kg, raio igual a  $3,0 \times 10^6$  m e não possui atmosfera. Queremos lançar uma sonda espacial de 10 kg da superfície do planeta, verticalmente. (a) Se a energia inicial da sonda é  $5,0 \times 10^7$  J, qual será a sua energia cinética quando estiver a  $4,0 \times 10^6$  m do centro de Zero? (b) Se quisermos que a sonda alcance uma distância máxima do centro de Zero igual a  $8,0 \times 10^6$  m, qual deverá ser a sua energia cinética no instante do lançamento?

**88.** Um satélite está em órbita em torno de um planeta de massa desconhecida, descrevendo um círculo de raio  $2,0 \times 10^7$  m. O módulo da força gravitacional exercida pelo planeta sobre o satélite é 80 N. (a) Qual a energia cinética do satélite na órbita? (b) Qual a nova força gravitacional (em módulo) sobre o satélite, se o raio da órbita aumentar de um fator  $3,0 \times 10^7$  m?

**89.** Três massas iguais a 5,0 kg estão no plano  $xy$ , como mostra a Fig. 15-45. Qual a magnitude da força gravitacional resultante sobre a massa na origem, devido às outras duas massas?

**90.** Uma partícula de 20 kg está localizada na origem e outra de 10 kg sobre o eixo dos  $x$  em  $x = 0,80$  m. A partícula de 10 kg é largada

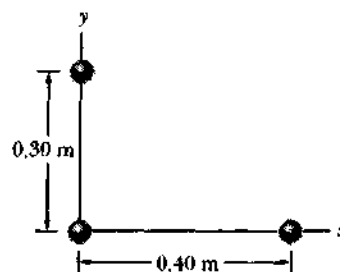


Fig. 15-45 Problema 89.

do repouso, enquanto a de 20 kg permanece na origem. (a) Qual é a energia potencial gravitacional do sistema, imediatamente após a massa de 10 kg ser largada? (b) Qual é a energia cinética da massa de 10 kg, depois de ter-se deslocado 0,20 m na direção da massa de 20 kg?

**91.** Uma esfera de densidade uniforme tem massa igual a  $1,0 \times 10^4$  kg e raio igual a 1,0 m. Qual é a força gravitacional devido à esfera sobre uma partícula de massa  $m$ , a uma distância de (a) 1,5 m e (b) 0,50 m do centro da esfera? (c) Escreva uma expressão geral para a força gravitacional sobre  $m$ , a uma distância  $r \leq 1,0$  m do centro da esfera.

# Física na Ausência de Peso

SALLY RIDE

UNIVERSIDADE DA CALIFÓRNIA, SAN DIEGO

## Sentindo o Puxão da Gravidade

As histórias que os jornais publicam dizendo que os "astronautas estão livres da atração da gravidade da Terra" levaram uma professora do segundo grau a reclamar, dizendo: "os vôos espaciais dificultam a vida de uma professora de ciência". Estava querendo dizer que termos como "zero g" são confusos e que muitas pessoas interpretam esta expressão como querendo dizer "ausência de gravidade". Naturalmente, o ônibus espacial não está livre da influência da gravidade. De fato, é a gravidade que mantém a espaçonave e tudo dentro dela em órbita ao redor da Terra. A confusão se origina do fato de que os astronautas estão "sem peso" — eles flutuariam sobre qualquer balança colocada no piso. Esta ausência de peso não é devido à "falta de gravidade", e sim ao fato do ônibus espacial com tudo que contém (inclusive os astronautas e as balanças) estar em queda livre. Um astronauta, tentando se pesar numa balança dentro do ônibus espacial, é análogo a um cientista na Terra, tentando fazer a mesma coisa dentro do clássico (embora raro, afortunadamente) elevador em queda livre.

Uma espaçonave em órbita "cai" no sentido em que se desvia na direção da Terra, da

linha reta que seguiria no espaço interplanetário, se não houvesse forças atuando sobre ela. O ônibus espacial não cai na Terra porque tem velocidade horizontal suficiente para viajar "além do horizonte". À medida que ele cai, a superfície da Terra se curva, afastando-se dele. Teoricamente, é possível colocar um satélite (ou uma pedra) em órbita somente a uns poucos metros da superfície da Terra, mas sua energia seria rapidamente dissipada pela resistência do ar (e provavelmente também por edifícios e montanhas). Para permanecer em órbita por mais que umas poucas voltas, uma espaçonave deve receber energia suficiente para entrar em órbita bem acima da atmosfera da Terra.

O ônibus espacial é lançado para a órbita pelo empuxo devido a dois foguetes de combustível sólido e a três turbinas de combustível líquido; veja Fig. 1. Os foguetes de combustível sólido funcionam durante os primeiros 2 minutos do lançamento e as turbinas durante 8 minutos e meio. O empuxo gerado é suficiente para colocar o ônibus numa órbita elíptica de baixa altitude em torno da Terra (a órbita varia de vôo para vôo). No apogeu desta órbita (quando a nave já está do outro lado do



Fig. 1 O ônibus espacial é colocado em órbita por cinco foguetes.

## LEITURA COMPLEMENTAR 2



Sally Ride é uma astronauta da NASA especializada em tripular ônibus espaciais. Obteve um B.S. em Física e um B.A. em Inglês na Universidade de Stanford, e um Ph.D. em Física também em Stanford, em 1978. Foi, então, selecionada para o Corpo de Astronautas. Já viajou pelo espaço duas vezes: na sétima missão do ônibus espacial (STS-7, o segundo vôo do Challenger, realizada em junho de 1983) e na décima terceira missão do ônibus (STS-41G, realizada em outubro de 1984). Em 1986, foi designada para a comissão presidencial que investigou o acidente com o Challenger. Desde o final das investigações, tem trabalhado como assistente especial do administrador da NASA, ajudando a desenvolver os planos de longo prazo para a exploração espacial. Atualmente, é também professora de Física e diretora do California Space Institute na Universidade da Califórnia, em San Diego.

mundo, em relação à plataforma de lançamento), os pequenos motores orbitais da nave funcionam por um par de minutos, dando energia adicional suficiente para tornar a órbita do ônibus circular. Estes motores orbitais são desligados quando a velocidade correta é atingida. Para manter a nave em órbita, não são necessários motores. A gravidade se encarrega de tudo. Numa órbita circular típica, 400 km acima da superfície da Terra, a velocidade do ônibus espacial é 8 km/s e ele necessita de apenas 90 min para dar uma volta em torno da Terra.

Uma vez alcançada a velocidade necessária para entrar em órbita, a gravidade não acelera os objetos na direção do "piso" da nave; ela acelera os objetos e o piso. Tudo dentro do ônibus está na mesma órbita, todos caem juntos na direção da Terra. O fato de caírem juntos é outro aspecto do princípio da equivalência, demonstrado pela primeira vez por Galileu. Ele mostrou que (desprezando a resistência do ar) um objeto leve e um pesado atingirão o solo ao mesmo tempo, se largados simultaneamente da mesma altura. Isto foi comprovado muitas vezes — com frequência e precisão, mas não tão dramaticamente como pelo astronauta Dave Scott da *Apolo 15*. Ele levou um martelo e uma pena para a Lua (onde não há atmosfera. Logo, não há resistência do ar) e deixou-os cair da mesma altura, largando-os simultaneamente. A pena e o martelo atingiram o solo lunar ao mesmo tempo. O princípio da equivalência é verificado em todos os vôos do ônibus espacial: como tudo dentro dele — astronautas, lápis, satélites, agendas, meias — cai com a mesma aceleração, não havendo aceleração relativa entre os objetos. Eles "flutuam".

### Efeitos Fisiológicos da Gravidade

Existem também efeitos fisiológicos associados à ausência de peso. O corpo humano evoluiu na Terra; sofre mudanças quando é colocado neste novo ambiente. Talvez o efeito mais visível seja o inchaço do rosto dos astrona-

tas. Na Terra, a gravidade está continuamente puxando os fluidos do corpo na direção dos pés. Já em órbita, a distribuição dos fluidos é diferente e eles tendem a se deslocar para a parte superior do corpo.

Outro efeito interessante é que os astronautas crescem cerca de 5 cm, enquanto estão em órbita. Não havendo forças para baixo, sobre a espinha, os discos esponjosos da coluna vertebral não sofrem mais compressão. Como os discos relaxam, os astronautas "crescem". O efeito não é permanente e eles voltam à sua altura "normal" quando retornam à Terra.

Num ambiente sem peso, o sistema cardiovascular não precisa se esforçar muito para bombear o sangue pelo corpo. Fica mais fácil para o sangue retornar das pernas, ou ir para o cérebro e, assim, os músculos cardiovasculares perdem o condicionamento. Enquanto o astronauta está em órbita, isto não é problema, mas, quando volta à Terra, o sistema cardiovascular tem de estar em condições de funcionar sob a ação da gravidade. Se o astronauta ficou em órbita por um tempo pequeno (mais ou menos uma semana), isto não causa maiores transtornos; mas para vôos espaciais de longa duração este efeito é considerável. É preciso, por exemplo, pesquisar muito sobre isto, antes de tentar vôos tripulados para Marte.

Não existe "direção privilegiada" num ambiente sem peso, não existe "de cabeça para baixo", é impossível distinguir fisiologicamente "em cima" e "em baixo". Os sensores que nos dão equilíbrio e orientação estão no ouvido interno e são sensíveis à gravidade da Terra. Quando a cabeça se inclina, pequenas estruturas em forma de cabelo se curvam e avisam ao cérebro que a cabeça não está na vertical. Na ausência de peso, estes sensores não registram diferenças de orientação nem existem outros efeitos fisiológicos familiares (tais como o sangue vindo para a cabeça) para indicar ao cérebro qual a orientação do corpo. As sensações do astronauta são as mesmas, quer seus pés estejam apontando na direção da Terra ou das estrelas.

### Adaptação ao Espaço Exterior

Os astronautas têm de adaptar a um ambiente que não pode ser simulado na Terra. Na ausência de peso, os objetos *parecem* obedecer leis físicas diferentes. Naturalmente, as leis são as mesmas, mas suas conseqüências são, algumas vezes, muito mais aparentes. Por exemplo, na Terra, as forças de atrito dificultam o estudo das leis de Newton. É difícil evitar o atrito, em geral, por causa da gravidade. Ela mantém os objetos em contato com o chão, a mesa ou o piso. Se não há gravidade, fica fácil evitar muitos efeitos do atrito. A falta de peso é uma grande melhoria em relação à mesa de ar. De fato, um astronauta nestas condições pode parecer um componente involuntário de um laboratório de física elementar. As leis do movimento de Newton ficam muito mais reais... e é preciso algum tempo para se acostumar a isto. Uma pessoa em repouso no meio da cabine, sem poder tocar o piso, o teto ou qualquer das paredes, permanecerá parada — imóvel no meio da cabine — até que um amigo o ajude fornecendo uma força externa. Um amendoim posto em movimento continuará em movimento até que atinja uma parede, o teto ou a boca de alguém. Um pequeno toque no ombro pode dar a uma pessoa impulso suficiente para atravessar toda a nave.

Os seres humanos aprenderam a lidar com a lei da ação e reação na Terra, onde estão presos ao chão. Quando você puxa uma gaveta, sem perceber pressiona o piso. Quando isto é feito em órbita, o resultado é frustrante, mas previsível; veja a Fig. 2. A gaveta não abre, mas o astronauta se move na direção dela. Se o astronauta tenta usar uma chave de fenda para apertar um parafuso, o resultado será um astronauta girando e não o parafuso. Nos dois casos o astronauta deve se "ancorar" para conseguir seu objetivo.

Os efeitos da tensão superficial são muito evidentes na Terra: bolhas de sabão se formam, gotas d'água se penduram em torneiras mal fechadas e meniscos se formam em colunas de água que se elevam em tubos de vidro. A tensão superficial resulta de forças intermoleculares. As moléculas num líquido se atraem, de tal modo, que aquelas que estão na superfície sentem uma pequena força resultante que as prendem ao líquido. Como analogia, se um líquido entra em contato com um sólido, as moléculas do líquido sentirão uma pequena atração pelas da superfície do sólido.

A tensão superficial tenta minimizar a relação superfície-volume de um líquido. Num ambiente com a ausência de peso isto fica evidente, todos os líquidos tendendo a tomar a forma esférica. Na Terra isto não é tão óbvio, o leite derramado fica numa poça no chão, na ausência de peso, o leite não se espalha pelo chão; forma uma esfera flutuante no meio da cabine.

As forças residuais entre as moléculas, na interface de um sólido com um líquido, podem fazer o líquido "apegar-se" ao sólido. Por causa da tensão superficial, é possível alimentar-se no espaço de uma maneira quase normal. Os astronautas comem em caixas de papelão e usam colheres para levar a comida até a boca. O truque é naturalmente usar comida "pegajosa". A maior parte da comida é desidratada e

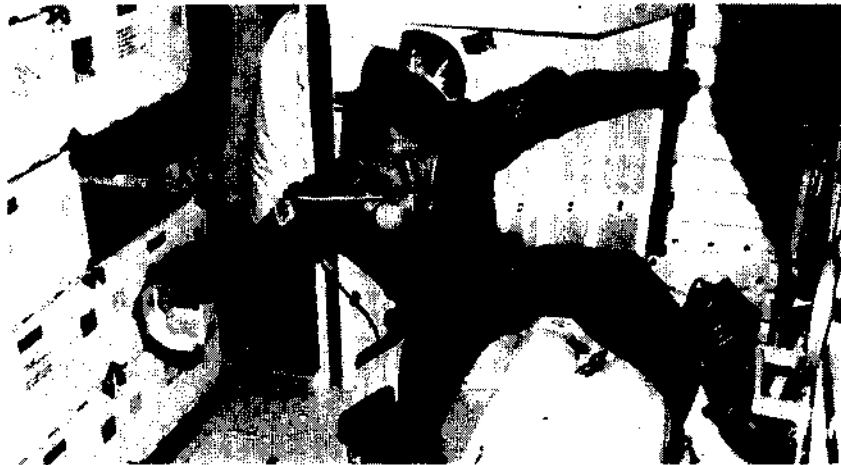


Fig. 2 Mesmo para efetuar as operações mais simples, um astronauta precisa estar fixado a algum ponto.

embalada a vácuo em caixas plásticas com tampas finas. Os astronautas reidratam a comida, enfiando a agulha de uma seringa com água na tampa e injetando a água. Todas essas comidas (por exemplo, macarrão com queijo, coquetel de camarão, sopa de tomate) ficam parcialmente líquidas, quando reidratadas e a tensão superficial fará com que fiquem dentro da embalagem — ou na colher. Os astronautas podem abrir uma caixa de sopa e tomá-la com uma colher. Neste caso, uma diferença conveniente é que, se deixarmos a colher “cair” ou a inclinarmos, a sopa não derramará.

A tensão superficial mantém a comida desidratada nas colheres, mas também ajuda as bebidas a escaparem de suas embalagens. Se um canudo plástico é usado para beber um líquido numa caixa, as moléculas do líquido sentirão alguma atração pelas moléculas do canudo. O efeito é intenso o suficiente, na ausência do peso, para que o líquido se acumule num feixe fino dentro do canudo e forme uma gran-

de gota — uma esfera — na sua extremidade. Por isso, os canudos usados a bordo do ônibus espacial têm pequenas pinças nas extremidades para mantê-los quase fechados nesses pontos e impedir que o líquido escape.

Em órbita, uma coluna de líquido não tem peso; não há pressão hidrostática e, logo, também não há empuxo ou sedimentação. Uma rolha não flutuará, uma bolha não se deslocará para a superfície de um líquido (significando que o gás permanecerá nas bebidas gasosas, fazendo com que não fiquem muito agradáveis) e não aparecerá uma camada de chocolate no fundo de um copo de chocolate com leite.

O fato de o material mais denso afundar e o menos denso se elevar também produz a transmissão de calor por convecção. Na Terra, isto ocorre quando uma parte de um líquido ou gás é aquecida ou resfriada. Uma bolha aquecida se expande, ficando menos densa e logo (na Terra) sobe; uma bolha resfriada fica menos densa e cai. Este fenômeno não ocorre quan-

do há falta de peso. O ar quente não sobe: ele se expande quando aquecido, mas fica onde está.

Uma experiência interessante (que, por motivos óbvios de segurança, não foi feita) seria acender um fósforo ou uma vela numa nave em órbita. À medida que o oxigênio do ar é queimado e fica rarefeito em volta da chama, o ar quente sobe e o ar frio desce para substituí-lo e trazer mais oxigênio para ser consumido (isto é o que ocorre na Terra). Como não há convecção numa nave em órbita, uma vela se apaga muito rapidamente.

Um mundo sem peso é diferente daquele que conhecemos. Alguns efeitos físicos comuns estão ausentes, enquanto outros ficam muito evidentes. Como você pode imaginar, é um ambiente pouco comum, mas também é um laboratório privilegiado, que nos dá a oportunidade de fazer experiências fundamentais em física, química e fisiologia, em condições totalmente novas.



*À medida que um mergulhador avança em profundidade na água, a força exercida por ela em seu corpo aumenta de forma considerável, mesmo para mergulhos relativamente rasos, como no fundo de uma piscina.*

*Entretanto, em 1975, usando equipamento de respiração com uma mistura especial de gases, William Rhodes emergiu de uma cápsula que estava a uns 330 m (1.000 pés) de profundidade no Golfo do México e, nadando em direção ao fundo, atingiu o recorde de cerca de 370 m (1.148 pés). Embora pareça estranho, um mergulhador amador praticando em uma piscina pode estar correndo maior perigo do que Rhodes, devido à força exercida pela água em seu corpo. Mergulhadores amadores às vezes morrem por subestimar tal fato. Qual é esse risco potencialmente mortal?*

## 16-1 Fluidos e o Mundo ao Nosso Redor

*Fluidos* — uma nomenclatura que inclui líquidos e gases — desempenham um papel central na nossa vida diária. Nós os respiramos e bebemos, um fluido vital circula no sistema cardiovascular humano. Existem o fluido dos oceanos, os da atmosfera e — nas profundezas da Terra — o magma fluido.

Num carro, existem fluidos nos pneus, no tanque de gasolina, no radiador, nas câmaras de combustão do motor, nos pistons, na bateria, no sistema de ar-condicionado, no reservatório do limpador de pára-brisa, no sistema de lubrificação e no sistema hidráulico. (*Hidráulico* quer dizer operado através de um líquido.) Da próxima vez que você examinar uma escavadeira, conte os cilindros hidráulicos que permitem à máquina executar o seu trabalho. Os grandes jatos utilizam também esses cilindros, em grande quantidade.

Usamos a energia cinética de um fluido em movimento em moinhos de vento, e a energia potencial gravitacional de um outro fluido em hidroelétricas. Com o tempo, os fluidos alteram a paisagem. Frequentemente, viajamos longas distâncias para apreciar fluidos em movimento. Talvez seja hora de ver o que a Física tem a dizer sobre eles.

## 16-2 O Que É um Fluido?

Um **fluido**, em contraste com um sólido, é uma substância que flui. Os fluidos se moldam a qualquer recipiente que os contenha. Isto acontece porque um fluido não oferece resistência a uma força que seja tangencial à sua superfície. (Usando a linguagem mais formal da Seção 13-6, um fluido é uma substância que não oferece resistência à tensão de cisalhamento. Pode, entretanto, exercer uma força na direção perpendicular à sua superfície.) Alguns materiais, tais como o piche, levam um longo tempo para se mol-



darem aos contornos do recipiente, mas o fazem; por esta razão, os classificamos como fluidos.

Você pode estar imaginando por que agrupamos líquidos e gases sob o mesmo nome: fluidos. Afinal (você poderia dizer), água no estado líquido é tão diferente do vapor quanto do gelo. Na verdade, não é. Gelo, como outros sólidos cristalinos, é constituído de átomos organizados em um arranjo tridimensional, razoavelmente rígido, chamado de rede cristalina. Nem no vapor d'água nem na água líquida, entretanto, existe qualquer arranjo de grande alcance; interações intermoleculares são restritas a moléculas vizinhas.

### 16-3 Densidade e Pressão

Quando discutimos corpos rígidos, nos preocupamos com ajuntamentos particulares de matéria, tais como blocos de madeira, bolas de sinuca ou barras de metal. As quantidades físicas úteis, em termos das quais expressamos as leis de Newton, eram *massa* e *força*. Falávamos tipicamente, por exemplo, de um bloco de 3,6 kg sob a ação de uma força de 25 N.

Com fluidos, estamos mais interessados em propriedades que variam ponto a ponto na extensão da substância, que em propriedades de amostras localizadas daquela substância. É mais útil, aqui, falar em **densidade** e **pressão**, que em massa e força.

#### Densidade

Para encontrar a densidade  $\rho$  de um fluido, em qualquer ponto, isolamos um pequeno elemento de volume  $\Delta V$  ao

**Tabela 16-1**  
Algumas Densidades

Material ou Objeto	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )
Espaço interestelar	10 <sup>-20</sup>
Melhor vácuo de laboratório	10 <sup>-17</sup>
Ar: 20°C e 1 atm	1,21
20°C e 50 atm	60,5
Espuma	1 × 10 <sup>2</sup>
Água: 20°C e 1 atm	0,998 × 10 <sup>3</sup>
20°C e 50 atm	1,000 × 10 <sup>3</sup>
Água do mar: 20°C e 1 atm	1,024 × 10 <sup>3</sup>
Sangue	1,060 × 10 <sup>3</sup>
Gelo	0,917 × 10 <sup>3</sup>
Ferro	7,9 × 10 <sup>3</sup>
Mercúrio	13,6 × 10 <sup>3</sup>
A Terra: média	5,5 × 10 <sup>3</sup>
núcleo	9,5 × 10 <sup>3</sup>
crosta	2,8 × 10 <sup>3</sup>
O Sol: média	1,4 × 10 <sup>3</sup>
núcleo	1,6 × 10 <sup>5</sup>
Estrela anã branca (núcleo)	10 <sup>10</sup>
Núcleo de urânio	3 × 10 <sup>17</sup>
Estrela de nêutrons (núcleo)	10 <sup>18</sup>
Buraco negro (de 1 massa solar*)	10 <sup>19</sup>

\*Na realidade, um objeto com massa igual à do Sol nunca se tornará um buraco negro. O limite inferior de massa, descoberto pelo físico indiano S. Chandrasekhar, Prêmio Nobel, é de 1,4 massa solar. (N. do R.)

redor daquele ponto e medimos a massa  $\Delta m$  do fluido contido no elemento. A **densidade** é, portanto,

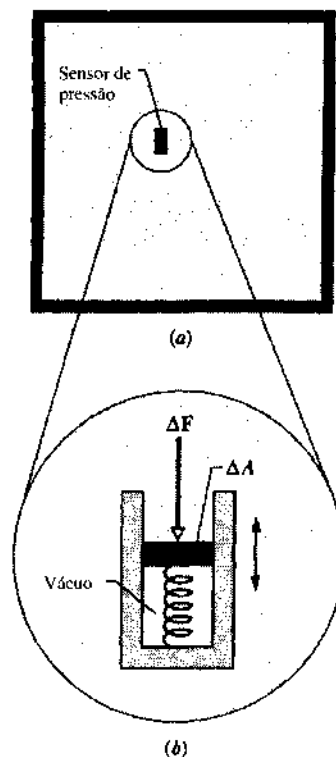
$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (16-1)$$

Teoricamente, a densidade em qualquer ponto de um fluido é o limite dessa razão, quando o elemento  $\Delta V$  tende a zero. Na prática, consideramos que uma amostra de fluido é grande comparada às dimensões do átomo e, assim, é "lisa" (com densidade uniforme), em vez de "granulosa", como seria, se pudéssemos observar os átomos. Esta suposição nos permite escrever a Eq. 16-1 na forma  $\rho = m/V$ , onde  $m$  e  $V$  são a massa e o volume da amostra.

Densidade é uma grandeza escalar; sua unidade no SI é o quilograma por metro cúbico. A Tabela 16-1 mostra a densidade de algumas substâncias e a densidade média de alguns objetos. Note que a densidade dos gases (veja Ar na tabela) varia consideravelmente com a pressão, mas a dos líquidos não (veja Água). Isso é, gases são facilmente compressíveis, líquidos não.

#### Pressão

Deixemos um pequeno aparelho sensor de pressão suspenso em um recipiente contendo um fluido, como mostra a Fig. 16-1a. O sensor (veja Fig. 16-1b) consiste em um pistom



**Fig. 16-1** (a) Um recipiente cheio de fluido contém um sensor de pressão, cujos detalhes são mostrados em (b). A pressão é medida pela posição relativa do pistom no sensor. Em qualquer localização, a pressão é independente da orientação do sensor.

de área  $\Delta A$  deslizando dentro de um cilindro bem encaixado e pressionando a mola. Um arranjo de leitura exterior nos permite observar de quanto a mola (calibrada) é comprimida e, assim, a magnitude da força  $\Delta F$  que age sobre o pistom. Definimos a **pressão** exercida pelo fluido sobre o pistom como

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (16-2)$$

Teoricamente, a pressão em cada ponto do fluido é dada pelo limite desta razão, quando a área  $\Delta A$  do pistom, centralizado naquele ponto, tende a zero. Entretanto, se a força sobre a área plana  $A$  é uniforme, podemos escrever a Eq. 16-2 como  $p = F/A$ .

Descobrimos, por experiência, que a pressão  $p$  definida pela Eq. 16-2 tem o mesmo valor em um dado ponto de um fluido em repouso, não importando como esteja orientado o sensor. Pressão é uma grandeza escalar, não tendo propriedades direcionais. É verdade que a força agindo no pistom do nosso sensor é um vetor, mas a Eq. 16-2 envolve apenas a *magnitude* da força, uma quantidade escalar.

A unidade de pressão no SI é o Newton por metro quadrado, que recebe o nome especial de **pascal** (Pa). Em países que usam o sistema métrico decimal, calibradores de pneus usam quilopascal como unidade de medida. O pascal é relacionado a outras unidades usuais (não do SI), como se segue:

$$1 \text{ atm} = 1,01 \times 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ torr} = 14,7 \text{ lb/pol}^2.$$

A *atmosfera* (atm) é, como o nome sugere, a pressão média aproximada da atmosfera ao nível do mar. O que agora chamamos *torr* (em homenagem a Evangelista Torricelli, que inventou o barômetro de mercúrio em 1674) corresponde à designação antiga de *milímetros de mercúrio* (mm Hg).

**Tabela 16-2**  
**Algumas Pressões**

	Pressão (Pa)
Centro do Sol	$2 \times 10^{16}$
Centro da Terra	$4 \times 10^{11}$
Pressão mais alta obtida em laboratório	$1,5 \times 10^{10}$
Fossa oceânica mais profunda	$1,1 \times 10^8$
Pressão dos saltos altos de sapatos sobre uma pista de dança	$1 \times 10^6$
Pneu de automóvel*	$2 \times 10^5$
Atmosfera ao nível do mar	$1,0 \times 10^5$
Pressão sanguínea normal**	$1,6 \times 10^4$
Som mais alto tolerável**	30
Som mais baixo detectável**	$3 \times 10^{-5}$
Melhor vácuo de laboratório	$10^{-12}$

\*Pressão que excede a atmosférica.

\*\*Pressão sistólica, correspondendo a 120 torr de pressão manométrica no medidor usado pelos médicos.

\*\*\*Pressão no tímpano, a 1.000 Hz.

A libra por polegada quadrada é freqüentemente abreviada por psi. A Tabela 16-2 mostra algumas pressões.

**EXEMPLO 16-1** Uma sala de estar tem piso de dimensões 3,5 m e 4,2 m e altura de 2,4 m.

a. Qual é o peso do ar no interior da sala?

**Solução** Temos, onde  $V$  é o volume da sala e  $\rho$  é a densidade do ar a 1 atm (ver Tabela 16-1),

$$\begin{aligned} P &= mg = \rho Vg \\ &= (1,21 \text{ kg/m}^3)(3,5 \text{ m} \times 4,2 \text{ m} \times 2,4 \text{ m})(9,8 \text{ m/s}^2) \\ &= 418 \text{ N} \approx 420 \text{ N.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Isto é cerca de 94 lb. Você esperava que o ar em uma sala pesasse tanto?

b. Que força a atmosfera exerce no chão da sala?

**Solução** A força é

$$\begin{aligned} F &= pA = (1,0 \text{ atm}) \left( \frac{1,01 \times 10^5 \text{ N/m}^2}{1 \text{ atm}} \right) \\ &\quad \times (3,5 \text{ m} \times 4,2 \text{ m}) \\ &= 1,5 \times 10^6 \text{ N.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Esta força ( $\approx 170$  toneladas) é o peso de uma coluna de ar cobrindo o piso e se estendendo até o topo da atmosfera. Ela é igual à força exercida no chão, se (na ausência de atmosfera) a sala estivesse cheia de mercúrio a uma profundidade de 30 pol. Por que essa enorme força não quebra o piso?

### 16-4 Fluidos em Repouso

A Fig. 16-2a mostra um tanque com água — ou outro líquido — aberto à atmosfera. Como todo mergulhador sabe, a pressão *aumenta* com a profundidade abaixo da interface ar-água. A profundidade do mergulhador, de fato, é medida por um sensor bastante parecido com o da Fig. 16-1b. Como qualquer alpinista sabe, a pressão *diminui* com a altitude. As pressões encontradas pelo mergulhador e pelo alpinista são usualmente chamadas de *pressões hidrostáticas*, porque são devidas a fluidos estáticos (em repouso).

Estudaremos a princípio o aumento de pressão com a profundidade abaixo da superfície da água. Colocamos um eixo vertical  $y$ , com a sua origem na interface água-ar e seu sentido crescente para cima. Considere uma porção de água contida em um cilindro circular reto hipotético de área da base  $A$ , e sejam  $y_1$  e  $y_2$  (ambos números *negativos*) as profundidades das faces superior e inferior do cilindro, respectivamente abaixo da superfície.

A Fig. 16-2b mostra um diagrama de forças para a água no cilindro. A porção de água se encontra em equilíbrio, seu peso (para baixo) sendo exatamente contrabalançado pela diferença entre a força  $F_2 = p_2A$ , atuando para cima

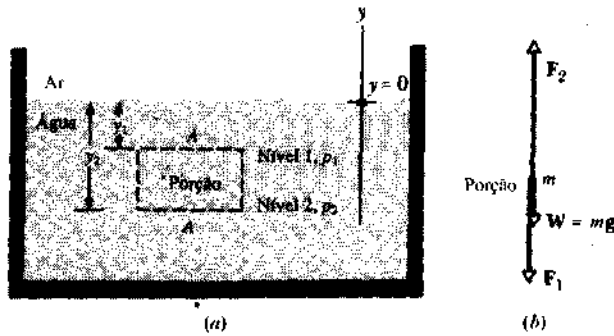


Fig. 16-2 (a) Uma porção de água se encontra em um cilindro hipotético, de área de base  $A$ . (b) O diagrama de forças agindo sobre a água. Ela está em equilíbrio estático, seu peso sendo contrabalançado pelo empuxo para cima que atua nela; veja Eq. 16-3.

na face inferior, e a força  $F_1 = p_1 A$  atuando para baixo na face superior. Assim,

$$F_2 = F_1 + W \quad (16-3)$$

O volume  $V$  do cilindro é  $A(y_1 - y_2)$ . Assim, a massa  $m$  da água no cilindro é  $\rho A(y_1 - y_2)$ , onde  $\rho$  é a densidade da água. O peso  $P$  é então  $\rho A g(y_1 - y_2)$ . Substituindo este valor de  $P$  na Eq. 16-3, obtemos

$$p_2 A = p_1 A + \rho A g(y_1 - y_2),$$

ou

$$p_2 = p_1 + \rho g(y_1 - y_2). \quad (16-4)$$

Se quisermos achar a pressão  $p$  a uma profundidade  $h$  abaixo da superfície, designaremos nível 1 a superfície e nível 2 a distância  $h$  abaixo dela, como na Fig. 16-3. Representando a pressão atmosférica por  $p_0$ , substituiremos então

$$y_1 = 0, \quad p_1 = p_0 \quad \text{e} \quad y_2 = -h, \quad p_2 = p$$

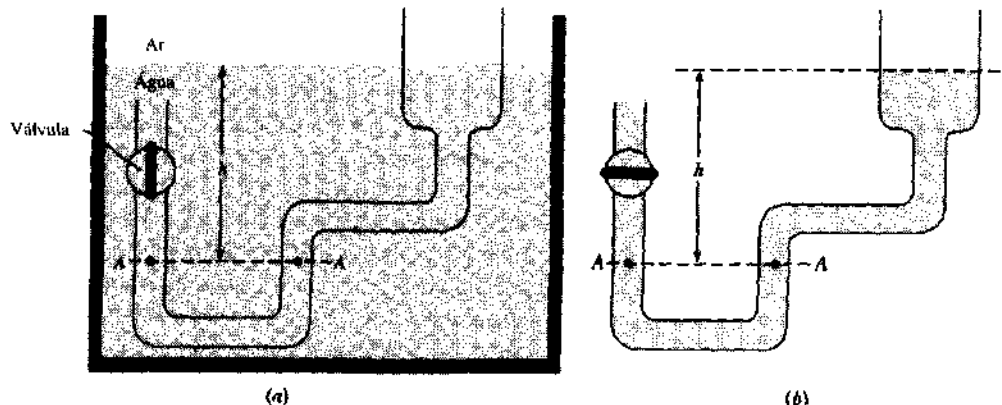


Fig. 16-4 (a) Um tubo está submerso em um tanque com água, com a válvula aberta. A pressão no nível AA é dada pela Eq. 16-5. (b) A válvula é fechada e o tanque é removido. A pressão em AA é ainda dada pela Eq. 16-5.

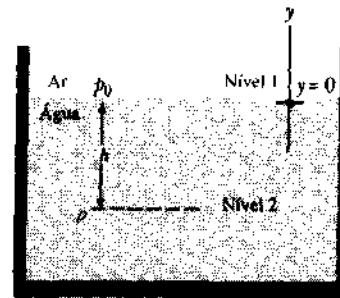


Fig. 16-3 A pressão  $p$  aumenta com a profundidade  $h$  abaixo da superfície da água; veja Eq. 16-5.

na Eq. 16-4, que se tornará

$$p = p_0 + \rho g h \quad (\text{pressão a profundidade}). \quad (16-5)$$

Como era de se esperar, a Eq. 16-5, se reduz a  $p = p_0$  para  $h = 0$ . Como você verá na Seção 16-5, o termo  $\rho g h$  na Eq. 16-5 é chamado **pressão manométrica**; é a diferença entre a pressão  $p$  e a pressão atmosférica  $p_0$ .

A pressão a uma dada profundidade depende desta, mas não de alguma dimensão horizontal. Assim, a pressão na base de um dique depende da profundidade da água ali, mas é independente da quantidade de água represada ou da profundidade em qualquer outro lugar. O lago Mead, por exemplo, se estende por muitas milhas atrás do dique Hoover e tem uma profundidade de 700 pés na face do dique. Este teria de ser construído forte o suficiente para represar apenas poucos milhares de litros de água, como em uma piscina de igual profundidade!

A Eq. 16-5 é válida para qualquer recipiente, não importando sua forma. Considere a Fig. 16-4a, que mostra um tubo em forma irregular imerso em um tanque com água. A válvula conectada ao tubo está aberta de forma que este possa se encher livremente. Você não duvidaria que a Eq. 16-5 fornece corretamente a pressão,

em todos os pontos em qualquer nível horizontal como AA, não importando se os pontos se encontram dentro ou fora do tubo.

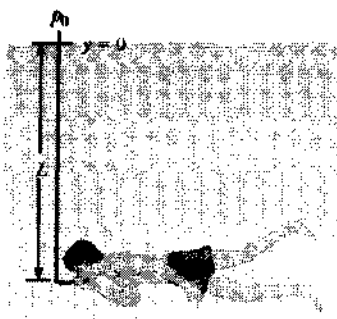
Agora, feche a válvula; esta ação não causa alteração da pressão em ponto algum. Com a válvula fechada, retire o tanque, deixando o tubo no lugar como na Fig. 16-4b. De novo, esta ação não causa alteração de pressão na água dentro do tubo, que não tem mais contato com a água do tanque desde que fechamos a válvula. Particularmente, a pressão da água no tubo ao nível AA na Fig. 16-4b mantém seu valor dado pela Eq. 16-5. Tudo o que importa é a distância vertical  $h$  abaixo da superfície livre.

A pressão diminui ao ascendermos na atmosfera acima da superfície do líquido na Fig. 16-3. A Eq. 16-5, no entanto, não é mais válida, pois, sendo o ar atmosférico um gás e portanto bastante compressível, encontra-se mais comprimido perto da superfície da Terra, porque esta camada suporta o peso das camadas superiores da atmosfera. Em outras palavras, a densidade do ar não é constante à medida que subimos na atmosfera, sendo agora uma função decrescente de  $y$ . Na dedução da Eq. 16-5, foi utilizada a suposição de que  $\rho$  não depende de  $y$ , o que é, sem dúvida, uma excelente aproximação para líquidos, que são praticamente incompressíveis. A dependência da pressão com relação à altitude na atmosfera é dada por uma expressão mais complicada que a Eq. 16-5. Com um barômetro de bolso de boa qualidade, pode-se detectar a variação da pressão atmosférica (cerca de 0,1%), encontrada ao se subir alguns poucos lances de escada. A pressão atmosférica cai para a metade de seu valor ao nível do mar, a uma altitude de aproximadamente 5.500 m.

**EXEMPLO 16-2 a.** Um mergulhador raciocina que, se um respirador de 20 cm funciona, um de 6,0 m também funcionaria. Se ele insensatamente utilizar um tubo como esse (Fig. 16-5), qual seria a diferença de pressão  $\Delta p$  entre a pressão externa sobre ele e a pressão do ar em seus pulmões? Por que ele se encontra em perigo?

**Solução** Primeiro, considere o mergulhador a uma profundidade  $L = 6,0$  m sem o respirador. A pressão externa sobre ele é dada pela Eq. 16-5

$$p = p_0 + \rho gL$$



**Fig. 16-5** Exemplo 16-2. NÃO TENHA FAZER ISSO. Como a pressão externa (da água) em seu peito é muito maior do que a pressão interna (do ar), você pode não ser capaz de expandir seus pulmões para inspirar.

Seu corpo se ajusta a essa pressão contraindo-se ligeiramente até que a pressão interna esteja em equilíbrio com a externa. Em particular, a pressão sanguínea média aumenta e a pressão média do ar em seus pulmões se iguala a  $p$ .

Se usar o tubo de 6,0 m para respirar, o ar pressurizado em seus pulmões será expelido através do tubo para a atmosfera e a pressão em seus pulmões cairá rapidamente para  $p_0$  (pressão atmosférica). Pressupondo que ele se encontra em água doce, a diferença de pressão  $\Delta p$  atuando sobre ele será

$$\begin{aligned} \Delta p &= p - p_0 = \rho gL \\ &= (1.000 \text{ kg/m}^3)(9,8 \text{ m/s}^2)(6,0 \text{ m}) \\ &= 5,9 \times 10^4 \text{ Pa.} \end{aligned} \quad \text{(Resposta)}$$

Essa diferença de pressão, cerca de 0,6 atm, é suficiente para arruinar os pulmões, forçando o sangue pressurizado para dentro deles, processo conhecido como compressão dos pulmões.

b. Um aprendiz de mergulho, praticando com tanque de ar em uma piscina, enche seus pulmões com ar de seu tanque antes de subir à superfície. Ele ignora as instruções e não expira enquanto sobe. Quando atinge a superfície, a diferença de pressão entre a pressão externa sobre ele e a pressão do ar em seus pulmões é de 70 torr. De que profundidade ele começou? Que perigo potencialmente mortal está correndo?

**Solução** Quando enche seus pulmões a uma profundidade  $L$ , a pressão externa sobre ele (e a pressão em seus pulmões) é dada pela Eq. 16-5 como

$$p = p_0 + \rho gL$$

Enquanto ele sobe, a pressão externa decresce até que seja atmosférica  $p_0$  na superfície. Sua pressão sanguínea também decresce até ficar normal. Mas, a não ser que expire, a pressão em seus pulmões não se altera. Na superfície, a diferença de pressão entre o ar de seus pulmões e o ar fora de seu corpo é dada por

$$\Delta p = p - p_0 = \rho gL,$$

da qual encontramos

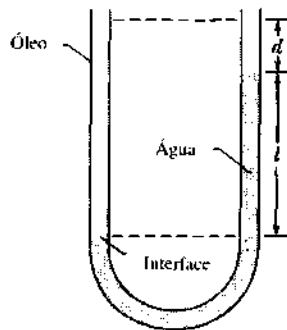
$$\begin{aligned} L &= \frac{\Delta p}{\rho g} \\ &= \frac{70 \text{ torr}}{(1.000 \text{ kg/m}^3)(9,8 \text{ m/s}^2)} \left( \frac{1,01 \times 10^5 \text{ Pa}}{760 \text{ torr}} \right) \\ &= 0,95 \text{ m.} \end{aligned} \quad \text{(Resposta)}$$

A diferença de pressão de 70 torr (cerca de 9% da pressão atmosférica) é suficiente para romper os pulmões do mergulhador e forçar ar deles para o sangue despressurizado, que carregaria o ar para o coração, matando o mergulhador. Se ele seguir as instruções e expirar enquanto sobe, permitirá que a pressão em seus pulmões se iguale à pressão externa, não havendo assim qualquer perigo.

**EXEMPLO 16-3** O tubo em U da Fig. 16-6 contém dois líquidos em equilíbrio estático: água de densidade  $\rho_a$  no braço direito e óleo de densidade desconhecida  $\rho$ , no esquerdo. Medindo as alturas, encontramos  $l = 135$  mm e  $d = 12,3$  mm. Qual é a densidade do óleo?

**Solução** Se a pressão na interface óleo-água no braço esquerdo é  $p_{int}$ , a pressão ao mesmo nível no braço direito tem de ser também  $p_{int}$ , porque (como no nível AA da Fig. 16-4) os braços esquerdo e direito estão conectados pela água abaixo do nível da interface. No braço direito, a interface está a uma distância  $l$  abaixo da superfície livre da água, temos então, pela Eq. 16-5

$$p_{int} = p_0 + \rho_a g l \quad \text{(braço direito).}$$



**Fig. 16-6** Exemplo 16-3. O óleo no braço esquerdo do tubo se apresenta mais alto que a água no braço direito, porque o óleo é menos denso que a água. Ambas as colunas de fluido produzem a mesma pressão  $P_{int}$  no nível da interface óleo-água.

No braço esquerdo, a interface está a uma distância  $l + d$  abaixo da superfície livre do óleo e temos, novamente da Eq. 16-5

$$p_{int} = p_0 + \rho_x g(l + d) \quad (\text{braço esquerdo}).$$

Igualando as duas expressões e resolvendo para a densidade desconhecida, temos

$$\begin{aligned} \rho_x &= \rho_a \frac{l}{l + d} = (1.000 \text{ kg/m}^3) \frac{135 \text{ mm}}{135 \text{ mm} + 12,3 \text{ mm}} \\ &= 916 \text{ kg/m}^3. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Note que a resposta não depende da pressão atmosférica  $p_0$ , ou da aceleração de queda livre  $g$ .

## 16-5 Medindo a Pressão

### A Pressão da Atmosfera

A Fig. 16-7a mostra um *barômetro de mercúrio* simplificado, aparelho usado para medir a pressão atmosférica. Para construí-lo, enche-se um tubo longo de vidro de mercúrio, invertendo-o de forma a ter sua extremidade aberta imersa em uma bacia de mercúrio, como mostra a figura. O espaço acima da coluna de mercúrio contém apenas vapor de mercúrio, cuja pressão é tão pequena a temperaturas comuns que pode ser desprezada.

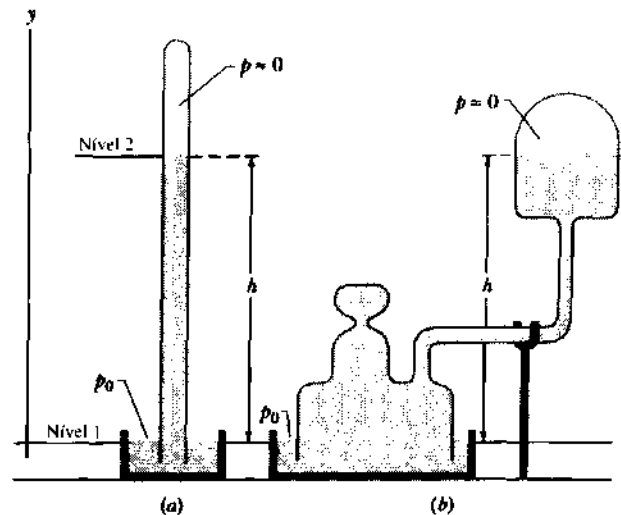
Podemos usar a Eq. 16-4 para encontrar a pressão atmosférica  $p_0$  em termos da altura  $h$  da coluna de mercúrio. Escolhemos como nível 1, na Fig 16-2, a interface mercúrio-ar e como nível 2 o topo da coluna de mercúrio, como indicado em Fig. 16-7a. Substituímos, então

$$y_1 = 0 \quad p_1 = p_0 \quad \text{e} \quad y_2 = h, \quad p_2 = 0$$

na Eq. 16-4, encontrando

$$p_0 = \rho g h. \quad (16-6)$$

Para uma dada pressão, a altura  $h$  da coluna de mercúrio não depende, em nenhum aspecto, da área da seção



**Fig. 16-7** (a) Um barômetro de mercúrio. (b) Outro barômetro de mercúrio. A distância  $h$  é a mesma nos dois casos.

transversal do tubo vertical. O barômetro mais requintado da Fig. 16-7b fornece a mesma leitura que o da Fig. 16-7a; tudo o que importa é a distância vertical  $h$  entre os níveis de mercúrio.

A Eq. 16-6 mostra que, para uma dada pressão, a altura da coluna de mercúrio depende do valor de  $g$ , no local onde se encontra o barômetro, e da densidade do mercúrio, que varia com a temperatura. A altura da coluna (em milímetros) é numericamente igual à pressão (em torr), *somente* se o barômetro se encontrar em um local onde  $g$  tenha valor padrão de  $9,80665 \text{ m/s}^2$  e a temperatura do mercúrio seja  $0^\circ\text{C}$ . Caso não haja tais condições (e raramente existem), deverão ser feitas pequenas correções, antes que a altura da coluna de mercúrio seja transformada em pressão.

### O Manômetro de Tubo Aberto

Muitas vezes, quando calibramos os pneus de um automóvel ou medimos nossa pressão sanguínea, não queremos saber a *pressão absoluta*, que é a pressão total (real). Em vez disso, estamos interessados apenas na chamada *pressão manométrica*  $p_m$ , que é a diferença entre a pressão absoluta e a pressão atmosférica. Nos pneus inflados ou no sistema circulatório humano, a pressão (absoluta) é maior que a pressão atmosférica e, então, a pressão manométrica é uma quantidade positiva, às vezes chamada de *sobrepressão*. Quando você suga através de um canudo e faz o fluido subir por ele, a pressão absoluta em seus pulmões é menor do que a atmosférica. A pressão manométrica em seus pulmões é então negativa.

Um *manômetro de tubo aberto* (Fig. 16-8) mede diretamente a pressão manométrica. Ele consiste em um tubo em U contendo um líquido, com uma das suas extremidades conectada ao recipiente de onde se quer medir a pressão, e a outra aberta à atmosfera. Podemos usar a Eq. 16-4 para encontrar a pressão manométrica em termos da altura  $h$

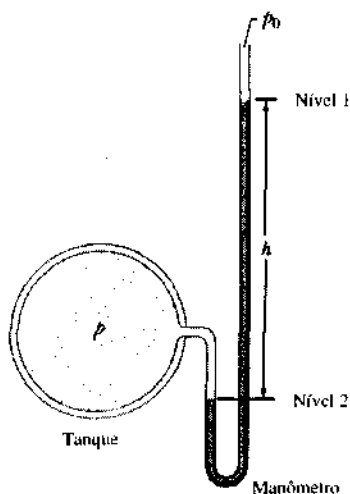


Fig. 16-8 Um manômetro de tubo aberto, conectado de forma a medir a pressão manométrica do gás no tanque da esquerda. O braço direito do tubo em U é aberto para a atmosfera.

mostrada na Fig. 16-8. Vamos escolher os níveis 1 e 2 como os mostrados na Fig. 16-8. Substituindo, então,

$$y_1 = 0, \quad p_1 = p_0 \quad \text{e} \quad y_2 = -h, \quad p_2 = p$$

na Eq. 16-4, encontramos que

$$p_g = p - p_0 = \rho gh. \quad (16-7)$$

A pressão manométrica  $p_m$  é diretamente proporcional à altura  $h$ . A pressão medida pode ser positiva ou negativa dependendo se  $p > p_0$  ou  $p < p_0$ .

**EXEMPLO 16-4** A coluna de mercúrio de um barômetro tem altura  $h = 740,35$  mm. A temperatura é  $-5,0^\circ\text{C}$ , e nesta temperatura a densidade do mercúrio é  $1,3608 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$ . A aceleração de queda livre no local do barômetro é  $9,7835 \text{ m/s}^2$ . Qual é a pressão atmosférica em pascals e torr?

**Solução** Pela Eq. 16-6, temos

$$\begin{aligned} p_0 &= \rho gh \\ &= (1,3608 \times 10^4 \text{ kg/m}^3)(9,7835 \text{ m/s}^2)(0,74035 \text{ m}) \\ &= 9,8566 \times 10^4 \text{ Pa.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

A leitura do barômetro é normalmente feita em torr, onde um torr é a pressão exercida por uma coluna de mercúrio de 1 mm de altura, em um local onde  $g$  tenha o valor padrão de  $9,80665 \text{ m/s}^2$  e a uma temperatura ( $0,0^\circ\text{C}$ ), em que o mercúrio tem densidade  $1,35955 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$ . Assim, da Eq. 16-6,

$$\begin{aligned} 1 \text{ torr} &= (1,35955 \times 10^4 \text{ kg/m}^3)(9,80665 \text{ m/s}^2) \\ &\quad \times (1 \times 10^{-3} \text{ m}) \\ &= 133,326 \text{ Pa.} \end{aligned}$$

Aplicando esse fator de conversão para a pressão atmosférica registrada no barômetro,

$$p_0 = 9,8566 \times 10^4 \text{ Pa} = 739,29 \text{ torr.} \quad (\text{Resposta})$$

Note que a pressão em torr (739,29 torr) é numericamente próxima — mas por outro lado difere significativamente — da altura  $h$  da coluna de mercúrio expressa em mm (740,35 mm).

### 16-6 O Princípio de Pascal

Quando você espreme um tubo de pasta de dente, assiste ao **princípio de Pascal** em ação. Este princípio é também a base para a manobra de Heimlich, em que um aumento agudo de pressão propriamente aplicado ao abdome é transmitido à garganta, ejetando uma partícula de comida que tenha se alojado ali. O princípio foi proposto pela primeira vez, em 1652, por Blaise Pascal (que teve seu nome associado à unidade SI de pressão):

Uma mudança na pressão aplicada em um fluido confinado é transmitida integralmente para todas as porções do fluido e para as paredes do recipiente que o contém.

#### Demonstrando o Princípio de Pascal

Considere o caso em que o fluido é um líquido incompressível contido em um cilindro alto, como mostra a Fig. 16-9. O cilindro é fechado por um pistom deslizante sobre o qual se encontra um recipiente com balas de chumbo. A atmosfera, o recipiente e as balas exercem uma pressão  $p_{ext}$  no pistom e assim no líquido. A pressão  $p$  em qualquer ponto  $P$  do líquido é então

$$p = p_{ext} + \rho gh. \quad (16-8)$$

Adicionemos um pouco mais de balas de chumbo ao pistom para aumentar  $p_{ext}$  de uma quantidade  $\Delta p_{ext}$ . As quan-

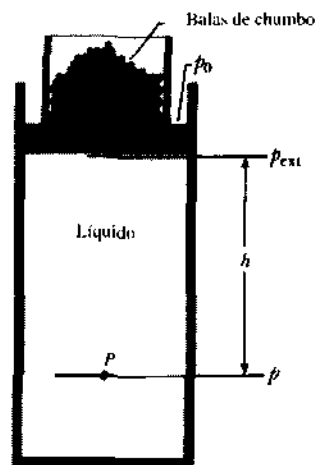


Fig. 16-9 Os pesos colocados no pistom criam uma pressão  $p_{ext}$  sobre o líquido (incompressível) retido no recipiente. Se  $p_{ext}$  for aumentada, por adição de pesos, a pressão aumentará em igual valor em todos os pontos dentro do líquido.

tidades  $\rho$ ,  $g$  e  $h$  na Eq. 16-8 não se alteram, assim, a mudança de pressão em  $P$  é

$$\Delta p = \Delta p_{\text{ext}}. \quad (16-9)$$

Essa mudança de pressão é independente de  $h$ , então tem de valer para todos os pontos dentro do líquido, como diz o princípio de Pascal.

### O Princípio de Pascal e o Elevador Hidráulico

A Fig. 16-10 mostra como o princípio de Pascal pode ser a base de um elevador hidráulico. Consideremos uma força externa de magnitude  $F_c$  sendo exercida para baixo no pistom da esquerda (ou entrada) cuja área é  $A_c$ . Um líquido incompressível no aparelho exerce, então, uma força para cima de magnitude  $F_s$  no pistom direito (ou saída) cuja área é  $A_s$ . Para manter o sistema em equilíbrio, uma carga externa tem de exercer uma força para baixo de magnitude  $F_s$  no pistom da saída. A força  $F_c$  aplicada na esquerda e a força  $F_s$  exercida pela carga produzem uma mudança  $\Delta p$  na pressão no líquido, dada por

$$\Delta p = \frac{F_c}{A_c} = \frac{F_s}{A_s}.$$

Assim,

$$F_o = F_i \frac{A_o}{A_i}. \quad (16-10)$$

A Eq. 16-10 mostra que a força de saída  $F_o$  exercida na carga tem de ser maior do que a força de entrada  $F_i$ , se  $A_o > A_i$ , como é o caso da Fig. 16-10.

Se movermos o pistom de entrada para baixo de uma distância  $d_i$ , o pistom de saída se moverá de uma distância  $d_o$ ,

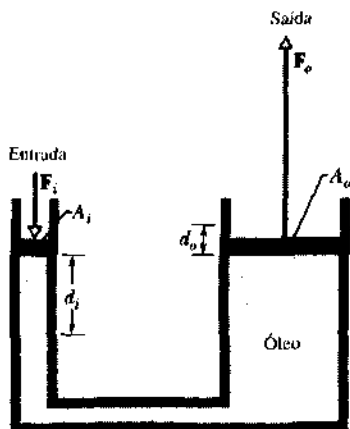


Fig. 16-10 Um aparelho hidráulico, usado para multiplicar a força  $F_i$ . O trabalho realizado por  $F_i$ , entretanto, não se altera e é o mesmo para as forças na entrada e na saída.

de forma que o mesmo volume  $V$  de líquido incompressível seja deslocado para os dois lados. Então,

$$V = A_i d_i = A_o d_o,$$

que pode ser escrito como

$$d_o = d_i \frac{A_i}{A_o}. \quad (16-11)$$

Isso mostra que, se  $A_o > A_i$  (como na Fig. 16-10), o pistom de saída se move de uma distância menor do que o de entrada.

Das Eqs. 16-10 e 16-11 podemos deduzir o trabalho de saída como

$$W = F_o d_o = \left( F_i \frac{A_o}{A_i} \right) \left( d_i \frac{A_i}{A_o} \right) = F_i d_i, \quad (16-12)$$

que mostra ser o trabalho  $W$ , realizado no pistom de entrada pela força aplicada, igual ao trabalho  $W$  realizado pelo pistom de saída levantando a carga sobre ele.

Vemos aqui que uma dada força, que desloca seu ponto de aplicação de uma dada distância, pode ser transformada em uma força maior que provoca um deslocamento menor. O produto da força pela distância permanece inalterado, de forma que é realizado o mesmo trabalho. Entretanto, frequentemente há grande vantagem em poder exercer uma força maior. A maioria de nós, por exemplo, não pode erguer um automóvel e aceita bem a disponibilidade de um elevador hidráulico, apesar de termos de mover a manivela de uma distância muito maior do que aquela que o automóvel sobe. Neste aparelho, o deslocamento  $d_i$  é conseguido não com um toque único, mas com uma sucessão de vários.

### 16-7 O Princípio de Arquimedes

A Fig. 16-11 mostra uma estudante em uma piscina, manipulando uma bolsa plástica fina cheia d'água. Ela percebe que a bolsa está em equilíbrio estático, não tendo tendência nem de afundar nem de subir. Mas a água da bolsa tem



Fig. 16-11 Uma bolsa plástica fina, com água, se encontra em equilíbrio em uma piscina. Seu peso tem de ser contrabalançado por uma força para cima, exercida sobre a bolsa pela água ao seu redor.

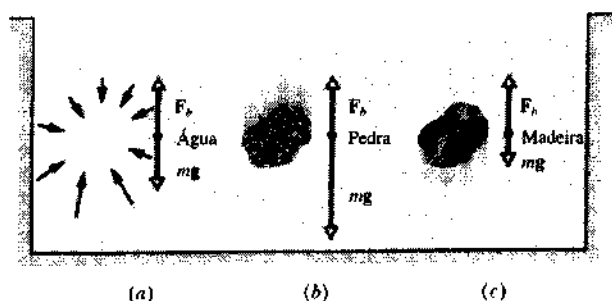


Fig. 16-12 (a) A água vizinha ao vazio exerce forças sobre suas fronteiras, a resultante delas sendo o empuxo para cima que atua em qualquer coisa que o preencha. (b) Para uma pedra de volume igual ao do vazio, o peso é maior que o empuxo. (c) Para um pedaço de madeira de mesmo volume, o peso é menor que o empuxo.

peso — e por esta razão — deveria afundar. Seu peso tem de ser equilibrado por uma força para cima de igual magnitude.

Esse empuxo  $F_b$  para cima é exercido na água na bolsa pela água em volta dela. Esta força de empuxo existe porque — como já vimos — a pressão na água aumenta com a profundidade abaixo da superfície, assim, a pressão no fundo é maior do que a existente na parte superior da bolsa.

Removamos a bolsa. A Fig. 16-12a mostra as forças atuando no vazio, onde anteriormente estava a bolsa. O empuxo é a soma vetorial de todas essas forças.

Coloquemos no vazio da Fig. 16-12a uma pedra com exatamente as mesmas dimensões deste, como mostra a Fig. 16-12b. A mesma força de empuxo que atuava na bolsa atuará na pedra. Entretanto, como esta força é muito pequena para equilibrar o peso da pedra, a pedra afundará. Mesmo afundando, a força de empuxo da água reduz seu peso aparente, fazendo com que seja mais fácil carregar a pedra enquanto ela estiver dentro d'água.

Se colocarmos um bloco de madeira de iguais dimensões no vazio da Fig. 16-12a, como na Fig. 16-12c, a mesma força de empuxo para cima atuará na madeira. Desta vez, entretanto, a força para cima será maior que o peso da madeira e esta, então, subirá em direção à superfície. Podemos resumir esses fatos enunciando o princípio de Arquimedes:

Um corpo completa ou parcialmente imerso em um fluido receberá a ação de uma força para cima igual ao peso do fluido que o corpo desloca.

Vejamos como esse princípio pode explicar a flutuação. Quando o pedaço de madeira da Fig. 16-12c sobe o bastante até aflorar na superfície, passa a deslocar menos água do que quando estava submerso. De acordo com o princípio de Arquimedes, a força de empuxo decresce. A madeira continuará a subir até que o empuxo diminua para o valor exato do peso da madeira. Atinge-se, então, o equilíbrio estático; o corpo flutua.

## O Equilíbrio de Objetos Flutuantes

Ocasionalmente, barcos à vela ou navios de guerra são modificados pela adição de mastros mais altos ou armas mais pesadas, de forma que se tornam pesados na parte de cima e tendem a emborcar em águas moderadamente agitadas. *Icebergs* frequentemente rolam enquanto derretem. Tudo isso sugere que torques desempenham algum papel no equilíbrio dos objetos flutuantes.

Como já vimos, o peso de um objeto flutuante (atuando para baixo) é exatamente contrabalançado pelo empuxo (atuando para cima). Entretanto, essas duas forças nem sempre se aplicam no mesmo ponto. O peso atua no centro de massa do objeto flutuante, enquanto o empuxo atua no centro de massa do vazio na água, um ponto chamado de **centro de empuxo**.

Se um corpo flutuante gira deslocando-se ligeiramente de seu ponto de equilíbrio, a forma do vazio na água muda, da mesma forma muda a posição do centro de empuxo. Para que tal objeto esteja em equilíbrio estável, seu centro de empuxo tem de se mover de tal forma que o empuxo (atuando para cima) e o peso (atuando para baixo) forneçam um *torque restaurador* que tenda a colocar o corpo de volta na sua posição original. Se o torque agir no sentido opo-

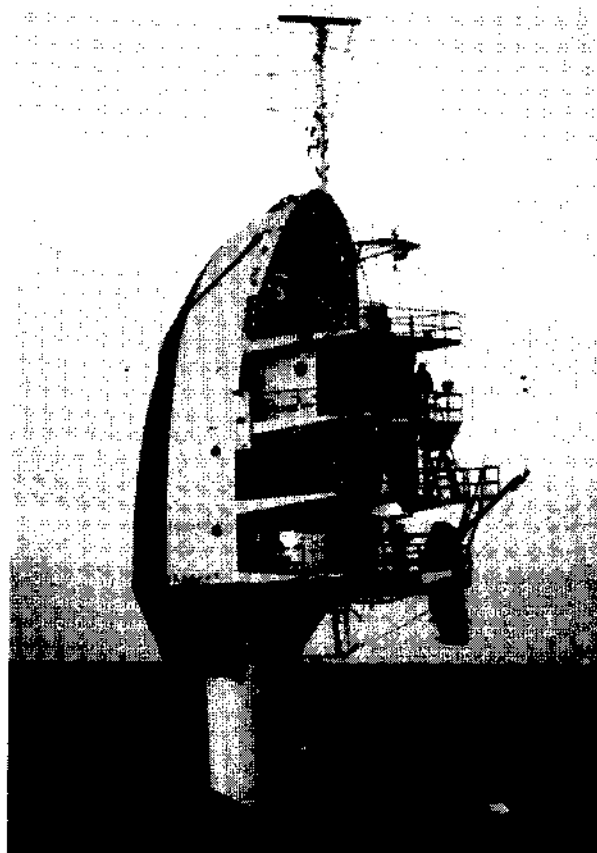


Fig. 16-13 Uma cápsula de pesquisas (FLIP) utilizada para o estudo de ondas em águas profundas. Ela é rebocada para o local de estudo flutuando horizontalmente e, então, bombeia água para seus tanques de forma a girar para a posição mostrada.



to, o corpo flutuante se afastará cada vez mais da posição de equilíbrio e poderá, eventualmente, emborcar.

A Fig. 16-3 mostra uma cápsula de pesquisa incomum, o Laboratório Instrumental em Plataforma Flutuante (FLIP), que tem duas posições de equilíbrio estável. Ela pode flutuar "normalmente" na superfície ou, bombeando água para dentro de seus tanques de popa, assumir a posição mostrada na figura. Nessa posição, se estende 11 m acima da superfície e 60 m abaixo, fornecendo uma plataforma instrumental estável para o estudo de ondas oceânicas.

**EXEMPLO 16-5** A "ponta do iceberg", em linguagem popular, expressa uma pequena fração visível de alguma coisa que está em sua maior parte escondida. Para icebergs reais, qual é essa fração?

**Solução** O peso de um iceberg de volume total  $V_i$  é

$$P_i = \rho_i V_i g,$$

onde  $\rho_i = 917 \text{ kg/m}^3$  é a densidade do gelo.

O peso da água deslocada, que é o empuxo  $F_a$ , é

$$P_a = F_a = \rho_a V_a g,$$

onde  $\rho_a = 1.024 \text{ kg/m}^3$  é a densidade da água do mar e  $V_a$  é o volume da água deslocada, que é também o volume submerso do iceberg. Para o iceberg flutuante, essas duas forças são iguais, ou

$$\rho_i V_i g = \rho_a V_a g.$$

Dessa equação, encontramos que a fração que procuramos é

$$\begin{aligned} \text{frac} &= \frac{V_i - V_a}{V_i} = 1 - \frac{V_a}{V_i} = 1 - \frac{\rho_i}{\rho_a} \\ &= 1 - \frac{917 \text{ kg/m}^3}{1.024 \text{ kg/m}^3} \\ &= 0,10 \text{ ou } 10\%. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

**EXEMPLO 16-6** Um balão esférico cheio de hélio tem um raio  $R$  de 12,0 m. O balão, os cabos de sustentação e a cesta têm massa  $m$  de 196 kg. Qual é a carga máxima  $M$  que o balão pode carregar? Considere  $\rho_{\text{He}} = 0,160 \text{ kg/m}^3$  e  $\rho_{\text{ar}} = 1,25 \text{ kg/m}^3$ .

**Solução** O peso do ar deslocado, que é o empuxo, e o peso do hélio no balão são

$$P_{\text{ar}} = \rho_{\text{ar}} V g \quad \text{e} \quad P_{\text{He}} = \rho_{\text{He}} V g,$$

onde  $V (= 4\pi R^3/3)$  é o volume do balão.

Em equilíbrio, pelo princípio de Arquimedes,

$$P_{\text{ar}} = P_{\text{He}} + mg + Mg$$

ou

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{4}{3}\pi\right)(R^3)(\rho_{\text{ar}} - \rho_{\text{He}}) - m \\ &= \left(\frac{4}{3}\pi\right)(12,0 \text{ m})^3(1,25 \text{ kg/m}^3 - 0,160 \text{ kg/m}^3) \\ &\quad - 196 \text{ kg} \\ &= 7.690 \text{ kg}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Um corpo com essa massa pesaria 75.362 N ao nível do mar.

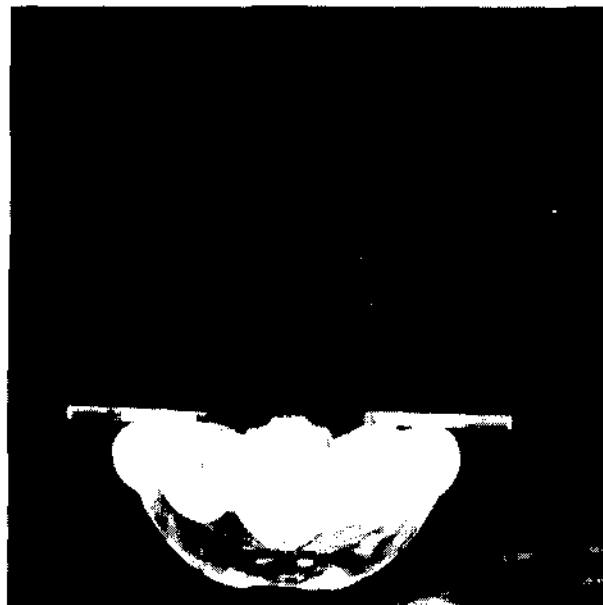
## 16-8 Fluidos Ideais em Movimento

Em seções anteriores, às vezes propúnhamos um problema e ressaltávamos: "desconsidere o atrito". Essa era uma pressuposição tácita de que, se incluíssemos o atrito, o problema ficaria difícil demais. Este é o caso agora. O movimento de fluidos reais é complicado, não sendo ainda inteiramente compreendido. Discutiremos, em vez disso, o movimento de **fluidos ideais**, que é mais simples de se tratar matematicamente. Apesar de nossos resultados não concordarem completamente com o comportamento dos fluidos reais, serão suficientemente aproximados para ser úteis. Fazemos aqui quatro considerações sobre o fluido ideal:

**1. Escoamento uniforme.** No *fluxo uniforme* ou *laminar*, a velocidade do fluido em qualquer ponto fixo não muda com o tempo, em magnitude ou direção e sentido. O fluxo de água perto do centro de um riacho calmo é uniforme; já em uma correnteza não é. A Fig. 16-14 mostra a fumaça do cigarro subindo, ou seja, a transição de um escoamento uniforme para um *não-uniforme* ou *turbulento*. A velocidade das partículas de fumaça aumenta enquanto elas sobem e, a uma certa velocidade crítica, o escoamento muda suas características de uniforme para não-uniforme.

**2. Escoamento incompressível.** Pressupomos, como já fizemos para os fluidos em repouso, que o nosso fluido ideal é incompressível. Isto é, sua densidade é constante.

**3. Escoamento não-viscoso.** Grosseiramente, a viscosidade de um fluido é a medida de sua resistência ao escoamento. Por exemplo, o mel escoo com mais dificuldade que a água, assim, dizemos que o mel é mais viscoso que a água. A viscosidade nos líquidos é análoga ao atrito entre os só-



**Fig. 16-14** A certa altura, o escoamento do gás aquecido que sobe de um cigarro aceso muda de uniforme para turbulento.

lidos. Ambos são mecanismos pelos quais a energia cinética dos objetos em movimento é transformada em energia térmica. Na ausência de atrito, um bloco poderia deslizar por uma superfície horizontal a uma velocidade constante. Da mesma forma, um objeto se movendo através de um fluido não-viscoso não experimentaria qualquer *força viscosa de arrastamento*, ou seja, nenhuma força resistiva devido à viscosidade. Lorde Rayleigh chamou a atenção para o fato de que, em um fluido ideal, um propulsor de navio não funcionaria, mas por outro lado, um navio (uma vez em movimento) não necessitaria de um propulsor!

**4. Escoamento irrotacional.** Apesar de não haver necessidade de nos preocuparmos muito com esse aspecto, também pressupomos que o escoamento não é rotacional. Para testar essa propriedade, deixemos um pequeno grão de poeira se mover com o fluido. Em um escoamento não-rotacional, o corpo de teste não girará em torno de um eixo que passe por seu centro de massa. Para fazer uma analogia simplificada, dizemos que o movimento de uma rodagigante é rotacional; o movimento de seus passageiros é irrotacional.

### 16-9 Linhas de Corrente e a Equação da Continuidade

A Fig. 16-15 mostra as linhas de corrente descritas por tinta injetada em um fluido em movimento; a Fig. 16-16 mostra traços similares revelados por fumaça. Uma **linha de corrente** é o caminho traçado por um pequeno elemento de fluido, que podemos chamar de “partícula” de fluido. Enquanto esta se move, sua velocidade pode variar em módulo e direção. Como mostra a Fig. 16-17, seu vetor velocidade em qualquer ponto será sempre tangente à linha de corrente naquele ponto. Linhas de corrente nunca se cruzam. Se o fizessem, uma partícula de fluido ao passar pela interseção teria de assumir duas velocidades diferentes simultaneamente, o que é impossível.

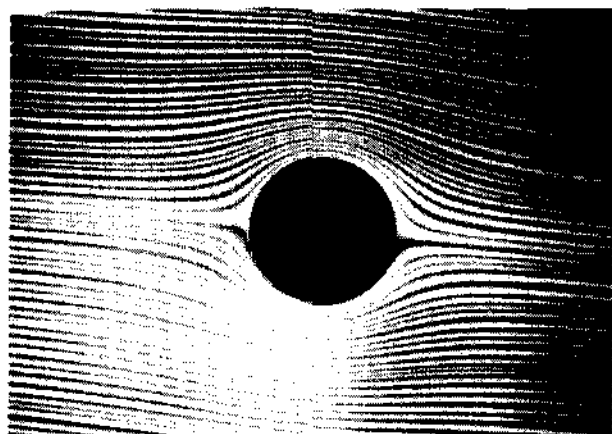


Fig. 16-15 O escoamento uniforme de um fluido em torno de um cilindro, revelado por um rastreador colorido.



Fig. 16-16 A fumaça revela as linhas de escoamento do ar passando por um automóvel, em um túnel de vento.

Em escoamentos como aquele das Figs. 16-15 e 16-16, podemos isolar um **tubo de corrente** cujos limites são definidos por linhas de corrente. Tal tubo funciona como um cano, porque nenhuma partícula de fluido pode escapar através de suas paredes; se assim o fizesse, recairíamos no caso do cruzamento de duas linhas de corrente.

A Fig. 16-18 mostra duas seções transversais, de áreas  $A_1$  e  $A_2$ , de um tubo de corrente. Façamos nossas observações em  $B$  e monitoramos o fluido, que se move com velocidade  $v_1$ , por um pequeno intervalo de tempo  $\Delta t$ . Durante este intervalo, uma partícula de fluido se moverá da pequena distância  $v_1 \Delta t$  e um volume  $\Delta V$  de fluido, dado por

$$\Delta V = A_1 v_1 \Delta t,$$

passará através da área  $A_1$ .

O fluido é incompressível e não pode ser criado nem destruído. Assim, no mesmo intervalo de tempo, o mesmo volume de fluido tem que passar por  $C$ , logo abaixo no tubo de corrente. Se a velocidade em  $C$  é  $v_2$ , isto significa que

$$\Delta V = A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t,$$

ou

$$A_1 v_1 = A_2 v_2.$$

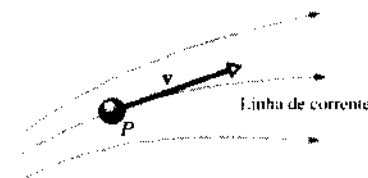


Fig. 16-17 Uma partícula do fluido  $P$  traça uma linha de corrente ao descrever a sua trajetória. A velocidade da partícula é tangente à linha de corrente em cada ponto.

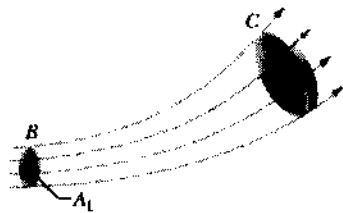


Fig. 16-18 Um tubo de corrente é definido pelas linhas de corrente que o delimitam. A vazão do fluido tem de ser a mesma para todas as seções transversais do tubo de corrente.

Assim, ao longo do tubo de corrente, encontramos

$$R = Av = \text{constante}, \quad (16-13)$$

onde  $R$ , cuja unidade no SI é metro cúbico por segundo, é a taxa de escoamento volumétrica (vazão). A Eq. 16-13 é chamada de equação de continuidade para um escoamento de fluidos. Ela nos diz que o escoamento é mais rápido nas partes mais estreitas do tubo de corrente, onde as linhas de corrente são mais próximas, como na Fig. 16-19.

A Eq. 16-13 é na verdade uma expressão da lei de conservação da massa em uma forma útil para a mecânica dos fluidos. De fato, se multiplicarmos  $R$  pela densidade (constante) do fluido, obteremos a quantidade  $A\rho v$ , que é a taxa de escoamento de massa, cuja unidade no SI é quilograma por segundo. A Eq. 16-13 nos diz, efetivamente, que a massa que flui através do ponto  $B$  na Fig. 16-18 a cada segundo, tem que ser igual à massa que flui através do ponto  $C$  a cada segundo.

**EXEMPLO 16-7\*** A área  $A_0$  da seção transversal da aorta (maior artéria que emerge do coração) de uma pessoa normal em repouso é  $3 \text{ cm}^2$  e a velocidade  $v_0$  do sangue é  $30 \text{ cm/s}$ . Um capilar típico (diâmetro de  $\approx 6 \mu\text{m}$ ) tem uma área de seção transversal  $A$  igual a  $3 \times 10^{-7} \text{ cm}^2$  e uma velocidade de escoamento  $v$  de  $0,05 \text{ cm/s}$ . Quantos capilares essa pessoa possui?

**Solução** Todo o sangue que passa pelos capilares tem de ter passado pela aorta, então, pela Eq. 16-13, temos

$$A_0 v_0 = nAv,$$

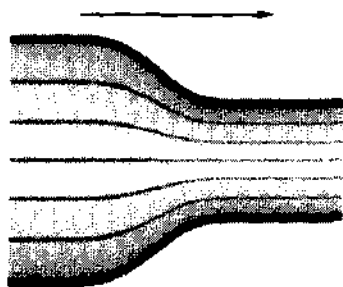


Fig. 16-19 Quando um canal, assim como um cano, se afunila, as linhas de fluxo se aproximam, indicando um aumento da velocidade do fluido. A seta indica a direção do escoamento.

\* Veja em "Life in Fluids" de Steven Vogel, Princeton University Press, 1981, um estudo fascinante do papel do escoamento de fluidos em biologia.

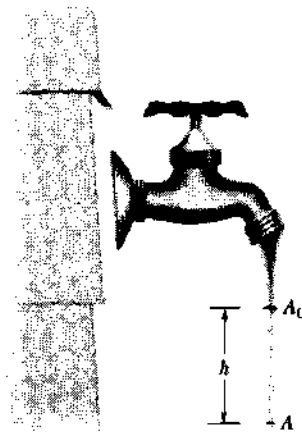


Fig. 16-20 Exemplo 16-8. Enquanto cai de uma torneira, a velocidade da água aumenta. Como a vazão tem de ser a mesma em todas as seções transversais, o filete tem de afunilar.

onde  $n$  é o número de capilares. Resolvendo a equação para  $n$

$$n = \frac{A_0 v_0}{Av} = \frac{(3 \text{ cm}^2)(30 \text{ cm/s})}{(3 \times 10^{-7} \text{ cm}^2)(0,05 \text{ cm/s})} = 6 \times 10^9 \text{ ou } 6 \text{ bilhões.} \quad (\text{Resposta})$$

Você pode facilmente mostrar que a área transversal dos capilares combinada é cerca de 600 vezes maior do que a área da aorta.

**EXEMPLO 16-8** A Fig. 16-20 mostra como um filete de água saindo de uma torneira se afina enquanto cai. A área da seção transversal  $A_0$  é  $1,2 \text{ cm}^2$  e  $A$  é  $0,35 \text{ cm}^2$ . Os dois níveis são separados por uma distância vertical  $h = 45 \text{ mm}$ . A que taxa a água flui da torneira?

**Solução** Pela equação da continuidade (Eq. 16-13), temos

$$A_0 v_0 = Av, \quad (16-14)$$

onde  $v_0$  e  $v$  são as velocidades da água nos níveis correspondentes. Da Eq. 2-21 podemos também escrever, porque a água está em queda livre com aceleração  $g$ ,

$$v^2 = v_0^2 + 2gh. \quad (16-15)$$

Eliminando  $v$  entre as Eqs. 16-14 e 16-15 e resolvendo para  $v_0$ , obtemos

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{\frac{2ghA^2}{A_0^2 - A^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(2)(9,8 \text{ m/s}^2)(0,045 \text{ m})(0,35 \text{ cm}^2)^2}{(1,2 \text{ cm}^2)^2 - (0,35 \text{ cm}^2)^2}} \\ &= 0,286 \text{ m/s} = 28,6 \text{ cm/s.} \end{aligned}$$

A vazão  $R$  é, então

$$\begin{aligned} R &= A_0 v_0 = (1,2 \text{ cm}^2)(28,6 \text{ cm/s}) \\ &= 34 \text{ cm}^3/\text{s.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

A essa taxa, em cerca de 3 s é possível encher um recipiente de 100 mL.

### 16-10 A Equação de Bernoulli

A Fig. 16-21 representa um tubo de corrente (ou mesmo um cano), através do qual um fluido ideal está escoando a uma taxa constante. Em um intervalo de tempo  $\Delta t$ , suponha que um volume  $\Delta V$  do fluido, colorido de escuro na Fig. 16-21a, entre no tubo pela esquerda e um volume idêntico, também escuro na Fig. 16-21b, saia pela direita. O volume que sai tem de ser igual ao volume que entrou, porque o fluido é incompressível, com uma densidade suposta constante,  $\rho$ .

Sejam  $y_1$ ,  $v_1$  e  $p_1$  a elevação, a velocidade e a pressão do fluido quando entra na esquerda e  $y_2$ ,  $v_2$  e  $p_2$  as quantidades correspondentes quando sai pela direita. Aplicando ao fluido a lei da conservação da energia, demonstramos mais adiante a seguinte relação

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 \quad (16-16)$$

Podemos reescrevê-la como

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{constante} \quad (16-17)$$

As Eqs. 16-16 e 16-17 são expressões equivalentes da **equação de Bernoulli**, em homenagem a Daniel Bernoulli cuja sugestão em 1738 levou a essa equação.\* Como a equação da continuidade (Eq. 16-13), a equação de Bernoulli não é um princípio novo, mas simplesmente a reformulação de um princípio familiar (a conservação da energia mecânica) em uma forma mais adequada à mecânica dos fluidos. Vamos aplicar a equação de Bernoulli a um fluido em repouso, sendo então  $v_1 = v_2 = 0$  na Eq. 16-16. O resultado é

$$p_2 = p_1 + \rho g (y_1 - y_2),$$

que é a Eq. 16-4, logo, o limite de fluido em repouso ( $v = 0$ ) está correto.

Uma previsão importante da equação de Bernoulli aparece se fizermos  $y$  constante (digamos,  $y = 0$ ); assim o fluido não varia a elevação enquanto escoar. A Eq. 16-16 se torna, então,

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2, \quad (16-18)$$

que nos diz:

Se a velocidade de uma partícula de um fluido aumenta, enquanto se desloca ao longo de uma linha de corrente, a pressão do fluido diminui e vice-versa.

\* Para escoamentos irrotacionais (o que pressupomos), a constante na Eq. 16-17 tem o mesmo valor para todos os pontos dentro do tubo de corrente; os pontos não têm de estar sobre a mesma linha de corrente. De forma similar, os pontos 1 e 2 na Eq. 16-16 podem estar em qualquer posição dentro do tubo de corrente.

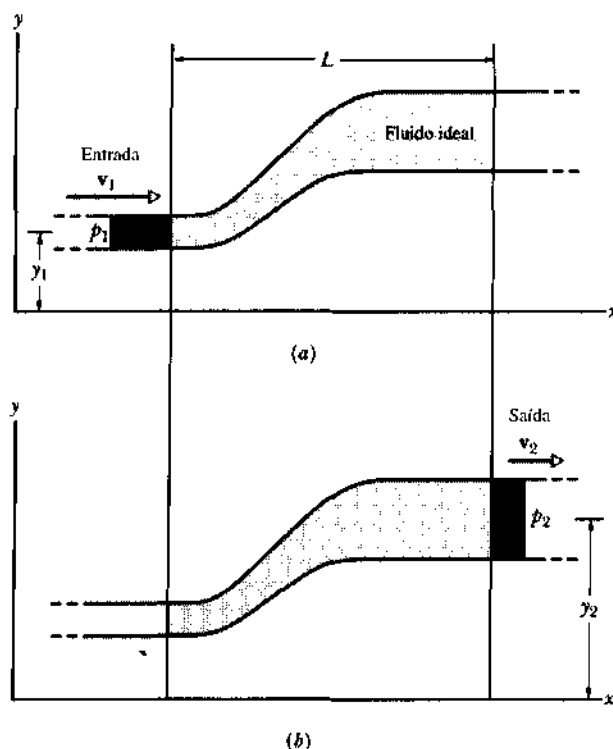


Fig. 16-21 Um fluido escoar através de um tubo a uma vazão constante. Durante um intervalo de tempo  $\Delta t$ , a quantidade de fluido indicada pela área escura em (a) é transferida da entrada para a extremidade de saída, como mostrado em (b).

Dito de outra forma, onde as linhas de corrente estão relativamente próximas umas das outras (isto é, quando a velocidade é relativamente grande), a pressão é relativamente baixa e vice-versa.

A ligação entre uma variação de velocidade e uma variação de pressão faz sentido se você considerar uma partícula do fluido. Quando uma partícula se aproxima de uma região estreita, a alta pressão atrás dela a faz acelerar de forma que atinja maior velocidade nessa região. E, quando ela se aproxima de uma região larga, a alta pressão à sua frente a faz desacelerar de forma que assume uma velocidade mais baixa na região mais larga.

Esse resultado é talvez o oposto do que você poderia esperar. Por exemplo, se você coloca sua mão pela janela de um carro, você sente um aumento de pressão associado à velocidade relativa do ar fora do carro, não uma diminuição. A dificuldade é que, ao tentar "sentir" a pressão dessa forma, você interfere no escoamento. A pressão tem de ser medida de forma que isto não aconteça. Se, em vez disso, você abrir a janela só um pouco (de forma que não perturbe o escoamento de ar do lado de fora), poderá observar que uma fumaça gerada dentro do carro escoará para fora devido à pressão mais baixa nesta região.

A equação de Bernoulli só é válida para fluidos ideais. Se forças de viscosidade estiverem presentes, ocorrerá dissipação térmica. Não levaremos isto em conta na dedução que se segue.

### Demonstração da Equação de Bernoulli

Vamos considerar como nosso sistema o volume total de fluido (ideal) na Fig. 16-21. Aplicaremos a lei da conservação da energia nesse sistema, quando ele vai de seu estado inicial (Fig. 16-21a) a seu estado final (Fig. 16-21b). A porção de fluido compreendida entre os dois planos verticais, separados pela distância  $L$  na Fig. 16-21, não tem suas propriedades alteradas durante o processo; precisamos analisar apenas o que ocorre nas extremidades.

Aplicamos a lei da conservação da energia na forma do teorema trabalho-energia cinética,

$$W = \Delta K, \quad (16-19)$$

que diz que a variação de energia cinética de um sistema tem de ser igual ao trabalho realizado sobre (ou por) ele.

A variação de energia cinética depende da variação de velocidade entre as extremidades da tubulação e é

$$\begin{aligned} \Delta K &= \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2), \end{aligned} \quad (16-20)$$

onde  $\Delta m (= \rho \Delta V)$  é a massa do fluido (em escuro na Fig. 16-21) que entra pela esquerda e sai pela direita, durante o pequeno intervalo de tempo  $\Delta t$ .

O trabalho realizado sobre o sistema vem de duas fontes. O trabalho  $W_g$  realizado pelo peso ( $\Delta m g$ ) da massa  $\Delta m$ , durante a elevação dessa massa do nível de entrada ao de saída, é

$$\begin{aligned} W_g &= -\Delta m g (y_2 - y_1) \\ &= -\rho g \Delta V (y_2 - y_1). \end{aligned} \quad (16-21)$$

Esse trabalho é negativo porque o deslocamento para cima e o peso para baixo apontam em direções opostas.

Um trabalho  $W_p$  também tem de ser realizado *sobre* o sistema (na extremidade de entrada), para empurrar o fluido através do tubo, e *pelo* sistema (na extremidade de saída) para empurrá-lo para a frente. De forma geral, o trabalho feito por uma força de magnitude  $F$ , agindo em uma porção de fluido contida em um tubo de área  $A$ , para mover o fluido de uma distância  $\Delta x$ , é

$$F \Delta x = (pA) (\Delta x) = (p) (A \Delta x) = p \Delta V.$$

O trabalho  $W_p$  é, então

$$\begin{aligned} W_p &= -p_2 \Delta V + p_1 \Delta V \\ &= -(p_2 - p_1) \Delta V. \end{aligned} \quad (16-22)$$

O teorema do trabalho-energia cinética (Eq. 16-19) fornece então

$$W = W_g + W_p = \Delta K.$$

Utilizando as Eqs. 16-20, 16-21 e 16-22, obtemos

$$-\rho g \Delta V (y_2 - y_1) - \Delta V (p_2 - p_1) = \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2)$$

O que, depois de alguns rearranjos, se iguala à Eq. 16-16, como queríamos demonstrar.

**EXEMPLO 16-9** Etanol, de densidade  $\rho = 791 \text{ kg/m}^3$ , flui suavemente através de um cano horizontal que se reduz (como na Fig. 16-19) de uma seção transversal de área  $A_1 = 1,20 \times 10^{-3} \text{ m}^2$  para  $A_2 = A_1/2$ . A diferença de pressão  $\Delta p$ , entre as seções larga e estreita do cano, é 4.120 Pa. Qual é a vazão  $R$  do etanol?

**Solução** Rearranjando a Eq. 16-18 (equação de Bernoulli para escoamento nivelado), obtemos

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2), \quad (16-23)$$

onde os subscritos 1 e 2 se referem às seções larga e estreita do cano, respectivamente. A Eq. 16-13 (equação da continuidade) nos diz que na Fig. 16-19 o escoamento é mais rápido na seção mais estreita. Isto quer dizer, aqui, que  $v_2 > v_1$ . A Eq. 16-23 nos diz, então, que  $p_1 > p_2$ . Assim, temos  $p_1 - p_2 = \Delta p = 4.120 \text{ Pa}$ .

A Eq. 16-13 também nos diz que a vazão  $R$  é a mesma tanto na seção larga quanto na estreita. Então,

$$R = v_1 A_1 = v_2 A_2,$$

que, com  $A_2 = A_1/2$ , nos dá

$$v_1 = \frac{R}{A_1} \quad \text{e} \quad v_2 = \frac{R}{A_2} = \frac{2R}{A_1}.$$

Substituindo essas expressões na Eq. 16-23, fazendo  $p_1 - p_2 = \Delta p$ , e rearranjando, chegamos a

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{4R^2}{A_1^2} - \frac{R^2}{A_1^2} \right) = \frac{3\rho R^2}{2A_1^2}.$$

Resolvendo para  $R$ , encontramos

$$\begin{aligned} R &= A_1 \sqrt{\frac{2\Delta p}{3\rho}} \\ &= 1,20 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \sqrt{\frac{(2)(4.120 \text{ Pa})}{(3)(791 \text{ kg/m}^3)}} \\ &= 2,24 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

### 16-11 Algumas Aplicações da Equação de Bernoulli

#### Estouro de Janelas

Se um vento forte soprar paralelo a uma janela, a pressão na parte de fora desta será reduzida e ela poderá estourar. Esse mecanismo desempenha um papel importante quando telhados chatos são arrancados de seus prédios; os telhados são, ao menos em parte, empurrados para cima pela pressão do ar estacionário embaixo deles. Apesar de os telhados serem projetados para suportar grande diferença

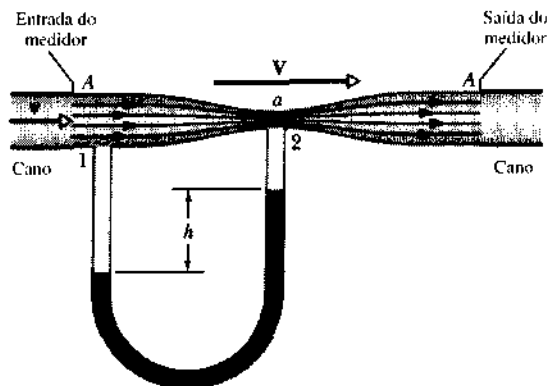


Fig. 16-22 Um medidor de Venturi é conectado entre duas seções de um cano para medir a velocidade do fluido que passa por ele.

de pressão dirigida para baixo (devido, por exemplo, ao acúmulo de água da chuva ou neve, em países frios), normalmente não são projetados para suportar uma grande diferença de pressão para cima.

### O Medidor de Venturi

O medidor de Venturi é um aparelho usado para medir a velocidade de escoamento de um fluido em um cano. O medidor é conectado entre duas seções do cano, como na Fig. 16-22. A área  $A$  da seção transversal da entrada e da saída do medidor são iguais à área da seção transversal do cano. Entre a entrada e a saída, o fluido passa por uma região estreita de área  $a$ . Um manômetro conecta a parte mais larga à mais estreita do medidor.

À medida que o fluido escoar do cano com uma velocidade  $v$  para a região estreita, sua velocidade aumenta para  $V$ . De acordo com a equação de Bernoulli, este aumento de velocidade é acompanhado por uma diminuição da pressão do fluido. O líquido no manômetro se move para a direita, em resposta à diferença de pressão  $\Delta p$  que existe entre a região larga (em  $A$ ) e a região estreita (em  $a$ ). Medimos, então, a diferença de altura  $h$  entre as superfícies do líquido dentro do manômetro, para encontrar  $\Delta p$ .

Usando a equação de Bernoulli e a equação de continuidade (Eq. 16-13), pode-se mostrar que

$$v = \sqrt{\frac{2a^2 \Delta p}{\rho(A^2 - a^2)}}, \quad (16-24)$$

onde  $\rho$  é a densidade do fluido. A vazão  $R$  pode ser encontrada como  $R = Av$ , e o aparelho pode ser calibrado para fornecer (e gravar) esta vazão diretamente.

### O Furo no Tanque de Água

No velho Oeste, um bandido atira em um tanque de água aberto, abrindo um furo a uma distância  $h$  abaixo da super-

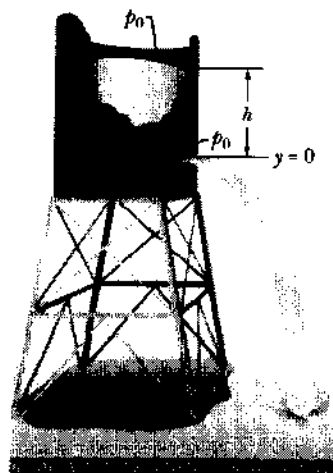


Fig. 16-23 A água flui do buraco com a mesma velocidade que teria, se houvesse caído da distância vertical  $h$ .

fície da água, como mostra a Fig. 16-23. Qual é a velocidade da água quando emerge do furo?

Tomamos o nível do furo como sendo o nosso nível de referência para alturas e notamos que a pressão no topo do tanque, e também no furo, é a atmosférica. Aplicando a equação de Bernoulli (Eq. 16-16), obtemos

$$p_0 + 0 + \rho gh = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 + 0.$$

O zero da esquerda denota que a velocidade do fluido no topo do tanque (velocidade em que o nível baixa) é desprezível. O 0 da direita nos lembra que o nível do furo é o nosso nível de referência para medida da energia potencial gravitacional. Assim, encontramos

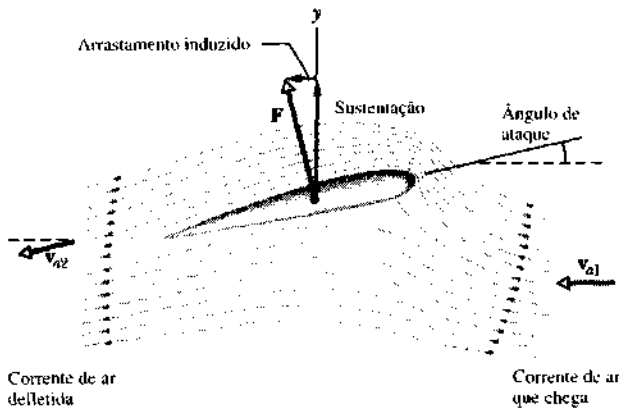
$$v = \sqrt{2gh}, \quad (16-25)$$

que é a mesma velocidade que um corpo adquire caindo da altura  $h$ .

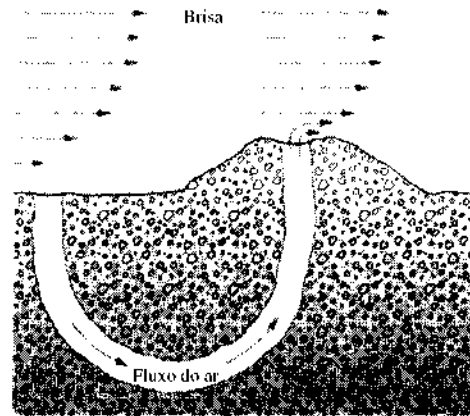
### Uma Asa de Avião

A Fig. 16-24 ilustra as linhas de corrente em torno da asa de um avião em movimento. Pressupomos que o ar se aproxima horizontalmente pela direita, com velocidade  $v_{a1}$ . A inclinação da asa para cima, chamada de *ângulo de ataque*, causa uma deflexão para baixo na corrente de ar, que então tem velocidade  $v_{a2}$ . Assim, a asa exerce uma força na corrente de ar para defletir-la e, pela terceira lei de Newton, a corrente de ar exerce uma força igual e contrária na asa. A componente vertical dessa força  $F$  na asa é chamada de *sustentação* e a componente horizontal é chamada *arrastamento induzido* (ou simplesmente *arrastamento*).

A sustentação na asa e o padrão das linhas de corrente na Fig. 16-24 são consistentes com a equação de Bernoulli: o espaçamento das linhas é maior debaixo da asa do que acima, indicando que a velocidade do ar é menor e a pres-



**Fig. 16-24** Linhas de corrente em torno da asa de um avião em movimento. O ar, vindo horizontalmente pela direita, é defletido para baixo pela asa, que é forçada para cima fazendo com a horizontal um ângulo chamado de ângulo de ataque. Ao ser defletida, a corrente de ar exerce uma força  $F$  na asa.



**Fig. 16-25** Marmotas cavaram uma entrada para a toca numa elevação, de forma a arrastar o ar que, ali, está circulando mais rápido que na abertura mais baixa. As moléculas do ar na elevação são arrastadas (removidas) pela brisa, e o ar é então empurrado para dentro da toca.

são maior abaixo da asa do que acima. A maior pressão embaixo da asa é consistente com a existência de uma força para cima atuando na asa.

A força de sustentação que atua na asa do avião (frequentemente chamada de *sustentação dinâmica*) não deve ser confundida com o empuxo que aparece, de acordo com o princípio de Arquimedes, em balões e *icebergs* flutuantes. A sustentação dinâmica aparece somente quando o objeto e a corrente de ar estão em movimento relativo.

### 16-12 O Escoamento de Fluidos Reais (Opcional)

As seções precedentes tratavam do escoamento de um *fluido ideal*, sendo sua propriedade essencial a viscosidade zero. Todos os fluidos reais são viscosos e esta propriedade tem uma influência considerável em seu comportamento. Vejamos alguns exemplos.

#### A Camada Limite

Um efeito importante da viscosidade é que, quando existe um movimento relativo entre um fluido e um sólido, as moléculas do fluido imediatamente próximas à superfície do sólido tendem a aderir a esta superfície. É uma tendência que diminui rapidamente com a distância da superfície. A camada de fluido que exibe essa propensão de resistir ao movimento é chamada de *camada limite*.

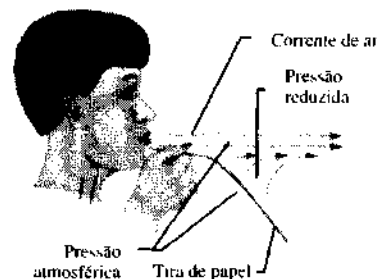
A existência de uma camada limite traz muitas consequências familiares. Por exemplo, seria de se esperar que a poeira não aderisse às pás de um ventilador, mas ela o faz. A razão é que o ar próximo à superfície da lâmina não se move em relação a ela, assim, não existe nenhum mecanismo para “soprar” as partículas de poeira. Da mesma forma, você não pode soprar toda a poeira fina do topo de uma mesa, é necessário retirá-la com um pano. Um pano de pratos é muito mais eficiente para limpar um prato que o simples enxaguar. Água fluindo em um córrego na mon-

tanha não é a principal razão pela qual o leito do curso d’água é entalhado na pedra. A formação da camada limite faz com que a água esteja praticamente parada em seus pontos de contato com o leito do córrego; são as partículas de pedra carregadas pela correnteza que fazem a maior parte do entalhamento.

#### Arrastamento

A marmota constrói sua toca abaixo do nível do chão. Para ventilar sua toca, o animal junta um montículo em uma das aberturas, como na Fig. 16-25. Quando uma brisa sopra pela pradaria e pelo montículo, *arrasta* (captura) e remove moléculas de ar na abertura do montículo. Devido à camada limite sobre o terreno plano, próximo à abertura mais baixa da toca, a brisa ali se move mais lentamente e o arrastamento é menor. Como é removida uma quantidade maior de ar na saída do montículo, a pressão ali é mais baixa, o que faz com que o ar seja empurrado pela abertura mais baixa para dentro da toca, saindo através do montículo, ventilando assim a toca.

Você pode demonstrar o efeito de arrastamento soprando uma corrente de ar sobre uma tira de papel, exatamente abaixo de seu lábio inferior (Fig. 16-26). O ar da corrente



**Fig. 16-26** Arrastamento e remoção do ar entre uma corrente de ar e uma folha de papel.

está à pressão atmosférica (ele adquire velocidade, não porque sua pressão foi reduzida, mas porque seus pulmões o impulsionaram). À medida que o ar flui acima da parte do papel próxima aos seus lábios, arrasta e remove moléculas de ar da camada entre ele e o papel, reduzindo a pressão do ar naquela região. A pressão atmosférica abaixo do papel o força, então, a subir.

### Sustentação Dinâmica

No futebol, o alcance de um bom passe pelo alto pode ser grandemente aumentado devido à *sustentação dinâmica* associada à rotação da bola. A camada limite está intimamente envolvida neste efeito.

A Fig. 16-27a mostra linhas de corrente para o escoamento uniforme de ar, em torno de uma bola parada e que não gira, à velocidade suficientemente baixa para que não ocorra turbulência. A Fig. 16-27b mostra linhas de corrente para o ar em torno de uma bola parada, mas girando rapidamente. A *circulação* (como é chamada) é devido à viscosidade do ar. Bolas de golfe são sistematicamente tornadas ásperas pela adição de protuberâncias, para aumentar essa circulação — e a sustentação dinâmica resultante.

A Fig. 16-27c mostra a combinação da circulação (resultante da rotação da bola) e do escoamento uniforme (re-

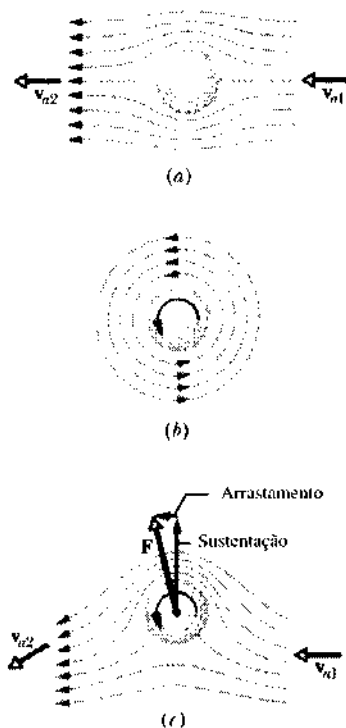


Fig. 16-27 (a) Linhas de corrente em torno de uma bola (que não gira). A velocidade do ar relativa à bola é inicialmente  $v_{a1}$  e no final  $v_{a2}$ . Aqui,  $v_{a2} = v_{a1}$ . (b) A circulação do ar, em torno da bola em rotação, é devido à sua viscosidade. (c) A circulação em (b) desvia a corrente de ar em (a), resultando no aparecimento de uma força  $F$  exercida pela corrente sobre a bola. A componente de  $F$  paralela a  $v_{a1}$  é o arrastamento induzido. A componente perpendicular a  $v_{a2}$  é a sustentação dinâmica.

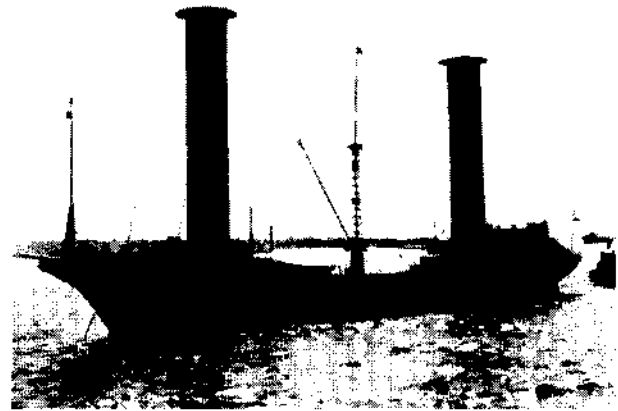


Fig. 16-28 O Baden-Baden, conhecido como o navio de Flettner, em homenagem a seu inventor Anton Flettner, cruzou o Atlântico em 1926, movido principalmente por forças atuando nos dois cilindros verticais giratórios mostrados.

sultante da translação da bola no ar). O efeito combinado é a deflexão da corrente de ar que chega, similar à que ocorre naquela em torno da asa do avião, na Fig. 16-24. Na Fig. 16-27c, a bola exerce uma força na corrente de ar e, pela terceira lei de Newton, a corrente de ar exerce uma força  $F$  igual e contrária na bola. A sustentação dinâmica na bola é a componente de  $F$  perpendicular à velocidade original  $v_{a1}$  da corrente de ar.

A sustentação e o padrão de linhas de corrente na Fig. 16-27c são consistentes com a equação de Bernoulli: o espaçamento das linhas de fluxo é maior abaixo da bola do que acima dela, indicando que a pressão do ar é maior embaixo do que em cima. A pressão maior embaixo é consistente com o fato de haver uma força agindo para cima sobre a bola.

Para produzir a sustentação da Fig. 16-27c, o taco de golfe tem de atingir a bola abaixo de seu centro, para lhe conferir uma rotação de baixo para cima em torno de um eixo horizontal. Se a bola for impulsionada erradamente, de forma que o eixo de rotação não seja horizontal, a sustentação não será vertical e resultará no terrível *hook* ou *slice* (tacada em que a bola é desviada para a direita). Uma bola que é impulsionada muito alto e, por isso, faz uma rotação de cima para baixo, sofre uma sustentação para baixo, o que reduz grandemente seu alcance.

A Fig. 16-27 também se aplica ao arremesso da bola no beisebol. Nesta situação, o eixo de rotação é vertical e a sustentação é horizontal, para a direita ou esquerda do lançador, dependendo da direção da rotação. Uma deflexão horizontal análoga impulsionou o navio da Fig. 16-28 através do Atlântico. Motores fazem girar cada um dos grandes cilindros em torno de seu eixo central. Quando um vento sopra entre os cilindros, as correntes de ar são defletidas, fazendo com que os cilindros (e o navio) sejam empurrados horizontalmente.



## RESUMO

**Densidade**

A **densidade** de qualquer material é definida como sua massa por unidade de volume:

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (16-1)$$

Em muitas situações práticas, onde a amostra do material é grande, comparada às dimensões atômicas, podemos escrever a Eq. 16-1 como  $\rho = m/V$ .

**Pressão em um Fluido**

Um **fluido** é uma substância que pode fluir; ele se ajusta à forma do recipiente que o contém porque não resiste a tensões de cisalhamento. Ele pode, entretanto, exercer uma força perpendicular à sua superfície. Esta força é descrita em termos de **pressão**  $p$ :

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (16-2)$$

onde  $\Delta F$  é a força que atua no elemento de superfície de área  $\Delta A$ . Se a força for uniforme sobre uma área plana, a Eq. 16-2 poderá ser escrita como  $p = F/A$ . A força resultante da pressão de um fluido em um ponto particular deste tem a mesma magnitude em todas as direções. A **pressão manométrica** é a diferença entre a pressão real e a atmosférica.

**Unidades de Pressão**

A unidade do SI para pressão é o **pascal** ( $= 1 \text{ N/m}^2$ ). Outras unidades são  $1 \text{ atm} = 1,01 \times 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ torr} = 14,7 \text{ lb/pol}^2$ .

**Variação de Pressão com Altura e Profundidade**

A pressão em um fluido em repouso varia com a posição vertical  $y$ . Para  $y$  positivo para cima,

$$p_2 = p_1 + \rho g(y_1 - y_2) \quad (16-4)$$

A pressão é a mesma para todos os pontos a um mesmo nível. Se  $h$  é a **profundidade** de uma porção de fluido, abaixo de algum nível de referência onde a pressão é  $p_0$ , a Eq. 16-4 fica

$$p = p_0 + \rho gh \quad (16-5)$$

Os Exemplos 16-2 a 16-5 ilustram essas idéias.

**Princípio de Pascal**

O **princípio de Pascal**, que pode ser deduzido da Eq. 16-4, estabelece que uma mudança na pressão, aplicada em um fluido confinado, é transmitida integralmente a todas as porções do fluido e às paredes do recipiente.

**Princípio de Arquimedes**

Na superfície de um objeto submerso atuam forças associadas à pressão do fluido. A soma vetorial dessas forças (chamada de **empuxo**) atua verticalmente para cima no centro de massa do fluido deslocado pelo objeto (**centro de empuxo**). O princípio de Arquimedes estabelece que a magnitude do empuxo é igual ao peso do fluido deslocado pelo objeto. Quando um objeto flutua, seu peso é igual ao empuxo que nele atua.

**Escoamento de Fluidos Ideais**

Um **fluido ideal** é aquele que não tem viscosidade e é incompressível, e cujo escoamento é uniforme e não-rotacional. Uma **linha de corrente** é o caminho seguido por partículas individuais do fluido. Um **tubo de corrente** é um feixe de linhas de corrente. O princípio da conservação da massa mostra que o escoamento dentro de um tubo de corrente obedece à **equação da continuidade**:

$$R = Av = \text{constante} \quad (16-13)$$

onde  $R$  é a **taxa de escoamento volumétrica (vazão)**,  $A$  a área da seção transversal do tubo de corrente em qualquer ponto e  $v$  a velocidade do fluido, supostamente constante através de  $A$ . A **taxa de escoamento de massa**  $A\rho v$  é também constante.

**Equação de Bernoulli**

Aplicando o princípio da conservação da energia mecânica ao escoamento de um fluido ideal, chegamos à **equação de Bernoulli**:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gy = \text{constante} \quad (16-17)$$

ao longo de qualquer tubo de corrente.

A pressão dentro de um fluido real é significativamente afetada pela viscosidade, o que leva ao aparecimento de fenômenos de camada limite e de sustentação dinâmica.

## QUESTIONÁRIO

1. Você pode determinar um coeficiente de atrito estático entre duas superfícies, sendo uma um fluido?
2. Faça uma estimativa da densidade média do seu corpo. Explique uma forma como você poderia chegar a este valor com precisão, usando as idéias deste capítulo.
3. Explique as variações de pressão no seu sangue, enquanto ele circula por seu corpo.
4. Os vasos da Fig. 16-29 estão cheios até a mesma altura, tendo todos a mesma área da base. Se a pressão for igual no fundo de cada vaso, a

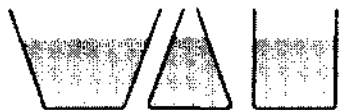


Fig. 16-29 Questão 4.

força experimentada pela base de cada vaso será também igual. Por que, então, os três vasos têm pesos diferentes quando colocados em uma balança? Este resultado, aparentemente contraditório, é comumente conhecido como o **paradoxo hidrostático**.

5. O princípio de Arquimedes é válido para um vaso em queda livre ou um satélite em órbita circular?
6. Um corpo esférico feito de cortiça flutua com metade de seu volume submerso, em um pote de chá, em repouso na Terra. A cortiça flutuará ou afundará quando a bordo de uma espaçonave (a) no espaço sem gravidade e (b) na superfície de Júpiter?
7. Como funciona um canudo, quando você o usa para beber um líquido qualquer?
8. O que aconteceria ao empuxo atuando em um balão de hélio se você substituísse este gás por hidrogênio? (O hidrogênio é menos denso que o hélio.)

9. Um bloco de madeira flutua em um balde d'água dentro de um elevador. Quando o elevador, partindo do repouso, acelera para baixo, o bloco flutuará mais alto na superfície da água? O que acontece quando o elevador acelera para cima?

10. Dois baldes idênticos estão cheios até a boca com água, mas um tem um bloco de madeira flutuando no líquido. Qual deles é mais pesado?

11. Pode-se afundar um navio de ferro enchendo-o de água do mar? (Veja Problema 80.)

12. Um bécquer se encontra completamente cheio de água no estado líquido, à temperatura do ponto de fusão, e um cubo de gelo flutua nela, à mesma temperatura. Enquanto o cubo derrete, o que acontece com o nível da água nos três casos: (a) o cubo de gelo é homogêneo; (b) o cubo contém grãos de areia; (c) o cubo contém bolhas de ar?

13. Uma bola flutua em um recipiente de água exposto à atmosfera. A bola permanecerá imersa na profundidade original ou se moverá se (a) o recipiente for fechado e o ar removido acima da superfície da água e (b) o recipiente for coberto e o ar comprimido?

14. A força de empuxo atuando em um submarino submerso é a mesma em qualquer profundidade? Explique por que um balão inflado sobe somente até uma certa altura, enquanto o submarino sempre desce até o fundo do oceano, se nenhuma mudança ocorrer.

15. Por que um balão pesa a mesma coisa estando vazio ou cheio de ar à pressão atmosférica? Esses pesos seriam os mesmos se medidos no vácuo?

16. Durante a Segunda Guerra Mundial, um cargueiro danificado, que mal era capaz de flutuar nas águas salgadas do Mar do Norte, naufragou porque subiu o Tâmisa em direção às docas de Londres. Por quê?

17. Projete um bote salva-vidas ou um veleiro que retorne sozinho à posição normal, quando emborcado por águas turbulentas ou vento forte. Explique o retorno em termos do centro de massa e centro de empuxo.

18. Por que, na maioria dos casos, um navio naufragando emborca quando submerge na água?

19. Uma barça cheia de limalha de ferro se encontra em um canal fechado e estreito. Se o ferro for lançado na água, o que acontecerá com o nível d'água do canal? E se for lançado na terra ao lado do canal?

20. Um bote flutuando em uma piscina pouco mais larga que ele possui um pequeno furo e afunda gradualmente até que fique completamente submerso. Explique o que acontece com o nível da água durante o processo.

21. Um balde de água é suspenso em uma balança de mola. A leitura da balança muda quando um pedaço de ferro suspenso por um cordão é imerso na água? Quando uma rolha é colocada na água? (Nenhuma água transborda nas duas situações.)

22. Por que um toco de madeira uniforme flutua horizontalmente? Se uma quantidade suficiente de ferro for adicionada a uma das extremidades, ele flutuará verticalmente. Explique.

23. Apesar de haver dificuldades práticas, é possível, em princípio, fazer um cargueiro flutuar em uns poucos milhares de litros d'água. Explique como.

24. Explique por que um cano de paredes finas se romperá mais facilmente se, quando houver uma diferença de pressão entre a parte de fora e a de dentro, o excesso de pressão for do lado de fora.

25. Explique por que a altura do líquido nos tubos verticais da Fig. 16-30 indica que a pressão cai ao longo do tubo, mesmo tendo este uma seção transversal uniforme e sendo o líquido incompressível.

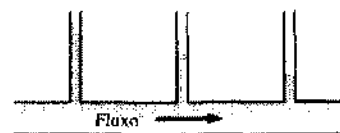


Fig. 16-30 Questão 25.

26. Numa experiência em sala de aula, uma bola de pingue-pongue é mantida suspensa por um jato vertical de ar. Este equilíbrio é estável, instável ou indiferente? Explique.

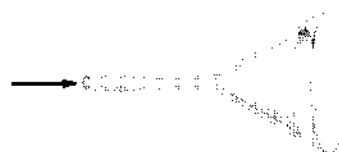


Fig. 16-31 Questão 28.

27. Dois barcos a remo, movendo-se paralelamente na mesma direção, tendem a se aproximar um do outro. Dois automóveis, movendo-se paralelamente, também são puxados um para o outro. Explique estes fenômenos usando a equação de Bernoulli.

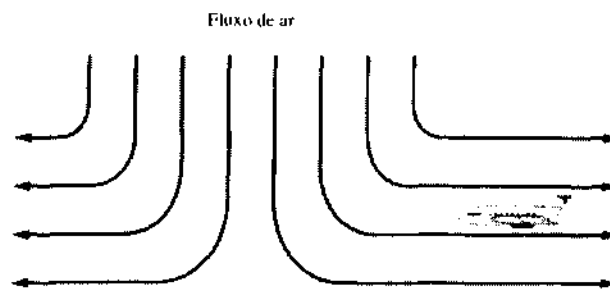


Fig. 16-32 Questão 30.

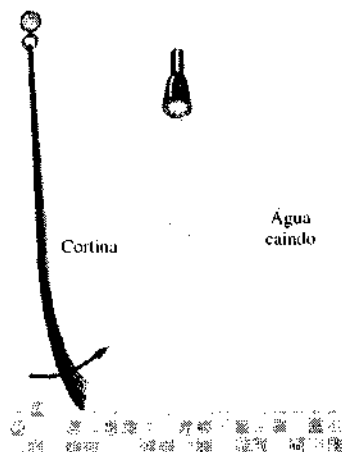


Fig. 16-33 Questão 31.

28. Explique por que você não pode retirar o filtro de papel do funil da Fig. 16-31 soprando pelo lado fino.

29. Por que um disco lançado *contra* um vento de 35 km/h vai mais longe que um lançado a favor?

30. No dia 2 de agosto de 1985, durante uma aterrissagem de rotina no aeroporto de Dallas-Fort Worth, um jato L-1011 da Delta Airlinc caiu quando, inadvertidamente, voou sobre um *microvácio* (veja Fig. 16-32). O acidente matou 136 das 167 pessoas a bordo. A velocidade do ar relativa ao chão, no microvácio, era de 75 km/h. Quando o jato penetrou o microvácio, sua velocidade (relativa ao ar) era de 300 km/h. O jato L-1011 necessita de uma velocidade em relação ao ar acima de 210 km/h ou perde altura (*testola*). Por que este jato da Delta caiu?

31. Por que a cortina do chuveiro, em um boxe típico, tende a vibrar durante um banho (Fig. 16-33)? (A vibração aparece independentemente da temperatura da água, razão pela qual a convexão do ar quente e frio não serve como explicação.)

### EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

#### Seção 16-3 Densidade e Pressão

1E. Converta a densidade de 1,0 g/cm<sup>3</sup> para kg/m<sup>3</sup>.

2E. Três líquidos que não se misturam são derramados dentro de um recipiente cilíndrico. Os volumes e densidades dos líquidos são 0,50 L, 2,6 g/cm<sup>3</sup>; 0,25 L, 1,0 g/cm<sup>3</sup>; e 0,40 L, 0,80 g/cm<sup>3</sup>. Qual é a força aplicada no fundo do recipiente devido a esses líquidos? Um litro = 1L = 1.000 cm<sup>3</sup>. (Ignore a contribuição da atmosfera.)

3E. Encontre o aumento de pressão de um fluido em uma seringa quando uma enfermeira aplica uma força de 42 N ao êmbolo da seringa, de raio 1,1 cm.

4E. Você calibra os pneus da frente do seu carro em 28 psi. Mais tarde, mede sua pressão sanguínea, obtendo uma leitura de 120/80, sendo ela em mm Hg. Em países que usam o sistema métrico decimal, essa pressão é comumente expressa em quilopascals (kPa). Qual é a pressão de seus pneus e sua pressão sanguínea em quilopascals?

5E. A janela de um escritório tem dimensões de 3,4 m por 2,1 m. Como resultado de uma tempestade, a pressão do ar do lado de fora cai para 0,96 atm, mas a pressão de dentro permanece 1,0 atm. Qual o valor da força que puxa a janela para fora?

6E. Um peixe controla sua profundidade na água através do ajuste do conteúdo de ar de um osso poroso ou em sacos de ar para que sua densidade fique igual à da água. Suponha que, com as bolsas de ar vazias, um peixe tenha a densidade de 1,08 g/cm<sup>3</sup>. Se ele quiser reduzir sua densidade à da água, que fração do volume do seu corpo deverá ser ocupada por ar dentro dos sacos? (Estes sacos são chamados bexigas natatórias.)

7P. Uma caixa vedada com uma tampa de 12 pol<sup>2</sup> de área é parcialmente evacuada. Se uma força de 108 libras é necessária para tirar a tampa da caixa e a pressão atmosférica do exterior é 15 lib/pol<sup>2</sup>, qual é a pressão do ar na caixa?

8P. Em 1654, Otto von Guericke, burgomestre de Magdeburg e inventor da bomba de ar, deu uma demonstração diante da Dieta Imperial em que dois grupos de oito cavalos não foram capazes de separar dois hemisférios de latão unidos, dentro dos quais se fez vácuo. (a) Pressupondo que os hemisférios tenham paredes finas, de forma que  $R$  na Fig. 16-

34 possa ser considerado o raio interno e externo, mostre que a força  $F$  necessária para separar os hemisférios é  $F = \pi R^2 \Delta p$ , onde  $\Delta p$  é a diferença entre as pressões interna e externa na esfera. (b) Fazendo  $R$  igual a 1,0 pé e a pressão interna igual a 0,10 atm, encontre a força que os cavalos teriam de exercer para separar os hemisférios. (c) Por que foram usados dois grupos de cavalos? Apenas um grupo não provaria a tese da mesma forma?

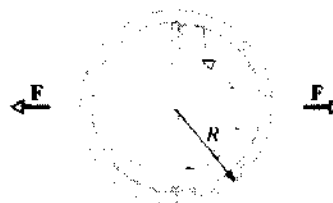


Fig. 16-34 Problema 8.

#### Seção 16-4 Fluidos em Repouso

9E. Calcule a diferença de pressão hidrostática sanguínea entre o cérebro e o pé de uma pessoa de 1,83 m de altura. A densidade do sangue é  $1,06 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>.

10E. Encontre a pressão, em pascal, 150 m abaixo da superfície do oceano. A densidade da água do mar é 1,03 g/cm<sup>3</sup> e a pressão atmosférica ao nível do mar é  $1,01 \times 10^5$  Pa.

11E. A rede de esgotos de uma casa construída em uma ladeira está 8,2 m abaixo do nível da rua. Se o cano se encontra a 2,1 m abaixo do nível da rua, encontre a diferença de pressão mínima que deve ser criada pela bomba de recalque para puxar esgoto de densidade média 900 kg/m<sup>3</sup>.

12E. A Fig. 16-35 apresenta o *diagrama de fase* do carbono, mostrando as faixas de temperatura e pressão em que o carbono se cristaliza em diamante ou grafite. Qual seria a profundidade mínima para a formação do diamante, se a temperatura local for 1.000°C e as rochas abaixo da superfície tiverem densidade de 3,1 g/cm<sup>3</sup>? Considere que, como no fluido, a pressão se deve ao peso do material depositado acima.

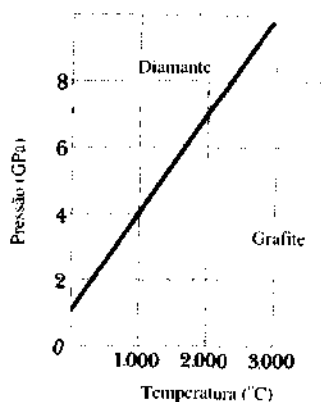


Fig. 16-35 Exercício 12.

13E. Os pulmões humanos podem operar sob uma diferença de pressão de até cerca de 1/20 da atmosférica. Se um mergulhador usar um respirador, a que distância abaixo da superfície pode nadar?

14E. Uma piscina tem dimensões de 80 pés × 30 pés × 8,0 pés. (a) Quando ela está cheia de água, qual é a força (devido à água somente) sobre o fundo, nas extremidades e nos lados? (b) Se você estiver preocupado com o fato das paredes e pisos de concreto se quebrarem, seria apropriado levar em conta a pressão atmosférica? Por quê?

15E. (a) Encontre o peso total da água em cima de um submarino nuclear, a uma profundidade de 200 m, supondo que seu casco (corte da seção transversal) tenha área de 3.000 m<sup>2</sup>. (b) A que pressão da água um mergulhador estaria submetido a essa profundidade? Expresse sua resposta em atmosferas. Você acha que os ocupantes de um submarino danificado, a essa profundidade, poderiam escapar sem equipamento especial? Considere a densidade da água do mar 1,03 g/cm<sup>3</sup>.

16E. Membros da tripulação tentam escapar de um submarino danificado, 100 m abaixo da superfície. Que força eles têm de aplicar no alçapão, de 1,2 m por 0,60 m, para empurrá-lo para fora? Considere a densidade da água do oceano 1.025 kg/m<sup>3</sup>.

17E. Um simples tubo aberto em U contém mercúrio. Quando 11,2 cm de água forem colocados no braço direito do tubo, quanto subirá a coluna de mercúrio no braço esquerdo, em relação ao seu nível inicial?

18P. Dois vasos cilíndricos idênticos, com suas bases ao mesmo nível, contêm um líquido de densidade  $\rho$ . A área da base é  $A$  para ambos, mas em um dos vasos a altura do líquido é  $h_1$  e no outro é  $h_2$ . Encontre o trabalho realizado pela força gravitacional ao igualar os níveis, quando os dois vasos são conectados.

19P. Um barril cilíndrico possui um tubo fino fixo em seu topo, como mostrado com dimensões na Fig. 16-36. O conjunto é cheio de água até o topo do tubo. Calcule a razão entre a força hidrostática exercida no fundo do barril e o peso da água. Por que esta razão não é igual a um? (Ignore a presença da atmosfera.)

20P. (a) Considere um recipiente com fluido sujeito a uma aceleração vertical para cima  $a$ . Mostre que a variação da pressão com a profundidade no fluido é dada por

$$p = \rho h(g + a),$$

onde  $h$  é a profundidade e  $\rho$  a densidade. (b) Mostre também que, se o fluido como um todo adquirir uma aceleração vertical para baixo  $a$ , a pressão a uma profundidade  $h$  será dada por

$$p = \rho h(g - a).$$

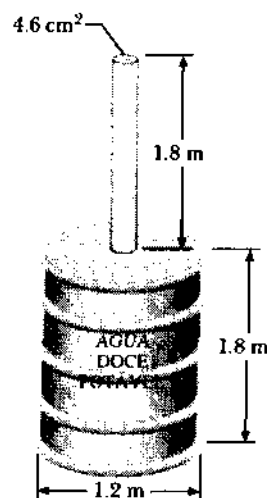


Fig. 16-36 Problema 19.

(c) Como ficariam as coisas em queda livre?

21B. Ao analisar certos aspectos geológicos da Terra, é freqüentemente apropriado supor que a pressão em algum nível de compensação horizontal, no interior da Terra, é a mesma em uma grande região e igual àquela exercida pelo peso do material depositado sobre ela. Ou seja, a pressão no nível de compensação é dada pela fórmula de pressão num fluido. Isto requer, por exemplo, que montanhas tenham raízes de baixa densidade; veja Fig. 16-37. Considere uma montanha de 6 km de altura. As rochas continentais têm uma densidade de 2,9 g/cm<sup>3</sup> e, abaixo do continente, está o manto com uma densidade de 3,3 g/cm<sup>3</sup>. Calcule a

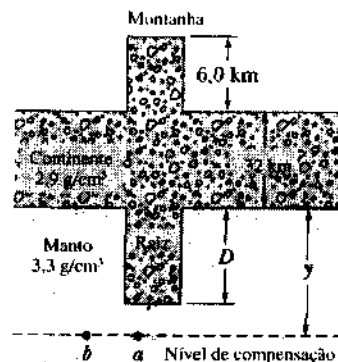


Fig. 16-37 Problema 21.

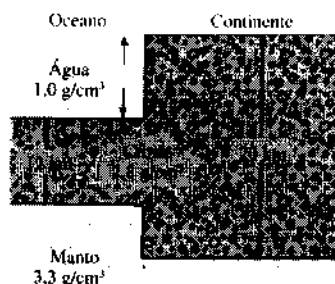


Fig. 16-38 Problema 22.

profundidade  $P$  da raiz. (Sugestão: Faça as pressões nos pontos  $a$  e  $b$  iguais; a profundidade  $y$  do nível de compensação se cancelará.)

**22P.** Na Fig. 16-38, o oceano está a ponto de invadir o continente. Encontre a profundidade  $h$  do oceano, usando o método do nível de compensação mostrado no Problema 21.

**23P.** A água se encontra a uma profundidade  $P$  abaixo da face vertical de um dique, como ilustra a Fig. 16-39. Seja  $W$  a largura do dique. (a) Encontre a força horizontal resultante, exercida no dique pela pressão manométrica da água e (b) o torque resultante devido a esta pressão em relação ao ponto  $O$ . (c) Encontre o braço de alavanca, em relação ao ponto  $O$ , da força horizontal resultante sobre o dique.

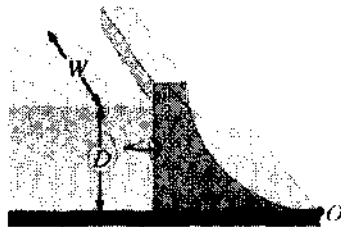


Fig. 16-39 Problema 23.

**24P.** A Fig. 16-40 mostra um dique e parte do reservatório de água doce represada atrás dele. O dique é feito de concreto de densidade  $3,2 \text{ g/cm}^3$  e tem as dimensões mostradas na figura. (a) A força exercida pela água empurra, horizontalmente, a parede do dique e encontra uma resistência criada pela força de atrito estático entre o dique e a fundação rochosa em que ele se assenta. O coeficiente de atrito é  $0,47$ . Calcule o fator de segurança contra deslizamento, ou seja, a razão entre a força de atrito máxima possível e a exercida pela água. (b) A água também tende a fazer rodar o dique em torno de uma linha que passa através da sua base pelo ponto  $A$ ; veja Problema 23. O torque resultante do peso do dique atua no sentido oposto. Calcule o fator de segurança contra rotação, ou seja, a razão entre o torque devido ao peso do dique e o exercido pela água.

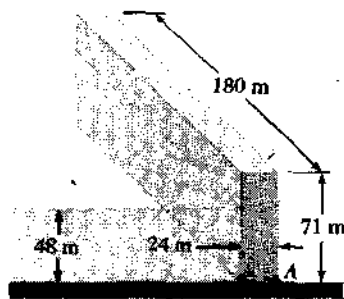


Fig. 16-40 Problema 24.

**25P.** Um tubo em U está cheio de um líquido homogêneo. O líquido é temporariamente rebaixado em um lado por um pistom. Este é removido e o nível do líquido, em cada lado, oscila. Mostre que o período de oscilação é  $\pi \sqrt{2L/g}$ , onde  $L$  é o comprimento total de líquido no tubo.

**Seção 16-5 Medindo a Pressão**

**26E.** Calcule a altura de uma coluna de água que produz uma pressão de  $1 \text{ atm}$  no fundo. Considere  $g = 9,80 \text{ m/s}^2$ .

**27E.** Se você pode usar um canudo de altura máxima  $4,0 \text{ cm}$  para beber uma limonada de densidade  $1.000 \text{ kg/m}^3$ , qual a pressão manométrica mínima (em atmosferas) que você pode produzir em seus pulmões?

**28P.** Qual seria a altura da atmosfera, se a densidade do ar (a) fosse constante e (b) decrescesse linearmente com a altura até zero? Considere a densidade ao nível do mar  $1,3 \text{ kg/m}^3$ .

**Seção 16-6 O Princípio de Pascal**

**29E.** Um pistom de área menor  $a$  é usado em uma prensa hidráulica, para exercer uma pequena força  $f$  no líquido confinado. Um tubo o conecta a um pistom maior de área  $A$  (Fig. 16-41). (a) Que força  $F$  o pistom maior sustentará? (b) Se o pistom pequeno tem um diâmetro de  $1,5 \text{ pol}$  e o grande de  $21 \text{ pol}$ , que peso no pequeno sustentará  $2,0$  toneladas no maior?

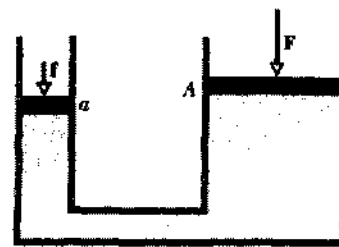


Fig. 16-41 Exercício 29.

**30E.** Na prensa hidráulica do Exercício 29, de que distância deve ser movido o pistom grande para elevar o pequeno a  $3,5$  pés?

**Seção 16-7 O Princípio de Arquimedes**

**31E.** Uma lata tem volume de  $1.200 \text{ cm}^3$  e massa de  $130 \text{ g}$ . Quantas gramas de bulas de chumbo ela poderia carregar, sem que afundasse na água? A densidade do chumbo é  $11,4 \text{ g/cm}^3$ .

**32E.** Um bote flutuando em água doce desloca  $8.000$  libras de água. (a) Quantas libras de água esse bote deslocaria, se estivesse flutuando em águas salgadas de densidade  $68,6 \text{ lb/pés}^3$ ? (b) O volume de água deslocada mudaria? Em caso afirmativo, de quanto?

**33E.** Cerca de um terço do corpo de um estudante de Física, nadando no Mar Morto, ficará acima da superfície. Considerando a densidade do corpo humano  $0,98 \text{ g/cm}^3$ , encontre a densidade da água do Mar Morto. (Por que ela é tão maior do que  $1,0 \text{ g/cm}^3$ ?)

**34E.** Uma âncora de ferro, quando totalmente imersa na água, parece  $200 \text{ N}$  mais leve que no ar. (a) Qual é o volume da âncora? (b) Qual é o seu peso no ar? A densidade do ferro é  $7.870 \text{ kg/m}^3$ .

**35E.** Um objeto está dependurado na mola de uma balança. A balança registra  $30 \text{ N}$  no ar,  $20 \text{ N}$  quando o objeto se encontra imerso em água e  $24 \text{ N}$  quando ele se encontra imerso em um líquido de densidade desconhecida. Qual é a densidade do líquido?

**36E.** Um objeto cúbico, de dimensões  $L = 2,00$  pés de lado e peso  $P = 1.000 \text{ lb}$  no vácuo, é suspenso por um fio em um tanque aberto com líquido de densidade  $\rho = 2,00 \text{ slugs/pés}^3$ , como na Fig. 16-42. (a) Encontre a força total para baixo, exercida pelo líquido e pela atmosfera sobre o objeto. (b) Encontre a força total para cima na base do objeto. (c) Encontre a tensão no fio. (d) Calcule o empuxo sobre o objeto, usando o princípio de Arquimedes. Qual a relação existente entre todas essas quantidades?

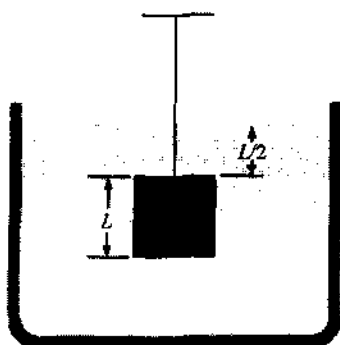


Fig. 16-42 Exercício 36.

37E. Um bloco de madeira flutua em água com dois terços de seu volume submerso. Em óleo, flutua com 0,90 de seu volume submerso. Encontre a densidade (a) da madeira e (b) do óleo.

38E. Houve propostas de se transportar gás natural das reservas do Mar do Norte em imensos balões dirigíveis, usando o próprio gás para prover a ascensão. Calcule a força necessária para amarrar tal nave e fixá-la ao chão para descarregar, quando estiver completamente cheia com seus  $1,0 \times 10^6 \text{ m}^3$  de gás, a uma densidade de  $0,80 \text{ kg/m}^3$ . (O peso do balão é desprezível, nestas condições.)

39E. O balão *Columbia* da Goodyear (veja Fig. 16-43) viaja lentamente a baixa altitude, cheio de gás hélio. Seu carregamento útil máximo, incluindo tripulação e carga, é de  $1.280 \text{ kg}$ . Qual a quantidade de carga a mais que o *Columbia* poderia suportar, se substituíssemos o hélio por hidrogênio? Por que não fazê-lo? O volume do compartimento de hélio é de  $5.000 \text{ m}^3$ . A densidade do gás hélio é  $0,16 \text{ kg/m}^3$  e a do hidrogênio,  $0,081 \text{ kg/m}^3$ .



Fig. 16-43 Exercício 39.

40E. Um balão de hélio é utilizado para elevar uma carga de  $40 \text{ kg}$  a uma altitude de  $27 \text{ km}$ , onde a densidade do ar é  $0,035 \text{ kg/m}^3$ . O balão tem massa de  $15 \text{ kg}$ , e a densidade do gás no balão é de  $0,0051 \text{ kg/m}^3$ . Qual é o volume do balão? Despreze o volume da carga.

41P. Uma esfera oca, de raio interno igual a  $8,0 \text{ cm}$  e raio externo  $9,0 \text{ cm}$ , flutua submersa pela metade em um líquido de densidade  $800 \text{ kg/m}^3$ . (a) Qual é a massa da esfera? (b) Calcule a densidade do material de que ela é feita.

42P. Uma concha esférica oca de ferro flutua quase completamente submersa em água. O diâmetro externo é de  $60,0 \text{ cm}$  e a densidade do ferro é de  $7,87 \text{ g/cm}^3$ . Encontre o diâmetro interno.

43P. Uma fundidora de ferro, contendo um certo número de cavidades, pesa  $6.000 \text{ N}$  no ar e  $4.000 \text{ N}$  na água. Qual é o volume das cavidades da fundidora? A densidade do ferro é  $7,87 \text{ g/cm}^3$ .

44P. (a) Qual é a área mínima da superfície superior de uma camada de gelo de  $0,30 \text{ m}$  de espessura, flutuando em água doce, que pode sustentar um automóvel de  $1.100 \text{ kg}$  de massa? (b) A posição do carro no bloco de gelo tem alguma influência?

45P. Três crianças, cada uma pesando  $80 \text{ lb}$ , constroem uma jangada amarrando troncos de  $1,0 \text{ pé}$  de diâmetro e  $6,0 \text{ pés}$  de comprimento. Quantos troncos serão necessários para que a jangada as sustente? Tome a densidade da madeira como sendo  $50 \text{ lb/pés}^3$ .

46P. Considere a densidade de pesos de latão  $8,0 \text{ g/cm}^3$  e a do ar  $0,0012 \text{ g/cm}^3$ . Que erro percentual aparece por se desprezar o empuxo do ar, ao pesar um objeto de massa  $m$  e densidade  $\rho$  em uma balança?

47P. Um carro tem uma massa total de  $1.800 \text{ kg}$ . O volume de ar no compartimento de passageiros é de  $5,00 \text{ m}^3$ . O volume do motor e das rodas dianteiras é de  $0,750 \text{ m}^3$ , e o volume das rodas traseiras, tanque e bagageiro é  $0,800 \text{ m}^3$ . A água não entra nestas áreas. O carro está estacionado em uma ladeira, o cabo do freio de mão se solta e ele desce a ladeira até um lago (veja Fig. 16-44). (a) A princípio, nenhuma água penetra no compartimento dos passageiros. Quanto do carro, em metros cúbicos, fica abaixo da superfície da água com o carro flutuando como na figura? (b) Lentamente, a água entra e o carro afunda. Quantos metros cúbicos de água penetram no carro, enquanto ele desaparece abaixo da superfície? (O carro permanece horizontal, devido a uma carga pesada no bagageiro.)

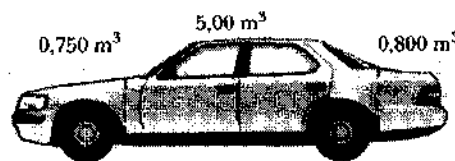


Fig. 16-44 Problema 47.

48P. Um bloco de madeira tem massa de  $3,67 \text{ kg}$  e uma densidade de  $600 \text{ kg/m}^3$ . Ele deve ser carregado de chumbo de forma a flutuar em água com  $0,90$  de seu volume imerso. Que massa de chumbo é necessária (a) se o chumbo ficar em cima da madeira e (b) se o chumbo for atado abaixo da madeira? A densidade do chumbo é  $1,13 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$ .

49P. Coloca-se um béquer de vidro, parcialmente cheio de água, em uma pia (Fig. 16-45). Ele tem massa de  $390 \text{ g}$  e um volume interno de  $500 \text{ cm}^3$ . Começa-se, então, a encher a pia com água e verifica-se por experiência que, se o béquer estiver com água até menos da metade, flutuará; mas, se a água nele estiver acima da metade, permanecerá no fundo da pia até alcançar suas bordas. Qual é a densidade do material de que é feito o béquer?

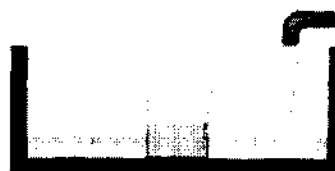


Fig. 16-45 Problema 49.

**50P.** Qual é a aceleração de um balão de ar quente que sobe, se a razão entre a densidade do ar externa ao balão e a interna é 1,39? Despreze a massa do material de que é feito o balão.

**51P.** A extremidade de uma haste de madeira cilíndrica é conectada a um pedaço de chumbo, de forma que ela flutue verticalmente na água como na Fig. 16-46. O comprimento da parte submersa é  $l = 2,50$  m. A haste é posta para oscilar verticalmente. (a) Mostre que a oscilação é harmônica simples. (b) Encontre o período da oscilação. Despreze o fato de a água exercer um efeito amortecedor no movimento.

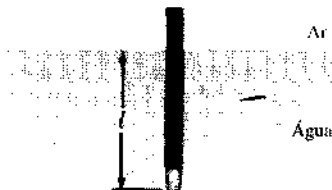


Fig. 16-46 Problema 51.

**52P\*.** A tensão em uma corda presa a um bloco sólido, abaixo da superfície de um líquido (de densidade maior que a do sólido), é  $T_0$  quando o recipiente (Fig. 16-47) está em repouso. Mostre que a tensão  $T$ , quando o recipiente tem uma aceleração vertical para cima  $a$ , é dada por  $T_0(1 + at/g)$ .

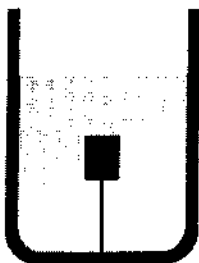


Fig. 16-47 Problema 52.

### Seção 16-9 Linhas de Corrente e a Equação de Continuidade

**53E.** A Fig. 16-48, mostra o encontro de dois córregos para formar um rio. Um córrego tem largura de 8,2 m, profundidade de 3,4 m, e velocidade da correnteza de 2,3 m/s. O outro tem 6,8 m de largura, 3,2 m de profundidade e flui a 2,6 m/s. A largura do rio é de 10,5 m e flui a 2,9 m/s. Qual é a sua profundidade?

**54E.** Um cano de água de 3/4 pol (diâmetro interno) é ajustado a três canos de 1/2 pol. (a) Se a vazão nos três canos menores é 7,0, 5,0 e 3,0 gal/min, qual é a vazão no cano de 3/4? (b) Qual é a razão entre a velocidade da água no cano de 3/4 e aquela do cano cuja vazão é 7,0 gal/min?

**55E.** Uma mangueira de jardim, de diâmetro interno 0,75 pol, é conectada a um esguicho que consiste em um cano com 24 furos, cada um com 0,050 pol de diâmetro. Se a água na mangueira tiver velocidade de 3,0 pés/s, com que velocidade ela sairá dos buracos do esguicho?

**56P.** A água é bombeada continuamente para fora de um porão inundado, a uma velocidade de 5,0 m/s, através de uma mangueira uniforme



Fig. 16-48 Exercício 53.

de raio 1,0 cm. A mangueira passa por uma janela 3,0 m acima do nível da água. Qual é a potência da bomba?

**57P.** Um rio de 20 m de largura e 4,0 m de profundidade drena uma área de 3.000 km<sup>2</sup> com uma precipitação média de 48 cm/y. Um quarto desta chuva retorna à atmosfera por evaporação, mas o restante vai para o rio. Qual é a velocidade média da correnteza do rio?

### Seção 16-11 Algumas Aplicações da Equação de Bernoulli

**58E.** A água se move com uma velocidade de 5,0 m/s através de um cano com uma área de seção transversal de 4,0 cm<sup>2</sup>. A água desce 10 m gradualmente, enquanto a área do cano aumenta para 8,0 cm<sup>2</sup>. (a) Qual é a velocidade do escoamento no nível mais baixo? (b) Se a pressão no nível mais alto for  $1,5 \times 10^5$  Pa, qual será a pressão no nível mais baixo?

**59E.** Modelos de torpedos são muitas vezes testados em tubos horizontais, por onde flui água, assim como túneis de vento são usados para testar modelos de aviões. Considere um tubo circular, de diâmetro interno 25 cm, e um modelo de torpedo, alinhado paralelamente ao eixo do tubo, com um diâmetro de 5,00 cm. O teste será feito com água escoando a uma velocidade de 2,50 m/s. (a) Com que velocidade a água precisa fluir na parte não-tomada pelo torpedo? (b) Qual será a diferença de pressão entre a parte tomada e a não-tomada do tubo?

**60E.** O orifício de entrada da bomba de um reservatório (ver Fig. 16-49) tem área de seção transversal de 8,00 pés<sup>2</sup>. A água flui para dentro com uma velocidade de 1,33 pés/s. No gerador, 600 pés abaixo do orifício de entrada, a área da seção transversal é menor do que na entrada e a água flui para fora a 31,0 pés/s. Qual é a diferença de pressão entre a entrada e a saída?



Fig. 16-49 Exercício 60.

**61E.** Um cano de água, de diâmetro interno 1,0 pol, transporta água para o porão de uma casa a uma velocidade de 3,0 pés/s e a uma pressão de

25 lb/pol<sup>2</sup>. Se o cano for reduzido para 1/2 pol e direcionado para o segundo andar, 25 pés acima, quais serão (a) a velocidade e (b) a pressão da água no segundo andar?

62E. Qual a quantidade de trabalho realizada pela pressão que empurra 1,4 m<sup>3</sup> de água através de um tubo de 13 mm de diâmetro interno, se a diferença de pressão entre as duas extremidades do tubo é 1,0 atm?

63E. Em um encanamento de óleo horizontal, de área de seção transversal constante, o decréscimo de pressão entre dois pontos a uma distância de 1.000 pés é 5,0 lb/pol<sup>2</sup>. Qual é a perda de energia por pé, para cada pé cúbico de óleo?

64E. Um tanque de grande área é cheio de água a uma profundidade  $D = 1,0$  pé. Um buraco de área  $A = 1,0$  pol<sup>2</sup> no fundo do tanque permite que a água escoe. (a) A que taxa a água flui pelo buraco? A que distância, abaixo do fundo do tanque, a área da seção transversal do jato será a metade da área do buraco?

65E. Suponha que dois tanques, 1 e 2, cada um com uma grande abertura na parte de cima, contenham dois líquidos diferentes. Um pequeno furo é feito nos dois tanques, a uma mesma profundidade  $h$  abaixo da superfície do líquido, mas o furo no tanque 1 tem a metade da área de seção transversal do furo no 2. (a) Qual é a razão  $\rho_1/\rho_2$  das densidades dos fluidos, se for observado que a vazão de massa é a mesma nos dois furos? (b) Qual é a razão entre as vazões dos dois tanques? (c) Até que altura acima do furo se deve adicionar ou retirar líquido do tanque 2, para igualar as vazões?

66E. Sobre a asa de um avião de área  $A$ , o ar escoou a uma velocidade  $v_a$ , sob a asa (também área  $A$ ), a velocidade do ar é  $v_b$ . Mostre que, nessa situação simplificada, a equação de Bernoulli prediz que a magnitude  $L$  da força de sustentação na asa será

$$L = \frac{1}{2} \rho A (v_a^2 - v_b^2),$$

onde  $\rho$  é a densidade do ar.

67E. Se a velocidade do escoamento, passando debaixo de uma asa, é 110 m/s, que velocidade do escoamento na parte de cima criará uma diferença de pressão de 900 Pa entre as superfícies de cima e de baixo? Considere a densidade do ar  $\rho = 1,30 \times 10^{-3}$  g/cm<sup>3</sup>. (Ver Exercício 66.)

68E. Um avião tem asas de área (cada uma) 10,0 m<sup>2</sup>. A uma certa velocidade do ar, a velocidade do escoamento na superfície superior na asa é 48,0 m/s e 40,0 m/s na inferior. Qual é a massa do avião? Suponha que o avião viaje a velocidade constante, que a densidade do ar é 1,20 kg/m<sup>3</sup> e que o efeito de sustentação associado à fuselagem e à cauda seja pequeno. Como ficará a sustentação se o avião, voando à mesma velocidade, estiver (a) em trajetória horizontal, (b) subindo a 15° e (c) descendo a 15°. (Veja Exercício 66.)

69E. Um tubo de Pitot, como o esquematizado na Fig. 16-50, é usado para determinar a velocidade de um avião em relação ao ar. Consiste em um tubo externo com um número de pequenos furos  $B$  (são mostrados quatro na figura); o tubo é conectado a um dos braços de outro tubo em U, cujo segundo braço está conectado a um buraco  $A$ , na parte frontal do aparelho, que se alinha com a direção de voo do avião. Em  $A$ , o ar fica parado, logo,  $v_A = 0$ . Em  $B$ , entretanto, a velocidade do ar presumidamente se iguala à velocidade do avião relativa ao ar. Use a equação de Bernoulli para mostrar que

$$v = \sqrt{\frac{2\rho g h}{\rho_a}},$$

onde  $v$  é a velocidade do avião em relação ao ar e  $\rho$  é a densidade do líquido dentro do tubo em U.

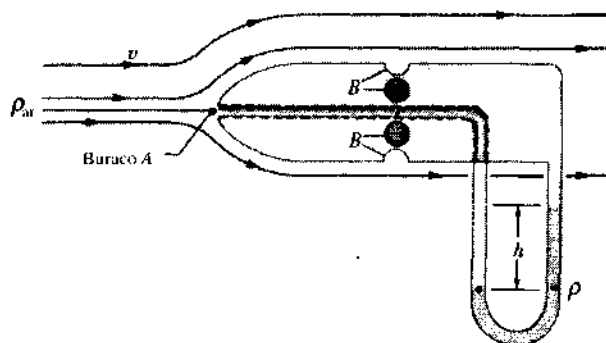


Fig. 16-50 Exercício 69.

70E. Um tubo, como o do Exercício 69, é montado em uma asa de avião para determinar a velocidade deste em relação ao ar, que tem densidade de 1,03 kg/m<sup>3</sup>. O tubo contém álcool e indica uma diferença de nível  $h$  de 26,0 cm. Qual é a velocidade do avião relativa ao ar? A densidade do álcool é 810 kg/m<sup>3</sup>.

71P. Um tubo, como o da Fig. 16-50, em um avião a grande altitude, mede uma diferença de pressão de 180 Pa. Qual será a velocidade relativa ao ar, se a densidade do ar for 0,031 kg/m<sup>3</sup>?

72P. Em um furacão, o ar (densidade 1,2 kg/m<sup>3</sup>) passa sobre o telhado de uma casa a uma velocidade de 110 km/h. (a) Qual é a diferença de pressão entre a parte de dentro e a de fora, que tende a arrancar o telhado? (b) Qual seria a força exercida em um telhado de 90 m<sup>2</sup>?

73P. As janelas de um prédio de escritórios têm dimensões de 4,00 m por 5,00 m. Em um dia tempestuoso, o ar passa pela janela do 53º andar, paralelo à janela, a uma velocidade de 30,0 m/s. Calcule a força resultante aplicada na janela. A densidade do ar é 1,23 kg/m<sup>3</sup>.

74P. Um franco atirador dispara um rifle em um tanque de gasolina, abrindo um buraco a 50 m abaixo da superfície da gasolina. O tanque é selado e se encontra sob uma pressão absoluta de 3,0 atm, como mostrado na Fig. 16-51. A densidade da gasolina é 660 kg/m<sup>3</sup>. A que velocidade  $v$  a gasolina começa a escapar pelo furo?

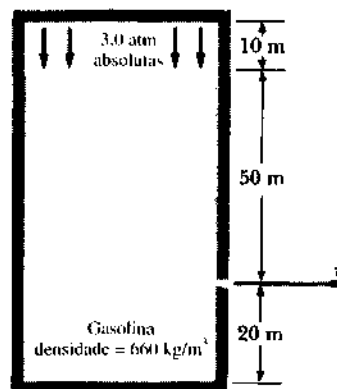


Fig. 16-51 Problema 74.

75P. Um tubo oco possui um disco  $DD$  conectado a uma de suas extremidades (Fig. 16-52). Quando o ar é soprado através do tubo, o disco atrai o cartão  $CC$ . Seja a área do cartão  $A$  e  $v$  a velocidade média do ar entre o cartão e o disco. Calcule a força resultante para cima em  $CC$ .



Despreze o peso do cartão; considere que  $v_0 \ll v$ , onde  $v_0$  é a velocidade do ar no tubo oco.

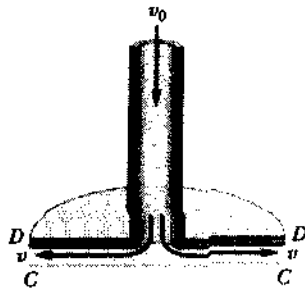


Fig. 16-52 Problema 75.

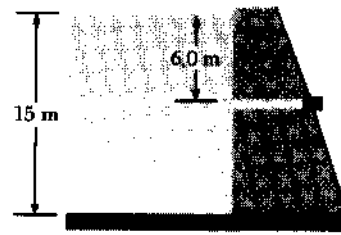


Fig. 16-54 Problema 79.

**76P.** Uma placa de  $80 \text{ cm}^2$  e  $500 \text{ g}$  de massa é presa por dobradiças em um de seus lados. Se houver ar soprando apenas sobre a sua superfície superior, que velocidade deverá ter o ar para sustentar a placa na posição horizontal?

**77P.** Se uma pessoa soprar ar com uma velocidade de  $15 \text{ m/s}$ , passando pela parte de cima de um dos ramos de um tubo em U que contenha água, qual será a diferença de nível entre os dois lados deste tubo?

**78P.** Um tanque é cheio de água a uma altura  $H$ . Um buraco é aberto em uma das paredes, a uma profundidade  $h$  abaixo da superfície da água (Fig. 16-53). (a) Mostre que a distância  $x$  entre a parte de baixo da parede e o ponto onde o jato atinge o chão é dado por  $x = \sqrt{h(H-h)}$ . (b) Poder-se-ia abrir um buraco a outra profundidade, de forma a produzir um jato de mesmo alcance? Se a resposta for afirmativa, a que profundidade? (c) A que profundidade deve ser aberto um buraco para que o alcance  $x$  do jato seja máximo?

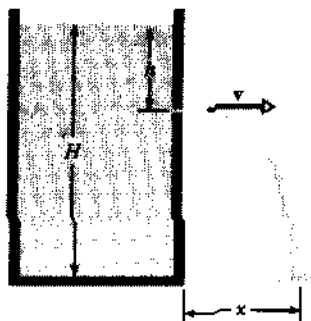


Fig. 16-53 Problema 78.

**79P.** A profundidade da água doce em repouso atrás de um dique é de  $15 \text{ m}$ . Um tubo horizontal de  $4,0 \text{ cm}$  de diâmetro passa através do dique  $6,0 \text{ m}$  abaixo da superfície da água, como mostra a Fig. 16-54. Uma rolha fecha a abertura do tubo. (a) Encontre a força de atrito entre a rolha e as paredes do tubo. (b) A rolha é removida. Que volume de água flui através do tubo em  $3,0 \text{ h}$ ?

**80P.** Um sifão é um aparelho usado para remover líquido de um recipiente. Seu funcionamento é mostrado na Fig. 16-55. O tubo ABC necessita estar inicialmente cheio, mas uma vez que isso tenha sido feito, o líquido fluirá através do tubo até que o nível do líquido no recipiente esteja abaixo da abertura A. O líquido tem densidade  $\rho$  e viscosidade

desprezível. (a) Com que velocidade o líquido sai do tubo em C? (b) Qual é a pressão do líquido no ponto mais alto B? (c) Teoricamente, qual a maior altura possível  $h_1$  que um sifão pode elevar água?

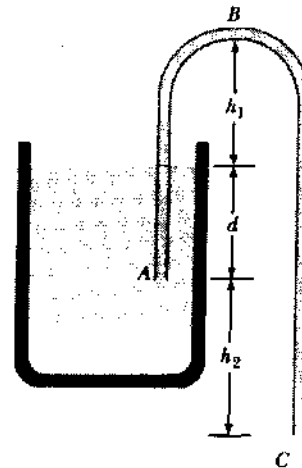


Fig. 16-55 Problema 80.

**81P.** Aplicando a equação de Bernoulli e a equação de continuidade aos pontos 1 e 2 da Fig. 16-22, mostre que a velocidade do escoamento na entrada (ponto 1) é

$$v = \sqrt{\frac{2a^2 \Delta p}{\rho(A^2 - a^2)}}$$

**82P.** Um medidor de Venturi possui um tubo de diâmetro igual a  $10 \text{ pol}$  e um gargalo de diâmetro  $5,0 \text{ pol}$ . Se a pressão da água no tubo for  $8,0 \text{ lb/pol}^2$  e no gargalo  $6,0 \text{ lb/pol}^2$ , determine a vazão de água em pés cúbicos por segundo.

**83P.** Considere o tubo de Venturi da Fig. 16-22 sem o manômetro. Seja A igual a  $5a$ . Suponha que a pressão  $p_1$  em A seja  $2,0 \text{ atm}$ . (a) Calcule os valores de  $v$  em A e  $V$  em  $a$  que fariam a pressão  $p_2$  igual a zero. (b) Calcule a vazão correspondente, se o diâmetro em A fosse  $5,0 \text{ cm}$ . O fenômeno que ocorre em  $a$ , quando  $p_2$  se aproxima de zero, é chamado de cavitação. A água vaporiza em pequenas bolhas.

**84P\*.** Um jarro contém  $15$  copos de suco de laranja. Abrindo-se a torneira na parte de baixo, leva-se  $12,0 \text{ s}$  para encher um copo de suco. Se deixarmos a torneira aberta, em quanto tempo se encherão os outros  $14$  copos e, assim, se esvaziará o jarro?

**85P\*.** A área total efetiva das pás da hélice de um pequeno moinho é  $4,6 \text{ m}^2$ . (a) Qual é a potência máxima possível do gerador do moinho, quando um vento sopra a uma velocidade constante de  $6,7 \text{ m/s}$ ? (b) Qual será a potência, se a velocidade do vento aumentar em  $10\%$ ? A densidade do ar é  $1,2 \text{ kg/m}^3$ .

PROBLEMAS ADICIONAIS

86. A água escoar por um cano horizontal para a atmosfera a uma velocidade de 15 m/s, como mostrado na Fig. 16-56. Os diâmetros das seções direita e esquerda do tubo são 3,0 cm e 5,0 cm, respectivamente. (a) Que volume de água escoar para a atmosfera durante um período de 10 minutos? (b) Qual é a velocidade de escoamento da água no lado esquerdo do tubo? (c) Qual é a pressão manométrica no lado esquerdo do tubo?



Fig. 16-56 Problema 86.

87. Um pesinho de chumbo de 0,40 cm<sup>3</sup> de volume e 11,4 g/cm<sup>3</sup> de densidade é usado para pesca, suspenso por uma linha vertical cuja outra extremidade está atada a uma rolha esférica (de densidade 0,20 g/cm<sup>3</sup>), que flutua na superfície de um lago. Desprezando qualquer efeito da linha, anzol e isca, determine qual deve ser o raio da rolha para que flutue submersa pela metade.

88. Uma barra de metal de comprimento 80 cm e massa 1,6 kg tem área de seção transversal uniforme igual a 6,0 cm<sup>2</sup>. Devido à densidade não

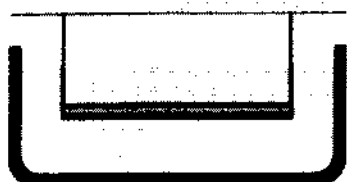


Fig. 16-57 Problema 88.

ser uniforme, o centro de massa da barra se encontra a 20 cm de uma das extremidades. A barra é suspensa em posição horizontal, por meio de cabos atados às duas extremidades e mergulhada em água, como mostra a Fig. 16-57. (a) Qual é a tensão no cabo mais próximo do centro de massa? (b) E no mais distante?

89. O tanque em L da Fig. 16-58 está cheio de água e aberto em cima. Se  $d = 5,0$  m, quais são (a) a força na face A e (b) a força na face B, devido à água?

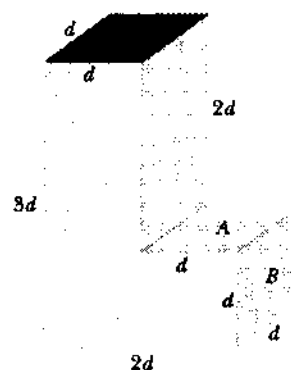


Fig. 16-58 Problema 89.

90. Um barril de bebida fechado possui uma abertura de 0,25 cm<sup>2</sup> de área a 50 cm abaixo do nível do líquido (de densidade 1,0 g/cm<sup>3</sup>). Qual será a velocidade do líquido através da abertura, se a pressão do ar acima do líquido for (a) zero e (b) 0,40 atm?

# A Física e os Esportes: A Aerodinâmica dos Projéteis

PETER J. BRANCAZIO  
BROOKLYN COLLEGE

Um objeto, se movendo através de um fluido, experimenta sempre alguma resistência ao seu movimento. Esta força, exercida pelo fluido sobre o objeto, altera o movimento deste de alguma maneira. É razoável supor que esta resistência seja bem grande, se o objeto se move através de um líquido, como a água; mas se o fluido é um gás, como o ar, podemos supor que a força será tão pequena que não terá influência apreciável no movimento do objeto. No entanto, como veremos, o que costumamos chamar de *resistência do ar* não pode ser sempre facilmente ignorado.

A resistência do ar é uma manifestação da *força aerodinâmica* — a força exercida pelo ar sobre um objeto em movimento. (Quando um objeto se move através da água, dizemos que a força é *hidrodinâmica*.) Dizemos que essas forças são *dinâmicas* porque só aparecem quando o corpo está em movimento. Além disso, a força aparece ou quando o objeto está em repouso num fluido em movimento ou quando se move através de um fluido em repouso; ou seja, a força é gerada pelo movimento *relativo*.

O estudo da dinâmica dos fluidos tem uma importância prática considerável num grande número de áreas, desde o estudo do fluxo de sangue nos capilares até o projeto de barcos, veículos e aviões. Algo que pode nos surpreender é descobrir que os mesmos princípios são usados pelos atletas para melhorar seu desempenho numa grande variedade de esportes, pois as forças aerodinâmicas têm um efeito considerável no movimento dos vários projéteis usados nos esportes. Estas forças possibilitam ao arremessador de beisebol fazer um arremesso em que a bola descreve uma trajetória curva, e são do mesmo modo responsáveis pelos desvios para a esquerda e para a direita da bola de golfe, quando a tacada é feita com o taco mal posicionado. Também determinam as técnicas adequadas para o chute de uma bola de futebol ou o arremesso de um dardo. São igualmente responsáveis pela maior resistência ao movimento de um ciclista ou de um esquiador em descida de montanha.

Em geral, esta força de resistência depende de tamanho, forma e características da superfície do objeto, bem como da sua velocidade em relação ao fluido. Naturalmente, também depende das propriedades do fluido. Uma propriedade fundamental é a *viscosidade*, que é uma medida da resistência interna ao movimento causada pelas interações entre as moléculas do fluido. Nos locais em que o fluido entra em contato com a superfície do objeto, a viscosidade faz aparecer uma força de atrito oposta ao

movimento e paralela à superfície. As forças viscosas são maiores na água do que no ar. À temperatura ambiente, a água é cerca de 40 vezes mais viscosa que o ar — o que é compatível com o fato de que fazemos muito mais esforço para atravessar uma rua. A natureza da superfície do objeto em movimento é igualmente importante: em geral, quanto mais lisa a superfície, menor a resistência viscosa.

O objeto, se deslocando através do fluido, forçosamente se comporta como um obstáculo, forçando o fluido a mudar de direção e a acelerar em torno dele. O atrito viscoso tende a causar perda de energia. Estas perdas ocorrem numa camada relativamente fina do fluido, a *camada limite*, que fica próxima à superfície. Se o movimento é à baixa velocidade, estas perdas serão pequenas: o fluido na camada limite pode acelerar e permanecer em contato com a superfície do objeto. No entanto, a velocidades mais altas, as perdas de energia ficam tão grandes que o fluido não consegue mais seguir os contornos da superfície. Então, a camada limite tende a separar-se da superfície (veja Fig. 1), criando uma região atrás do objeto conhecida como *esteira*, caracterizada por uma pressão mais baixa e pelo aparecimento de turbulências. Sob estas condições, a pressão do fluido sobre a superfície frontal do objeto será maior do que a sobre a superfície de trás, resultando numa força contrária ao movimento. Esta *resistência*, devido à forma, pode ser reduzida mudando-se a forma do objeto para torná-lo mais "aerodinâmico" — isto é, ajustando seus contornos de tal maneira que o fluido não se separe da sua superfície.

As forças, criadas pela viscosidade e pela resistência devido à forma, estão distribuídas por toda a superfície do objeto que se desloca através do fluido. É costume, no entanto, decompor-las em duas componentes: uma força de *arrasto* que se opõe ao movimento (sendo portanto antiparalela ao vetor velocidade) e uma força de *sustentação* que atua numa direção perpendicular ao movimento. Apesar do seu nome, a força de sustentação não deve ser sempre imaginada como uma força para cima (oposta à gravidade), mas como uma força lateral que desvia o objeto em uma direção perpendicular à velocidade.

## Arrasto Aerodinâmico

A força de arrasto sobre um objeto em movimento, através de um fluido, sempre reduz a sua velocidade em relação ao fluido. Em geral, o arrasto é produzido tanto pela viscosidade

## LEITURA COMPLEMENTAR 4



Peter J. Brancazio é professor de Física do Brooklyn College, da City University de Nova York. Recebeu o Doutorado em Astrofísica desta mesma universidade em 1966. Já escreveu dois livros: *The Nature of Physics* (Macmillan, 1975) e *Sport Science* (Simon & Schuster, 1984). Seus artigos sobre a física do beisebol, do futebol e do basquete foram publicados nos periódicos *Discover*, *Physics Today*, *New Scientist*, *The Physics Teacher* e *American Journal of Physics*. Tendo praticado atletismo a vida inteira e sendo um entusiasta dos esportes, sente-se tão à vontade numa quadra de basquete como numa sala de aula.

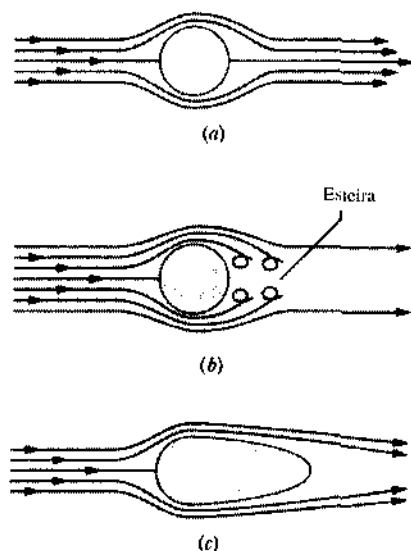


Fig. 1 Escoamento de fluido em torno de uma esfera: (a) escoamento em baixa velocidade — sem separação; (b) escoamento em alta velocidade — escoamento separado da superfície, produzindo baixa pressão na esteira; (c) escoamento em torno do corpo de sustentação produz pouca ou nenhuma esteira.

quanto pela resistência devido à forma. A resistência viscosa é importante, quando objetos relativamente pequenos se movem lentamente através de fluidos viscosos. Para os tamanhos e velocidades dos objetos usados, como projéteis nos esportes — bolas de beisebol, bolas de tênis, de futebol, e mesmo os próprios atletas — a resistência viscosa é pequena comparada à resistência devido à forma, e o arrasto aerodinâmico pode ser representado por uma equação bastante simples. Utilizando os conceitos de energia e momento, podemos mostrar que a força por unidade de área (pressão) exercida por um fluido sobre um objeto que se move através dele, deve ser proporcional à quantidade  $1/2 \rho v^2$  (onde  $\rho$  é a densidade do fluido e  $v$  é a velocidade relativa de escoamento). Ou seja, se  $F_d$  é a força de arrasto

$$D \propto \frac{1}{2} \rho A v^2,$$

onde  $A$  é a área frontal efetiva do objeto (a área da seção transversal do objeto perpendicular ao escoamento). Podemos transformar a equação acima numa igualdade, introduzindo uma quantidade adimensional conhecida como *coeficiente de arrasto*,  $C_d$ :

$$D = \frac{1}{2} \rho A C_d v^2.$$

O coeficiente de arrasto  $C_d$  leva em conta as contribuições da viscosidade e da resistência devido à forma, e depende da natureza do objeto (tamanho, forma, irregularidade e aspereza da sua superfície), bem como das características do escoamento. Em geral, quanto mais aerodinâmico for um objeto, menor o seu coeficiente de arrasto — uma consideração impor-

tante, quando projetamos objetos que devem se mover a altas velocidades.

Em geral,  $C_d$  deve ser determinado por medidas diretas. O procedimento padrão é colocar o objeto (ou um modelo adequado dele) num túnel de vento, tirando vantagem do fato de que a resistência depende somente da velocidade relativa entre o objeto e o fluido. Por exemplo,  $C_d$  para uma bola de beisebol se movendo através do ar em repouso, a 150 km/h, pode ser medido mantendo uma bola de beisebol estacionária num vento de 150 km/h.

O efeito da resistência do ar no movimento de um corpo em queda foi descrito na Seção 6-3. À medida que o corpo cai, tanto a velocidade quanto a resistência aumentam, até que esta última fica igual ao peso do corpo. Quando isto acontece, o corpo alcançou a velocidade limite (veja Eq. 6-19).

Um esporte que utiliza o conceito de velocidade limite é o pára-quedismo. Quando salta de um avião, o pára-quedista cai com aceleração decrescente aproximando-se de uma velocidade limite de cerca de 320 km/h. No entanto, os pára-quedistas são capazes de aumentar ou diminuir os efeitos da resistência do ar mudando a orientação e a forma efetiva dos seus corpos. Quando o corpo está totalmente horizontal, com os braços e pernas estendidos, a resistência do ar é máxima é portanto, a velocidade limite é a menor possível.

À medida que um corpo em queda se aproxima da velocidade limite, seu movimento fica cada vez mais diferente do de um corpo em queda livre. De maneira semelhante, o movimento de qualquer objeto lançado como um projétil difere bastante da parábola usual, se a velocidade de lançamento for da ordem da sua velocidade limite. Quando um projétil é lançado, o arrasto aerodinâmico reduz tanto a componente vertical quanto a horizontal da velocidade. Logo, a altura máxima e o alcance horizontal serão reduzidos. Quando o projétil sobe, desacelera mais do que o faria no vácuo; quando desce, acelera menos. O resultado é que o projétil levará menos tempo para atingir a altura máxima, que para retornar dela até o chão, e sua velocidade neste instante será menor do que a de lançamento. Como a componente horizontal da velocidade diminui continuamente, o projétil percorrerá uma distância horizontal maior quando estiver subindo do que descendo. Conseqüentemente, na fase de descida o projétil terá uma trajetória mais inclinada e será mais lento que na fase de subida.

Uma bola de beisebol tem velocidade limite de 153 km/h, como já vimos. Durante o jogo, as bolas são arremessadas e rebatidas a velocidades comparáveis ou até maiores do que a velocidade limite. (Note que esta não é a velocidade máxima que ela alcança, quando é largada a partir do repouso no ar.) Logo, a trajetória da bola é fortemente influenciada pela resistência do ar. Num lançamento típico, a bola alcança somente 60% do que alcançaria no vácuo (veja na Fig. 4-14, Vol. 1, uma comparação gráfica).

Já no caso de uma bola de futebol americana (ou *rugby*), devido à sua forma assimétrica e ao seu tamanho relativamente grande, o arrasto aerodinâmico exerce uma influência mui-

to grande sobre sua trajetória. Quando ela se desloca com o vértice na direção do movimento, a área efetiva é menor e a forma é mais aerodinâmica do que quando se desloca com o vértice perpendicular ao movimento; a resistência é cerca de 10 vezes maior no último caso. Isto determina a melhor técnica para arremessar este tipo de bola: com o vértice na direção do movimento e um *spin* (rotação em torno do eixo) o mais intenso possível em torno do seu eixo maior (este momento angular estabiliza a orientação do eixo durante o deslocamento). Se lançarmos a bola com o seu eixo maior inclinado em relação à trajetória, o alcance será muito reduzido. O efeito é particularmente notável quando ela é chutada com pouco ou nenhum *spin*, subindo com o vértice na direção do movimento e descendo com ele inclinado em relação ao movimento. O aumento súbito na resistência do ar quando a bola muda de uma posição para outra, no pico da sua trajetória, faz com que ela caia numa trajetória muito inclinada e diminui o alcance do chute. Os bons chutadores tentam fazer com que a bola “de a volta por cima” (isto é, vire o seu vértice para baixo quando começar a descer — uma conseqüência de um chute que lhe imprima rotação correta), como uma forma de alcançar maiores distâncias.

### Como os Atletas Podem Reduzir os Efeitos de Resistência?

Em esportes tais como natação, ciclismo ou corridas de *skate* — onde a energia do movimento é fornecida inteiramente pelo atleta — diminuir as forças de resistência, tanto quanto for possível, é particularmente importante. Nas competições de descida de montanha, onde um esquiador alcança até 130 km/h, a resistência aerodinâmica é praticamente a única força que se opõe ao movimento. As técnicas e o equipamento usados nesses esportes são desenhados principalmente para minimizar essa resistência. Há três formas básicas de atingir este objetivo:

1. *Reduzir a Área Frontal Efetiva.* Os atletas são ensinados a adotar uma postura em que seus corpos *coihdam* com a menor quantidade de ar possível. Mantendo a parte superior do corpo paralela ao chão, em vez de ficar ereto, o atleta pode diminuir a área efetiva do corpo em cerca de 25%. Assim, os ciclistas se inclinam sobre o guidom; corredores de *skate* mantêm a cintura dobrada e um braço atrás das costas; os esquiadores assumem uma posição chamada “posição de ovo”.

Os nadadores se movem muito devagar dentro d'água (as maiores velocidades não chegam a 8 km/h), mas ainda assim sofrem uma resistência hidrodinâmica considerável, pois a densidade e a viscosidade da água são relativamente altas. Para reduzir a área efetiva, os nadadores batem os pés. O objetivo principal deste movimento dos pés não é impulsionar o nadador (as braçadas são responsáveis por cerca de 75% da propulsão de um nadador) e sim manter o corpo na horizontal, para reduzir a área efetiva e, assim, a resistência da água.

2. *Uso de Equipamento Aerodinâmico.* Testes em túnel de vento com ciclistas e esquiadores levaram a numerosos aperfeiçoamentos no projeto dos equipamentos. Descobriu-se que protuberâncias relativamente pequenas nos esquis, calçados e bicicletas são fontes de turbulência e causam arrasto aerodinâmico considerável. Esses efeitos têm importância em competições de nível mundial, onde frações de segundo fazem a diferença entre ganhar ou perder. Assim, os equipamentos foram modificados para remover essas partes ou cobri-las com blindagens de contornos apropriados. A cabeça do atleta também é uma fonte de turbulência, por isso alguns ciclistas e esquiadores usam um capacete em forma de lágrima, que torna o escoamento do ar em torno de suas cabeças mais "aerodinâmico".

3. *Uso de Roupas Lisas e Coladas no Corpo.* O uso de roupas largas aumenta a área superficial do corpo do atleta e cria turbulência. "Roupas aerodinâmicas" — lisas e coladas ao corpo — tornaram-se cada vez mais populares entre esquiadores, ciclistas e corredores de skate. Uma superfície corporal lisa é particularmente importante em natação de alta competitividade; neste caso, o uso de roupas justas, feitas de material não absorvente, tornou-se obrigatório. Os nadadores do sexo masculino raspam todos os pêlos do corpo — às vezes até os cabelos — para reduzir a resistência da água.

### Sustentação Aerodinâmica

Como já vimos antes, sustentação é a componente da interação entre o objeto e o fluido que é perpendicular à direção do movimento. Em geral, é causada por qualquer efeito que faça com que o fluido mude de direção, quando escoam em torno do objeto. Se o fluido adquire uma componente de velocidade perpendicular à sua direção original, por causa da sua interação com o objeto, então este deve ter exercido uma força sobre o fluido, acelerando-o nesta direção. De acordo com a terceira lei de Newton, o fluido deve aplicar uma força de mesmo módulo, mas de sentido oposto, sobre o objeto. Assim, se o objeto desviar o fluido para a esquerda, sofrerá uma força de sustentação para a direita. Entre as propriedades do objeto que podem causar sustentação, citamos (1) uma forma não-simétrica ou uma orientação em relação ao escoamento, também não-simétrica; (2) um momento angular (*spin*) do objeto; e (3) a superfície lateral do objeto não é homogênea (isto é, um lado é mais áspero que o outro).

### O Efeito Magnus

O escoamento de ar em torno de uma esfera não pode gerar sustentação, pois, por simetria, ela não deflete o ar mais numa direção que na outra. No entanto, uma esfera girando causa mu-

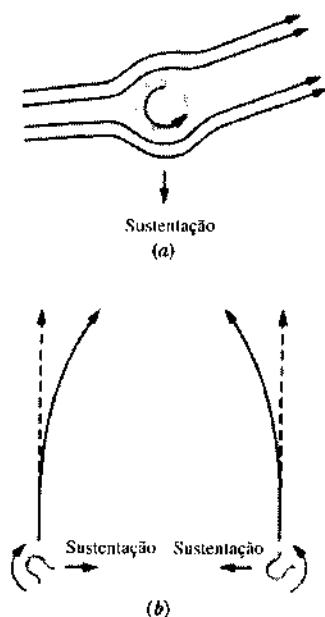


Fig. 2 Sustentação de uma esfera em movimento giratório (efeito Magnus): (a) o escoamento do ar em torno de uma esfera girando ao redor de seu próprio eixo e (b) trajetória de uma esfera lançada, mas girando em direções diferentes.

dança de direção no escoamento do ar. Isto acontece por causa das perdas por atrito na camada limite, que fazem com que o escoamento se separe da superfície e forme uma esteira de baixa pressão. Quando uma esfera gira, um dos lados tem velocidade oposta à do ar, enquanto o outro tem velocidade na mesma direção do ar. Neste último, o ar é arrastado pela superfície, fazendo com que a separação ocorra um pouco mais longe, ao longo do escoamento. No outro lado da esfera, o ponto de separação é deslocado em direção oposta. O resultado é que a esteira não é simétrica; o fluxo de ar é desviado para um lado e a esfera experimenta uma força de reação na direção oposta (Fig. 2). O módulo e a direção desta força dependerão da rapidez e da direção da rotação. Este fenômeno é conhecido como *efeito Magnus* (em homenagem a Gustav Magnus, que o estudou na década de 1850).

O efeito Magnus é familiar a qualquer um que observe a trajetória curva de uma bola. Ele é fundamental em futebol, tênis, beisebol e golfe. Aplicando uma rotação apropriada, um atleta pode desviar uma bola em qualquer direção. Por exemplo, se uma bola de futebol for chutada à direita do seu centro — fazendo-a girar no sentido anti-horário, quando vista de cima — a trajetória se encurvará para a esquerda; em caso contrário, se encurvará para a direita.

O arremessador de beisebol usa o mesmo princípio nos seus lançamentos. Ele consegue

fazer isto torcendo seu pulso na hora do lançamento. No entanto, devido a limitações anatômicas, o pulso humano pode ser torcido muito mais facilmente numa direção que na outra. Assim, para um arremessador destro é mais fácil fazer a bola girar em sentido anti-horário do que horário (vista de cima), enquanto para um canhoto acontece o oposto. A bola arremessada por um destro desvia-se para a esquerda. Para fazer a bola desviar-se para a direita (em arremesso conhecido como "bola parafuso"), ele deve torcer seu pulso na direção errada. Poucos arremessadores destros podem efetuar este arremesso. Assim, a teoria do efeito Magnus, junto com um pouco de anatomia humana, descreve as várias combinações de arremessadores e rebatedores destros e canhotos tão importantes na estratégia do beisebol (o mesmo efeito era explorado pelo jogador brasileiro de futebol Didi, no seu famoso chute "folha seca").

Um arremesso de uma bola de beisebol necessariamente descreve uma trajetória curva, mesmo quando a bola não gira, pois a gravidade encurva a trajetória para baixo. Uma bola arremessada 137 km/h cairá acerca de 1,1 m na distância do arremessador até o rebatedor. O arremessador pode aumentar ou diminuir esta queda usando um *spin* adequado. Se a bola for arremessada com *topspin* (a sua parte de cima gira na direção do rebatedor), a sustentação será para baixo e a trajetória encurvará mais abruptamente que o normal. Se a rotação da bola for em sentido contrário, a sustentação será em sentido oposto. Este arremesso é chamado de bola "subindo", mas a bola não sobe realmente — é humanamente impossível fazer a bola girar com velocidade suficiente para fazer a sustentação exceder o peso da bola — mas como a bola cai menos do que cairia sob a ação somente da gravidade, temos a ilusão de subida.

Esses efeitos também são importantes no tênis, eles podem prolongar o voo da bola (*backspin*) ou diminuir-lo (*topspin*). É muito difícil rebater um saque violento e fazer a bola cair num local apropriado, sem lhe imprimir a rotação correta.

Os efeitos são particularmente úteis para jogadores de golfe. Uma tacada bem feita deve imprimir uma grande quantidade de *backspin* à bola. As asperezas horizontais e a face inclinada da ponta do taco são feitas para tornar isso possível. Neste caso, por causa da sustentação, a trajetória da bola está longe de ser parabólica. O melhor ângulo de lançamento é menor que 45° (entre 20° e 30°); como a gravidade é diminuída pela sustentação, a bola pode ser lançada mais horizontalmente e alcançar uma distância maior. No entanto, se a tacada não for bem feita, a bola adquirirá uma rotação lateral. Isto fará com que se desvie para a esquerda ou para a direita. Para o jogador médio, o ângulo da extremidade do taco, no momento do impacto, pode fazer toda a diferença entre uma tacada de mestre e um fiasco.



*Quando um besouro se movimenta pela areia a poucas dezenas de centímetros de um escorpião, este se vira imediatamente na sua direção e dispara até a sua localização para matá-lo e comê-lo. O escorpião pode fazer isto sem ver (ele tem hábitos noturnos) ou escutar o besouro. Como ele consegue localizar sua vítima de forma tão precisa?*

## 17-1 Ondas e Partículas

Escrever uma carta ou usar o telefone são duas maneiras de se entrar em contato com um amigo numa cidade distante.

A primeira opção (a carta) envolve o conceito de “partícula”. Um objeto material se desloca de um ponto a outro, carregando consigo informação e energia. A maioria dos capítulos anteriores trata de partículas ou sistemas de partículas, de elétrons a bolas de futebol, de automóveis a planetas.

A segunda opção (o telefone) envolve o conceito de “onda”, assunto deste capítulo e do próximo. Numa onda, informação e energia se deslocam de um ponto a outro, mas nenhum objeto material realiza esta jornada. No seu telefonema, uma onda sonora leva a mensagem de suas cordas vocais até o telefone. Deste ponto em diante, a onda é eletromagnética, passando ao longo do fio de cobre, por uma fibra ótica ou através da atmosfera, possivelmente via sa-

télite de comunicação. No terminal de recepção, existe uma outra onda sonora, do telefone ao ouvido de seu amigo. Apesar de uma mensagem ter sido passada, nada que você tocou alcançou o seu amigo.\* Leonardo da Vinci mostrou que entendia de ondas quando escreveu: “é freqüente que uma onda de água fuja de seu local de origem, enquanto a água não; como as ondas criadas pelo vento num campo de trigo, onde vemos as ondas correndo através do campo, enquanto os pés de trigo permanecem no mesmo lugar”.

*Partícula* e *onda* são dois grandes conceitos da física clássica, no sentido de que podemos associar quase todos os ramos do assunto a um ou a outro. Os dois conceitos são bem diferentes. A palavra *partícula* sugere uma diminuta

\*O conceito de onda aqui mostrado só faz sentido na mecânica newtoniana. A teoria especial da relatividade altera drasticamente tal conceito. (N. do R.)

concentração de matéria capaz de transportar energia. A palavra *onda* sugere o contrário, ou seja, uma larga distribuição de energia, preenchendo o espaço através do qual passa. Nosso objetivo, agora, é colocar as partículas de lado por um tempo e aprender alguma coisa sobre ondas.

## 17-2 Ondas

### Ondas Mecânicas

Uma bandeira tremulando ao vento é tão familiar que, quando os astronautas fincaram a bandeira americana na Lua, onde não existe vento, usaram uma bandeira pregueada, de forma a dar-lhe uma aparência "natural". Existem também ondas em qualquer volume d'água, quer seja num oceano ou numa bacia usada para lavar roupa. Há ondas sonoras no ar e na água e também ondas sísmicas na crosta, no manto e no núcleo da Terra. As principais características de todas essas *ondas mecânicas* são que, além de governadas pelas leis de Newton, necessitam de um meio físico como ar, água, uma bandeira, uma corda esticada ou uma haste de aço para existir.

### Ondas Eletromagnéticas

A mais familiar das ondas eletromagnéticas é a luz visível, mas quase tão familiares são os raios X, as microondas e as ondas que ativam nossos aparelhos de rádio e televisão. Muitas dessas ondas passam através de você o tempo todo.

*Ondas eletromagnéticas* não necessitam de nenhum meio físico para existir. A luz das estrelas, por exemplo, se propaga em nossa direção através do quase vácuo do espaço profundo. Todas as ondas eletromagnéticas se propagam através do vácuo a uma mesma velocidade escalar  $c$ , dada por

$$c = 299.792.458 \text{ m/s} \quad (\text{velocidade da luz}) \quad (17-1)$$

Voltaremos a essas ondas no Cap. 38.

### Ondas de Matéria

Sob certas condições experimentais, um feixe de partículas — elétrons, por exemplo — pode exibir propriedades ondulatórias. Tais *ondas de matéria* são governadas pelas leis da física quântica. Nós as discutimos de forma mais completa no Cap. 44 da versão estendida deste livro e nos referimos a elas, aqui, somente para que nossa lista de tipos de ondas encontradas na natureza possa ficar completa.

Muito do que discutimos neste capítulo se aplicará a ondas de todos os tipos. Quando buscarmos ilustrações específicas, entretanto, vamos extraí-las da família de ondas mecânicas, focalizando, especialmente, as ondas que se propagam ao longo de uma corda esticada.

### 17-3 Ondas numa Corda Esticada

De todas as possíveis ondas mecânicas, uma onda transmitida ao longo de uma corda esticada talvez seja a mais sim-

ples. Se na extremidade de uma corda nessas condições aplicarmos um puxão para cima e para baixo, como na Fig. 17-1a, um *impulso* é passado ao longo da corda, de partícula em partícula e assim uma onda, na forma de um único *pulso*, se propaga ao longo da corda a uma velocidade escalar  $v$ . Se você mover sua mão para cima e para baixo, num movimento harmônico simples contínuo (Fig. 17-1b), uma onda senoidal extensa vai se propagar ao longo da corda a uma velocidade escalar  $v$ .

Supomos aqui que a corda é "ideal", não existindo forças de atrito para amortecer a onda enquanto ela se propaga. Supomos, além disso, que a corda é tão longa que não precisamos nos preocupar com quaisquer "ecos" que possam retornar da extremidade distante.

No estudo das ondas da Fig. 17-1, podemos observar a **forma da onda** enquanto esta se movimenta para a direita. Ou podemos observar o movimento de um elemento específico da corda, de comprimento  $dx$  e com massa correspondente  $dm$ , oscilando para cima e para baixo, à medida que a onda passa por ela. O deslocamento de qualquer elemento oscilante da corda é na direção  $y$ , perpendicular à direção em que a onda se propaga, que é a direção  $x$ . Chamamos de **transversal** tal movimento ondulatório.

A Fig. 17-2 mostra uma onda sonora, gerada por um pistão, oscilando num cano comprido cheio de ar. Neste tipo de onda mecânica, pequenos elementos de ar de massa  $dm$  se deslocam para trás e para frente, *paralelamente* à direção em que a onda se propaga. Chamamos de **longitudinal** esse tipo de movimento ondulatório; trataremos dele no Cap. 18.

O escorpião mostrado na fotografia que abre este capítulo utiliza ondas tanto longitudinais quanto transversais

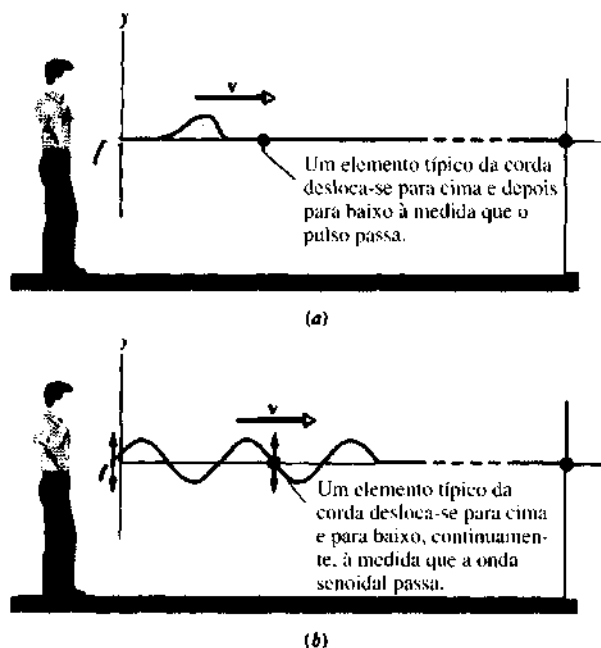


Fig. 17-1 (a) Transmitindo um único pulso ao longo de uma corda esticada. (b) Transmitindo uma onda senoidal contínua. Como as oscilações de qualquer elemento da corda (representado aqui por um ponto) são perpendiculares à direção na qual a onda se propaga, a onda é denominada uma *onda transversal*.

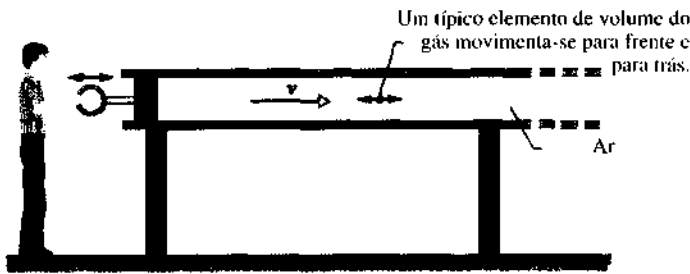


Fig. 17-2 Uma onda sonora é gerada num tubo cheio de ar ao se movimentar um pistão para frente e para trás. Como as oscilações de um elemento de volume do gás (representado pelo ponto) são paralelas à direção na qual a onda se propaga, a onda é denominada *longitudinal*. As oscilações dos elementos de volume são acompanhadas por uma série alternada de compressões e expansões do ar.

para localizar sua presa. Quando um besouro perturba a areia, mesmo que de leve, envia pulsos ao longo de sua superfície (Fig. 17-3). Um conjunto longitudinal de pulsos vai se propagar a uma velocidade escalar  $v_l = 150$  m/s. Um segundo conjunto, transversal, vai se propagar a uma velocidade escalar  $v_t = 50$  m/s.

O escorpião, com suas oito patas espalhadas num círculo de aproximadamente 5 cm de diâmetro, intercepta primeiro os pulsos longitudinais, que são mais rápidos e assim descobre a direção do besouro, que corresponde à perna que primeiro sentiu os pulsos. A seguir, o escorpião avalia o intervalo de tempo  $\Delta t$  entre o recebimento das primeiras ondas longitudinais e o das ondas transversais, mais lentas, utilizando-o para determinar a distância  $d$  até o besouro. Esta distância é dada por

$$\Delta t = \frac{d}{v_l} - \frac{d}{v_t},$$

chegando-se a

$$d = (75 \text{ m/s}) \Delta t.$$

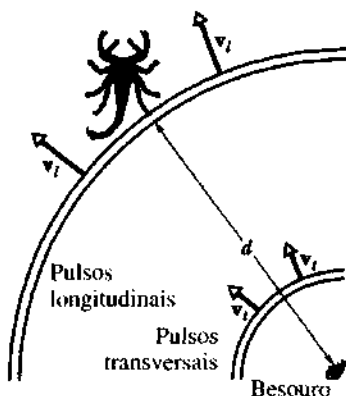


Fig. 17-3 O movimento de um besouro gera pulsos longitudinais rápidos e pulsos transversais mais lentos na superfície da areia. O escorpião intercepta primeiramente os pulsos longitudinais; aqui é a pata traseira direita que sente o pulso primeiro.

Se,  $\Delta t = 4,0$  ms, por exemplo, então  $d = 30$  cm, o que dá ao escorpião um perfeito posicionamento do besouro.

## 17-4 Comprimento de Onda e Frequência

Em geral, uma onda senoidal pode ser descrita na forma de uma função seno ou cosseno. Neste capítulo, escolhemos a primeira forma. Definimos uma forma de onda ao fornecermos uma relação do tipo  $y = h(x, t)$ , na qual  $y$ , o deslocamento transversal de qualquer elemento da corda, é uma função  $h$  da posição  $x$  deste elemento ao longo da corda e do tempo  $t$ .

Em particular, a onda que escolhemos para estudo é a onda senoidal da Fig. 17-1b que é gerada quando se movimenta transversalmente a extremidade da corda num movimento harmônico simples. Suponha que uma onda transversal se propaga ao longo de uma corda que consideramos esticada ao longo do eixo  $x$ . A onda pode ter muitas formas, mas o fundamental em cada uma delas é o **comprimento de onda**  $\lambda$  e a **frequência**  $f$ . O comprimento de onda é a distância ao longo do eixo  $x$  após a qual a forma da onda começa a se repetir. A frequência da onda é aquela em que qualquer elemento da corda repete sua oscilação transversal, devido à passagem da onda. Escrevemos então para o deslocamento  $y$  do elemento da corda na posição  $x$  e no instante  $t$

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t), \quad (17-2)$$

onde  $y_m$  é a **amplitude** da onda; o subscrito  $m$  significa **máximo**, pois a amplitude é a magnitude do deslocamento máximo do elemento da corda em qualquer das duas direções. As quantidades  $k$  e  $\omega$  são constantes, cujo significado físico estamos prestes a descobrir.

Você pode estar se questionando o porquê, dentre toda uma vasta variedade de formas de onda, termos escolhido a onda senoidal da Eq. 17-2 para um estudo detalhado. De fato, esta é uma escolha inteligente porque, conforme verá na Seção 17-9, *todas* as formas de onda — incluindo o pulso da Fig. 17-1a — podem ser construídas pela soma de ondas senoidais de amplitudes e comprimentos de onda cuidadosamente selecionados. A compreensão de ondas senoidais é portanto a chave para se compreender ondas de qualquer forma.

Não existem limites para as variáveis  $x$  e  $t$  na Eq. 17-2, assim, do ponto de vista matemático, a equação descreve uma onda numa corda de comprimento infinito, existente para todo o sempre, do passado mais remoto ao futuro mais distante. Na prática, vamos restringir nossa atenção a faixas razoavelmente pequenas para cada variável.

Como a Eq. 17-2 possui duas variáveis independentes ( $x$  e  $t$ ) não podemos representar a variável dependente  $y$  num único gráfico bidimensional. Precisaríamos de algo como uma fita de vídeo para mostrá-la integralmente e no tempo real. Podemos, entretanto, aprender muito nos dois gráficos da Fig. 17-4.



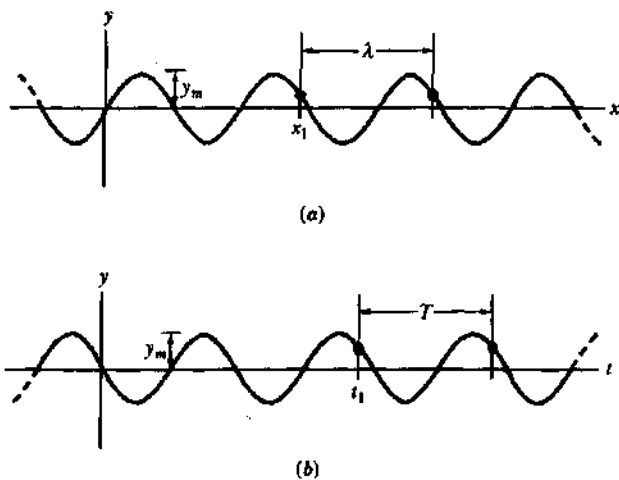


Fig. 17-4 (a) Uma “fotografia” de uma corda em  $t = 0$ , em que a onda senoidal da Eq. 17-2 se propaga. Um comprimento de onda típico é mostrado; é a distância horizontal entre dois pontos da corda (representados por pontos) que tem deslocamentos iguais. A amplitude  $y_m$  é também mostrada: é o deslocamento máximo da corda. (b) Um gráfico que mostra o deslocamento de um elemento da corda em  $x = 0$  como função do tempo à medida que a onda senoidal passa através do elemento. Um período típico está assinalado: é o tempo entre deslocamentos idênticos do elemento da corda (representado por pontos).

**Comprimento de Onda e Número de Onda**

A Fig. 17-4a mostra como o deslocamento transversal  $y$  da Eq. 17-2 varia com a posição  $x$  num instante fixo, escolhido como  $t = 0$ . Isto é, a figura é uma “fotografia” da onda naquele instante. Com esta restrição, a Eq. 17-2 se reduz a

$$y(x, 0) = y_m \text{ sen } kx \tag{17-3}$$

Nós definimos o *comprimento de onda*  $\lambda$  como a distância após a qual o padrão da onda começa a se repetir. Um comprimento de onda típico é mostrado na Fig. 17-4a. Por definição, o deslocamento  $y$  é o mesmo nos dois extremos deste comprimento de onda; isto é, em  $x = x_1$  e  $x = x_1 + \lambda$ . Portanto, pela Eq. 17-3,

$$\begin{aligned} y &= y_m \text{ sen } kx_1 = y_m \text{ sen } k(x_1 + \lambda) \\ &= y_m \text{ sen } (kx_1 + k\lambda). \end{aligned} \tag{17-4}$$

A função seno começa a se repetir quando seu ângulo (ou argumento) é acrescido de  $2\pi$  radianos, assim, a Eq. 17-4 será verdadeira se  $k\lambda = 2\pi$ , ou se

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{17-5}$$

Chamamos de  $k$  o **número de onda angular** da onda; sua unidade no SI é radiano por metro.

O **número de onda**, simbolizada por  $\kappa$ , é definido como  $1/\lambda$  e sua relação com  $k$  é

$$\kappa = \frac{1}{\lambda} = \frac{k}{2\pi} \tag{17-6}$$

O número de onda  $\kappa$  é o número de ondas por unidade de comprimento do padrão ondulatório; sua unidade no SI é o inverso do metro ( $\text{m}^{-1}$ )

**Frequência e Período**

A Fig. 17-4b mostra como o deslocamento  $y$  da Eq. 17-2 varia com o tempo  $t$  para uma posição fixa, escolhida como  $x = 0$ . Se você observasse a corda nesta posição, veria que o movimento de um elemento da corda é de subida e descida, sendo descrito por

$$\begin{aligned} y(0, t) &= y_m \text{ sen } (-\omega t) \\ &= -y_m \text{ sen } \omega t \quad (x = 0). \end{aligned} \tag{17-7}$$

Aqui fizemos uso do fato de que  $\text{sen } (-\alpha) = -\text{sen } \alpha$ , onde  $\alpha$  é um ângulo qualquer.

Definimos o **período**  $T$  de uma onda como o intervalo de tempo após o qual o movimento de um elemento oscilante da corda (em qualquer posição fixa  $x$ ) começa a se repetir. Um período típico é mostrado na Fig. 17-4b. Aplicando a Eq. 17-7 a cada extremo deste intervalo de tempo e igualando os resultados, temos

$$\begin{aligned} y &= -y_m \text{ sen } \omega t = -y_m \text{ sen } \omega(t + T) \\ &= -y_m \text{ sen } (\omega t + \omega T). \end{aligned} \tag{17-8}$$

Isto só pode ser verdadeiro se  $\omega T = 2\pi$ , ou se

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{17-9}$$

Chamamos  $\omega$  de **frequência angular** da onda; sua unidade no SI é o radiano por segundo.

A **frequência** da onda, simbolizada por  $f$ , é definida como  $1/T$  e está relacionada a  $\omega$  por

$$\omega = 2\pi f \tag{17-10}$$

A frequência  $f$  é o número de oscilações por unidade de tempo realizadas por um dado ponto da corda, à medida que a onda passa por ele. Você viu no Cap. 14 que a frequência  $f$  é normalmente medida na unidade hertz ou seus múltiplos, onde

$$1 \text{ hertz} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ oscilação/s.} \tag{17-11}$$

**17-5 A Velocidade Escalar de Propagação de uma Onda**

A Fig. 17-5 mostra duas fotografias da onda descrita pela Eq. 17-2, tiradas a um pequeno intervalo de tempo  $\Delta t$ . A onda está se propagando na direção em que  $x$  aumenta (para a direita na Fig. 17-5), e todo o padrão da onda se desloca nesta direção, de uma distância  $\Delta x$ , num intervalo de tempo  $\Delta t$ . A relação  $\Delta x/\Delta t$  (ou no limite diferencial,  $dx/dt$ ) é a **velocidade de onda**  $v$ . Como podemos encontrar seu valor?

Vamos focalizar um ponto em particular do padrão da onda — talvez um ponto de deslocamento máximo, tal como o ponto  $A$  na Fig. 17-5. Da Eq. 17-2, vemos que um deslocamento  $y$  é definido ao associarmos um valor fixo à quantidade  $kx - \omega t$ , que é chamada de **fase** da onda. Assim, fazendo-se

$$kx - \omega t = \text{constante} \quad (17-12)$$

definimos um deslocamento transversal constante  $y$ , tal como aquele para o ponto  $A$ . Note que, à medida que  $t$  aumenta na Eq. 17-12, o valor da coordenada  $x$  de um certo deslocamento transversal aumenta. Por exemplo, à medida que  $t$  aumenta, o ponto  $A$  na Fig. 17-5 se desloca na direção em que  $x$  é crescente (à direita). Assim, a própria onda se move nessa direção.

Para encontrar a velocidade escalar  $v$  da onda, tomamos a derivada em relação a  $t$  da Eq. 17-12, obtendo

$$k \frac{dx}{dt} - \omega = 0$$

ou

$$\frac{dx}{dt} = v = + \frac{\omega}{k} \quad (17-13)$$

Este resultado constante e positivo confirma que a onda está se propagando na direção crescente de  $x$ , isto é, para a direita na Fig. 17-5, com velocidade escalar constante.

Usando a Eq. 17-5 ( $k = 2\pi/\lambda$ ) e a Eq. 17-9 ( $\omega = 2\pi/T$ ), podemos escrever para velocidade escalar da onda

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi/T}{2\pi/\lambda} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \quad (17-14)$$

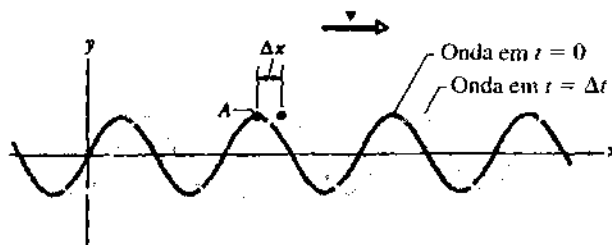


Fig. 17-5 Uma "fotografia" da onda progressiva da Eq. 17-2 em  $t = 0$  e, num instante posterior,  $t = \Delta t$ . Durante o intervalo  $\Delta t$ , toda a curva se desloca para a direita de uma distância  $\Delta x$ .

A Eq. 17-14 nos diz que a onda se desloca de um comprimento de onda num período de oscilação.

A Eq. 17-2 descreve uma onda se propagando na direção em que  $x$  é crescente. Podemos encontrar a equação de uma onda que se propaga na direção oposta, substituindo-se  $t$  na Eq. 17-2 por  $-t$ . Isto corresponde a manter a quantidade  $kx + \omega t$  constante, o que (veja a Eq. 17-2) obriga  $x$  a *decrecer* com o tempo. Assim, a Eq. 17-2 é válida para uma onda que se propaga na direção positiva do eixo  $x$ ,

$$y(x, t) = y_m \text{sen}(kx - \omega t) \quad (x \text{ crescente}) \quad (17-15)$$

enquanto, para uma onda que se desloca na direção negativa do mesmo eixo,

$$y(x, t) = y_m \text{sen}(kx + \omega t) \quad (x \text{ decrescente}) \quad (17-16)$$

Se analisar a onda descrita pela Eq. 17-16, como acabamos de fazer para a da Eq. 17-2 (ou Eq. 17-15), você encontrará para sua velocidade escalar

$$\frac{dx}{dt} = - \frac{\omega}{k} \quad (17-17)$$

O sinal negativo (compare com a Eq. 17-13) confirma que a onda está se movendo na direção em que  $x$  diminui e justifica nosso artifício de trocar o sinal da variável tempo.

Considere agora uma onda de forma genérica, dada por

$$y(x, t) = h(kx \pm \omega t), \quad (17-18)$$

onde  $h$  representa *qualquer* função, sendo a função seno apenas uma possibilidade. Nossa análise acima mostra que todas as ondas, nas quais as variáveis  $x$  e  $t$  aparecem na combinação  $kx \pm \omega t$ , são ondas progressivas. Mais ainda, todas as ondas que se propagam *devem ser da* forma descrita pela Eq. 17-18. Assim,  $y(x, t) = \sqrt{ax+bt}$ , representa uma possível onda que se propaga (embora talvez um pouco bizarra). A função  $y(x, t) = \text{sen}(ax^2 - bt)$ , por outro lado, *não* representa uma onda que se propaga.

**EXEMPLO 17-1** Uma onda senoidal propagando-se ao longo de uma corda é descrita por

$$y(x, t) = 0.00327 \text{sen}(72,1x - 2,72t), \quad (17-19)$$

onde as constantes numéricas estão em unidades SI (0.00327 m, 72,1 rad/m e 2,72 rad/s).

a. Qual é a amplitude desta onda?

**Solução** Comparando com a Eq. 17-15, vemos que

$$y_m = 0.00327 \text{ m} = 3,27 \text{ mm.} \quad (\text{Resposta})$$

b. Quais são o comprimento de onda e o período desta onda?

**Solução** Observando-se a Eq. 17-19, vemos que

$$k = 72,1 \text{ rad/m e } \omega = 2,72 \text{ rad/s.}$$

Da Eq. 17-5 temos

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi \text{ rad}}{72,1 \text{ rad/m}} = 0,0871 \text{ m}$$

$$= 8,71 \text{ cm.} \quad (\text{Resposta})$$

Da Eq. 17-9 temos

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \text{ rad}}{2,72 \text{ rad/s}} = 2,31 \text{ s} \quad (\text{Resposta})$$

c. Quais são o número de onda e a frequência desta onda?

**Solução** Da Eq. 17-6 temos

$$\kappa = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,0871 \text{ m}} = 11,5 \text{ m}^{-1}. \quad (\text{Resposta})$$

Da Eq. 17-10 temos

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2,31 \text{ s}} = 0,433 \text{ Hz.} \quad (\text{Resposta})$$

d. Qual a velocidade escalar desta onda?

**Solução** Da Eq. 17-14, temos

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2,72 \text{ rad/s}}{72,1 \text{ rad/m}} = 0,0377 \text{ m/s}$$

$$= 3,77 \text{ cm/s.} \quad (\text{Resposta})$$

Note que todas as quantidades calculadas em (b), (c) e (d) são independentes da amplitude da onda.

**EXEMPLO 17-2** Para a onda numa corda descrita pela Eq. 17-19, qual é o deslocamento  $y$  em  $x = 22,5 \text{ cm}$  ( $= 0,225 \text{ m}$ ) e  $t = 18,9 \text{ s}$ ? Suponha todos os valores numéricos como exatos.

**Solução** Da Eq. 17-19 temos

$$y = 0,00327 \text{ sen}(72,1 \times 0,225 - 2,72 \times 18,9)$$

$$= (0,00327 \text{ m}) \text{ sen}(-35,1855 \text{ rad})$$

$$= (0,00327 \text{ m})(0,588)$$

$$= 0,00192 \text{ m} = 1,92 \text{ mm.} \quad (\text{Resposta})$$

Assim o deslocamento é positivo. (Certifique-se de que o modo de sua calculadora foi alterado para radianos, antes de calcular o seno.)

Neste problema devemos considerar os valores numéricos como exatos, porque fomos solicitados a determinar o deslocamento de um ponto distando diversos comprimentos de onda de  $x = 0$ , em um instante após, diversos períodos desde  $t = 0$ . É como se você fosse solicitado a especificar a localização de uma mala num vagão de carga, próximo ao final de um longo trem, fazendo medidas de trás para frente, a partir da locomotiva. Você tem que ser preciso. Se fizer o que possa parecer mesmo um pequeno erro percentual, poderá até parar no vagão de carga errado!

**EXEMPLO 17-3** No Exemplo 17-2, mostramos que o deslocamento transversal de um elemento da corda para a onda da Eq. 17-19 em  $x = 0,225 \text{ m}$  e  $t = 18,9 \text{ s}$  é  $y = 1,92 \text{ mm}$ .

a. Qual é o valor de  $u$ , a velocidade escalar transversal, do mesmo elemento da corda naquele local e naquele instante? (Esta velocidade escalar, que é associada à oscilação transversal da corda, é na direção do eixo  $y$ . Não a confunda com  $v$ , a velocidade escalar constante com a qual a onda se propaga ao longo do eixo  $x$ .)

**Solução** A equação geral para a onda da Eq. 17-19 é

$$y(x, t) = y_m \text{ sen}(kx - \omega t). \quad (17-20)$$

Nesta expressão, vamos manter  $x$  constante, mas deixando  $t$  variar. Derivando esta equação em relação a  $t$ , obtém-se\*

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t). \quad (17-21)$$

Substituindo os valores numéricos dos Exemplos 17-1 e 17-2, obtemos

$$u = (-2,72 \text{ rad/s})(3,27 \text{ mm}) \cos(-35,1855 \text{ rad})$$

$$= 7,20 \text{ mm/s.} \quad (\text{Resposta})$$

Assim, em  $t = 18,9 \text{ s}$ , o elemento da corda em  $x = 22,5 \text{ cm}$  está movendo-se na direção de  $y$  crescente, com uma velocidade escalar de  $7,20 \text{ mm/s}$ .

b. Qual é a aceleração transversal  $a_y$  naquela posição e naquele instante?

**Solução** Da Eq. 17-21, mantendo  $x$  constante, mas deixando  $t$  variar, encontramos

$$a_y = \frac{\partial u}{\partial t} = -\omega^2 y_m \text{ sen}(kx - \omega t).$$

Comparando com a Eq. 17-20, podemos reescrever isto como

$$a_y = -\omega^2 y.$$

Vemos que a aceleração transversal de um elemento oscilante da corda é proporcional ao seu deslocamento transversal, mas de sinal oposto, o que é consistente com o fato de que o elemento está se movendo, transversalmente, num movimento harmônico simples. A substituição de valores numéricos dá

$$a_y = -(2,72 \text{ rad/s})^2(1,92 \text{ mm})$$

$$= -14,2 \text{ mm/s}^2. \quad (\text{Resposta})$$

Assim, para  $t = 18,9 \text{ s}$  o elemento da corda em  $x = 22,5 \text{ cm}$  está deslocado de  $+1,92 \text{ mm}$  e sua aceleração é de  $-14,2 \text{ mm/s}^2$ .

## TÁTICA PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

### TÁTICA 1: ÂNGULOS MUITO GRANDES

Às vezes, como nos Exemplos 17-2 e 17-3, haverá necessidade de se calcular o seno ou o cosseno de um ângulo muito maior que  $2\pi \text{ rad}$  (ou  $360^\circ$ ). A soma ou subtração de múltiplos inteiros de  $2\pi$  radianos a um tal ângulo não muda o valor de qualquer de suas funções trigonométricas. No Exemplo 17-2, o ângulo é  $-35,1855 \text{ rad}$ . Somando-se (6) ( $2\pi \text{ rad}$ ) a este ângulo, encontramos

$$-35,1855 \text{ rad} + (6)(2\pi \text{ rad}) = 2,51361 \text{ rad,}$$

um ângulo menor que  $2\pi \text{ rad}$ , mas com os mesmos valores das funções trigonométricas que  $-35,1855 \text{ rad}$  (veja Fig. 17-6). Por exemplo, os senos de  $2,51361 \text{ rad}$  e  $-35,1855 \text{ rad}$  são ambos  $0,588$ .

\*Uma derivada calculada, enquanto uma ou mais variáveis são tratadas como constantes, é chamada de *derivada parcial* e representada pelo símbolo  $\partial/\partial x$ , em vez de  $d/dx$ .

Se sua calculadora efetuar cálculos com funções trigonométricas, reduzirá, automaticamente, os ângulos grandes ( $> 2\pi$  rad). Cuidado: Não arredonde ângulos grandes se pretende calcular seus senos ou cossenos. No cálculo do seno de um ângulo grande, você "joga fora" quase todo o ângulo e tira o seno do que "sobra", ou seja, trabalha com a menor determinação. Se, por exemplo, você arredondasse  $-35,1855$  rad para  $-35$  rad (uma alteração de 0,5% e, aparentemente, uma decisão razoável), estaria alterando o seno do ângulo em 27%. Também, na conversão de um ângulo grande de graus para radianos, deve usar um fator de conversão exato (p. ex.,  $180^\circ = \pi$  rad), em vez de um fator aproximado (p. ex.,  $57,3^\circ \approx 1$  rad).

## 17-6 Velocidade Escalar da Onda numa Corda Esticada

Se uma onda se propaga através de um meio como água, aço ou uma corda esticada, ela coloca as partículas desse meio em oscilação, à medida que passa. Para isso acontecer, o meio deve possuir inércia (para que energia cinética possa ser armazenada) e elasticidade (para que energia potencial possa ser armazenada). Essas duas propriedades determinam o quão rapidamente a onda pode se propagar no meio. Raciocinando inversamente, deve ser possível calcular a velocidade escalar da onda, através do meio, em termos dessas propriedades. É o que faremos agora, de duas maneiras, para o caso da corda esticada.

### Análise Dimensional

Como o nome sugere, a análise dimensional de um fenômeno físico requer que examinemos, cuidadosamente, as dimensões de todas as grandezas físicas que entram na situação. Neste caso, buscamos a velocidade escalar  $v$ , que tem a dimensão de unidade de comprimento por unidade de tempo ou  $LT^{-1}$ .

O que caracteriza a inércia de uma corda esticada é a massa de um elemento da corda, cujo valor, para uma corda homogênea, é determinado usando-se a massa  $m$  da corda inteira dividida pelo comprimento  $l$  da corda. Chamamos essa relação de *densidade linear*  $\mu$  da corda homogênea. Assim  $\mu = m/l$ , sua dimensão sendo  $ML^{-1}$ .

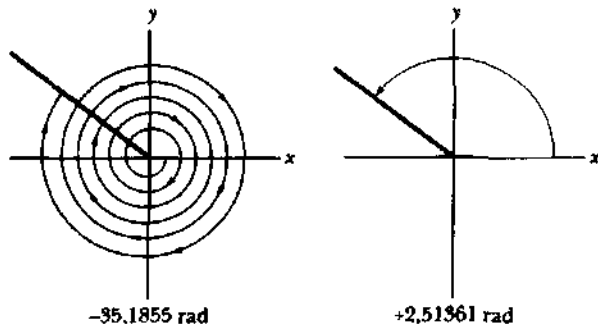


Fig. 17-6 Os dois ângulos são diferentes, mas todas suas funções trigonométricas são idênticas.

Você não consegue transmitir uma onda ao longo de uma corda esticada, sem esticá-la ainda mais. A tensão na corda é responsável por este alongamento adicional e deve, portanto, representar a característica elástica da corda. A tensão\*  $\tau$  é uma força e tem a dimensão de  $MLT^{-2}$  (lembre-se de  $F = ma$ ).

O problema é combinar  $\mu$  (dimensão  $ML^{-1}$ ) e  $\tau$  (dimensão  $MLT^{-2}$ ) de tal maneira que a dimensão resultante seja  $v$  ( $LT^{-1}$ ). Uma pequena manipulação nas várias combinações possíveis sugere que

$$v = C \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}, \quad (17-22)$$

onde  $C$  é uma constante adimensional. O defeito da análise dimensional é que ela não pode fornecer o valor de tal constante adimensional. No nosso segundo método para determinar a velocidade escalar, você verá que a Eq. 17-22 está de fato correta e que  $C = 1$ .

### Dedução a partir da Segunda Lei de Newton

Em vez da onda senoidal da Fig. 17-1b, vamos considerar um único pulso simétrico como o da Fig. 17-7. Por conveniência, escolhemos um referencial em que o pulso permanece estacionário. Isto é, movemo-nos junto com o pulso, mantendo-o sempre à vista. Nesse referencial a corda aparecerá como se estivesse passando por nós, da direita para a esquerda na Fig. 17-7, com velocidade escalar  $v$ .

Considere um pequeno segmento do pulso, de comprimento  $\Delta l$ , formando um arco de círculo de raio  $R$ . Uma força com magnitude igual à tensão  $\tau$  puxa este segmento, tangencialmente, em ambas as extremidades. Os componentes horizontais dessas forças se cancelam, mas os componentes verticais se somam formando uma força restauradora  $F$ . Em magnitude,

$$F = 2\tau \sin \theta \approx \tau (2\theta) = \tau \frac{\Delta l}{R} \quad (\text{força}). \quad (17-23)$$

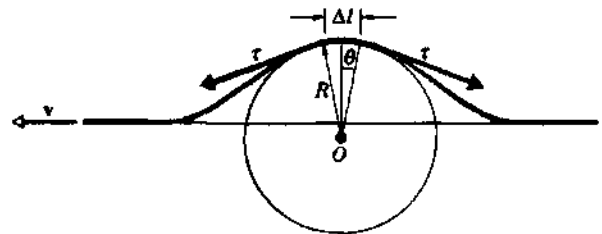


Fig. 17-7 Um pulso simétrico visto de um referencial no qual o pulso é estacionário e a corda parece se mover da direita para a esquerda com velocidade escalar  $v$ . Encontramos a velocidade escalar  $v$  aplicando a segunda lei de Newton a um elemento da corda de comprimento  $\Delta l$ , localizado no topo do pulso.

\*Normalmente usamos o símbolo  $T$  para representar tensão, mas aqui desejamos evitar confusão com o nosso uso desse símbolo para representar o período de oscilação.

Empregamos aqui a aproximação  $\sin \theta \approx \theta$  para ângulos pequenos, e notamos que  $2\theta = \Delta l/R$ .

A massa do segmento é dada por

$$\Delta m = \mu \Delta l \quad (\text{massa}). \quad (17-24)$$

No instante mostrado na Fig. 17-7, o elemento da corda  $\Delta l$  está se movendo num arco de círculo. Assim, ele tem uma aceleração centrípeta em direção ao centro, dada por

$$a = \frac{v^2}{R} \quad (\text{aceleração}). \quad (17-25)$$

As Eqs. 17-23, 17-24 e 17-25 contêm os elementos da segunda lei de Newton. Combinando-os, temos

$$\text{força} = \text{massa} \times \text{aceleração}$$

ou

$$\frac{\tau \Delta l}{R} = (\mu \Delta l) \frac{v^2}{R}$$

Resolvendo esta equação para a velocidade escalar  $v$ , encontramos

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \quad (17-26)$$

igual à Eq. 17-22, se considerarmos o valor da constante  $C$ , naquela equação, igual a um. A Eq. 17-26 dá a velocidade escalar do pulso na Fig. 17-7 e a velocidade escalar de qualquer outra onda na mesma corda, sob a mesma tensão.

A Equação 17-26 nos diz que a velocidade escalar da onda, ao longo de uma corda esticada ideal, depende somente das características desta e não da frequência da onda. A frequência da onda é fixada inteiramente por aquilo que a gerou (por exemplo, a pessoa na Fig. 17-1b). O comprimento da onda é então determinado pela Eq. 17-14 ( $v = \lambda f$ ).

**EXEMPLO 17-4** Na Fig. 17-8, um alpinista em apuros se prendeu a uma corda de emergência jogada por um resgatador. A corda consiste de duas seções: seção 1, com comprimento  $l_1$  e densidade linear  $\mu_1$ , e seção 2, de comprimento  $l_2 = 2l_1$ , e densidade linear  $\mu_2 = 4\mu_1$ . O alpinista dá um puxão no fim da corda (como um sinal de "o.k."), ao mesmo tempo que o resgatador\* puxa a ponta de cima.

a. Qual é a velocidade escalar  $v_1$  dos pulsos na seção 1, em termos de sua velocidade escalar  $v_2$  na seção 2?

**Solução** Vamos supor que a massa das seções da corda é desprezível em relação à massa do alpinista. Assim, a tensão  $\tau$  na corda é igual ao peso do alpinista e é a mesma nas duas seções. Da Eq. 17-26, as velocidades escalares  $v_1$  e  $v_2$  são dadas por

$$v_1 = \sqrt{\frac{\tau}{\mu_1}} \quad \text{e} \quad v_2 = \sqrt{\frac{\tau}{\mu_2}}. \quad (17-27)$$

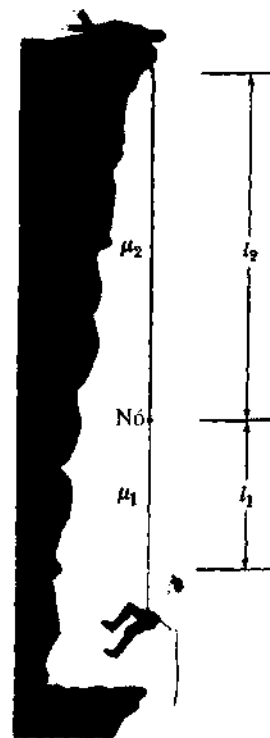


Fig. 17-8 Exemplo 17-4. Um alpinista em apuros está dependurado numa corda de duas seções. Seu resgatador tem a corda segura no topo.

Dividindo a primeira expressão pela segunda e substituindo  $\mu_2 = 4\mu_1$ , encontramos

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\tau}{\mu_1}} \sqrt{\frac{\mu_2}{\tau}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} = \sqrt{\frac{4\mu_1}{\mu_1}} = 2,$$

ou

$$v_1 = 2v_2. \quad (\text{Resposta}) \quad (17-28)$$

b. Em termos de  $l_2$ , a que distância abaixo do resgatador os pulsos se cruzam um com o outro?

**Solução** Podemos simplificar nossos cálculos decidindo primeiro se os pulsos se cruzam acima ou abaixo do nó que une as duas seções. Seja  $t$  o tempo que os pulsos levam para se encontrar. Da Eq. 17-28, sabemos que o pulso gerado pelo alpinista se move através da seção 1, com o dobro da velocidade escalar do pulso gerado pelo resgatador, através da seção 2. Como  $l_2 = 2l_1$ , sabemos também que o pulso produzido pelo alpinista deve percorrer metade da distância que o do resgatador percorrerá para alcançar o nó. Assim, o pulso que partiu do alpinista deve alcançar o nó primeiro e o ponto de cruzamento deve ser acima do nó. Vamos supor que os pulsos se cruzem, no instante  $t$ , a uma distância  $d$  abaixo do resgatador.

Para alcançar o ponto de cruzamento, o pulso que partiu do resgatador deve deslocar-se para baixo, de uma distância  $d$ , numa velocidade escalar  $v_2$ , no tempo  $t$ . Então,

$$t \approx \frac{d}{v_2}. \quad (17-29)$$

Para alcançar o ponto de cruzamento, o pulso gerado pelo alpinista deve deslocar-se para cima de uma distância  $l_1$  a uma velocidade escalar  $v_1$  e mais uma distância  $l_2 - d$  a uma velocidade  $v_2$ , tudo isso no tempo  $t$ . Então,

\*Resgatador é o termo usado por alpinistas. (N. do R.)

$$t = \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2 - d}{v_2}. \quad (17-30)$$

Substituindo-se  $t$  da Eq. 17-29 na Eq. 17-30 e fazendo-se  $l_1 = l_2/2$  e  $v_1 = 2v_2$ , encontramos

$$\frac{d}{v_2} = \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2 - d}{v_2} = \frac{l_2/2}{2v_2} + \frac{l_2 - d}{v_2}.$$

Multiplicando-se por  $v_2$  e rearrumando-se as equações, tem-se

$$d = \frac{1}{8}l_2. \quad (\text{Resposta})$$

## 17-7 Velocidade da Luz

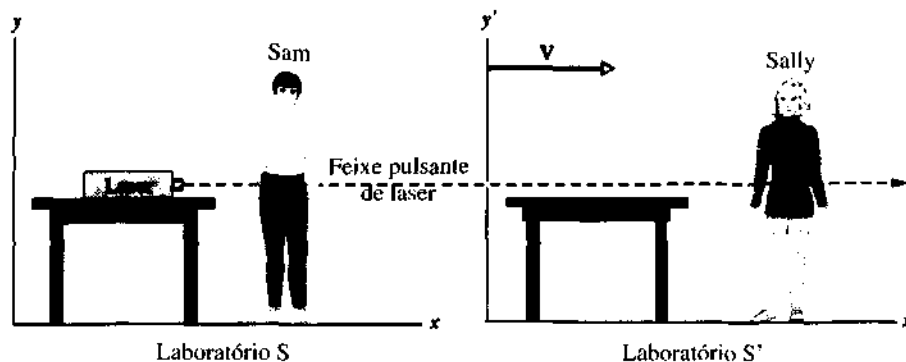
Uma velocidade só tem significado se você especificar um referencial. Para a velocidade de uma onda que se propaga ao longo de uma corda esticada, o referencial lógico é a própria corda. A situação é a mesma para ondas de som no ar, ondulações na água, ondas sísmicas na Terra e todas as outras ondas mecânicas. Quando citamos uma velocidade, o referencial implícito é o meio material através do qual a onda se propaga.

Entretanto, a luz visível (como todas as ondas eletromagnéticas) não requer nenhum meio de transmissão. Ela se propaga livremente através do espaço vazio. Então, quando dizemos “a velocidade da luz,  $c$ , é 299.792.458 m/s”, qual o referencial que temos em mente?

A resposta a essa questão histórica, que foi debatida durante séculos, foi dada por Einstein em 1905 e forma um dos dois postulados nos quais sua teoria especial da relatividade se baseia.

A velocidade escalar da luz tem o mesmo valor,  $c$ , em todas as direções e em todos os referenciais inerciais.

Ao se medir a velocidade escalar da luz, a velocidade relativa entre a fonte de luz e o observador, simplesmente não importa.



**Fig. 17-9** Um laser no laboratório S emite um feixe de luz. A velocidade escalar dessa luz é medida por dois observadores, um no laboratório S e o outro no laboratório S', que está se movendo a alta velocidade  $V$  com relação a S. Ambos os observadores medem a mesma velocidade escalar  $c$  para a luz.

Refleta sobre o que isso quer dizer. Suponha que você tem uma fonte de luz pulsada, a laser, em seu laboratório e que você mede a velocidade escalar da luz no feixe de pulsos que ela emite, obtendo um valor  $c$ . Suponha (veja Fig. 17-9) que outro experimentador, que está se afastando de você e sua fonte de luz, numa velocidade muito alta  $V$ , ao longo da direção do feixe, também mede a velocidade da luz no feixe. O postulado de Einstein diz que você e esse segundo observador medirão exatamente o *mesmo* valor de  $c$  para a velocidade escalar da luz. A velocidade  $V$  do observador em relação a você não faz a menor diferença.

Muitos de nós, ao nos depararmos pela primeira vez com esse postulado, tendemos a rejeitá-lo com o argumento de que ele viola o “bom senso”. Antes que você o faça, entretanto, considere os seguintes fatos:

**Fato 1.** O postulado não se aplica às ondas mecânicas ou a partículas físicas como bolas de futebol — somente à luz. A luz é diferente.

**Fato 2.** Nossa percepção de “bom senso” é desenvolvida ao observarmos objetos que se movem a velocidades muito inferiores à velocidade da luz. Se a velocidade da luz fosse muito menor (digamos 500 km/h) e assim mais próxima das nossas experiências do dia-a-dia, provavelmente, nenhum de nós teria dificuldades conceituais com esse postulado. Pareceria então, de fato, uma questão de bom senso.

**Fato 3.** O próprio postulado e as previsões da teoria da relatividade que se baseiam nele têm sido testados exaustivamente em laboratório; a concordância com as experiências é total. Jamais uma exceção foi confirmada.

Vamos retornar a esse postulado e explorar suas implicações de forma completa no Cap. 42, que trata da teoria da relatividade de Einstein.

## 17-8 Energia e Potência numa Onda Progressiva (Opcional)

Uma onda movendo-se ao longo de uma corda esticada transporta tanto energia cinética quanto potencial. Vamos considerar uma de cada vez.

### Energia Cinética

Um elemento da corda de massa  $dm$ , oscilando transversalmente num movimento harmônico simples, enquanto a onda passa por ele, tem energia cinética associada à sua velocidade transversal  $u$ . Quando o elemento passa rapidamente pela sua posição  $y = 0$  (veja Fig. 17-10), sua velocidade transversal — e do mesmo modo sua energia cinética — é máxima. Quando o elemento está na sua posição extrema  $y = y_m$ , sua velocidade transversal — e novamente também sua energia cinética — é zero.

### Energia Potencial

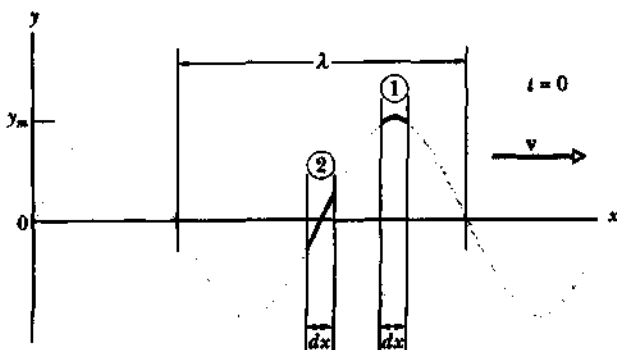
Para haver transmissão de uma onda senoidal ao longo de uma corda inicialmente em repouso, a onda deve necessariamente esticá-la. À medida que o elemento da corda de comprimento  $dx$  oscila transversalmente, o seu comprimento deve aumentar e diminuir periodicamente, para que o elemento da corda assuma uma forma de onda senoidal. A energia potencial está associada com essas alterações de comprimento, como acontece nas molas.

Quando o elemento da corda está na posição  $y = y_m$  (veja Fig. 17-10), seu comprimento tem o valor de repouso  $dx$  e a energia potencial armazenada é zero. Entretanto, quando o elemento está passando pela posição  $y = 0$ , está esticado ao máximo e sua energia potencial armazenada atinge então seu maior valor. O elemento oscilante da corda atinge assim os máximos de energia cinética e potencial em  $y = 0$ .

### A Potência Transmitida

A energia cinética  $dK$  associada a um elemento da corda de massa  $dm$  é dada por

$$dK = \frac{1}{2} dm u^2, \quad (17-31)$$



**Fig. 17-10** No elemento (1) da corda, na posição  $y = y_m$ , a energia cinética e a energia potencial armazenadas são igualmente nulas. No elemento (2), na posição  $y = 0$ , essas energias armazenadas têm seus valores máximos. A energia cinética depende da velocidade transversal do elemento da corda. A energia potencial depende do quanto o elemento da corda é esticado, à medida que a onda passa por ele.

onde  $u$  é a velocidade escalar transversal do elemento oscilante da corda, dada pela Eq. 17-21 como

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t) \quad (17-32)$$

Usando essa relação e colocando-se  $dm = \mu dx$ , reescrevemos a Eq. 17-31 como

$$dK = \frac{1}{2} (\mu dx) (-\omega y_m)^2 \cos^2(kx - \omega t). \quad (17-33)$$

A divisão da Eq. 17-33 por  $dt$  fornece a taxa na qual a energia cinética de um elemento da corda varia e, assim, a taxa na qual a energia cinética é transportada pela onda. A razão  $dx/dt$ , que aparece então à direita da Eq. 17-33, é a velocidade escalar da onda  $v$ , e assim obtemos

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 y_m^2 \cos^2(kx - \omega t). \quad (17-34)$$

A taxa média na qual a energia cinética é transportada é

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{dK}{dt}\right)} &= \frac{1}{2} \mu v \omega^2 y_m^2 \overline{\cos^2(kx - \omega t)} \\ &= \frac{1}{2} \mu v \omega^2 y_m^2. \end{aligned} \quad (17-35)$$

Na Eq. 17-35, obtemos a média sobre um número inteiro de comprimentos de onda e usamos o fato de que o valor médio do quadrado da função cosseno tomado sobre um número inteiro de comprimentos de onda é  $1/2$ .

A energia potencial também é transportada pela onda e na mesma taxa média dada pela Eq. 17-35. Apesar de não se fazer a demonstração, você deve se lembrar que num sistema oscilante, tal como um pêndulo ou um sistema massa-mola, a energia cinética média e a energia potencial média são de fato iguais.

A **potência média**, que é a taxa média na qual a energia de ambos os tipos é transmitida pela onda, é então

$$\bar{P} = 2 \overline{\left(\frac{dK}{dt}\right)} \quad (17-36)$$

ou, pela Eq. 17-35,

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 y_m^2 \quad (\text{potência média}). \quad (17-37)$$

Nesta equação os fatores  $\mu$  e  $v$  dependem do material e da tensão da corda. Os fatores  $\omega$  e  $y_m$  dependem do processo que gera a onda. O fato da potência média transmitida pela onda variar com o quadrado de sua amplitude e também com o quadrado de sua frequência angular é um resultado geral, verdadeiro para todos os tipos de onda.

**EXEMPLO 17-5** Uma corda tem uma densidade linear  $\mu$  de 525 g/m e está esticada com uma tensão  $\tau$  de 45 N. Uma onda cuja frequência  $f$  e amplitude  $y_m$  são 120 Hz e 8,5 mm, respectivamente, se propaga ao longo da corda. A que taxa média a onda transporta energia ao longo da corda?

**Solução** Antes de encontrar a *potência* média usando a Eq. 17-37, devemos calcular a *frequência angular*  $\omega$  e a *velocidade escalar de onda*  $v$ . Da Eq. 17-10,

$$\omega = 2\pi f = (2\pi)(120 \text{ Hz}) = 754 \text{ rad/s.}$$

Pela Eq. 17-26 temos

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{45 \text{ N}}{0.525 \text{ kg/m}}} = 9.26 \text{ m/s.}$$

A equação 17-37 então fornece

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{2} \mu v \omega^2 y_m^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)(0.525 \text{ kg/m})(9.26 \text{ m/s}) \\ &\quad \times (754 \text{ rad/s})^2 (0.0085 \text{ m})^2 \\ &= 100 \text{ W.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

## 17-9 O Princípio da Superposição

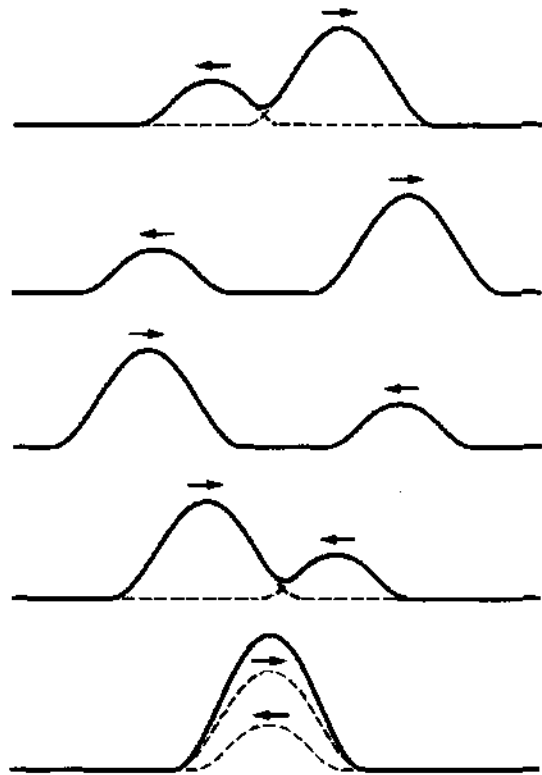
É freqüente acontecer de duas ou mais ondas passarem, simultaneamente, por uma mesma região. Quando ouvimos um concerto, por exemplo, sons provenientes de muitos instrumentos chegam simultaneamente aos nossos ouvidos. Os elétrons nas antenas de nossos aparelhos de rádio e TV são colocados em movimento por todo um conjunto de sinais de diferentes centros de transmissão. A água de um lago ou porto pode ser revolta pelas ondas de muitos barcos.

Suponha que duas ondas se propaguem simultaneamente ao longo da mesma corda esticada. Sejam  $y_1(x, t)$  e  $y_2(x, t)$  os deslocamentos que a corda sofreria se cada onda agisse sozinha. O deslocamento da corda, quando ambas as ondas atuam, é então

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) \quad (17-38)$$

sendo, no caso, uma soma algébrica. Esse é um outro exemplo do **princípio da superposição** que você já encontrou na Seção 15-3. Ele diz que, quando diversos efeitos ocorrem simultaneamente, o efeito resultante é a soma dos efeitos individuais. Para ondas numa corda esticada isso quer dizer que o deslocamento resultante da corda, em qualquer ponto ao longo de seu comprimento, corresponde à soma dos deslocamentos que as ondas teriam produzido individualmente. Esse resultado é válido enquanto as amplitudes das ondas não forem muito grandes, o que supomos aqui.

A Fig. 17-11 mostra uma seqüência cronológica de “fotografias” de dois pulsos que se propagam, em sentidos opostos, na mesma corda esticada. Quando os pulsos se sobrepõem, o deslocamento da corda é a soma algébrica dos deslocamentos individuais, conforme mostra a Eq. 17-38. Cada pulso se move através do outro, como se o outro não estivesse presente.



**Fig. 17-11** Dois pulsos se propagam em sentidos opostos ao longo de uma corda esticada. O princípio da superposição se aplica à medida que eles passam através um do outro.

## Análise de Fourier

O matemático francês Jean Baptiste Fourier (1786-1830) explicou como o princípio da superposição pode ser usado para analisar formas de onda não-senoidais. Ele mostrou que qualquer forma de onda pode ser representada como a soma de um grande número de ondas senoidais, de frequências e amplitudes cuidadosamente escolhidas. O físico inglês Sir James Jeans expressou bem esta idéia:

**O teorema (de Fourier) nos diz que qualquer curva, não importa de que natureza seja ou de que maneira foi originalmente obtida, pode ser fielmente reproduzida através da superposição de um número suficiente de curvas harmônicas simples — em resumo, qualquer curva pode ser construída pelo empilhamento de ondas.**

A Fig. 17-12 mostra um exemplo da *série de Fourier*, como tais somas são denominadas. A curva dente-de-serra da Fig. 17-12a mostra a variação no tempo (na posição  $x = 0$ ) da onda que desejamos representar. Pode-se demonstrar que a série de Fourier que a representa é

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{\pi} \text{sen } \omega t - \frac{1}{2\pi} \text{sen } 2\omega t \\ &\quad - \frac{1}{3\pi} \text{sen } 3\omega t \cdots, \end{aligned} \quad (17-39)$$



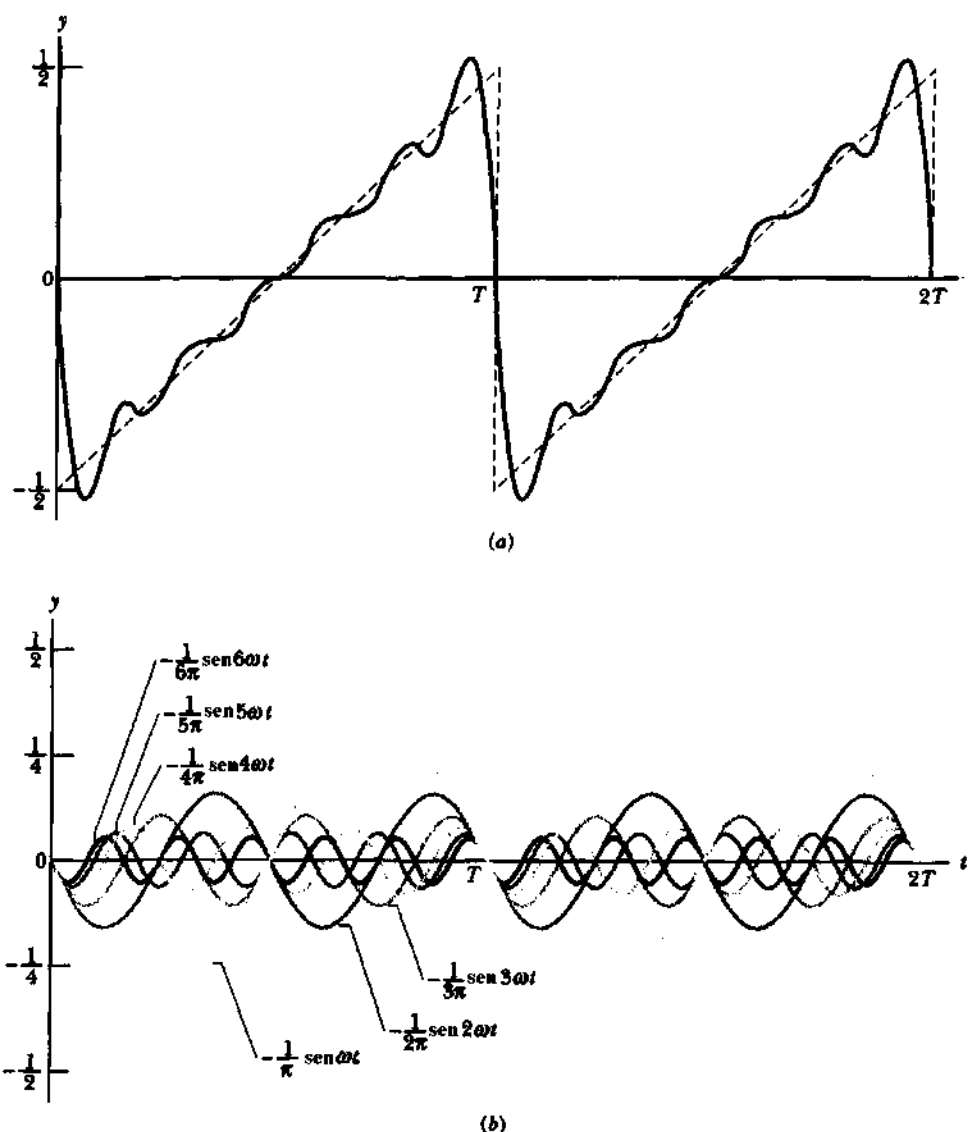


Fig. 17-12 (a) A curva dente-de-serra tracejada é aproximada pela curva cheia, que é o resultado obtido somando-se os primeiros seis termos da soma na Eq. 17-39. (Uma aproximação melhor é obtida se somarmos um número maior de termos.) (b) Os seis primeiros termos daquela equação vistos individualmente.

na qual  $\omega = 2\pi/T$ , onde  $T$  é o período da curva dente-de-serra. A curva aproximada da Fig. 17-12a, que representa a soma dos primeiros seis termos da Eq. 17-39, apresenta uma boa convergência em relação à dente-de-serra. A Fig. 17-12b mostra estes seis termos separadamente. Adicionando-se mais termos, é possível aproximar-se da curva dente-de-serra com a exatidão desejada.

Você, agora, vê justificado o tempo gasto na análise do comportamento de uma onda senoidal. Uma vez compreendidas as ondas senoidais, o teorema de Fourier abre as portas para o entendimento de todas as outras formas de onda.

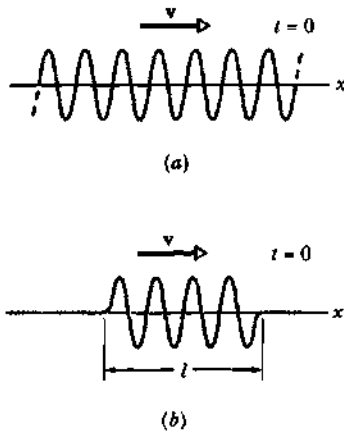
### 17-10 Dispersão (Opcional)

Uma verdadeira onda senoidal, tal como aquela da Fig. 17-13a, não tem início ou fim, nem no espaço nem no tempo,

e todos os seus intervalos de comprimento  $\lambda$  são idênticos. Tal onda não é apenas meramente teórica, mas também seria inútil para o envio de um sinal de um ponto a outro, já que sua forma permanece constante.

Podemos enviar um sinal através de um pulso, tal como aquele da Fig. 17-13b, que pode representar a quantidade 1 na aritmética binária utilizada nos computadores. O pulso da Fig. 17-13b não é uma onda senoidal pura, já que é finito tanto no espaço quanto no tempo. Da análise de Fourier, sabemos que esse pulso pode ser construído combinando-se ondas senoidais, de extensão infinita, de frequências e amplitudes escolhidas de forma apropriada. É impressionante que se encontre um conjunto de ondas cuja soma dê o pulso de comprimento  $l$  da Fig. 17-13b, cancelando-se totalmente fora de seus limites.

Se todas as componentes de Fourier da onda se propagam através do meio na mesma velocidade, então sua soma



**Fig. 17-13** (a) Uma "fotografia" da onda senoidal da Eq. 17-2, em  $t = 0$ . (b) Uma "fotografia" de um pulso de comprimento  $l$ . De acordo com a metodologia de Fourier, esse pulso também pode ser representado por um somatório de ondas senoidais de diferentes comprimentos de onda e amplitudes.

sempre fornecerá um pulso com o mesmo formato. Em tais situações, o meio e as componentes de onda são ditos **não-dispersivos**, o que significa que o pulso mantém seu formato enquanto se movimenta. Se, entretanto, a velocidade de uma onda senoidal num meio depender de sua frequência (ou de forma equivalente, de seu comprimento de onda), as componentes de onda que possuem frequências diferentes se movem com velocidades diferentes e sua soma não é mais um pulso de formato constante. Ao invés disso, o pulso se espalha (fica mais longo). Em tal situação diz-se que o meio e as componentes de onda exibem **dispersão**, o que significa que o pulso altera seu formato enquanto se move.

Para ondas senoidais numa corda esticada, a velocidade é dada pela Eq. 17-26 e vemos que essa velocidade independe do comprimento de onda. Ondas sonoras se comportam do mesmo modo, tendo uma única velocidade para todas as frequências ou comprimentos de onda. Assim, ondas sonoras que se propagam pelo ar não apresentam dispersão. Se você gritar em direção a um paredão distante, o eco que retorna retém a forma de onda do grito; você pode reconhecer suas próprias palavras.

Ondas de luz que se propagam através do vácuo também não sofrem dispersão. Entretanto, quando a luz se propaga através de um meio como vidro ou água, a velocidade passa a depender do comprimento de onda. É devido à dispersão que a luz do sol se espalha num espectro de cores ao passar por um prisma de vidro e forma um arco-íris ao passar por gotas de chuva.

A velocidade com que um pulso se propaga é chamada de **velocidade de grupo** do pulso. Esta é a velocidade com que sinais — ou informação — podem ser transmitidos pelo pulso. Se não existe dispersão, a velocidade de grupo é a mesma que a velocidade normal das ondas senoidais, dada pela Eq. 17-26 no caso de cordas esticadas. Se existir dispersão, a velocidade de grupo e as velocidades das ondas senoidais diferem e o sinal pode ser perdido.

## 17-11 Interferência de Ondas

Suponha que mandemos duas ondas senoidais, de igual comprimento de onda e amplitude, na mesma direção ao longo de uma corda esticada. O princípio de superposição se aplica. Qual a perturbação resultante prevista?

Tudo depende de quanto as ondas estão *em fase* uma em relação à outra. Se estiverem exatamente em fase, elas se somarão, dobrando o deslocamento causado por cada onda agindo individualmente. Se estiverem exatamente fora de fase, elas se cancelarão totalmente, não produzindo nenhuma perturbação. Chamamos de **interferência** este fenômeno de cancelamento e de reforço; ele se aplica a ondas de todos os tipos.

Duas ondas dadas por

$$y_1(x, t) = y_m \text{sen}(kx - \omega t + \phi) \quad (17-40)$$

e

$$y_2(x, t) = y_m \text{sen}(kx - \omega t) \quad (17-41)$$

se propagam ao longo da mesma corda esticada. Estas ondas têm a mesma frequência angular  $\omega$ , o mesmo número de onda angular  $k$  e a mesma amplitude  $y_m$ . Elas se propagam na mesma direção, a de  $x$  crescente, com a mesma velocidade dada pela Eq. 17-26. Elas diferem somente por um ângulo constante  $\phi$ , que é chamado de **diferença de fase**.

Do princípio da superposição (Eq. 17-38), a onda combinada tem um deslocamento de

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_1(x, t) + y_2(x, t) \\ &= y_m [\text{sen}(kx - \omega t + \phi) + \text{sen}(kx - \omega t)]. \end{aligned} \quad (17-42)$$

Do Apêndice G vemos que podemos escrever a soma dos senos de dois ângulos, como

$$\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta = 2 \text{sen } \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta). \quad (17-43)$$

Aplicando esta relação à Eq. 17-42, tem-se

$$y(x, t) = [2y_m \cos \frac{1}{2}\phi] \text{sen}(kx - \omega t + \frac{1}{2}\phi). \quad (17-44)$$

A onda resultante é também uma onda senoidal, diferindo das ondas originais somente pela sua fase inicial, que é  $\phi/2$ , e sua amplitude, que é a quantidade entre colchetes, isto é,  $2y_m \cos(\phi/2)$ .

Se  $\phi = 0$ , as duas ondas estão exatamente em fase. Então a Eq. 17-44 reduz-se a

$$y(x, t) = 2y_m \text{sen}(kx - \omega t) \quad (\phi = 0). \quad (17-45)$$

A interferência é totalmente *construtiva* e a onda resultante difere das duas ondas originais somente por ter o dobro de suas amplitudes. A Fig. 17-14a mostra um caso no qual, apesar de  $\phi$  ser diferente de zero, ele é muito pequeno.

Se  $\phi = \pi$  rad (ou  $180^\circ$ ), as duas ondas estão exatamente em oposição de fase. Então  $\cos(\phi/2)$  se reduz a  $\cos \pi/2 = 0$ ,

e a amplitude da onda resultante (Eq. 17-44) é zero. Temos, então, para todos os valores de  $x$  e  $t$ ,

$$y(x, t) = 0 \quad (\phi = \pi \text{ rad}). \quad (17-46)$$

Assim, quando as componentes de onda estão exatamente em oposição de fase, sua interferência é totalmente *destrutiva*. A Figura 17-14b mostra um caso em que, apesar de  $\phi$  não ser  $\pi$  rad, ele é próximo a este valor. As duas componentes de onda quase — mas não completamente — se cancelam.

**EXEMPLO 17-6** Duas ondas que se propagam, movendo-se no mesmo sentido, ao longo de uma corda esticada, se interferem mutuamente. A amplitude  $y_m$  de cada onda é 9,7 mm e a diferença de fase  $\phi$  entre elas é  $110^\circ$ .

a. Qual é a amplitude  $y'_m$  da onda formada pela interferência dessas duas ondas?

**Solução** Da Eq. 17-44 temos para a amplitude

$$y'_m = 2y_m \cos \frac{1}{2}\phi = (2)(9.7 \text{ mm})(\cos 110^\circ/2) \\ = 11 \text{ mm.} \quad (\text{Resposta})$$

b. Que diferença de fase  $\phi$ , entre as duas ondas de amplitudes idênticas, tornaria a amplitude da onda resultante idêntica àquelas das ondas que estão interferindo?

**Solução** Da Eq. 17-44 temos a condição

$$2y_m \cos \frac{1}{2}\phi = y_m,$$

ou

$$\phi = 2 \cos^{-1} \left( \frac{1}{2} \right) = 120^\circ \text{ ou } -120^\circ \\ = 2.1 \text{ rad ou } -2.1 \text{ rad.} \quad (\text{Resposta})$$

Existem assim duas soluções, uma correspondendo à primeira onda avançada no tempo em relação à segunda, e a outra correspondendo à situação oposta.

## TÁTICA PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

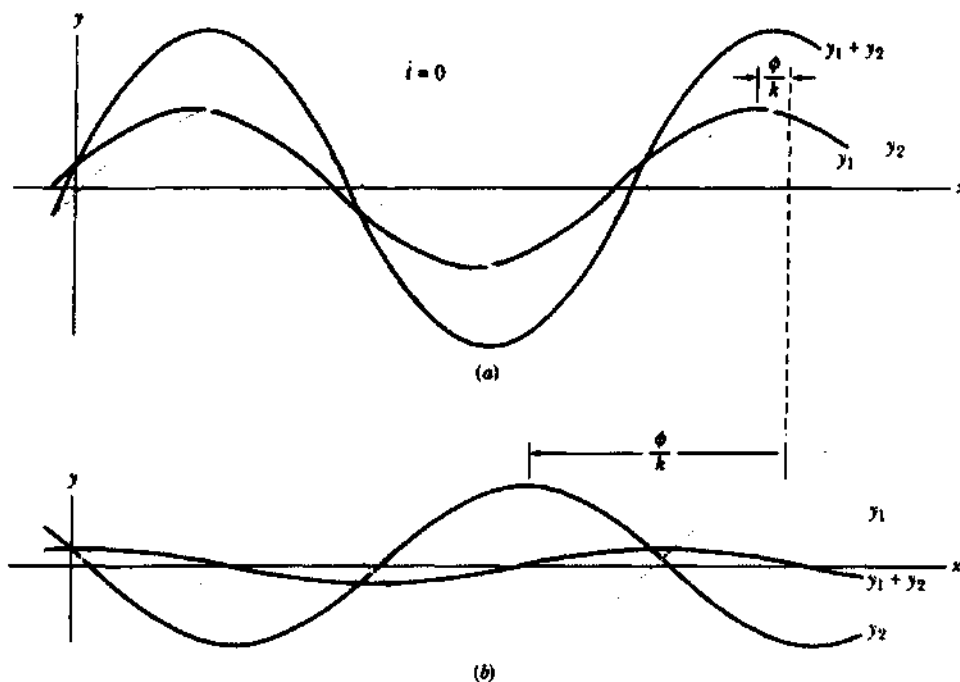
### TÁTICA 2: IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Ao deduzirmos a Eq. 17-44 acima (e em muitos outros lugares), usamos identidades trigonométricas tais como aquelas da Eq. 17-43. Engenheiros e cientistas se familiarizam com elas através do uso constante mas, como existem muitas, o iniciante freqüentemente se sente perdido. O Apêndice G lista todas as identidades usadas neste livro e mais algumas outras para torná-la completa. Vale a pena estudá-las, procurando por semelhanças tais que, por exemplo, quando você vir algo como  $\sin \alpha + \sin \beta$  saberá expressá-lo de outra forma.

Tente transformar as expressões em formas para as quais existam identidades. Por exemplo, se você se deparar com  $3 \sin \alpha \cos \alpha$ , reescreva-o como  $(3/2)(2 \sin \alpha \cos \alpha)$ , que (veja Apêndice G) é simplesmente  $(3/2) \sin 2\alpha$ . Alegre-se quando você vir  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$  porque é igual a unidade. Lembre-se que, apesar do valor médio de uma função seno ou co-seno ser zero num comprimento de onda, o valor médio em metade de um comprimento de onda é  $(1/2)\sqrt{2}$  e a média do quadrado de uma função seno ou co-seno em um comprimento de onda é  $1/2$ .

## 17-12 Ondas Estacionárias

Na seção anterior, discutimos duas ondas senoidais, de igual comprimento de onda e amplitude, que se propagam *no mesmo sentido* ao longo de uma corda esticada. E se elas



**Fig. 17-14** (a) Duas ondas, cujas fases diferem por um pequeno valor, reforçam-se, numa interferência quase completamente construtiva. A quantidade  $\phi/k = (\phi/2\pi)\lambda$  dá a distância ao longo do eixo do  $x$  entre cristas adjacentes das duas ondas. (b) Duas ondas, cujas fases diferem de quase  $\pi$  rad ( $180^\circ$ ), quase se cancelam.

se propagarem em sentidos opostos? Podemos ver o resultado aplicando o princípio da superposição.

A Fig. 17-15 ilustra, graficamente, a situação. Ela mostra as duas ondas que se combinam, uma se propagando para a esquerda na Fig. 17-15a, a outra para a direita na Fig. 17-15b. A Fig. 17-15c mostra sua soma, obtida pela aplicação gráfica do princípio da superposição. A característica notável da onda resultante é que existem locais ao longo da corda, chamados **nós**, onde a corda permanece em repouso. Quatro desses nós estão marcados com pontos na Fig. 17-15c. Na metade da distância entre nós adjacentes estão os **antinós** ou **ventres**, onde a amplitude resultante é máxima. Padrões de onda como a da Fig. 17-15c são chamados de **ondas estacionárias** porque permanecem imóveis; isto é, as localizações dos máximos e mínimos não variam. Vamos analisá-los matematicamente.

Representamos as duas componentes da onda por

$$y_1(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t) \quad (17-47)$$

e

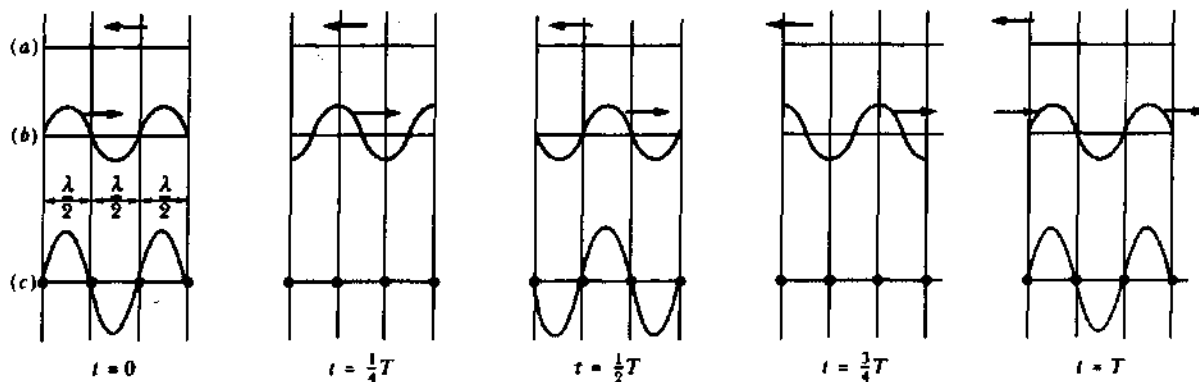
$$y_2(x, t) = y_m \sin(kx + \omega t). \quad (17-48)$$

Não introduzimos fase inicial aqui porque não tem sentido falar-se de diferença de fase entre ondas que se deslocam em sentidos opostos. (Como analogia, os ponteiros de segundos de dois relógios podem manter uma separação angular constante se estiverem girando no mesmo sentido, mas não podem fazê-lo se estiverem girando em sentidos contrários.)

O princípio da superposição fornece, para a onda resultante,

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_1(x, t) + y_2(x, t) \\ &= y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx + \omega t). \end{aligned}$$

A aplicação da relação trigonométrica 17-43 conduz a



**Fig. 17-15** Como ondas progressivas produzem ondas estacionárias. (a) e (b) representam “fotografias” de duas ondas de comprimento de onda e amplitude iguais, propagando-se em direções contrárias, em cinco instantes diferentes durante um único período de oscilação. (c) Sua superposição nos cinco instantes. Observe os nós e antinós em (c), os nós estando representados por pontos. Não existem nós ou antinós nas ondas progressivas (a) e (b).

$$y(x, t) = [2y_m \sin kx] \cos \omega t. \quad (17-49)$$

Esta *não* é uma onda que se propaga, porque não é da forma dada pela Eq. 17-18. A Eq. 17-49 descreve uma onda estacionária.

A quantidade  $2y_m \sin kx$  entre colchetes na Eq. 17-49 pode ser vista como a amplitude de oscilação do elemento da corda que está localizada na posição  $x$ . Entretanto, visto que uma amplitude é sempre positiva, tomamos o valor absoluto da quantidade  $2y_m \sin kx$  para representá-la.

Numa onda senoidal que se propaga, a amplitude da onda é a mesma para todos os elementos da corda. Isso não é verdadeiro para uma onda estacionária, onde a amplitude *varia com a posição*. Na onda estacionária descrita pela Eq. 17-49, a amplitude varia com  $\sin kx$ . Por exemplo, a amplitude é zero para valores de  $kx$  que fazem  $\sin kx = 0$ . Estes valores são

$$kx = n\pi, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \quad (17-50)$$

Substituindo  $k = 2\pi/\lambda$  e rearrumando-se a equação, obtemos

$$x = n \frac{\lambda}{2}, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{nós}), \quad (17-51)$$

que são as posições de amplitude nula — os nós — da onda estacionária descrita pela Eq. 17-49. Note que os nós adjacentes estão separados de  $\lambda/2$ , meio comprimento de onda.

A amplitude da onda estacionária da Eq. 17-49 tem um valor máximo de  $2y_m$ , que ocorre para valores de  $kx$  que correspondem a  $|\sin kx| = 1$ . Estes valores são

$$\begin{aligned} kx &= \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \dots = \frac{2n+1}{2}\pi \\ &= (n + \frac{1}{2})\pi, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \quad (17-52) \end{aligned}$$

Substituindo  $k = 2\pi/\lambda$  e rearrumando a equação, obtemos

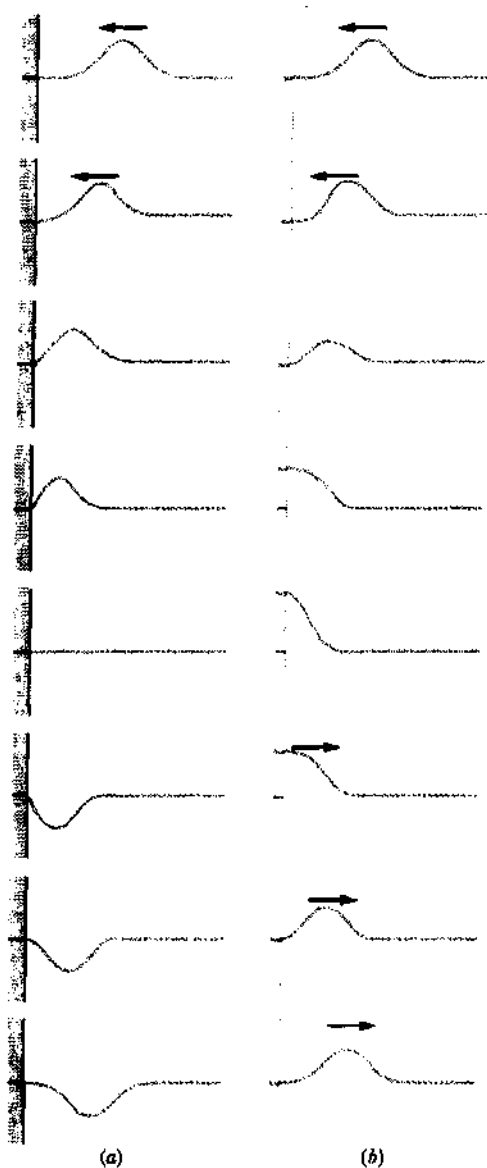
$$x = (n + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{2}, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

(antinós), (17-53)

que são as posições de amplitude máxima — os antinós ou ventres — da onda estacionária da Eq. 17-49. Os antinós estão separados meio comprimento de onda e se localizam a meio caminho entre um par de nós.

### Reflexões em Extremidades Fixas

Podemos gerar uma onda estacionária numa corda esticada ao deixar a onda que se propaga refletir na extremidade



**Fig. 17-16** (a) Um pulso incidente da direita é refletido por uma parede rígida. Observe que o sinal do pulso refletido é invertido. (b) Aqui as terminações são flexíveis, sendo permitido à extremidade da corda deslizar sem atrito, para cima e para baixo, na haste. O pulso é refletido sem que ocorra uma mudança de sinal.

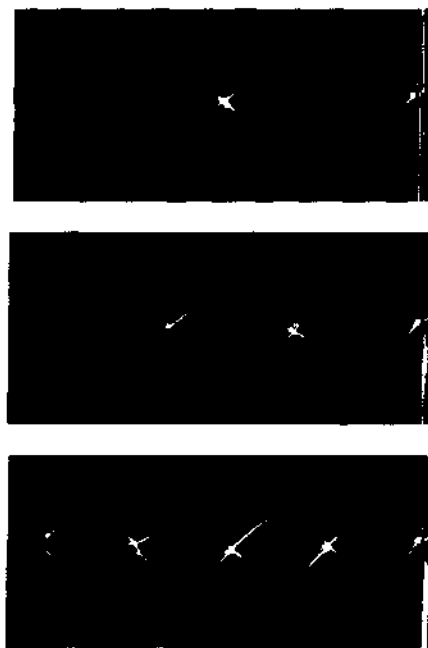
distante. A onda incidente (original) e a onda refletida podem ser descritas pelas Eqs. 17-47 e 17-48, respectivamente, e elas podem se combinar formando um padrão de ondas estacionárias.

Na Fig. 17-16, usamos um único pulso para mostrar como tais reflexões acontecem. Na Fig. 17-16a, a corda é fixada na sua extremidade esquerda. Quando o pulso chega a esta extremidade, exerce uma força para cima sobre a parede. Pela terceira lei de Newton, a parede exercerá sobre a corda uma força igual mas de sentido contrário. Essa força de reação gera um pulso neste ponto, que viajará de volta ao longo da corda, no sentido contrário do pulso incidente. Numa reflexão “rígida” deste tipo, cria-se um nó no ponto onde a corda está fixada. Os pulsos refletido e incidente devem possuir sinais contrários de forma a se cancelarem mutuamente neste ponto.

Na Fig. 17-16b, a extremidade esquerda da corda está presa a um leve anel livre para deslizar, sem atrito, ao longo de uma haste. Quando o pulso incidente chega, o anel sobe na haste. À medida que o anel se desloca, ele puxa a corda, esticando-a e produzindo um pulso refletido de mesmo sinal e amplitude que o pulso incidente. Esta é uma reflexão “não-rígida”, onde os pulsos incidente e refletido se reforçam, criando um antinó na ponta da corda; o deslocamento máximo do anel sendo, agora, o dobro da amplitude desses pulsos.

### 17-13 Ondas Estacionárias e Ressonância

A Fig. 17-17 mostra três padrões (ou **modos de oscilação**) de onda estacionária que podem ser gerados ao se vibrar



**Fig. 17-17** Uma fotografia estroboscópica revela modelos (imperfeitos) de ondas estacionárias numa corda que foi levada a oscilar pelo vibrador mostrado no extremo esquerdo. Os modelos correspondem a  $n = 2, 3$  e  $4$  nas Eqs. 17-54 a 17-56.

uma ponta da corda esticada em diferentes frequências, enquanto a outra ponta está fixa. Observe os nós e antinós. Os modos de oscilação da Fig. 17-17 ocorrem somente em frequências discretas bem definidas. Dizemos que o sistema entra em *ressonância* nessas frequências. Se a corda é vibrada em alguma outra frequência diferente das **frequências de ressonância**, uma onda estacionária não é gerada e as oscilações na corda são de amplitude pequena.

Considere uma situação semelhante em que uma corda de violão, por exemplo, é esticada entre dois grampos separados de uma distância fixa  $l$ , e faz-se a corda oscilar numa frequência de ressonância, gerando-se uma onda estacionária. Já que as duas pontas da corda estão fixas, deve existir um nó em cada extremidade. O padrão mais simples que atende esta condição está mostrado na Fig. 17-18a. Neste caso existe um antinó no centro da corda e a distância  $l$  é igual a  $\lambda/2$ , onde  $\lambda$  é o comprimento de onda necessário para gerar este padrão de onda estacionária.

Um segundo padrão, também simples e que atende à condição de extremidades fixas, é mostrado na Fig. 17-18b. Este tem três nós e dois antinós; a distância  $l$  e o comprimento de onda associado se relacionam por  $l = \lambda$ . Um terceiro padrão é mostrado na Fig. 17-18c. Tem 4 nós e 3 antinós e  $l = 3\lambda/2$ . Se você desejar, pode continuar nesta progressão, encontrando padrões cada vez mais complicados. A cada passo, o padrão tem mais um nó e um antinó que o precedente, e um fator adicional  $\lambda/2$  é acomodado na distância  $l$ .

A relação entre  $\lambda$  e  $l$  pode ser resumida por

$$l = \frac{n}{2} \lambda, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (17-54)$$

Logo os comprimentos de onda para esses padrões sucessivos são expressos por

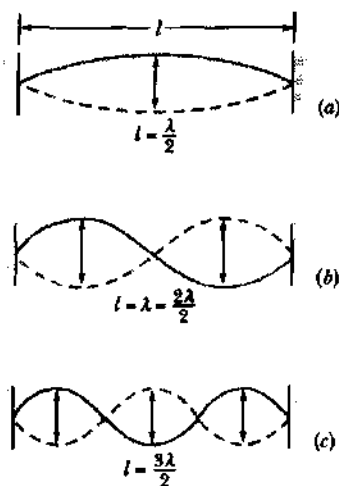


Fig. 17-18 Uma corda, esticada entre dois grampos, é levada a oscilar em padrões de ondas estacionárias. (a) Diz-se que o padrão mais simples, que é o modo *fundamental* ou *primeiro harmônico*, tem meio comprimento de onda, uma alusão à forma que a corda assume em seus deslocamentos máximos (em linhas sólida e tracejada). (b) O *segundo harmônico* tem um comprimento de onda. (c) o *terceiro harmônico* tem três meios comprimentos de onda.

$$\lambda = \frac{2l}{n}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (17-55)$$

As frequências de ressonância são obtidas das Eqs. 17-55 e 17-4:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2l} n, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (17-56)$$

A equação 17-56 indica que as frequências de ressonância são múltiplos inteiros da frequência de ressonância mais baixa,  $f = v/2l$ , que corresponde a  $n = 1$ . Chama-se de *fundamental* ou *1.º harmônico* o modo de oscilação de frequência mais baixa. O *2.º harmônico* é o modo de oscilação com  $n = 2$ , o *3.º harmônico* corresponde a  $n = 3$  e assim por diante. Chama-se de **série harmônica** o conjunto de todos os possíveis modos de oscilação, enquanto  $n$  é chamado de **número harmônico**.

Se a corda for balançada numa frequência diferente daquelas da Eq. 17-56, não será possível transferir energia de maneira eficiente entre o agente oscilante externo e a corda. Durante alguns intervalos de tempo, o agente externo, por exemplo um vibrador mecânico, realizará trabalho sobre a corda; em outros intervalos, a corda realizará trabalho sobre o vibrador. Entretanto, na *ressonância*, isto é, numa frequência ressonante, o fluxo de energia é todo do vibrador para a corda. A amplitude da oscilação e as perdas por atrito crescem até que a corda oscilante perca energia na mesma proporção em que recebe energia do vibrador.

O fenômeno da ressonância é comum a qualquer sistema oscilante. A Fig. 17-19 mostra quatro dos muitos modos de oscilação (bidimensional) da membrana de um tambor, enquanto a Fig. 17-20 mostra os padrões de ondas estacionárias num sino. Na física quântica, os estados nos quais os átomos podem existir são interpretados, às vezes, como modos de oscilação (tridimensionais) das ondas de matéria que representam os elétrons atômicos.

**EXEMPLO 17-7** Na Fig. 17-21, uma corda amarrada a um vibrador em  $P$  e passando por um suporte em  $Q$  é tensionada por um bloco de massa  $m$ . A separação  $l$  entre  $P$  e  $Q$  é 1,2 m, a densidade linear da corda é 1,6 g/m e a frequência  $f$  do vibrador é fixa em 120 Hz. A amplitude de movimento em  $P$  é pequena o suficiente para que esse ponto possa ser considerado um nó. Outro nó existe em  $Q$ .

a. Que massa  $m$  permitirá o vibrador estabelecer o 4.º harmônico na corda?

**Solução** As frequências ressonantes dadas pela Eq. 17-56 são

$$f = \frac{v}{2l} n, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (17-57)$$

Precisamos aplicar uma tensão  $\tau$  à corda, de forma a igualar a frequência do vibrador à frequência do 4.º harmônico, conforme dada por essa equação.

A velocidade escalar  $v$  das ondas em cordas é dada pela Eq. 17-26,

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{mg}{\mu}}, \quad (17-58)$$

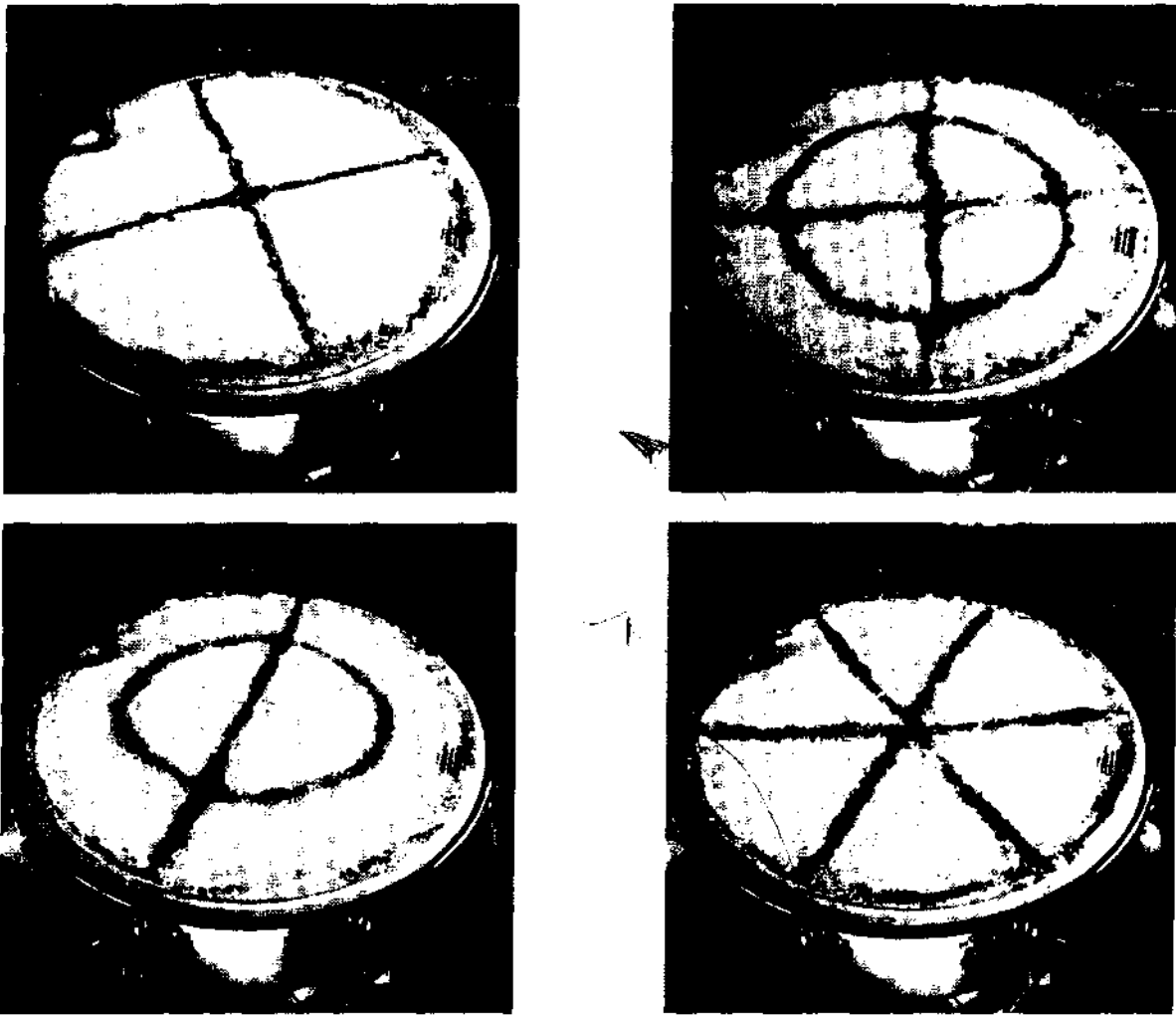


Fig. 17-19 Quatro dos muitos padrões de ondas estacionárias possíveis no "couro" de um tambor. Eles se tornam visíveis salpicando-se um pó escuro em sua superfície. À medida que a membrana é induzida, por um vibrador mecânico no topo esquerdo de cada fotografia, a oscilar numa única frequência, o pó se concentra nos nós, que, neste exemplo bidimensional, são círculos ou linhas retas (ao invés de pontos).

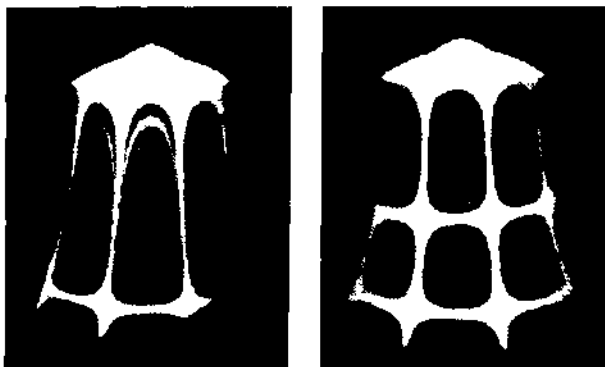


Fig. 17-20 Interferogramas, construídos com o uso de holografia, de ondas estacionárias de três dimensões num sino vibrando. As regiões nodais estão claras; as regiões antinodais se apresentam com padrões.

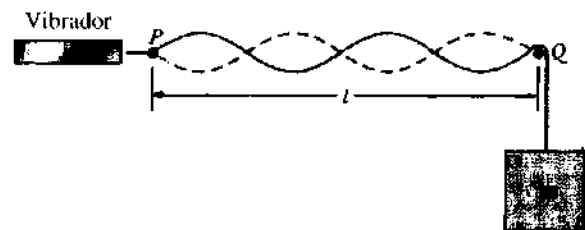


Fig. 17-21 Exemplo 17-7. Uma corda, submetida a tensão, conectada a um vibrador. Para uma frequência fixa de vibração, padrões de onda estacionária ocorrerão para valores discretos de tensão na corda.

onde a tensão  $\tau$  na corda é igual ao peso  $mg$  do bloco. Substituindo  $v$  da Eq. 17-58 na Eq. 17-57, fazendo  $n = 4$  (correspondendo ao 4.º harmônico) e resolvendo-se para  $m$ , encontramos

$$\begin{aligned} m &= \frac{4l^2 f^2 \mu}{n^2 g} & (17-59) \\ &= \frac{(4)(1.2 \text{ m})^2 (120 \text{ Hz})^2 (0.0016 \text{ kg/m})}{(4)^2 (9.8 \text{ m/s}^2)} \\ &= 0.846 \text{ kg} \approx 0.85 \text{ kg}. & (\text{Resposta}) \end{aligned}$$

b. Qual modo estacionário é estabelecido se  $m = 1,00 \text{ kg}$  ?

**Solução** Se substituirmos esse valor de  $m$  na Eq. 17-59 encontramos  $n = 3,7$ , uma impossibilidade já que  $n$  deve ser inteiro. Isto quer dizer que com  $m = 1,00 \text{ kg}$  o vibrador não consegue estabelecer uma onda estacionária na corda e qualquer oscilação desta será pequena, talvez mesmo imperceptível.

## RESUMO

### Ondas Transversais e Longitudinais

Ondas numa corda esticada, assunto deste capítulo, são ondas mecânicas **transversais** governadas pelas leis de Newton. As partículas do meio (a corda) oscilam perpendicularmente à direção do movimento da onda. Ondas nas quais partículas do meio oscilam paralelamente à direção de propagação da onda são chamadas de ondas **longitudinais**.

### Ondas Senoidais

Uma onda senoidal que se propaga na direção de  $+x$  tem a forma matemática

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t), \quad (17-2)$$

onde  $y_m$  é a **amplitude** da onda,  $k$  o **número de onda angular**,  $\omega$  a **frequência angular** e  $kx - \omega t$  a **fase**. O **comprimento de onda**  $\lambda$  e o **número de onda**  $\kappa$  (número de ondas por metro) se relacionam a  $k$  por

$$\frac{k}{2\pi} = \kappa = \frac{1}{\lambda}. \quad (17-6)$$

O **período**  $T$  e a **frequência**  $f$  da onda se relacionam a  $\omega$  por

$$\frac{\omega}{2\pi} = f = \frac{1}{T}. \quad (17-10)$$

Finalmente a **velocidade de onda**  $v$  se relaciona a esses outros parâmetros por

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f. \quad (17-14)$$

### Ondas Progressivas

Em geral qualquer função da forma

$$y(x, t) = h(kx \pm \omega t) \quad (17-18)$$

pode representar uma **onda progressiva** com uma velocidade de onda dada pela Eq. 17-14 e um formato de onda dado pela forma matemática de  $h$ . O sinal positivo (ou negativo) denota uma onda se propagando na direção de  $-x$  (ou  $+x$ ).

### Velocidade de Onda numa Corda Esticada

A velocidade de uma onda numa corda esticada com tensão  $\tau$  e densidade linear  $\mu$  é

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}. \quad (17-26)$$

### Velocidade da Luz

A velocidade da luz, no vácuo, tem valor  $c$  constante em qualquer referencial inercial. Esta invariância da velocidade da luz é um dos pos-

tulados da teoria especial da relatividade de Einstein, universalmente aceita na atualidade.

### Potência

A taxa média na qual energia é transmitida por uma onda senoidal numa corda esticada é denominada **potência média**, e é dada por

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 y_m^2. \quad (17-37)$$

### Superposição

Quando duas ou mais ondas se propagam num mesmo meio, o deslocamento de qualquer partícula do meio é dado pela soma dos deslocamentos individuais que as ondas gerariam. Chamamos este princípio de **superposição**.

### Série de Fourier

Utilizando a *série de Fourier*, qualquer onda pode ser construída como uma superposição de ondas senoidais apropriadas.

### Dispersão

A transferência de informações requer um **pulso de onda** que, de acordo com a análise de Fourier, pode ser considerado como uma superposição de ondas senoidais. Se todas as ondas individuais têm a mesma velocidade, o pulso é transmitido sem deformação, sendo esta situação chamada de **não-dispersiva**. Se, no entanto, as componentes de onda tiverem diferentes velocidades, diz-se que a onda exibe **dispersão** e o pulso sofre deformações ao se propagar. A forma do pulso se propaga, então, com a **velocidade de grupo**.

### Interferência de Ondas

Dois ondas senoidais na mesma corda exibirão **interferência**, de reforço ou de cancelamento, de acordo com o princípio da superposição. Se as duas se propagam no mesmo sentido, com a mesma amplitude  $y_m$  e frequência (e conseqüentemente mesmo comprimento de onda), mas diferem na fase por uma **diferença de fase**  $\phi$ , o resultado é uma onda única de mesma frequência descrita por:

$$y(x, t) = [2y_m \cos \frac{1}{2}\phi] \sin(kx - \omega t + \frac{1}{2}\phi). \quad (17-44)$$

Se  $\phi = 0$ , as ondas estão em fase e sua interferência é totalmente construtiva; se  $\phi = \pi/2$  rad, elas estão em oposição de fase e sua interferência é destrutiva.

### Ondas Estacionárias

A interferência de duas ondas senoidais que têm a mesma frequência e amplitude, mas se propagam em sentidos contrários, produz **ondas estacionárias** de acordo com a equação abaixo, para o caso de extremidades fixas,

$$y(x, t) = [2y_m \sin kx] \cos \omega t. \quad (17-49)$$

Ondas estacionárias são caracterizadas por pontos fixos de deslocamento zero chamados **nós** e pontos fixos de máximo deslocamento chamados **antinós** ou **ventres**.



**Ressonância**

Ondas estacionárias numa corda são geradas por reflexão das ondas que se propagam nas pontas da corda. Ao fixarmos uma ponta, definimos a posição de um nó neste ponto; se a deixarmos livre, será a posição de um antinó. Essas condições limitam as possíveis frequências das ondas estacionárias numa determinada corda. Cada frequência possível é uma **frequência de ressonância** e o padrão de onda estacionária correspondente é um **modo de oscilação**. Para uma corda esticada com extremidades fixas, as frequências ressonantes são

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2l} n, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (17-56)$$

O modo de oscilação correspondente a  $n = 1$  é chamado de *modo fundamental* ou de *primeiro harmônico*; o modo correspondente a  $n = 2$  é o *segundo harmônico*; e assim por diante. A corda absorverá energia de forma intensa se for agitada em uma das frequências ressonantes — é o fenômeno de **ressonância**. Agitada em outras frequências, ela absorverá pouca energia.

**QUESTIONÁRIO**

1. Como você poderia provar experimentalmente que energia pode ser transportada por uma onda?
2. Energia pode ser transferida por partículas bem como por ondas. Como podemos distinguir experimentalmente esses métodos de transferência de energia?
3. Pode ser gerado um movimento ondulatório onde as partículas do meio vibrem num movimento harmônico simples angular? Em caso positivo, explique como e descreva a onda.
4. As seguintes funções, nas quais  $A$  é uma constante, são da forma  $h(x \pm vt)$ :

$$y = A(x - vt), \quad y = A(x + vt)^2,$$

$$y = A\sqrt{x - vt}, \quad y = A \ln(x + vt).$$

Explique por que essas funções não são úteis para descrever movimentos ondulatórios.

5. É possível gerar-se, numa corda, uma forma de onda que possua uma descontinuidade de inclinação num ponto, isto é, fazendo um ângulo agudo? Explique.
6. Compare o comportamento de (a) um sistema massa-mola oscilando num movimento harmônico simples e (b) um elemento de uma corda esticada onde uma onda senoidal se propaga. Discuta do ponto de vista de deslocamento, velocidade vetorial, aceleração e transferências de energia.
7. A passagem de um barco a motor cria uma perturbação que faz com que ondas cheguem à praia. À medida que o tempo passa, o período das ondas que chegam fica cada vez menor. Por quê?
8. Quando duas ondas interferem, uma atrapalha a propagação da outra? Explique.
9. Quando duas ondas interferem, existe perda de energia? Justifique sua resposta.
10. De acordo com a Fig. 17-15, duas vezes durante uma oscilação, a configuração das ondas estacionárias numa corda esticada é uma linha reta, como se a corda não estivesse oscilando. Onde está a energia da onda estacionária nesses momentos?
11. Se duas ondas diferem somente em amplitude e se propagam em sentidos opostos através de um meio, produzirão elas ondas estacionárias? Existirá energia transportada? Existirão nós?
12. Na discussão sobre ondas transversais numa corda, consideramos deslocamentos num único plano, o plano  $xy$ . Se todos os deslocamentos

estão no mesmo plano, diz-se que a onda tem *polarização plana*. Poderão existir deslocamentos em outro plano além do plano único que consideramos? Em caso afirmativo, será possível combinar ondas polarizadas em diferentes planos? Qual seria a aparência de tais ondas combinadas?

13. Uma onda transmite energia. Ela também transfere momento linear? Será possível transferir momento angular?
14. No terremoto da Cidade do México, de 19 de setembro de 1985, áreas muito destruídas alternaram-se com áreas de pouca destruição. Além disso, prédios de 5 a 15 andares foram os mais atingidos. Discuta esses efeitos em termos de ondas estacionárias e ressonância.
15. Uma corda é esticada entre dois suportes fixos separados de uma distância  $l$ . (a) Para quais harmônicos existirá um nó no ponto que dista  $l/3$  de um dos suportes? Existirá um nó, um antinó ou uma condição intermediária num ponto que dista  $2l/5$  de um dos suportes, se (b) o quinto harmônico foi gerado? (c) o décimo harmônico foi gerado?

16. As cordas  $A$  e  $B$  têm comprimentos e densidades linear idênticos, mas a corda  $B$  está sob uma tensão maior do que a  $A$ . Na Fig. 17-22, mostram-se quatro situações, de (a) a (d), em que padrões de ondas estacionárias existem nas cordas. Em quais situações existe a possibilidade das cordas  $A$  e  $B$  oscilarem na mesma frequência de ressonância?

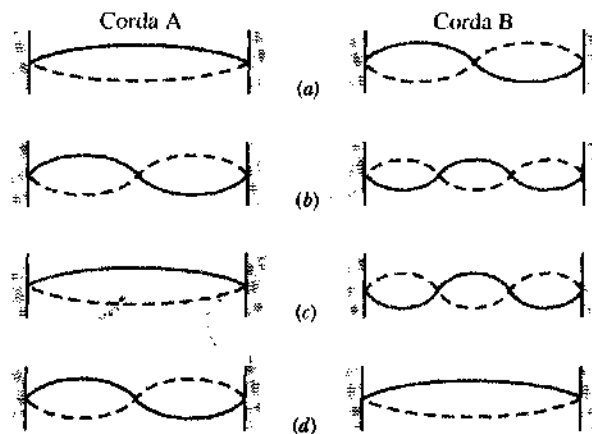


Fig. 17-22 Questão 16.

17. Violonistas sabem que, antes de um concerto, deve-se tocar um pouco o violão e ajustar suas cordas porque, após alguns minutos de execução, as cordas se aquecem e cedem ligeiramente. Como esse pequeno afrouxamento afeta as frequências de ressonância das cordas?

## EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

## Seção 17-5 A Velocidade Escalar de Propagação de uma Onda

1E. Uma onda tem uma velocidade escalar igual a 240 m/s e seu comprimento de onda é 3,2 m. Quais são (a) a frequência e (b) o período da onda?

2E. Uma onda tem frequência angular 110 rad/s e comprimento de onda 1,80 m. Calcule (a) o número de onda angular e (b) a velocidade da onda.

3E. Balançando um barco, um menino produz ondas na superfície de um lago até então quieto. Ele observa que o barco realiza 12 oscilações em 20 s, cada oscilação produzindo uma crista de onda 15 cm acima da superfície do lago. Observa ainda que uma determinada crista de onda chega à terra, a doze metros de distância, em 6,0 s. Quais são (a) o período, (b) a velocidade escalar, (c) o comprimento de onda e (d) a amplitude desta onda?

4E. A velocidade das ondas eletromagnéticas, no vácuo, é  $3,0 \times 10^8$  m/s. (a) Os comprimentos de onda da luz visível estão na faixa de 400 nm (violeta) até, aproximadamente, 700 nm (vermelho). Qual é a faixa de frequência das ondas de luz? (b) A faixa de frequências de rádio de ondas curtas (por exemplo, rádio FM e televisão VHF) é 1,5-300 MHz. Qual a faixa correspondente de comprimentos de ondas? (c) Raios X são também ondas eletromagnéticas. A faixa de seus comprimentos de onda se estende de aproximadamente 5,0 nm até  $1,0 \times 10^{-2}$  nm. Qual a faixa de frequências dos raios X?

5E. Uma onda senoidal se propaga ao longo de uma corda. O tempo que um ponto em particular leva para sair do deslocamento máximo e atingir a posição  $x = 0$  é 0,170 s. Quais são (a) seu período e (b) sua frequência? (c) Seu comprimento de onda é 1,40 m; qual é a sua velocidade de onda?

6E. Escreva a equação para uma onda se propagando no sentido negativo do eixo  $x$  e que tenha uma amplitude de 0,010 m, uma frequência de 550 Hz e uma velocidade de 330 m/s.

7E. Uma onda que se propaga numa corda é descrita por

$$y = 2,0 \sin \left[ 2\pi \left( \frac{t}{0,40} + \frac{x}{80} \right) \right],$$

onde  $x$  e  $y$  estão em centímetros e  $t$  em segundos. (a) Para  $t = 0$ , trace o gráfico de  $y$  em função de  $x$  para  $160 \text{ cm} \geq x \geq 0$ . (b) Repita (a) para  $t = 0,05$  s e  $t = 0,10$  s. (c) De seus gráficos, qual é a velocidade de onda e em qual sentido ( $+x$  ou  $-x$ ) a onda se propaga?

8E. Mostre que  $y = y_m \sin(kx - \omega t)$  pode ser reescrito nas seguintes formas alternativas

$$y = y_m \sin k(x - vt), \quad y = y_m \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - ft \right),$$

$$y = y_m \sin \omega \left( \frac{x}{v} - t \right), \quad y = y_m \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right).$$

9E. Um pulso isolado, cuja forma de onda é dada pela função  $h(x - 5t)$  é mostrado na Fig. 17-23 para  $t = 0$ , onde  $x$  é dado em centímetros e  $t$  é dado em segundos. Quais são (a) sua velocidade e (b) o sentido de propagação do pulso? (c) Trace o gráfico de  $h(x - 5t)$  como uma função de  $x$  para  $t = 2$  s. (d) Trace um gráfico de  $h(x - 5t)$  como uma função de  $t$  para  $x = 10$  cm.

10E. Mostre que (a) a velocidade transversal máxima de uma partícula numa corda, devida a uma onda que se propaga, é dada por  $u_{\text{max}} = \omega y_m = 2\pi f y_m$  e (b) a aceleração transversal máxima é  $a_{\text{max}} = \omega^2 y_m = 4\pi^2 f^2 y_m$ .

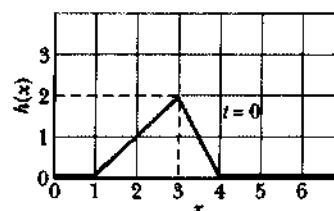


Fig. 17-23 Exercício 9.

11E. A equação de uma onda transversal se propagando numa corda é dada por

$$y = (2,0 \text{ mm}) \sin[(20 \text{ m}^{-1})x - (600 \text{ s}^{-1})t].$$

(a) Ache a amplitude, frequência, velocidade e o comprimento de onda. (b) Ache a velocidade escalar máxima de uma partícula da corda.

12E. (a) Escreva uma expressão que descreva uma onda senoidal transversal se propagando numa corda, no sentido  $+y$  com um número de onda igual a  $60 \text{ cm}^{-1}$ , um período de 0,20 s e uma amplitude de 3,0 mm. Tome  $z$  como a direção transversal. (b) Qual é a velocidade escalar transversal máxima de um ponto na corda?

13P. A equação de uma onda transversal se propagando numa corda muito longa é dada por  $y = 6,0 \sin(0,020\pi x + 4,0\pi t)$ , onde  $x$  e  $y$  estão expressos em centímetros e  $t$  em segundos. Determine (a) a amplitude, (b) o comprimento de onda, (c) a frequência, (d) a velocidade escalar, (e) o sentido de propagação da onda e (f) a velocidade transversal máxima de uma partícula da corda. (g) Qual é o deslocamento transversal em  $x = 3,5$  cm quando  $t = 0,26$  s?

14P. (a) Escreva uma expressão que descreva uma onda transversal se propagando numa corda, no sentido  $+x$  com um comprimento de onda de 10 cm, uma frequência de 400 Hz e uma amplitude de 2,0 cm. Qual é a velocidade escalar máxima de um ponto na corda? (c) Qual a velocidade escalar da onda?

15P. Prove que, se uma onda transversal está se propagando ao longo de uma corda, então a inclinação de qualquer ponto da corda é numericamente igual à razão entre a velocidade escalar da partícula e a velocidade escalar da onda naquele ponto.

16P. Uma onda de frequência 500 Hz tem uma velocidade de 350 m/s. (a) Quão afastados estão dois pontos que têm uma diferença de fase de  $\pi/3$  rad? (b) Qual é a diferença de fase entre dois deslocamentos, num determinado ponto, em tempos separados de 1,00 ms?

## Seção 17-6 Velocidade Escalar da Onda numa Corda Esticada

17E. Qual é a velocidade escalar de uma onda transversal numa corda de comprimento 2,00 m e massa de 60,0 g, sob uma tensão de 500 N?

18E. As cordas de um violino, respectivamente mais leve e mais pesada, têm densidades lineares de 3,0 g/m e 0,29 g/m. Qual é a relação dos diâmetros dessas cordas, da mais pesada para a mais leve, supondo que são feitas do mesmo material?

19E. A velocidade escalar de uma onda numa corda é 170 m/s quando a tensão é 120 N. Para que valor devemos aumentar a tensão para subir a velocidade da onda para 180 m/s?

20E. A tensão num fio preso em ambos os extremos é duplicada sem que haja qualquer mudança considerável em seu comprimento. Qual é a razão entre as velocidades das ondas transversais nesse fio, antes e depois do aumento de tensão?

**21E.** Mostre que, em termos do esforço de tensão  $S$  e da densidade volumétrica  $\rho$ , a velocidade de ondas transversais  $v$ , num fio, é dada por

$$v = \sqrt{\frac{S}{\rho}}$$

**22E.** A equação de uma onda transversal numa corda é

$$y = (2,0 \text{ mm}) \sin[(20 \text{ m}^{-1})x - (600 \text{ s}^{-1})t].$$

A tensão na corda é 15 N. (a) Qual é a velocidade da onda? (b) Ache a densidade linear da corda em gramas por metro.

**23E.** A densidade linear de uma corda vibrante é  $1,6 \times 10^{-4} \text{ kg/m}$ . Uma onda transversal se propaga na corda e é descrita pela seguinte equação:  $y = (0,021 \text{ m}) \sin[(2,0 \text{ m}^{-1})x + (30 \text{ s}^{-1})t]$ . (a) Qual é a velocidade da onda? (b) Qual é a tensão na corda?

**24E.** Qual é a onda transversal mais rápida que pode ser enviada através de um fio de aço? Levando em consideração um fator de segurança razoável, o esforço máximo de tensão a que fios de aço podem ser submetidos é  $7,0 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ . A densidade do aço é  $7.800 \text{ kg/m}^3$ . Mostre que sua resposta independe do diâmetro do fio.

**25P.** Uma corda esticada tem uma massa por unidade de comprimento de  $5,0 \text{ g/cm}$  e uma tensão de 10 N. Uma onda senoidal nessa corda tem uma amplitude de  $0,12 \text{ mm}$  e uma frequência de 100 Hz e se propaga no sentido de  $x$  decrescente. Escreva uma equação para essa onda.

**26P.** Para uma onda numa corda esticada, ache a razão entre a velocidade máxima da partícula (a velocidade com que uma única partícula na corda se move transversalmente à onda) e a velocidade da onda. Se uma onda com uma certa frequência e amplitude é transmitida pela corda, a razão entre velocidades dependeria do material de que é feita a corda, por exemplo, metal ou náilon?

**27P.** Uma onda transversal senoidal está se propagando ao longo de uma corda no sentido de  $x$  decrescente. A Fig. 17-24 mostra um gráfico do deslocamento como função da posição, no instante  $t = 0$ . A tensão na corda é 3,6 N e sua densidade linear é  $25 \text{ g/m}$ . Calcule (a) a amplitude, (b) o comprimento de onda, (c) a velocidade de onda e (d) o período da onda. (e) Ache a velocidade máxima de uma partícula da corda. (f) Escreva uma equação descrevendo a onda progressiva.

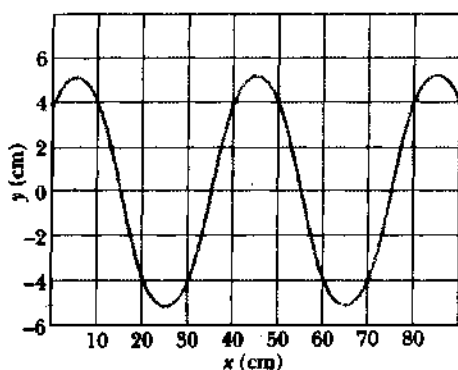


Fig. 17-24 Problema 27.

**28P.** Uma onda senoidal está se propagando numa corda com velocidade escalar  $40 \text{ cm/s}$ . O deslocamento de partículas da corda em  $x = 10 \text{ cm}$  varia com o tempo, de acordo com a equação  $y = (5,0 \text{ cm}) \sin[1,0 - (4,0 \text{ s}^{-1})t]$ . A densidade linear da corda é  $4,0 \text{ g/cm}$ . Quais são (a) a sua frequência e (b) o seu comprimento de onda? (c) Escreva a equação geral do deslocamento transversal das partículas da corda em função da posição e tempo. (d) Calcule a tensão na corda.

**29P.** Na Fig. 17-25a, a corda 1 tem uma densidade linear de  $3,00 \text{ g/m}$  e a 2 tem uma densidade linear de  $5,00 \text{ g/m}$ . Elas estão sob tensão devido a um bloco suspenso de massa  $M = 500 \text{ g}$ . (a) Calcule a velocidade de onda em cada corda. (b) O bloco é agora dividido em dois (com massa  $M_1 + M_2 = M$ ), de acordo com a configuração da Fig. 17-25b. Determine as massas  $M_1$  e  $M_2$  para que as velocidades de onda, nas duas cordas, sejam iguais.

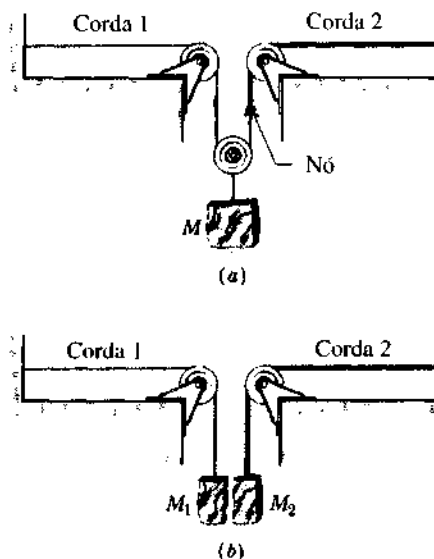


Fig. 17-25 Problema 29.

**30P.** Um fio de  $10,0 \text{ m}$  de comprimento e de massa  $100 \text{ g}$  é tracionado por uma tensão de 250 N. Se dois pulsos, separados no tempo de 30,0 ms, são gerados, um em cada extremidade do fio, onde eles se encontrarão pela primeira vez?

**31P.** O tipo de elástico usado no interior de algumas bolas de beisebol e de golfe obedece à lei de Hooke para uma larga faixa de alongamento do elástico. Um segmento desse material tem um comprimento (não-esticado)  $l$  e uma massa  $m$ . Quando uma força  $F$  é aplicada, o elástico estica de um comprimento adicional  $\Delta l$ . (a) Qual é a velocidade escalar (em termos de  $m$ ,  $\Delta l$  e a constante elástica  $k$ ) das ondas transversais nesse elástico? (b) Usando sua resposta em (a), mostre que o tempo necessário para um pulso transversal percorrer o comprimento do elástico é proporcional a  $1/\sqrt{\Delta l}$  se  $\Delta l \ll l$  e é constante se  $\Delta l \gg l$ .

**32P\*.** Uma corda uniforme de massa  $m$  e comprimento  $l$  está pendurada no teto. (a) Mostre que a velocidade de uma onda transversal na corda é função de  $y$ , a distância até a extremidade mais baixa, e é dada por  $v = \sqrt{gy}$ . (b) Mostre que o tempo que uma onda transversal leva para percorrer o comprimento da corda é dado por  $t = 2\sqrt{l/g}$ .

### Seção 17-8 Energia e Potência numa Onda Progressiva

**33E.** A potência  $P_1$  é transmitida por uma onda de frequência  $f_1$  numa corda sob tensão  $\tau_1$ . Qual é a potência transmitida  $P_2$  em termos de  $P_1$  (a) se a tensão da corda for aumentada para  $\tau_2 = 4\tau_1$ , e (b) se, ao invés, a frequência for diminuída para  $f_2 = f_1/2$ ?

**34E.** Uma corda de comprimento  $2,7 \text{ m}$  tem massa de  $260 \text{ g}$ . A tensão na corda é de 36 N. Qual deve ser a frequência das ondas progressivas de amplitude  $7,7 \text{ mm}$  para que a potência média transmitida seja  $85 \text{ W}$ ?

**35P.** Uma onda senoidal transversal é gerada numa extremidade de uma longa corda horizontal, por uma barra que se move para cima e para baixo entre extremos que distam  $1,00 \text{ cm}$ . O movimento é contínuo e repetido

regularmente 120 vezes por segundo. A corda tem uma densidade linear de 120 g/m e é mantida sob uma tensão de 90,0 N. Ache (a) o valor máximo da velocidade transversal  $u$  e (b) o valor máximo da componente transversal da tensão. (c) Mostre que os dois valores máximos, calculados acima, ocorrem para os mesmos valores da fase da onda. Qual é o deslocamento transversal  $y$  da corda nessas fases? (d) Qual é a máxima potência transferida ao longo da corda? (e) Qual é o deslocamento transversal  $y$  quando esta transferência máxima de potência acontece? (f) Qual é a transferência mínima de potência ao longo da corda? (g) Qual é o deslocamento transversal  $y$  quando esta transferência mínima de potência ocorre?

### Seção 17-11 Interferência de Ondas

**36E.** Duas ondas idênticas que se propagam, deslocando-se no mesmo sentido, têm uma diferença de fase de  $\pi/2$  rad. Qual é a amplitude da onda resultante em termos da amplitude comum  $y_m$  das duas ondas?

**37E.** Que diferença de fase, entre duas ondas idênticas que se propagam no mesmo sentido numa corda esticada, resultará numa onda de amplitude 1,50 vezes a amplitude das ondas que a compõem? Expresse sua resposta em graus e radianos.

**38P.** Uma fonte S e um detector de ondas de rádio D estão localizados ao nível do solo a uma distância  $d$  (Fig. 17-26). Ondas de rádio de comprimento  $\lambda$  chegam a D, pelo caminho direto ou por reflexão, numa certa camada da atmosfera. Quando a camada está numa altura  $H$ , as duas ondas chegam em D exatamente em fase. À medida que a camada sobe, a diferença de fase entre as duas ondas muda, gradualmente, até estarem exatamente fora de fase para uma altura de camada  $H + h$ . Expresse  $\lambda$  em termos de  $d$ ,  $h$ , e  $H$ .

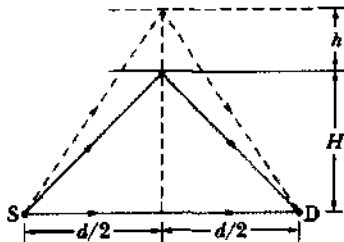


Fig. 17-26 Problema 38.

**39P.** Três ondas senoidais se propagam no sentido positivo de  $x$  ao longo da mesma corda. As três têm a mesma frequência. Suas amplitudes estão na proporção 1:1/2:1/3 e suas fases iniciais são 0,  $\pi/2$  e  $\pi$ , respectivamente. Desenhe a forma de onda resultante e discuta o seu comportamento à medida que  $t$  cresce.

**40P.** Quatro ondas senoidais se propagam no sentido de  $x$  positivo ao longo da mesma corda. Suas frequências estão a proporção de 1:2:3:4 e suas amplitudes estão a proporção de 1:1/2:1/3:1/4, respectivamente. Quando  $t = 0$ , em  $x = 0$ , a primeira e a terceira onda estão  $180^\circ$  fora de fase com a segunda e a quarta. Desenhe a forma de onda resultante em  $t = 0$  e discuta o seu comportamento à medida que  $t$  cresce.

**41P\*.** Determine a amplitude da onda resultante da combinação de duas ondas senoidais que se propagam no mesmo sentido, possuem mesma frequência, têm amplitudes de 3,0 cm e 4,0 cm e diferença de fase de  $\pi/2$  rad.

### Seção 17-13 Ondas Estacionárias e Ressonância

**42E.** Uma corda sob tensão  $\tau$  oscila no terceiro harmônico com uma frequência  $f_3$ , e as ondas na corda têm comprimento de onda  $\lambda_3$ . Se a tensão for aumentada para  $\tau_2 = 4\tau$ , e a corda novamente levada a oscilar no terceiro harmônico, qual será (a) a frequência de oscilação em termos de  $f_3$  e (b) o comprimento de onda em termos de  $\lambda_3$ ?

**43E.** Duas ondas senoidais com amplitudes e comprimentos de onda idênticos se propagam, em sentidos contrários, ao longo de uma corda com uma velocidade escalar de 10 cm/s. Se o intervalo de tempo entre os instantes em que a corda fica retilínea é 0,50 s, quais os seus comprimentos de onda?

**44E.** Quando tocada de uma certa maneira, a frequência ressonante mais baixa de uma corda de violino é 440 Hz. Quais são as frequências do segundo e terceiro harmônicos dessa corda?

**45E.** Uma corda fixada em ambas as pontas tem 8,40 m de comprimento, com uma massa de 0,120 kg. Ela está submetida a uma tensão de 96,0 N e é colocada em oscilação. (a) Qual é a velocidade escalar das ondas na corda? (b) Qual é o mais longo comprimento de onda possível para uma onda estacionária? (c) Dê a frequência dessa onda.

**46E.** Uma corda de violão, de náilon, tem uma densidade linear de 7,2 g/m e está sob uma tensão igual a 150 N. Os suportes fixos estão distanciados 90 cm. A corda está oscilando de acordo com o padrão de onda estacionária mostrado na Fig. 17-27. Calcule (a) a velocidade escalar, (b) o comprimento de onda e (c) a frequência das ondas cuja superposição origina essa onda estacionária.

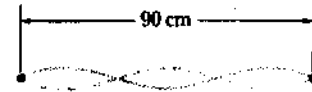


Fig. 17-27 Exercício 46.

**47E.** A equação de uma onda transversal se propagando numa corda é dada por

$$y = 0,15 \sin(0,79x - 13t),$$

onde  $x$  e  $y$  são expressos em metros e  $t$  está em segundos. (a) Qual é o deslocamento  $y$  em  $x = 2,3$  m,  $t = 0,16$  s? (b) Escreva a equação de uma onda que, somada àquela fornecida acima, produziria ondas estacionárias na corda. (c) Qual é o deslocamento da onda estacionária resultante em  $x = 2,3$  m,  $t = 0,16$  s?

**48E.** Uma corda de 120 cm de comprimento é esticada entre suportes fixos. Quais são os três comprimentos de onda mais longos possíveis para ondas estacionárias nessa corda? Esboce as ondas estacionárias correspondentes.

**49E.** Uma corda de comprimento igual a 125 cm tem massa 2,00 g. Ela é esticada sob uma tensão de 7,00 N entre dois suportes fixos. (a) Qual é a velocidade da onda nessa corda? (b) Qual é a mais baixa frequência de ressonância para essa corda?

**50E.** Quais são as três frequências mais baixas para ondas estacionárias num fio de 10,0 m que tem massa 100 g e que é esticado sob uma tensão de 250 N?

**51E.** Um fio de 1,50 m tem massa 8,70 g e é mantido sob uma tensão de 120 N. O fio é rigidamente seguro em ambas as extremidades e levado a vibrar. Calcule (a) a velocidade das ondas no fio. (b) os comprimentos de onda que produzem ondas estacionárias, com um e dois meios comprimentos de onda, nesse fio e (c) as frequências das ondas que produzem ondas estacionárias, nas mesmas condições do item anterior.

**52E.** Uma ponta de uma corda de 120 cm é mantida fixa. A outra ponta é presa a um anel sem peso que pode deslizar ao longo de uma haste sem atrito, conforme mostrado na Fig. 17-28. Quais são os três mais longos comprimentos de onda possíveis para ondas estacionárias nessa corda? Esboce as ondas estacionárias correspondentes.

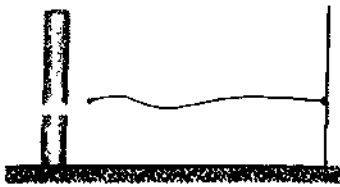


Fig. 17-28 Exercício 52.

**53P.** A corda *A* está esticada entre dois grampos separados por uma distância *l*. A corda *B*, de mesma densidade linear e submetida à mesma tensão que a corda *A*, está esticada entre dois grampos separados por uma distância *4l*. Considere os primeiros oito harmônicos da corda *B*. Qual deles — se algum — tem uma frequência de ressonância igual a alguma frequência de ressonância de *A*?

**54P.** Duas ondas estão se propagando na mesma corda, muito comprida. Um vibrador no extremo esquerdo da corda gera uma onda dada por

$$y = (6,0 \text{ cm}) \cos \frac{\pi}{2} [(2,0 \text{ m}^{-1})x + (8,0 \text{ s}^{-1})t],$$

enquanto um outro no extremo direito da corda gera a onda

$$y = (6,0 \text{ cm}) \cos \frac{\pi}{2} [(2,0 \text{ m}^{-1})x - (8,0 \text{ s}^{-1})t].$$

(a) Calcule a frequência, o comprimento de onda e a velocidade escalar de cada onda. (b) Determine os pontos onde não existe movimento (os nós). (c) Em quais pontos o movimento da corda é máximo?

**55P.** Uma corda oscila de acordo com a equação

$$y = (0,50 \text{ cm}) \left[ \sin \left( \frac{\pi}{3} \text{ cm}^{-1} \right) x \right] \cos [(40\pi \text{ s}^{-1})t].$$

(a) Quais são a amplitude e a velocidade escalar das ondas cuja superposição dá essa oscilação? (b) Qual é a distância entre os nós? (c) Qual é a velocidade escalar de uma partícula da corda na posição  $x = 1,5 \text{ cm}$  quando  $t = (9/8)\text{s}$ ?

**56P.** Uma corda está esticada entre suportes fixos separados por 75,0 cm. Observou-se que tem frequências ressonantes em 420 e 315 Hz e nenhuma outra neste intervalo. (a) Qual é a frequência de ressonância mais baixa dessa corda? (b) Qual é a velocidade de onda para essa corda?

**57P.** Duas ondas senoidais transversais se propagam em sentidos opostos ao longo de uma corda. Cada onda tem uma amplitude de 0,30 cm e um comprimento de onda de 6,0 cm. A velocidade escalar de uma onda transversal na corda é 1,5 m/s. Desenhe a forma da corda nos instantes  $t = 0$  (arbitrário),  $t = 5,0$ ,  $t = 10$ ,  $t = 15$  e  $t = 20$  ms.

**58P.** Dois pulsos se propagam ao longo de uma corda em sentidos opostos, como na Fig. 17-29. (a) Se a velocidade de onda  $v$  é 2,0 m/s e os pulsos estão a uma distância de 6,0 cm em  $t = 0$ , esboce os padrões resultantes para  $t = 5,0$ , 10, 15, 20 e 25 ms. (b) O que aconteceu com a energia em  $t = 15$  ms?

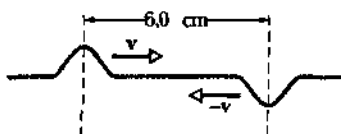


Fig. 17-29 Problema 58.

**59P.** Duas ondas numa corda são descritas pelas equações

$$y_1 = (0,10 \text{ m}) \text{ sen } 2\pi [(0,50 \text{ m}^{-1})x + (20 \text{ s}^{-1})t]$$

e

$$y_2 = (0,20 \text{ m}) \text{ sen } 2\pi [(0,50 \text{ m}^{-1})x - (20 \text{ s}^{-1})t].$$

Esboce a resposta total para o ponto da corda em  $x = 3,0 \text{ m}$ ; isto é, desenhe o gráfico de  $y$  versus  $t$  para esse valor de  $x$ .

**60P.** Uma corda de 3,0 m de comprimento está oscilando na forma de uma onda estacionária de três meios comprimentos de onda, cuja amplitude é 1,0 cm. A velocidade escalar da onda é de 100 m/s. (a) Qual é a frequência? (b) Escreva equações para duas ondas que, combinadas, resultem nessa onda estacionária.

**61P.** A vibração de um diapasão a 600 Hz estabelece ondas estacionárias numa corda presa nas duas extremidades. A velocidade escalar da onda na corda é 400 m/s. A onda estacionária tem dois comprimentos de onda e uma amplitude de 2,0 mm. (a) Qual é o comprimento da corda? (b) Escreva uma equação para o deslocamento da corda em função da posição e do tempo.

**62P.** Numa experiência com ondas estacionárias, uma corda de 90 cm de comprimento está conectada ao terminal de um diapasão elétrico e oscilando perpendicularmente ao seu comprimento, na frequência de 60 Hz. A massa da corda é 0,044 kg. (a) A que tensão deve a corda estar submetida (pesos estão presos na outra ponta) para ela vibrar com dois comprimentos de onda? (b) O que aconteceria se o diapasão fosse girado de forma a vibrar paralelamente ao comprimento da corda?

**63P.** Considere uma onda estacionária que é a soma de duas ondas idênticas se propagando em sentidos opostos. Mostre que a energia cinética máxima em cada meio comprimento de onda dessa onda estacionária é  $2\pi^2 \mu y_m^2 f v$ .

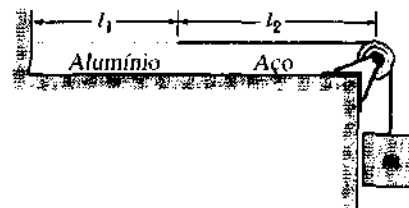


Fig. 17-30 Problema 64.

**64P.** Um fio de alumínio de comprimento  $l_1 = 60,0 \text{ cm}$  com área da seção transversal igual a  $1,00 \times 10^{-2} \text{ cm}^2$  e densidade  $2,60 \text{ g/cm}^3$  é conectado a um fio de aço, de densidade  $7,80 \text{ g/cm}^3$  e mesma área de seção transversal. O fio composto é conectado a um bloco de massa  $m = 10,0 \text{ kg}$ , conforme a Fig. 17-30, de forma que a distância  $l_2$  entre a junção e a roldana de suporte seja 86,6 cm. Ondas transversais são estabelecidas no fio usando-se uma fonte externa de frequência variável. (a) Ache a mais baixa frequência de vibração que dará origem a uma onda estacionária com nó no ponto de junção. (b) Quantos nós são observados nessa frequência?

## PROBLEMAS ADICIONAIS

65. Uma corda, submetida a uma tensão de 200 N e presa em ambas as extremidades, oscila no segundo harmônico de uma onda estacionária. O deslocamento da corda é dado por

$$y = (0,10 \text{ m}) (\sin \pi x/2) \sin 12\pi t,$$

onde  $x = 0$  numa das pontas da corda,  $x$  é dado em metros e  $t$  em segundos. Quais são (a) o comprimento da corda, (b) a velocidade escalar das ondas na corda e (c) a massa da corda? (d) Se a corda oscilar num padrão de onda estacionária referente ao terceiro harmônico, qual será o período de oscilação?

66. Uma onda senoidal transversal de 20 cm de comprimento de onda está se propagando para a direita. O deslocamento da partícula em  $x = 0$ , a partir do equilíbrio e em função do tempo, é mostrado na Fig. 17-31. (a) Faça um esboço da onda por um comprimento de onda (o trecho entre  $x = 0$  e  $x = 20$  cm) para  $t = 0$ . (b) Qual é a velocidade de propagação da onda? (c) Escreva a equação para a onda com todas as constantes calculadas. (d) Qual é a velocidade transversal da partícula em  $x = 0$  e  $t = 5,0$  s?

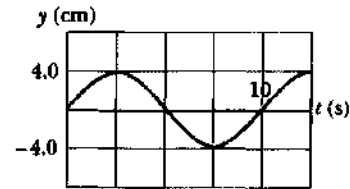


Fig. 17-31 Problema 66.

67. Uma onda estacionária resulta da soma de duas ondas transversais progressivas dadas por

$$y_1 = 0,050 \cos(\pi x - 4\pi t),$$

$$y_2 = 0,050 \cos(\pi x + 4\pi t),$$

onde  $x$ ,  $y_1$  e  $y_2$  estão em metros e  $t$  em segundos. (a) Qual é o menor valor positivo de  $x$  que corresponde a um nó? (b) Em quais instantes no intervalo  $0 \leq t \leq 0,50$  s a partícula em  $x = 0$  terá velocidade zero?



*Este morcego é capaz de, não somente localizar uma mariposa voando na mais completa escuridão, como também de determinar a velocidade da mariposa em relação a ele e, então, conhecer a trajetória do inseto. Como funciona esse sistema de detecção? E como poderia a mariposa "enganar" o sistema ou, pelo menos, reduzir a sua efetividade?*

### 18-1 Ondas Sonoras

Usando uma definição geral, ondas sonoras são ondas mecânicas que podem se propagar através de gases, líquidos ou sólidos. As equipes de prospecção sísmica usam essas ondas para procurar petróleo, enviando-as através da crosta terrestre. Navios e submarinos possuem equipamentos sonoros (os sonares) para detectar obstáculos submersos e outros submarinos, principalmente ouvindo os sinais sonoros característicos dos motores e reatores, ou ainda, da queda ocasional de uma bandeja no refeitório de bordo. Na Fig. 18-1a, a imagem processada em computador da cabeça de um feto, mostra como as ondas sonoras podem ser usadas para explorar e visualizar os tecidos moles do cor-

po humano (ultra-sonografia). A Fig.18-1b demonstra como ondas sonoras de frequência muito alta podem ser usadas para criar imagens de objetos minúsculos com uma resolução melhor do que a de qualquer microscópio ótico.

Podem haver dois tipos de ondas num sólido. Existem as ondas *transversais*, nas quais as oscilações dos pequenos elementos do sólido são perpendiculares à direção de propagação da onda. Há também as ondas *longitudinais*, onde as oscilações são paralelas à direção de propagação.

Uma equipe de prospecção sísmica usa ambos os tipos de onda para determinar a natureza das formações rochosas abaixo do solo, como é mostrado na Fig. 18-2. A detonação subterrânea de uma carga explosiva produz ondas transversais e longitudinais que são refletidas sempre que



(a)



(b)

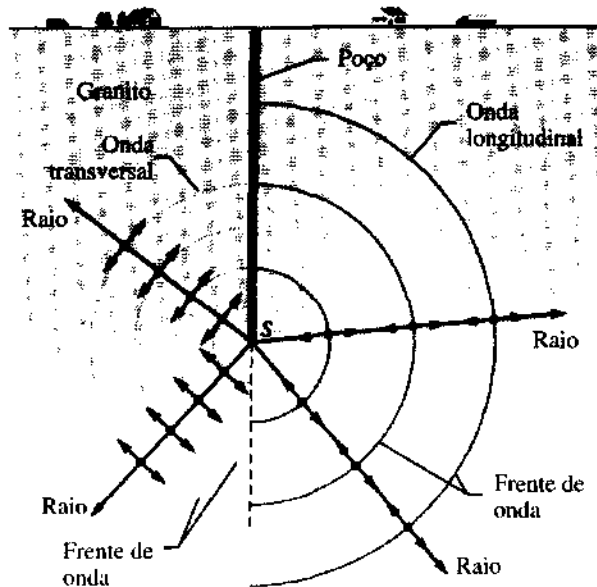
**Fig. 18-1** (a) Uma imagem de ultra-som de um feto chupando o dedo. A frequência das ondas sonoras usadas foi cerca de 5 MHz. (b) A imagem de um transistor, visto em um microscópio acústico à frequência de 4,2 GHz. Os fios condutores em cima e embaixo têm cerca de dois micrômetros de espessura.

houver uma mudança no tipo de rocha, onde as ondas se propagam.

Num gás ou num líquido, somente se pode transmitir ondas longitudinais. Para transmitir ondas transversais, o meio deve se comportar de maneira elástica, quando sofrer tensões de cisalhamento, originando assim uma força restauradora. Mas os fluidos *escoam* (ou *fluem*, daí o seu

nome), quando submetidos a tais tensões; assim, não podem originar forças restauradoras e, portanto, transmitir ondas transversais.

As ondas sonoras são longitudinais. Neste capítulo, trataremos principalmente das ondas sonoras no sentido usual, isto é, ondas mecânicas (longitudinais) propagando-se no ar com frequências na faixa audível ( $\sim 20$  Hz até 20 kHz).



**Fig. 18-2** Uma explosão em  $S$  envia ondas longitudinais e transversais (mais lentas), que viajam pelo granito em todas as direções. As ondas são mostradas em hemisférios separados e em corte transversal, por conveniência. *Frentes de onda* são superfícies (esféricas neste caso) sobre as quais a perturbação gerada pela onda tem o mesmo valor. *Raios* são linhas perpendiculares às frentes de onda; indicam a direção de propagação dessas frentes. As pequenas setas colocadas nos raios mostram o sentido das oscilações de pequenos elementos do meio.

## 18-2 A Velocidade do Som

A velocidade de qualquer onda mecânica, transversal ou longitudinal, depende das propriedades inerciais do meio (para armazenar energia cinética) e, também, das suas propriedades elásticas (para armazenar energia potencial). Podemos, então, generalizar a Eq. 17-26, que dá a velocidade de uma onda transversal numa corda esticada, escrevendo

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{\text{propriedade elástica}}{\text{propriedade inercial}}}, \quad (18-1)$$

onde  $\tau$  é a tensão na corda e  $\mu$  é a sua densidade linear. Se o meio de propagação é o ar, podemos intuir que a propriedade inercial correspondente a  $\mu$  é a densidade volumétrica do ar,  $\rho$ . E qual será a propriedade elástica?

Numa corda esticada, a energia potencial está associada ao alongamento periódico dos elementos da corda, quando a onda passa por eles. Quando uma onda sonora se propaga através do ar (ou de qualquer outro gás), a energia potencial é associada a compressões e rarefações periódicas de pequenos elementos de volume do gás. A propriedade que determina o quanto um elemento do gás modifica seu volume, quando a pressão (força por unidade de área)



sobre ele aumenta ou diminui, é o **módulo de elasticidade volumar**  $B$ , que é definido como

$$B = - \frac{\Delta p}{\Delta V/V} \quad (\text{definição de } B). \quad (18-2)$$

Aqui,  $\Delta V/V$  é a variação fracional em volume produzida por uma variação de pressão  $\Delta p$ . Como foi explicado na Seção 16-3, a unidade SI de pressão é o newton por metro quadrado, que recebeu um nome especial, o *pascal* (Pa). Da Eq. 18-2, vemos que a unidade de  $B$  também é o pascal. Os sinais de  $\Delta p$  e  $\Delta V$  são sempre opostos: quando aumentamos a pressão sobre um elemento de fluido ( $\Delta p$  positivo), seu volume diminui ( $\Delta V$  negativo). Incluímos o sinal negativo na Eq. 18-2 para que  $B$  seja, por definição, sempre positivo. Trocando  $\tau$  por  $B$  e  $\mu$  por  $\rho$  na Eq. 18-1, obtemos

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (\text{velocidade do som}) \quad (18-3)$$

para um meio com módulo de elasticidade volumar  $B$  e densidade  $\rho$ . A Tabela 18-1 mostra a velocidade do som em vários meios.

A densidade da água é quase mil vezes maior que a do ar. Se este fosse o único fator relevante, poderíamos esperar, analisando a Eq. 18-3, que a velocidade do som na água fosse consideravelmente menor do que no ar. No entanto, a Tabela 18-1 mostra o contrário. Podemos, então, concluir (de novo a partir da Eq. 18-3) que o módulo de elasticidade volumar da água deve ser mais de 1.000 vezes maior do que o do ar. Isto é verdade. A água é muito mais incompressível do que o ar, o que (veja a Eq. 18-2) é outra maneira de dizer que o seu módulo de elasticidade volumar é muito maior.

**Tabela 18-1**  
**A Velocidade do Som\***

Meio	Velocidade (m/s)
<i>Gases</i>	
Ar (0°C)	331
Ar (20°C)	343
Hélio	965
Hidrogênio	1.284
<i>Líquidos</i>	
Água (0°C)	1.402
Água (20°C)	1.482
Água do mar <sup>b</sup>	1.522
<i>Sólidos</i>	
Alumínio	6.420
Aço	5.941
Granito	6.000

\*A 0°C e 1 atmosfera, exceto onde houver alteração

<sup>b</sup>A 20°C e 3,5 % de salinidade

### Dedução Formal da Eq. 18-3

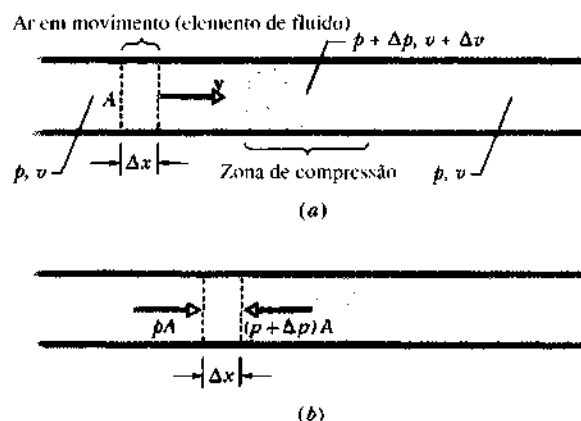
Faremos agora a dedução da Eq. 18-3, aplicando diretamente as leis de Newton. Imagine um pulso de compressão se propagando (da direita para a esquerda) com velocidade  $v$  através do ar, dentro de um longo tubo. Vamos nos colocar num sistema de referência que se move junto com o pulso, de maneira que o pulso aparece parado nesse sistema. A Fig. 18-3a mostra a situação vista desse sistema de referência. O pulso (denominado "zona de compressão") está estacionário e o ar se move com velocidade  $v$  através dele, da esquerda para a direita.

Seja  $p$  a pressão do ar não perturbado e  $p + \Delta p$  a pressão dentro do pulso, sendo  $\Delta p$  positivo devido à compressão. Considere uma fatia de ar de espessura  $\Delta x$  e área  $A$  movendo-se em direção ao pulso com velocidade  $v$ . À medida que este elemento de fluido penetra no pulso, sua parte frontal encontra uma região de pressão mais alta e diminui sua velocidade para  $v + \Delta v$ , onde  $\Delta v$  é negativo. Esta diminuição de velocidade se completa quando a sua parte posterior alcança o pulso, o que ocorre em um intervalo de tempo dado por

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v}. \quad (18-4)$$

Apliquemos a segunda lei de Newton a esse elemento de fluido. Durante o intervalo de tempo  $\Delta t$ , a força média sobre a face posterior do elemento é  $pA$ , enquanto que sobre a face frontal a força média vale  $(p + \Delta p)A$ , dirigida para a esquerda (Fig. 18-3b). Assim, a força resultante média sobre o elemento de fluido, durante o intervalo  $\Delta t$ , é

$$\begin{aligned} F &= pA - (p + \Delta p)A \\ &= -\Delta p A \quad (\text{força resultante}). \end{aligned} \quad (18-5)$$



**Fig. 18-3** Um pulso (compressão) é enviado por um longo tubo cheio de ar. O sistema de referência da figura foi escolhido de modo que o pulso esteja em repouso e o ar se mova da esquerda para a direita. (a) Uma camada de ar de espessura  $\Delta x$  é mostrada, movendo-se na zona de compressão à velocidade  $v$ . (b) A face inicial da camada entra na região de compressão. São mostradas as forças agindo nas faces posterior e anterior (devido à pressão do ar).

O sinal negativo indica que esta força resultante aponta para a esquerda na Fig. 18-3b. O volume do elemento de fluido é  $A\Delta x$ , logo, com a ajuda da Eq. 18-4, podemos escrever sua massa como

$$\Delta m = \rho A \Delta x = \rho A v \Delta t \quad (\text{massa}) \quad (18-6)$$

Finalmente, a aceleração média do elemento, durante o mesmo intervalo de tempo, será

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (\text{aceleração}). \quad (18-7)$$

Da segunda lei de Newton ( $F = ma$ ), obtemos, usando as Eqs. 18-5, 18-6 e 18-7,

$$-\Delta p A = (\rho A v \Delta t) \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

que pode ser escrita como

$$\rho v^2 = -\frac{\Delta p}{\Delta v/v}. \quad (18-8)$$

O ar que ocupa um volume  $V (= Av \Delta t)$ , quando está fora do pulso, tem seu volume diminuído de  $\Delta V (= A \Delta v \Delta t)$ , quando penetra no pulso. Logo,

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{A \Delta v \Delta t}{Av \Delta t} = \frac{\Delta v}{v}. \quad (18-9)$$

Substituindo as Eqs. 18-9 e 18-2 na Eq. 18-8 obtemos, então,

$$\rho v^2 = -\frac{\Delta p}{\Delta v/v} = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V} = B.$$

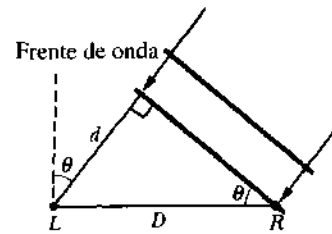
Tirando o valor de  $v$  nesta expressão, chegamos à expressão da Eq. 18-3 para a velocidade do ar, propagando-se para a direita na Fig. 18-3 e, logo, para a velocidade do pulso que está se propagando em sentido oposto.

**EXEMPLO 18-1** Uma das pistas usadas pelo seu cérebro, para determinar a direção de uma fonte sonora, é a diferença de tempo  $\Delta t$ , entre a chegada do som ao ouvido mais próximo da fonte e ao mais distante. Suponha que a fonte está a uma grande distância (de tal modo que uma frente de onda vindo dela é, aproximadamente, plana, em vez de visivelmente curva, como na Fig. 18-2) e represente por  $D$  a distância entre os seus ouvidos.

a. Ache uma expressão para  $\Delta t$  em função de  $D$  e do ângulo  $\theta$ , entre a direção da fonte e a direção normal à linha dos ouvidos.

**Solução** A situação é vista na Fig. 18-4, onde uma frente de onda se aproxima de você vindo de uma fonte localizada à sua frente e à direita. A diferença de tempo  $\Delta t$  é devido à distância adicional  $d$  que a frente de onda deve percorrer para alcançar o seu ouvido esquerdo ( $L$ ), após haver alcançado o seu ouvido direito ( $R$ ). Da Fig. 18-4, vemos que

$$\Delta t = \frac{d}{v} = \frac{D \text{ sen } \theta}{v} \quad (\text{Resposta}) \quad (18-10)$$



**Fig. 18-4** Exemplo 18-1. Uma frente de onda percorre uma distância  $d$  ( $= D \text{ sen } \theta$ ) para atingir o ouvido esquerdo ( $L$ ), depois de alcançar o ouvido direito ( $R$ ).

onde  $v$  é a velocidade do som no ar. Da Eq. 18-10 e da Fig. 18-4, notamos que a diferença de tempo é mínima ( $\Delta t = 0$ ) quando  $\theta = 0$  (a fonte está diretamente à sua frente) e que ela é máxima ( $\Delta t = D/v$ ), quando  $\theta = 90^\circ$  (a fonte está justo à sua direita). Baseado na experiência de uma vida inteira, o seu cérebro relaciona qualquer valor percebido de  $\Delta t$  (de zero até o valor máximo) a um valor de  $\theta$  (de zero a  $90^\circ$ ), que está associado à direção da fonte sonora.

b. Suponha que você está submerso em água a  $20^\circ \text{ C}$ , quando uma frente de onda o atinge vinda diretamente da sua direita. Baseando-se na informação sugerida pela diferença de tempo, qual o ângulo  $\theta$  entre a direção diretamente à sua frente e aquela que parece ser a da fonte?

**Solução** Achamos a diferença de tempo  $\Delta t_a$ , nessa situação, usando a Eq. 18-10 com  $\theta = 90^\circ$  e utilizando a velocidade do som na água,  $v_a$ , em vez de  $v$ , a velocidade do som no ar:

$$\Delta t_a = \frac{D \text{ sen } 90^\circ}{v_a} = \frac{D}{v_a}. \quad (18-11)$$

Como  $v_a$  é, aproximadamente, quatro vezes  $v$ ,  $\Delta t_a$  é cerca de um quarto da diferença de tempo máximo no ar. Com base na experiência, seu cérebro processará a informação relativa à diferença de tempo como se ela tivesse ocorrido no ar. Assim, a onda sonora parecerá estar numa posição correspondente a  $\theta$  menor do que  $90^\circ$ . Para achar este ângulo aparente, colocamos a diferença de tempo  $D/v_a$  calculada na Eq. 18-11, no lugar de  $\Delta t$  na Eq. 18-10, obtendo

$$\frac{D}{v_a} = \frac{D \text{ sen } \theta}{v}. \quad (18-12)$$

Substituindo  $v = 343 \text{ m/s}$  e  $v_a = 1.482 \text{ m/s}$  (da Tabela 18-1) encontramos, então,

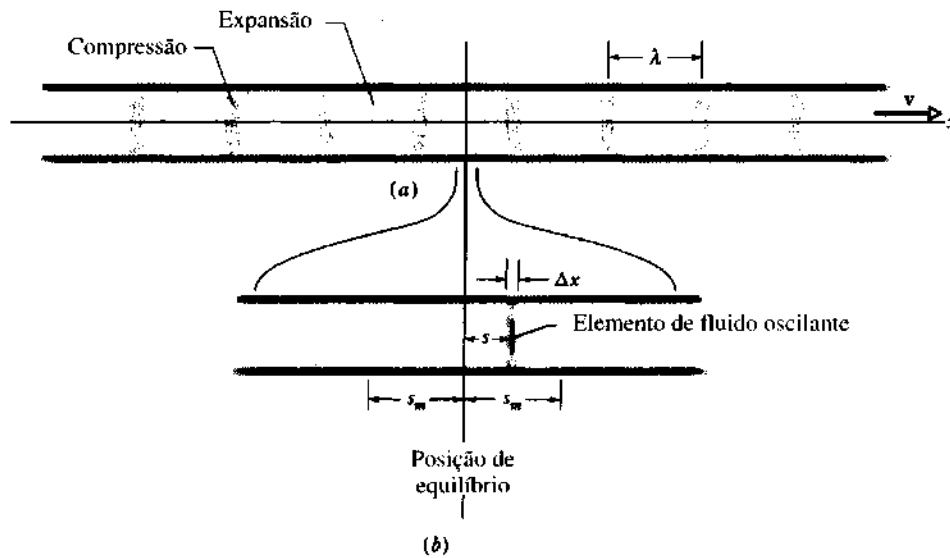
$$\text{sen } \theta = \frac{v}{v_a} = \frac{343 \text{ m/s}}{1.482 \text{ m/s}} = 0,231$$

e, logo,

$$\theta = 13^\circ. \quad (\text{Resposta})$$

### 18-3 Propagação de Ondas Sonoras

Vamos, agora, estudar um pouco mais detalhadamente os deslocamentos e as variações de pressão, associados à passagem de uma onda sonora através do ar. A Fig. 18-5a mostra uma dessas ondas propagando-se para a direita, através de um longo tubo cheio de ar. Considere uma fina camada de ar, de espessura  $\Delta x$ , localizada numa posição  $x$  no tubo. Enquanto a onda passa por esta posição, este elemento de ar oscila para a direita e para a esquerda, executando um movimento harmônico simples em torno de sua posição de equilíbrio (Fig. 18-5b). Então, as oscilações deste elemen-



**Fig. 18-5** (a) Uma onda sonora, viajando por um longo tubo cheio de ar com velocidade  $v$ , consiste em uma configuração periódica de expansão e compressão do ar em movimento. A onda é mostrada em um instante arbitrário. (b) Uma visão horizontal expandida de uma pequena parte do tubo. Um elemento de fluido de espessura  $\Delta x$  oscila para a esquerda e a direita em um movimento harmônico simples, a partir de sua posição de equilíbrio, enquanto a onda passa. No instante mostrado em (a), o elemento começa a ser deslocado de uma distância  $s$  para a direita, a partir de sua posição de equilíbrio. Seu deslocamento máximo, para a esquerda ou direita, é  $s_m$ .

to de ar, provocadas pela onda sonora, são como as de um elemento de corda, causadas por uma onda na corda, exceto pelo fato de que o elemento de ar oscila *longitudinalmente* (paralelo à direção de propagação da onda), enquanto o elemento de corda oscila *transversalmente* (perpendicular à direção de propagação da onda).

Devido à oscilação harmônica do elemento de ar, podemos expressar seu deslocamento por causa da onda sonora  $s$  como uma função senoidal, um seno ou um cosseno. Neste capítulo, vamos usar uma função cosseno:

$$s = s_m \cos(kx - \omega t). \quad (18-13)$$

Aqui,  $s_m$  é a **amplitude de deslocamento**, isto é, o deslocamento máximo do elemento de ar para qualquer um dos lados da sua posição de equilíbrio (Fig. 18-5b).<sup>\*</sup> O número de onda angular  $k$ , a frequência angular  $\omega$  e a frequência  $f$ , o comprimento de onda  $\lambda$ , a velocidade  $v$  e o período  $T$  para uma onda (longitudinal) sonora são definidos e estão relacionados exatamente da mesma maneira que para uma onda transversal, com exceção do fato de que  $\lambda$ , agora, é a distância (ainda medida na direção de propagação) após a qual o padrão de compressão e expansão, devido à onda, começa a se repetir (Fig. 18-5a). (Estamos supondo  $s_m$  muito menor do que  $\lambda$ .)

À medida que a onda se propaga, a pressão do ar, em qualquer posição  $x$  na Fig. 18-5a, aumenta e diminui com o

tempo, a variação sendo dada por (faremos a demonstração logo adiante)

$$\Delta p = \Delta p_m \sin(kx - \omega t). \quad (18-14)$$

Um valor negativo de  $\Delta p$  na Eq. 18-14 corresponde a uma expansão, enquanto que um positivo equivale a uma compressão.

Vamos, também, provar mais adiante que a variação máxima de pressão na onda,  $\Delta p_m$  na Eq. 18-14, está relacionada ao deslocamento máximo,  $s_m$  na Eq. 18-13 e na Fig. 18-5b, por

$$\Delta p_m = (v\rho\omega) s_m. \quad (18-15)$$

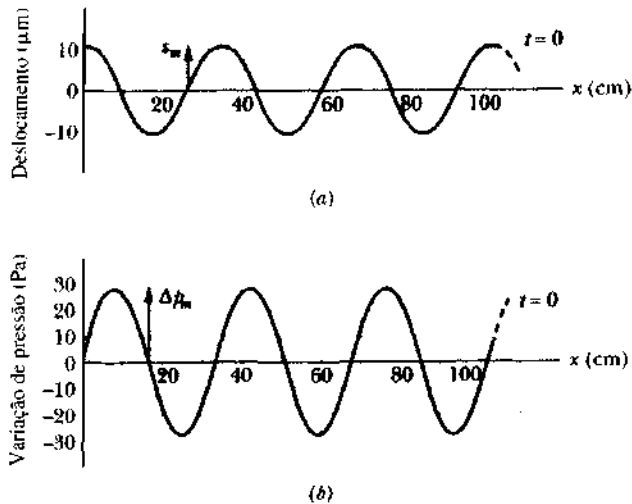
A variação máxima de pressão (ou **amplitude de pressão**)  $\Delta p_m$  é normalmente muito menor do que a pressão existente quando não há onda alguma se propagando no meio.

A Fig. 18-6 mostra os gráficos das Eqs. 18-13 e 18-14 em  $t = 0$ . Note que as duas ondas estão defasadas de  $\pi/2$  (ou  $90^\circ$ ), a variação de pressão sendo zero, quando o deslocamento é máximo. Normalmente, é muito mais fácil medir em laboratório a variação de pressão que o deslocamento.

#### Dedução das Eqs. 18-14 e 18-15

A Fig. 18-5b mostra um elemento de ar oscilante, com área da base  $A$  e espessura  $\Delta x$ , com seu centro deslocado da posição de equilíbrio de uma distância  $s$ .

<sup>\*</sup>Para o deslocamento transversal de um elemento de uma corda esticada, usamos o símbolo  $y(x, t)$ . Aqui, vamos mudar a notação para  $s(x, t)$ , evitando, assim, escrever  $x(x, t)$  para o deslocamento longitudinal de um elemento de ar.



**Fig. 18-6** (a) Um gráfico do deslocamento (Eq. 18-13) para  $t = 0$ . (b) Um gráfico similar da variação de pressão (Eq. 18-14). Ambos os gráficos são para uma onda sonora de 1.000 Hz, cuja intensidade está no limiar da dor; veja o Exemplo 18-2.

Usando a Eq. 18-2, podemos escrever para a variação de pressão nesse elemento,

$$\Delta p = -B \frac{\Delta V}{V}. \quad (18-16)$$

A quantidade  $V$  na Eq. 18-16 é o volume do elemento, dado por

$$V = A \Delta x \quad (18-17)$$

e a  $\Delta V$  na Eq. 18-16 é a mudança de volume que ocorre quando o elemento é deslocado. Esta variação de volume é causada pela diferença de deslocamento entre as duas faces do elemento,  $\Delta s$ . Assim, podemos escrever a mudança de volume como

$$\Delta V = A \Delta s. \quad (18-18)$$

Substituindo as Eqs. 18-17 e 18-18 na Eq. 18-16 e tomando o limite quando as variações tendem a zero, obtemos

$$\Delta p = -B \frac{\Delta s}{\Delta x} = -B \frac{\partial s}{\partial x} \quad (18-19)$$

O símbolo  $\partial$  indica que a derivada na Eq. 18-19 é uma *derivada parcial*, que mostra como  $s$  varia em função de  $x$ , quando o tempo  $t$  é fixo. Da Eq. 18-13 temos, então, tratando  $t$  como constante,

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [s_m \cos(kx - \omega t)] = -ks_m \sin(kx - \omega t).$$

Substituindo esta expressão para a derivada parcial na Eq. 18-19, obtemos

$$\Delta p = Bks_m \sin(kx - \omega t).$$

Comparando esta equação com a Eq. 18-14, descobrimos que  $Bks_m = \Delta p_m$ .

Usando a Eq. 18-3, podemos escrever, agora,

$$\Delta p_m = (Bk)s_m = (v^2 \rho k)s_m.$$

Obtemos a Eq. 18-15, que também tínhamos prometido demonstrar, simplesmente usando a Eq. 17-14.  $v = \omega/k$ , se eliminarmos  $k$ .

**EXEMPLO 18-2** A variação máxima de pressão  $\Delta p_m$  que o ouvido humano pode tolerar é de cerca de 28 Pa. Qual é a amplitude de deslocamento  $s_m$ , supondo que o som se propaga no ar, cuja densidade é 1,21 kg/m<sup>3</sup>, sendo a frequência do som 1.000 Hz?

**Solução** Da Eq. 18-15, temos

$$\begin{aligned} s_m &= \frac{\Delta p_m}{v\rho\omega} = \frac{\Delta p_m}{v\rho 2\pi f} \\ &= \frac{28 \text{ Pa}}{(343 \text{ m/s})(1,21 \text{ kg/m}^3)(2\pi)(1.000 \text{ Hz})} \\ &= 1,1 \times 10^{-5} \text{ m} = 11 \text{ } \mu\text{m}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Vemos, então, que a amplitude de deslocamento, mesmo para os sons mais intensos que o ouvido humano pode suportar, é muito pequena, cerca de 1/7 da espessura desta página. Esta amplitude também é muito menor do que o comprimento de onda de uma onda sonora, com frequência 1.000 Hz, propagando-se no ar, que vale 34 cm.

A amplitude de pressão máxima acima  $\Delta p_m (= 28 \text{ Pa})$  também é pequena, se considerarmos a pressão atmosférica normal, cerca de  $10^5 \text{ Pa}$ . A Fig. 18-6 foi feita para as condições descritas neste problema.

A amplitude de pressão  $\Delta p_m$  para o som *mais fraco* que o ouvido humano pode detectar, na frequência de 1.000 Hz, é  $2,8 \times 10^{-5} \text{ Pa}$ . Refazendo os cálculos acima para este caso, obtemos  $s_m = 1,1 \times 10^{-11} \text{ m}$  ou 11 pm, que é cerca de 10 vezes menor do que um raio atômico típico. Nosso ouvido é mesmo um detector de ondas sonoras muito sensível. Na realidade, pode detectar um pulso sonoro cuja energia total é da ordem de apenas alguns elétron-volts. Esta energia é da mesma ordem de grandeza daquela necessária para remover um elétron das camadas exteriores de um átomo.

## Interferência

Vamos supor que ondas sonoras, de comprimento de onda  $\lambda$ , são emitidas por duas fontes pontuais em fase; isto é, as ondas emitidas alcançam seus valores máximos no mesmo instante. Se passam, então, por um mesmo ponto, enquanto se propagam (aproximadamente) no mesmo sentido, ainda estarão em fase, se tiverem percorrido distâncias idênticas para alcançar esse ponto. Mas, se tiverem percorrido caminhos com uma **diferença de comprimento  $\Delta d$** , poderão não estar mais em fase. Achamos sua diferença de fase

$\phi$ , lembrando (veja a Seção 17-4) que uma diferença de fase de  $2\pi$  corresponde a um comprimento de onda. Logo, podemos escrever

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{\Delta d}{\lambda}, \quad (18-20)$$

ou

$$\phi = \frac{\Delta d}{\lambda} 2\pi. \quad (18-21)$$

Como no caso das ondas transversais (Seção 17-11), ondas sonoras podem sofrer interferência construtiva ou destrutiva. A interferência é construtiva, quando  $\phi$  é zero ou um múltiplo inteiro de  $2\pi$ , isto é, quando

$$\phi = m2\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (18-22)$$

(interferência construtiva).

A interferência será destrutiva quando  $\phi$  for um múltiplo ímpar de  $\pi$ , ou seja,

$$\phi = (m + \frac{1}{2})2\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (18-23)$$

(interferência destrutiva).

Da Eq. 18-20, vemos que essas condições correspondem a

$$\Delta d = m\lambda \quad (\text{interferência construtiva}) \quad (18-24)$$

e

$$\Delta d = (m + \frac{1}{2})\lambda \quad (\text{interferência destrutiva}). \quad (18-25)$$

respectivamente.

**EXEMPLO 18-3** Na Fig. 18-7, duas fontes pontuais  $S_1$  e  $S_2$ , que estão em fase e separadas por uma distância  $D = 1,5\lambda$ , emitem ondas sonoras idênticas de comprimento de onda  $\lambda$ .

a. Qual a diferença de fase entre as ondas que partem de  $S_1$  e  $S_2$  no ponto  $P_1$ , pertencente à bissetriz de  $D$ , e que tipo de interferência ocorrerá nesse ponto?

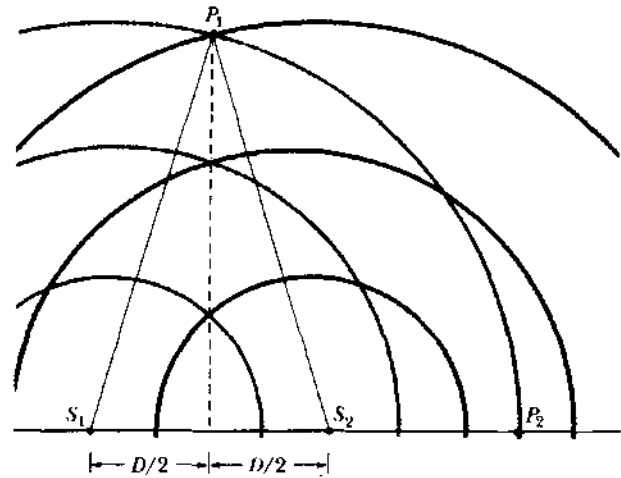
**Solução** As duas ondas percorrem distâncias idênticas para alcançar  $P_1$ . Logo, a diferença de caminho  $\Delta d$  é 0 e, da Eq. 18-21, temos

$$\phi = \frac{\Delta d}{\lambda} 2\pi = 0. \quad (\text{Resposta})$$

Da Eq. 18-22, vemos que esta situação corresponde à interferência construtiva, com  $m = 0$ .

b. Quais são a diferença de fase e o tipo de interferência no ponto  $P_2$ , na Fig. 18-7?

**Solução** O ponto  $P_2$  está na linha que passa pelas duas fontes sonoras. Assim, para alcançar  $P_2$ , as ondas emitidas por  $S_1$  devem percorrer uma



**Fig. 18-7** Exemplo 18-3. Duas fontes pontuais  $S_1$  e  $S_2$  emitem ondas sonoras esféricas que estão em fase. As ondas viajam distâncias iguais para alcançar o ponto  $P_1$ . O ponto  $P_2$  está na linha que liga  $S_1$  e  $S_2$ .

distância  $D$  maior do que aquela percorrida pelas emitidas por  $S_2$ . Da Eq. 18-21, com  $\Delta d = D = 1,5\lambda$ , obtemos

$$\phi = \frac{\Delta d}{\lambda} 2\pi = \frac{1,5\lambda}{\lambda} 2\pi = 3\pi \text{ rad.} \quad (\text{Resposta})$$

Da Eq. 18-23, vemos que esta situação corresponde à interferência destrutiva, com  $m = 1$ . Note que a resposta é independente da distância entre  $P_2$  e a fonte  $S_2$ .

## 18-4 Intensidade e Nível do Som

Se você estiver tentando dormir, enquanto alguém aciona uma serra elétrica por perto, ficará plenamente convencido de que existe algo mais que frequência, comprimento de onda e velocidade ligado ao som. Também existe a intensidade. A **intensidade**  $I$  de uma onda sonora é definida como a taxa média de transmissão de energia, por unidade de área, para esta onda. Logo, a unidade SI para a intensidade é o Watt/m<sup>2</sup>. Numa onda sonora, a intensidade  $I$  está relacionada à amplitude  $s_m$  por

$$I = \frac{1}{2}\rho v \omega^2 s_m^2. \quad (18-26)$$

uma equação que será demonstrada em breve.

Você viu no Exemplo 18-2 que a amplitude de deslocamento do ouvido humano vai desde  $10^{-5}$  m, para o som mais intenso que pode suportar, até  $10^{-11}$  m, para o mais fraco som audível, dando uma razão entre as amplitudes de  $10^6$ . Da Eq. 18-26, vemos que a intensidade do som depende do **quadrado da amplitude**; assim, a razão entre as intensidades para estes dois limites da audição humana é  $10^{12}$ . Vemos que os seres humanos são sensíveis a uma enorme faixa de intensidades.

### A Escala Decibel

Para lidar com uma faixa de valores tão grande, é conveniente o uso de logaritmos. Considere a relação

$$y = \log x,$$

onde  $x$  e  $y$  são variáveis. Devido às propriedades dos logaritmos, se multiplicarmos  $x$  por um fator 10,  $y$  aumentará de um fator  $\log 10 (= 1)$ . Logo,

$$y' = \log(10x) = \log 10 + \log x = 1 + y.$$

Do mesmo modo, se multiplicarmos  $x$  por  $10^{12}$ ,  $y$  aumentará somente de um fator 12.

Assim, ao invés de falar da intensidade  $I$  de uma onda sonora, é muito mais conveniente falar do **nível sonoro**  $\beta$ , definido como

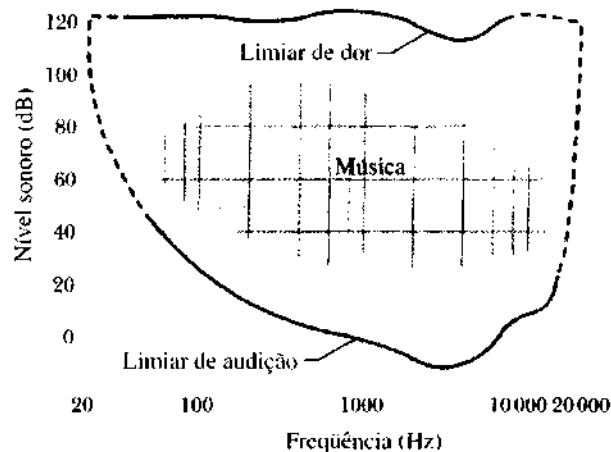
$$\beta = (10 \text{ dB}) \log \frac{I}{I_0}. \quad (18-27)$$

Aqui, dB é a abreviatura para **decibel**, a unidade de nível sonoro, um nome escolhido em reconhecimento ao trabalho de Alexander Graham Bell.  $I_0$ , na Eq. 18-27, é uma intensidade de referência padrão ( $= 10^{-12} \text{ W/m}^2$ ), escolhida assim porque está próxima do limite inferior da audição humana. Para  $I = I_0$ , a Eq. 18-27 fornece  $\beta = 10 \log 1 = 0$ , de tal modo que nosso nível padrão de referência corresponde a zero decibéis. A Tabela 18-2 mostra alguns valores de  $\beta$  e os da razão de intensidades correspondentes  $I/I_0$ . Da tabela, vemos que  $\beta$  aumenta de uma mesma quantidade constante, sempre que a intensidade sonora  $I$  aumenta de um fator fixo. Na realidade, esta é a maneira como o sistema auditivo humano opera, de tal modo que pode ser uniformemente sensível a uma faixa bem larga de intensidades sonoras.

A resposta do nosso sistema auditivo ao som não é a mesma para todas as frequências. A Fig. 18-8 mostra como os limiares de audição e de sensação dolorosa variam, através do espectro sonoro, para pessoas com audição média.

**Tabela 18-2**  
Valores Calculados a Partir da Eq. 18-27

$\beta$ (dB)	$I/I_0$
0	$10^0 = 1$
10	$10^1 = 10$
20	$10^2 = 100$
30	$10^3 = 1.000$
40	$10^4 = 10.000$
50	$10^5 = 100.000$
.	.
.	.
120	$10^{12} = 1.000.000.000.000$



**Fig. 18-8** A faixa média do nível de som para ouvidos humanos. Os limiares da dor e da escuta dependem da frequência. Mostramos, também, a faixa aproximada das frequências e níveis de som encontrados na música.

A Tabela 18-3 mostra os níveis de intensidade para alguns sons.

### Dedução da Eq. 18-26

Considere, na Fig. 18-5a, uma fina camada de ar de espessura  $dx$ , área  $A$  e massa  $dm$  oscilando à medida que a onda sonora descrita pela Eq. 18-13 passa por ela. Sua energia cinética  $dK$  é

$$dK = \frac{1}{2} dm v_s^2. \quad (18-28)$$

Aqui  $v_s$  não é a velocidade da onda e, sim, a velocidade do elemento oscilante de ar, que é obtida da Eq. 18-13

$$v_s = \frac{\partial s}{\partial t} = -\omega s_m \sin(kx - \omega t).$$

Usando esta relação e também  $dm = \rho A dx$ , podemos reescrever a Eq. 18-28 como

$$dK = \frac{1}{2} (\rho A dx) (-\omega s_m)^2 \sin^2(kx - \omega t). \quad (18-29)$$

**Tabela 18-3**  
Alguns Níveis Sonoros (dB)

Limite de audição	0
Arrastar de folhas	10
Assobio (a 1 m de distância)	20
Rua de cidade, sem tráfego	30
Escritório, sala de aula	50
Conversação normal (a 1 m)	60
Martelo hidráulico (a 1 m)	90
Banda de rock	110
Limiar de dor	120
Turbina a jato (a 50 m)	130
Foguete Saturno (a 50 m)	200

Dividindo a Eq. 18-29 por  $dt$ , obtemos a taxa com que a energia cinética se propaga junto com a onda. Como vimos no Cap. 17 para ondas transversais,  $dx/dt$  é a velocidade da onda, assim, temos

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2} \rho A v \omega^2 s_m^2 \sin^2(kx - \omega t). \quad (18-30)$$

A taxa *média* com que a energia cinética é transportada é

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{dK}{dt}\right)} &= \frac{1}{2} \rho A v \omega^2 s_m^2 \overline{\sin^2(kx - \omega t)} \\ &= \frac{1}{4} \rho A v \omega^2 s_m^2. \end{aligned} \quad (18-31)$$

Para obter esta equação, usamos o fato de que o valor médio da função seno ao quadrado, tomado num comprimento de onda, é  $1/2$  (o mesmo é válido para a função cosseno).

Vamos supor que a energia *potencial* é transportada pela onda com essa mesma taxa média. A intensidade de onda  $I$ , que é a taxa média por unidade de área com que ambas as energias são transportadas pela onda, é então, usando a Eq. 18-31,

$$I = \frac{2(dK/dt)}{A} = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 s_m^2,$$

que é a Eq. 18-26, que queríamos demonstrar.

**EXEMPLO 18-4 a.** Duas ondas sonoras têm intensidades  $I_1$  e  $I_2$ . Qual a relação entre seus níveis sonoros?

**Solução** Vamos escrever a razão entre as duas intensidades como

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{I_2/I_0}{I_1/I_0}.$$

Tomando o logaritmo de ambos os lados desta expressão e multiplicando-a por 10 dB, temos

$$(10 \text{ dB}) \log \frac{I_2}{I_1} = (10 \text{ dB}) \log \frac{I_2}{I_0} - (10 \text{ dB}) \log \frac{I_1}{I_0}.$$

Da Eq. 18-27, vemos, então, que os termos à direita são  $\beta_2$  e  $\beta_1$ , assim

$$\beta_2 - \beta_1 = (10 \text{ dB}) \log \frac{I_2}{I_1}. \quad (\text{Resposta}) \quad (18-32)$$

Note que a *razão* entre as duas intensidades corresponde à *diferença* entre os seus níveis sonoros.

b. Se multiplicarmos a intensidade de uma onda sonora por 10, adicionaremos 10 dB ao nível sonoro, como já vimos. Se você multiplicar a intensidade por 2,0, quanto terá de adicionar ao nível sonoro?

**Solução** Da Eq. 18-32

$$\begin{aligned} \beta_2 - \beta_1 &= (10 \text{ dB}) \log \frac{I_2}{I_1} \\ &= (10 \text{ dB}) \log 2,0 = 3,0 \text{ dB}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

**EXEMPLO 18-5 a.** Em 1976, a banda The Who estabeleceu um recorde para o concerto com maior intensidade sonora: o nível sonoro num ponto a 46 m à frente das caixas acústicas foi  $\beta_2 = 120$  dB. Qual é a razão entre esta intensidade e a de um martelo hidráulico operando a um nível sonoro  $\beta_1 = 92$  dB?

**Solução** Usando a Eq. 18-32, obtemos

$$(10 \text{ dB}) \log \frac{I_2}{I_1} = 120 \text{ dB} - 92 \text{ dB} = 28 \text{ dB}.$$

Logo,

$$\log \frac{I_2}{I_1} = \frac{28 \text{ dB}}{10 \text{ dB}} = 2,8.$$

Tomando o antilogaritmo de ambos os lados, ficamos com

$$\frac{I_2}{I_1} = 630. \quad (\text{Resposta})$$

A exposição temporária a intensidades sonoras tão grandes quanto a de um martelo hidráulico ou a do concerto do The Who, em 1976, resulta numa diminuição, também temporária, da sensibilidade auditiva. Já a exposição prolongada pode resultar em perdas permanentes desta capacidade (Fig. 18-9). A perda da audição é, claramente, um risco que qualquer um corre ao ouvir, por exemplo, "heavy metal" com volume alto.

b. O quanto um grito de 80 dB é mais intenso do que um sussuro de 20 dB?

**Solução** Um aumento de 20 dB no nível sonoro corresponde a multiplicar a intensidade por 100. Aqui, temos um aumento no nível sonoro de 60 (= 20 + 20 + 20) dB, ou seja, três fatores de 100. Assim, o grito é  $100 \times 100 \times 100$ , ou um milhão de vezes mais forte que o sussuro. Você seria capaz de imaginar que é necessária tanta energia adicional para elevar a voz?

**EXEMPLO 18-6** A fonte pontual  $S$ , na Fig. 18-10, emite ondas sonoras em todas as direções, uniformemente.

a. Qual a intensidade das ondas sonoras a uma distância  $r$  da fonte, se esta emite energia a uma taxa  $P$ ? Calcule a intensidade para  $r = 2,50$  m e  $P = 25,0$  W.

**Solução** Supondo que a energia das ondas sonoras é conservada, então, a taxa com que a energia é emitida pela fonte pontual (isto é, a potência da fonte) deve ser igual àquela com que a energia passa através da área  $4\pi r^2$  de uma esfera de raio  $r$ , centrada na fonte. Como a intensidade é a taxa por unidade de área com a qual a energia é transmitida,

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}. \quad (\text{Resposta}) \quad (18-33)$$

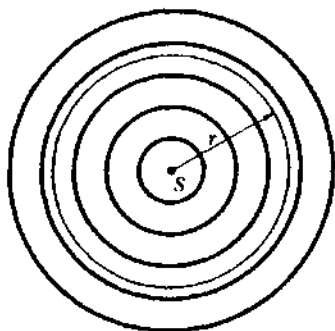
Vemos que a intensidade do som cai como o inverso do quadrado da distância da fonte. Numericamente, temos

$$\begin{aligned} I &= \frac{25,0 \text{ W}}{(4\pi)(2,50 \text{ m})^2} = 0,318 \text{ W/m}^2 \\ &= 318 \text{ mW/m}^2. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

b. Como a amplitude da onda sonora depende da distância  $r$ ?



**Fig. 18-9** Exemplo 18-5. Peter Dinklage, do *The Who*, tocando na frente de um sistema de som. Sua exposição prolongada e repetida a sons de alta intensidade, principalmente quando tocando com um microfone para produzir realimentação, resultou em uma permanente redução de sua capacidade auditiva.



**Fig. 18-10** Exemplo 18-6. Uma fonte pontual  $S$  envia ondas sonoras, de modo uniforme, em todas as direções. A intensidade  $I$ , à distância  $r$  da fonte, diminui como  $1/r^2$ .

**Solução** Substituindo  $I$  dada pela Eq. 18-26 na Eq. 18-33, encontramos

$$\frac{1}{2}\rho v\omega^2 s_m^2 = \frac{P}{4\pi r^2},$$

o que fornece

$$s_m = \sqrt{\frac{P}{2\pi\rho v\omega^2 r^2}} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{P}{2\pi\rho v\omega^2}}, \quad (\text{Resposta})$$

onde todas as quantidades dentro do sinal de raiz são constantes. Logo, à medida que a onda sonora se espalha, sua amplitude diminui como o inverso da distância da fonte.

## 18-5 Fontes Sonoras Musicais

Sons musicais podem ser gerados por cordas (guitarra, piano, violino), membranas (tambores, tambores), colunas de ar (flauta, oboé, órgão de tubos e o fujara, mostrado na Fig. 18-11), blocos de madeira ou barras de aço (marimba, xilofone) e muitos outros corpos oscilantes. Muitos instrumentos envolvem, em sua operação, mais de uma parte vibrante. No violino, por exemplo, não só as cordas, mas também o corpo do instrumento participam da produção do som que apreciamos.

No Cap. 17, vimos que ondas estacionárias podem ser produzidas numa corda esticada, presa em ambas as extremidades. O seu aparecimento é devido à reflexão das ondas nas extremidades fixas da corda. Se existe uma relação apropriada entre o comprimento do fio e o das ondas, a superposição destas, propagando-se em sentidos opostos, produz um padrão de onda estacionária (ou *modo de oscilação*). O comprimento de onda necessário para que isto aconteça é o correspondente a uma das *frequências de ressonância* da corda. A vantagem de produzir tais ondas é que, nessas condições, a corda oscila com grande amplitude, pressionando periodicamente o ar à sua volta e, assim, dando origem a uma onda sonora com a mesma frequência das oscilações na corda. A importância da onda sonora assim produzida é óbvia para um guitarrista, por exemplo.





Fig. 18-11 A coluna de ar, dentro de um fujara, oscila quando este tradicional instrumento eslovaco é tocado.

Podemos gerar ondas sonoras estacionárias num tubo, de maneira semelhante. Quando ondas sonoras se propagam através do ar num tubo, são refletidas em ambas as suas extremidades. (Esta reflexão ocorre mesmo que uma extremidade esteja aberta, embora não tão completa quanto a que ocorre quando a extremidade está fechada.) Se existe a relação apropriada entre o comprimento de onda das ondas sonoras e o comprimento do tubo, a superposição das ondas, se propagando em direções opostas dentro do tubo, irá causar o aparecimento de um padrão de onda estacionária. Para que isto aconteça, o comprimento de onda das ondas sonoras deve corresponder a uma das frequências de ressonância do tubo. A vantagem disto é que, como no caso das cordas vibrantes, serão produzidas ondas de grande amplitude e uma onda sonora será emitida a partir de qualquer extremidade aberta, tendo a mesma frequência das ondas dentro do tubo. A importância deste fenômeno, para pistonistas, saxofonistas e outros músicos que tocam instrumentos de sopro, é óbvia.

Os padrões de onda sonora estacionários são semelhantes, em muitos outros aspectos, àqueles produzidos em cordas: a extremidade fechada de um tubo é análoga à ponta fixa da corda, pois, em ambos os pontos, deve haver um nó. E a extremidade aberta de um tubo é análoga ao extremo de uma corda presa a um anel que pode se movimentar livremente, como na Fig. 17-16b, devendo haver, em ambos os casos, um ventre (ou anti-nó) na extremidade considerada. (Na realidade, no caso da extremidade aberta de um tubo, o ventre está um pouco além da ponta, mas não levaremos isto em conta, aqui.)

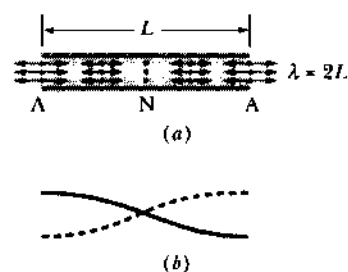


Fig. 18-12 (a) A configuração mais simples de ondas estacionárias para ondas sonoras (longitudinais), em um tubo com as duas extremidades abertas, tem um antinó de deslocamento (A) em cada extremidade e um nó de deslocamento (N) no meio. (O deslocamento representado pelas setas duplas está muito exagerado.) (b) A configuração de ondas estacionárias correspondente para ondas (transversais) em cordas.

O padrão de onda estacionária mais simples, que pode ser gerado num tubo com as duas extremidades abertas, é o mostrado na Fig. 18-12a. Como já vimos, há um ventre em cada ponta. Há, também, um nó localizado no ponto médio do tubo. Um modo mais simples de representar esta onda longitudinal estacionária é visto na Fig. 18-12b — onde ela foi representada como uma onda transversal estacionária numa corda.

O padrão de onda estacionário, mostrado na Fig. 18-12a, é chamado de *modo fundamental* ou *primeiro harmônico*. Para que ele ocorra, as ondas sonoras num tubo de comprimento  $L$  devem ter um comprimento de onda tal que  $L = \lambda/2$  ou  $\lambda = 2L$ . A Fig. 18-13a mostra vários outros padrões de onda sonora estacionários, usando a representação de ondas numa corda. O *segundo harmônico* aparece quando

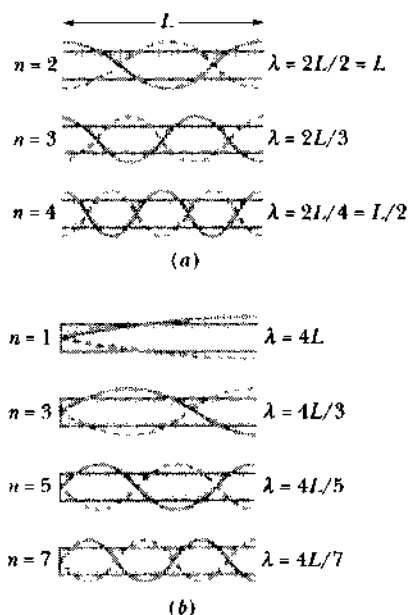


Fig. 18-13 Configurações de ondas estacionárias para ondas em cordas superpostas em tubos, para representar configurações de ondas sonoras estacionárias em tubos. (a) Ambas as extremidades abertas; qualquer harmônico pode existir. (b) Somente uma extremidade aberta; só podem existir harmônicos ímpares.

temos ondas sonoras de comprimento  $\lambda = L$ . O *terceiro harmônico*, quando  $\lambda = 2L/3$ , e assim por diante.

De um modo mais geral, as frequências de ressonância para um tubo de comprimento  $L$ , com ambas as extremidades abertas, correspondem aos comprimentos de onda

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (18-34)$$

onde  $n$  é chamado de *número harmônico*. Logo, as frequências ressonantes são

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(tubo aberto em ambas as extremidades), (18-35)

onde  $v$  é a velocidade do som.

A Fig. 18-13b mostra (representando-os como ondas numa corda) alguns dos padrões de onda sonora estacionários que podem ser gerados num tubo, com somente uma das extremidades aberta. Como já vimos, há um ventre na extremidade aberta e um nó na fechada. O mais simples desses padrões implica  $L = \lambda/4$  ou  $\lambda = 4L$ , para as ondas sonoras. O seguinte já implica  $L = 3\lambda/4$  ou  $\lambda = 4L/3$ , e assim por diante.

No caso geral, as frequências de ressonância para um tubo de comprimento  $L$ , com somente uma das extremidades aberta, correspondem aos seguintes comprimentos de onda

$$\lambda = \frac{4L}{n}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (18-36)$$

onde o número harmônico  $n$  deve ser ímpar. As frequências de ressonância devem ser, então,

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{4L}, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

(tubo aberto em uma extremidade), (18-37)

Note que somente harmônicos ímpares podem existir num tubo com apenas um dos extremos aberto. O segundo harmônico, por exemplo, com  $n = 2$ , não pode ser gerado nesse tubo.

O comprimento de um instrumento musical reflete a faixa de frequências para a qual foi projetado para funcionar: comprimentos menores significam frequências maiores. A Fig. 18-14, por exemplo, mostra a família dos violinos e saxofones, com suas faixas de frequência indicadas pelo teclado de piano. Observe que, para cada instrumento, há uma considerável superposição com os seus vizinhos de frequências mais alta e mais baixa.

Em qualquer sistema oscilante que gere sons musicais, seja uma corda de violino ou o ar num tubo de órgão, costumam ser gerados, ao mesmo tempo, o modo fundamental e vários harmônicos de ordem superior. O som resultante deve-se à superposição desses componentes. Esses harmônicos têm intensidades diferentes para ins-

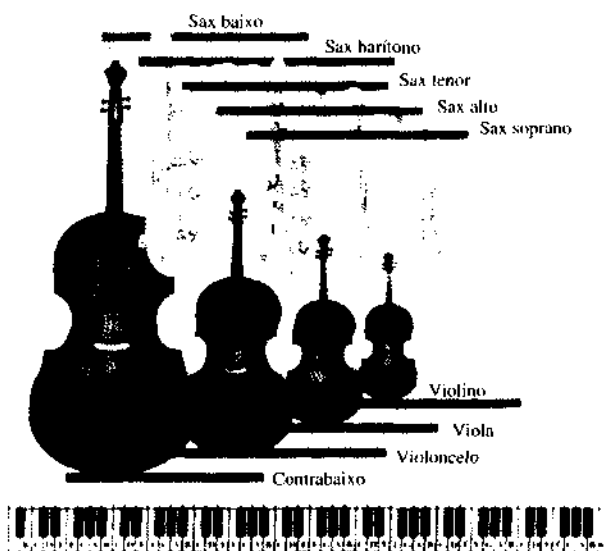


Fig. 18-14 As famílias de saxofones e violinos, mostrando a relação entre comprimento e faixa de frequência, esta última mostrada pelas barras horizontais. A escala de frequência é sugerida pelo teclado embaixo, aumentando para a direita.

trumentos diversos, o que explica por que uma mesma nota soa de modo diverso, quando tocada por instrumentos diferentes. A Fig. 18-15 mostra, por exemplo, as formas de onda resultantes quando a mesma nota é tocada por três ins-

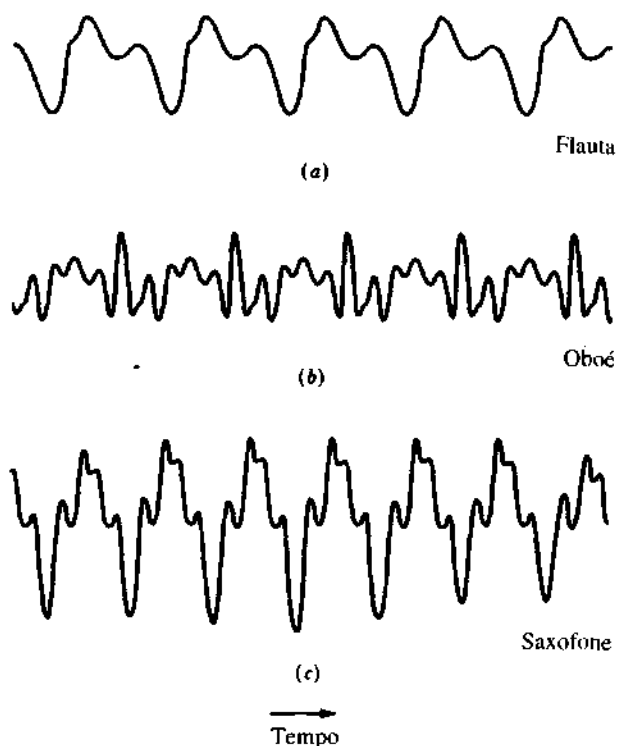


Fig. 18-15 O formato de onda produzido por (a) uma flauta, (b) um oboé e (c) um saxofone, quando todos tocam a mesma nota, com a mesma frequência de primeiro harmônico. Os formatos de onda e o som resultante que você pode ouvir diferem porque os instrumentos produzem os harmônicos de ordem superiores a diferentes intensidades.

trumentos diferentes, com a mesma frequência fundamental.

**EXEMPLO 18-7** Um ruído de fundo fraco, num aposento, foi capaz de excitar a onda sonora estacionária fundamental num tubo de papelão de comprimento  $L = 67,0$  cm, com os dois extremos abertos. Suponha que a velocidade do som no ar dentro do tubo é  $343$  m/s.

a. Que frequência você ouvirá, se encostar seu ouvido numa das extremidades do tubo?

**Solução** Com o seu ouvido fechando um dos extremos, a frequência fundamental é dada pela Eq. 18-37 com  $n = 1$ :

$$f = \frac{v}{4L} = \frac{343 \text{ m/s}}{(4)(0,670 \text{ m})} = 128 \text{ Hz.} \quad (\text{Resposta})$$

Se o ruído de fundo for capaz de gerar qualquer dos harmônicos superiores, como o terceiro por exemplo, você poderá ouvir também frequências que são múltiplos *ímpares* de  $128$  Hz.

b. Que frequência ouvirá, se afastar sua cabeça o suficiente para que o extremo fique aberto?

**Solução** Com ambas as extremidades abertas, a frequência fundamental é dada pela Eq. 18-35 com  $n = 1$ :

$$f = \frac{v}{2L} = \frac{343 \text{ m/s}}{(2)(0,670 \text{ m})} = 256 \text{ Hz.} \quad (\text{Resposta})$$

Se o ruído de fundo também for capaz de excitar qualquer dos harmônicos superiores, como o segundo, por exemplo, você poderá ouvir frequências que são múltiplas *inteiras* de  $256$  Hz. No entanto, o tubo não mais emitirá som com frequência de  $128$  Hz.

### 18-6 Batimentos

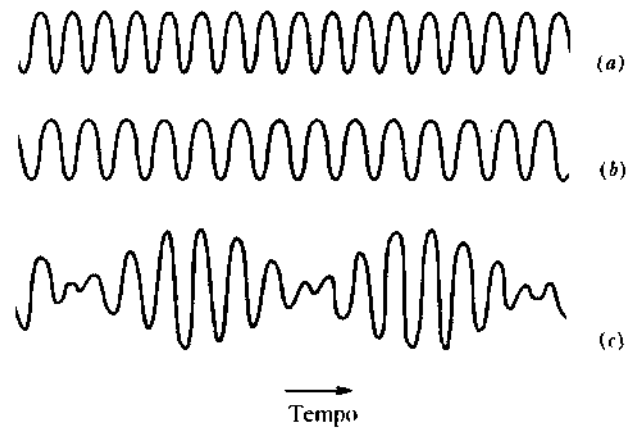
Se escutamos, com uma diferença de uns poucos minutos, dois sons com frequências  $552$  e  $564$  Hz, muitos de nós não somos capazes de distinguir um do outro. Mas, se esses dois sons alcançam nossos ouvidos simultaneamente, percebemos um som cuja frequência é  $558$  Hz, a *média* das duas frequências. Sentimos, também, uma peculiar variação na intensidade: ela aumenta e diminui como se fosse uma *nota de marcação* lenta e trêmula, cuja frequência é  $12$  Hz, a *diferença* entre as duas frequências originais. A Fig. 18-16 ilustra este fenômeno, os **batimentos**.

Suponhamos que as variações temporais dos deslocamentos, devido a duas ondas sonoras num ponto particular, sejam

$$s_1 = s_m \cos \omega_1 t \quad \text{e} \quad s_2 = s_m \cos \omega_2 t. \quad (18-38)$$

onde tomamos, simplificando, as duas ondas com a mesma amplitude. De acordo com o princípio da superposição, o deslocamento resultante será

$$s = s_1 + s_2 = s_m (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t).$$



**Fig. 18-16** (a, b) Variações de pressão  $\Delta p$  de duas ondas sonoras que são detectadas em separado. As frequências das ondas são aproximadamente iguais. (c) A variação de pressão resultante, se as duas ondas forem detectadas ao mesmo tempo.

### O uso da identidade trigonométrica (Apêndice G)

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

nos permite expressar o deslocamento resultante como

$$s = 2s_m \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t. \quad (18-39)$$

Se escrevermos

$$\omega' = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \quad \text{e} \quad \omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2), \quad (18-40)$$

podemos reescrever a Eq. 18-39 como

$$s(t) = [2s_m \cos \omega' t] \cos \omega t. \quad (18-41)$$

Vamos considerar, agora, que as frequências angulares  $\omega_1$  e  $\omega_2$  das ondas que se combinam são quase iguais, o que implica em  $\omega \gg \omega'$  na Eq. 18-40. Podemos, então, interpretar a Eq. 18-41 como uma função cosseno, de frequência angular  $\omega$  e cuja amplitude (que não é constante, variando no tempo com frequência  $\omega'$ ) é a quantidade entre colchetes.

Um batimento, ou seja, um máximo de amplitude, ocorrerá sempre que  $\cos \omega' t$  na Eq. 18-41 for igual a  $+1$  ou  $-1$ , o que acontece duas vezes, cada vez que a função se repete. Como a frequência angular de  $\cos \omega' t$  é  $\omega'$ , a frequência angular  $\omega_{\text{batimento}} = 2\omega'$ . Então, com a ajuda da Eq. 18-40, temos

$$\omega_{\text{bat}} = 2\omega' = (2)\left(\frac{1}{2}\right)(\omega_1 - \omega_2) = \omega_1 - \omega_2.$$

Como  $\omega = 2\pi f$ , podemos reescrever esta expressão como

$$f_{\text{bat}} = f_1 - f_2 \quad (\text{frequência de batimento}). \quad (18-42)$$

Os músicos utilizam os batimentos para afinar seus instrumentos. Se um instrumento é tocado e seu som comparado com um de frequência padronizada (por exemplo, a nota lá — ou A, se preferir usar cifras — fundamental de um oboé), e variamos a frequência do instrumento, até que os batimentos desapareçam, então ele está afinado por aquele padrão. Na musical cidade de Viena, a fundamental nota lá (440 Hz) pode ser obtida através do telefone, para servir aos numerosos músicos profissionais e amadores da cidade.

---

**EXEMPLO 18-8** Você quer afinar o lá<sub>3</sub> de um piano (frequência 220 Hz). Para isto, dispõe de um diapasão de frequência 440 Hz. Como deve proceder?

**Solução** Essas duas frequências são muito diferentes para produzir batimentos. Lembramos que, quando analisamos a Eq. 18-41, supomos que as duas frequências envolvidas eram bastante próximas. No entanto, devemos notar que o segundo harmônico do lá<sub>3</sub> corresponde à frequência  $220 \times 2$  ou 440 Hz.

Consideremos que a corda de piano desafinada tem uma frequência fundamental um pouco diferente de 220 Hz. Você presta atenção a possíveis batimentos entre a frequência fundamental do diapasão e o segundo harmônico do lá<sub>3</sub>, e consegue percebê-los com uma frequência de 6 Hz. Então, altera a tensão sobre a corda, até que os batimentos desapareçam e a corda esteja afinada.

Note que, a partir da frequência observada dos batimentos, 6 Hz, não se pode distinguir se a fundamental da corda desafinada é 223 Hz ou 217 Hz. Ambas produziram a mesma frequência de batimentos. No entanto, podemos decidir a questão com facilidade, experimentando alterar levemente a tensão na corda e notando se a frequência dos batimentos aumenta ou diminui. Se aumentar, você está desafinando a corda ainda mais.

---

## 18-7 O Efeito Doppler

Imagine um carro da polícia estacionado no acostamento de uma estrada, com sua sirene, de frequência 1.000 Hz, ligada. Se você está num carro também parado na mesma estrada, ouvirá um som com essa frequência. Mas, se houver movimento relativo entre você e o carro da polícia, aproximando-se ou afastando-se um do outro, você perceberá uma frequência diferente. Por exemplo, se estiver dirigindo a 120 km/h na direção do carro da polícia, ouvirá uma frequência *mais alta* (1.096 Hz, um *aumento* de 96 Hz). Se estiver se *afastando* do carro da polícia, com a mesma velocidade, ouvirá uma frequência *mais baixa* (904 Hz, um *decréscimo* de 96 Hz).

Essas alterações de frequência relacionadas com o movimento são exemplos do **efeito Doppler**. A existência deste efeito foi proposta (embora não tenha sido demonstrada satisfatoriamente) em 1842, pelo físico austríaco Johan Christian Doppler. A hipótese foi testada, experimentalmente, em 1845 por Buys Ballot, na Holanda, “usando uma locomotiva que puxava um vagão aberto com vários músicos tocando trumpets”.

O efeito Doppler acontece não só com ondas sonoras, mas também com as eletromagnéticas, incluindo microon-

das, ondas de rádio e a luz visível. A polícia usa o efeito Doppler com microondas para determinar a velocidade de um carro: uma unidade de radar envia um feixe de microondas de uma certa frequência  $f$  na direção de um carro que se aproxima. As microondas refletidas pelas partes metálicas do carro voltam à unidade de radar com uma frequência mais alta  $f'$ , devido ao movimento de aproximação do carro. A unidade de radar traduz esta diferença de frequências para a velocidade do carro em relação ao operador, que lê o resultado num mostrador da unidade.

A velocidade registrada será a velocidade verdadeira do carro, somente se ele estiver indo exatamente na direção do radar. Qualquer desvio neste alinhamento reduzirá  $f'$ . Se o feixe de radar for perpendicular à velocidade do carro, não haverá efeito Doppler ( $f' = f$ ) e o mostrador do aparelho indicará uma velocidade zero para o carro. De maneira semelhante, um aparelho de radar manual, utilizado em beisebol para medir a velocidade da bola, deve estar totalmente alinhado com a direção desta, para que a medida tenha uma precisão aceitável.

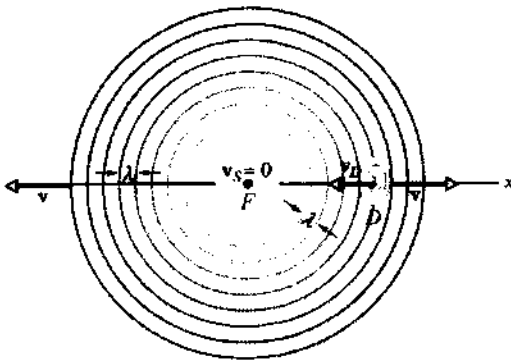
A ocorrência do efeito Doppler com luz visível permitiu aos astrônomos determinar as velocidades de várias estrelas e galáxias em relação à Terra. Descobriu-se que todas as galáxias distantes estão se afastando de nós e que, quanto mais distante a galáxia, mais rápido isto acontece. A descoberta se deu, estudando-se a frequência da luz emitida por essas galáxias e que nossos telescópios interceptam: essas frequências são mais baixas do que seriam, se as galáxias estivessem estacionárias.

Na análise que se segue, vamos nos restringir às ondas sonoras, tomando como sistema de referência a massa de ar através da qual essas ondas se propagam. Vamos imaginar que não existe vento, de tal modo que esse sistema de referência é equivalente a um que é fixo em relação à Terra. Além disso, consideremos que o movimento da fonte  $F$ , que emite as ondas sonoras e do detector  $D$ , que as registra, é retilíneo se colinear. Vamos também supor que as velocidades de  $F$  e  $D$ , que são medidas *em relação à massa de ar*, são menores que a velocidade do som.

### Detector em Movimento; Fonte Estacionária

Na Fig. 18-17, um detector  $D$  (representado por um ouvido) se move com velocidade  $v_D$  na direção de uma fonte estacionária  $F$ , que emite frentes de onda esféricas, de comprimento de onda  $\lambda$  e frequência  $f$ , propagando-se com a velocidade do som  $v$ . Essas frentes de onda foram desenhadas com o espaçamento correspondente a um comprimento de onda. A frequência registrada por  $D$  é a taxa com que este detector intercepta as frentes de onda. Se  $D$  estivesse parado, essa taxa seria  $f$ , mas como  $D$  está em movimento na direção da fonte, ela é maior e, logo, a frequência detectada  $f'$  é maior do que  $f$ .

Vamos, por enquanto, considerar  $D$  estacionário (Fig. 18-18). No instante  $t$ , as frentes de onda se moveram para a direita, de uma distância  $vt$ . O número de comprimentos de onda, correspondente a esta distância, é o número de



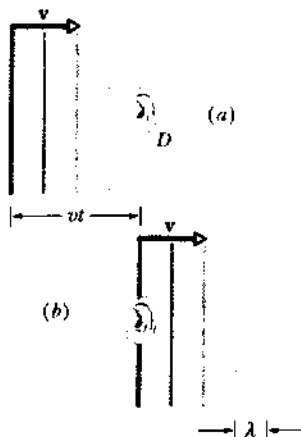
**Fig. 18-17** Uma fonte estacionária de som  $F$  emite frentes de ondas esféricas, mostradas a um comprimento de onda de distância, que se expandem à velocidade do som  $v$ . Um detector de som  $D$ , representado por um ouvido, se move à velocidade  $v_D$ , a partir da fonte. O detector acusa uma frequência mais alta devido a esse movimento.

comprimentos de onda interceptados por  $D$  no intervalo de tempo  $t$ , e este número é  $vt/\lambda$ . A taxa com que  $D$  intercepta comprimentos de onda, que é a frequência  $f$  detectada por  $D$ , é

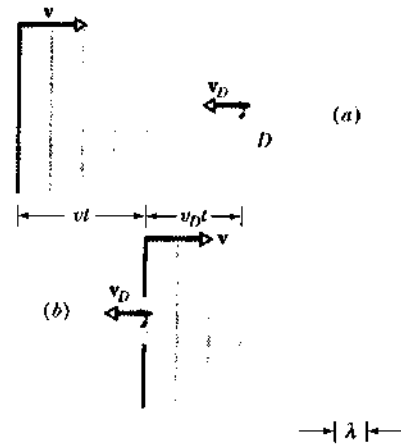
$$f = \frac{vt/\lambda}{t} = \frac{v}{\lambda} \quad (18-43)$$

Nesta situação, com  $D$  estacionário, não existe efeito Doppler: a frequência percebida por  $D$  é a frequência emitida por  $F$ .

Consideremos, agora, novamente o caso em que  $D$  se move em direção oposta às ondas (Fig. 18-19). Num tempo  $t$ , as ondas se deslocam uma distância  $vt$  para a direita, como antes, mas agora  $D$  se desloca uma distância  $v_D t$  para a esquerda. Logo, no intervalo de tempo  $t$ , o deslocamento total das frentes de onda, em relação a  $D$ , é  $vt + v_D t$ . O número de comprimentos de onda, que pode ser acomodado nessa distância relativa, é o número de comprimentos



**Fig. 18-18** Frentes de onda da Fig. 18-17 (a) alcançando e (b) ultrapassando um detector estacionário  $D$ , se deslocando de uma distância  $vt$  para a direita, no tempo  $t$ .



**Fig. 18-19** Frentes de onda (a) alcançando e (b) ultrapassando um detector  $D$  que se move na direção oposta à das ondas. No tempo  $t$ , as ondas se deslocam de uma distância  $vt$  para a direita e  $D$  se move de uma distância  $v_D t$  para a esquerda.

de onda interceptados por  $D$ , no intervalo de tempo  $t$ , e é dado por  $(vt + v_D t)/\lambda$ . A taxa com que  $D$  intercepta comprimentos de onda, neste caso, é a frequência  $f'$ , que é dada por

$$f' = \frac{(vt + v_D t)/\lambda}{t} = \frac{v + v_D}{\lambda} \quad (18-44)$$

Da Eq. 18-43, temos  $\lambda = v/f$ . Com isto, a Eq. 18-44 fica

$$f' = \frac{v + v_D}{v/f} = f \frac{v + v_D}{v} \quad (18-45)$$

Note que na Eq. 18-45,  $f'$  deve ser maior que  $f$ , a menos que  $v_D = 0$ .

De maneira análoga, podemos calcular a frequência registrada por  $D$ , quando se afasta da fonte. Neste caso, as frentes de onda se deslocam de uma distância  $vt - v_D t$  em relação a  $D$ , num tempo  $t$ , e  $f'$  é dada por

$$f' = f \frac{v - v_D}{v} \quad (18-46)$$

Na Eq. 18-46,  $f'$  deve ser menor que  $f$ , a menos que  $v_D = 0$ .

Podemos resumir os resultados expressos pelas Eqs. 18-45 e 18-46, como

$$f' = f \frac{v \pm v_D}{v} \quad \begin{array}{l} \text{(detector em movimento;} \\ \text{fonte estacionária).} \end{array} \quad (18-47)$$

Determinamos o sinal a ser usado na Eq. 18-47, lembrando sempre do fato de que, quando o detector se aproxima da fonte, a frequência é maior, o que implica um sinal positivo no numerador. Ao contrário, quando o detector se afasta da fonte, usamos o sinal negativo.

**Fonte em Movimento; Detector Estacionário**

Vamos imaginar que  $D$  está em repouso em relação à massa de ar e a fonte  $F$  se aproxima de  $D$  com velocidade  $v_f$  (Fig. 18-20). O movimento de  $F$  afeta o comprimento de onda do som que ela emite e, logo, a frequência detectada por  $D$ .

Para calcular esta variação, vamos utilizar o tempo  $T$  ( $= 1/f$ ) decorrido entre a emissão de duas frentes de onda sucessivas quaisquer,  $W_1$  e  $W_2$ . No intervalo de tempo  $T$ , a frente de onda  $W_1$  se desloca de uma distância  $vT$  e a fonte se move de uma distância  $v_f T$ . No final do intervalo  $T$ , a frente de onda  $W_2$  é emitida. No sentido em que  $F$  se move, a distância entre essas duas frentes de onda, que é o comprimento de onda  $\lambda'$  das ondas se deslocando nesse sentido, é  $vT - v_f T$ . Se  $D$  registra essas ondas, mede uma frequência  $f'$  dada por

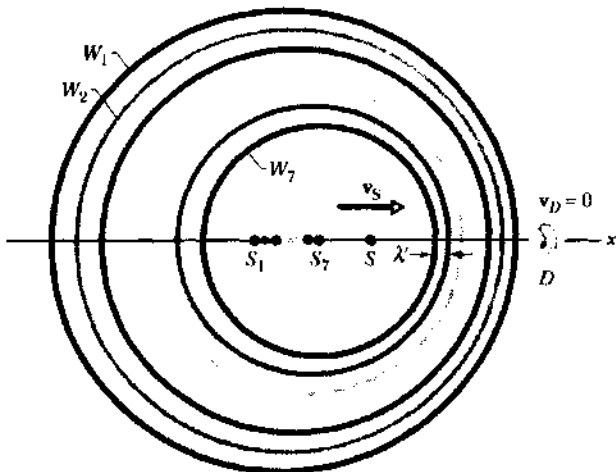
$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{vT - v_f T} = \frac{v}{v/f - v_f/f} = f \frac{v}{v - v_f} \quad (18-48)$$

Note que  $f'$  deve ser maior que  $f$ , a menos que  $v_f = 0$ .

No sentido oposto ao movimento de  $F$ , o comprimento de onda  $\lambda'$  das ondas é  $vT + v_f T$ . Se  $D$  detecta tais ondas, registra uma frequência  $f$  dada por

$$f' = f \frac{v}{v + v_f} \quad (18-49)$$

Agora,  $f'$  deve ser menor que  $f$ , a menos que  $v_f = 0$ .



**Fig. 18-20** O detector  $D$  é estacionário, com a fonte  $F$  se movendo para longe, à velocidade  $v_f$ . A frente de onda  $W_1$  foi emitida quando a fonte estava em  $F_1$ ; a frente de onda  $W_2$ , em  $F_2$ . No momento mostrado, a fonte está em  $F$ . O detector percebe uma frequência mais alta, porque a fonte em movimento, seguindo suas próprias frentes de onda, emite um comprimento de onda reduzido  $\lambda'$  na direção do movimento.

Podemos resumir as Eqs. 18-48 e 18-49 em

$$f' = f \frac{v}{v \mp v_f} \quad (\text{fonte em movimento; detector estacionário}). \quad (18-50)$$

Para decidir que sinal usar na Eq. 18-50, lembre-se do fato de que, quando a fonte se aproxima do detector, a frequência é maior, o que implica um sinal negativo no denominador. Quando a fonte se afasta, usamos o sinal oposto.

**Fonte e Detector em Movimento**

Podemos combinar as Eqs. 18-47 e 18-50, obtendo uma equação geral para o efeito Doppler, onde tanto a fonte quanto o detector se movem com relação ao ar. Substituindo  $f$  na Eq. 18-50 (a frequência da fonte) por  $f'$ , dada pela Eq. 18-47 (a frequência associada ao movimento do detector), obtemos

$$f' = f \frac{v \pm v_D}{v \mp v_f} \quad (\text{detector e fonte em movimento}). \quad (18-51)$$

Fazendo  $v_f = 0$  na Eq. 18-51, obtemos a Eq. 18-47 e, fazendo  $v_D = 0$  obtemos a Eq. 18-50. Os sinais positivo e negativo são determinados como nas Eqs. 18-47 e 18-50 (*aproximando de significa maior*).

**O Efeito Doppler a Baixas Velocidades**

Os efeitos Doppler para um detector em movimento (Eq. 18-47) e uma fonte em movimento (Eq. 18-50) são diferentes, mesmo quando o detector e a fonte se movem com a mesma velocidade. No entanto, se as velocidades são suficientemente baixas (isto é, se  $v_D \ll v$  e  $v_f \ll v$ ), as variações de frequência causadas pelos dois movimentos são essencialmente as mesmas.

Usando o teorema binomial (veja a Tática 3 do Cap. 7), podemos mostrar que a Eq. 18-51 pode ser escrita na forma

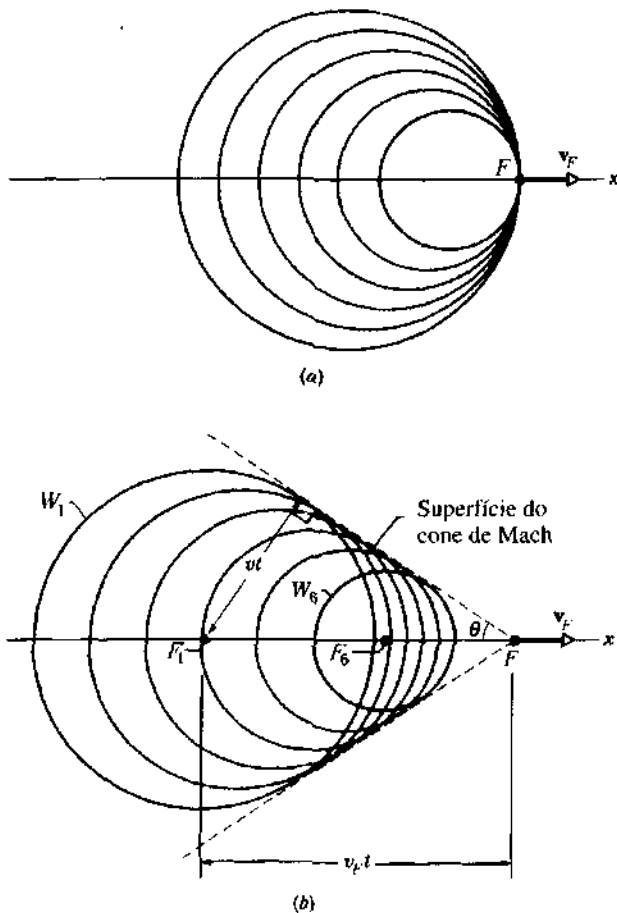
$$f' \approx f \left( 1 \pm \frac{u}{v} \right) \quad (\text{só para baixas velocidades}) \quad (18-52)$$

onde  $u$  ( $= |v_f \pm v_D|$ ) é a velocidade *relativa* da fonte referente ao detector. A regra para os sinais permanece a mesma. Se a fonte e o detector estão em movimento um na direção do *outro*, esperamos uma frequência *maior*; para isto, é necessário escolher o sinal positivo na Eq. 18-52. Por outro lado, se a fonte e o detector estão se afastando um do outro, esperamos uma diminuição na frequência e optamos pelo sinal negativo na Eq. 18-52.

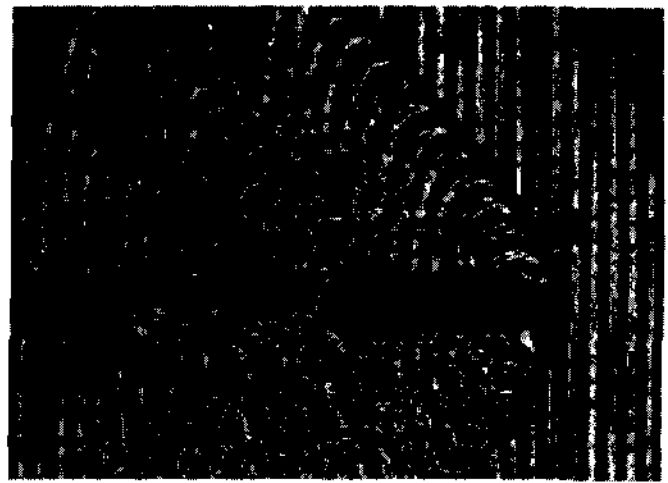
**Velocidades Supersônicas**

Se uma fonte se aproxima de um detector estacionário a uma velocidade igual à do som, isto é, se  $v_f = v$ , a Eq. 18-50 prevê que a frequência detectada  $f'$  será infinita. Isto significa que a fonte se move tão rápido, que alcança suas próprias frentes de onda, como ilustra a Fig. 18-21a. O que acontece quando a velocidade da fonte *excede* a do som?

A Eq. 18-50 não é mais válida para tais velocidades, chamadas *supersônicas*. A Fig. 18-21b mostra as frentes de onda esféricas que se originam nas várias posições da fonte. Nessa figura, o raio de qualquer das frentes de onda é  $vt$ , onde  $v$  é a velocidade do som e  $t$  é o intervalo de tempo decorrido, desde a emissão dessa frente de onda. Note que todas as frentes de onda se acomodam numa envoltória em forma de V, na Fig. 18-21b, que em três dimensões é um cone, chamado *cone de Mach*. Dizemos que existe uma **onda de choque** ao longo da superfície desse cone, por-



**Fig. 18-21** (a) Uma fonte de som  $F$  se move à velocidade  $v_f$ , muito próxima à velocidade do som  $v$ , assim, quase tão rápido quanto as frentes de onda que gera. (b) Uma fonte  $F$  se move à velocidade  $v_f$ , maior do que a do som  $v$ , assim, mais rápida que suas frentes de onda. Quando a fonte estava na posição  $F_1$ , gerou a frente de onda  $W_1$  e, na posição  $F_6$ , gerou a frente de onda  $W_6$ . Todas as frentes de onda esféricas se expandem à velocidade do som  $v$  e se acumulam na superfície do cone, chamado de cone Mach, formando uma onda de choque. A superfície do cone tem semi-ângulo  $\theta$  e é tangente a todas as frentes de onda.



**Fig. 18-22** Uma imagem em alta velocidade, em cor falsa, de uma bala de calibre 20 mm viajando a cerca de Mach 1,3. Note o cone de Mach proeminente, produzido pela frente da bala e os cones secundários, produzidos por espaços irregulares nos bordos.

que o agrupamento das frentes de onda causa súbitos aumentos e diminuições na pressão do ar, em qualquer ponto por onde a superfície passa. Da Fig. 18-21b, vemos que o semi-ângulo  $\theta$  do cone, chamado de *ângulo do cone de Mach*, é dado por

$$\text{sen } \theta = \frac{vt}{v_f t} = \frac{v}{v_f} \quad (\text{ângulo do cone de Mach}). \quad (18-53)$$

A razão  $v_f/v$  chamada de *número de Mach*. Quando você ouve dizer que um certo avião voou a Mach 2,3, isto significa que sua velocidade foi de 2,3 vezes a velocidade do som no ar, na região onde o avião efetuou o vôo.

A onda de choque gerada por uma aeronave supersônica ou por um projétil (veja a Fig. 18-22) produz um efeito sonoro chamado de *explosão sônica*. Um efeito semelhante (chamado de *radiação de Cherenkov*) ocorre com a luz visível, quando elétrons se movem através da água ou outro meio transparente a uma velocidade maior que a da luz nesse meio. O brilho azulado que emana da água, onde barras de combustível para reatores altamente radioativas são armazenadas, é causado por este efeito. É — se você quiser interpretar assim — uma “explosão sônica ótica”, causada pelos elétrons muito rápidos que são emitidos pelos átomos radioativos das barras de combustível.

**EXEMPLO 18-9** Os morcegos se orientam e encontram suas presas emitindo ondas ultra-sônicas, que são ondas sonoras com frequências mais altas que as detectadas pelo ouvido humano e, depois, recebendo os reflexos. Suponha que um morcego voe na direção de uma mariposa, à velocidade  $v_b = 9,0$  m/s, enquanto a mariposa voa na direção dele, à velocidade  $v_m = 8,0$  m/s. O morcego emite, de suas narinas, ondas ultra-sônicas de frequência  $f_{bc}$  que refletem na mariposa e voltam para ele com frequência  $f_{br}$ . Ele ajusta a frequência emitida  $f_{bc}$  até que a recebida  $f_{br}$  seja 83 kHz, que corresponde ao máximo de sensibilidade para a audição de um morcego.

a. Qual é  $f_m$ , a frequência das ondas ouvidas e refletidas pela mariposa?

**Solução** A mariposa age como detector (pois escuta as ondas) e como emissor (pois as reflete de volta). Para encontrar  $f_m$  usaremos a Eq. 18-51, com a mariposa sendo o emissor (das ondas refletidas com frequência  $f_m$ ) e o morcego sendo o detector (do eco com a frequência  $f_{bd} = 83$  kHz). Como o detector se move na direção do emissor (com velocidade  $v_b$ ), adotaremos o sinal positivo no numerador da Eq. 18-51. Como o emissor se move na direção do detector (com velocidade  $v_m$ ), adotaremos o sinal negativo no denominador. Ficamos então com

$$f_{bd} = f_m \frac{v + v_b}{v - v_m}$$

ou

$$83 \text{ kHz} = f_m \frac{343 \text{ m/s} + 9,0 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} - 8,0 \text{ m/s}}$$

de onde

$$f_m = 78,99 \text{ kHz} \approx 79 \text{ kHz}. \quad (\text{Resposta})$$

b. Qual a frequência  $f_{br}$  emitida pelo morcego?

**Solução** Usaremos novamente a Eq. 18-51, mas considerando o morcego agora como emissor (da frequência  $f_{br}$ ) e a mariposa como detector (da frequência  $f_m$ ). Como o detector se move na direção do emissor (com velocidade  $v_m$ ), adotaremos o sinal positivo no numerador da Eq. 18-51. Como o emissor se move na direção do detector (com velocidade  $v_b$ ), adotaremos o sinal negativo no denominador. Assim, teremos

$$f_m = f_{br} \frac{v + v_m}{v - v_b}$$

ou

$$78,99 \text{ kHz} = f_{br} \frac{343 \text{ m/s} + 8,0 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} - 9,0 \text{ m/s}}$$

da qual obtemos

$$f_{br} = 75 \text{ kHz}. \quad (\text{Resposta})$$

O morcego calcula a velocidade relativa da mariposa (17 m/s) a partir dos 8 kHz (83 kHz-75 kHz) que ele precisa diminuir a frequência que emite, para escutar um eco de 83 kHz. Algumas mariposas evitam ser capturadas, voando na direção oposta às ondas ultra-sônicas que ouvem. Isto faz com que a frequência recebida pelo morcego seja menor e, assim, não escute o eco. Algumas mariposas evitam a captura produzindo suas próprias ondas ultra-sônicas e confundindo o sistema de detecção do morcego.

## 18-8 O Efeito Doppler para a Luz (Opcional)

Podemos nos sentir tentados a aplicar, para as ondas luminosas, a equação do efeito Doppler (Eq. 18-51), que desenvolvemos para ondas sonoras na seção anterior, simplesmente substituindo  $v$ , a velocidade do som, por  $c$ , a velocidade da luz. Mas precisamos evitar essa tentação.

A razão é que as ondas sonoras — como quaisquer ondas mecânicas — requerem um meio (o ar em nossos exemplos) para se propagarem, mas ondas luminosas, que podem se propagar no vácuo, não. A velocidade do som é,

sempre, “relativa ao meio”, mas a velocidade da luz não, pois esta pode se propagar inclusive quando não existe meio. Como já discutimos na Seção 17-7, a velocidade da luz no vácuo tem sempre o mesmo valor  $c$ , em todas as direções e em todos os referenciais inerciais.

Para ondas sonoras, expressões como “emissor em movimento” e “detector em movimento” se referem, separadamente, ao movimento com relação ao meio. Representam situações físicas desiguais e levam a diferentes equações para o efeito Doppler. Para ondas luminosas, entretanto, tudo a que podemos nos referir é à velocidade *relativa* entre a fonte e o detector. “Emissor se movendo em direção ao detector à velocidade  $u$ ” e “detector se movendo em direção ao emissor à velocidade  $u$ ” são situações fisicamente idênticas neste caso e levam a somente uma (e não duas) equação para descrever o efeito Doppler, equação esta que só pode ser deduzida utilizando-se a teoria da relatividade especial.

Embora as equações do efeito Doppler para a luz e para o som sejam necessariamente diferentes, em velocidades muito baixas fornecem praticamente o mesmo resultado. Isso já seria de se esperar, pois *todas* as previsões da teoria da relatividade especial concordam com as da mecânica não relativística para velocidades muito pequenas, comparadas com a da luz no vácuo. Assim, a Eq. 18-52 com  $v$  substituída por  $c$ , funciona para ondas luminosas se  $u \ll c$ , onde  $u$  é a velocidade relativa da fonte e do detector. Logo,

$$f' = f(1 \pm u/c) \quad (\text{ondas luminosas; } u \ll c). \quad (18-54)$$

Se a fonte e o detector estão se *aproximando* um do outro, nossa regra dos sinais nos diz que a frequência *aumentará*, o que nos leva a escolher um sinal positivo na Eq. 18-54.

Nas observações do efeito Doppler em astronomia, é o comprimento de onda da luz emitida pelos objetos astrofísicos que se observa com mais facilidade, do que a frequência. Isto sugere que substituamos  $f'$  e  $f$  na Eq. 18-54 por  $c/\lambda'$  e  $c/\lambda$ , respectivamente. Fazendo isto, encontramos

$$\lambda' = \lambda(1 \pm u/c)^{-1} \approx \lambda(1 \mp u/c).$$

Esta expressão pode ser escrita como

$$\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \mp \frac{u}{c}$$

ou

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \quad c \quad (\text{ondas luminosas; } u \ll c), \quad (18-55)$$

na qual  $\Delta\lambda$  é a magnitude da mudança no comprimento de onda, devido ao efeito Doppler. Se o comprimento de onda diminui (um efeito chamado de *deslocamento para o azul*, porque a porção azul do espectro visível tem os menores comprimentos de onda), a frequência necessariamente au-



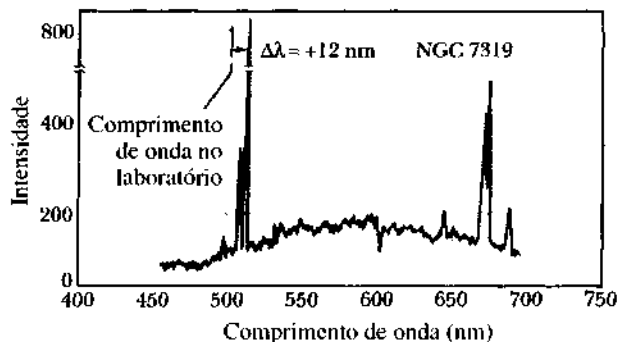
menta e isto — de acordo com a nossa regra de sinais — significa que a distância entre a fonte e o detector está diminuindo. Se aumenta (um *deslocamento para o vermelho*), a distância entre o emissor e o detector está aumentando.

**EXEMPLO 18-10** A Fig. 18-23 mostra a intensidade medida da luz emitida por uma galáxia distante, conhecida somente por seu número de catálogo, NGC 7319\*. A linha espectral mais intensa, cujo comprimento de onda  $\lambda$  é 513 nm, foi emitida por átomos de oxigênio da galáxia. O deslocamento Doppler  $\Delta\lambda$  ( $= 12$  nm), mostrado na figura, indica que a linha está associada a um comprimento de onda 12 nm maior do que o a ser medido, analisando a emissão de luz por uma amostra de oxigênio em um laboratório terrestre. Qual a velocidade dessa galáxia em relação à Terra? Está se aproximando ou se afastando? (Todas as linhas do espectro da Fig. 18-23 sofreram deslocamentos devido ao efeito Doppler; analisaremos aqui somente a linha mais intensa.)

**Solução** Da Eq. 18-55, temos

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{\Delta\lambda}{\lambda} c = \frac{(12 \text{ nm})(3.00 \times 10^8 \text{ m/s})}{513 \text{ nm}} \\
 &= 7.0 \times 10^6 \text{ m/s} \\
 &= 7.000 \text{ km/s.} \qquad \text{(Resposta)}
 \end{aligned}$$

\*Se você quiser homenagear uma pessoa amiga dando o seu nome a uma galáxia, sinta-se à vontade para fazê-lo. O número de galáxias conhecidas é tão grande que podemos associar, levando em conta a população atual do nosso planeta, cerca de 20 delas a cada ser humano que vive hoje sobre a Terra.



**Fig. 18-23** Exemplo 18-10. A intensidade da luz emitida por uma galáxia cerca de  $3 \times 10^8$  anos-luz distante da Terra é vista, aqui, como uma função do comprimento de onda. Os picos de intensidade podem ser associados a átomos como o hidrogênio, nitrogênio e oxigênio, que estão presentes na galáxia. Todas as linhas são deslocadas pelo efeito Doppler na direção dos grandes comprimentos de onda (*um deslocamento para o vermelho*), porque a galáxia está se afastando de nós a uma grande velocidade. É visto em destaque o deslocamento Doppler para a linha mais intensa. Cortesia de J. P. Huchra e colaboradores.

Medidas mais precisas, efetuadas por astrônomos no Centro de Astrofísica do Laboratório da Universidade de Harvard, encontraram um valor de 6.764 km/s.

O comprimento de onda observado exibe um deslocamento Doppler na direção dos maiores comprimentos de onda (*deslocamento para o vermelho*), quando comparado com a luz analisada, a partir de uma fonte estacionária em laboratório. Assim, o movimento da galáxia faz com que observemos uma frequência *menor*. De acordo com a nossa regra de sinais, isso significa que a galáxia está se *afastando* de nós. Foram medidas como essa que deram origem à hipótese de que o universo está em expansão.

## RESUMO

### Ondas Sonoras

Ondas sonoras são ondas mecânicas longitudinais que podem se propagar por sólidos, líquidos ou gases. A velocidade  $v$  de uma onda sonora em um meio com **módulo de elasticidade volumar**  $B$  e densidade  $\rho$  é

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (\text{velocidade do som}). \quad (18-3)$$

No ar, a 20°C, a velocidade do som é de 343 m/s.

### Equações de Onda para Deslocamento e Pressão

O deslocamento longitudinal  $s$  de um elemento em um meio, devido a uma onda sonora, é

$$s = s_m \cos(kx - \omega t) \quad (18-13)$$

onde  $s_m$  é a **amplitude de deslocamento** (deslocamento máximo), a partir do equilíbrio,  $k = 2\pi/\lambda$  e  $\omega = 2\pi f$ ,  $\lambda$  e  $f$  sendo comprimento de onda e frequência, respectivamente, da onda sonora. A mudança de pressão  $\Delta p$  do meio, a partir do equilíbrio, devido à onda sonora, é

$$\Delta p = \Delta p_m \sin(kx - \omega t), \quad (18-14)$$

Onde a **amplitude de pressão** é

$$\Delta p_m = (v\rho\omega)s_m. \quad (18-15)$$

### Interferência

A interferência entre duas ondas sonoras com comprimentos de onda idênticos, que atingem um ponto comum, depende da diferença de fase  $\phi$  entre elas. Se as ondas forem emitidas em fase,  $\phi$  é dado por

$$\phi = \frac{\Delta d}{\lambda} 2\pi, \quad (18-21)$$

onde  $\Delta d$  é a sua **diferença de distância percorrida** (a diferença entre as distâncias percorridas pelas ondas, para chegarem ao ponto comum). Condições para a interferência destrutiva e construtiva total das ondas são dadas por

$$\phi = m 2\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (18-22)$$

(interferência construtiva)

$$\phi = (m + \frac{1}{2}) 2\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (18-23)$$

(interferência destrutiva).

Essas condições correspondem a

$$\Delta d = m\lambda \quad (\text{interferência construtiva}) \quad (18-24)$$

e

$$\Delta d = (m + \frac{1}{2})\lambda \quad (\text{interferência destrutiva}). \quad (18-25)$$

**Intensidade do Som**

A **intensidade**  $I$  de uma onda sonora é a taxa média com que transmite energia por uma unidade de área, e é dada por

$$I = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 s_m^2. \quad (18-26)$$

**Nível do Som em Decibéis**

O **nível do som**  $\beta$  em decibéis (dB) é definido como

$$\beta = (10 \text{ dB}) \log \frac{I}{I_0}, \quad (18-27)$$

onde  $I_0 (= 10^{-12} \text{ W/m}^2)$  é o nível de intensidade de referência, usado para medir qualquer valor da intensidade  $I$ . Para cada fator de 10 que aumentar a intensidade, 10 dB são adicionados ao nível de som. O alcance do ouvido humano está entre, aproximadamente, 0 e 120 dB.

**Padrões de Onda Estacionária em Tubos**

Padrões de onda sonora estacionária podem ser estabelecidos em tubos. Um tubo aberto nos dois extremos entrará em ressonância nas frequências

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (18-35)$$

(tubo, dois extremos abertos),

onde  $v$  é a velocidade do som no ar dentro do tubo. Para um tubo fechado em uma extremidade e aberto na outra, as frequências de ressonância são

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{4L}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (18-37)$$

(tubo, um extremo aberto).

**Batimentos**

**Batimentos** surgem quando duas ondas possuindo frequências angulares, ligeiramente diferentes,  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , são superpostas. A equação

que nos dá o deslocamento da partícula resultante como função do tempo é

$$s(t) = [2s_m \cos \omega' t] \cos \omega t. \quad (18-41)$$

Onde  $\omega' = 1/2 (\omega_1 - \omega_2)$  e  $\omega = 1/2 (\omega_1 + \omega_2)$ . A frequência de batimentos é

$$f_{\text{bat}} = f_1 - f_2. \quad (18-42)$$

**O Efeito Doppler**

O **efeito Doppler** é uma mudança na frequência observada de uma onda, quando a fonte ou o detector se movem relativamente ao meio onde ela se propaga. Para o som, a frequência observada  $f'$  é dada em termos da frequência da fonte por

$$f' = f \frac{v \pm v_D}{v \mp v_F} \quad (\text{detector e fonte em movimento}). \quad (18-51)$$

onde  $v_D$  é a velocidade relativa do detector em relação ao meio,  $v_F$  é o mesmo para fonte e  $v$  é a velocidade do som no meio; o sinal positivo em  $v_F$  (ou  $v_D$ ) é usado quando a fonte (ou o detector) se move na direção do detector (ou fonte), enquanto que o sinal negativo é usado quando se movem de maneira oposta (se afastam um do outro). Quando as velocidades  $v_D$  e  $v_F$  são muito menores do que  $v$ , os quatro casos ficam reduzidos a

$$f' = f \left( 1 \pm \frac{u}{v} \right) \quad (\text{só para baixas velocidades}), \quad (18-52)$$

onde  $u$  é a velocidade relativa da fonte em relação ao detector. O efeito Doppler para a luz segue a mesma expressão aproximada,  $f' = f (1 \pm u/c)$ , se a velocidade relativa  $u$  é muito menor que a velocidade da luz  $c$ .

**Onda de Choque**

Se a velocidade da fonte relativa ao meio exceder a velocidade do som no meio, a equação de Doppler não mais se aplica. Em tais casos, surgem as ondas de choque. O semi-ângulo  $\theta$  (veja Fig. 18-21) da frente de onda é dado por

$$\sin \theta = \frac{v}{v_F} \quad (\text{ângulo do cone de Mach}). \quad (18-53)$$

**QUESTIONÁRIO**

- Em alguns filmes de ficção científica, a explosão de uma aeronave pode aparentemente ser ouvida em outra aeronave, estando ambas no vácuo do espaço sideral. Isto é possível? Há algum modo de a explosão produzir algum som dentro da segunda aeronave?
- Ondas ultra-sônicas podem ser usadas para revelar estruturas internas do corpo. Podem, por exemplo, distinguir entre elementos líquidos e sólidos do corpo, bem melhor do que os raios X. Por quê?
- Que evidência experimental existe para afirmarmos que a velocidade do som, no ar, é a mesma para qualquer comprimento de onda?
- Na prática, a lei do inverso do quadrado não se aplica exatamente para a diminuição da intensidade do som, a partir da distância à fonte. Por quê?
- Pode a intensidade de referência para sons audíveis ser modificada de modo a permitir níveis negativos de som em decibéis? Em caso afirmativo, como?
- Qual é a função comum das válvulas de um pistom e da vara do trombone?
- A corneta não possui válvulas. Como podemos, então, produzir diferentes sons com ela? A corneta se limita a que notas? Por quê?
- As frequências de ressonância de instrumentos de sopro aumentam quando o ambiente onde está a orquestra se aquece. Explique por quê.
- Quando você bate em um dos dentes de um diapasão, o outro dente também oscila, mesmo que a extremidade inferior do diapasão esteja fixa. Como isto acontece? E como pode o segundo dente oscilar, do mesmo modo que o primeiro (à mesma frequência)?
- Como pode uma onda sonora se propagar dentro do tubo de um órgão e ser refletida em sua extremidade aberta? Aparentemente, nada há para refleti-la.
- Como podemos localizar, numa experiência, as posições dos nós e ventres em uma corda, em uma coluna de ar e em uma superfície vibrante?

12. Que propriedades físicas de uma onda sonora correspondem às percepções de afinação, altura e timbre?
13. Quando você canta no banheiro, as músicas realmente soam melhor? Em caso afirmativo, dê as razões físicas para isso acontecer.
14. Explique o som audível produzido ao passar o dedo úmido pela boca de um cálice de vinho.
15. Um relâmpago dissipa uma quantidade enorme de energia e é essencialmente instantâneo pelos padrões de nossa vida diária. Como essa energia se transforma no som do trovão?
16. Ondas sonoras podem ser usadas para medir a velocidade com que o sangue passa pelas veias e artérias. Explique como.
17. Suponhamos que George assobie e Glória escute. Ela irá escutar uma frequência maior, se estiver indo na direção de George ou se ele estiver indo na direção dela. Os aumentos na frequência são os mesmos nas duas situações? Suponha as duas velocidades iguais.
18. Suponhamos que, no efeito Doppler para o som, a fonte e o receptor estão em repouso em relação a algum ponto de referência, mas o ar está

se movendo levando em conta este ponto. Haverá mudanças no comprimento de onda (ou frequência) recebido?

19. Jenny, sentada em um banco, vê Lew, sentado em outro, em um descampado. Ela assobia para chamar sua atenção. Um vento está soprando de Jenny para Lew. Como o vento irá afetar a frequência do assobio que Lew escutará? Como afetará o tempo que Lew leva para escutar o assobio?

20. De que modo o efeito Doppler pode ser usado em um instrumento para detectar a batida do coração de um feto? (Este procedimento é rotineiro em medicina.)

21. Um satélite emite ondas de rádio a uma frequência constante. Estas ondas são emitidas em direção ao solo e, quando detectadas, produzem um batimento com uma onda usada como padrão de frequência no detector. A frequência de batimentos é, então, enviada por um alto-falante e alguém pode "escutar" o sinal do satélite. Descreva como o som muda, conforme o satélite se aproxima, passa por cima e se afasta do receptor no solo.

## EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

*Sempre que necessário nos problemas, use  
velocidade do som no ar = 343 m/s = 1.125 ft/s*

*e  
densidade do ar = 1,21 kg/m<sup>3</sup>  
a não ser que sejam especificados outros valores.*

### Seção 18-2 A Velocidade do Som

1E. (a) Uma regra para encontrar sua distância de um relâmpago é contar quantos segundos se passam, desde a visão do raio até ouvir o trovão e, então, dividir o número por cinco. O resultado é, por suposição, a distância em milhas. Explique o funcionamento dessa regra e determine a porcentagem de erro a 20°C. (b) Desenvolva uma regra semelhante, para obter a distância em quilômetros.

2E. Uma coluna de soldados, marchando a 120 passos por minuto, segue a música da banda à frente do pelotão. Observa-se que os soldados atrás da coluna avançam com o pé esquerdo, enquanto os músicos da banda avançam com o direito. Qual o tamanho da coluna, aproximadamente?

3E. Você está em um grande concerto em campo aberto, situado a 300 m do sistema de som. O concerto está sendo transmitido ao vivo, via satélite. Considere um ouvinte a 5.000 km de distância. Quem escuta a música primeiro, você ou o ouvinte? Qual o intervalo de tempo entre as escutas?

4E. Dois espectadores de um jogo de futebol no Montjuic Stadium vêem, e um momento mais tarde ouvem, a bola ser chutada a gol. O espaço de tempo para um espectador é de 0,23 s e para o outro de 0,12 s. As linhas entre cada espectador e o jogador que chutou a bola fazem um ângulo de 90 graus. (a) Qual a distância entre cada espectador e o jogador? (b) Qual a distância entre os dois espectadores?

5E. A densidade média da crosta terrestre, 10 km abaixo da superfície, é de 2,7 g/cm<sup>3</sup>. A velocidade de ondas longitudinais sísmicas a essa profundidade, encontrada a partir da medida do tempo em que chegam, vindas de terremotos distantes, é de 5,4 km/s. Use esta informação para achar o módulo de elasticidade volumar da crosta terrestre a essa profundidade. Para comparação, o módulo de elasticidade volumar do aço é, aproximadamente,  $16 \times 10^{10}$  Pa.

6E. Qual o valor do módulo de elasticidade volumar do oxigênio à temperatura e pressão normais, se 1 mol (32,0 g) de oxigênio ocupa 22,4 L sob tais condições, e a velocidade do som no oxigênio é de 317 m/s?

7P. Um cientista deseja medir a velocidade do som em um bastão de alumínio de 10 cm, a partir da medida do tempo que um pulso de som leva para percorrer o bastão. Se um resultado com quatro algarismos significativos for desejado, o quanto exata deve ser a medida do comprimento do bastão e dos intervalos de tempo no experimento?

8P. A velocidade do som em um certo metal é  $V$ . Em uma extremidade de um longo tubo deste metal, de comprimento  $L$ , se produz um som. Um ouvinte do outro lado do tubo ouve dois sons, um da onda que se propaga pelo tubo e outro da que se propaga pelo ar. (a) Se  $v$  é a velocidade do som no ar, que intervalo de tempo  $t$  ocorre entre os dois sons? (b) Supondo que  $t = 1,00$  s e que o metal é o ferro, encontre o comprimento  $L$ .

9P. Um homem bate em uma das extremidades de um longo bastão de alumínio. Outro, no extremo oposto, encosta seu ouvido no mesmo e escuta o som duas vezes (uma pelo ar e outra pelo bastão), com um intervalo de 0,120 s entre eles. Qual o comprimento do bastão?

10P. Terremotos geram ondas sonoras na Terra. Ao contrário do que ocorre em um gás, podem ser geradas ondas longitudinais (P) e trans-

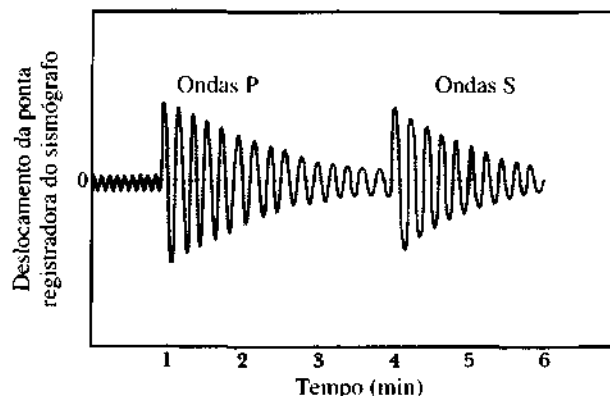


Fig. 18-24 Problema 10.

versais (S) em um sólido. A velocidade das ondas S é, aproximadamente, 4,5 km/s e das ondas P, 8,0 km/s, em média. Um sismógrafo registra ondas S e P de um terremoto. As primeiras ondas P aparecem 3,0 min antes das primeiras ondas S (Fig. 18-24). Supondo que as ondas viajaram em linha reta, a que distância ocorreu o terremoto?

**11P.** Uma pedra é jogada num poço. O som da pedra se chocando com a água é ouvido 3,00 s depois. Qual a profundidade do poço?

### Seção 18-3 Propagação de Ondas Sonoras

**12E.** A frequência audível normal está entre 20 Hz e 20 kHz. Quais os comprimentos de onda das ondas sonoras a essas frequências?

**13E.** O menor comprimento de onda emitido por um morcego é cerca de 3,3 mm. Qual a frequência correspondente?

**14E.** Ultra-som à frequência de 4,50 MHz é usado para examinar tumores nos tecidos internos. (a) Qual o comprimento de onda no ar dessas ondas sonoras? (b) Se a velocidade do som no tecido é de 1.500 m/s, qual o comprimento de onda das ondas no tecido?

**15E.** (a) Um alto-falante cônico tem um diâmetro de 15,0 cm. A que frequência o comprimento de onda que emite será igual ao seu diâmetro? E dez vezes o seu diâmetro? E 1/10 do seu diâmetro? (b) Faça os mesmos cálculos para um alto-falante de diâmetro 30,0 cm.

**16E.** A Fig. 18-1b mostra uma imagem detalhada de um transistor em um circuito microeletrônico, formada por um microscópio acústico. As ondas sonoras têm uma frequência de 4,2 GHz. A velocidade de tais ondas em hélio líquido, no qual o objeto está submerso, é de 240 m/s. (a) Qual o comprimento de onda dessas ondas de frequência ultra-alta? (b) Os condutores na figura têm cerca de 2  $\mu\text{m}$  de comprimento. A quantos comprimentos de onda corresponde este comprimento?

**17P.** (a) Uma onda senoidal longitudinal contínua é enviada através de determinada mola, por meio de uma fonte oscilante conectada a ela. A frequência da fonte é de 25 Hz e a distância entre pontos sucessivos da máxima expansão da mola é de 24 cm. Encontre a velocidade com que a onda se propaga na mola. (b) Se o deslocamento longitudinal máximo de uma partícula na mola é de 0,30 cm e a onda se move no sentido  $-x$ , escreva a equação da onda. Considere a fonte em  $x = 0$  e o deslocamento nulo em  $x = 0$  quando  $t = 0$  também é zero.

**18P.** A pressão em uma onda sonora progressiva é dada pela equação

$$\Delta p = (1,5 \text{ Pa}) \text{ sen } \pi[(1,00 \text{ m}^{-1})x - (330 \text{ s}^{-1})t].$$

Encontre (a) a amplitude da pressão, (b) a frequência, (c) o comprimento de onda e (d) a velocidade da onda.

**19P.** Duas ondas sonoras, originárias de duas fontes diferentes e com a mesma frequência, 540 Hz, viajam à velocidade de 330 m/s. As fontes estão em fase. Qual a diferença entre as fases das ondas em um ponto que dista 4,40 m de uma fonte e 4,00 m da outra. As ondas se propagam na mesma direção.

**20P.** Em um certo ponto no espaço, duas ondas produzem variações de pressão dadas por

$$\Delta p_1 = \Delta p_m \text{ sen } \omega t,$$

$$\Delta p_2 = \Delta p_m \text{ sen } (\omega t - \phi).$$

Qual é a amplitude de pressão da onda resultante nesse ponto, quando  $\phi = 0$ ,  $\phi = \pi/2$ ,  $\phi = \pi/3$  e  $\phi = \pi/4$ ?

**21P.** Na Fig. 18-25, dois alto-falantes, separados por uma distância de 2,00 m, estão em fase. Supondo que a amplitude dos sons dos dois seja, de modo aproximado, a mesma na posição do ouvinte, que está a 3,75 m diretamente à frente de um dos alto-falantes. (a) Para quais frequências audíveis (20-20.000 Hz) existe um sinal mínimo? (b) Para quais frequências o som fica ao máximo?

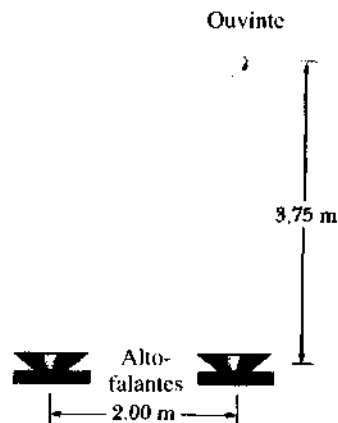


Fig. 18-25 Problema 21.

**22P.** Dois alto-falantes estão localizados a 11,0 ft de altura em um auditório. Um ouvinte está sentado a 60,0 ft de um e a 64,0 ft do outro. Um gerador de sinais coloca os dois alto-falantes em fase com as mesmas amplitude e frequência. Esta está dentro do intervalo audível (20-20.000 Hz). (a) Quais as três mais baixas frequências para as quais o ouvinte irá ouvir um sinal mínimo, devido à interferência destrutiva? (b) Quais as três mais baixas frequências para as quais o ouvinte irá ouvir um sinal máximo?

**23P.** Duas fontes pontuais de ondas sonoras, de comprimentos de onda  $\lambda$  e amplitude idênticos, estão separados por uma distância  $D = 2,0 \lambda$ . As fontes estão em fase. (a) Quantos pontos de sinal máximo (interferência construtiva) existem em um grande círculo, em torno das fontes? (b) Quantos pontos existem de sinal mínimo (interferência destrutiva)?

**24P.** Uma onda sonora de comprimento de onda 40,0 cm entra no tubo mostrado na Fig. 18-26. Qual deve ser o menor raio  $r$ , de modo que um mínimo seja registrado pelo detector?



Fig. 18-26 Problema 24.

**25P.** Na Fig. 18-27, uma fonte pontual  $F$  de ondas sonoras está próxima a um muro refletor  $AB$ . Um detector  $D$  intercepta o raio sonoro  $R_1$ , vindo diretamente de  $F$ . Também intercepta o raio sonoro  $R_2$ , que foi refletido pelo muro com um ângulo de incidência  $\theta_1$  igual ao ângulo de reflexão  $\theta_2$ . Encontre as duas frequências para as quais existe interferência construtiva entre  $R_1$  e  $R_2$  em  $D$ . (A reflexão do som no muro não altera a fase da onda sonora.)

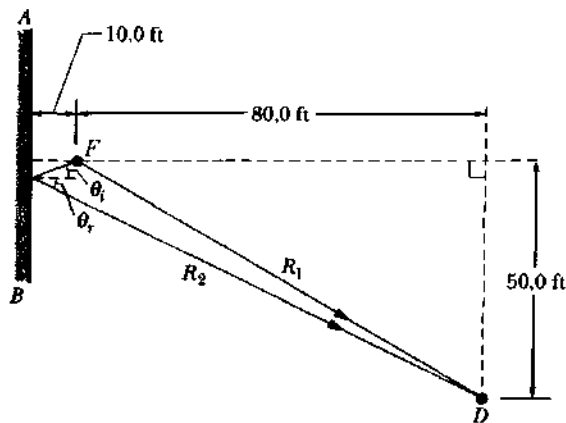


Fig. 18-27 Problema 25.

**26P\***. Duas fontes pontuais, separadas por uma distância de 5,00 m, emitem ondas sonoras à mesma amplitude e frequência (300 Hz), mas estão exatamente fora de fase. Em quais pontos da linha entre as fontes, as ondas sonoras provocam uma oscilação máxima das moléculas de ar? (*Sugestão*: Um desses pontos se localiza no meio da distância entre as fontes. Você pode ver por quê?)

#### Seção 18-4 Intensidade e Nível do Som

**27E**. Ondas sonoras esféricas são emitidas de uma fonte de 1,0 W. Supondo que a energia das ondas se conserva, qual a intensidade (a) a 1,0 m da fonte e (b) a 2,5 m?

**28E**. Uma fonte emite ondas sonoras isotropicamente (isto é, com igual intensidade em todas as direções). A intensidade das ondas, a 2,50 m da fonte, é de  $1,91 \times 10^{-4} \text{ W/m}^2$ . Supondo que a energia das ondas se conserva, qual a potência da fonte?

**29E**. Uma nota de frequência 300 Hz tem uma intensidade de  $1,00 \mu\text{W/m}^2$ . Qual a amplitude das oscilações do ar, causadas por este som?

**30E**. Dois sons diferem em nível por 1,00 dB. Qual a razão entre a maior e a menor intensidades?

**31E**. Um certo nível de som é aumentado em 30 dB. Por que número ficam multiplicadas (a) sua intensidade e (b) sua amplitude?

**32E**. Um vendedor diz que um aparelho de som estéreo tem uma potência máxima de 120 W. Testando o aparelho com todos os alto-falantes ligados, de modo a simular uma fonte pontual, o consumidor nota que pode chegar até 1,2 m próximo do aparelho com o volume máximo, antes que o som fira seus ouvidos. O que o consumidor pode dizer acerca das afirmações do vendedor?

**33E**. Um certo alto-falante produz um som com frequência de 2.000 Hz e uma intensidade de  $0,960 \text{ mW/m}^2$  à distância de 6,10 m. Supondo que não há reflexões e que o alto-falante emite igualmente em todas as direções. (a) Qual é a intensidade a 30,0 m? (b) Qual a amplitude de deslocamento a 6,10 m? (c) Qual a amplitude da pressão a 6,10 m?

**34E**. Uma fonte de ondas sonoras tem uma potência de  $1,00 \mu\text{W}$ . Se for uma fonte pontual (a) Qual a intensidade a 3,00 m de distância e (b) qual o nível de som em decibéis a essa distância?

**35E**. (a) Se duas ondas sonoras, uma no ar e outra em água (doce), têm a mesma intensidade, qual a razão entre a amplitude de pressão da onda na água e no ar? Suponha que a água e o ar estão a  $20^\circ\text{C}$ . (Veja Tabela 16-1). (b) Se as amplitudes de pressão forem iguais, ao invés da intensidade, qual seria então a razão entre as intensidades?

**36P**. (a) Mostre que a intensidade  $I$  de uma onda é o produto da energia da onda por unidade de volume  $u$  e sua velocidade  $v$ . (b) Ondas de rádio viajam à velocidade de  $3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$ . Encontre  $u$  para uma onda de rádio distando 480 km de uma fonte de potência 50.000 W, considerando as ondas esféricas.

**37P**. Uma fonte linear de som (por exemplo, um trem de carga barulhento se deslocando num trilho retilíneo) emite uma onda sonora cilíndrica que se expande. Supondo que o ar não absorve energia, encontre como (a) a intensidade  $I$  e (b) a amplitude  $s_m$  da onda dependem da distância  $r$ , medida perpendicularmente à fonte.

**38P**. Uma onda sonora se propaga, de maneira uniforme, em todas as direções, emitida por uma fonte pontual. (a) Justifique a seguinte expressão para o deslocamento  $s$  do meio a qualquer distância  $r$  da fonte:

$$s = \frac{Y}{r} \sin k(r - vt).$$

Considere a velocidade, a direção de propagação, a periodicidade e a intensidade da onda. (b) Quais as dimensões da constante  $Y$ ?

**39P**. Encontre as razões das (a) intensidades, (b) amplitudes de pressão e (c) amplitudes de deslocamento de partículas para dois sons cujos níveis diferem por 37 dB.

**40P**. A uma distância de 10 km, um berrante de 100 Hz, considerado como uma fonte pontual, é ouvido muito baixo. A que distância começará a causar dor nos ouvidos?

**41P**. Você está parado a uma distância  $D$  de uma fonte que emite ondas sonoras, de forma igual, em todas as direções. Caminha 50,0 m em direção à fonte e observa que a intensidade das ondas foi dobrada. Calcule a distância  $D$ .

**42P**. Um certo alto-falante (considerado uma fonte pontual) emite 30,0 W de potência de som. Um pequeno microfone com uma área efetiva de  $0,750 \text{ cm}^2$  está localizado a 200 m do alto-falante. Calcule (a) a intensidade do som no microfone e (b) a potência interceptada pelo microfone.

**43P**. Em um teste, um jato subsônico voa a uma altitude de 100 m. A intensidade do som no solo, quando o jato passa exatamente acima, é de 150 dB. A que altitude o jato precisa voar para que o ruído no solo não ultrapasse 120 dB, o limite da sensação dolorosa? Ignore o tempo necessário para o som alcançar o chão.

**44P**. Um engenheiro de som construiu um alto-falante esférico que emite som isotropicamente (a mesma intensidade em todas as direções). O aparelho emite 10 W de potência acústica dentro de uma sala totalmente absorvente (paredes, chão e teto), uma câmara anecoica. (a) Qual a intensidade ( $\text{W/m}^2$ ) das ondas sonoras a 3,0 m do centro da fonte? (b) Qual a relação entre a amplitude das ondas a 4,0 m e a 3,0 m do centro da fonte?

**45P**. A Fig. 18-28 mostra um interferômetro acústico, cheio de ar, usado para demonstrar a interferência de ondas sonoras.  $F$  é um diafragma;  $D$  é um detector de som, como nosso ouvido ou um microfone. O comprimento  $FBD$  pode ser variado, enquanto o comprimento  $FAD$  é fixo. Em  $D$ , a onda sonora vinda de  $FBD$  interfere com a vinda de  $FAD$ . A intensidade do som em  $D$  tem um valor mínimo de 100 unidades em uma certa posição de  $B$  e cresce, de maneira contínua, até um valor máximo de 900 unidades quando  $B$  é deslocado de 1,65 cm. Encontre (a) a frequência do som emitido pela fonte e (b) a razão que a amplitude da onda de  $FAD$  tem com a amplitude da onda de  $FBD$  em  $D$ . (c) Como podem essas ondas terem diferentes amplitudes, se foram originadas pela mesma fonte  $F$ ?

**46P\***. Dois alto-falantes,  $F_1$  e  $F_2$ , estão a 7,0 m um do outro e oscilam em fase, cada um emitindo som na frequência de 200 Hz, de modo uniforme, em todas as direções.  $F_1$  emite a uma potência de  $1,2 \times 10^{-3}$  W e  $F_2$  a  $1,8 \times 10^{-3}$  W. Seja um ponto  $P$ , que está a 4,0 m de  $F_1$  e 3,0 m de  $F_2$ . (a) Como as fases das duas ondas passando por  $P$  se relacionam? (b) Qual a intensidade do som em  $P$  com  $F_1$  e  $F_2$  ligadas? (c) Qual a intensidade do som em  $P$ , se  $F_1$  está desligado ( $F_2$  ligado)? (d) Qual a intensidade do som em  $P$ , se  $F_2$  está desligado ( $F_1$  ligado)?

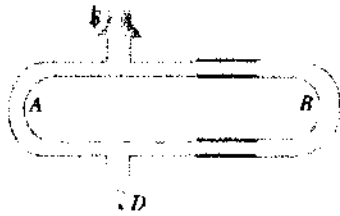


Fig. 18-28 Problema 45.

**47P\***. Um grande refletor parabólico, que tem um raio de abertura circular de 0,50 m, é usado para focalizar sons. Se a energia for liberada do foco para o ouvido de um detetive, através de um tubo de diâmetro 1,0 cm com 12% de eficiência, a que distância uma conversa sussurrada poderá ser ouvida de modo claro? (Considere o nível de som de uma conversa sussurrada como sendo de 20 dB a 1,0 m da fonte, considerada pontual, e o mínimo para escuta como 0 dB.)

**Seção 18-5 Fontes Sonoras Musicais**

**48E.** Uma onda sonora de frequência 1.000 Hz, se propagando através do ar, tem uma amplitude de pressão de 10,0 Pa. Qual é (a) o comprimento de onda, (b) a amplitude de deslocamento da partícula e (c) a velocidade máxima da partícula? (d) Um tubo de um órgão, aberto nas duas extremidades, tem essa frequência como fundamental. Qual o comprimento do tubo?

**49E.** Na Fig. 18-29, um bastão  $R$  está fixado pelo seu centro; um disco  $D$ , preso a um extremo do bastão, está dentro de um tubo de vidro que tem pedaços de cortiça enfileirados em seu interior. Um êmbolo  $P$  é colocado no outro extremo. Fazemos então o bastão oscilar, longitudinalmente, à frequência  $f$  para produzir ondas sonoras dentro do tubo, e o êmbolo  $P$  é ajustado até que uma onda estacionária seja conseguida no interior do tubo. Quando isto acontece, os pedaços de cortiça se acumulam nas regiões correspondentes aos nós das ondas produzidas naquele interior. Mostre que, se  $d$  é a distância média entre os pontos de acumulação, a velocidade do som  $v$  no gás, dentro do tubo, é dada por

$$v = 2fd.$$

Este é o método de Kundt para determinar a velocidade do som nos gases.

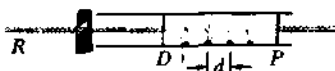


Fig. 18-29 Exercício 49.

**50E.** Uma onda sonora em um meio fluido é refletida em uma barreira, de tal modo que uma onda estacionária é formada. A distância entre os nós é de 3,8 cm e a velocidade de propagação é de 1.500 m/s. Encontre a frequência.

**51E.** Uma corda de violino de 15,0 cm, presa em ambas as extremidades, oscila em seu modo  $n = 1$ . A velocidade das ondas na corda é de 250 m/s e a velocidade do som no ar é de 348 m/s. Qual é (a) a frequência e (b) o comprimento de onda da onda emitida?

**52E.** (a) Encontre a velocidade das ondas em uma corda de violino de 800 mg e medindo 22,0 cm, sendo a frequência fundamental de 920 Hz. (b) Qual a tensão na corda? Para a fundamental, qual o comprimento de onda das (c) ondas na corda e (d) ondas emitidas pela corda?

**53E.** Uma corda de violino, oscilando em seu modo fundamental, gera uma onda sonora com comprimento de onda  $\lambda$ . Por qual número devemos multiplicar a tensão para que a corda, ainda oscilando em seu modo fundamental, emita uma nova onda sonora com comprimento de onda  $\lambda/2$ ?

**54E.** Um tubo de um órgão  $A$ , com as duas extremidades abertas, tem uma frequência fundamental de 300 Hz. O terceiro harmônico de um órgão  $B$ , com uma extremidade aberta, tem a mesma frequência que o segundo harmônico do  $A$ . Qual o comprimento (a) do tubo do órgão  $A$  e (b) do  $B$ ?

**55E.** O nível de água em um tubo vertical de vidro com 1,00 m de comprimento pode ser ajustado em qualquer posição. Um diapasão vibrando a 686 Hz é colocado junto à extremidade aberta do tubo. Em quais posições da água irá haver ressonância?

**56P.** Uma certa corda de violino tem 30 cm de comprimento, está fixa nas suas duas extremidades e tem massa de 2,0 g. A corda emite uma nota  $A$  (440 Hz), quando tocada sem se colocar o dedo. (a) Onde se deve colocar o dedo para que a corda passe a emitir uma nota  $C$  (523 Hz)? (b) Qual a razão entre o comprimento de onda da onda da corda necessário para uma nota  $A$  e para uma  $C$ ? (c) Qual a razão entre o comprimento de onda da onda sonora, quando é tocada uma nota  $A$  e uma  $B$ ?

**57P.** Uma corda de um violoncelo tem comprimento  $L$ , para o qual a frequência fundamental é  $f$ . (a) De qual comprimento  $l$  precisa a corda ser diminuída com o dedo, para mudar a frequência fundamental para  $rf$ ? (b) Qual o valor de  $l$  para  $L = 0,80$  m e  $r = 6/5$ ? (c) Para  $r = 6/5$ , qual a razão entre o comprimento de onda da nova onda sonora emitida pela corda e a emitida antes da colocação do dedo?

**58P.** Na Fig. 18-30,  $F$  é um pequeno alto-falante conectado a um oscilador de áudio e a um amplificador, e ajustável a frequências entre 1.000 e 2.000 Hz somente. O tubo  $D$  é uma peça cilíndrica de metal de 18,0 in de comprimento e aberto em ambas as extremidades. (a) Se a velocidade do som no ar é de 1.130 ft/s à temperatura ambiente, em que frequências irá ocorrer ressonância, quando a emitida pelo alto-falante variar entre 1.000 e 2.000 Hz? (b) Faça um esboço das ondas estacionárias (usando a convenção da Fig. 18-12b) para cada frequência ressonante.



Fig. 18-30 Problema 58.

**59P.** A menor frequência com que um poço com lados verticais e água no fundo entra em ressonância é 7,00 Hz. O ar no poço tem uma densidade de 1,10 kg/m<sup>3</sup> e um módulo de elasticidade volumar de  $1,33 \times 10^9$  Pa. Qual a profundidade do poço?

**60P.** Uma palma no palco de um anfiteatro (Fig. 18-31) produz ondas sonoras que se dispersam em uma arquibancada com degraus de largura  $L = 0,75$  m. O som retorna ao palco como uma série de pulsos periódicos, um de cada degrau; os pulsos soam juntos como uma nota. A que frequência os pulsos retornarão (isto é, qual a frequência da nota percebida)?

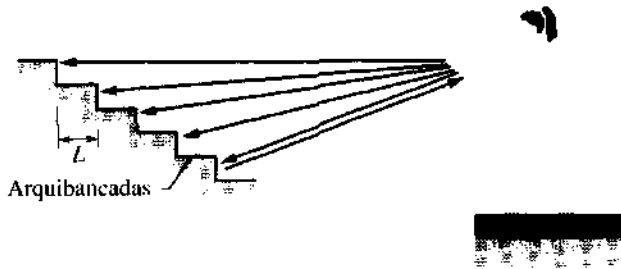


Fig. 18-31 Problema 60.

**61P.** Um tubo de comprimento 1,20 m é fechado em uma extremidade. Um arame esticado é posto próximo à extremidade aberta. O arame tem 0,330 m de comprimento e uma massa de 9,60 g. Ele é fixo nas duas extremidades e vibra em seu modo fundamental, produzindo uma oscilação na coluna de ar dentro do tubo com essa frequência fundamental, devido à ressonância. Encontre (a) a frequência da oscilação da coluna de ar e (b) a tensão no arame.

**62P.** O período de pulsação de uma estrela pode ser estimado, considerando que ela esteja executando pulsações longitudinais *radiais* em um modo fundamental de onda estacionária; isto é, o raio da estrela varia periodicamente com o tempo, com um ventre de deslocamento na superfície da estrela. (a) Você pode esperar que o centro da estrela seja um nó ou ventre? (b) Por analogia com um tubo com uma extremidade aberta, mostre que o período da pulsação é dado por

$$T = \frac{4R}{v},$$

onde  $R$  é o raio de equilíbrio da estrela e  $v$  é a velocidade média do som. (c) Estrelas anãs brancas típicas são compostas por um material com módulo de elasticidade volumar de  $1,33 \times 10^{22}$  Pa e uma densidade de  $10^{10}$  kg/m<sup>3</sup>. Elas têm raios da ordem de  $9,0 \times 10^{-1}$  raios solares. Qual o período de pulsação aproximado de uma anã branca?

**63P.** Uma corda de violino de 30,0 cm de comprimento com densidade linear de 0,650 g/m é colocada próxima de um alto-falante, que está conectado a um oscilador de áudio de frequência variável. Descobre-se que a corda oscila somente nas frequências 880 e 1.320 Hz, quando a frequência do oscilador varia entre 500 e 1.500 Hz. Qual a tensão na corda?

**Seção 18-6 Batimentos**

**64E.** Um diapasão de frequência desconhecida produz três batimentos por segundo com um diapasão vibrando à frequência de 384 Hz. A frequência de batimento diminui quando um pequeno pedaço de parafina é colocado em um ramo do primeiro diapasão. Qual a frequência do diapasão inicial?

**65E.** A corda A de um violino está frouxa. Quatro batimentos por segundo são ouvidos, quando a corda é tocada junto a um diapasão, cuja frequência corresponde à nota A (440 Hz). Qual o período da oscilação da corda do violino?

**66E.** Você tem quatro diapasões. O que tem a frequência mais baixa oscila a 500 Hz. Oscilando dois diapasões, ao mesmo tempo, as seguin-

tes frequências são ouvidas: 1, 2, 3, 5, 7 e 8 Hz. Quais as possíveis frequências dos outros três diapasões?

**67P.** Duas cordas de piano idênticas têm uma frequência fundamental de 600 Hz, quando colocadas sob uma mesma tensão. Que aumento fracionário na tensão de uma corda irá levar à ocorrência de 6 batimentos, quando as cordas oscilarem juntas?

**68P.** Você tem cinco diapasões que oscilam a diferentes frequências. Usando os diapasões em duplas, qual é (a) o máximo e (b) o mínimo número de diferentes frequências de batimentos que você pode produzir?

**Seção 18-7 O Efeito Doppler**

**69E.** Uma fonte  $F$  gera ondas circulares na superfície de um lago (as ondas são mostradas na Fig. 18-32). A velocidade das ondas é de 5,5 m/s e a distância de crista a crista de 2,3 m. Você está em um pequeno bote, se dirigindo diretamente para  $F$  com velocidade constante de 3,3 m/s em relação à costa. Qual a frequência das ondas que você observa?

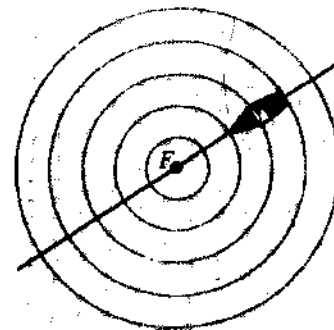


Fig. 18-32 Exercício 69.

**70E.** Um policial  $B$  está perseguindo um corredor  $A$  por uma estrada estreita. Ambos se movem à velocidade de 100 mi/h. O policial  $B$ , não conseguindo alcançar o corredor, toca sua sirene novamente. Considere a velocidade do som no ar como sendo 1.100 ft/s e a frequência da fonte como sendo 500 Hz. Qual a mudança Doppler na frequência ouvida pelo corredor  $A$ ?

**71E.** Um apito usado para chamar cães tem uma frequência de 30 kHz. O cão, entretanto, o ignora. O dono do cão, que não pode escutar frequências acima de 20 kHz, decide usar o efeito Doppler para descobrir se o apito funciona de maneira adequada. Pede a um amigo que sobre o apito no interior de um carro em movimento, enquanto ele permanece parado ouvindo. (a) Qual precisa ser a velocidade do carro e qual a direção para que o dono do cão escute o apito a 20 kHz (se ele estiver funcionando)? O experimento em questão é prático? (b) Refaça para uma frequência do apito igual a 22 kHz, em vez de 30 kHz.

**72E.** O ruído de 16.000 Hz das turbinas de um avião, deslocando-se a 200 m/s, é ouvido com que frequência pelo piloto de um segundo avião, tentando ultrapassar o primeiro a uma velocidade de 250 m/s?

**73E.** Uma ambulância tocando sua sirene a 1.600 Hz ultrapassa um ciclista, que estava pedalando a 8,00 ft/s. Depois da ambulância ultrapassá-lo, o ciclista escuta a sirene a 1.590 Hz. Qual a velocidade da ambulância?

**74E.** Um apito de frequência 540 Hz se move em uma trajetória circular de raio 2,00 ft com uma velocidade angular de 15,0 rad/s. Quais são (a) a menor e (b) a maior frequências ouvidas por um ouvinte a uma grande distância e em repouso, em relação ao centro do círculo?

**75E.** Em 1845, Buys Ballot testou pela primeira vez o efeito Doppler para o som. Ele colocou um tocador de trompete em um vagão aberto puxado por uma locomotiva e outro próximo aos trilhos. Se cada músico tocasse uma nota a 440 Hz e existissem 4,0 batimentos/s, enquanto se aproximavam, qual a velocidade do vagão?

**76E.** Qual a velocidade do projétil da Fig. 18-22, supondo que a velocidade do som no gás, pelo qual o projétil se move, é de 380 m/s?

**77E.** A velocidade da luz na água é cerca de três quartos da velocidade da luz no vácuo. Uma emissão de elétrons de um betatron à alta velocidade, produz radiação Cerenkov na água; a frente de onda desta luz forma um cone cujo ângulo vale  $60^\circ$ . Encontre a velocidade dos elétrons na água.

**78E.** Uma bala é disparada com velocidade de 2.200 ft/s. Encontre o ângulo feito pelo cone de choque com a linha de movimento da bala.

**79P.** Dois diapasões idênticos podem oscilar a 440 Hz. Uma pessoa está localizada em algum lugar na linha entre os dois diapasões. Calcule a frequência de batimentos captada por esse indivíduo se (a) permanece parado e os diapasões se movem para a direita, a 30 m/s, e (b) os diapasões estiverem parados e o indivíduo se movendo para a direita a 30 m/s.

**80P.** Um avião voa a  $5/4$  da velocidade do som. A explosão sônica alcança um homem no solo exatamente 1 min depois do avião ter passado sobre a sua cabeça. Qual a altitude do avião? Considere a velocidade do som como 330 m/s.

**81P.** Um avião passa exatamente sobre um ponto à altura de 5.000 m e à velocidade de Mach 1,5. (a) Encontre o ângulo do cone de Mach. (b) Quanto tempo, após o avião ter passado por esse ponto, a onda de choque alcança o chão? Considere a velocidade do som como 331 m/s.

**82P.** A Fig. 18-33 mostra um transmissor e um receptor de ondas contidos em um único instrumento. Ele é usado para medir a velocidade  $u$  de um objeto (idealizado por uma lâmina lisa) que se move diretamente na direção do instrumento, analisando as ondas refletidas no alvo. (a) Mostre que a frequência  $f_r$  das ondas refletidas ao receptor, se relaciona com a frequência emitida  $f_s$  por

$$f_r = f_s \left( \frac{v + u}{v - u} \right),$$

onde  $v$  é a velocidade das ondas. (b) Em muitas situações práticas,  $u \ll v$ . Neste caso, mostre que a equação acima se torna

$$\frac{f_r - f_s}{f_s} \approx \frac{2u}{v}.$$

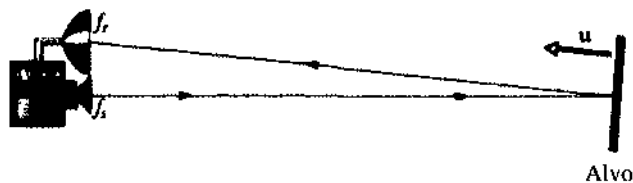


Fig. 18-33 Problema 82.

**83P.** Um detector de movimento, em repouso, envia ondas sonoras de 0,150 MHz na direção de um caminhão que se aproxima a 45,0 m/s. Qual a frequência das ondas refletidas de volta ao detector?

**84P.** Um alarme contra roubo acústico consiste em uma fonte que emite ondas à frequência de 28,0 kHz. Qual será a frequência dos batimen-

tos refletidos por um intruso andando a uma velocidade média de 0,950 m/s, na direção oposta ao alarme?

**85P.** Uma sirene emitindo um som à frequência de 1.000 Hz se distancia de você, em direção a um muro, à velocidade de 10 m/s. Considere a velocidade do som no ar como 330 m/s. (a) Qual a frequência do som que você escuta vindo diretamente da sirene? (b) Qual a frequência do som que escuta refletido pelo muro? (c) Qual a frequência de batimentos entre os dois sons? Ela é perceptível (para isto, deve ser menor do que 20 Hz)?

**86P.** Uma pessoa, em um vagão numa estrada de ferro, toca um trompete a 440 Hz. O vagão se move na direção de um muro a 20,0 m/s. Calcule (a) a frequência do som recebido no muro e (b) a frequência do som refletido de volta para o vagão.

**87P.** Um submarino francês e um americano se movem, um na direção do outro, durante manobras em águas paradas no Atlântico Norte (Fig. 18-34). A velocidade do submarino francês é 50 km/h e a do americano, 70 km/h. O primeiro manda um sinal de sonar (onda sonora na água) a 1.000 Hz. As ondas do sonar viajam a 5.470 km/h. (a) Qual a frequência do sinal detectado pelo submarino americano? (b) Que frequência é detectada pelo submarino francês, no sinal que é recebido de volta, após refletir no outro?

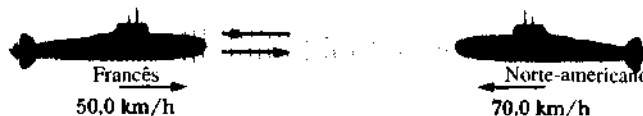


Fig. 18-34 Problema 87.

**88P.** Uma fonte de ondas sonoras, à frequência de 1.200 Hz, se move para a direita com a velocidade de 98,0 ft/s, relativa ao ar. Acima dela, está uma superfície refletora se movendo para a esquerda com a velocidade de 216 ft/s, relativa ao ar. Considere a velocidade do som no ar como 1.080 ft/s e encontre (a) o comprimento de onda do som emitido na direção do refletor pela fonte, (b) o número de ondas, por segundo, chegando à superfície refletora, (c) a velocidade das ondas refletidas, (d) o comprimento de onda das ondas refletidas e (e) o número de ondas, refletidas por segundo, que alcançam a fonte.

**89P.** Em uma discussão sobre deslocamentos Doppler de ondas ultra-sônicas, usados em diagnósticos médicos, o autor comenta: "Para cada milímetro por segundo que uma estrutura do corpo se move, a frequência das ondas ultra-sônicas incidentes sofre uma variação de, aproximadamente, 1,30 Hz/MHz." Que velocidade de ondas ultra-sônicas em tecidos você deduz, a partir dessa afirmativa?

**90P.** Um morcego está voando em uma caverna, orientando-se com o auxílio dos pulsos ultra-sônicos que emite. Suponha que a frequência do som emitido pelo morcego é de 39.000 Hz. Durante um rasante rápido, sobre a superfície lisa de uma parede, o morcego se move a  $1/40$  da velocidade do som no ar. Que frequência o morcego ouve, quando recebe a onda refletida pela parede?

**91P.** Um submarino próximo à superfície da água se move para norte, à velocidade de 75,0 km/h em uma corrente, que também se move para o norte com velocidade de 30,0 km/h, onde ambas as velocidades são relativas ao fundo do oceano. O submarino emite um sinal de sonar (onda sonora) de frequência  $f = 1.000$  Hz e velocidade de 5.470 km/h, que é detectada por um contratorpedeiro ao norte do submarino. Qual a diferença entre a frequência detectada e  $f$ , se o contratorpedeiro (a) viaja a favor da corrente a 30,0 km/h e (b) está parado em relação ao fundo do oceano?



**92P.** Uma sirene de 2.000 Hz e um oficial da defesa civil estão em repouso em relação à Terra. Que frequência o oficial irá ouvir, se o vento estiver soprando a 12 m/s (a) da fonte para o observador e (b) do observador para a fonte?

**93P.** Dois trens estão viajando, um na direção do outro, a 100 ft/s com relação ao solo. Um trem está tocando o apito a 500 Hz. (a) Que frequência será ouvida no outro trem, sem ventos? (b) Que frequência será ouvida no outro trem, com ventos de 100 ft/s na direção do apito? (c) Que frequência será ouvida, se o vento estiver à mesma velocidade, mas em sentido contrário?

**94P.** Uma menina está sentada próxima a uma janela aberta de um trem, que está se movendo a uma velocidade de 10,00 m/s para o leste. A tia da menina está próxima aos trilhos, observando o trem partir. O apito da locomotiva emite um som à frequência de 500,0 Hz. Não há ventos. (a) Que frequência a tia da menina irá ouvir? (b) Que frequência a menina irá ouvir? (c) Com um vento soprando para oeste a 10,00 m/s, que frequência a tia da menina irá ouvir? (d) E a menina?

### Seção 18-8 O Efeito Doppler para a Luz

**95E.** O ponto brilhante no centro da Fig. 18-35a é uma galáxia da constelação Corona Borealis; a galáxia está  $1,3 \times 10^8$  anos-luz de distância. Na Fig. 18-35b, a linha central é o espectro da luz (mostrando a distribuição em comprimentos de onda) vinda da galáxia. As duas linhas verticais mais intensas denotam a presença de cálcio. A seta horizontal mostra que estas linhas de cálcio ocorrem em comprimentos de onda maiores do que os da luz terrestre, originária de fontes que contêm cálcio,



Fig. 18-35 Problema 95.

cio, e o comprimento da seta representa o deslocamento no comprimento de onda. Medidas anteriores indicaram que essa galáxia está se afastando de nós a  $2,2 \times 10^4$  km/s. Calcule o deslocamento fracionário nos comprimentos de onda das linhas de cálcio mostradas acima.

**96E.** Certos comprimentos de onda, característicos na luz vinda de uma galáxia na constelação de Virgem, são 0,4% maiores do que a luz correspondente de fontes terrestres. Qual a velocidade radial dessa galáxia com respeito à Terra? Ela está se aproximando ou se afastando?

**97E.** Em um “deslocamento para o vermelho” da radiação de uma galáxia distante, a luz correspondente à raia H $\alpha$ , conhecida por ter um comprimento de onda de 434 nm, quando observada em laboratório, aparece com 462 nm. (a) Qual a velocidade da galáxia na linha de visada que contém a Terra? (b) A galáxia está se aproximando ou se afastando?

**98E.** Supondo que a Eq. 18-55 é válida, encontre a rapidez com que você precisa se deslocar na direção de uma luz vermelha, para que ela pareça verde. Use 620 nm como o comprimento de onda da luz vermelha e 540 nm como o da luz verde.

**99P.** O período de rotação do Sol no seu equador é de 24,7 d e seu raio é de  $7,00 \times 10^5$  km. Que deslocamento Doppler no comprimento de onda é esperado para a luz de 550 nm, emitida da superfície do Sol?

**100P.** Um satélite terrestre, transmitindo em uma frequência de 40 MHz (exatamente), passa sobre uma estação receptora de rádio, a uma altitude de 400 km e uma velocidade de  $3,0 \times 10^4$  km/h. Descreva a mudança em frequência atribuída ao efeito Doppler como uma função do tempo, colocando  $t = 0$ , no momento em que o satélite está sobre a estação. (Sugestão: A velocidade  $u$  na fórmula do efeito Doppler não é a velocidade real do satélite, mas a sua componente na direção da estação. Não considere a curvatura da Terra e da órbita do satélite.)

**101P.** Microondas, que viajam à velocidade da luz, são refletidas por um avião distante, que está se aproximando da fonte. Sabe-se que, quando as ondas refletidas se cruzam com as emitidas, a frequência dos batimentos é de 990 Hz. Se as microondas têm 0,100 m de comprimento de onda, qual a velocidade aproximada do avião?

# Acústica de Salas de Concerto: Ciência ou Arte?

JOHN S. RIGDEN  
INSTITUTO AMERICANO DE FÍSICA

Ao crepúsculo de 18 de outubro de 1976, membros da Orquestra Filarmônica de New York afinaram seus instrumentos e prepararam-se para um concerto fora do comum. O local era o Lincoln Center's Avery Fisher Hall, um novo nome para uma sala de concertos com um passado conturbado.

O Philharmonic Hall abriu em 1962, cercado de grandes expectativas (Fig. 1). Um dos maiores especialistas em acústica dos Estados Unidos, Leo L. Beranek, havia trabalhado com o arquiteto que desenhou o auditório. Mas, desde o começo, houve problemas: músicos no palco não podiam ouvir as outras partes da orquestra; os graves soavam fracos para as pessoas na platéia; ecos do fundo do auditório podiam ser ouvidos; os maestros não podiam ouvir o que toda a orquestra estava tocando. Por

todo o período entre 1964 e 1972, muitas tentativas foram feitas para resolver a situação, mas todas falharam.

Em dezembro de 1974, Cyril M. Harris, um especialista em acústica da Columbia University, foi chamado para redesenhar a sala. Harris ficou muito relutante, inicialmente, mas acabou aceitando, sob as seguintes condições: primeiro, o interior da sala precisava ser demolido até as pilastras; segundo, a acústica teria precedência sobre a estética; terceiro, Philip Johnson seria o arquiteto. Estas condições foram garantidas e o trabalho começou em maio de 1976, imediatamente após o concerto de final de temporada da filarmônica.

Como a sala precisava estar pronta para a próxima apresentação da filarmônica, o trabalho atravessou o verão de 1976 a todo vapor. Harris, usando um capacete, acompanhava de perto todo o trabalho. Tudo deveria ficar pronto para o espetáculo de 19 de outubro, mas em 18 de outubro um concerto especial foi executado na nova sala. Foi diferente porque o auditório era constituído por pessoas diferentes: os trabalhadores da construção, empreiteiros, subempreiteiros e arquitetos que trabalharam durante todo o verão com afino e devoção. Os críticos de música não eram esperados, mas vieram. Quando a orquestra terminou o quarto movimento da *Nona Sinfonia* de Mahler, os críticos estavam impressionados; os músicos se deliciavam com a apresentação e os trabalhadores estavam felizes e orgulhosos.

## Melhorando a Acústica da Sala de Concertos

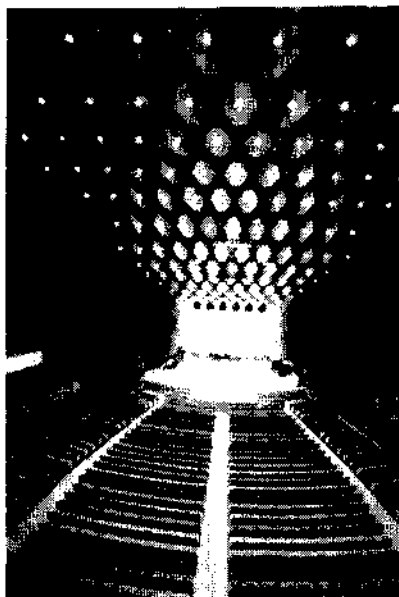
Isaac Stern é um violinista de renome internacional. Assim, quando ele comparece ao palco de uma sala de concertos, a própria sala se torna um instrumento adicional, que ele usa para realizar performances musicais de maneira surpreendente. Uma sala de concertos não é uma construção passiva na qual músicos tocam seus instrumentos; ao invés disso, é uma participante ativa que ajuda a comunicar as interpretações do artista a uma platéia atenta.

As ondas sonoras, que são o elo entre músicos e platéia, carregam energia. Se a fonte do som é uma corda de violino oscilando em sua frequência fundamental e harmônicos superiores, ondas de pressão com a mesma frequência presente na corda são carregadas pelo ar para longe do violino. Estas ondas de pressão longitudinais transmitem energia acústica para longe da fonte.

## LEITURA SUPLEMENTAR 5



*John S. Rigden recebeu seu Ph.D. da Universidade John Hopkins em 1960. Depois de um pós-doutorado na Universidade de Harvard, obteve posições acadêmicas no Eastern Nazarene College, Middlebury College, e na Universidade de Missouri, em Saint Louis. Atualmente, está ausente de seu posto na American Physical Society, onde é o Diretor dos Programas de Física, tendo ingressado na Academia Nacional de Ciências, onde ocupa o cargo de Diretor do Programa de Desenvolvimento Nacional para Ciência e Educação. Foi editor do American Journal of Physics, de 1976 a 1988, e o autor de Physics and the Sound of Music (A Física e a Música) (Wiley, 1977, segunda edição, 1985). Recentemente, escreveu a biografia do grande físico americano I. I. Rabi, Rabi, Cientista e Cidadão (Basic Books, 1987).*



**Fig. 1** O auditório do Philharmonic Hall, no Lincoln Center for the Performing Arts. Esta vista, do balcão, mostra o palco e a orquestra. O Philharmonic Hall foi completado em 1962, às 10:00 da manhã, numa segunda-feira, 28 de maio, com o jovem maestro assistente da Orquestra Filarmônica de New York, Seiji Ozawa, regendo 106 homens e mulheres da orquestra. Quando sua batuta desceu, as seções dos metais e sopros da orquestra tocaram os acordes iniciais da *Terceira Sinfonia* de Brahms.

Uma onda sonora que se aproxima de uma janela aberta, alcançando-a, ultrapassa-a e carrega energia para a região mais adiante. Uma janela aberta é um perfeito absorvente; absorve toda a energia acústica que incide sobre ela. A situação é levemente diferente, quando uma fonte sonora é cercada de superfícies refletoras, como é o caso da sala de concertos: uma onda sonora atinge uma superfície e é refletida de volta para a sala; ela se propaga através desta até encontrar outra superfície e ser novamente refletida; e assim por diante. Se a fonte do som libera energia a uma razão fixa na sala, a intensidade do som cresce rapidamente dentro do espaço fechado, até se aproximar de seu nível de equilíbrio de intensidade. Uma fração da energia incidente é absorvida pela superfície durante cada reflexão; assim, a razão pela qual o nível de som se aproxima do seu valor de equilíbrio depende da natureza dos meios refletoras. O nível de equilíbrio da intensidade é alcançado, quando a razão pela qual a energia é absorvida é igual à razão pela qual a fonte de som fornece energia à sala.

Um ouvinte, em um local fechado, escuta primeiro o som que vem diretamente da fonte. Depois de um intervalo de tempo que chamamos de espaço-de-tempo-inicial, ondas de som refletidas pela primeira vez alcançam o ouvinte. A seguir, chegam ondas após ondas, duplamente refletidas. Dessa maneira, o nível de intensidade cresce até a pessoa estar imersa em sons, vindos de todas as direções, ao nível de equilíbrio. A soma de todas as ondas refletidas é chamada de som reverberante. No nível de equilíbrio, a razão das intensidades do som reverberado e do som direto determina a plenitude do tom percebido, que é uma característica de uma boa sala de concertos. É esse som reverberante, junto com a ausência de sons de interferência, que distingue performances mu-

sicais ouvidas em uma sala de concertos, daquelas ouvidas em grandes parques.

Assim como o som *cresce* até um nível de equilíbrio, também *decrece* deste nível. Se a fonte de som se extingue, o som direto é o primeiro a terminar, e um ouvinte percebe uma abrupta diminuição no nível de som. Então, a taxa de declínio diminui um pouco até que a última onda refletida o alcance. O nível de som cai, de forma exponencial, à medida que ondas múltiplamente refletidas, cada vez mais fracas, chegam ao ouvinte.

### Tempo de Reverberação

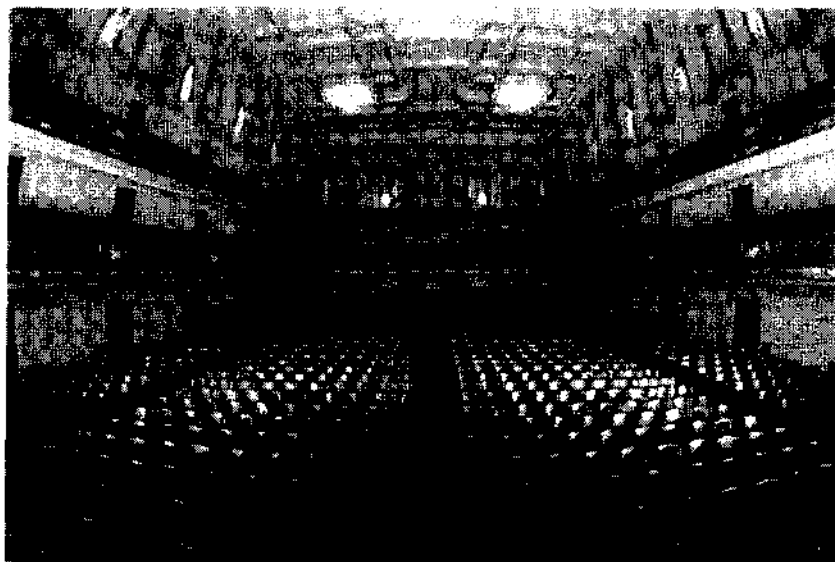
O tempo necessário para o nível de som chegar ao máximo ou diminuir até zero, a partir de seu valor de equilíbrio, é chamado de tempo de reverberação e esta é a mais importante característica de uma sala de concertos. Especificamente, o tempo de reverberação é definido como o necessário para que a intensidade do som (watts por metro<sup>2</sup>) cresça ou decresça por um fator de um milhão. Se o tempo de reverberação é muito curto, as notas musicais são ouvidas isoladas umas das outras e a música é percebida de maneira leve. Se, por outro lado, o tempo de reverberação é muito longo, os sons das notas mais recentes se chocam com os das notas tocadas anteriormente. O tempo de reverberação mais indicado para música sinfônica é cerca de 2 s: o Symphony Hall, em Boston, uma das maiores salas de concerto do mundo, tem um tempo de reverberação de 1,8 s, quando totalmente cheio (Fig. 2); o Musikve-reinssaal, em Viena, outro excelente local, tem um tempo de reverberação de 2,05 s (totalmente cheio).

O tempo de reverberação depende do volume da sala de concertos e da natureza das superfícies refletoras. Quanto maior o volume,

mais tempo leva o som, viajando a cerca de 345 m/s, para percorrer a distância entre as superfícies refletoras e, também, o som reverberante para atingir seu nível de equilíbrio. O volume do Symphony Hall é de 61.496 m<sup>3</sup>. O do Carnegie Hall, em New York, é maior ainda, 79.610 m<sup>3</sup>, mesmo assim, seu tempo de reverberação é de 1,7 s, menor do que o do Symphony Hall de Boston. A diferença é devido à constituição das superfícies refletoras. Quando as superfícies expostas às ondas sonoras são muito absorventes, a taxa de absorção de energia por todas elas, rapidamente se torna igual à de produção de energia de todas as fontes; ou seja, o tempo de reverberação é menor. Desse modo, podemos entender o que Isaac Stern queria dizer, quando falou que o Carnegie Hall é melhor nos ensaios do que nas apresentações. Como as propriedades de absorção de uma pessoa são equivalentes a 0,5 m<sup>2</sup> de uma janela aberta, o tempo de reverberação da sala de concertos é maior quando ela está vazia. (Este é o motivo por que os tempos de reverberação são medidos com a casa cheia. É também o motivo por que a maioria das salas de concertos possui armários onde os espectadores podem guardar suas roupas de inverno, que são extremamente absorventes.)

### Mantendo o Ruído Fora da Sala de Concertos

Salas de concertos são localizadas, geralmente, em meio a grandes áreas metropolitanas, nas quais ondas sonoras — barulho! — são onipresentes. Uma sala de concertos precisa isolar o público de qualquer ruído externo: aviões sobrevoando a cidade, viaturas policiais e ambulâncias passando por ruas próximas e metrô trafegando sob o solo. Ondas sonoras externas à sala de concertos irão percorrer to-



**Fig. 2** Symphony Hall, em Boston. Esta sala de concertos, que foi aberta em 1900, foi planejada pelo físico de Harvard, Wallace C. Sabine, um pioneiro na ciência da acústica. Sabine desenvolveu as fundações quantitativas, incluindo uma fórmula empírica para calcular o tempo de reverberação, que é atualmente a alma do “design” acústico. Note todas as irregularidades nas paredes e teto. O Maestro Bruno Walter diz que esta sala é “a mais nobre das salas de concerto americanas”.

dos os caminhos possíveis para alcançar seu interior. Mesmo um buraco de fechadura pode transmitir considerável quantidade de som. As próprias paredes transmitem som. Ondas sonoras de todas as frequências incidem nas paredes externas de uma sala de concertos e as fazem vibrar com suas frequências; as paredes se tornam, na verdade, fontes de ondas sonoras, enviando-as para o interior. Quanto mais largas e densas as paredes forem, maior será o amortecimento das ondas incidentes. Como você já deve ter percebido, tais paredes têm mais tendência a vibrar em baixas frequências que em altas; assim, como ondas sonoras de todas as frequências incidem nas paredes da sala, será às baixas frequências que elas responderão melhor e serão esses tons que serão transmitidos mais facilmente para dentro da sala.

Salas de concertos podem ser aquecidas ou resfriadas. Isto significa que precisa existir maquinaria para esfriar ou aquecer o ar dentro da sala, exaustores para puxar o ar quente e dutos para transportá-lo. Tais equipamentos são fontes de ruído. Todas as máquinas têm de ser instaladas em um cômodo separado; os dutos precisam ser construídos de material absorvente. Bordas retas, juntas irregulares ou umidade nos dutos precisam ser evitados pois podem fazer com que o ar passando se torne turbulento. O ar turbulento produz muitos ruídos.

Um consultor acústico passou por uma situação potencialmente desastrosa envolvendo dutos de passagem de ar. Quando visitou o canteiro de obras, percebeu que os dutos tinham caído alguns centímetros, o suficiente para encostarem nas pilastras. Tal contato entre os dutos e as pilastras da sala de concertos transmitia o ruído dos dutos para a estrutura da construção. Felizmente, o consultor pôde fazer as correções necessárias, antes do término da construção do teto, o que ocultaria o defeito.

Supondo que todos os sons ambientes, de fontes externas e internas, estão a um nível de um quarto de uma casa de fazenda, em uma noite tranquila, um maestro pode usar todo o potencial de uma orquestra, do mais alto *forte fortissimo* ao mais baixo *pianissimo* e mesmo a mais melódica nota pode ser ouvida, distintamente. Assim, mesmo que o tempo de reverberação de uma sala de concertos em total silêncio seja bom, a experiência que o maestro tem em ouvir seus músicos será desafiada, se o *design* acústico da sala for ruim; além disso, os músicos não ficarão satisfeitos, o público ficará desapontado e os diretores das orquestras irão evitar apresentá-las em tal sala em futuros concertos.

Salas de concertos aclamadas por críticos, músicos e público têm diferentes formas (retangular, em forma de leque, ferradura), mas todas mantêm certas qualidades. Grandes salas têm tempos de reverberação entre 1,7 e 2,0 s. Quase tão importante quanto este tempo é a qualidade, chamada intimidade, determinada pelo intervalo de atraso de tempo inicial. Quanto maior este intervalo, menos íntimo é o ambiente musical. Tais intervalos variam de 10 a 70 ms, mas nas melhores salas de concertos são sempre menores que 40 ms.

### Ondas Estacionárias

Podem ser estabelecidas ondas estacionárias em uma sala de concertos. Por exemplo, ondas sonoras podem ser refletidas entre paredes (superfícies refletoras) paralelas. A onda estacionária de mais baixa frequência, a *fundamental*, tem um ventre de pressão em cada parede e um nó no meio; assim, o comprimento de onda é igual ao dobro da distância entre as duas paredes. Múltiplos da frequência fundamental têm nós e ventres adicionais. A configuração nós-

ventres das ondas estacionárias pode, se a onda estacionária é razoavelmente intensa, produzir pontos mortos acústicos e pontos "quentes" acústicos — uma situação indesejável, pois, para uma sala de concerto, a uniformidade é o objetivo. Por essa razão, arquitetos constroem estas salas de modo que as dimensões não sejam múltiplas uma da outra, e paredes paralelas são evitadas. Irregularidades nas paredes e teto não somente diminuem as chances de surgirem ondas estacionárias, como também distribuem as ondas sonoras em todas as direções e contribuem para a difusão do som (Fig. 3).

Salas de concertos são estruturas tridimensionais e as ondas sonoras podem ser refletidas em todas as direções; conseqüentemente, existem centenas de modos normais. Uma única nota tocada por um violino pode excitar centenas de modos normais da sala de concertos; cantores podem explorar os modos normais do local para obter grandes alcances dinâmicos para certas notas. Assim, ondas estacionárias são uma característica importante de uma sala de concertos; a energia sonora, brevemente aprisionada nos muitos modos normais de oscilação, dá uma importante contribuição para o som reverberante.

### Ciência e Arte

Apesar da sempre crescente quantidade de conhecimentos sobre acústica, o primeiro concerto numa nova sala sempre é esperado com ansiedade e apreensão. Isto fez surgir uma questão: a acústica é uma ciência ou uma arte? Os muitos mitos sobre a acústica dessas salas contribuíram para o surgimento da questão. É uma idéia muito difundida a de que a qualidade acústica das salas de concertos aumenta com o passar dos anos (isto não é verdade); há uma tendência em identificar estruturas, como ele-



**Fig. 3** Avery Fisher Hall. Note as irregularidades no teto, que refletem as ondas sonoras em todas as direções; assim, elas fornecem uma excelente superfície de difusão das ondas sonoras. A difusão do som equaliza a sua intensidade por toda a sala de concertos e elimina pontos mortos, focos e ecos problemáticos.

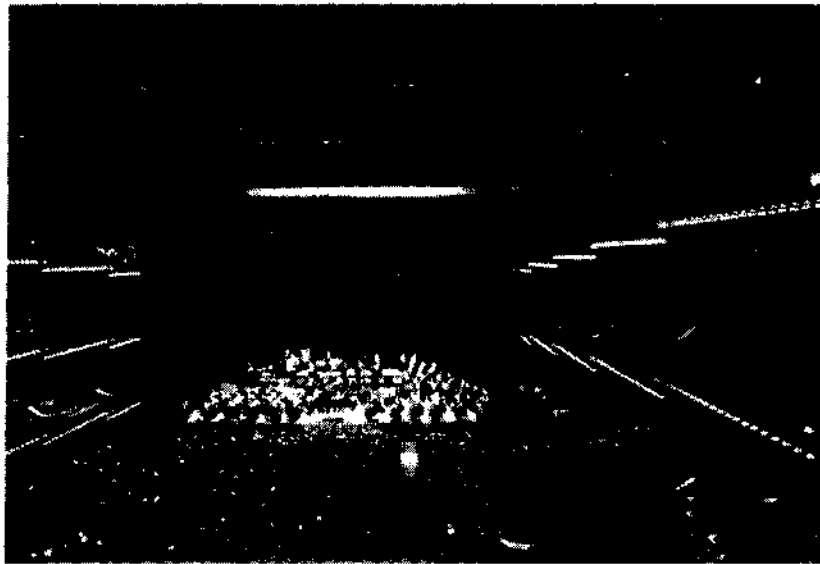


Fig. 4 O auditório do Avery Fisher Hall. Durante o verão de 1976, o interior do Philharmonic Hall (ver Fig. 1) foi transformado no que vemos aqui. O Avery Fisher Hall tem o formato retangular clássico, como o Symphony Hall em Boston (ver Fig. 2). Este “design” retangular é um descendente direto das pequenas capelas construídas durante o século XVII. Todas as paredes, assim como o teto, são bastante irregulares.

mentos decorativos ou estátuas, em grandes salas de concertos como sendo a causa de uma boa acústica (isto também não é verdade); existe uma idéia mística segundo a qual os antigos possuíam princípios secretos de acústica, desconhecidos nos dias atuais e que, se pudéssemos redescobri-los, nossas salas de concertos seriam maravilhosamente melhores (os antigos não possuíam nenhum segredo sobre acústica).

A aura de mistério circundando a acústica é substancialmente aumentada pelo fato de ela ser, sob um certo aspecto, uma das mais antigas ciências físicas. Além disso, especialistas em acústica tinham grande importância no “design” e na localização dos teatros a céu aberto, usados pelos gregos e romanos. Sob outro aspecto, a ciência da acústica é jovem: não foi antes de 1990 que considerações acústicas foram sistematicamente aplicadas à construção de salas de concertos. Mesmo hoje, os conselhos do especialista em acústica não são sempre seguidos.

O efeito dessas salas na música vai além desses momentos vivos, quando existe efetivamente a união de um inspirado “performer” e um auditório ávido. Ambientes e música têm tido um relacionamento de séculos. Mais especificamente, o “design” dos ambientes e a com-

posição da música têm tido uma dramática interinfluência um sobre o outro; auditórios afetam o tipo de música composta e novas composições musicais influenciam a construção de espaços com acústica satisfatória. Por exemplo, os longos tempos de reverberação das catedrais medievais, de 5 a 10 s, requeriam que a música fosse tocada ou cantada muito lentamente. Devido aos longos tempos de reverberação nessas catedrais, as palavras ditas eram difíceis de se entender e o cântico substituiu a palavra. Giovanni Gabrieli, organista da Basílica de São Marcos, em Veneza, por volta de 1600, escreveu músicas em um tempo lento, para espaços com um longo tempo de reverberação.

Ao mesmo tempo que Gabrieli estava trabalhando em Veneza, novos desenvolvimentos ocorriam na Itália. Pequenas capelas, de forma retangular e com tetos altos, eram construídas próximas às grandes catedrais. Característica do tempo, as paredes eram ornadas, ricas em detalhes esculturais. Essas superfícies decorativas eram difusores muito eficientes de som para todas as frequências audíveis. Os curtos tempos de reverberação — menores que 1,5 s — dessas pequenas capelas encorajaram o desenvolvimento de novas formas musicais e conduziram ao período Barroco.

George Frederick Handel escreveu muitas de suas músicas para tais espaços. Essas pequenas e mais íntimas construções causaram uma evolução considerável na experiência auditiva (Fig. 4).

Com espaços acústicos melhorados, as performances musicais se tornaram mais populares. Estruturas maiores se tornaram necessárias para atender à demanda de grandes públicos. Músicas do período clássico — as sinfonias de Josef Haydn, Wolfgang Amadeus Mozart e Ludwig van Beethoven — conseguiram melhores performances em grandes salas de concerto, com tempos de reverberação de 1,5 a 1,7 s. Ao período clássico, seguiu-se o romântico, que nos deu a música de Johannes Brahms, Peter Ilyitch Tchaikovsky, Maurice Ravel e Richard Strauss, bem ouvidas mesmo em salas de concerto com tempos de reverberação maiores — entre 1,8 e 2,2 s.

A futura construção de salas de concertos irá explorar não só novos materiais e métodos, como também o uso de melhorias eletrônicas. Se pudermos usar o passado como guia, sabemos, com certeza, como mudar as salas e os compositores irão criar novos estilos que serão, não só coerentes com as novas salas, mas também terão suas performances melhoradas nelas.

# TEMPERATURA

# 19



*Um inuíte (gentílico de uma das nações esquimóicas) pesca através de um buraco no gelo de um lago, no norte do Canadá. Não fosse pelas curiosas e únicas propriedades térmicas da água, não haveria peixes no lago para serem pescados. De fato, não seria possível a existência de qualquer tipo de vida animal ou vegetal em quaisquer águas que congelassem no inverno. Qual é a propriedade térmica da água, que permite a existência de vida em seu interior, mesmo em regiões muito frias?*

## 19-1 Termodinâmica: Um Novo Contexto

Neste capítulo, vamos deixar de lado a mecânica e iniciar um assunto novo — *termodinâmica*. A mecânica lida com a chamada *energia mecânica* (ou externa) dos sistemas e se baseia nas leis de Newton. Já a termodinâmica lida com a *energia interna* dos sistemas e é regida por um outro conjunto de leis, que você conhecerá neste capítulo e em alguns dos seguintes. Falando de maneira intuitiva, algumas “expressões mecânicas” — se podemos chamá-las assim — são força, energia cinética, aceleração, Galileu e a segunda lei de Newton. Por outro lado, temperatura, calor, energia interna, entropia, Kelvin e a segunda lei da termodinâmica são “expressões termodinâmicas”.

Temperatura é o conceito fundamental da termodinâmica. A palavra é tão familiar que muitos de nós — por causa da nossa sensação instintiva de quente e frio — tendemos

a achar que se trata de um conceito trivial. Nosso “sentido de temperatura”, no entanto, nem sempre é confiável. Num dia muito frio de inverno, por exemplo, um trilho de ferro parece muito mais frio quando o tocamos, que um poste de madeira, embora estejam ambos à mesma temperatura. A diferença nas sensações é causada pelo fato do ferro conduzir calor muito melhor do que a madeira e, assim, o calor dos nossos dedos se escoar de maneira muito mais fácil pelo ferro.

Por ser de importância fundamental, vamos começar o estudo da termodinâmica desenvolvendo o conceito de temperatura, sem levar em conta as nossas sensações térmicas.

## 19-2 Temperatura

Temperatura é uma das sete grandezas fundamentais do SI. Os físicos costumam medir a temperatura usando a **escala**

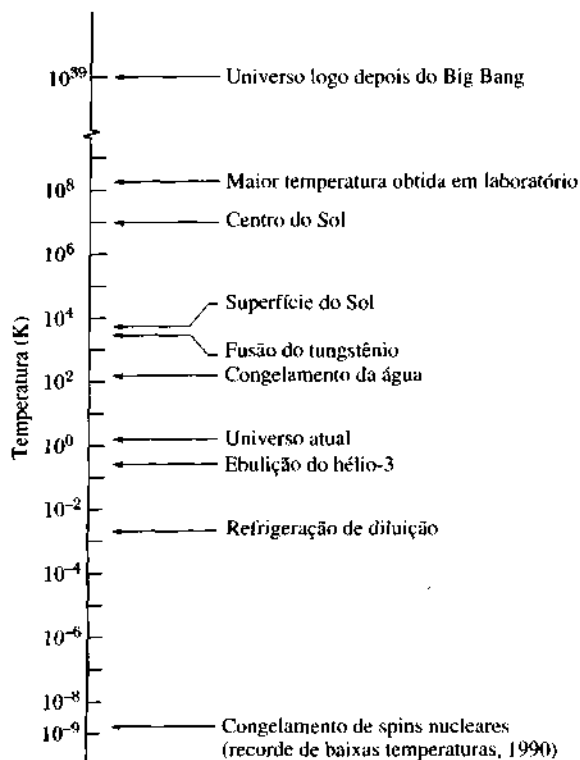
**Kelvin.** Embora, aparentemente, a temperatura de um corpo possa ser aumentada indefinidamente, está sujeita a um limite inferior, que tomamos como sendo o zero da escala Kelvin. A temperatura ambiente está em torno de 290 kelvins ou 290 K, acima deste *zero absoluto*. A Fig. 19-1 mostra a faixa (bastante larga) de temperaturas que podem ser determinadas.

Quando o universo começou, há cerca de 10-20 bilhões de anos, a temperatura era da ordem de  $10^{39}$  K (de acordo com o modelo padrão da cosmologia). À medida que o universo se expandia, foi esfriando, até chegar, hoje, a uma temperatura média de 3 K. Sentimos um pouco mais de calor porque vivemos perto de uma estrela. Sem o Sol, no entanto, também estaríamos a essa temperatura (ou seja, não existiríamos).

Em todo o mundo existem pesquisadores tentando descobrir como atingir temperaturas o mais próximo possível do zero absoluto. Mas parece que o zero absoluto tem um comportamento similar à velocidade da luz  $c$ , no sentido em que ambos são valores limites dos quais os corpos materiais podem se aproximar indefinidamente, mas nunca atingir. Até 1992, os valores mais próximos obtidos em laboratórios foram:

Maior velocidade de um elétron	$0,9999999994c$
Temperatura mais baixa	$0,000000002$ K

Você poderia dizer, em cada um dos casos mencionados, que já nos aproximamos o suficiente. No entanto, cada vez



**Fig. 19-1** Algumas temperaturas na escala Kelvin. Note que  $T = 0$  corresponde a  $10^{-7}$  e, portanto, não pode ser registrada nesta escala logarítmica.

que chegamos mais perto desses limites, novos fenômenos vão aparecendo. Sendo assim, cada casa decimal adicional, seja na velocidade ou na temperatura, deve ser perseguida, mesmo lutando contra dificuldades experimentais cada vez maiores (e contra despesas maiores também).

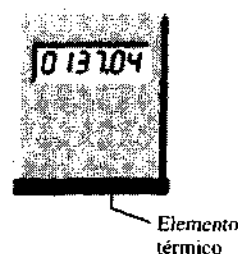
Como a temperatura pode variar entre limites muito amplos, o simples fato de existirmos parece ser o maior dos milagres. Se a temperatura da Terra fosse só um pouco mais baixa, todos morreríamos de frio. Por outro lado, se fosse um pouco mais alta, os átomos do nosso corpo se moveriam tão intensamente que as moléculas se romperiam e a vida não seria possível. No que se refere à temperatura, estamos entre o fogo e o gelo, no mais estreito dos nichos ecológicos.

### 19-3 A Lei Zero da Termodinâmica

Quando mudamos o ambiente térmico de um corpo, por exemplo, levando-o de um refrigerador para um forno quente, na maioria dos casos, ele sofre alterações nas suas propriedades. Assim, à medida que a temperatura aumenta, o volume de um líquido também aumenta, uma barra de metal torna-se um pouco mais longa e a resistência elétrica de um fio aumenta, assim como a pressão exercida por um gás confinado. Podemos utilizar qualquer uma dessas propriedades como base de um instrumento que nos ajude a definir melhor o conceito de temperatura.

A Fig. 19-2 mostra um desses instrumentos. Qualquer engenheiro habilidoso pode desenhar e construir um aparelho desses, usando qualquer uma das particularidades citadas. O medidor possui um mostrador digital e tem as seguintes propriedades: se você aquecê-lo com um bico de Bunsen, os números no mostrador começarão a aumentar; no entanto, se o instrumento for colocado num refrigerador, começarão a diminuir. Como esse medidor não é calibrado, os números em si não têm significado físico. Por isso o aparelho é chamado de *termoscópio*, e não de *termômetro*.

Suponha que, como vemos na Fig. 19-3a, você coloque o termoscópio (que será chamado de corpo  $T$ ) em contato com outro corpo (corpo  $A$ ). Todo o sistema estará dentro de uma caixa isolante com paredes espessas. Os números no mostrador do termoscópio mudarão, até que, eventualmente, se estabilizem (digamos que a leitura é "137,04"). Realmente, toda propriedade mensurável do corpo  $T$  (o termos-



**Fig. 19-2** Um termoscópio. Os números aumentam quando o instrumento é aquecido e diminuem quando esfria. O elemento sensível à temperatura pode ser — entre muitas possibilidades — uma bobina cuja resistência elétrica é medida e mostrada no painel.

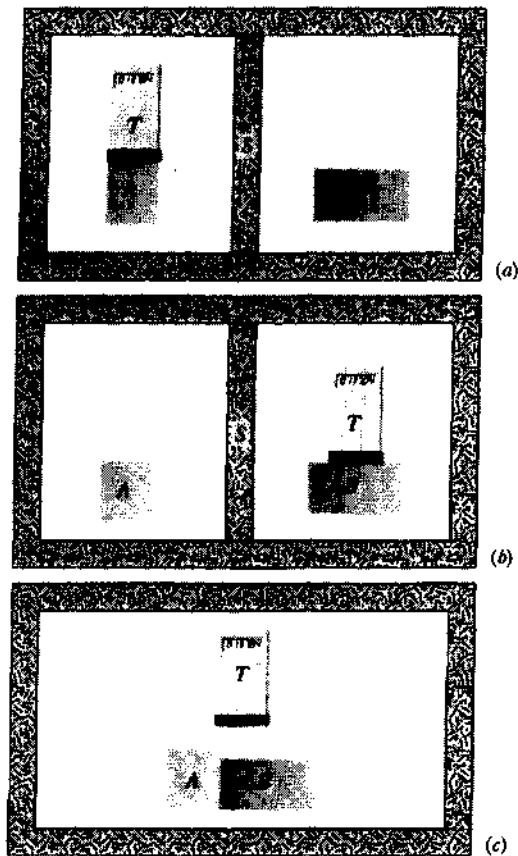


Fig. 19-3 (a) O corpo  $T$  (o termoscópio) e o corpo  $A$  estão em equilíbrio térmico. (O corpo  $S$  é uma parede isolante.) (b) O corpo  $T$  e o corpo  $B$  também estão em equilíbrio térmico, causando a mesma leitura no termoscópio. (c) Se as afirmativas feitas em (a) e (b) são válidas, a lei zero da termodinâmica diz que  $A$  e  $B$ , também, estão em equilíbrio térmico.

cópio) e do corpo  $A$  pressupõe um valor estável e dizemos que os dois corpos estão em *equilíbrio térmico*.

Coloquemos agora o corpo  $T$  em contato com um segundo corpo (corpo  $B$ ), como na Fig. 19-3b. Digamos que os dois corpos ( $B$  e  $T$ ) atingiram o equilíbrio térmico com o mostrador do termoscópio exibindo os mesmos números do contato com o corpo  $A$ .

Finalmente, como na Fig. 19-3c, coloquemos os corpos  $A$  e  $B$  em contato. Estarão eles em equilíbrio térmico um com o outro? Sim, estarão. Tal resposta, que parece óbvia, na realidade *não é*, só podendo ser confirmada pela experiência.

Os fatos experimentais vistos na Fig. 19-3 são resumidos na **lei zero da termodinâmica**.

Se dois corpos  $A$  e  $B$  estão em equilíbrio térmico com um terceiro corpo  $T$ , então, estão em equilíbrio térmico um com o outro.

Numa linguagem menos formal, a mensagem da lei zero é: "Todo corpo tem uma propriedade chamada **temperatura**. Quando dois corpos estão em equilíbrio térmico, suas temperaturas são iguais." Podemos, agora, transformar nosso termoscópio (corpo  $T$ ) em um termômetro, confiando no

significado físico de suas leituras. Tudo o que precisamos fazer é calibrá-lo.

A lei zero é constantemente usada no laboratório. Se quisermos saber se os líquidos em dois recipientes estão à mesma temperatura, medimos a temperatura de cada um com um termômetro. Não precisamos colocá-los em contato para observar se estão ou não em equilíbrio térmico; se suas temperaturas são iguais, temos certeza de que estão.

Curiosamente, a lei zero apareceu somente na década de 1930, muito depois da descoberta da primeira e da segunda leis da termodinâmica. Como o conceito de temperatura é fundamental para estas duas leis, uma outra lei que torna válido o conceito de temperatura, deveria ter precedência. Por isso, ela foi chamada de lei zero.

## 19-4 Medindo a Temperatura

Vamos ver como definir e medir temperatura na escala Kelvin ou, o que é equivalente, como calibrar um termoscópio de modo que se torne um termômetro.

### O Ponto Triplo da Água

Quando queremos construir uma escala de temperatura, o primeiro passo é isolar um fenômeno térmico facilmente reproduzível e, arbitrariamente, associar uma certa temperatura Kelvin ao seu ambiente térmico. Em outras palavras, selecionamos um *ponto fixo padrão*. Poderíamos, por exemplo, escolher o ponto de congelamento ou o ponto de ebulição da água, mas, por várias razões técnicas, não o fazemos. Escolhemos, em vez disso, o **ponto triplo da água**.

Água no estado líquido, gelo e vapor d'água podem coexistir para somente um conjunto de valores da pressão e da temperatura. A Fig. 19-4 ilustra uma célula de ponto triplo, onde podemos observar esse ponto fixo no laboratório. Um acordo internacional (em 1967) estabeleceu a temperatura do ponto triplo da água como sendo 273,16 K. Este valor foi

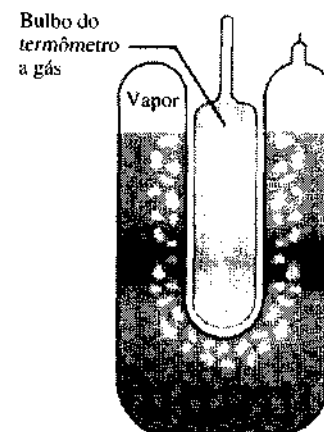


Fig. 19-4 Uma célula de ponto triplo, na qual gelo, água e vapor d'água coexistem em equilíbrio térmico. A temperatura dessa mistura foi definida, por convenções internacionais, como sendo 273,16 K. O bulbo de um termômetro de gás a volume constante aparece inserido na cavidade da célula.



tomado como ponto fixo padrão para a calibração de termômetros. Assim,

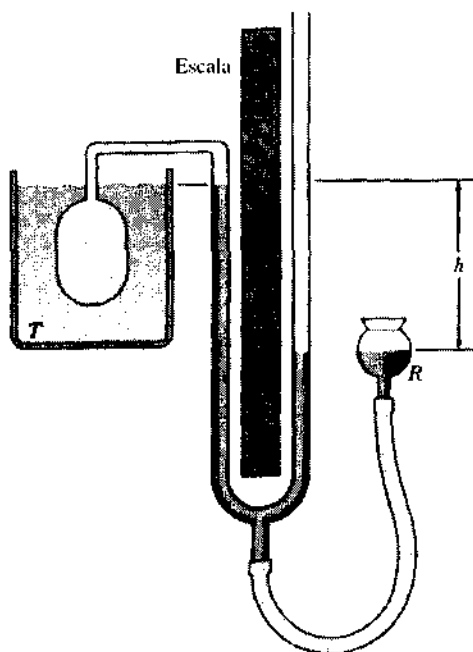
$$T_3 = 273,16 \text{ K} \quad (\text{Temperatura do ponto triplo}), \quad (19-1)$$

onde o subscrito 3 é para lembrar que a temperatura se refere ao ponto triplo.

Note que não usamos o símbolo de grau quando escrevemos temperaturas Kelvin. Usamos 300 K (e não 300°K), e pronunciamos “300 kelvins” (e não “300 graus Kelvin”). Os prefixos usuais do SI se aplicam neste caso. Assim, 0,0035 K é escrito 3,5 mK. Não fazemos distinção na nomenclatura entre temperaturas e diferenças de temperatura. Logo, podemos dizer “o ponto de ebulição do enxofre é 717,8 K” e “a temperatura da água, nesta banheira, aumentou de 8,5 K.”

### O Termômetro de Gás a Volume Constante

Até aqui, não discutimos a propriedade física particular que usaremos, por acordo internacional, para construir nosso termômetro. Deveria ser o comprimento de uma barra metálica, a resistência elétrica de um fio, a pressão exercida por um gás confinado ou alguma outra propriedade? A escolha é importante porque opções diferentes levam a temperaturas diferentes, para — por exemplo — o ponto de ebulição da água. Por motivos que ficarão claros mais tarde, o termômetro padrão, usado para calibrar todos os outros termômetros, utiliza a pressão exercida por um gás confinado num volume constante.



**Fig. 19-5** Um termômetro de gás a volume constante, com seu bulbo imerso num banho térmico do qual desejamos medir a temperatura. A pressão exercida pelo gás é  $p_0 + \rho gh$ , onde  $p_0$  é a pressão atmosférica (fornecida por um barômetro) e  $h$  é a diferença de altura da coluna de mercúrio, entre os dois braços do manômetro.

A Fig. 19-5 mostra um **termômetro de gás (a volume constante)**. Consiste em um bulbo feito de vidro, quartzo ou platina (dependendo da faixa de temperatura em que vamos usar o termômetro) ligado por um tubo capilar a um manômetro de mercúrio. Levantando e abaixando o reservatório  $R$ , o nível de mercúrio à esquerda sempre pode ser levado do zero da escala do manômetro, assegurando assim a constância do volume do gás. A temperatura de qualquer corpo, em contato térmico com o bulbo, é, então, definida por

$$T = Cp, \quad (19-2)$$

onde  $p$  é a pressão exercida pelo gás e  $C$  é uma constante. A pressão é obtida da relação

$$p = p_0 + \rho gh, \quad (19-3)$$

onde  $p_0$  é a pressão atmosférica,  $\rho$  é a densidade do mercúrio e  $h$  é a diferença de níveis do mercúrio nos dois braços do tubo capilar.

Com o bulbo do termômetro de gás imerso numa célula de ponto triplo, como a da Fig. 19-4, temos

$$T_3 = Cp_3, \quad (19-4)$$

onde  $p_3$  é a leitura de pressão sob estas condições. Eliminando  $C$ , entre as Eqs. 19-2 e 19-4, obtemos

$$\begin{aligned} T &= T_3 \left( \frac{p}{p_3} \right) \\ &= (273,16 \text{ K}) \left( \frac{p}{p_3} \right) \quad (\text{provisória}). \end{aligned} \quad (19-5)$$

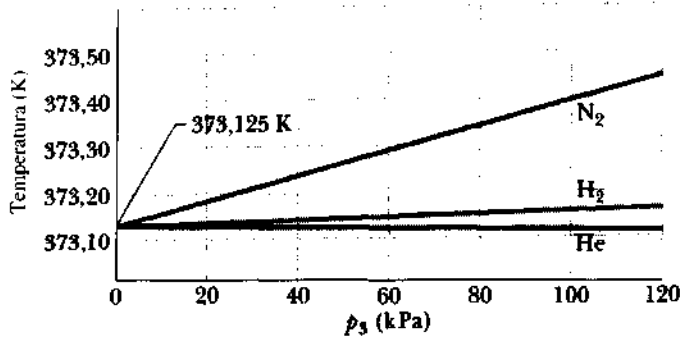
A equação 19-5 ainda não é a definição final de uma temperatura medida com um termômetro de gás. Nada dissemos sobre que espécie de gás (ou que quantidade de gás) devemos colocar no bulbo do termômetro. Se nosso termômetro fosse usado para medir alguma temperatura, tal como a do ponto de ebulição da água, encontraríamos temperaturas ligeiramente diferentes, dependendo da escolha feita. Mas se usarmos quantidades cada vez menores de gás dentro do bulbo, as leituras convergem para uma única temperatura, independente do gás. A Fig. 19-6 ilustra esta reconfortante convergência.\*

Desse modo, podemos escrever como nossa receita final para medir a temperatura com um termômetro de gás,

$$T = (273,16 \text{ K}) \left( \lim_{m \rightarrow 0} \frac{p}{p_3} \right). \quad (19-6)$$

\*Usaremos, como unidade de pressão, aquelas introduzidas na Seção 16-3. A unidade SI para pressão é o newton por metro quadrado, que é chamado de pascal (Pa). O pascal se relaciona com outras unidades comuns de pressão, da seguinte maneira:

$$1 \text{ atm} = 1,01 \times 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ torr} = 14,7 \text{ lb/in.}^2$$



**Fig. 19-6** Temperaturas calculadas a partir da Eq. 19-5 para termômetro de gás a volume constante cujo bulbo está imerso em água fervente. Foram usados gases diferentes dentro do bulbo, fazendo-se variar a densidade para cada um deles (o que acarretou valores diferentes para  $p_3$ ). Note que todas as leituras convergem para a temperatura de 373,125 K, no limite de densidade zero.

Esta equação nos diz para colocar, dentro do bulbo, uma quantidade arbitrária de massa  $m$  de qualquer gás (por exemplo, nitrogênio) e medir  $p_3$  (usando uma célula de ponto triplo) e  $p$ , a pressão do gás na temperatura que queremos medir. Em seguida, calculamos a razão  $p/p_3$ . Repetimos, então, as medidas com uma quantidade menor de gás no bulbo, calculando novamente esta razão. Continuamos, assim, usando quantidades cada vez menores de gás, até podermos extrapolar o valor da razão  $p/p_3$  que teríamos com o bulbo aproximadamente vazio. Calculamos a temperatura substituindo o resultado desta extrapolação na Eq. 19-6. Temperaturas definidas dessa maneira são chamadas de *temperaturas de gás ideal*.

Se a temperatura deve ser realmente uma quantidade física fundamental, que pode ser usada nas leis da termodinâmica, é absolutamente necessário que sua definição seja independente das propriedades de qualquer material. Não seria possível, por exemplo, ter uma quantidade tão fundamental como a temperatura dependendo do coeficiente de expansão do mercúrio, da resistividade elétrica da platina ou de qualquer outra propriedade tabelada. Escolhemos o termômetro de gás como nosso instrumento de medida padrão justamente porque nenhuma propriedade específica de materiais está envolvida na sua operação. Você pode usar qualquer gás e obter sempre o mesmo resultado.

**EXEMPLO 19-1** O bulbo de um termômetro de gás contém nitrogênio a uma pressão de 120 kPa. Que valor provisório (veja Fig. 19-6) indicaria este termômetro para o ponto de ebulição da água, e qual o seu erro?

**Solução** Da Fig. 19-6, vemos que, para o nitrogênio a 120 kPa, a temperatura provisória para o ponto de ebulição da água seria cerca de 373,44 K. O ponto de ebulição verdadeiro (obtido por extrapolação na Fig. 19-6; veja também a Tabela 19-1) é 373,125 K. Assim, o uso da temperatura provisória leva a um erro de 0,315 K, ou 315 mK.

## 19-5 A Escala Internacional de Temperatura

Medir uma temperatura usando um termômetro de gás, com uma precisão razoável, é uma tarefa tediosa que pode exigir meses de trabalho metucioso. Na prática, o termômetro de gás é usado somente para estabelecer certos pontos fixos "primários". Estes pontos são, então, usados para calibrar outros termômetros secundários mais convenientes, por exemplo, os que usam líquidos. Os termômetros de uso domiciliar são deste tipo: um líquido, em geral mercúrio, é confinado num bulbo de vidro numa extremidade de um tubo fino. Quando o líquido é aquecido, se expande dentro do tubo. A altura que ele atinge corresponde à temperatura, que é lida numa escala impressa no tubo.

Para uso prático, como na calibração de termômetros científicos ou industriais, foi adotada a *Escala Internacional de Temperatura*. Consiste em um conjunto de instruções para se obter na prática a melhor aproximação possível para a escala Kelvin. Adotamos um conjunto de pontos fixos primários e especificamos um conjunto de instrumentos para serem usados na interpolação entre estas temperaturas de ponto fixo, e para extrapolar acima da temperatura máxima ou abaixo da mínima.

A Tabela 19-1 fornece os pontos fixos primários. O ponto de ebulição da água (algumas vezes chamado de *ponto de vapor*) é incluído, mas o ponto de solidificação (também chamado *ponto de gelo*), não. Os pontos de fusão dados na tabela também podem ser chamados pontos de *solidificação*, pois a fusão e a solidificação de qualquer substância ocorre à mesma temperatura.

## 19-6 As Escalas Celsius e Fahrenheit

Discutimos até aqui apenas a escala Kelvin, usada na pesquisa científica básica. Em quase todos os países do mundo a escala utilizada nas aplicações comerciais e domiciliares é a escala Celsius (também chamada de centígrada). Ela também é usada em algumas aplicações científicas. O tamanho do intervalo de um grau é o mesmo nas escalas Celsius e Kelvin, mas o zero da primeira é deslocado

**Tabela 19-1**  
Pontos Fixos Primários na Escala Internacional de Temperatura

Substância	Estado do Ponto Fixo	Temperatura (K)
Hidrogênio	Ponto triplo	13,81
Hidrogênio	Ponto de ebulição*	17,042
Hidrogênio	Ponto de ebulição	20,28
Neônio	Ponto de ebulição	27,102
Oxigênio	Ponto triplo	54,361
Argônio	Ponto triplo	83,798
Oxigênio	Ponto de ebulição	90,188
Água	Ponto de ebulição	373,125
Latão	Ponto de fusão	505,074
Zinco	Ponto de fusão	692,664
Prata	Ponto de fusão	1.235,08
Ouro	Ponto de fusão	1.337,58

\*Este ponto de ebulição é para pressões entre 25 e 76 atm. Todos os outros pontos de ebulição ou de fusão são para 1 atm.

para um valor mais conveniente. Se  $T_C$  representa uma temperatura Celsius, então

$$T_C = T - 273,15^\circ \quad (19-7)$$

Quando expressamos temperaturas na escala Celsius, o símbolo de grau é geralmente usado. Assim, escrevemos  $20,00^\circ\text{C}$ , mas  $293,15\text{ K}$ .

A escala Fahrenheit, usada nos Estados Unidos, tem um intervalo de um grau menor que o da escala Celsius e também do ponto zero de temperatura deslocado. Você pode, com facilidade, verificar as diferenças examinando um termômetro domiciliar que tenha as duas escalas. A relação entre as escalas Celsius e Fahrenheit é

$$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32^\circ, \quad (19-8)$$

onde  $T_F$  é a temperatura Fahrenheit. A conversão entre as duas escalas pode ser feita facilmente, apenas lembrando alguns pontos correspondentes (por exemplo os pontos de congelamento e de ebulição da água; veja a Tabela 19-2) e usando o fato de que um intervalo de 9 graus na escala Fahrenheit é igual a um de 5 graus na escala Celsius. A Fig. 19-7 compara as escalas Kelvin, Celsius e Fahrenheit.

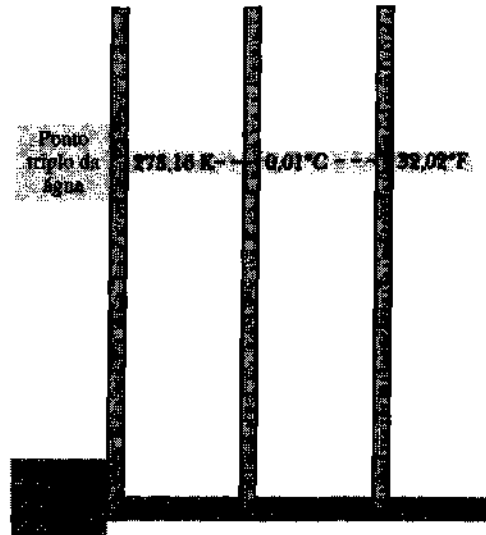


Fig. 19-7 Comparação entre as escalas de temperatura Kelvin, Celsius e Fahrenheit.

**Solução** O ponto de congelamento da água é  $-14,0^\circ\text{Z}$ , assim, a diferença entre a temperatura dada e a do ponto de congelamento é  $84,0^\circ\text{Z}$ . Para converter esta diferença em graus Fahrenheit, escrevemos

$$\Delta T = 84,0^\circ\text{Z} \left( \frac{180^\circ\text{F}}{79,0^\circ\text{Z}} \right) = 191^\circ\text{F}.$$

Logo, a temperatura procurada está  $191^\circ\text{F}$  abaixo do ponto de solidificação da água e é, na escala Fahrenheit,

$$T = 32,0^\circ\text{F} - 191^\circ\text{F} = -159^\circ\text{F}. \quad (\text{Resposta})$$

### TÁTICA PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

#### TÁTICA 1: MUDANÇAS DE TEMPERATURA

Entre os pontos de ebulição e solidificação da água, há (aproximadamente) 100 kelvins e 100 graus Celsius. Logo, um kelvin é o mesmo tamanho que um grau Celsius. A partir disso, ou da Eq. 19-7, vemos que qualquer variação de temperatura é expressa pelo mesmo número, seja em kelvins ou em graus Celsius. Por exemplo, uma variação de temperatura de 10 K é equivalente a uma variação de  $10^\circ\text{C}$ .

Entre os pontos fixos da água mencionados, há 180 graus Fahrenheit. Logo, um grau Fahrenheit deve ter  $9/5 (= 180^\circ\text{F}/100\text{ K})$  do tamanho de um kelvin ou de um grau Celsius. A partir disto, ou da Eq. 19-8, vemos que qualquer variação de temperatura expressa em graus Fahrenheit deve valer  $9/5$  da mesma variação de temperatura expressa em kelvins ou graus Celsius. Por exemplo, em graus Fahrenheit, uma variação de temperatura de 10 K é  $(9/5)(10\text{ K})$  ou  $18^\circ\text{F}$ .

Tome cuidado para não confundir uma temperatura com uma variação de temperatura. Uma temperatura de 10 K não é a mesma que uma de  $10^\circ\text{C}$  ou  $18^\circ\text{F}$ , mas, como acabamos de ver, uma variação de 10 K é o mesmo que uma de  $10^\circ\text{C}$  ou  $18^\circ\text{F}$ .

**EXEMPLO 19-2** Suponha que você descubra velhas anotações científicas que descrevem uma escala de temperatura chamada Z, em que o ponto de ebulição da água é  $65,0^\circ\text{Z}$  e o ponto de congelamento é  $-14,0^\circ\text{Z}$ .

a. A que variação de temperatura  $\Delta T$ , na escala Z, corresponde uma variação de  $53,0^\circ\text{F}$ ?

**Solução** Para achar um fator de conversão entre as duas escalas, podemos usar os pontos de ebulição e de solidificação (ou congelamento) da água. Na escala Z, a diferença de temperatura entre esses dois pontos é  $65,0^\circ\text{Z} - (-14,0^\circ\text{Z})$  ou  $79,0^\circ\text{Z}$ . Já na escala Fahrenheit, a diferença é  $212^\circ\text{F} - 32,0^\circ\text{F}$  ou  $180^\circ\text{F}$ . Assim, uma variação de  $79,0^\circ\text{Z}$  é igual a uma variação de  $180^\circ\text{F}$ . Para uma variação de  $53,0^\circ\text{F}$ , podemos, então, escrever

$$\begin{aligned} \Delta T &= 53,0^\circ\text{F} = 53,0^\circ\text{F} \left( \frac{79,0^\circ\text{Z}}{180^\circ\text{F}} \right) \\ &= 23,3^\circ\text{Z}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

b. Que temperatura na escala Fahrenheit corresponde a  $-98,0^\circ\text{Z}$ ?

Tabela 19.2  
Correspondência entre Algumas Temperaturas

Temperatura	$^\circ\text{C}$	$^\circ\text{F}$
Ponto de ebulição da água*	100	212
Temperatura média normal do corpo humano	37,0	98,6
Nível de temperatura confortável	20	68
Ponto de congelamento da água*	0	32
Zero da escala Fahrenheit	$\approx -18$	0
Ponto de coincidência das leituras das duas escalas	-40	-40

\*Estritamente falando, o ponto de ebulição da água na escala Celsius é  $99,975^\circ$  (veja a Eq. 19-7 e Tabela 19-1) e o congelamento é  $0,00$ . Assim, há um pouco menos de 100 graus Celsius entre os dois pontos.

## 19-7 Expansão Térmica

### Algumas Aplicações

É possível afrouxar uma tampa metálica muito apertada de uma jarra de vidro, colocando-a sob um jato de água quente. A tampa de metal se expande mais do que o vidro da



Fig. 19-8 Trilhos deformados pela expansão térmica num dia de verão anormalmente quente em Asbury Park, New Jersey.

jarra com o aumento da temperatura. Tal **expansão térmica** nem sempre é desejável, como mostra a Fig. 19-8. Todos já vimos as juntas de dilatação (intervalos entre as placas de concreto) nas pontes. Os canos nas refinarias também possuem laços de expansão, de modo a não se deformarem com o aumento da temperatura. Os materiais que o dentista usa para preencher cavidades nos dentes devem ter as mesmas propriedades de expansão térmica que o dente. Em geral, na construção de aviões, os rebites e outras peças de conexão são projetados para ser resfriados, em gelo seco, antes de colocados no lugar, para melhor se ajustarem ao se expandir.

Termômetros e termostatos podem ser baseados na maneira diferente como se expandem os componentes de uma

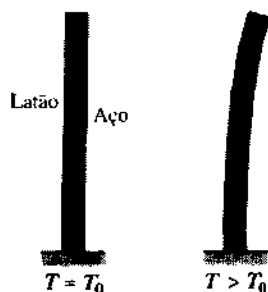


Fig. 19-9 Uma lâmina bimetalica, feita de lâminas de aço e de latão, coladas à temperatura  $T_0$ . A lâmina se encurva quando a temperatura sobe acima desse valor. Abaixo dessa temperatura, a lâmina se encurva em sentido oposto. Este efeito é usado na maioria dos termostatos, abrindo ou fechando um contato elétrico quando a temperatura varia.

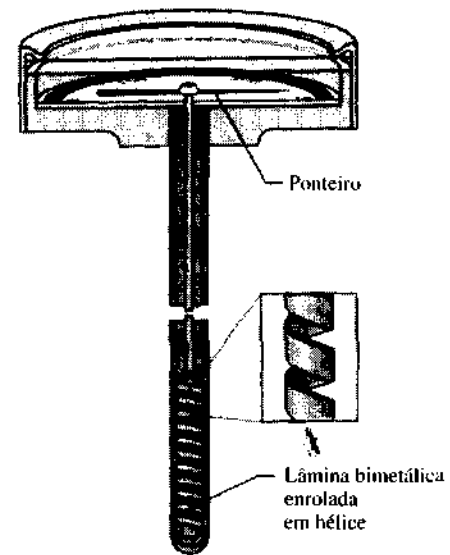


Fig. 19-10 Um termômetro que utiliza uma lâmina bimetalica. Esta é enrolada em forma de hélice e aperta ou afrouxa o enrolamento quando a temperatura varia.

*lâmina bimetalica* (veja Fig. 19-9). Nos termômetros, a lâmina bimetalica é enrolada em forma de hélice, e mudanças de temperatura fazem com que a hélice se enrole ou desenrole (Fig. 19-10). Os termômetros de bulbo familiares usam o fato de que os líquidos como o mercúrio ou o álcool se expandem muito mais que o recipiente de vidro, quando a temperatura aumenta.

### Expansão Térmica: Estudo Quantitativo

Se a temperatura de uma barra metálica de comprimento  $L$  aumenta de uma quantidade  $\Delta T$ , o seu comprimento aumenta de uma quantidade

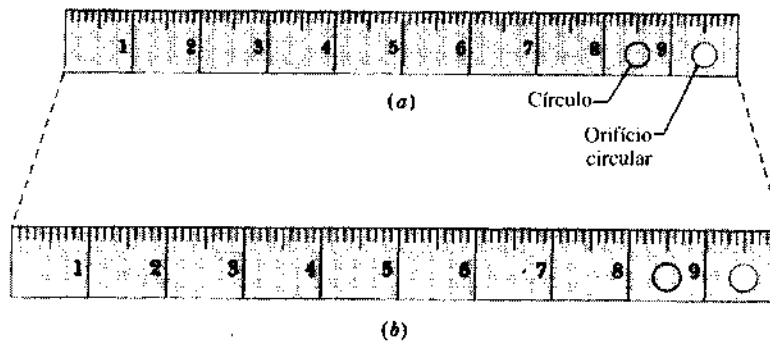
$$\Delta L = \alpha L \Delta T, \quad (19-9)$$

onde  $\alpha$  é uma constante chamada de **coeficiente de expansão linear**. O valor de  $\alpha$  depende do material e da faixa de temperatura. Podemos reescrever a Eq. 19-9 como

$$\alpha = \frac{\Delta L/L}{\Delta T}, \quad (19-10)$$

o que nos mostra que  $\alpha$  é o aumento fracional no comprimento por mudança unitária na temperatura. Embora  $\alpha$  varie um pouco com a temperatura, para muitas aplicações práticas a temperaturas ordinárias, podemos supor que ele é constante. A Tabela 19-3 mostra alguns coeficientes de expansão linear.

A expansão térmica de um sólido é semelhante a uma ampliação fotográfica (tridimensional). A Fig. 19-11b mostra a expansão de uma régua de aço (exagerada na figura), depois que a sua temperatura aumentou em relação àquela da Fig. 19-11a. A Eq. 19-9 se aplica a todas as dimensões



**Fig. 19-11** A mesma régua de metal a duas temperaturas diferentes. Quando ela se expande, todas as suas dimensões aumentam na mesma proporção. A escala graduada, os números, a espessura e os diâmetros do círculo e do orifício circular aumentam do mesmo fator (a dilatação aparece exagerada na figura, para maior clareza).

**Tabela 19-3**  
Alguns Coeficientes de Dilatação Linear<sup>a</sup>

Substância	$\alpha$ ( $10^{-6}/^{\circ}\text{C}^{\circ}$ )
Gelo (a $0^{\circ}\text{C}$ )	51
Chumbo	29
Alumínio	23
Latão	19
Cobre	17
Aço	11
Vidro (comum)	9
Vidro (pirex)	3,2
Invar <sup>b</sup>	0,7
Quartzo fundido	0,5

<sup>a</sup>Valores à temperatura ambiente, exceto para o gelo.

<sup>b</sup>Esta liga foi projetada para ter um coeficiente de dilatação muito baixo. O nome é uma abreviatura de "invariável".

lineares da régua, incluindo borda, espessura, diagonais e os diâmetros do círculo desenhado nela e do orifício circular mostrado na figura. Se o disco metálico retirado da régua, quando da feitura do orifício, for exposto ao mesmo aumento de temperatura que ela, se ajustará perfeitamente ao orifício da régua aquecida.

**Expansão Térmica dos Líquidos**

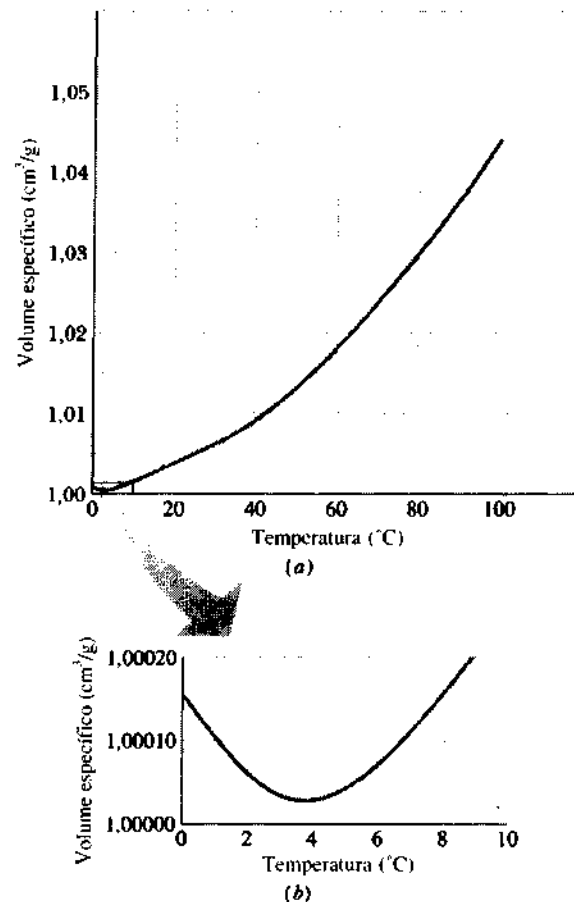
Se todas as dimensões de um sólido se expandem com a temperatura, o volume deste sólido deve aumentar. Para os líquidos, a expansão volumétrica é o único parâmetro de expansão que faz algum sentido. Se a temperatura de um sólido ou de um líquido, cujo volume é  $V$ , aumenta de  $\Delta T$ , a variação de volume é dada por

$$\Delta V = V\beta\Delta T, \quad (19-11)$$

onde  $\beta$  é o **coeficiente de expansão volumétrica** do sólido ou do líquido. Os coeficientes de expansão volumétrica  $\beta$  e o de expansão linear  $\alpha$ , para um sólido, estão relacionados por

$$\beta = 3\alpha. \quad (19-12)$$

O mais comum dos líquidos, a água, não se comporta como os outros líquidos. A Fig. 19-12a mostra como o seu *volume específico* (volume por unidade de massa) muda com a temperatura. Acima de  $4^{\circ}\text{C}$ , ela se expande, quando a temperatura sobe, que é o comportamento esperado. Mas, entre  $0$  e  $4^{\circ}\text{C}$ , se *contrai* com o aumento da temperatura (Fig. 19-12b). Em torno de  $4^{\circ}\text{C}$ , o volume específico da água passa por um mínimo, o que significa que a densidade (o inverso do volume



**Fig. 19-12** (a) O volume específico da água como função da temperatura. (b) Uma ampliação do gráfico próximo a  $4^{\circ}\text{C}$ , mostrando o mínimo no volume específico (ou seja, um máximo na densidade).

específico) passa por um máximo. Em qualquer outra temperatura, a densidade da água é menor que esse valor.

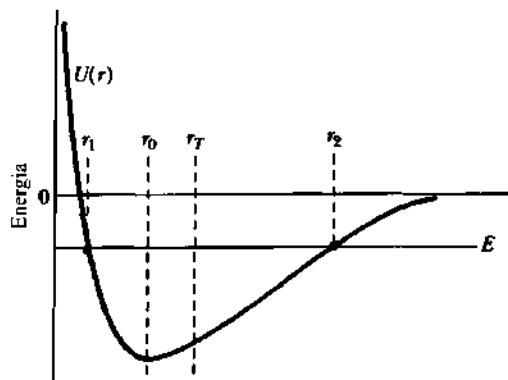
Esse comportamento da água nos faz entender porque os lagos congelam primeiro na superfície. Suponhamos que a água da superfície esteja a  $10^{\circ}\text{C}$ . À medida que a temperatura diminui, ela fica mais densa e se desloca para o fundo. Abaixo de  $4^{\circ}\text{C}$ , no entanto, um maior resfriamento torna a água da superfície *menos* densa que a do fundo; logo, ela permanece na superfície até congelar. Se os lagos congelassem a partir do fundo, o gelo formado não se derreteria completamente durante o verão, pois a água acima dele é um bom isolante térmico. Depois de alguns anos, muitas regiões dos oceanos, nas zonas temperadas da Terra, estariam congeladas o ano inteiro, o que impediria a existência de toda a vida aquática que conhecemos. Quem iria pensar que tanta coisa dependesse do (dificilmente visível) comportamento da água, no canto inferior esquerdo da Fig. 19-12a?

### Expansão Térmica: Uma Visão Atômica

Vejamos se podemos entender por que um sólido se expande, quando sua temperatura aumenta. Os átomos de um sólido cristalino se mantêm coesos num arranjo tridimensional, chamado rede cristalina, sob a ação de forças interatômicas semelhantes às exercidas por molas. Os átomos vibram, em torno de suas posições de equilíbrio na rede, com uma amplitude que aumenta com a temperatura. Se o sólido expande como um todo, a distância média entre átomos vizinhos deve aumentar.

A Fig. 19-13 mostra a curva de energia potencial  $U(r)$  para um par de átomos vizinhos numa rede, onde  $r$  é a sua separação média. A energia potencial tem um mínimo em  $r$  igual a  $r_0$ , o espaçamento de rede que o sólido teria a uma temperatura próxima do zero absoluto. Mais importante, ainda, é o fato da curva não ser simétrica, subindo mais rapidamente ao tentarmos aproximar os átomos ( $r < r_0$ ), que quando tentamos afastá-los ( $r > r_0$ ). As “molas” interatômicas evidentemente não obedecem à lei de Hooke.

Essa falta de simetria da função energia potencial é a responsável pela expansão térmica dos sólidos. A linha hori-



**Fig. 19-13** A energia potencial  $U(r)$  para dois átomos separados por uma distância  $r$ . Quando a energia  $E$  é aumentada (o que acarreta um aumento de temperatura), os átomos podem se mover entre limites maiores. Um sólido cuja curva de energia potencial entre dois átomos vizinhos fosse simétrica, nunca sofreria dilatação térmica.

zontal assinalada com  $E$  mostra a energia mecânica de um par de átomos, a uma temperatura arbitrária  $T$ . Nesta temperatura, a distância entre os átomos pode oscilar entre  $r_1$  e  $r_2$ , sendo  $r_T$  o seu valor médio. Note que  $r_T$  é maior do que  $r_0$ . Além disso,  $r_T$  deve aumentar (deslocar-se para a direita), à medida que a energia  $E$  (e logo, a temperatura) aumenta, porque  $r_2$  se desloca para a direita, de uma distância maior do que o deslocamento de  $r_1$  para a esquerda. Em outras palavras, o espaçamento médio da rede  $r_T$  — e, logo, as dimensões do sólido — aumenta com a temperatura. Se a curva de energia potencial fosse simétrica, o sólido não expandiria com a temperatura;  $r_T$  na Fig. 19-13, seria o mesmo a todas as temperaturas (desde que o sólido não atinja o ponto de fusão ou de vaporização).

**EXEMPLO 19-3** Trilhos ferroviários de aço são colocados, quando a temperatura está a  $0^{\circ}\text{C}$ . Que intervalo deve ser deixado entre os trilhos, para que eles se toquem exatamente quando a temperatura atingir  $42^{\circ}\text{C}$ ? Cada trilho tem 12 m de comprimento.

**Solução** Da Tabela 19-3, o coeficiente de dilatação linear para o aço é  $11 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ . Da Eq. 19-9, temos, então

$$\begin{aligned}\Delta L &= L\alpha \Delta T = (12,0 \text{ m})(11 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C})(42^{\circ}\text{C}) \\ &= 5,5 \times 10^{-3} \text{ m} = 5,5 \text{ mm.} \quad (\text{Resposta})\end{aligned}$$

**EXEMPLO 19-4** Um fio de aço de comprimento  $L = 130 \text{ cm}$  e com diâmetro  $d = 1,1 \text{ mm}$  é aquecido até uma temperatura média de  $830^{\circ}\text{C}$ , e esticado entre dois suportes rígidos. Se o fio é, então, resfriado até  $20^{\circ}\text{C}$ , que tensão aparece nos suportes?

**Solução** Vamos primeiro calcular quanto o fio encolheria se pudesse esfriar sem estar preso. Da Eq. 19-9, temos

$$\begin{aligned}\Delta L &= L\alpha \Delta T = (1,3 \text{ m}) \\ &\times (11 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C})(830^{\circ}\text{C} - 20^{\circ}\text{C}) \\ &= 1,16 \times 10^{-2} \text{ m} = 1,16 \text{ cm.}\end{aligned}$$

No entanto, os suportes não deixam o fio encolher. Logo, vamos calcular que força seria necessária para causar essa deformação no fio. Da Eq. 13-29, obtemos

$$F = \frac{\Delta L EA}{L} = \frac{\Delta L E(\pi/4)d^2}{L},$$

onde  $E$  é o módulo de Young do aço (veja a Tabela 13-1) e  $A$  é a área da seção reta do fio. Substituindo os valores, vem

$$\begin{aligned}F &= (1,16 \times 10^{-2} \text{ m})(200 \times 10^9 \text{ N/m}^2)(\pi/4) \\ &\times \frac{(1,1 \times 10^{-3} \text{ m})^2}{1,3 \text{ m}} \\ &= 1.700 \text{ N.} \quad (\text{Resposta})\end{aligned}$$

Você pode mostrar que esta resposta é independente do comprimento do fio?

Algumas vezes, paredes de tijolos em prédios antigos se deformam (flambam). Costuma-se, então, enfiar uma barra de aço de uma parede à outra, através do edifício. Neste caso, aquecemos a barra e apertamos as porcas colocadas nas extremidades. Quando a barra esfria, aparecem tensões nela, evitando a flambagem das paredes.

**EXEMPLO 19-5** Num dia quente, em Las Vegas, um caminhão tanque foi carregado com 9.785 galões de óleo diesel. Ele encontrou tempo frio no caminho para Payson, Utah, onde a temperatura estava 41°F mais baixa que em Las Vegas, e onde ele entregou toda a carga. Quantos galões foram entregues? O coeficiente de dilatação volumétrica do óleo diesel é  $9,5 \times 10^{-4}/^{\circ}\text{C}$  e o de dilatação linear do tanque do caminhão (feito de aço) é  $11 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ .

**Solução** Da Eq. 19-11

$$\begin{aligned}\Delta V &= V\beta\Delta T = (9.785 \text{ gal}) \\ &\times (9,5 \times 10^{-4}/^{\circ}\text{C})(41^{\circ}\text{F})(5^{\circ}\text{C}/9^{\circ}\text{F}) \\ &= 212 \text{ gal.}\end{aligned}$$

Assim, a quantidade de óleo diesel entregue foi

$$\begin{aligned}V_{\text{ent}} &= V - \Delta V = 9.785 \text{ gal} - 212 \text{ gal} \\ &= 9.573 \text{ gal} \approx 9.600 \text{ gal.}\end{aligned}\quad (\text{Resposta})$$

Note que a expansão térmica do tanque de aço nada tem a ver com o problema. Perguntamos: Quem paga pelo óleo diesel que está “faltando”?

## TÁTICA PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

### TÁTICA 2: UNIDADES PARA VARIAÇÕES DE TEMPERATURA

O coeficiente de dilatação linear  $\alpha$  é definido como a mudança fracional de comprimento (um número adimensional), por variação unitária de temperatura. Na Tabela 19-3, esta variação de temperatura é expressa em graus Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ ). Como qualquer *variação* de temperatura expressa em graus Celsius é, numericamente, igual à mesma variação em kelvins, os dados da Tabela 19-3 também poderiam ser expressos em kelvins.

Por exemplo, o valor de  $\alpha$  para o aço pode ser escrito como  $11 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$  ou  $11 \times 10^{-6}/\text{K}$ . Isto significa que poderíamos ter substituído qualquer um dos dois valores de  $\alpha$ , nos Exemplos 19-3 e 19-4. Poderíamos fazer a mesma coisa com  $\beta$ , no Exemplo 19-5.

Encontraremos situações semelhantes nos capítulos seguintes. Quantidades envolvendo uma variação unitária de temperatura podem ser expressas usando-se a notação  $^{\circ}\text{C}$  ou K.

## RESUMO

### Temperatura; Termômetros

Temperatura é uma quantidade macroscópica relacionada à nossa sensação de quente e frio. É medida por um termômetro, aparelho que contém uma substância com alguma propriedade mensurável, tal como comprimento ou pressão, que varia de maneira regular quando a substância fica mais fria ou mais quente.

### Lei Zero da Termodinâmica

Quando um termômetro e algum outro objeto são colocados em contato, acabam por ficar em equilíbrio térmico. A leitura do termômetro é então considerada a temperatura do objeto. A temperatura assim medida constitui um conceito coerente e útil, de acordo com a **lei zero da termodinâmica**: se dois corpos, A e B, estão isoladamente em equilíbrio com um terceiro corpo C (o termômetro), então A e B estão em equilíbrio térmico entre si.

### A Escala de Temperatura Kelvin

A temperatura é medida no sistema SI, utilizando a **escala Kelvin**, construída definindo-se primeiro o valor da temperatura em que as três fases da água podem coexistir em equilíbrio (o **ponto triplo**). Atribuímos a esta temperatura o valor 273,16 K. As outras são definidas por um **termômetro de gás a volume constante**, em que a temperatura é proporcional à pressão de uma certa quantidade de gás a volume constante. Como gases diferentes fornecem resultados concordantes, somente para densidades muito baixas a **temperatura de gás ideal**, medida com um termômetro de gás, é definida como

$$T = (273,16 \text{ K}) \left( \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{p_3} \right), \quad (19-6)$$

Aqui,  $T$  é a temperatura em graus kelvin, e  $p_1$  e  $p_2$  são as pressões do gás na temperatura de ponto triplo e na que queremos medir, respectivamente. A massa de gás no termômetro é  $m$ .

### Escala Internacional de Temperatura

Vários “pontos fixos” da escala Kelvin têm sido usados para definir a **Escala Internacional de Temperatura**; estes pontos estão listados na Tabela 19-1.

### Escalas Celsius e Fahrenheit

Além da escala Kelvin, são de uso comum duas outras escalas de temperatura: a escala Celsius, definida por

$$T_{\text{C}} = T - 273,15^{\circ}, \quad (19-7)$$

e a escala Fahrenheit, definida por

$$T_{\text{F}} = \frac{9}{5}T_{\text{C}} + 32^{\circ}. \quad (19-8)$$

### Expansão Térmica

Todos os corpos alteram suas dimensões quando sua temperatura varia. A mudança  $\Delta L$ , em qualquer dimensão linear do corpo, é dada por

$$\Delta L = L\alpha\Delta T, \quad (19-9)$$

onde  $\alpha$  é o **coeficiente de dilatação linear**. A variação de volume  $\Delta V$  para um sólido ou um líquido é

$$\Delta V = V\beta\Delta T. \quad (19-11)$$

Aqui  $\beta = 3\alpha$  é o **coeficiente de dilatação volumétrica** do material.

## QUESTIONÁRIO

1. Temperatura é um conceito microscópico ou macroscópico?

2. Existem quantidades físicas, além da temperatura, que tendem a se distribuir de maneira uniforme, quando dois sistemas diferentes são postos em contato?

3. Um pedaço de gelo e um termômetro mais quente são colocados num recipiente hermeticamente fechado, no vácuo. O gelo e o termômetro estão suspensos de tal maneira, que não ficam em contato. Por que a leitura no termômetro diminui, após algum tempo?

4. Seja  $p_A$  a pressão dentro do bulbo de um termômetro de gás, a volume constante, quando o bulbo está na temperatura do ponto triplo (273,16 K), e  $p$  a mesma pressão, quando está à temperatura ambiente. São dados três termômetros de gás a volume constante,  $A$ ,  $B$ , e  $C$ : para  $A$ , o gás é oxigênio e  $p_3 = 20$  cm de Hg; para  $B$ , é também oxigênio, mas  $p_3 = 40$  cm de Hg; para  $C$ , é hidrogênio e  $p_3 = 30$  cm de Hg. Os valores medidos de  $p$  para os três termômetros são  $p_A$ ,  $p_B$  e  $p_C$ . (a) Um valor aproximado da temperatura ambiente  $T$  pode ser obtido, com cada um dos termômetros, usando

$$T_A = 273,16 \text{ K} \frac{p_A}{20 \text{ cm Hg}}; \quad T_B = 273,16 \text{ K} \frac{p_B}{40 \text{ cm Hg}};$$

$$T_C = 273,16 \text{ K} \frac{p_C}{30 \text{ cm Hg}}.$$

Examine cada uma das afirmativas a seguir, determinando se é verdadeira ou falsa. (1) Com o método descrito acima, os três termômetros darão o mesmo valor para  $T$ . (2) Os dois termômetros de oxigênio concordarão um com o outro, mas não concordarão com o de hidrogênio. (3) Cada um dos termômetros dará um valor diferente de  $T$ . (b) No caso dos três termômetros discordarem entre si, explique como você modificaria o método de efetuar medidas com ele, para que todos fornecessem o mesmo valor de  $T$ .

5. Disseram a um estudante que a temperatura no centro do Sol é cerca de  $1,5 \times 10^7$  graus. Ele perguntou se essa temperatura estava na escala Celsius ou Kelvin. Como você responderia? Se perguntasse se a escala era Celsius ou Fahrenheit, como responderia?

6. O editor de uma conhecida revista de negócios, escrevendo sobre possíveis efeitos globais de aquecimento associados com o aumento da concentração de dióxido de carbono na atmosfera, disse: "As regiões polares poderiam ser três vezes mais quentes do que agora..." O que você acha que ele queria dizer? (Ver o artigo "Aquecimento e Temperatura: Uma Comédia de Erros", de Albert A. Bartlett, *The Physics Teacher*, November 1984.)

7. Embora pareça ser impossível atingir o zero absoluto de temperatura, temperaturas tão baixas quanto 0,000000002 K foram alcançadas em laboratórios. Isto não seria suficiente para todos os fins práticos? Por que os físicos deveriam (como realmente fazem) tentar obter temperaturas ainda mais baixas?

8. Podemos associar uma temperatura ao vácuo?

9. Nosso "sentido de temperatura" tem um senso de direção? Isto é, mais quente significa, necessariamente, temperatura mais alta, ou é só uma questão de convenção? Anders Celsius (que deu seu nome à escala Celsius) escolheu originalmente o ponto de ebulição da água a  $0^\circ\text{C}$  e o ponto de fusão (congelamento) a  $100^\circ\text{C}$ .

10. Muitos rótulos de remédios informam que devem ser guardados em lugar à temperatura abaixo de  $86^\circ\text{F}$ . Por que  $86$ ? (Sugestão: Mude para graus Celsius.)

11. Que sugestão você daria para medir as temperaturas (a) do Sol, (b) da camada superior da atmosfera da Terra, (c) de um inseto, (d) da Lua, (e) do fundo de um oceano e (f) do hélio líquido?

12. Para construir um termômetro de gás a volume constante, algum gás é melhor do que o outro? Que propriedades são desejáveis para um gás a ser utilizado no termômetro?

13. Dê algumas razões para não usarmos água no bulbo de um termômetro. Por que o mercúrio é melhor?

14. Explique por que, quando colocamos um termômetro de mercúrio numa chama, a coluna de mercúrio desce um pouco, antes de começar a subir.

15. O que as escalas Celsius e Fahrenheit têm em comum?

16. Quais são as dimensões de  $\alpha$ , o coeficiente de dilatação linear? O valor de  $\alpha$  depende da unidade de comprimento usada? Quando usamos graus Fahrenheit em vez de Celsius, como unidades de variação de temperatura, como isso afeta o valor numérico de  $\alpha$ ?

17. Uma bola de metal pode passar através de um anel. O que aconteceria se aquecêssemos o anel, em vez da bola?

18. Duas lâminas, uma de ferro e outra de zinco, são rebitadas uma na outra, formando uma barra que se encurva quando é aquecida. Por que a parte de ferro fica sempre no interior da curva?

19. Podemos fazer com que o período de um relógio de pêndulo fique independente da temperatura, prendendo tubos com mercúrio em posição vertical ao fundo do pêndulo. Explique como.

20. Por que uma chaminé nunca deve fazer parte da estrutura de uma casa, devendo ter alicerces próprios?

21. A água se expande quando congela. Podemos definir um coeficiente de dilatação volumétrica para o processo de congelamento?

22. Explique por que a dilatação aparente de um líquido num tubo de vidro, quando aquecido, não corresponde à verdadeira expansão do líquido.

## EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

## Seção 19-4 Medindo a Temperatura

1E. Para medir temperaturas, os físicos e os astrônomos usam, com frequência, a variação de intensidade da radiação eletromagnética emitida por um objeto. O comprimento de onda para o qual a intensidade é máxima, é dado por

$$\lambda_{\text{max}} T = 0,2898 \text{ cm} \cdot \text{K},$$

onde  $\lambda_{\text{max}}$  é o comprimento de onda associado à intensidade máxima e  $T$  é a temperatura do objeto em K. Em 1965, uma radiação de microondas com  $\lambda_{\text{max}} = 0,107$  cm foi descoberta, vinda de todas as direções do espaço. A que temperatura este comprimento de onda corresponde? Essa radiação de fundo é interpretada como um resíduo do Big Bang, que teria acontecido a cerca de 15 bilhões de anos, quando o universo começou rapidamente a se expandir e esfriar.



**2E.** Um *termopar* é formado quando dois pedaços de materiais diferentes se tocam em dois pontos, aquecidos a temperaturas diferentes. Aparece então uma pequena diferença de potencial elétrico entre os dois pontos de contato. Num termopar feito com ferro e constantan, um dos pontos está a  $0,000^{\circ}\text{C}$ , e a voltagem varia linearmente desde  $0,000$  até  $28,0\text{ mV}$ , à medida que a temperatura do outro ponto sobe de  $0,000$  até  $510^{\circ}\text{C}$ . Ache a temperatura deste outro ponto quando a voltagem era de  $10,2\text{ mV}$ .

**3E.** A amplificação ou *ganho* de um amplificador transistorizado pode depender da temperatura. À temperatura ambiente ( $20,0^{\circ}\text{C}$ ), o ganho de um certo amplificador é  $30,0$ , enquanto a  $55,0^{\circ}\text{C}$  é  $35,2$ . Qual seria o ganho a  $30,0^{\circ}\text{C}$ , se dependesse linearmente da temperatura, dentro desta faixa limitada?

**4E.** Se a temperatura de um gás no ponto de vapor é de  $373,15\text{ K}$ , qual é o valor limite da razão entre a pressão do gás no ponto de vapor e a sua pressão no ponto triplo da água? (Suponha que o volume do gás é o mesmo nas duas temperaturas.)

**5E.** Um *termômetro de resistência* é aquele que utiliza a variação da resistência elétrica com a temperatura de uma substância. Podemos definir as temperaturas medidas por esse termômetro, em Kelvins (K), como sendo diretamente proporcionais à resistência  $R$ , medida em ohms ( $\Omega$ ). Um certo termômetro de resistência, quando seu bulbo é colocado na água à temperatura do ponto triplo ( $273,16\text{ K}$ ), tem uma resistência  $R$  de  $90,35\ \Omega$ . Qual a leitura do termômetro, quando sua resistência for  $96,28\ \Omega$ ?

**6P.** Dois termômetros de gás a volume constante são usados em conjunto. Um deles usa nitrogênio e o outro, hidrogênio. A pressão de gás em ambos os bulbos é  $p_1 = 80\text{ mm de Hg}$ . Qual é a diferença da pressão nos dois termômetros, se colocarmos ambos em água fervendo? Em qual dos termômetros a pressão será mais alta?

**7P.** Um termômetro de gás consiste em dois bulbos (Fig. 19-14), cada um colocado num recipiente com água. A diferença de pressão entre os dois bulbos é medida por um manômetro de mercúrio, como mostra a figura. O volume de gás nos dois bulbos é mantido constante, usando reservatórios apropriados, que não aparecem na figura. Quando os dois recipientes estão à temperatura do ponto triplo da água, a diferença de pressão indicada pelo manômetro é zero. Quando um dos recipientes está na temperatura do ponto triplo e o outro na do ponto de ebulição da água, o manômetro indica  $120\text{ mm de Hg}$ . Finalmente, o manômetro indica  $90,0\text{ mm de Hg}$ , quando um dos recipientes está à temperatura do ponto triplo e o outro está a uma temperatura desconhecida. Qual é a temperatura desconhecida?

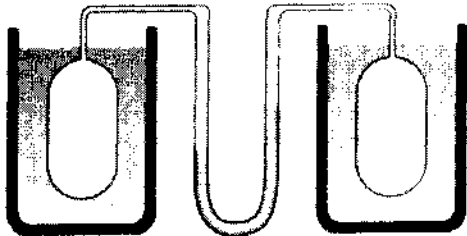


Fig. 19-14 Problema 7.

**8P.** Um *termistor* é um componente semicondutor cuja resistência elétrica depende da temperatura. Costuma ser usado em termômetros clínicos e também para detectar superaquecimento em equipamentos eletrônicos. Dentro de uma faixa limitada de temperatura, a resistência é dada por

$$R = R_0 e^{B(1/T - 1/T_0)},$$

onde  $R$  é a resistência do termistor à temperatura  $T$  e  $R_0$  é a resistência à temperatura  $T_0$ ;  $B$  é uma constante que depende do material semicondutor

utilizado. Para um tipo de termistor,  $B = 4.689\text{ K}$ , e a resistência a  $273\text{ K}$  é  $1,00 \times 10^4\ \Omega$ . Que temperatura o termistor mede quando sua resistência é  $100\ \Omega$ ?

### Seção 19-6 As Escalas Celsius e Fahrenheit

**9E.** No seu 44.º aniversário, o cantor Tom Rush disse: "Prefiro dizer que estou fazendo  $5\text{ Celsius}$ ." Tom fez a conta correta? Se não, qual era a sua "idade em graus Celsius"?

**10E.** A que temperatura a escala Fahrenheit indica uma leitura igual a (a) duas vezes a da escala Celsius e (b) metade da escala Celsius?

**11E.** Se o médico lhe diz que a sua temperatura é  $310^{\circ}$  acima do zero grau absoluto, você deve ficar preocupado? Explique por quê.

**12E.** (a) Em 1964, a temperatura na aldeia siberiana Oymyakon chegou a  $-71^{\circ}\text{C}$ . A que temperatura isso corresponde na escala Fahrenheit? (b) A temperatura mais alta já registrada nos Estados Unidos foi de  $134^{\circ}\text{F}$ , no Vale da Morte, na Califórnia. Qual o valor desta temperatura na escala Celsius?

**13E.** (a) A temperatura na superfície do Sol é cerca de  $6.000\text{ K}$ . Expresse este valor na escala Fahrenheit. (b) Expresse a temperatura normal do corpo humano,  $98,6^{\circ}\text{F}$ , na escala Celsius. (c) A temperatura mais baixa registrada nos Estados Unidos foi  $-70^{\circ}\text{F}$  em Rogers Pass, Montana. Expresse este valor na escala Celsius. (d) Expresse a temperatura do ponto de ebulição do oxigênio,  $-183^{\circ}\text{C}$  à pressão normal, na escala Fahrenheit. (e) A que temperatura Celsius um aposento começa a ficar desconfortavelmente quente?

**14E.** A que temperatura os seguintes pares de escalas dão a mesma leitura: (a) Fahrenheit e Celsius (veja Tabela 19-2), (b) Fahrenheit e Kelvin e (c) Celsius e Kelvin?

**15P.** Suponha que, numa escala de temperatura  $X$ , a água ferva a  $-53,5^{\circ}\text{X}$  e congele a  $-170^{\circ}\text{X}$ . Qual o valor de  $340\text{ K}$ , na escala  $X$ ?

**16P.** No intervalo entre o ponto de congelamento da água e  $700,0^{\circ}\text{C}$ , um termômetro de resistência de platina é usado para interpolar temperaturas na Escala Internacional de Temperatura. A temperatura na escala Celsius  $T_C$  é dada por uma fórmula para variação da resistência com a temperatura:

$$R = R_0(1 + AT_C + BT_C^2)$$

onde  $R_0$ ,  $A$  e  $B$  são constantes determinadas por medidas no ponto de gelo, no ponto de vapor e no ponto de fusão do zinco. (a) Se  $R$  vale  $10,000\ \Omega$  no ponto de gelo,  $13,946\ \Omega$  no de vapor e  $24,172\ \Omega$  no de fusão do zinco, encontre  $R_0$ ,  $A$  e  $B$ . (b) Trace o gráfico de  $R$  em função de  $T_C$ , na faixa de temperatura de  $0$  a  $700,0^{\circ}\text{C}$ .

**17P.** Observamos, no dia-a-dia, que objetos, quentes ou frios, esfriam ou aquecem até adquirir a temperatura ambiente. Se a diferença de temperatura  $\Delta T$  entre o objeto e o ambiente não for muito grande, a taxa de esfriamento ou aquecimento será proporcional à diferença de temperatura, isto é,

$$\frac{d\Delta T}{dt} = -A(\Delta T),$$

onde  $A$  é uma constante. O sinal menos aparece porque  $\Delta T$  diminui com o tempo, se for positivo, e aumenta, se negativo. Esta é a *lei de Newton do resfriamento*. (a) De que fatores depende  $A$ ? Qual a sua dimensão? (b) Se no instante  $t = 0$  a diferença de temperatura for  $\Delta T_0$ , mostre que

$$\Delta T = \Delta T_0 e^{-At}$$

num instante posterior  $t$ .

**18P.** O aquecedor de uma casa quebra, num dia em que a temperatura ambiente é  $7,0^{\circ}\text{C}$ . Devido a isso, a temperatura dentro da casa cai de  $22^{\circ}\text{C}$  para  $18^{\circ}\text{C}$ , em 1,0 h. A proprietária desliga o aquecedor e aumenta o isolamento da casa. Com isso, em outro dia semelhante, é necessário o dobro de tempo para a temperatura no interior da casa cair de  $22^{\circ}\text{C}$  para  $18^{\circ}\text{C}$ , sem aquecedor. Qual a razão entre o valor da constante  $A$ , que aparece na lei de Newton de resfriamento (Problema 17), antes e depois de aumentar o isolamento da casa?

**19P.** Colocamos um termômetro de mercúrio na água fervendo por alguns minutos e depois o removemos. A tabela a seguir mostra as leituras do termômetro para vários instantes após a sua retirada. Trace o gráfico de  $A$  como uma função do tempo, supondo que a lei de resfriamento de Newton se aplica (Problema 17). Até que ponto é razoável tal suposição?

$t$ (s)	$T$ ( $^{\circ}\text{C}$ )	$t$ (s)	$T$ ( $^{\circ}\text{C}$ )
0,0	98,4	100	50,3
5,0	76,1	150	43,7
10	71,1	200	38,8
15	67,7	300	32,7
20	66,4	500	27,8
25	65,1	700	26,5
30	63,9	1.000	26,1
40	61,6	1.400	26,0
50	59,4	2.000	26,0
70	55,4	3.000	26,0

**Seção 19-7 Expansão Térmica**

**20E.** Uma barra de aço mede exatamente 20 cm a  $30^{\circ}\text{C}$ . Qual o seu comprimento a  $50^{\circ}\text{C}$ ?

**21E.** Um mastro de bandeira de alumínio tem 33 m de altura. De quanto aumenta o seu comprimento, se a temperatura aumentar  $15^{\circ}\text{C}$ ?

**22E.** O espelho de vidro pirex no telescópio do observatório de Monte Palomar tem 200" de diâmetro. Qual a variação no diâmetro do espelho, quando a temperatura vai do mínimo de  $-10^{\circ}\text{C}$  até o máximo de  $50^{\circ}\text{C}$ ?

**23E.** Um orifício circular numa placa de alumínio tem 2,725 cm de diâmetro a  $0,000^{\circ}\text{C}$ . Qual o seu diâmetro a  $100,0^{\circ}\text{C}$ ?

**24E.** Uma barra feita com uma liga de alumínio mede 10,000 cm a  $20,000^{\circ}\text{C}$  e 10,015 cm, no ponto de ebulição da água. (a) Qual o seu comprimento, no ponto de congelamento da água? (b) Qual a sua temperatura, se o seu comprimento é 10,009 cm?

**25E.** (a) Expresse o coeficiente de dilatação linear do alumínio, usando a escala Fahrenheit. (b) Use a sua resposta para calcular a variação do comprimento de uma barra de alumínio de 20 pés, aquecida de  $40^{\circ}\text{F}$  a  $95^{\circ}\text{F}$ .

**26E.** Logo depois que a Terra se formou, o calor causado pelo decaimento de elementos radioativos aumentou a temperatura interna média de 300 para  $3.000\text{ K}$ , que é, aproximadamente, o valor atual. Supondo um coeficiente de dilatação volumétrica médio de  $3,0 \times 10^{-5}\text{ K}^{-1}$ , de quanto aumentou o raio da Terra, desde a sua formação?

**27E.** Uma barra mede exatamente 20,05 cm, medidos com uma régua de aço a  $20^{\circ}\text{C}$ . Colocamos a barra e a régua num forno a  $270^{\circ}\text{C}$  e, nestas condições, medimos a barra com a régua, obtendo 20,11 cm. Qual o coeficiente de dilatação da barra?

**28E.** O acelerador linear de Stanford contém centenas de discos de latão ajustados com exatidão a um tubo de aço. O sistema foi construído, resfriando os discos em gelo seco ( $-78,0^{\circ}\text{C}$ ), para que pudessem entrar no tubo. Sendo 80,00 mm o diâmetro do disco a  $43^{\circ}\text{C}$ , qual o diâmetro quando está no gelo seco?

**29E.** Uma janela de vidro mede exatamente  $20 \times 30\text{ cm}$  a  $10^{\circ}\text{C}$ . De quanto aumenta a sua área, quando a temperatura é  $40^{\circ}\text{C}$ ?

**30E.** Um cubo de latão tem aresta 30 cm. Qual o aumento de sua área, se a temperatura subir de 20 para  $75^{\circ}\text{C}$ ?

**31E.** Ache a variação no volume de uma esfera de alumínio (raio = 10 cm), quando é aquecida de 0 a  $100^{\circ}\text{C}$ .

**32E.** Qual o volume de uma bola de chumbo a  $30^{\circ}\text{C}$ , se a  $60^{\circ}\text{C}$  é  $50\text{ cm}^3$ ?

**33E.** De quanto aumenta o volume de um cubo de alumínio de 5,00 cm de aresta, quando aquecido de  $10,0$  a  $60,0^{\circ}\text{C}$ ?

**34E.** Uma caneca de alumínio de  $100\text{ cm}^3$  está cheia de glicerina a  $22^{\circ}\text{C}$ . Quanta glicerina derramará, se a temperatura do sistema subir para  $28^{\circ}\text{C}$ ? (O coeficiente de dilatação da glicerina é  $= 5,1 \times 10^{-4}/^{\circ}\text{C}$ .)

**35E.** Fixamos firmemente as extremidades de uma barra de aço e, em seguida, a resfriamos. O processo começa a  $25^{\circ}\text{C}$ . A que temperatura a barra se romperá? Veja Tabela 13-1.

**36P.** Uma barra de aço a  $25^{\circ}\text{C}$  tem 3,00 cm de diâmetro. Um anel de latão tem diâmetro interior de 2,992 cm a  $25^{\circ}\text{C}$ . A que temperatura comum o anel se ajustará exatamente à barra?

**37P.** A área  $A$  de uma placa retangular é  $ab$ . O coeficiente de dilatação linear é  $\alpha$ . Depois de um aumento de temperatura  $\Delta T$ , o lado  $a$  aumentou de  $\Delta a$  e  $b$  de  $\Delta b$ . Mostre que, desprezando a quantidade pequena  $\Delta a \times \Delta b/ab$  (veja Fig. 19-15),  $\Delta A = 2\alpha A \Delta T$ .

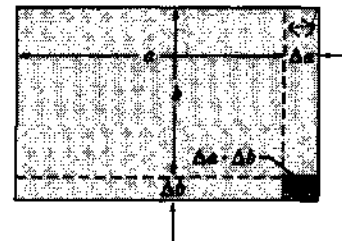


Fig. 19-15 Problema 37.

**38P.** Prove que, desprezando quantidades muito pequenas, o aumento de volume de um sólido, quando a temperatura aumenta de  $\Delta T$ , é de  $\Delta V = 3\alpha V \Delta T$ , onde  $\alpha$  é o coeficiente de dilatação linear (veja as Eqs. 19-11 e 19-12).

**39P.** Densidade é massa dividida por volume. Como o volume depende da temperatura, a densidade também depende. Mostre que, se a temperatura variar de  $\Delta T$ , a variação de densidade será

$$\Delta \rho = -\beta \rho \Delta T,$$

onde  $\beta$  é o coeficiente de dilatação volumétrica. Explique o sinal negativo.

**40P.** Quando a temperatura de um cilindro metálico vai de  $0,0^{\circ}\text{C}$  a  $100^{\circ}\text{C}$ , seu comprimento aumenta em 0,23%. (a) Encontre o aumento percentual na densidade do cilindro. (b) De que metal é feito o cilindro?

**41P.** Mostre que, quando a temperatura de um líquido num barômetro varia de  $\Delta T$ , à pressão constante, a altura  $h$  varia de  $\Delta h = \beta h \Delta T$ , onde  $\beta$  é o coeficiente de expansão volumétrica. Despreze a dilatação do vidro.

**42P.** A temperatura de uma moeda de cobre aumenta de  $100^{\circ}\text{C}$  e seu diâmetro cresce 0,18%. Dê o aumento percentual, com dois algarismos significativos, (a) na área, (b) na espessura, (c) no volume e (d) na massa da moeda. (e) Qual o coeficiente de dilatação linear da moeda?

43P. O pêndulo de um relógio feito de invar (Tabela 19-3) tem período de 0,50 s e é exato a 20°C. Se levamos o relógio para um local à temperatura 30°C, qual a correção necessária aproximada do relógio, após 30 dias?

44P. Um relógio de pêndulo feito de latão é exato a 20°C. Qual será o erro, em segundos por hora, com o relógio a 0,0°C?

45P. O ritmo de um certo relógio elétrico é sincronizado por um pequeno diapásão. A frequência deste é inversamente proporcional à raiz quadrada do seu comprimento. Qual a perda ou o ganho fracional de tempo, para um diapásão de quartzo de 8 mm a (a) -40,0°F e (b) 120°F, se ele é exato a 25°F?

46P. (a) Mostre que, se os comprimentos de duas barras de materiais diferentes são inversamente proporcionais aos seus respectivos coeficientes de dilatação linear, à mesma temperatura inicial, a diferença em comprimento entre elas será a mesma, a todas as temperaturas. (b) Quais devem ser os comprimentos de uma barra de aço e outra de latão a 0,00°C, tais que, a qualquer temperatura, a diferença de comprimento seja 0,30 m?

47P. Uma barra com uma rachadura no centro entorta para cima com um aumento de temperatura de 32°C (Fig. 19-6). Se  $L_0 = 3,77$  m e o coeficiente de dilatação linear é  $25 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ , ache  $x$  (Fig. 19-16).

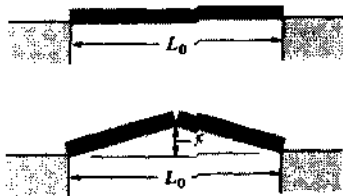


Fig. 19-16 Problema 47.

48P. Numa experiência, precisamos mover uma fonte radioativa a velocidades extremamente baixas. Isto foi feito, prendendo a fonte a um extremo de uma barra de alumínio e aquecendo a parte central da barra, de maneira controlada. Se a parte aquecida da barra mede 2 cm (Fig. 19-17) a que taxa constante devemos aquecer a barra, para que a fonte se mova a 100 nm/s?

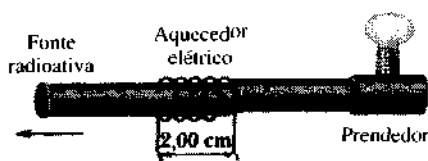


Fig. 19-17 Problema 48.

49P. Um tubo de vidro vertical de 1,28 m está cheio até a metade com um líquido a 20°C. Qual a variação da altura da coluna líquida, se aquecermos o tubo até 30°C? Considere  $\alpha_{\text{vidro}} = 1,0 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$  e  $\beta_{\text{líquido}} = 4,0 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$ .

50P. Uma barra, composta de comprimento  $L = L_1 + L_2$ , é feita de uma barra de material 1 e comprimento  $L_1$ , ligada a outra de material 2 e comprimento  $L_2$  (Fig. 19-18). (a) Mostre que o coeficiente de dilatação linear efetivo para esta barra é  $\alpha = (\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2)/L$ . (b) Usando aço e latão, dimensione uma barra composta de 52,4 cm e coeficiente de dilatação linear efetivo  $13,0 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ .



Fig. 19-18 Problema 50.

51P. Uma espessa barra de alumínio e um fio de aço estão ligados em paralelo (Fig. 19-19). A temperatura é de 10,0°C. Ambos têm comprimento 85,0 cm e nenhum dos dois está tensionado. O sistema é aquecido até 120°C. Calcule a tensão resultante no fio, supondo que a barra se expande livremente.

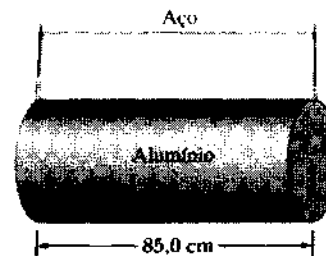


Fig. 19-19 Problema 51.

52P\*. Três barras de comprimentos iguais feitas de alumínio, invar e aço estão a 20°C, formando um triângulo equilátero com pinos de fixação nos vértices. A que temperatura o ângulo oposto à barra de invar será 59,95°? Use o Apêndice G para obter as fórmulas trigonométricas necessárias.

53P\*. Duas barras de materiais diferentes, mas com o mesmo comprimento  $L$  e seção reta igual à  $A$  são colocadas, como na Fig. 19-20a. A temperatura é  $T$  e não há tensão inicial. A temperatura é aumentada em  $\Delta T$ . (a) Mostre que a interface entre as barras é deslocada de uma quantidade dada por

$$\Delta L = \left( \frac{\alpha_1 E_1 - \alpha_2 E_2}{E_1 + E_2} \right) L \Delta T$$

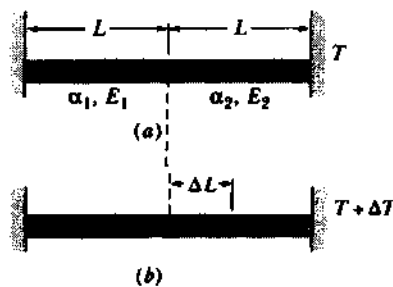


Fig. 19-20 Problema 53.

onde  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são os coeficientes de dilatação linear e  $E_1$  e  $E_2$  são os módulos de Young dos materiais. Despreze mudanças nas seções retas. (b) Ache a tensão na interface após o aquecimento.

54P\*. Um cubo de alumínio de aresta 20,0 cm flutua em mercúrio. Quanto afundará o cubo, se a temperatura subir de 270 para 320 K? (O coeficiente de dilatação volumétrica do mercúrio é  $1,80 \times 10^{-4}/^\circ\text{C}$ .)

# CALOR E A PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA

# 20



*Um objeto com superfície negra esquenta muito mais que um de superfície branca, quando ambos são expostos à luz do Sol. Tal fato é válido para os mantos que os beduínos vestem no deserto do Sinai: mantos negros esquentam muito mais que os brancos. Por que então um beduíno sempre veste um manto negro? Este tipo de vestimenta não poderia diminuir suas chances de sobrevivência no clima árido do deserto?*

## 20-1 Calor

Se você pega uma lata de refrigerante da geladeira e a deixa na mesa da cozinha, sua temperatura irá aumentar — rapidamente no começo e depois de forma mais lenta — até que se iguale à temperatura da cozinha. Do mesmo modo, a temperatura de uma xícara de café quente, deixada na mesa, irá diminuir até atingir a temperatura do ambiente.

Para generalizar essa situação, descreveremos o refrigerante ou o café como o *sistema* (temperatura  $T_S$ ) e as partes relevantes da cozinha como o *ambiente* (temperatura  $T_A$ ) daquele sistema. Nossa observação é que, se  $T_S$  não for igual a  $T_A$ ,  $T_S$  irá mudar até que as duas temperaturas se igualem (Fig. 20-1).

Tal mudança na temperatura se deve à troca de uma forma de energia entre o sistema e o seu ambiente. Esta energia é a *energia interna* (ou *energia térmica*), que é soma das energias cinética e potencial, associada aos movimentos aleatórios dos átomos, moléculas e outros corpos mi-

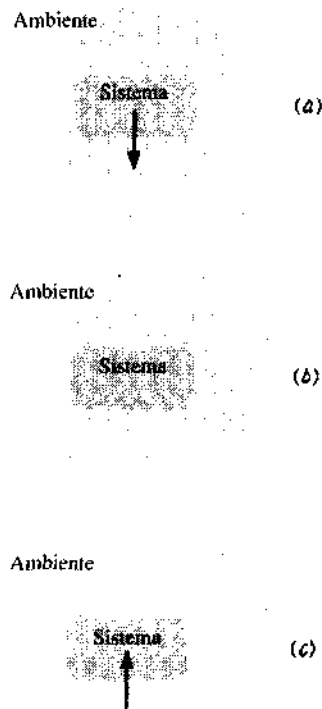
croscópicos que fazem parte do objeto. A energia interna transferida é chamada **calor** e é simbolizada por  $Q$ . O calor é *positivo* quando a energia interna é transferida para um sistema, vinda de seu ambiente (dizemos que o calor é absorvido). O calor é *negativo* quando a energia interna é transferida de um sistema para seu ambiente (dizemos que o calor é liberado ou perdido).

Na situação da Fig. 20-1a, onde  $T_S > T_A$ , energia interna é transferida do sistema para o ambiente, assim  $Q$  é negativo. Na Fig. 20-1b, onde  $T_S = T_A$ , não há transferência,  $Q$  é zero e o calor não é perdido nem absorvido. Na Fig. 20-1c, onde  $T_S < T_A$ , a transferência é do ambiente para o sistema, assim  $Q$  é positivo.

Ficamos então com esta definição de calor:

---

Calor é a energia que é transferida entre um sistema e seu ambiente, devido a uma diferença de temperatura que existe entre eles.



**Fig. 20-1** (a) Se a temperatura do sistema excede a de seu ambiente, o calor é perdido pelo sistema para o ambiente até que o equilíbrio térmico seja estabelecido, como em (b). (c) Se a temperatura do sistema é menor do que a de seu ambiente, o calor é absorvido pelo sistema até que o equilíbrio térmico seja estabelecido.

Se você quiser saber se o calor está sendo absorvido ou perdido, a pergunta-chave é: “Qual a diferença de temperatura?”

Energia também pode ser trocada entre um sistema e seu ambiente através de um *trabalho* (símbolo  $W$ ), que sempre associamos a uma força agindo sobre um sistema, durante um deslocamento do mesmo. Se quiser saber se um trabalho está sendo feito sobre ou por um sistema, a pergunta-chave é: “Qual é a força e como se move o seu ponto de aplicação?”

Tanto o calor quanto o trabalho representam trocas de energia entre um sistema e seu ambiente. Calor e trabalho, diferente de temperatura, pressão e volume, não são propriedades intrínsecas de um sistema. Eles têm significado apenas enquanto descrevem a transferência de energia de ou para um sistema, adicionando-se ou subtraindo-se ao total de *energia interna* do sistema. Assim, é correto dizer: “Durante os últimos 3 min, 15 J de calor foram transferidos do sistema para seu ambiente” ou “Durante o último minuto, 12 J de trabalho foram feitos sobre o sistema pelo seu ambiente”. É errado dizer: “Este sistema contém 450 J de calor” ou “Este sistema contém 385 J de trabalho”. A relação entre calor, trabalho e energia interna (ou térmica) é resumida na primeira lei da termodinâmica, o tema deste capítulo.

No uso popular, a palavra “calor” é freqüentemente usada onde deveria estar “temperatura”. Por exemplo, quando

dizemos: “Está um dia quente!”, estamos na verdade nos referindo à temperatura e não ao calor. Não confunda essas duas quantidades totalmente diferentes.

## 20-2 Medindo o Calor: Unidades

Antes dos cientistas descobrirem que calor é energia transferida, ele era medido em termos da sua capacidade para aumentar a temperatura da água. Assim, a **caloria** (cal) era definida como a quantidade de calor que era preciso para elevar a temperatura de 1 g de água de 14,5 para 15,5°C. No sistema inglês, a unidade de calor correspondente era a **unidade térmica inglesa** (*British thermal unit* — Btu), definida como a quantidade de calor necessária para aumentar a temperatura de 1 lb de água de 63 para 64°F.

Em 1948, a comunidade científica decidiu que, como o calor (e o trabalho) é energia transferida, a unidade SI para o calor deveria ser a mesma para a energia, ou seja, **joule**. A caloria foi então definida como 4,1860 J (exatamente), sem referência ao aquecimento da água. A “caloria” usada na nutrição, algumas vezes chamada de Caloria (Cal), é na verdade a quilocaloria.

As relações entre as várias unidades de calor são:

$$\begin{aligned} 1 \text{ J} &= 0,2389 \text{ cal} = 9,481 \times 10^{-4} \text{ Btu}, \\ 1 \text{ Btu} &= 1,055 \text{ J} = 252,0 \text{ cal}, \\ 1 \text{ cal} &= 3,969 \times 10^{-3} \text{ Btu} = 4,186 \text{ J}, \\ 1 \text{ Cal} &= 10^3 \text{ cal} = 3,969 \text{ Btu} = 4,186 \text{ J}. \end{aligned} \quad (20-1)$$

Em trabalhos científicos, o calor tem sido cada vez mais expresso em joules, com a caloria e o Btu sendo gradativamente abandonados. Entretanto, a caloria continua a ser usada em algumas áreas da química e o Btu em alguns aspectos da prática da engenharia.

## 20-3 Absorção de Calor por Sólidos e Líquidos

### Capacidade Calorífica

A **capacidade calorífica**  $C$  de um objeto (por exemplo, uma garrafa de café ou uma placa de mármore) é a constante de proporcionalidade entre uma quantidade de calor e a variação de temperatura que esta mesma quantidade de calor produz no objeto. Assim,

$$Q = C(T_f - T_i), \quad (20-2)$$

onde  $T_i$  e  $T_f$  são as temperaturas inicial e final do objeto, respectivamente. A capacidade calorífica  $C$  de uma placa de mármore usada para se colocar um bolo quente pode ser, por exemplo, 179 cal/°C, que também pode ser escrita como 179 cal/K ou 747 J/K.

A palavra “capacidade”, neste contexto, realmente confunde pois sugere uma analogia à capacidade de um balde para armazenar água. A analogia é falsa e você não deve

pensar que o objeto “contém” calor ou tenha alguma limitação na sua capacidade de absorvê-lo a partir desta capacidade. A transferência de calor pode ocorrer sem limite, enquanto a diferença de temperatura for mantida. O objeto pode, é claro, derreter ou vaporizar durante esse processo.

**Calor Específico**

Dois objetos feitos do mesmo material, mármore por exemplo, terão capacidades caloríficas proporcionais às suas massas. Assim, é conveniente definir uma “capacidade calorífica por unidade de massa” ou **calor específico** *c*, que se refere não a um objeto, mas a uma unidade de massa do qual o material é feito. A Equação 20-2 se torna, então,

$$Q = cm(T_f - T_i) \tag{20-3}$$

Através de experimentos encontraremos que, embora a capacidade calorífica da placa de mármore mencionada seja 179 cal/°C (ou 747 J/K), o calor específico do mármore (nesta placa ou em qualquer outra) é 0,21 cal/g·°C (ou 880 J/kg·K).

Da maneira que a caloria e a Btu foram inicialmente definidas, o calor específico da água é

$$\begin{aligned} c &= 1 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C} = 1 \text{ Btu/lb} \cdot ^\circ\text{F} \\ &= 4190 \text{ J/kg} \cdot \text{K} \end{aligned} \tag{20-4}$$

A Tabela 20-1 mostra o calor específico de algumas substâncias à temperatura ambiente. Note que o valor para a água é relativamente alto. O valor do calor específico de qualquer substância, na realidade, depende da temperatura, mas os valores da Tabela 20-1 aplicam-se bem em temperaturas próximas à ambiente.

**Calor Específico Molar**

Em muitas situações, a unidade mais conveniente para especificar a quantidade de uma substância é o mole (mol), onde

$$1 \text{ mol} = 6,02 \times 10^{23} \text{ unidades elementares}$$

da substância (ou de *qualquer* substância). Assim, um mol de alumínio significa  $6,02 \times 10^{23}$  átomos (sendo o átomo a unidade elementar) e um mol de óxido de alumínio significa  $6,02 \times 10^{23}$  moléculas de óxido (porque a molécula é a unidade elementar do composto).

Quando quantidades são expressas em moles, o calor específico também precisa ser em moles (em vez de uma unidade de massa); é então chamado de **calor específico molar**. A Tabela 20-1 mostra os valores para alguns sólidos elementares (cada um constituído de um único elemento) à temperatura ambiente.

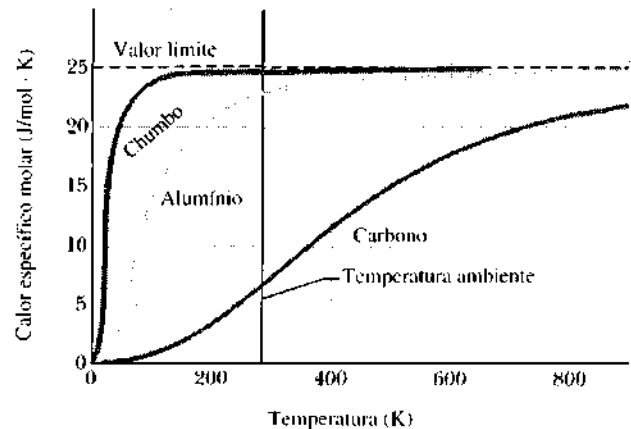
Note que o calor específico molar de todos os elementos listados na Tabela 20-1 tem aproximadamente o mes-

**Tabela 20-1**  
Calores Específicos de Algumas Substâncias à Temperatura Ambiente

Substância	Calor Específico		Calor Específico
	cal/g·K	J/kg·K	Molar J/mol·K
<i>Sólidos Elementares</i>			
Chumbo	0,0305	128	26,5
Tungstênio	0,0321	134	24,8
Prata	0,0564	236	25,5
Cobre	0,0923	386	24,5
Alumínio	0,215	900	24,4
<i>Outros Sólidos</i>			
Latão	0,092	380	
Granito	0,19	790	
Vidro	0,20	840	
Gelo (-10°C)	0,530	2.220	
<i>Líquidos</i>			
Mercúrio	0,033	140	
Álcool etílico	0,58	2.430	
Água do mar	0,93	3.900	
Água doce	1,00	4.190	

mo valor, 25 J/mol·K. Como a Fig. 20-2 sugere, o calor específico molar de todos os sólidos varia com a temperatura, mas sempre se aproximando de 25 J/mol·K a temperaturas suficientemente altas. Algumas substâncias, como o carbono e o berílio, só atingem esse valor limite a temperaturas muito superiores à ambiente. Outras substâncias podem derreter ou vaporizar antes de alcançar este limite.

Quando comparamos duas substâncias usando o mol, estamos comparando quantidades que contêm o mesmo número de unidades elementares. O fato de que, a temperaturas suficientemente altas, todos os elementos sólidos têm o mesmo calor específico molar nos demonstra que todos os tipos de átomos — sejam eles do alumínio, cobre,



**Fig. 20-2** Os calores específicos molares de três elementos como uma função da temperatura. A temperaturas suficientemente altas, todos os sólidos se aproximam do mesmo valor limite. Para chumbo e alumínio, este valor é essencialmente alcançado à temperatura ambiente; para o carbono ele só é alcançado a temperaturas muito maiores.

urânio ou qualquer outro elemento — absorvem o calor da mesma forma.

### Um Ponto Importante

Quando associamos um calor específico a qualquer substância, é importante saber não somente quanto calor é absorvido, mas também as condições sob as quais a transferência se faz. Para sólidos e líquidos, com frequência supomos que a amostra estava sob pressão constante (usualmente a atmosférica), durante a transferência de calor. Também é razoável supor que a amostra manteve o mesmo volume, enquanto o calor era absorvido. Isto significa que a expansão térmica da amostra foi evitada, aplicando-se uma pressão externa. Para sólidos e líquidos isto é muito difícil de se conseguir experimentalmente, mas o efeito pode ser calculado, mostrando que os calores específicos, a pressão e volume constantes, diferem normalmente muito pouco em termos percentuais. Gases, como veremos, têm valores muito diferentes para seus calores específicos a pressão e volume constantes.

### Calores de Transformação

Quando o calor é absorvido por um sólido ou um líquido, a temperatura do material não aumenta necessariamente. Em vez disso, a amostra pode mudar de uma fase ou estado (isto é, sólido, líquido ou gasoso) para outro. Assim, o gelo pode derreter e a água ferver, absorvendo calor sem mudar a temperatura. No processo inverso (água congelando, vapor condensando), o calor é perdido pelo sistema, novamente a uma temperatura constante.

A quantidade de calor por unidade de massa, que precisa ser transferida para que a amostra do material mude completamente de fase, é chamada **calor de transformação**  $L$ . Assim, quando uma amostra de massa  $m$  muda totalmente de fase, a quantidade total de calor transferida é

$$Q = Lm, \quad (20-5)$$

Quando a mudança de fase é de líquida para gasosa (a amostra precisa absorver calor) ou de gás para líquido (a

amostra necessita perder calor), o calor de transformação é chamado de **calor de vaporização**  $L_V$ . Para a água, à sua temperatura normal de evaporação ou condensação,

$$\begin{aligned} L_V &= 539 \text{ cal/g} = 40,7 \text{ kJ/mol} \\ &= 2260 \text{ kJ/kg.} \end{aligned} \quad (20-6)$$

Quando a mudança de fase é de sólida para líquida (a amostra necessita absorver calor) ou de líquida para sólida (a amostra precisa perder calor), o calor de transformação é chamado de **calor de fusão**  $L_F$ . Para a água, à sua temperatura normal de solidificação ou fusão,

$$\begin{aligned} L_F &= 79,5 \text{ cal/g} = 6,01 \text{ kJ/mol} \\ &= 333 \text{ kJ/kg.} \end{aligned} \quad (20-7)$$

A Tabela 20-2 mostra os calores de transformação de algumas substâncias.

**EXEMPLO 20-1** Um doce tem um valor nutricional, indicado na embalagem, de 350 Cal. Quantos quilowatts-hora de energia fornecerá para o corpo, assim que for digerido?

**Solução** A Caloria neste caso é a quilocaloria, assim,

$$\begin{aligned} \text{energia} &= (350 \times 10^3 \text{ cal})(4,19 \text{ J/cal}) \\ &= (1,466 \times 10^6 \text{ J})(1 \text{ W} \cdot \text{s/J}) \\ &\quad \times (1 \text{ h}/3.600 \text{ s})(1 \text{ kW}/1.000 \text{ W}) \\ &= 0,407 \text{ kW} \cdot \text{h.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Essa quantidade de energia poderia manter uma lâmpada de 100 W acesa por 4,1 h. Para queimá-la com exercício uma pessoa precisaria, por exemplo, correr cerca de 5 km.

Uma dieta diária generosa para um ser humano corresponde a cerca de 3,5 kW·h, por dia, o que representa o máximo absoluto de trabalho que um ser humano pode fazer em um dia. Em um país industrializado, essa quantidade de energia pode ser comprada por talvez US\$ 0,35.

**EXEMPLO 20-2** a. Quanto calor é preciso para fazer uma amostra de gelo de massa  $m = 720 \text{ g}$  a  $-10^\circ\text{C}$  passar para o estado líquido a  $15^\circ\text{C}$ ?

**Tabela 20-2**  
Alguns Calores de Transformação

Substância	Fusão		Ebulição	
	Ponto de Fusão (K)	Calor de Fusão (kJ/kg)	Ponto de Ebulição (K)	Calor de Vaporização (kJ/kg)
Hidrogênio	14,0	58,0	20,3	455
Oxigênio	54,8	13,9	90,2	213
Mercúrio	234	11,4	630	296
Água	273	333	373	2.256
Chumbo	601	23,2	2.017	858
Prata	1.235	105	2.323	2.336
Cobre	1.356	207	2.868	4.730

**Solução** Para responder, precisamos considerar três passos. O passo 1 é elevar a temperatura do gelo de  $-10^{\circ}\text{C}$  até o ponto de fusão, a  $0^{\circ}\text{C}$ . Usaremos a Eq. 20-3 com o calor específico  $c_{\text{gelo}}$  do gelo, dado na Tabela 20-1. Para este passo, a temperatura inicial  $T_i$  é  $-10^{\circ}\text{C}$  e a temperatura final  $T_f$  é  $0^{\circ}\text{C}$ . Assim,

$$\begin{aligned} Q_1 &= c_{\text{gelo}} m (T_f - T_i) \\ &= (2220 \text{ J/kg} \cdot \text{K})(0,720 \text{ kg})[0^{\circ}\text{C} - (-10^{\circ}\text{C})] \\ &= 15.984 \text{ J} \approx 15,98 \text{ kJ}. \end{aligned}$$

O passo 2 é derreter o gelo (não há mudança na temperatura até este passo estar completo). Usaremos agora as Eqs. 20-5 e 20-7. Assim,

$$Q_2 = L_F m = (333 \text{ kJ/kg})(0,720 \text{ kg}) \approx 239,8 \text{ kJ}.$$

O passo 3 é elevar a temperatura da água, agora líquida, de  $0^{\circ}\text{C}$  para  $15^{\circ}\text{C}$ . Usaremos novamente a Eq. 20-3, mas agora com o calor específico  $c_{\text{liq}}$  da água líquida, dado na Tabela 20-1. Neste passo, a temperatura inicial  $T_i$  é  $0^{\circ}\text{C}$  e a temperatura final  $T_f$  é  $15^{\circ}\text{C}$ . Assim,

$$\begin{aligned} Q_3 &= c_{\text{liq}} m (T_f - T_i) \\ &= (4190 \text{ J/kg} \cdot \text{K})(0,720 \text{ kg})(15^{\circ}\text{C} - 0^{\circ}\text{C}) \\ &= 45.252 \text{ J} \approx 45,25 \text{ kJ}. \end{aligned}$$

O calor total  $Q_{\text{tot}}$  exigido é a soma do calor necessário nos três passos:

$$\begin{aligned} Q_{\text{tot}} &= Q_1 + Q_2 + Q_3 \\ &= 15,98 \text{ kJ} + 239,8 \text{ kJ} + 45,25 \text{ kJ} \\ &\approx 300 \text{ kJ}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Note que o calor requerido para derreter o gelo é muito maior do que o necessário para aumentar a temperatura do gelo ou da água líquida.

b. Suponha que apliquemos no bloco de gelo da questão anterior apenas 210 kJ de calor. Qual será, então, o estado final e a temperatura da água?

**Solução** Do passo 1 — questão anterior — sabemos que 15,98 kJ são necessários para elevar a temperatura do gelo ao ponto de fusão. O calor restante  $Q_{\text{res}}$  é, então,  $210 \text{ kJ} - 15,98 \text{ kJ}$  ou cerca de 194 kJ. Do passo 2, observamos que essa quantidade de calor não é suficiente para derreter totalmente o gelo. Podemos encontrar então a massa  $m$  de gelo, que é derretida pelo calor  $Q_{\text{res}}$ , usando as Eqs. 20-5 e 20-7:

$$m = \frac{Q_{\text{res}}}{L_F} = \frac{194 \text{ kJ}}{333 \text{ kJ/kg}} = 0,583 \text{ kg} \approx 580 \text{ g}.$$

Assim, a massa de gelo que resta é  $720 \text{ g} - 580 \text{ g}$  ou 140 g. Como não foi derretido todo o gelo, a temperatura do conjunto gelo-água líquida será de  $0^{\circ}\text{C}$ . Deste modo, temos

$$580 \text{ g de água, } 140 \text{ g de gelo, a } 0^{\circ}\text{C} \quad (\text{Resposta})$$

**EXEMPLO 20-3** Uma colher de cobre cuja massa  $m_c$  é de 75 g é aquecida num forno de laboratório, até a temperatura  $T = 312^{\circ}\text{C}$ . A colher é então colocada em um bquer de vidro contendo massa  $m_a = 220 \text{ g}$  de água. A capacidade térmica efetiva  $C_b$  do bquer é 45 cal/K. A temperatura inicial  $T_i$  da água e do bquer é  $12^{\circ}\text{C}$ . Qual a temperatura final  $T_f$  da colher, do bquer e da água?

**Solução** Devemos considerar como nosso sistema a água + bquer + colher de cobre. Nenhum calor entra ou deixa este sistema, assim, a soma

algébrica das transferências internas de calor que ocorrem precisa ser zero. Há três transferências:

$$\text{para a água: } Q_a = m_a c_a (T_f - T_i);$$

$$\text{para o bquer: } Q_b = C_b (T_f - T_i);$$

$$\text{para o cobre: } Q_c = m_c c_c (T_f - T).$$

A diferença de temperatura é escrita — em todos os três casos — como a temperatura final menos a inicial. Também temos de perceber que  $Q_a$  e  $Q_b$  são positivos (indicando que o calor é transferido para os inicialmente frios água e o bquer), e que  $Q_c$  é negativo (indicando que o calor é perdido pela colher de cobre, inicialmente quente).

A partir do que afirmamos, podemos escrever

$$Q_a + Q_b + Q_c = 0. \quad (20-8)$$

Substituindo essas expressões de transferência de calor na Eq. 20-8, temos

$$\begin{aligned} m_a c_a (T_f - T_i) + C_b (T_f - T_i) \\ + m_c c_c (T_f - T) = 0. \end{aligned} \quad (20-9)$$

Podemos observar que as temperaturas na Eq. 20-9 são sempre colocadas como diferenças. Fizemos isso porque os intervalos nas escalas Celsius e Kelvin são idênticos, assim, podemos usar qualquer uma dessas escalas nessa equação. Resolvendo a Eq. 20-9 para  $T_f$  e substituindo, temos

$$T_f = \frac{m_c c_c T + C_b T_i + m_a c_a T_i}{m_a c_a + C_b + m_c c_c}.$$

O numerador é

$$\begin{aligned} (75 \text{ g})(0,092 \text{ cal/g} \cdot \text{K})(312^{\circ}\text{C}) + (45 \text{ cal/K})(12^{\circ}\text{C}) \\ + (220 \text{ g})(1,00 \text{ cal/g} \cdot \text{K})(12^{\circ}\text{C}) \\ = 5332,8 \text{ cal}, \end{aligned}$$

e o denominador é

$$\begin{aligned} (220 \text{ g})(1,00 \text{ cal/g} \cdot \text{K}) + 45 \text{ cal/K} \\ + (75 \text{ g})(0,092 \text{ cal/g} \cdot \text{K}) \\ = 271,9 \text{ cal/}^{\circ}\text{C}. \end{aligned}$$

Assim, ficamos com

$$T_f = \frac{5332,8 \text{ cal}}{271,9 \text{ cal/}^{\circ}\text{C}} = 19,6^{\circ}\text{C} \approx 20^{\circ}\text{C}. \quad (\text{Resposta})$$

A partir desses dados, podemos concluir que

$$Q_a \approx 1,670 \text{ cal}, \quad Q_b \approx 342 \text{ cal}, \quad Q_c \approx -2,020 \text{ cal}.$$

Desconsiderando os erros devidos aos arredondamentos, a soma algébrica dessas três transferências de calor é realmente zero, como a Eq. 20-8 indica.

## 20-4 Uma Observação Mais Detalhada de Calor e Trabalho

Vamos observar aqui, mais atentamente, o modo como calor e trabalho são trocados entre um sistema e seu ambi-



ente. Tomemos como nosso sistema um gás confinado em um cilindro com um pistão móvel, como na Fig. 20-3. A pressão do gás é controlada pelo peso das pequenas esferas de chumbo em cima do pistão. As paredes do cilindro são feitas de material isolante, que não permite qualquer transferência de calor, mas o fundo do cilindro contém um reservatório de calor (uma placa quente, se você preferir), cuja temperatura  $T$  pode-se controlar girando um botão.

O sistema começa em um *estado inicial*  $i$ , descrito por uma pressão  $p_i$ , um volume  $V_i$  e uma temperatura  $T_i$ . Você deseja levar o sistema para um *estado final*  $f$ , descrito por uma pressão  $p_f$ , um volume  $V_f$  e uma temperatura  $T_f$ . O procedimento pelo qual você leva o sistema do seu estado inicial para o final é chamado de *processo termodinâmico*. Durante este processo, o calor pode ser transferido para o sistema pelo reservatório ou vice-versa, e o trabalho é realizado pelo sistema para subir ou descer o pistão. Esse trabalho será positivo, se o gás fizer o pistão subir, e negativo se o gás permitir que ele desça. Vamos supor que todas essas mudanças ocorrem de forma lenta, resultando em um sistema que está sempre em (aproximando) equilíbrio termodinâmico.

Supondo que você remova uma das esferas de chumbo do pistão da Fig. 20-3, permitindo ao gás empurrar o pistão para cima de um deslocamento infinitesimal  $ds$ , com uma força  $F$ . Como esse deslocamento é pequeno, podemos supor que, enquanto acontece,  $F$  é constante. Então,  $F$  tem uma magnitude que é igual a  $pA$ , onde  $p$  é a pressão do gás e  $A$  é a área da face do pistão. O trabalho diferencial  $dW$  feito pelo gás, durante o deslocamento, é

$$\begin{aligned} dW &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = (pA)(ds) = (p)(A ds) \\ &= p dV, \end{aligned} \quad (20-10)$$

onde  $dV$  é a variação infinitesimal no volume do gás devido ao movimento do pistão. Quando você tiver removido

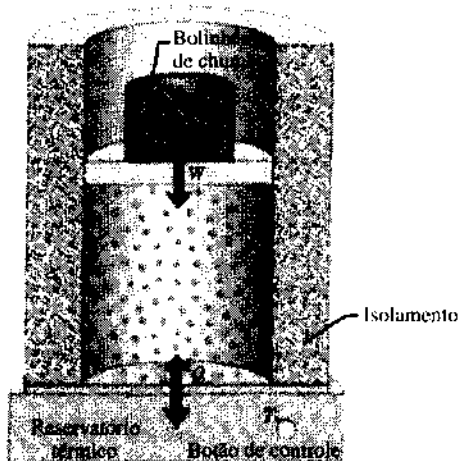


Fig. 20-3 Um gás é confinado dentro de um cilindro com um pistão móvel. O calor pode ser adicionado ou retirado do gás, regulando-se a temperatura  $T$  do reservatório de calor ajustável.

peso suficiente para mudar o volume do gás de  $V_i$  para  $V_f$ , o trabalho total realizado pelo gás será

$$W = \int dW = \int_{V_i}^{V_f} p dV. \quad (20-11)$$

Para resolver a integral na Eq. 20-11 diretamente, precisamos saber como a pressão varia, em função do volume, para os processos pelos quais o sistema muda do estado  $i$  para o estado  $f$ .

Há na realidade muitas maneiras de se levar o gás do estado  $i$  para o estado  $f$ . Uma delas é mostrada na Fig. 20-4a, que é um gráfico da pressão do gás pelo seu volume e que é chamado de diagrama  $p$ - $V$ . A curva dá a variação de  $p$  com  $V$ . A integral da Eq. 20-11 (e, logo, o trabalho  $W$  realizado pelo gás) é representada pela área escura abaixo da curva, entre os pontos  $i$  e  $f$ . Esse trabalho é positivo, devido ao fato de que o gás aumenta seu volume ao forçar o pistão para cima.

Outra maneira de passar do estado  $i$  para o  $f$  é mostrada na Fig. 20-4b: aqui, a mudança ocorre em dois passos — o primeiro do estado  $i$  para o  $a$ , e o segundo do  $a$  para o  $f$ .

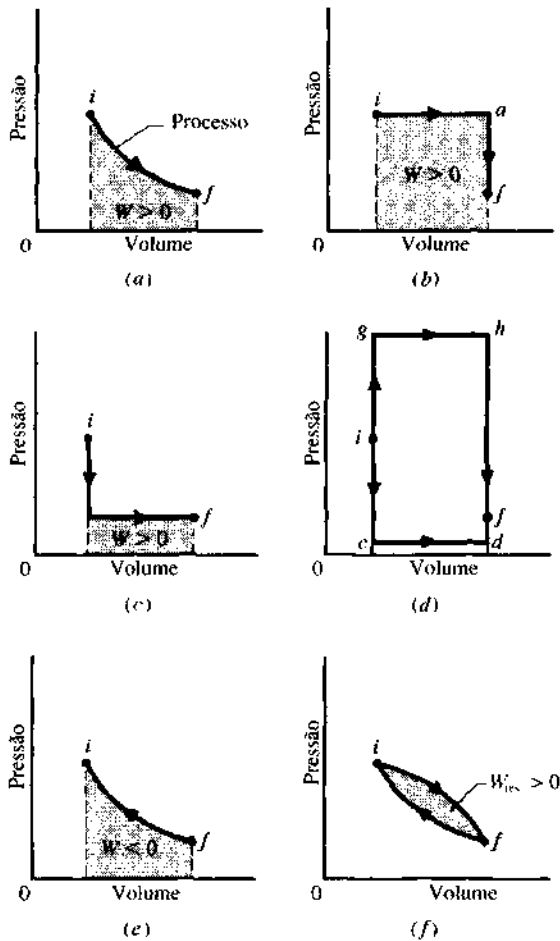
O passo  $ia$  desse processo ocorre sob uma pressão constante, o que significa que não há mudanças no número de esferas no pistão da Fig. 20-3. Você faz com que o volume aumente (de  $V_i$  para  $V_f$ ) ao elevar lentamente a temperatura com o botão de controle, até um valor  $T_a$ . Durante esse processo, o trabalho é realizado pelo gás em expansão (para fazer subir o pistão) e o calor é fornecido ao sistema pelo reservatório (em resposta à diferença de temperatura arbitrariamente criada por você, quando aumenta ligeiramente a temperatura do reservatório). Este calor é positivo, pois é adicionado ao sistema.

O passo  $af$  do processo da Fig. 20-4b ocorre a volume constante, assim, você precisa controlar o pistão, evitando que ele se mova. Então, precisa usar o botão de controle para reduzir a temperatura de  $T_a$  até seu valor menor final  $T_f$ . Como o reservatório está agora mais frio que o gás, este último perderá calor para o reservatório. Assim, o calor envolvido neste processo é negativo.

Por todo o processo  $iaf$ , o trabalho  $W$ , que é positivo e ocorre somente durante o passo  $ia$ , é representado pela área escura abaixo da curva. O calor é transferido durante os passos  $ia$  e  $af$ , sendo positivo durante o primeiro passo e negativo (mas menor em magnitude) no segundo.

A Fig. 20-4c mostra um processo onde os dois passos anteriores são feitos na ordem inversa. Neste caso, o trabalho  $W$  é menor do que o para a Fig. 20-4b, assim como o calor total absorvido. A Fig. 20-4d sugere que você pode realizar um trabalho tão pequeno quanto quiser (seguindo um caminho como  $icdf$ ) ou tão grande quanto quiser (seguindo o caminho como  $ighf$ ).

Resumindo: um sistema pode ser levado de um estado inicial para um final, através de um número infinito de processos. Em geral, o trabalho  $W$  e o calor  $Q$  terão valores diferentes para cada processo. Dizemos que calor e trabalho são quantidades *dependentes do processo*.



**Fig. 20-4** (a) O sistema da Fig. 20-3 vai de um estado inicial *i* para um final *f*, por meio de um processo termodinâmico. A área escura *W* representa o trabalho realizado pelo sistema durante o processo. O trabalho é positivo porque o processo caminha para o lado direito do gráfico. (b) Outro processo para se deslocar entre os mesmos dois estados; o trabalho é agora maior que em (a). (c) Novamente outro processo, necessitando de menos trabalho (positivo). (d) O trabalho pode ser tão pequeno (caminho *icdf*) ou tão grande (caminho *ighf*) como você desejar. (e) Quando o volume é reduzido (por alguma força externa), o trabalho realizado pelo sistema é reduzido (por alguma força externa). (f) O trabalho total realizado pelo sistema durante um ciclo (fechado) é representado pela área envolvida, que é a diferença entre as áreas abaixo das duas curvas que compõem o ciclo.

A Fig. 20-4e nos mostra um exemplo em que um trabalho negativo é realizado por um sistema, à medida que alguma força externa comprima este, reduzindo seu volume. O valor absoluto do trabalho realizado é sempre igual à área abaixo da curva, mas como o volume é *reduzido*, esse trabalho é negativo.

A Fig. 20-4f mostra um *ciclo termodinâmico* em que o sistema é levado de algum estado inicial *i* para algum outro *f* e então de volta ao primeiro. O trabalho total realizado por esse sistema, durante o ciclo, é a soma do trabalho positivo durante a expansão com o trabalho negativo durante a compressão. Na Fig. 20-4f o trabalho total será positivo, pois a área abaixo da curva de expansão é maior do que a abaixo da curva de compressão.

### 20-5 A Primeira Lei da Termodinâmica

Você já viu que quando um sistema muda para um estado final, a partir de um estado inicial, *W* e *Q* dependem da natureza do processo. Experimentalmente, encontramos um resultado surpreendente. *A quantidade Q - W é a mesma para qualquer processo.* Ela depende apenas dos estados inicial e final e não de como o sistema passa de um para o outro. Todas as outras combinações de *Q* e *W*, incluindo *Q* sozinho, *W* sozinho, *Q + W* e *Q - 2W*, são *dependentes do processo*; somente a quantidade *Q - W* não é.

*Q - W* deve representar uma mudança em alguma propriedade intrínseca do sistema. Chamamos esta propriedade de *energia interna E<sub>int</sub>* e escrevemos

$$\begin{aligned} \Delta E_{int} &= E_{int,f} - E_{int,i} \\ &= Q - W \quad (\text{primeira lei}) \end{aligned} \quad (20-12)$$

A Eq. 20-12 é a **primeira lei da termodinâmica**. Se o sistema termodinâmico sofrer somente uma mudança infinitesimal, podemos escrever a primeira lei como\*

$$dE_{int} = dQ - dW \quad (\text{primeira lei}) \quad (20-13)$$

Vimos no Cap. 19 que a mensagem essencial da lei zero da termodinâmica é: “cada sistema termodinâmico que esteja em equilíbrio térmico tem uma propriedade física importante chamada de sua *temperatura T*.” A mensagem essencial da primeira lei é: “cada sistema termodinâmico que esteja em equilíbrio térmico tem uma propriedade física importante chamada de sua *energia interna E<sub>int</sub>*.”

No Cap. 8, discutimos o princípio da conservação da energia e como ele se aplica a sistemas isolados, isto é, a sistemas para os quais nenhuma energia entra ou deixa o sistema. A primeira lei da termodinâmica é uma extensão desse princípio para sistemas que *não* estão isolados: Em tais casos, a energia pode ser transferida, através da fronteira do sistema, como trabalho *W* ou como calor *Q*. No caso da primeira lei da termodinâmica, vamos supor que não existam mudanças na energia cinética ou potencial do sistema como um todo; isto é,  $\Delta K = \Delta U = 0$ .

Antes deste capítulo, o termo *trabalho* e o símbolo *W* sempre simbolizavam o trabalho feito *sobre* um sistema. Mas, começando com a Eq. 20-10 e continuando pelos capítulos seguintes sobre termodinâmica, voltamos nossa atenção ao trabalho feito *por* um sistema, como o gás na Fig. 20-3.

O trabalho feito *sobre* um sistema é sempre o negativo do trabalho feito *por* um sistema. Assim, se reescrevermos a Eq. 20-12 em termos do trabalho feito *sobre* um sistema, teremos  $\Delta E_{int} = Q + W$ . Isto significa que: a energia inter-

\* Aqui, *dQ* e *dW*, ao contrário de *dE<sub>int</sub>*, não são diferenciais verdadeiros. Isto é, não há funções como *Q(p, V)* e *W(p, V)* que dependem somente da condição do sistema. *dQ* e *dW* são chamados *diferenciais inexatos* e em geral são representados pelos símbolos *ḋQ* e *ḋW*. Para os nossos propósitos, podemos tratá-los simplesmente como transferências de energia infinitesimais.

na tende a aumentar, se o calor for absorvido pelo sistema ou se o trabalho positivo for feito sobre o sistema. Por outro lado, a energia interna tende a diminuir, se o calor for cedido pelo sistema ou se trabalho negativo for feito sobre o sistema.

## 20-6 Alguns Casos Especiais da Primeira Lei da Termodinâmica

Estudaremos aqui quatro diferentes processos termodinâmicos, cada um correspondendo a certas restrições impostas ao sistema. Veremos então quais as conseqüências, quando aplicamos a primeira lei da termodinâmica a cada um.

**1. Processos adiabáticos.** Durante um processo adiabático, o sistema é de tal modo isolado que *não ocorre transferência de calor* entre ele e seu ambiente. Fazendo  $Q = 0$  na primeira lei (Eq. 20-12), obtemos

$$\Delta E_{\text{int}} = -W \quad (\text{processo adiabático}). \quad (20-14)$$

Isto nos mostra que, se o trabalho for feito *pelo* sistema (isto é, se  $W$  for positivo), haverá uma diminuição na energia interna dele. Por outro lado, se for feito *sobre* o sistema (isto é, se  $W$  for negativo), haverá um aumento.

Para um gás, um aumento na energia interna significa um aumento na temperatura e vice-versa. A temperatura de uma bomba de bicicleta aumenta quando ela é usada, devido à compressão adiabática do ar dentro da bomba.

A Fig. 20-5 mostra um processo adiabático idealizado.  $\ominus$  calor não pode entrar ou sair do sistema por causa do isolamento. Assim, a única interação permitida entre o sistema e seu ambiente é a realização de trabalho. Se removermos algumas esferas da parte de cima do pistão e deixarmos o gás se expandir, o trabalho feito pelo sistema (o gás) será positivo e a temperatura deste diminuirá. Se, em vez disso, adicionarmos esferas ao pistão e comprimirmos

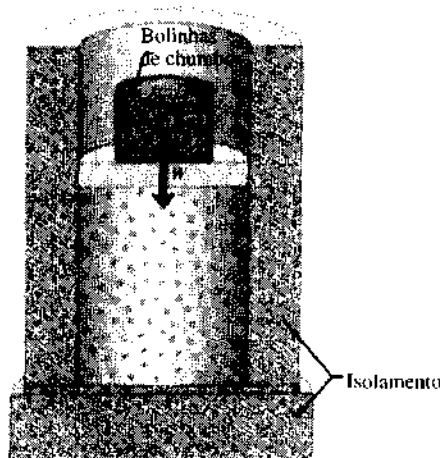


Fig. 20-5 Uma expansão adiabática pode ser realizada removendo-se gradativamente as esferas de chumbo de cima do pistão. Recolocar as esferas reverte o processo em qualquer estágio.

o gás, o trabalho feito pelo sistema (o gás) será negativo e a temperatura deste aumentará.

Há um segundo modo de nos certificarmos que não haverá transferências de calor durante um processo termodinâmico: fazê-lo tão rapidamente, que não haja tempo para transferências significativas de calor. Assim, as compressões e expansões de ar, em uma onda sonora que passa, são adiabáticas. Simplesmente, não há tempo para transferências de calor em sincronismo com a rápida oscilação de uma onda sonora. As compressões e expansões do vapor, no cilindro de máquinas a vapor ou dos gases quentes nos cilindros de uma máquina de combustão interna, são essencialmente adiabáticas pela mesma razão.

**2. Processos a volume constante.** Se o volume de um sistema (como um gás) for mantido constante, este sistema não poderá realizar trabalho. Colocando  $W = 0$  na primeira lei (Eq. 20-12), temos

$$\Delta E_{\text{int}} = Q \quad (\text{processo a volume constante}). \quad (20-15)$$

Assim, se calor for cedido ao sistema (isto é, se  $Q$  for positivo), a energia interna do sistema aumentará. Similarmente, se calor for removido do sistema durante o processo (isto é, se  $Q$  for negativo), a energia interna do sistema diminuirá.

**3. Processos cíclicos.** Existem processos em que, após certas trocas de calor e trabalho, há uma volta ao estado inicial. Neste caso, nenhuma propriedade intrínseca ao sistema — incluindo sua energia interna — pode ser alterada. Colocando  $\Delta E_{\text{int}} = 0$  na primeira lei (Eq. 20-12), temos

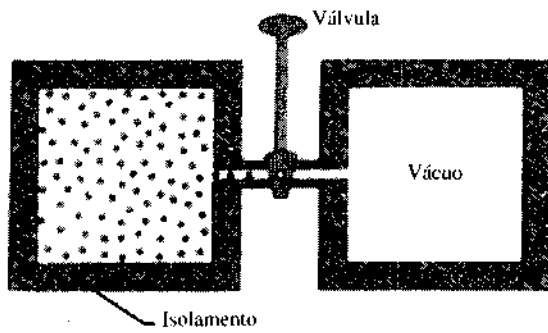
$$Q = W \quad (\text{processo cíclico}). \quad (20-16)$$

Assim, o trabalho total feito durante o processo deve ser exatamente igual à quantidade total de calor transferida; a quantidade de energia interna do sistema permanece a mesma. Os gráficos pressão-volume representando processos cíclicos são sempre curvas fechadas, como na Fig. 20-4f. Discutiremos mais detalhadamente esse assunto no Cap. 22.

**4. Processos de expansão livre.** São processos adiabáticos em que nenhum trabalho é feito *sobre* ou *pelo* sistema. Assim,  $Q = W = 0$ , e a primeira lei nos dá

$$\Delta E_{\text{int}} = 0 \quad (\text{expansão livre}). \quad (20-17)$$

A Fig. 20-6 nos mostra como uma tal expansão pode ser realizada. Um gás é confinado por uma válvula de segurança em um dos lados de uma câmara dupla isolada, e é feito vácuo no outro lado. O processo consiste em abrir a válvula e esperar até que o equilíbrio seja estabelecido, com o gás agora preenchendo as duas partes da câmara. Nenhum calor é transferido, devido ao isolamento. Nenhum trabalho é realizado porque o gás se expande para um espaço vazio (vácuo) e, assim, sua expansão não é obstruída por qualquer pressão em sentido contrário.



**Fig. 20-6** O estágio inicial de um processo de expansão livre. Depois que a válvula é aberta, o gás eventualmente alcança um estado final de equilíbrio, preenchendo as duas câmaras.

Uma expansão livre difere de todos os outros processos que consideramos antes, devido ao fato de que não podemos fazê-la lentamente. Assim, embora o sistema esteja em equilíbrio térmico em seus estados inicial e final, não estará em equilíbrio durante o processo. Nos estados intermediários, a temperatura, a pressão e o volume não têm valores únicos. Por isso, não podemos descrever o curso de uma expansão em um gráfico pressão-volume. Tudo o que podemos fazer é descrever os estados inicial e final.

A Tabela 20-3 resume as características dos processos descritos nesta seção.

**EXEMPLO 20-4** Seja 1,00 kg de água líquida a 100°C convertido a vapor a 100°C por ebulição à pressão atmosférica; veja Fig. 20-7. O volume muda de um valor inicial de  $1,00 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  no estado líquido, para  $1,671 \text{ m}^3$  de vapor.

a. Que trabalho é realizado pelo sistema durante este processo?

**Solução** O trabalho é dado pela Eq. 20-11. Como a pressão é constante (a 1,00 atm ou  $1,01 \times 10^5 \text{ Pa}$ ) durante o processo de ebulição, podemos colocar  $p$  do lado de fora da integral, obtendo

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{V_i}^{V_f} p \, dV = p \int_{V_i}^{V_f} dV = p(V_f - V_i) \\
 &= (1,01 \times 10^5 \text{ Pa})(1,671 \text{ m}^3 - 1,00 \times 10^{-3} \text{ m}^3) \quad (\text{Resposta}) \\
 &= 1,69 \times 10^5 \text{ J} = 169 \text{ kJ}.
 \end{aligned}$$

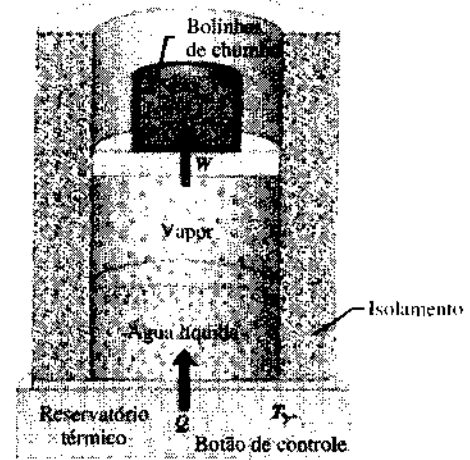
O resultado é positivo, indicando que o trabalho é feito pelo sistema sobre o ambiente, ao levantar o pistão da Fig. 20-7.

b. Quanto calor precisa ser adicionado ao sistema durante o processo?

**Tabela 20-3**  
**Primeira Lei da Termodinâmica: Quatro Casos Especiais**

A Lei:  $\Delta E_{\text{int}} = Q - W$  (Eq. 20-12)

Processo	Restrição	Consequência
Adiabática	$Q = 0$	$\Delta E_{\text{int}} = -W$
Volume constante	$W = 0$	$\Delta E_{\text{int}} = Q$
Ciclo fechado	$\Delta E_{\text{int}} = 0$	$Q = W$
Expansão livre	$Q = W = 0$	$\Delta E_{\text{int}} = 0$



**Fig. 20-7** Exemplo 20-4. Água fervendo à pressão constante. O calor é transferido do reservatório até que a água líquida se transforme completamente em vapor. O trabalho é realizado pelo gás, quando ele se expande e empurra o pistão.

**Solução** Como não há mudanças de temperatura, mas somente uma mudança de fase, usaremos as Eqs. 20-5 e 20-6:

$$\begin{aligned}
 Q &= L_v m = (2260 \text{ kJ/kg})(1,00 \text{ kg}) \\
 &= 2260 \text{ kJ}. \quad (\text{Resposta})
 \end{aligned}$$

O resultado é positivo, o que indica que o calor é adicionado ao sistema, como já esperávamos.

c. Qual a mudança na energia interna do sistema durante o processo de ebulição?

**Solução** Encontramos a resposta a partir da primeira lei (Eq. 20-12):

$$\begin{aligned}
 \Delta E_{\text{int}} &= Q - W = 2260 \text{ kJ} - 169 \text{ kJ} \\
 &\approx 2090 \text{ kJ} = 2,09 \text{ MJ}. \quad (\text{Resposta})
 \end{aligned}$$

Essa quantidade é positiva, indicando que a energia interna do sistema aumenta durante o processo de ebulição. Esta energia representa o trabalho interno feito para vencer a forte atração entre as moléculas de água ( $\text{H}_2\text{O}$ ) no estado líquido.

Podemos observar que, quando a água ferve, cerca de 7,5% ( $= 169 \text{ kJ}/2260 \text{ kJ}$ ) do calor adicionado se transformam em trabalho externo, contra a pressão atmosférica. O resto se transforma em energia interna que é adicionada ao sistema.

## 20-7 A Transmissão de Calor

Já discutimos a transferência de calor entre um sistema e seu ambiente, mas não descrevemos ainda como essa transferência ocorre. Existem três mecanismos de transmissão: condução, convecção e radiação.

### Condução

Se você deixar no fogo um objeto de metal que esteja segurando, sua mão começará a esquentar. A energia é transferida do fogo para a mão por **condução**, pelo objeto de

metal. A amplitude da vibração de átomos e elétrons do metal no extremo mais quente tem valores relativamente grandes, refletindo a elevada temperatura de seu ambiente. Essas amplitudes aumentadas de vibração são transmitidas ao longo do metal, de átomo para átomo, durante colisões entre átomos adjacentes. Dessa forma, a região de temperatura em elevação se expande até a sua mão.

Considere uma placa de área (face)  $A$  e largura  $L$ , cujas faces são mantidas a temperaturas  $T_H$  e  $T_C$ , como na Fig. 20-8. Seja  $Q$  o calor que é transferido através da placa, da sua face quente para a fria, no tempo  $t$ . A experiência mostra que a taxa de transmissão de calor  $H$  (a quantidade no tempo  $t$ ) é dada por

$$H = \frac{Q}{t} = kA \frac{T_H - T_C}{L}, \quad (20-18)$$

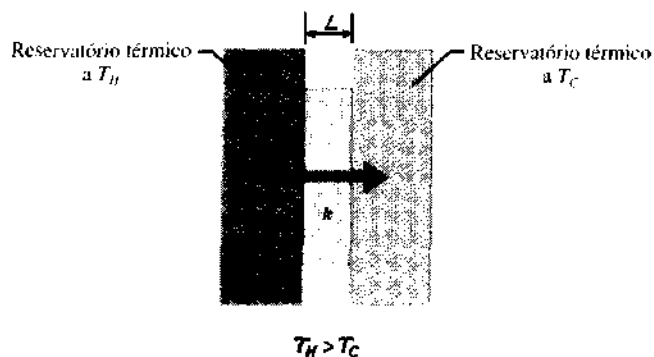
onde  $k$ , chamado de *condutividade térmica*, é uma constante que depende do material de que a placa é feita. Grandes valores de  $k$  significam boa condutividade térmica e valores pequenos significam o contrário.

### Resistência Térmica à Condução (Valor $R$ )

Se você está interessado em isolar a sua casa ou manter seu refrigerante gelado para um piquenique, está procurando por maus condutores de calor. Por isso, o conceito de *resistência térmica*  $R$  foi introduzido na prática da engenharia. O valor  $R$  de uma placa de largura  $L$  é definido por

$$R = \frac{L}{k}. \quad (20-19)$$

Assim, quanto menor a condutividade do material que a placa é feita, maior o valor  $R$  da placa. Note que  $R$  é uma propriedade atribuída a uma placa de largura específica, não a um material. A unidade mais comumente usada para  $R$  (raramente escrita) é o pé quadrado Fahrenheit-hora por unidade térmica britânica ( $\text{ft}^2 \times ^\circ\text{F} \times \text{h}/\text{Btu}$ ). (Agora você sabe por que raramente é escrita.)



**Fig. 20-8** Condução térmica. O calor é transferido de um reservatório à temperatura  $T_H$  para outro mais frio, à temperatura  $T_C$ , através de uma placa condutora de espessura  $L$  e condutividade térmica  $k$ .

Combinando as Eqs. 20-18 e 20-19, temos

$$H = A \frac{T_H - T_C}{R}, \quad (20-20)$$

o que nos permite calcular com que taxa o calor flui através da placa, se seu valor  $R$ , sua área e a diferença de temperatura entre suas faces forem conhecidos.

Em locais de grandes variações climáticas, é recomendado que os telhados das casas sejam isolados no nível  $R=30$ . Da Eq. 20-20, podemos observar que isso significa que tais telhados devem ser grossos ao ponto da perda por condução se dar à razão de 1/30 Btu/h por cada  $1^\circ\text{F}$  de diferença de temperatura entre as duas faces do telhado.

A Tabela 20-4 mostra a condutividade térmica de vários materiais e os valores  $R$  calculados para placas de 1 polegada desses materiais. O uso de valores  $R$  é normalmente restrito a materiais isolantes comerciais, mas valores de vários outros materiais são mostrados, para comparação.

Uma inspeção na tabela mostra por que o Sierra Club recomenda que os fregueses usem uma xícara de aço inoxidável (em vez de alumínio) para café quente. O ar tem um valor  $R$  tão grande quanto o de qualquer um dos materiais comerciais de construção mostrados. De fato, muitos desses devem sua capacidade isolante à sua habilidade de prender pequenas "bolsas" de ar em seu interior.

Em climas frios, vidros duplos ou até triplos são colocados nas janelas para reduzir o frio (perda de calor). O vidro não é, particularmente, um bom isolante. O ar (ou outro gás) entre os vidros pode isolar tão bem como se estivesse parado (não está, pois a diferença de temperatura entre as camadas de ar faz como que ele circule e transporte calor do lugar mais quente para o mais frio). O valor de

**Tabela 20-4**  
Algumas Condutividades Térmicas e Valores  $R$ \*

	Condutividade, $k$ (W/m·K)	Valor $R$ ( $\text{ft}^2 \cdot ^\circ\text{F} \cdot \text{h}/\text{Btu}$ )
<i>Metais</i>		
Aço inox	14	0,010
Chumbo	35	0,0041
Alumínio	235	0,00061
Cobre	401	0,00036
Prata	428	0,00034
<i>Gases</i>		
Ar (seco)	0,026	5,5
Hélio	0,15	0,96
Hidrogênio	0,18	0,80
<i>Materiais de Construção</i>		
Espuma de poliuretano	0,024	5,9
Lã de vidro	0,043	3,3
Fibra de vidro	0,048	3,0
Pinho branco	0,11	1,3
Vidro de janela	1,0	0,14

\*A condutividade depende da temperatura. Aqui os valores são para a temperatura ambiente. Note que os valores de  $k$  são dados em unidades SI, e os de  $R$ , em unidades inglesas. Os valores de  $R$  são para placas de uma polegada de espessura.

isolamento de uma janela se deve quase que inteiramente à sua *camada limite* (veja Seção 16-12) de ar parado que fica próximo de cada superfície do vidro. Dobrando o número de vidros, dobramos também o número de tais camadas limites isolantes.

Você pode deduzir facilmente, a partir da tabela, que para construir uma placa com isolamento R-30 pode usar 5,1 polegadas de espuma de poliuretano, 23 polegadas de pinho branco, 18 pés de vidros de janelas ou 1,4 milha de prata!

**Condução Através de uma Placa Composta**

A Fig. 20-9 mostra uma placa composta, consistindo de dois materiais com diferentes espessuras  $L_1$  e  $L_2$ , e diferentes condutividades térmicas  $k_1$  e  $k_2$ . As temperaturas das superfícies externas da placa são  $T_H$  e  $T_C$ . Cada face da placa tem área  $A$ . Vamos deduzir uma expressão para a taxa de transmissão de calor através da placa, considerando que a transferência é um processo de *estado estacionário*; isto é, a temperatura em qualquer lugar da placa e a taxa de transferência de calor já estão estabelecidas e não variam mais com o tempo.

No estado estacionário, as taxas de transmissão de calor através de dois materiais são iguais. Isto significa dizer que o calor conduzido através de um dos materiais, num certo tempo, deve ser o mesmo que o conduzido através de outro material, no mesmo espaço de tempo. Se isso não ocorrer, as temperaturas na placa irão mudar e não teremos uma situação de estado estacionário. Seja  $T_X$  a temperatura na interface entre os dois materiais. Usando a Eq. 20-18, podemos então escrever

$$H = \frac{k_2 A (T_H - T_X)}{L_2} = \frac{k_1 A (T_X - T_C)}{L_1} \quad (20-21)$$

Resolvendo a Eq. 20-21 para  $T_X$ , nos dá, depois de um pouco de álgebra,

$$T_X = \frac{k_1 L_2 T_C + k_2 L_1 T_H}{k_1 L_2 + k_2 L_1} \quad (20-22)$$

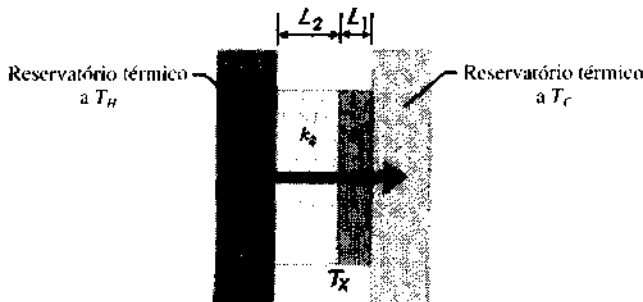


Fig. 20-9 O calor é transferido através de uma placa composta feita de dois materiais diferentes, com diferentes espessuras e condutividades térmicas. A temperatura da interface entre os dois materiais é  $T_X$ .

Substituindo esta expressão para  $T_X$ , em qualquer igualdade da Eq. 20-21, nos leva a

$$H = \frac{A(T_H - T_C)}{(L_1/k_1) + (L_2/k_2)} \quad (20-23)$$

A Eq. 20-19 nos faz lembrar que  $L/k = R$ .

Podemos, então, estender a Eq. 20-23 para qualquer número de materiais na forma

$$H = \frac{A(T_H - T_C)}{\sum (L/k)} = \frac{A(T_H - T_C)}{\sum R} \quad (20-24)$$

O sinal de somatório no denominador nos indica que devemos adicionar os valores para todos os materiais envolvidos.

**Convecção**

Quando você olha para a chama de uma vela ou de um fósforo, está olhando para energia calorífica sendo transportada para cima por **convecção**. A transferência de calor por convecção ocorre quando um fluido, como o ar ou a água, está em contato com um objeto cuja temperatura é maior do que a sua. A temperatura do fluido em contato com o objeto quente aumenta e (na maioria das vezes) o fluido se expande. Como se torna menos denso que o fluido frio à sua volta, o quente sobe devido a forças de empuxo (veja Fig. 20-10). O fluido frio desce, para ocupar o lugar do



Fig. 20-10 Uma partida de futebol noturna em Dartmouth é iluminada por uma grande fogueira. À medida que o ar e os gases quentes sobem, o ar mais frio flui para a base da fogueira.



**Fig. 20-11** Um termograma de falsa cor revela a taxa em que a energia é irradiada por casas ao longo de uma rua. As taxas, da maior para a menor, foram codificadas em cores diversas no termograma original, possibilitando dizer onde havia isolamento nas paredes, cortinas pesadas nas janelas e temperaturas maiores nos telhados e andares mais altos.

quente ascendente, e uma circulação convectiva se estabelece.

A convecção faz parte de muitos processos naturais. A convecção atmosférica tem um importante papel na determinação das intempéries climáticas do planeta e nas variações climáticas diárias. Pilotos de planadores e pássaros procuram correntes de ar quente que, vindo da superfície quente do planeta, os mantêm no ar. Enormes transferências de energia ocorrem, dentro dos oceanos, pelo mesmo processo. Finalmente, a energia é transportada para a superfície do Sol, a partir de uma "fornalha nuclear" em seu núcleo, por enormes células de convecção, cujos topos podem ser vistos como granulações na superfície solar.

### Radiação

A energia é transportada do Sol até nós por ondas eletromagnéticas que se propagam livremente através do vácuo quase perfeito do espaço. Se você ficar próximo a uma fogueira ou qualquer fonte de calor em campo aberto, se aquecerá pelo mesmo processo. Todos os objetos emitem tais radiações eletromagnéticas, simplesmente porque sua temperatura está acima do zero absoluto (veja Fig. 20-11), e todos os objetos absorvem um pouco da radiação que chega até eles, emitida por outros objetos. A temperatura média do nosso planeta, por exemplo, permanece próxima aos 300 K porque, a essa temperatura, a Terra irradia energia para o espaço à mesma taxa em que recebe energia do Sol (veja Fig. 20-12). Se a temperatura da Terra — por algum milagre — mudasse repentinamente para 280 K ou 320 K, ela rapidamente se aqueceria ou se resfriaria até retornar a 300 K, restabelecendo seu delicado equilíbrio térmico.

Quando você se expõe à luz solar, ela o esquenta porque sua pele e roupas absorvem a luz. Pesquisas têm demonstrado que um manto negro dos beduínos absorve muito mais luz solar que um manto branco, em média sua temperatura será 6°C maior do que a do branco. Por que, então, alguém que queira evitar o calor para sobreviver no deserto veste um manto negro?

A resposta é que mantos negros esquentam o ar dentro deles. Este ar sobe e deixa o manto pelas aberturas superiores, enquanto o ar externo entra pelas aberturas inferior-

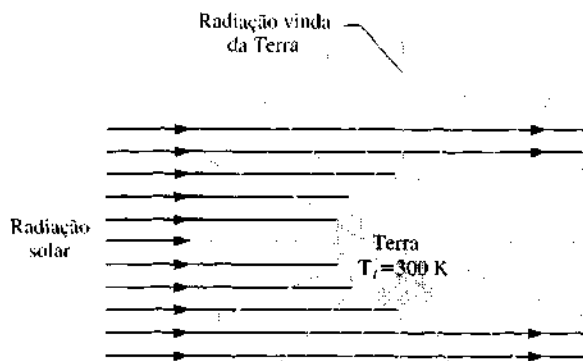
res, para ocupar o lugar do ar quente que saiu (Fig. 20-13). Assim, o manto negro aumenta a circulação de ar e mantém o beduíno mais frio que uma pessoa que use o branco. De fato, aquele pode até fazer o beduíno se sentir mais confortável, pois uma brisa passa continuamente por seu corpo.

**EXEMPLO 20-5** Uma placa composta (veja Fig. 20-9) cuja área  $A$  é 26 ft<sup>2</sup> (pés quadrados) é feita de 2,0 polegadas de lâ de vidro e 0,75 polegadas de pinho branco. A diferença de temperatura entre as faces da placa é 65°F. Qual a taxa de transmissão de calor através da placa?

**Solução** Os valores  $R$  dados na Tabela 20-4 são para placas de 1 polegada. Assim, o valor  $R$  para a lâ de vidro é  $3,3 \times 2,0$  ou  $6,6 \text{ ft}^2 \cdot \text{°F} \times \text{h/Btu}$ . Para a madeira, é  $1,3 \times 0,75$  ou  $0,98$  polegadas, nas mesmas unidades. A placa composta tem assim um valor  $R$  de  $6,6 + 0,98$  ou  $7,58 \text{ ft}^2 \cdot \text{°F} \times \text{h/Btu}$ . Substituindo na Eq. 20-24, temos

$$H = \frac{A(T_H - T_C)}{\Sigma R} = \frac{(26 \text{ ft}^2)(65^\circ\text{F})}{7,58 \text{ ft}^2 \cdot \text{°F} \cdot \text{h/Btu}} \quad (\text{Resposta})$$

$$= 223 \text{ Btu/h} \approx 220 \text{ Btu/h} (= 65 \text{ W}).$$



**Fig. 20-12** A radiação solar é interceptada pela Terra e (na sua maior parte) absorvida. A temperatura  $T_T$  da Terra se ajusta a um valor pelo qual a perda de calor por radiação é exatamente igual à quantidade de calor absorvida do Sol.



**Fig. 20-13** A convecção para cima, através de um manto negro mais quente, é mais vigorosa do que a que ocorre em um branco, mais frio. (De "Why Do Bedouins Wear Black Robes in Hot Deserts?", A. Shkolnik, C. R. Taylor, V. Finch e A. Borut, *Nature*, Vol. 283, 24 de janeiro de 1980, pp. 373 - 374.)

Assim, a essa diferença de temperatura, cada placa isolante pode transmitir calor continuamente à razão de 65 W.

**EXEMPLO 20-6** A Fig. 20-14 mostra uma seção de um muro feito de pinho branco de espessura  $L_a$  e tijolo de espessura  $L_d (= 2,0 \times L_a)$ , com duas placas internas de material desconhecido com idênticas espessuras e condutividades térmicas. A condutividade térmica do pinho é  $k_a$  e a do tijolo,  $k_d (= 5,0 \times k_a)$ . A área  $A$  da superfície do muro é desconhecida. A condução de calor através do muro atingiu um estado estacionário, com as únicas temperaturas de interface conhecidas, sendo  $T_1 = 25^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = 20^\circ\text{C}$  e  $T_5 = -10^\circ\text{C}$ .

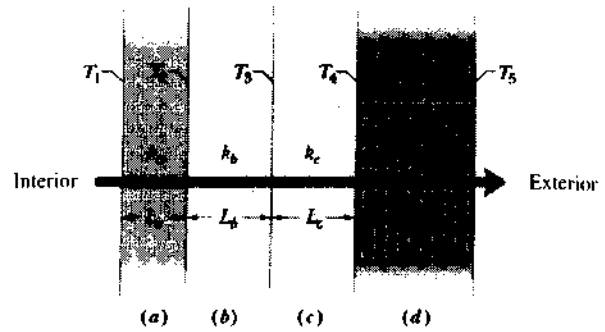
a. Qual a temperatura de interface  $T_4$ ?

**Solução** Não podemos encontrar  $T_4$  simplesmente aplicando a Eq. 20-18, placa por placa, começando com o pinho e terminando com os tijolos, porque não sabemos o suficiente sobre as placas intermediárias. Entretanto, como a condução de calor alcançou o estado estacionário, sabemos que a taxa de condução  $H_b$  através do pinho precisa ser igual à de condução  $H_d$  através dos tijolos. Da Eq. 20-18 e da Fig. 20-14, podemos escrever essas razões como

$$H_a = k_a A \frac{T_1 - T_2}{L_a} \quad \text{e} \quad H_d = k_d A \frac{T_4 - T_5}{L_d}$$

Colocando  $H_a = H_d$  e resolvendo para  $T_4$ , temos

$$T_4 = \frac{k_a L_d}{k_d L_a} (T_1 - T_2) + T_5$$



**Fig. 20-14** Exemplo 20-6. Um muro de quatro camadas através do qual há uma transferência de calor em estado estacionário.

Fazendo  $L_d = 2,0 L_a$  e  $k_d = 5,0 k_a$  e, inserindo as temperaturas conhecidas, temos

$$\begin{aligned} T_4 &= \frac{k_a (2,0 L_a)}{(5,0 k_a) L_a} (25^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}) + (-10^\circ\text{C}) \\ &= -8,0^\circ\text{C}. \end{aligned} \quad \text{(Resposta)}$$

b. Qual a temperatura na interface  $T_3$ ?

**Solução** Agora que conhecemos  $T_4$ , podemos encontrar  $T_3$ , mesmo sabendo pouco sobre as placas intermediárias. (De fato, nesse ponto, você já deve estar imaginando a resposta.) Como o processo de condução do calor está em seu estado estacionário, a taxa de condução  $H_b$  através da placa  $b$  é igual à de condução  $H_c$  através da placa  $c$ . Da Eq. 20-18, temos

$$k_b A \frac{T_2 - T_3}{L_b} = k_c A \frac{T_3 - T_4}{L_c}$$

Como as condutividades térmicas  $k_b$  e  $k_c$  das placas são iguais, assim como suas espessuras  $L_b$  e  $L_c$ , temos

$$T_2 - T_3 = T_3 - T_4,$$

o que nos dá

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{T_2 + T_4}{2} = \frac{20^\circ\text{C} + (-8,0^\circ\text{C})}{2} \\ &= 6,0^\circ\text{C}. \end{aligned} \quad \text{(Resposta)}$$

Isso nos mostra que, como as placas intermediárias têm condutividades térmicas idênticas, um ponto no meio delas tem uma temperatura que é a média das temperaturas de suas superfícies externas.

## RESUMO

### Calor

Calor  $Q$  é a energia transferida entre um sistema e seu ambiente, devido a uma diferença de temperatura entre eles. Pode ser medido em **joules (J)**, **calorias (cal)**, **quilocalorias (Cal ou kcal)** ou **unidades térmicas britânicas (Btu)**, com

$$1 \text{ Cal} = 10^3 \text{ cal} = 3.969 \text{ Btu} = 4.186 \text{ J} \quad (20-1)$$

### Capacidade Calorífica e Calor Específico

Se calor  $Q$  é adicionado a um objeto com massa  $m$ , a mudança de temperatura  $T_f - T_i$  se relaciona a  $Q$  por

$$Q = C(T_f - T_i), \quad (20-2)$$



onde  $C$  é a **capacidade calorífica** do objeto. O **calor específico**  $c$  do material (a capacidade calorífica por unidade de massa; veja Tabela 20-1), é definido por

$$Q = cm(T_f - T_i). \quad (20-3)$$

O **calor específico molar** (a capacidade calorífica por mol ou por  $6.02 \times 10^{23}$  unidades elementares de um material) nos mostra uma interessante regularidade que ajuda a entender os mecanismos envolvidos na absorção de calor. Medidas de calor específico dependem das condições do ambiente (sob pressão ou volume constantes, por exemplo), e estas precisam ser especificadas claramente.

#### Calor de Transformação

Calor aplicado a um material pode mudar o seu estado físico, por exemplo, de sólido para líquido ou de líquido para gás. A quantidade de calor necessária, por unidade de massa, para um material particular é o seu **calor de transformação**  $L$ ; veja Tabela 20-2. Assim,

$$Q = Lm. \quad (20-5)$$

O **calor de vaporização**  $L_v$  é a quantidade de energia por unidade de massa que precisa ser adicionada para vaporizar um líquido ou removida para condensar um gás. O **calor de fusão**  $L_f$  é a quantidade de energia por unidade de massa que precisa ser adicionada para derreter um sólido ou removida para congelar um líquido.

#### Trabalho Associado à Mudança de Volume

Um sistema também pode trocar energia com seu ambiente através de trabalho. A quantidade de trabalho  $W$  realizado por um sistema, enquanto se expande ou se contrai a partir de um volume inicial  $V_i$  para um volume final  $V_f$ , pode ser calculada por

$$W = \int dW = \int_{V_i}^{V_f} p \, dV. \quad (20-11)$$

A integração é necessária porque a pressão  $p$  pode variar durante a mudança de volume. O trabalho  $W$  também pode ser representado como a área sob a curva de  $p$  versus  $V$  que representa a mudança (veja Fig. 20-4).

#### Primeira Lei da Termodinâmica

O princípio de conservação da energia para uma amostra de material, trocando energia com seu ambiente através de trabalho e calor, é expresso

na **primeira lei da termodinâmica**, que pode assumir uma das duas formas

$$\Delta E_{\text{int}} = E_{\text{int},f} - E_{\text{int},i} = Q - W \quad (\text{Primeira lei}) \quad (20-12)$$

ou

$$dE_{\text{int}} = dQ - dW \quad (\text{Primeira lei}). \quad (20-13)$$

$E_{\text{int}}$  representa a energia interna do material, que depende somente de seu estado (temperatura, pressão e volume).  $Q$  representa o calor que é trocado pelo sistema e o ambiente;  $Q$  é positivo se o sistema ganhar calor, e negativo se perder.  $W$  é o trabalho realizado pelo sistema;  $W$  é positivo se o sistema se expande contra alguma força externa exercida pelo ambiente, e negativo se ele se contrai devido a alguma força externa.

#### $Q$ e $W$ São Dependentes do Processo; $E_{\text{int}}$ Não

Durante um processo termodinâmico, o calor trocado entre o sistema e seu ambiente e o trabalho realizado por aquele dependem dos detalhes desse processo: são dependentes do caminho. Entretanto, a mudança na energia interna do sistema não depende do processo, mas somente dos estados inicial e final do sistema.

#### Aplicações da Primeira Lei

A primeira lei da termodinâmica tem aplicações em diversos casos:

*processo adiabático:*  $Q = 0$ ,  $\Delta E_{\text{int}} = -W$

*processo com volume constante:*  $W = 0$ ,  $\Delta E_{\text{int}} = Q$

*processo cíclico:*  $\Delta E_{\text{int}} = 0$ ,  $Q = W$

*processo de expansão livre:*  $Q = W = \Delta E_{\text{int}} = 0$ .

#### Condução, Convecção e Radiação

A taxa  $H$  em que o calor é conduzido por uma placa, cujas faces estão mantidas a temperaturas  $T_H$  e  $T_C$ , é

$$H = \frac{Q}{t} = kA \frac{T_H - T_C}{L}, \quad (20-18)$$

onde  $A$  e  $L$  são a área da face e a largura da placa, e  $k$  é a condutividade térmica do material (veja Fig. 20-8). Para materiais de construção e isolantes em placas de largura  $L$ , freqüentemente usamos a resistência térmica  $R$  (o valor  $R$ , com  $R = L/k$ ).

A *convecção* ocorre quando as diferenças de temperatura causam um deslocamento dentro de um fluido, transferindo calor. A *radiação* é a transferência de calor via emissão de energia eletromagnética. Todos os objetos irradiam energia, a quantidade aumentando com a temperatura.

## QUESTIONÁRIO

1. Temperatura e calor são freqüentemente confundidos, como em "asse isto no forno em calor moderado". A partir do exemplo, diferencie esses dois conceitos da forma mais precisa que conseguir.
2. Dê um exemplo de um processo em que nenhum calor seja transferido de, ou para um sistema, mas em que a temperatura do sistema mude.
3. Pode o calor ser considerado uma forma de energia armazenada (ou potencial)? Pode tal interpretação contradizer o conceito do calor como uma energia no processo de transferência, devido a uma diferença de temperatura?
4. O calor pode ser absorvido por uma substância sem que esta mude sua temperatura. Esta afirmação contradiz o conceito do calor como uma energia no processo de transferência, devido a uma diferença de temperatura?
5. Por que calor precisa ser fornecido ao gelo para que este derreta, visto que a temperatura dele não aumenta durante esse processo?
6. Explique o fato de que a presença de uma grande quantidade de água nas proximidades, como um lago ou oceano, tende a moderar os extremos de temperaturas nesses locais.
7. Um ventilador não esfria o ar que circula, mas o esquenta levemente. Como pode, então, lhe refrescar?
8. A condução de calor e a propagação de ondas envolvem a transferência de energia. Há, em princípio, alguma diferença entre os dois fenômenos? Explique.
9. Quando um objeto quente esquenta um frio, suas mudanças de temperatura são iguais em magnitude? Dê exemplos.

10. Um bloco de madeira e um de metal estão à *mesma* temperatura. Quando os blocos esfriam, o de metal parece mais frio que o de madeira. Quando esquentam, o de metal parece mais quente que o de madeira. Explique. A que temperatura parecerão igualmente frios ou quentes?
11. Como você pode usar, da melhor maneira possível, uma colher para esfriar um copo de café? Mexendo — o que envolve realização de trabalho — provavelmente vai esquentá-lo ao invés de esfriar.
12. Como pode uma camada de neve proteger as plantas durante o inverno? Em períodos muito frios, agricultores na Flórida freqüentemente borrifam água em suas frutas, esperando que ela congele. Como isso pode ajudar?
13. Explique o efeito causado pelo vento que os meteorologistas da rádio e da TV mencionam em tempos frios.
14. Você põe a mão dentro de um forno quente para tirar uma forma e queima seus dedos nela. Entretanto, o ar em torno dela está à mesma temperatura, mas não queima seus dedos. Por quê?
15. Por que o porão da casa é construído com menos isolamento que a parte superior?
16. O gelo está sempre a 0°C? Ele pode ser mais frio? Pode ser mais quente? É uma mistura de água e gelo?
17. Explique por que seu dedo gruda em um pedaço de metal retirado do refrigerador.
18. A água em uma chaleira começa a borbulhar quando está esquentando. Quando começa a ferver, entretanto, fica bem mais silenciosa. Qual é a explicação? (*Sugestão:* Pense no destino de uma bolha de vapor subindo do fundo da chaleira, antes que a água esteja uniformemente aquecida.)
19. Em um dia de inverno, a temperatura da superfície interna da parede de uma casa é muito menor do que a de dentro da casa e a temperatura da superfície externa da parede é muito maior do que a do lado de fora. Explique.
20. Os mecanismos fisiológicos, que mantêm a temperatura interna de um ser humano, operam dentro de uma faixa limitada de temperatura externa. Explique como essa faixa pode ser aumentada, para os dois extremos, com o uso de roupas.
21. Que pré-requisitos de condutividade térmica, calor específico e coeficiente de dilatação precisa ter um material, para ser usado em utensílios de cozinha?
22. Suponha que, por alguma estranha razão, a janela de vidro de uma casa é substituída por placas de alumínio, nas mesmas medidas do vidro. Qual é a taxa a que o calor é conduzido através das janelas modificadas?
23. A temperatura de um sistema isolado (sem interação com seu ambiente) se conserva? Explique.
24. Calor é a mesma coisa que energia interna? Se não, dê um exemplo em que a energia interna de um sistema mude sem haver fluxo de calor através de seus limites.
25. Você pode dizer quando a energia interna de um corpo foi adquirida por transferência de calor ou por realização de trabalho?
26. Se forem dados apenas a pressão e o volume de um sistema, a temperatura pode ser univocamente determinada?
27. Discuta o processo pelo qual a água congela, do ponto de vista da primeira lei da termodinâmica. Lembre-se que o gelo ocupa um volume maior do que a mesma massa de água.
28. Uma garrafa térmica contém café. Ela é vigorosamente sacudida. Considere o café como o sistema. (a) A temperatura vai subir? (b) Será adicionado calor ao sistema? (c) Será realizado trabalho sobre o sistema? (d) Sua energia interna mudará?
29. Já vimos que “conservação de energia” é uma lei universal da natureza. Ao mesmo tempo os líderes mundiais pedem “conservação de energia” para os cidadãos (por exemplo, dirigir mais devagar). Explique os dois significados bastante diferentes dessas palavras.
30. O calor pode ser transferido pela matéria através de radiação? Em caso afirmativo, dê um exemplo. Se não, explique por quê.
31. Por que painéis de aço freqüentemente possuem uma placa de cobre ou alumínio no fundo?
32. Considere que o calor pode ser transferido por convecção e radiação, tão bem como por condução, e explique por que uma garrafa térmica possui parede dupla, prateada (como um espelho) e com vácuo entre elas.
33. Um lago congela primeiro a sua superfície. Há convecção envolvida? E condução e radiação?
34. Você põe dois baldes destampados, um contendo água quente e o outro a mesma quantidade de água à temperatura ambiente, em um local aberto de clima extremamente frio. O balde com a água quente irá criar gelo primeiro. Por quê? O que aconteceria se cobríssemos os baldes?

## EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

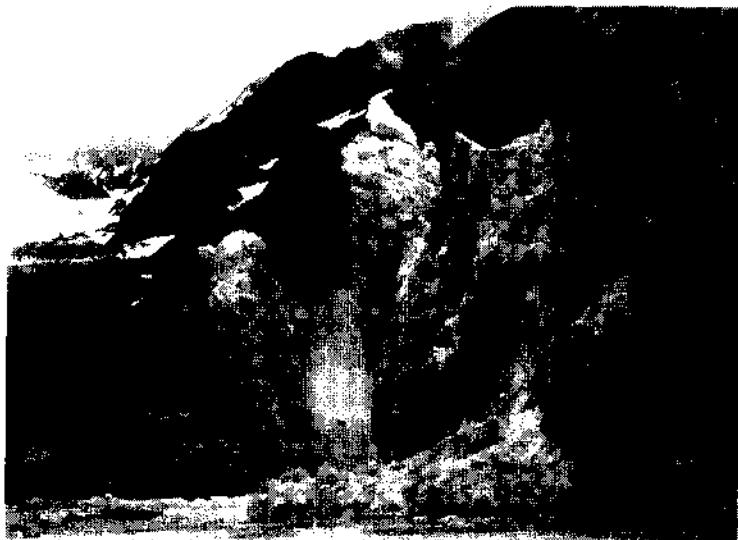
### Seção 20-3 Absorção de Calor por Sólidos e Líquidos

1E. É possível derreter pedras de gelo esfregando uma contra a outra. Quanto trabalho, em joules, você tem de realizar para derreter, por este processo, 1,00 g de gelo?

2E. Uma certa substância tem massa por mole de 50 g/mol. Quando 314 J de calor são adicionados a uma amostra de 30,0 g deste material, sua temperatura aumenta de 25,0°C para 45,0°C. (a) Qual o calor específico desta substância? (b) Quantos moles desta estavam presentes? (c) Qual o calor específico molar da substância?

3E. Em uma certa casa, a energia do Sol é conservada em barris cheios de água. Em cinco dias nublados de um inverno, foram necessários  $1,00 \times 10^6$  kcal para manter a temperatura dentro da casa a 22°C. Supondo que a água dos barris estava a 50,0°C e que ela tem uma densidade de  $1,00 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>, que volume de água foi necessário?

4E. Um médico de dietas encoraja a ingestão de água muito gelada. Esta teoria considera que o corpo precisa queimar gordura para elevar a temperatura da água de 0,00°C até a temperatura do corpo (37°C). Quantos litros de água a 0°C precisam ser consumidos para queimar 454 g (cerca de 1 lb) de gordura, supondo que este processo queime 3.500 Cal? Por



**Fig. 20-15** Exercício 5. O desprendimento de um iceberg de uma geleira oferece sérios perigos à navegação.

que não é aconselhável seguir esta dieta? Um litro =  $10^3 \text{ cm}^3$ . A densidade da água é de  $1.00 \text{ g/cm}^3$ .

**5E.** Icebergs representam perigo no Atlântico Norte para os navios (veja Fig. 20-15), fazendo com que as rotas aumentem cerca de 30% durante sua época. As tentativas para destruí-los incluem colocação de explosivos, bombas, torpedos, entre outros. Suponha que seja feita uma tentativa de derreter um iceberg, colocando fontes de calor sobre ele. Quanto calor seria necessário para derreter 10% de um iceberg de 200.000 toneladas métricas?

**6E.** Quanta água permanece líquida após 50,2 kJ de calor serem extraídos de 260 g de água, inicialmente ao ponto de congelamento?

**7E.** Calcule a quantidade mínima de calor, em joules, necessária para derreter completamente 130 g de prata, inicialmente a  $15.0^\circ\text{C}$ . Suponha que o calor específico durante o aquecimento seja o dado na Tabela 20-1.

**8E.** Uma sala é iluminada por quatro lâmpadas de 100 W incandescentes. (100 W é a razão pela qual a lâmpada converte energia elétrica em luz visível e calor). Supondo que 90% da energia sejam convertidos em calor, quanto calor será adicionado à sala em 1,00 h?

**9E.** Que quantidade de manteiga ( $6,0 \text{ Cal/g} = 6.000 \text{ Cal/g}$ ) irá fornecer a energia necessária para um homem de 160 lb subir o Monte Everest, de 29.000 pés de altura, a partir do nível do mar?

**10E.** Um atleta dissipa toda a energia numa dieta de 4.000 Cal/dia. Se fôssemos perder essa energia a uma taxa constante, como poderia essa conversão de energia ser comparada com a de uma lâmpada de 100 W? (100 W correspondem à taxa pela qual a lâmpada converte energia elétrica em luz visível e calor.)

**11E.** Se o calor necessário para aumentar a temperatura de massa  $m$  de água de  $68^\circ\text{F}$  para  $78^\circ\text{F}$  for de algum modo transformado em energia cinética translacional dessa água, qual será a sua velocidade?

**12E.** Potência à razão de 0,400 hp durante 2,00 min é fornecida para uma broca fazer um buraco em um bloco de cobre de 1,60 lb. (a) Quanto calor é gerado em Btu? (b) Em quanto sobe a temperatura do cobre, se somente 75,0% da energia esquentar o cobre? (Use  $1 \text{ ft} \times \text{lb} = 1.285 \times 10^{-3} \text{ Btu}$ .)

**13E.** Um objeto de massa de 6,00 kg cai de uma altura de 50,0 m e, por meio de uma engrenagem mecânica, gira uma roda que desloca 0,600 kg de água. A água está inicialmente a  $15^\circ\text{C}$ . Qual o aumento máximo da temperatura da água?

**14E.** (a) Encontre o possível acréscimo de temperatura que a água sofre ao cair nas Cataratas do Niágara, que tem 162 pés de altura. (b) Que fatores tendem a diminuir esse possível acréscimo?

**15E.** Um pequeno aquecedor submerso é usado para ferver 100 g de água em uma máquina de café instantâneo. O aquecedor é de 200 watts, o que significa que converte energia elétrica em calor a esta taxa. Calcule o tempo necessário para elevar a temperatura da água, de  $23^\circ\text{C}$  até o ponto de ebulição, ignorando quaisquer perdas de calor.

**16E.** Um caminhão, cuja massa é de 2.200 kg, está correndo na estrada a  $65,0 \text{ mi/h}$ . (a) Se você pudesse usar toda esta energia cinética para vaporizar água, já a  $100^\circ\text{C}$ , quanta água conseguiria vaporizar? (b) Se tivesse de comprar essa quantidade de energia a 12 centavos por kW  $\times$  h, quanto custaria? Tente adivinhar as respostas, antes de fazer os cálculos. Poderá ter uma surpresa.

**17E.** Uma panela de cobre de 150 g contém 220 g de água, ambas a  $20,0^\circ\text{C}$ . Um cilindro de cobre muito quente de 300 g é colocado dentro da água, fazendo com que ela ferva, com 5,00 g sendo convertidos em vapor. A temperatura final do sistema é  $100^\circ\text{C}$ . (a) Quanto calor foi transferido para a água? (b) E para a panela? (c) Qual era a temperatura inicial do cilindro?

**18P.** Calcule o calor específico de um metal a partir dos seguintes dados. Um recipiente feito do metal tem massa de 3,6 kg e contém 14 kg de água. Uma peça de 1,8 kg deste metal, inicialmente a  $180^\circ\text{C}$ , é colocada dentro da água. O recipiente e a água tinham inicialmente a temperatura de  $16^\circ\text{C}$  e a final do sistema foi de  $18^\circ\text{C}$ .

**19P.** Um termômetro de massa de 0,0550 kg e calor específico de  $0,837 \text{ kJ/kg} \times \text{K}$  marca  $15^\circ\text{C}$ . Ele é então imerso completamente em 0,300 kg de água, chegando até uma temperatura final idêntica à da água. Se o termômetro passou a marcar  $44,4^\circ\text{C}$ , qual era a temperatura da água antes dele ser mergulhado nela?

**20P.** Quanto tempo leva um aquecedor de água de  $2,0 \times 10^3 \text{ Btu/h}$  para elevar a temperatura de 40 gal de água de  $70^\circ\text{F}$  para  $100^\circ\text{F}$ ?

**21P.** Um atleta precisa perder peso e decide fazê-lo praticando halterofilismo. (a) Quantas vezes um peso de 80,0 kg precisa ser levantado à distância de 1,00 m para queimar 1 lb de gordura, supondo que o processo necessite de 3.500 Cal? (b) Se o peso for levantado uma vez a cada 2,00 s, quanto tempo levará para queimar tal quantidade de gordura?

**22P.** Um caminhão de 1.500 kg se movendo a  $90 \text{ km/h}$  freia, com desaceleração uniforme, sem derrapar e pára depois de 80 m. A que taxa média é produzida energia térmica no sistema de freios?

**23P.** Um cozinheiro, após acordar e perceber que seu fogão estava sem gás, decide ferver água para fazer café, sacudindo-a dentro de uma garrafa térmica. Suponha que ele use  $500 \text{ cm}^3$  de água a  $59^\circ\text{F}$  e que a água caia 1,0 pé em cada sacudida, com o cozinheiro dando 30 sacudidas por minuto. Desprezando quaisquer perdas de energia térmica pela garrafa, quanto tempo precisa ficar sacudindo a garrafa até que a água ferva?

**24P.** Um bloco de gelo, em seu ponto de fusão e com massa inicial de 50,0 kg, desliza sobre uma superfície horizontal, começando à velocidade de  $5,38 \text{ m/s}$  e finalmente parando, depois de percorrer 28,3 m. Calcule a massa de gelo derretido como resultado do atrito entre o bloco e a superfície. (Suponha que todo o calor produzido pelo atrito seja absorvido pelo bloco de gelo.)

**25P.** O calor específico de uma substância varia com a temperatura de acordo com a fórmula  $c = 0,20 + 0,14T + 0,023T^2$ , com  $T$  em  $^\circ\text{C}$  e  $c$

em cal/g  $\times$  K. Encontre o calor necessário para elevar a temperatura de 2,0 g desta substância de 5,0 para 15°C.

**26P.** Em um aquecedor de água solar, a energia do Sol é armazenada através de um coletor no telhado, que possui tubos de água circulando por ele. A radiação solar penetra no coletor através de sua tampa transparente e aquece a água dos tubos; esta água é então jogada em um reservatório. Supondo que a eficiência do sistema seja de 20% (isto é, que 80% da energia solar sejam perdidos pelo sistema), que área precisaria ter o coletor para aumentar a temperatura de 200 L de água no tanque, de 20 para 40°C e em 1,0 h? A intensidade da luz solar incidente é de 700 W/m<sup>2</sup>.

**27P.** Uma garrafa térmica contém 130 cm<sup>3</sup> de café quente, à temperatura de 80,0°C. Nela, você põe uma pedra de gelo de 12,0 g, em seu ponto de fusão, para esfriar o café. Quantos graus o café esfria, após o gelo ter derretido? Trate o café como se fosse água pura.

**28P.** Que massa de vapor a 100°C precisa ser misturada com 150 g de gelo a seu ponto de fusão, em uma garrafa térmica, para produzir água líquida a 50°C?

**29P.** Uma pessoa faz uma quantidade de chá gelado, misturando 500 g de chá quente (essencialmente água) com a mesma massa de gelo em seu ponto de fusão. Se o chá quente estava inicialmente a (a) 90°C e (b) 70°C, qual a temperatura e massa de gelo restante quando o chá e o gelo atingiram a mesma temperatura (equilíbrio térmico)?

**30P.** (a) Dois cubos de gelo de 50 g são colocados num vidro contendo 200 g de água. Se a água estava inicialmente à temperatura de 25°C e se o gelo veio diretamente do freezer a -15°C, qual será a temperatura final do sistema quando a água e o gelo atingirem a mesma temperatura? (b) Supondo que somente um cubo de gelo foi usado em (a), qual a temperatura final do sistema? Ignore a capacidade térmica do vidro.

**31P.** Um anel de cobre de 20,0 g tem um diâmetro de exatamente 1 polegada à temperatura de 0,000°C. Uma esfera de alumínio tem um diâmetro de exatamente 1,00200 pol à temperatura de 100,0°C. A esfera é colocada em cima do anel (Fig. 20-16) e permite-se que os dois encontrem seu equilíbrio térmico, sem ser perdido calor para o ambiente. A esfera passa exatamente pelo anel na temperatura de equilíbrio. Qual a massa da esfera?

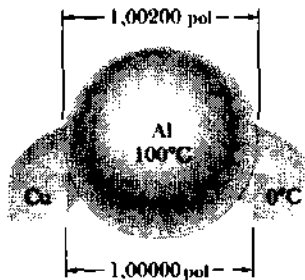


Fig. 20-16 Problema 31.

**32P.** Um calorímetro de fluxo é um instrumento usado para medir o calor específico de um líquido. O calor é adicionado ao líquido, a uma taxa conhecida, conforme passa através do calorímetro, a uma velocidade conhecida. É então medida a diferença de temperatura resultante entre o ponto de entrada e o de saída do líquido, permitindo calcular o seu calor específico. Suponha que um líquido de densidade 0,85 g/cm<sup>3</sup> passe através do calorímetro à taxa de 8,0 cm<sup>3</sup>/s. O calor é fornecido à razão de 250 W, através de um aquecedor elétrico, e a diferença de temperatura entre os pontos de entrada e saída, após atingido um estado estacionário, é de 15°C. Qual o calor específico do líquido?

**33P.** Por meio de um aquecedor elétrico, energia é transferida a uma taxa constante para uma substância em um pote totalmente isolado. A temperatura da substância é medida como uma função do tempo. (a) Mostre como podemos deduzir, a partir dessa informação, a maneira pela qual a capacidade calorífica do corpo depende da temperatura. (b) Supondo que a uma certa faixa de temperatura,  $T$  seja proporcional a  $t^2$ , onde  $t$  é o tempo, como a capacidade térmica depende de  $T$  nessa situação?

**34P\*.** Dois blocos de metal são isolados de seu ambiente. O primeiro bloco, que tem massa  $m_1 = 3,16$  kg e temperatura inicial  $T_1 = 17,0^\circ\text{C}$  tem um calor específico quatro vezes maior do que o segundo bloco. Este está à temperatura  $T_2 = 47,0^\circ\text{C}$  e seu coeficiente de dilatação linear é  $15,0 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ . Quando os dois blocos são colocados juntos e alcançam seu equilíbrio térmico, a área de uma face do segundo bloco diminui em 0,0300%. Encontre a massa deste bloco.

**Seção 20-6 Alguns Casos Especiais da Primeira Lei da Termodinâmica**

**35E.** Uma amostra de gás se expande de 1,0 a 4,0 m<sup>3</sup>, enquanto sua pressão diminui de 40 para 10 Pa. Quanto trabalho é realizado pelo gás, de acordo com cada um dos três processos mostrados no gráfico  $p$ - $V$  da Fig. 20-17?

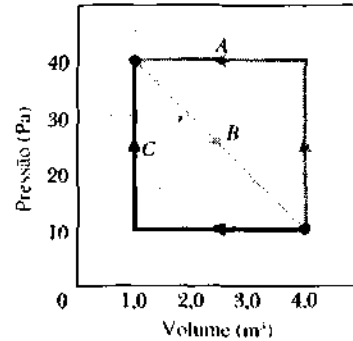


Fig. 20-17 Exercício 35.

**36E.** Suponha que uma amostra de gás se expanda de 1,0 para 4,0 m<sup>3</sup>, através do caminho B no gráfico  $p$ - $V$  mostrado na Fig. 20-18. Ela é então comprimida de volta para 1,0 m<sup>3</sup> através do caminho A ou C. Calcule o trabalho total realizado pelo gás para ciclo total, em cada caso.

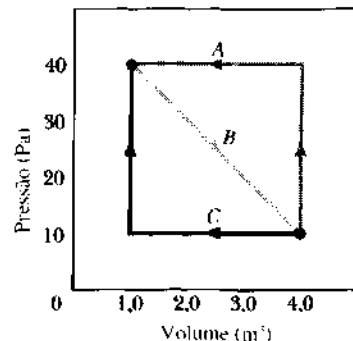


Fig. 20-18 Exercício 36.

**37E.** Considere que 200 J de trabalho são realizados sobre um sistema e 70,0 cal de calor são extraídos dele. Do ponto de vista da primeira lei da termodinâmica, quais os valores (incluindo sinais algébricos) de (a)  $W$ , (b)  $Q$  e (c)  $\Delta E_{int}$ ?

38E. Um sistema termodinâmico é levado de um estado inicial  $A$  para um  $B$  e, depois, de volta ao estado  $A$ , via  $C$ , como mostrado no caminho  $ABCA$  no gráfico  $p$ - $V$  da Fig. 20-19a. (a) Complete a tabela da Fig. 20-19b, colocando + ou - para o sinal de cada quantidade termodinâmica associada a cada processo. (b) Calcule o valor numérico do trabalho realizado pelo sistema para o ciclo completo  $ABCA$ .

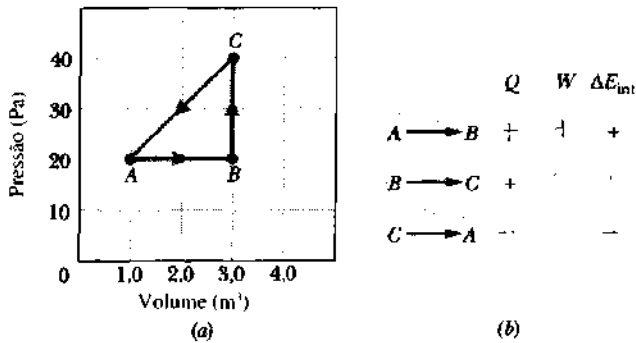


Fig. 20-19 Exercício 38.

39E. Um gás dentro de uma câmara passa pelo ciclo mostrado na Fig. 20-20. Determine o calor total adicionado ao sistema durante o processo  $CA$ , se o calor  $Q_{AB}$  adicionado ao sistema durante o processo  $AB$  for  $20,0$  J; nenhum calor for transferido durante o processo  $BC$ ; e o trabalho total realizado durante o ciclo for  $15,0$  J.

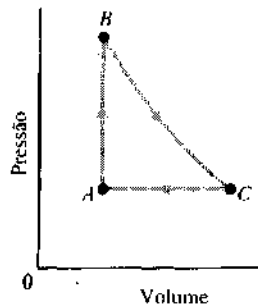


Fig. 20-20 Exercício 39.

40E. Um gás dentro de uma câmara passa pelo processo mostrado no gráfico  $p$ - $V$  da Fig. 20-21. Calcule o calor total adicionado ao sistema durante um ciclo completo.

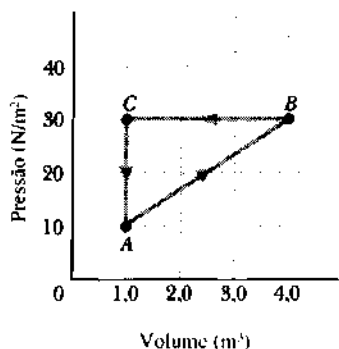


Fig. 20-21 Exercício 40.

41P. A Fig. 20-22a mostra um cilindro contendo gás e fechado por um pistão móvel. O cilindro está totalmente imerso em uma mistura de água e gelo. O pistão é rapidamente empurrado da posição 1 para a 2; permanece aí até que o gás esteja novamente à temperatura da mistura de água e gelo, e é, então, lentamente trazido de volta à posição 1. A Fig. 20-22b é um gráfico  $p$ - $V$  para o processo. Se  $100$  g de gelo são derretidos durante o processo, quanto trabalho foi realizado sobre o gás?

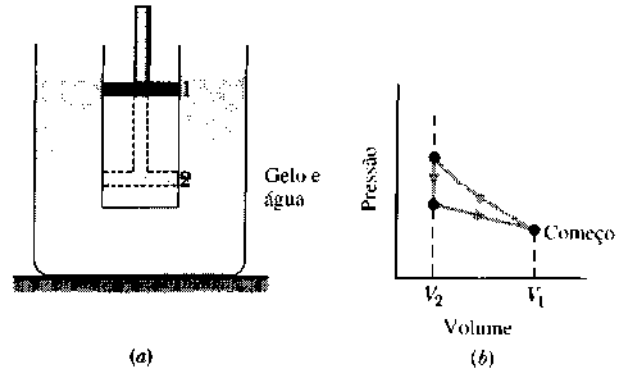


Fig. 20-22 Problema 41.

42P. Quando um sistema passa de um estado  $i$  para  $f$  pelo caminho  $iaf$  na Fig. 20-23,  $Q = 50$  cal e  $W = 20$  cal. Pelo caminho  $ibf$ ,  $Q = 36$  cal. (a) Qual o trabalho ( $W$ ) para o caminho  $ibf$ ? (b) Se  $W = -13$  cal para o caminho curvo de retorno  $fi$ , qual é  $Q$  para esse caminho? (c) Se  $\Delta E_{int, i} = 10$  cal. Qual é  $\Delta E_{int, f}$ ? (d) Se  $\Delta E_{int, b} = 22$  cal, quais os valores de  $Q$  para os processos  $ib$  e  $bf$ ?

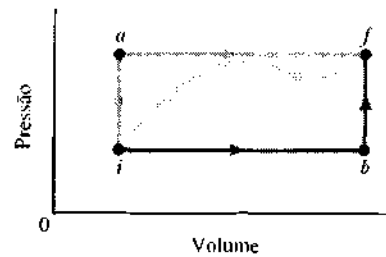


Fig. 20-23 Problema 42.

43P\*. Um cilindro possui um pistão de metal bem ajustado de  $2,0$  kg, cuja área da seção reta é de  $2,0$  cm<sup>2</sup> (Fig. 20-24). O cilindro contém água



Fig. 20-24 Problema 43.

e vapor à temperatura constante. Observa-se que o pistão desce lentamente, à taxa de 0,30 cm/s, pois o calor escapa do cilindro pelas suas paredes. Enquanto o processo ocorre, algum vapor se condensa na câmara. A densidade do vapor dentro dela é de  $6,0 \times 10^{-4} \text{ g/cm}^3$  e a pressão atmosférica, de 1,0 atm. (a) Calcule a taxa de condensação do vapor. (b) A que razão o calor deixa a câmara? (c) Qual a taxa de variação da energia interna do vapor e da água dentro da câmara?

**Seção 20-7 Transmissão de Calor**

**44E.** A taxa média pela qual o calor é conduzido através da superfície da Terra na América do Norte é de  $54,0 \text{ mW/m}^2$ , e a condutividade térmica média das rochas próximas à superfície é  $2,50 \text{ W/m} \times \text{K}$ . Supondo uma temperatura de  $10,0^\circ\text{C}$  para a superfície, qual será a temperatura para uma profundidade de 35,0 km (perto da base da crosta)? Ignore o calor gerado pela presença de elementos radioativos.

**45E.** A condutividade térmica de um vidro Pyrex a  $0^\circ\text{C}$  é  $2,9 \times 10^{-3} \text{ cal/cm} \times ^\circ\text{C} \times \text{s}$ . (a) Expresse isso em  $\text{W/m} \times \text{K}$  e em  $\text{Btu/ft} \times ^\circ\text{F} \times \text{h}$ . (b) Qual o valor  $R$  para uma placa de 1/4 in desse vidro?

**46E.** (a) Calcule a taxa a que o calor do corpo é conduzido através de uma roupa de esquiar, em um processo estacionário, a partir dos seguintes dados: a área da superfície do corpo é de  $1,8 \text{ m}^2$  e a roupa tem 1,0 cm de espessura; a temperatura da superfície da pele é  $33^\circ\text{C}$ , enquanto a da superfície externa da roupa é  $1,0^\circ\text{C}$ ; a condutividade térmica da roupa é  $0,040 \text{ W/m} \times \text{K}$ . (b) Como mudará a resposta de (a), se a roupa do esquiador for molhada com água? Suponha que a condutividade térmica da água seja  $0,60 \text{ W/m} \times \text{K}$ .

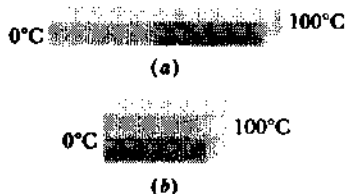
**47E.** Considere a placa mostrada na Fig. 20-8. Suponha que  $L = 25,0 \text{ cm}$ ,  $A = 90,0 \text{ cm}^2$  e o material seja cobre. Se  $T_H = 125^\circ\text{C}$ ,  $T_C = 10,0^\circ\text{C}$  e foi alcançado o estado estacionário, encontre a taxa de transmissão de calor através da placa.

**48E.** Um bastão cilíndrico de cobre, de comprimento 1,2 m e área de seção reta de  $4,8 \text{ cm}^2$  é isolado, para evitar perda de calor pela sua superfície. Os extremos são mantidos à diferença de temperatura de  $100^\circ\text{C}$ , um colocado em uma mistura água-gelo e o outro em água fervendo e vapor. (a) Ache a taxa em que o calor é conduzido através do bastão. (b) Ache a taxa em que o gelo derrete no extremo frio.

**49E.** Mostre que a temperatura  $T_x$  na interface de uma placa composta (veja Fig. 20-10) é dada por

$$T_x = \frac{R_1 T_H + R_2 T_C}{R_1 + R_2}$$

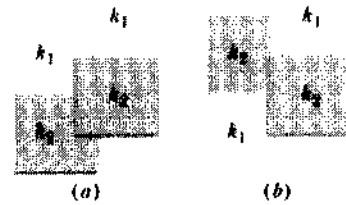
**50E.** Mostre que em uma placa composta como a da Fig. 20-25a a mudança de temperatura, ao longo de cada porção, é inversamente proporcional à condutividade térmica.



**Fig. 20-25** Exercício 50 e Problema 52.

**51E.** Quatro pedaços isolantes de dois diferentes materiais, todos com a mesma espessura e área  $A$ , estão disponíveis para cobrir uma abertura

de área  $2A$ . Isso pode ser feito das duas maneiras mostradas na Fig. 20-26. Que arranjo, (a) ou (b), irá permitir o menor fluxo de calor se  $k_2 \neq k_1$ ?

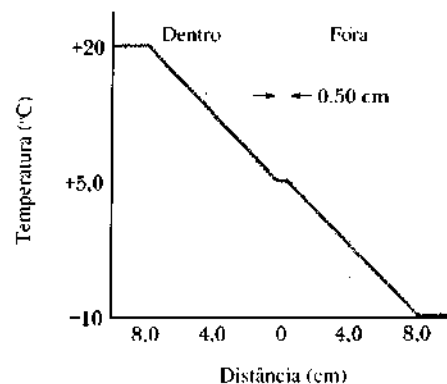


**Fig. 20-26** Exercício 51.

**52P.** Dois bastões idênticos retangulares de metal são colocados extremidade com extremidade, como mostra a Fig. 20-25a, e 10 J de calor são conduzidos (em um processo estacionário) através dos bastões em 2,0 min. Quanto tempo levará para se conduzir os mesmos 10 J, se os bastões estiverem como na Fig. 20-25b?

**53P.** Calcule a taxa de condução de calor através das seguintes portas de proteção contra o inverno, ambas com 2,0 m de altura e 0,75 m de largura. (a) Uma é feita com chapas de alumínio de 1,5 mm de espessura e um vidro de janela de 3,0 mm de espessura que cobre 75% da sua superfície. (b) A segunda é feita inteiramente de pinho branco com 2,5 cm de espessura. Considere a queda de temperatura através de cada porta como sendo  $33^\circ\text{C}$ , e veja a Tabela 20-4.

**54P.** Uma representação idealizada da temperatura do ar, como uma função da distância de uma janela de vidro em um dia calmo de inverno, é mostrada na Fig. 20-27. As dimensões da janela são  $60 \text{ cm} \times 60 \text{ cm} \times 0,50 \text{ cm}$ . Suponha que o calor seja conduzido através de um caminho que lhe é perpendicular, dos pontos a 8 cm da janela do lado de fora, para pontos a 8 cm da janela do lado de dentro. (a) Em que taxa o calor é conduzido através da área da janela? (Sugestão: a queda de temperatura através do vidro da janela é muito pequena.) (b) Estime a diferença de temperatura entre as superfícies interna e externa do vidro da janela.



**Fig. 20-27** Problema 54.

**55P.** Um grande tanque cilíndrico de água com um fundo de 1,7 m de diâmetro é feito de ferro galvanizado de 5,2 mm de espessura. Quando a água esquenta, o aquecedor a gás embaixo mantém a diferença de temperatura entre as superfícies superior e inferior, da chapa do fundo, em

2,3°C. Quanto calor é conduzido através dessa placa em 5,0 min? (O ferro tem condutividade térmica igual a  $67 \text{ W/m} \times \text{K}$ .)

**56P.** (a) Qual a taxa de perda de calor em watts por metro quadrado através de uma janela de vidro de 3,0 mm de espessura, se a temperatura do lado de fora for  $-20^\circ\text{F}$  e do lado de dentro  $+72^\circ\text{F}$ ? (b) Uma janela de proteção contra inverno é colocada, tendo a mesma espessura do vidro, mas com uma coluna de ar de 7,5 cm entre as duas janelas. Qual será, agora, a taxa de perda de calor, supondo que a condução é o único mecanismo importante de perda de calor?

**57P.** Um tanque de água foi construído ao ar livre em tempo frio e ali se formou uma camada de gelo de 5,0 cm na superfície da água (Fig. 20-28). O ar acima do gelo está a  $-10^\circ\text{C}$ . Calcule a taxa de formação do

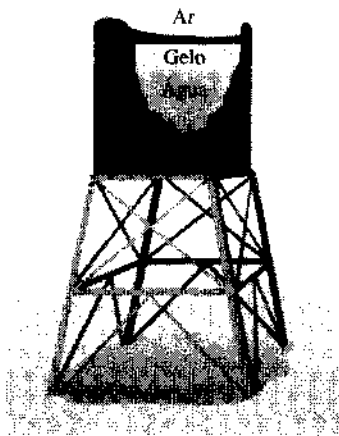


Fig. 20-28 Problema 57.

gelo (em centímetros por hora) na superfície inferior da placa de gelo. Considere a condutividade térmica do gelo e sua densidade como  $0,0040 \text{ cal/s} \times \text{cm} \times ^\circ\text{C}$  e  $0,92 \text{ g/cm}^3$ . Suponha que o calor não seja transferido pelas paredes ou pelo fundo do tanque.

**58P.** Formou-se gelo em um chafariz e foi alcançado o estado estacionário, com o ar acima do gelo a  $-5,0^\circ\text{C}$  e o fundo do chafariz a  $4,0^\circ\text{C}$ . Se a profundidade total do gelo + água for 1,4 m, qual a espessura do gelo? (Suponha que as condutividades térmicas do gelo e da água sejam  $0,40$  e  $0,12 \text{ cal/m} \times ^\circ\text{C} \times \text{s}$ , respectivamente.)

**59P.** Três bastões de metal, feitos de cobre, alumínio e latão, têm 6,00 cm de comprimento e 1,00 cm de diâmetro. Esses bastões são unidos ponta-a-ponta, com o de alumínio no meio. Os extremos livres dos bastões de latão e de cobre são mantidos no ponto de congelamento e de ebulição da água, respectivamente. Encontre as temperaturas de estado estacionário das junções cobre-alumínio e alumínio-latão. A condutividade térmica do latão é  $109 \text{ W/m} \times \text{K}$ .

**60P\*.** Um muro consiste de uma estrutura de 20 pés  $\times$  12 pés, feita com 16 ripas verticais de 12 pés de altura colocadas com seus centros a 1/4 pol de distância. O lado de fora do muro é coberto com madeira compensada ( $R = 0,30$ ), de 1/4 pol de espessura e com pinho branco ( $R = 0,98$ ), de 3/4 pol de espessura. O lado de dentro é coberto com laminação de 1/4 pol de espessura ( $R = 0,47$ ) e o espaço entre as ripas é preenchido com espuma de poliuretano ( $R = 5,9$ , para uma espessura de 1 polegada). A seção reta das ripas é retangular com dimensões 1,75 pol  $\times$  3,75 pol. Para a madeira das ripas  $R = 1,3$  para uma espessura de 1 pol. (a) A que taxa o calor é transferido através deste muro para uma diferença de temperatura de  $30^\circ\text{F}$  entre suas faces? (b) Qual o valor  $R$  para o muro composto? (c) Que fração da área do muro contém ripas em relação à área ocupada pela espuma? (d) Que fração da transmissão de calor se dá através das ripas, em relação àquela que se dá através da espuma?

PROBLEMAS ADICIONAIS

**61.** Uma amostra de gás passa por uma transição de um estado inicial  $a$  para um final  $b$ , por três diferentes caminhos (processos), como mos-

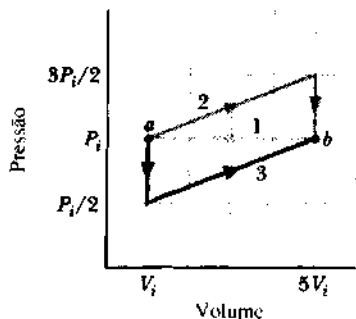


Fig. 20-29 Problema 61.

trado no gráfico  $p$ - $V$  na Fig. 20-29. O calor adicionado ao gás no processo 1 é  $10p_iV_i$ . Em termos de  $p_iV_i$ , qual (a) o calor adicionado ao gás no processo 2 e (b) a mudança na energia interna que o gás sofre no processo 3?

**62.** Quantos cubos de gelo de 20 g, cuja temperatura inicial é  $-10^\circ\text{C}$ , precisam ser colocados em 1,0 L de chá quente, com temperatura inicial de  $90^\circ\text{C}$ , para que a mistura final tenha a temperatura de  $10^\circ\text{C}$ ? Suponha que todo o gelo estará derretido na mistura final e que o calor específico do chá seja o mesmo da água.

**63.** Uma amostra de gás se expande a partir de uma pressão e um volume iniciais de 10 Pa e  $1,0 \text{ m}^3$  para um volume final de  $2,0 \text{ m}^3$ . Durante a expansão, a pressão e o volume são obtidos pela equação  $p = aV^2$ , onde  $a = 10 \text{ N/m}^5$ . Determine o trabalho realizado pelo gás durante a expansão.

# A Ebulição e o Efeito Leidenfrost

**JEARL WALKER**  
CLEVELAND STATE UNIVERSITY

Como a água ferve? Este é um acontecimento tão comum, que você nunca deve ter notado todas as suas curiosas características. Algumas delas são importantes em aplicações industriais, enquanto outras parecem ser a base para certas proezas perigosas realizadas por intrépidos personagens nos shows circenses.

Arranje uma panela com água e aqueça-a por baixo, usando uma chama ou um aquecedor elétrico. À medida que a água se aquece, moléculas de ar deixam de ficar em solução na água, aparecendo como pequenas bolhas agarradas às imperfeições do fundo da panela. As bolhas de ar gradativamente inflam e começam a se soltar do fundo e a se dirigir para a superfície da água. Enquanto essas bolhas se desprendem, outras se formam no fundo da panela, e o processo se repete até que todo o ar dissolvido na água seja expulso. A formação de bolhas de ar é um sinal de que a água está esquentando, mas não tem nada a ver com a ebulição.

A água que está diretamente exposta à atmosfera ferve no que é, às vezes, chamado de temperatura normal de ebulição  $T_S$ . Por exemplo,  $T_S$  é cerca de  $100^\circ\text{C}$  quando a pressão do ar é de 1 atm. Como a água no fundo da panela não está diretamente exposta à atmosfera, permanece líquida mesmo quando *superaquecida* acima de  $T_S$  por uns poucos graus. Durante esse processo, a água é constantemente misturada por convecção — a água quente sobe e a fria desce.

Se você continuar a aumentar a temperatura da panela, a parte inferior da água começa a evaporar, com moléculas de água surgindo como pequenas bolhas de vapor nas, agora secas, imperfeições do fundo da panela. Esta fase da ebulição é caracterizada por pequenas explosões e eventuais apitos. A água parece cantar sua insatisfação por estar sendo aquecida. Toda vez que uma bolha de vapor se expande para uma área superior, onde a água é mais fria, entra instantaneamente em colapso, pois o vapor dentro dela se condensa. Cada colapso produz uma onda sonora, o "ping" que você ouve. Uma vez que a temperatura da água aumenta como um todo, as bolhas não entram em colapso até que se soltem das imperfeições do fundo e percorram parte de seu caminho até a superfície. Esta fase da ebulição é chamada de "bolhas de vapor isoladas" na Fig. 1.

Se você continuar a aumentar a temperatura da panela, o barulho das bolhas entrando em colapso primeiro cresce e depois desaparece. O ruído se torna leve quando a maioria do volume de água se torna suficientemente quente

para que as bolhas de vapor atinjam a superfície da água. Elas agora explodem na superfície. A água agora está em ebulição total.

Se a sua fonte de calor é um fogão de cozinha, a história termina aqui. Entretanto, com um aquecedor de laboratório você pode continuar a aumentar a temperatura da panela. As bolhas de vapor agora se tornam tão abundantes e surgem do fundo da panela tão frequentemente que se juntam, formando colunas de vapor que se dirigem à superfície de forma caótica e violenta, algumas vezes chamadas de "colunas" de vapor.

A produção de bolhas de vapor e colunas é chamada de *ebulição nucleada*, porque a formação e o crescimento das bolhas depende das imperfeições do fundo, que servem como *centros de nucleação* (locais de formação). Sempre que você aumenta a temperatura da panela, a taxa em que o calor é transferido para a água aumenta. Se continuar a aumentar a temperatura da panela, além do estágio das colunas, a ebulição entrará numa nova fase chamada de *regime de transição*. Então, cada aumento na temperatura da panela *reduz* a taxa com que o calor é transferido para a água. A redução não é paradoxal. No regime de transição, a maior parte do fundo da panela está coberta por uma camada de vapor. Como o vapor d'água conduz calor a uma ordem de grandeza menor do que a água líquida, a transferência de calor para a água diminui. Quanto mais quente se torna a panela, menos contato direto tem a água com

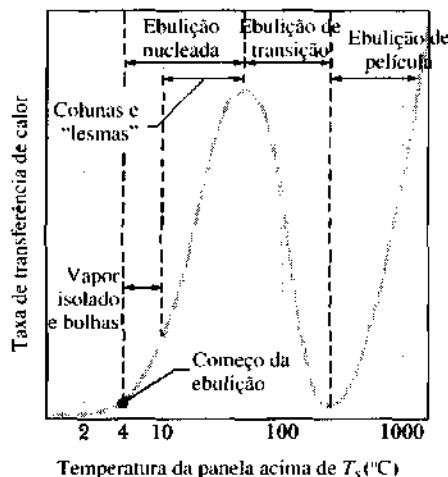


Fig. 1 Curva de ebulição da água.

## LEITURA COMPLEMENTAR 6



Jearl Walker é professor de física na Cleveland State University. Recebeu seu mestrado em física do M.I.T. e seu doutorado em física da University of Maryland. De 1977 a 1990, foi o responsável pela seção "The Amateur Scientist", da *Scientific American*. Seu livro *The Flying Circus of Physics with Answers* foi publicado em 10 idiomas.



ela e menor se torna a transferência de calor. Tal situação pode ser perigosa em um *trocador de calor*, cuja função é absorver calor de um objeto quente. Se deixarmos a água no trocador entrar no regime de transição, o aparelho pode superaquecer devido à diminuição da transferência de seu calor para a água.

Suponha que você continue a aumentar a temperatura da panela. Eventualmente, o fundo estará totalmente coberto de vapor. Então, o calor é lentamente conduzido para o líquido através do vapor, por radiação e condução gradual. Esta fase é chamada de *ebulição de película*.

Embora você não possa obter a ebulição de película numa panela em um fogão caseiro, ela acontece frequentemente em sua cozinha. Minha avó uma vez demonstrou como isso serve para indicar quando o forno está bastante quente para a massa do bolo. Depois de esquentar o forno vazio por algum tempo, ela salpicou algumas gotas d'água dentro dele. As gotas evaporaram quase que instantaneamente. Sua rápida evaporação lhe indicou que o forno ainda não estava suficientemente quente. Depois de mais algum tempo, repetiu o teste com mais algumas gotas d'água. Desta vez elas quicaram e ficaram dançando no metal, durante pelo menos um minuto até que evaporassem. O forno estava na temperatura conveniente para a massa de bolo.

Para estudar sua demonstração, consegui uma placa plana de metal para aquecer no bico de Bunsen do laboratório. Enquanto monitorava a temperatura da placa com um termopar, pinguei cuidadosamente uma gota de água destilada com uma seringa sobre a placa. A gota caiu em uma pequena depressão que eu tinha feito na placa com um martelo. A seringa me permitia soltar gotas de tamanho uniforme. Cada vez que uma gota era pingada, eu cronometrava quanto tempo ela "sobrevivia" na placa. Mais tarde, construí um gráfico a partir dos tempos de sobrevivência das gotas *versus* a temperatura da placa (veja Fig. 2). O gráfico

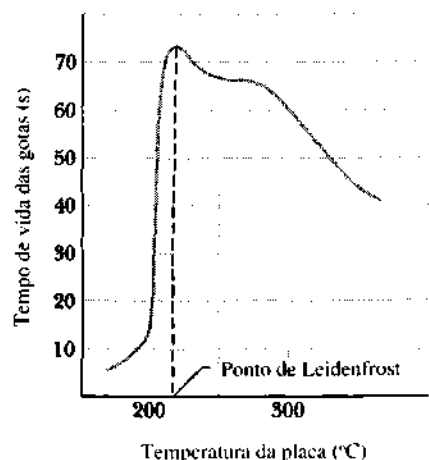


Fig. 2 Tempos de vida de gotas em uma placa quente.

tinha um pico curioso. Quando a temperatura estava entre 100 e 200°C, cada gota pingada na superfície da placa se espalhava em uma fina camada e rapidamente se evaporava. Quando se aproximava de 200°C, as gotas quicavam na superfície e sobreviviam por cerca de um minuto. A temperaturas ainda mais altas, as gotas d'água não sobreviviam tanto tempo. Experiências semelhantes com água de torneira geraram gráficos com um pico menos pronunciado, provavelmente devido a partículas suspensas de impurezas nas gotas, atravessando a camada de vapor e conduzindo calor para dentro das gotas.

O fato de que uma gota d'água sobrevive por mais tempo quando depositada em um metal que está a uma temperatura muito maior do que a de ebulição da água foi primeiramente noticiado por Hermann Boerhaave em 1732. O fato permaneceu sem maiores investigações até 1756, quando Johann Gottlieb Leidenfrost publicou "A Tract About Some Qualities of Common Water" ("Um Tratado Acerca de Algumas Qualidades da Água Comum"). Como o trabalho de Leidenfrost não foi traduzido do latim até 1965, não foi lido por muitos. No entanto, seu nome é hoje associado ao fenômeno. Além disso, ainda foi utilizado para denominar a temperatura correspondente ao pico do gráfico, o ponto de Leidenfrost.

Leidenfrost conduziu sua experiência com uma colher de ferro que era esquentada até ficar em brasa. Depois de pingar uma gota d'água na colher, cronometrava sua duração através das oscilações de um pêndulo. Notou que a gota parecia sugar a luz e o calor da colher, deixando um ponto mais escuro que o resto da colher. A primeira gota depositada durou 30 s, enquanto a última, somente 10 s. Outras gotas depois desta duraram apenas uns poucos segundos.

Leidenfrost interpretou erroneamente sua demonstração porque não entendeu que as gotas que duravam mais estavam realmente em ebulição. Deixe-me explicar em termos do meu experimento. Quando a temperatura da placa é menor do que o ponto de Leidenfrost, a água se espalha na placa e rapidamente recebe calor dela, resultando na sua completa vaporização em segundos. Quando a temperatura está acima ou no ponto de Leidenfrost, a superfície inferior da gota imediatamente vaporiza ao tocar a placa. A pressão dessa camada de vapor evita que o resto da gota toque a placa (veja Fig. 3). Assim, a camada protege e suporta a gota por cerca de um minuto, e é constantemente renovada, pois cada vez mais água vaporiza da superfície inferior da gota, devido ao calor irradiado e conduzido através da camada de vapor a partir da placa. Embora essa camada tenha menos de 0,1 mm de espessura próximo às extremidades e cerca de 0,2 mm em seu centro, aumenta dramaticamente o tempo de vaporização da gota.

Depois de ler a tradução da pesquisa de Leidenfrost, pensei sobre uma descrição de uma curiosa façanha realizada nos shows de circo na virada do século. Dizia-se que o artista conseguia enfiar os dedos úmidos em chum-

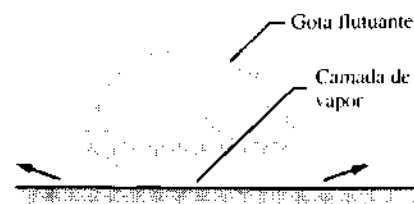


Fig. 3 Uma gota Leidenfrost vista em corte transversal.

bo derretido. Supondo que o feito não envolvia nenhum truque, imaginei que isso dependia do efeito Leidenfrost. Tão logo a pele úmida do artista tocava o metal líquido, parte da água evaporava, cobrindo os dedos com uma camada de vapor. Se o processo fosse breve, a carne não se aqueceria significativamente.

Eu não pude resistir à tentação de testar minhas conclusões. Com um bico de Bunsen, derreti um pedaço considerável de chumbo em um cadinho. Esquentei o chumbo até a temperatura de 400°C, bem acima de sua temperatura de fusão, 328°C. Depois de molhar o dedo na água, me preparei para tocar a superfície do chumbo derretido. Devo confessar que tinha um assistente próximo com materiais de primeiros socorros. Também devo admitir que minhas primeiras tentativas foram infrutíferas, pois meu cérebro se recusava a aceitar essa experiência ridícula, direcionando o meu dedo sempre para fora do chumbo.

Quando finalmente consegui dominar meus receios e toquei brevemente o chumbo, fiquei maravilhado. Não senti nenhum calor. Como já esperava, parte da água em meus dedos evaporou, formando uma camada protetora de vapor em torno deles. Como o contato foi breve, a radiação e a condução através do vapor foram insuficientes para aumentar de maneira perceptível a temperatura de minha carne. Então, me tornei corajoso. Depois de molhar minha mão, coloquei todos os meus dedos no chumbo, tocando o fundo do cadinho (veja minha foto no início desta Leitura Suplementar). O contato com o chumbo novamente foi breve demais para queimar meus dedos. Aparentemente, o efeito Leidenfrost ou, mais exatamente a presença da camada de vapor, protegeu meus dedos.

Continuei com minhas perguntas. Poderia tocar o metal com o dedo seco, sem sofrer queimadura? Deixando de lado toda a minha racionalidade, tentei isso, percebendo imediatamente minha tolice quando a dor se fez sentir em meus dedos.

Preciso advertir que colocar os dedos em chumbo quente apresenta sérios perigos. Se o chumbo estiver somente um pouco acima da temperatura de fusão, a perda de calor, quando a água é vaporizada, pode solidificar o metal em torno dos dedos. Se eu retirasse meus dedos com essa lava quente e sólida de chumbo do cadinho, ele ficaria em contato com meus dedos tempo suficiente para queimá-los seriamente. Também há a possibilidade de derramamento do chumbo líquido e o perigo de se co-

locar água demais nos dedos. Quando a água excedente evapora, pode fazer o chumbo espirrar na pele e, mais seriamente, nos olhos. Feri meus braços e meu rosto por causa dessas explosivas vaporizações. *Você jamais deve tentar repetir esta demonstração.*

A ebulição de camada também pode ser vista quando nitrogênio líquido é derramado. As gotas e bolhas quicam no chão à medida que deslizam sobre ele. O líquido está a cerca de  $-200^{\circ}\text{C}$ . Quando toca o chão, sua superfície inferior se vaporiza. A camada de vapor fomece, então, suporte para o resto do líquido, permitindo-lhe sobreviver por um tempo surpreendentemente longo.

Ouvi falar de uma proeza em que um artista colocava nitrogênio líquido dentro da boca, sem se queimar com o frio extremo. O líquido imediatamente desenvolve uma camada de vapor em sua superfície inferior e, assim, não toca diretamente sua língua. Tolamente, repeti essa demonstração. Por muitas vezes a façanha foi fácil e dramática. Com uma grande bolha de nitrogênio líquido em minha boca, eu me concentrava para não engolir enquanto respirava. A umidade em minha respiração gelada se condensava, formando uma nuvem de vapores que se estendia até cerca de um metro da minha boca. Entretanto, em minha última tentativa, o líquido exerceu uma contração térmica tão grave em dois de meus dentes que o esmalte se rompeu em um "mapa de estradas" de

fissuras. Meu dentista me convenceu a esquecer esta demonstração.

O efeito Leidenfrost também pode explicar outra demonstração fora do comum: andar sobre brasas. Houve uma época em que os jornais publicavam reportagens a respeito de um indivíduo andando sobre brasas com explicações místicas, muitas vezes relacionando a proteção contra queimaduras com o domínio da "mente sobre a matéria". Atualmente, a física protege os pés, quando a caminhada é bem-sucedida. Particularmente importante é o fato de que, embora a superfície das brasas seja muito quente, elas contêm uma quantidade de energia surpreendentemente pequena. Se o indivíduo andar a um passo moderado, o contato é tão breve que o pé conduz pouca energia das brasas. É claro, se andar devagar irá se queimar, pois o contato mais prolongado permitirá ao calor do interior das brasas ser conduzido em grande parte para os pés.

Se o pé for molhado antes do feito, o líquido também pode ajudar a proteger contra as queimaduras. Para molhar os pés, o indivíduo pode, por exemplo, andar sobre um gramado úmido poucos instantes antes de fazê-lo sobre as brasas. O pé também pode estar suado, tanto pelo calor das brasas como pelo nervosismo provocado pelo evento. Uma vez que o indivíduo está sobre as brasas, um pouco do calor é gasto para vaporizar o líquido nos pés, deixando menos para ser absorvido pela carne. Exis-

te também a possibilidade de se formarem pontos de ebulição de camada, o que dará uma proteção a mais contra o calor.

Andei sobre brasas em cinco ocasiões. Em quatro, estava com medo, o que foi suficiente para que meus pés suassem. Entretanto, na quinta estava tão certo de minha segurança que meus pés permaneceram secos. As queimaduras que sofri foram grandes e terrivelmente dolorosas. Passei semanas com ferimentos nos pés.

Minha falha se deveu à ausência de água em meus pés, não produzindo o efeito Leidenfrost, mas também fui negligente com um fator adicional de segurança. Nas outras ocasiões, tive a precaução de segurar uma antiga edição deste livro em meu peito enquanto andava sobre as brasas, para provar minha crença na física. Na última vez em que me queimei, esqueci o livro.

Eu tenho proposto há muito que os programas de graduação incluam "andar no fogo" como último exame. A pessoa responsável pela graduação poderia esperar do lado oposto de um caminho de brasas, enquanto o candidato à graduação fosse forçado a andar sobre as brasas. Se a crença do candidato na física fosse forte o suficiente para que os seus pés não se queimassem, o responsável concederia o certificado de graduação ao candidato. Este teste seria muito mais revelador que os tradicionais exames finais.

# A TEORIA CINÉTICA DOS GASES

# 21



*Suponha que você retorne para uma casa fria, depois de andar pelas florestas cobertas de neve, num dia frio de inverno. Seu primeiro pensamento é ligar um aquecedor. Mas por que, exatamente, deveria fazê-lo? Será porque o aquecedor aumentará a quantidade de energia interna (térmica) do ar dentro de casa, até que esta energia seja suficiente para que sinta uma temperatura confortável? Embora pareça lógico, este raciocínio é incorreto, porque a energia interna total do ar não será alterada pelo aquecedor. Como pode ser isto? E, se é assim, por que você liga o aquecedor?*

## 21-1 Uma Nova Maneira de Ver os Gases

A termodinâmica clássica — o assunto dos dois capítulos anteriores — não nos diz coisa alguma sobre os átomos. Quando aplicamos suas leis a um gás, lidamos somente com variáveis macroscópicas, como pressão, volume e temperatura. Embora saibamos que um gás é constituído de átomos ou moléculas, as leis da termodinâmica clássica não levam isto em conta.

No entanto, a pressão exercida por um gás deve estar certamente relacionada ao contínuo bombardeio causado pelo choque de suas moléculas com as paredes do recipiente que o contém. A capacidade de um gás de ocupar todo o volume do seu recipiente, certamente também deve estar relacionada à grande liberdade de movimento de suas moléculas. Por outro lado, a temperatura e a energia interna de um gás estão certamente relacionadas à energia cinética destas moléculas. Talvez possamos aprender algo sobre

os gases, estudando-os do ponto de vista molecular. A este ponto de vista damos o nome de **teoria cinética dos gases**. Ela é o assunto deste capítulo.

## 21-2 Número de Avogadro

Quando dirigimos nossa atenção para as moléculas, é razoável medir o tamanho de nossas amostras em moles. Agindo assim, podemos estar certos de estar comparando amostras com o mesmo número de moléculas. O *mol* é uma das sete unidades básicas dos SI e é definido assim:

---

Um mol é o número de átomos numa amostra de 12 g de carbono-12.

Falamos de um “mol de hélio” ou “um mol de água” querendo significar um certo número de unidades elementares

da substância. Mas poderíamos falar também de um mol de bolas de pingue-pongue onde a unidade elementar seria, naturalmente, este tipo de bola.

A questão óbvia agora é: “Quantos átomos ou moléculas existem em um mol?” A resposta é determinada experimentalmente e, como vimos no Cap. 20,

$$N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1} \text{ (número de Avogadro)} \quad (21-1)$$

Esse número é chamado **número de Avogadro** em homenagem ao cientista italiano Amedeo Avogadro (1776-1856) que foi o primeiro a sugerir que todos os gases contêm o mesmo número de moléculas ou átomos, quando ocupam o mesmo volume, sob as mesmas condições de temperatura e pressão.

O número de moles  $n$  contido numa amostra de qualquer substância pode ser calculado usando a relação

$$n = \frac{N}{N_A} \quad (21-2)$$

onde  $N$  é o número de moléculas da amostra. O número de moles numa amostra também pode ser calculado a partir da massa  $M_{\text{am}}$  da amostra e da *massa molar*  $M$  (a massa de um mol da substância), ou da massa  $m$  de uma molécula:

$$n = \frac{M_{\text{am}}}{M} = \frac{M_{\text{am}}}{mN_A}. \quad (21-3)$$

O enorme valor do número de Avogadro dá uma noção da pequenez dos átomos e do quanto eles são numerosos em porções ordinárias de matéria. Um mol de ar, por exemplo, pode facilmente ser acomodado numa pequena valise. No entanto, se essas moléculas fossem espalhadas pela superfície da Terra, haveria 120.000 delas em cada centímetro quadrado. Um outro exemplo: um mol de bolas de tênis preencheria um volume igual ao de sete luas!

### Medindo o Número de Avogadro

Não é possível ver moléculas individuais de um gás e nem o seu movimento colidindo uma com as outras e com as paredes do seu recipiente. No entanto, é possível ver efeitos diretos deste movimento e deduzir um valor de  $N_A$  a partir dessas observações.

Em 1827, o botânico inglês Robert Brown observou que, quando vistos através do seu microscópio, grãos de pólen e outros objetos pequenos em suspensão na água apresentavam um movimento aleatório. A Fig. 21-1 mostra um exemplo desse *movimento Browniano* para uma partícula. O efeito ocorre porque as partículas em suspensão estão sendo continuamente bombardeadas por moléculas do fluido vindas de todos os lados. O número de moléculas atingindo lados opostos da partícula em qualquer pequeno intervalo de tempo — sendo determinado pelo acaso — não será exatamente igual. Por causa dessas flutuações, uma



**Fig. 21-1** O movimento de uma partícula minúscula em suspensão na água visto através de um microscópio. Os pequenos segmentos ligam posições sucessivas com intervalo de 30 s. (A trajetória da partícula é um bom exemplo de um *fractal*, que é uma curva para a qual qualquer fração é semelhante à curva como um todo. Por exemplo, se a trajetória da partícula para qualquer dos segmentos mostrados fosse observada, por exemplo, com 0,1 s de intervalo, a figura resultante seria muito semelhante a esta.)

força resultante de direção aleatória atuará sobre a partícula, provocando a “dança Browniana”.

É como se uma bola de boliche, flutuando num espaço livre de gravidade, fosse bombardeada por todos os lados por um enxame de bolas de pingue-pongue, em movimento rápido e aleatório. A bola de boliche oscilaria levemente, de uma maneira também aleatória, descrevendo uma espécie de movimento Browniano. Observando o seu movimento irregular, poderíamos deduzir algo sobre as de pingue-pongue, mesmo que não pudessemos vê-las.

É possível deduzir o valor do número de Avogadro a partir de medidas do movimento Browniano. Há numerosas outras maneiras de se obter este importante número. No começo deste século, fenômenos que iam desde a radioatividade até a cor azul do céu foram empregados; Albert Einstein propôs quatro métodos independentes. Todos estes métodos dão aproximadamente o mesmo valor para o número de Avogadro. Esta base experimental ampla e firme ajudou a convencer os céticos — e havia muitos — da utilidade do conceito de que o mundo que percebemos com os nossos sentidos é feito de átomos.

### TÁTICA PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

#### TÁTICA 1: NÚMERO DE AVOGADRO DE QUÊ?

Na Eq. 21-1 o número de Avogadro é expresso em termos de  $\text{mol}^{-1}$ . Poderíamos, em vez disso, explicitar a unidade elementar envolvida numa dada situação. Por exemplo, se a unidade elementar é um átomo, podemos escrever  $N_A = 6.02 \times 10^{23}$  átomos/mol. Se a unidade elementar é uma molécula então escrevemos  $N_A = 6.02 \times 10^{23}$  moléculas/mol. Agora, se estivermos interessados em *muitas* bolas de tênis, podemos escrever  $N_A = 6.02 \times 10^{23}$  bolas de tênis/mol.

### 21-3 Gases Ideais

Nosso objetivo, neste capítulo, é explicar as propriedades macroscópicas de um gás — como sua pressão e sua temperatura — em termos do comportamento de suas moléculas. Há, no entanto, um problema imediato: qual gás? Hidrogênio, oxigênio, metano ou talvez hexafloreto de urânio? São todos diferentes. No entanto, a experiência mostrou que, se nós armazenarmos um mol de vários gases em caixas de volumes idênticos e os mantivermos à mesma temperatura, o valor de suas pressões é aproximadamente — embora não exatamente — o mesmo. Se repetirmos as medidas a densidades mais baixas, essas pequenas diferenças nas pressões tendem a se anular. Outras experiências mostram que, a densidades suficientemente baixas, todos os gases reais tendem a obedecer a relação

$$pV = nRT. \text{ (equação dos gases ideais).} \quad (21-4)$$

onde  $p$  é a pressão absoluta (e não a monométrica),  $n$  é o número de moles do gás e  $R$ , a constante dos gases, tem o mesmo valor para todos os gases, ou seja,

$$R = 8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}. \quad (21-5)$$

A temperatura  $T$  na Eq. 21-4 deve ser expressa em unidades absolutas (kelvin). A Eq. 21-4 é chamada de **equação dos gases ideais**. Desde que a densidade do gás seja baixa, a Eq. 21-4 é válida para qualquer tipo de gás; ou uma mistura de diferentes tipos, com  $n$  sendo o número total de moles do gás.

Você pode perguntar, “o que é um gás ideal e o que existe de tão ‘ideal’ nele?”\* A resposta está na simplicidade da lei (Eq. 21-4) que governa suas propriedades macroscópicas. Usando esta lei — como veremos — podemos deduzir muitas propriedades do gás ideal de uma maneira simples. Embora um gás verdadeiramente ideal não exista na natureza, todos os gases se comportam cada vez mais como um gás ideal quando diminuímos suas densidades, isto é, sob condições em que a distância média entre suas moléculas é suficientemente grande. Assim, o conceito de gás ideal possibilita previsões úteis sobre o comportamento de gases reais nas condições citadas.

#### Trabalho Feito por um Gás Ideal à Temperatura Constante

Suponha que  $n$  moles de um gás ideal, confinado em um sistema pistão-cilindro, se expanda desde um volume inicial  $V_i$  até um volume final  $V_f$ . Além disso, suponha que a temperatura  $T$  do gás fique constante durante o processo. Vamos calcular o trabalho feito pelo gás (ideal) durante essa **expansão isotérmica**.

Vamos partir da Eq. 20-11, ou

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p \, dV$$

Como o gás é ideal, podemos substituir  $p$  pelo seu valor dado por 21-4, obtendo

$$W = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} \, dV \quad (21-6)$$

A temperatura é constante, assim,

$$W = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} \quad (21-7)$$

ou

$$W = nRT \ln \frac{V_f}{V_i} \quad \text{(gás ideal, processo isotérmico).} \quad (21-8)$$

Lembramos que o símbolo  $\ln$  denota **logaritmo neperiano**, isto é, **logaritmo na base  $e$** .

Para uma expansão  $V_f > V_i$ , assim a razão  $V_f/V_i$  na Eq. 21-8 é maior do que a unidade. O **logaritmo de uma quantidade maior do que um é positivo**, sendo assim, também é **positivo o trabalho  $W$  feito por um gás ideal durante uma expansão isotérmica**. Para uma compressão, temos  $V_f < V_i$ , logo a razão entre os volumes na Eq. 21-8 é menor do que a unidade. O **logaritmo nesta equação — e logo o trabalho  $W$  — é negativo**, como seria de se esperar, pois neste caso o trabalho é realizado *sobre* o gás e não *pelo* gás.

#### TÁTICA PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

##### TÁTICA 2: QUANDO USAR A EQ. 21-8

Alguns estudantes pensam que a Eq. 21-8 fornecerá o trabalho realizado por um gás ideal em qualquer processo termodinâmico. Isto não é verdade. Em vez disso, esta expressão só pode ser usada quando a temperatura for mantida constante durante o processo. Se a temperatura variar, o símbolo  $T$  na Eq. 21-6 não poderá passar para fora da integral, como fizemos na Eq. 21-7, e assim o resultado será diferente da Eq. 21-8. Discutiremos essas situações neste e no próximo capítulos.

**EXEMPLO 21-1** Um cilindro contém 12 L de oxigênio a 20°C e 15 atm. A temperatura é aumentada para 35°C e o volume, reduzido para 8,5 L. Qual a pressão final do gás? Suponha que o gás é ideal.

**Solução** Da Eq. 21-4 podemos escrever

$$R = \frac{p_i V_i}{T_i} = \frac{p_f V_f}{T_f}$$

Tirando o valor de  $R$ , vem

$$p_f = \frac{p_i T_f V_i}{T_i V_f}. \quad (21-9)$$

\*Muitos autores preferem a designação *gás perfeito* em vez de “gás ideal”: os dois significam a mesma coisa.

Antes de substituir os valores numéricos, devemos nos certificar de que as temperaturas estão expressas na escala Kelvin. Logo,

$$T_i = (273 + 20) \text{ K} = 293 \text{ K}$$

e

$$T_f = (273 + 35) \text{ K} = 308 \text{ K}.$$

Substituindo os dados na Eq. 21-9 obtemos, então,

$$p_f = \frac{(15 \text{ atm})(308 \text{ K})(12 \text{ L})}{(293 \text{ K})(8.5 \text{ L})} = 22 \text{ atm.} \quad (\text{Resposta})$$

**EXEMPLO 21-2** Um mol de oxigênio (que será suposto um gás ideal) se expande à temperatura constante de 310 K, de um volume inicial  $V_i$  de 12 L até um volume final  $V_f$  de 19 L.

a. Qual o trabalho realizado pelo gás ao se expandir?

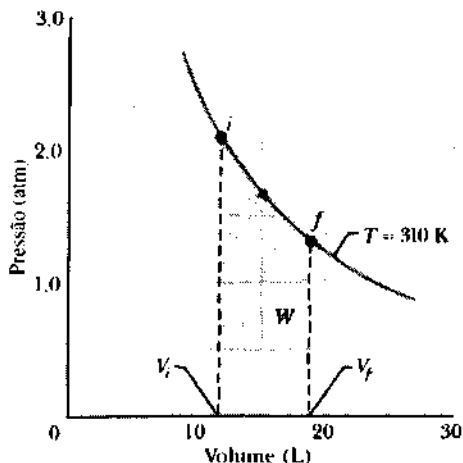
**Solução** Da Eq. 21-8 temos

$$\begin{aligned} W &= nRT \ln \frac{V_f}{V_i} \\ &= (1 \text{ mol})(8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(310 \text{ K}) \ln \frac{19 \text{ L}}{12 \text{ L}} \\ &= 1.180 \text{ J.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

O trabalho feito pelo gás em expansão é positivo, o que é consistente com a convenção de sinal para o trabalho que mencionamos na Seção 20-4. A expansão está representada no diagrama  $p - V$  da Fig. 21-2. A linha curva é uma *isoterma*, isto é, uma curva que dá a relação entre pressão e volume de um gás, quando sua temperatura é mantida constante. Assim, esta curva é o gráfico de

$$p = nRT \frac{1}{V} = (\text{constante}) \frac{1}{V}$$

O trabalho realizado pelo gás durante a expansão é representado pela área sombreada entre a isoterma e o eixo dos  $V$ .



**Fig. 21-2** Exemplo 21-2. A área sombreada representa o trabalho realizado por um mol de oxigênio ao se expandir à temperatura constante  $T$  de 310°K.

b. Qual o trabalho realizado pelo gás durante uma *compressão* isotérmica de  $V_i = 19 \text{ L}$  até  $V_f = 12 \text{ L}$ ?

**Solução** Procedemos da mesma maneira que no item (a), obtendo

$$\begin{aligned} W &= nRT \ln \frac{V_f}{V_i} \\ &= (1 \text{ mol})(8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(310 \text{ K}) \ln \frac{12 \text{ L}}{19 \text{ L}} \\ &= -1.180 \text{ J.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Este resultado é igual em módulo, mas de sinal oposto ao do resultado do item (a). O sinal negativo nos diz que um agente externo realizou um trabalho igual a 1.180 J *sobre* o gás para comprimi-lo.

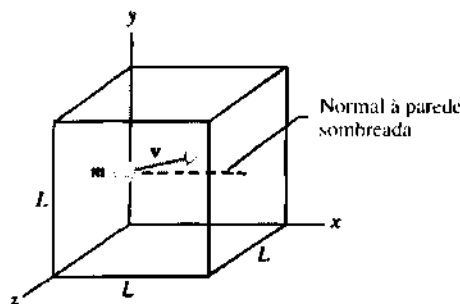
### 21-4 Pressão e Temperatura: Uma Visão Molecular

Eis aqui o nosso primeiro problema em teoria cinética. Sejam  $n$  moles de um gás ideal armazenados numa caixa cúbica de volume  $V$  (Fig. 21-3). As paredes da caixa são mantidas à temperatura  $T$ . Qual é a ligação entre a pressão  $p$  exercida pelo gás sobre as paredes e as velocidades das moléculas?

As moléculas na caixa se movem em todas as direções com velocidades variáveis, colidindo umas com as outras e com as paredes da caixa. Ignoraremos (por enquanto) as colisões entre elas e consideraremos somente suas colisões elásticas com as paredes da caixa.

A Fig. 21-3 mostra uma molécula típica, de massa  $m$  e velocidade  $v$ , que está prestes a colidir com a parede sombreada. Como estamos supondo que qualquer colisão de uma molécula com a parede seja elástica, quando isto acontece, a componente  $x$  da velocidade *inverte* seu sentido sem alterar o seu módulo, enquanto as outras componentes permanecem inalteradas. Isto significa que a única mudança no momento linear da partícula é na direção  $x$ , e seu valor é

$$(-mv_x) - (mv_x) = -2mv_x.$$



**Fig. 21-3** Uma caixa cúbica de aresta  $L$ , contendo  $n$  moles de um gás ideal. Uma molécula de massa  $m$  e velocidade  $v$  está a ponto de colidir com a parede sombreada, que tem área  $L^2$ . Uma normal a esta parede também é mostrada.

Logo, o momento linear  $\Delta p$  transmitido à parede pela molécula durante a colisão é  $+2mv_x$ . (Como usamos a letra  $p$  para representar tanto momento como pressão, devemos distinguir cuidadosamente entre os dois casos. Aqui por exemplo,  $p$  representa momento.)

A molécula da Fig. 21-3 atingirá a parede sombreada várias vezes. O tempo  $\Delta t$  entre as colisões é o tempo que ela leva para ir até a parede oposta e voltar (distância =  $2L$ ) com velocidade  $v_x$ . Logo,  $\Delta t$  é igual a  $2L/v_x$ . (Note que este resultado é válido mesmo que a molécula se choque com qualquer das outras paredes durante o caminho, pois estas são paralelas ao eixo do  $x$  e, assim, não podem mudar  $v_x$ .) Deste modo, a taxa com que o momento é transmitido à parede sombreada por esta única molécula é

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{2L/v_x} = \frac{mv_x^2}{L}$$

Da segunda lei de Newton ( $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ ) a taxa com que o momento é transmitido à parede é a força atuando sobre esta. Para encontrar esta força, devemos somar as contribuições de todas as outras moléculas que atingem a parede, levando em conta a possibilidade de que todas tenham velocidades diferentes. Dividindo a força total pela área da parede ( $L^2$ ), nos dá a pressão  $p$  sobre ela, onde agora e no restante do texto  $p$  representa pressão. Assim,

$$p = \frac{F}{L^2} = \frac{mv_{x1}^2/L + mv_{x2}^2/L + \dots + mv_{xN}^2/L}{L^2} = \left(\frac{m}{L^3}\right)(v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots + v_{xN}^2), \quad (21-10)$$

onde  $N$  é o número de moléculas na caixa.

Como  $N = nN_A$ , há  $nN_A$  termos no segundo parêntese da Eq. 21-10. Assim, podemos substituir esta quantidade por  $nN_A \overline{v_x^2}$ , onde  $\overline{v_x^2}$  é o valor médio do quadrado da

componente  $x$  de todas as velocidades moleculares. A Eq. 21-10 torna-se, então,

$$p = \frac{nmN_A}{L^3} \overline{v_x^2}$$

Mas  $mN_A$  é a massa molar  $M$  do gás (isto é, a massa de um mol de gás). Além disso,  $L^3$  é o volume da caixa, logo,

$$p = \frac{nM\overline{v_x^2}}{V} \quad (21-11)$$

Para qualquer molécula,  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ . Como há muitas e como se movem em direções aleatórias, os valores médios dos quadrados das componentes de suas velocidades são iguais, logo,  $\overline{v_x^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$ . Assim, a Eq. 21-11 se torna

$$p = \frac{nM\overline{v^2}}{3V} \quad (21-12)$$

A raiz quadrada de  $\overline{v^2}$  é uma espécie de velocidade média, chamada de **velocidade média quadrática** das moléculas, simbolizada por  $v_{rms}$ . O seu nome é bastante ilustrativo: elevamos ao quadrado cada componente da velocidade, achamos a *média* de todas estas velocidades ao quadrado e, então, achamos a *raiz* quadrada do resultado. Podemos escrever a Eq. 21-12 como

$$p = \frac{nMv_{rms}^2}{3V} \quad (21-13)$$

A Eq. 21-13 ilustra bem o espírito da teoria cinética. Ela nos diz como a pressão de um gás (uma quantidade puramente macroscópica) depende da velocidade das moléculas (uma quantidade puramente microscópica).

Podemos inverter a Eq. 21-13 e usá-la para calcular  $v_{rms}$ . Combinando a Eq. 21-13 com a equação do gás ideal ( $pV = nRT$ ), obtemos

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad (21-14)$$

A Tabela 21-1 mostra algumas velocidades rms calculadas usando a Eq. 21-14. Estas velocidades são surpreendentemente altas. Para moléculas de hidrogênio à temperatura ambiente (300 K), a velocidade rms é 1.920 m/s ou cerca de 6.800 km/h — mais rápido que uma bala ao sair do cano de um revólver! Na superfície do Sol (Fig. 21-4), onde a temperatura é 6.000 K, a velocidade rms das moléculas de hidrogênio seria 82 vezes maior do que a mencionada, não fosse pelo fato de que, a velocidades tão altas, as moléculas não podem permanecer íntegras depois de colidir entre si. Lembre-se também que a velocidade rms é somente uma espécie de velocidade média; muitas moléculas tem velocidades apreciavelmente maiores, e outras são muito mais lentas.

**Tabela 21-1**  
Algumas Velocidades Moleculares à Temperatura Ambiente ( $T = 300 \text{ K}$ )<sup>a</sup>

Gás	Massa molar <sup>b</sup> (g/mol)	$v_{rms}$ (m/s)
Hidrogênio	2,02	1.920
Hélio	4,0	1.370
Vapor d'água	18,0	645
Nitrogênio	28,0	517
Oxigênio	32,0	483
Dióxido de carbono	44,0	412
Dióxido de enxofre	64,1	342

<sup>a</sup>Por conveniência, freqüentemente consideramos a temperatura ambiente igual a 300 K, embora (a 27°C ou 81°F) isto signifique um aposento bastante quente.  
<sup>b</sup>Embora as massas molares sejam freqüentemente expressas em g/mol, a unidade SI é o kg/mol.



Fig. 21-4 Uma protuberância (ou jato) é ejetada da atmosfera do Sol, que está a alta temperatura.

A velocidade do som num gás está intimamente relacionada à velocidade rms de suas moléculas. Numa onda sonora, a perturbação é transmitida de molécula para molécula por meio de colisões. A onda não pode se propagar mais depressa do que a velocidade “média” das moléculas. Na realidade, a velocidade do som deve ser um pouco menor do que esta velocidade molecular “média”, porque nem todas as moléculas se movem na mesma direção em que se propaga a onda. Como exemplos, à temperatura ambiente, as velocidades rms do hidrogênio e do nitrogênio são 1.920 m/s e 517 m/s, respectivamente. As velocidades do som nestes dois gases, à mesma temperatura são 1.350 m/s e 350 m/s, respectivamente.

Freqüentemente perguntamos: “Se as moléculas se movem tão rápido, porque leva mais ou menos um minuto para você sentir o cheiro de um perfume quando alguém abre um frasco do outro lado de uma sala?” Se dermos uma olhada na Fig. 21-5, seremos levados a pensar que — embora as moléculas se movam muito rápido entre as colisões — uma certa molécula se deslocará muito lentamente a partir de sua posição inicial. Em situações práticas, o tempo de voo para uma molécula “alienígena” atravessar o ar de uma sala é controlado pelas correntes de convecção que sempre existem numa sala comum.

**EXEMPLO 21-3** Aqui estão cinco números puros: 5, 11, 32, 67 e 89.

a. Qual é o valor médio  $\bar{n}$  desses números?

**Solução** A média é facilmente encontrada a partir de sua definição

$$\bar{n} = \frac{5 + 11 + 32 + 67 + 89}{5} = 40.8 \quad (\text{Resposta})$$

b. Qual é o valor rms  $n_{\text{rms}}$  desses números?

**Solução** Também, usando a definição de  $n_{\text{rms}}$ ,

$$\begin{aligned} n_{\text{rms}} &= \sqrt{\frac{5^2 + 11^2 + 32^2 + 67^2 + 89^2}{5}} \\ &= 52.1. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

O valor rms é maior do que o valor médio porque os números maiores — estando elevados ao quadrado — têm um peso relativo maior na composição do valor rms. Como um teste, vamos substituir 89 no nosso conjunto de cinco números por 300. O valor médio do novo conjunto de cinco números (como você pode comprovar facilmente) aumenta por um fator de 2,0. O valor rms, no entanto, aumenta por um fator 2,7.

Valores rms aparecem em muitos ramos da física e da engenharia. O valor 120 volts impresso numa lâmpada elétrica, por exemplo, é uma voltagem rms.

**EXEMPLO 21-4** Verifique que a velocidade rms das moléculas do hidrogênio à temperatura ambiente é realmente aquela dada pela Tabela 21-1.

**Solução** A massa molar do hidrogênio é 2,02 g/mol ou (em unidades SI) 0,00202 kg/mol. Substituindo na Eq. 21-14, obtemos

$$\begin{aligned} v_{\text{rms}} &= \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{(3)(8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(300 \text{ K})}{0,00202 \text{ kg/mol}}} \\ &= 1,920 \text{ m/s}, \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

que coincide com o valor dado pela Tabela 21-1.

## 21-5 Energia Cinética de Translação

Vamos de novo considerar uma única molécula em movimento dentro da caixa na Fig. 21-3, mas vamos supor agora que a sua velocidade muda (em módulo) quando colide com outras moléculas. A energia cinética de translação da molécula em qualquer instante é  $\frac{1}{2}mv^2$ . A energia cinética de translação *média*, onde tomamos a média sobre o tempo em que observamos a molécula, é

$$\bar{K} = \overline{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{1}{2}mv_{\text{rms}}^2, \quad (21-15)$$

onde fizemos a suposição de que a velocidade média da molécula, durante nossa observação, é a mesma que a velocidade média de todas as moléculas em qualquer instante. (Desde que a energia total do gás permaneça constante e observemos nossa molécula por um tempo suficientemente longo, a suposição acima é apropriada.) Substituindo  $v_{\text{rms}}$  por seu valor dado pela Eq. 21-14, vem

$$\bar{K} = \left(\frac{1}{2}m\right) \frac{3RT}{M}.$$

Mas  $M/m$ , a massa molar dividida pela massa de uma molécula, é o número de Avogadro, assim

$$\bar{K} = \frac{3RT}{2N_A},$$



que pode ser escrita como

$$\bar{K} = \frac{3}{2}kT \quad (21-16)$$

A constante  $k$ , chamada **constante de Boltzmann**, é a razão entre a dos gases perfeitos  $R$  e o número de Avogadro  $N_A$ . Às vezes é chamada de constante dos gases para uma única molécula (em vez de para um mol), e seu valor é\*

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}}{6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}} = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K} \\ = 8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K.} \quad (21-17)$$

A Eq. 21-16 ilustra um resultado inesperado:

A uma dada temperatura  $T$ , as moléculas de qualquer gás — não importando o valor de suas massas — têm a mesma energia cinética média de translação, ou seja,  $3kT/2$ . Quando medimos a temperatura de um gás, estamos medindo a energia cinética de translação média de suas moléculas.

Na realidade, nada na nossa dedução diz que ela só é válida para moléculas. Podemos aplicá-la a quaisquer objetos, como grãos de pólen ou mesmo bolas de pingue-pongue! Vemos aqui a base para uma teoria do movimento Browniano. Um grão de pólen, em suspensão na água, estando em equilíbrio térmico com ela, se comporta como uma molécula muito grande e tem a mesma energia cinética de translação que as moléculas de água que o envolvem. Naturalmente, como sua massa é muito maior do que a destas, o grão de pólen tem uma velocidade rms muito menor, pequena ou suficiente para que possamos observar seu movimento.

**EXEMPLO 21-5** Qual a energia cinética de translação média (em elétron-volts) de moléculas de oxigênio no ar à temperatura ambiente (= 300 K)? E das moléculas de nitrogênio?

**Solução** A energia cinética de translação média só depende da temperatura e não da natureza da molécula. Para os dois gases esta energia é dada pela Eq. 21-16

$$\bar{K} = \frac{3}{2}kT = \left(\frac{3}{2}\right)(8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K})(300 \text{ K}) \\ = 0,039 \text{ eV.} \quad (\text{Resposta})$$

Os físicos consideram útil lembrar que a energia cinética de translação média de *qualquer* molécula, à temperatura ambiente, é cerca de (1/25) eV, que é essencialmente o resultado desse Exemplo.

Na Tabela 21-1 vemos que a velocidade rms das moléculas de oxigênio (para as quais  $M = 32,0 \text{ g/mol}$ ) é de 483 m/s. Para as moléculas de nitrogênio ( $M = 28,0 \text{ g/mol}$ ), esta velocidade é de 517 m/s. Logo, as moléculas mais leves têm maiores velocidades rms, o que é compatível

com o fato de que as duas espécies de moléculas têm a mesma energia cinética de translação média.

**EXEMPLO 21-6** Para aumentar a eficiência da fissão nuclear do urânio é necessário separar o (altamente fissionável) isótopo U-235 do (bem menos fissionável) isótopo U-238. Uma forma de fazer a separação é formar hexafluoreto de urânio ( $\text{UF}_6$ ), que é um gás nas condições normais, e fazê-lo passar muitas vezes através de uma barreira porosa (difusão). As moléculas mais leves atravessarão a barreira mais rápido, e medimos a efetividade da barreira utilizando o *fator de separação*  $\alpha$ , definido como a razão entre as velocidades rms dos isótopos. Qual é o fator de separação para as duas espécies de moléculas de hexafluoreto de urânio?

**Solução** Da Eq. 21-14 ( $v_{\text{rms}} = \sqrt{3RT/M}$ ), podemos escrever

$$\alpha = \frac{v_{\text{rms}, 235}}{v_{\text{rms}, 238}} = \sqrt{\frac{M_{238}}{M_{235}}}$$

onde os  $M$  representam as massas molares das moléculas dos dois gases. Podemos encontrar estas massas molares adicionando a massa molar do fluor multiplicada por seis ( $6 \times 19 \text{ g/mol}$ ) à massa molar do átomo de urânio apropriado (235 g/mol ou 238 g/mol). Obtemos

$$\text{UF}_6 \text{ (urânio-238):} \quad M_{238} = 238 + 6 \times 19,0 \\ = 352 \text{ g/mol,}$$

$$\text{UF}_6 \text{ (urânio-235):} \quad M_{235} = 235 + 6 \times 19,0 \\ = 349 \text{ g/mol,}$$

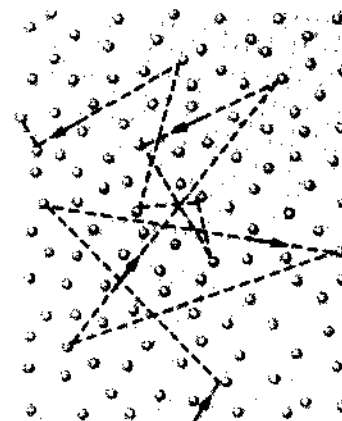
e assim,

$$\alpha = \sqrt{\frac{352 \text{ g/mol}}{349 \text{ g/mol}}} = 1,0043 \quad (\text{Resposta})$$

Numa instalação prática de difusão de isótopos é necessário fazer o gás passar cerca de 4.000 vezes pela barreira porosa.

## 21-6 Livre Caminho Médio

A Fig. 21-5 mostra a trajetória de uma molécula típica que se move através de um gás, mudando subitamente de dire-



**Fig. 21-5** Uma molécula se deslocando através de um gás, colidindo com outras moléculas durante o deslocamento. Embora na figura estas outras estejam paradas, elas também se movem de modo semelhante.

\*Não confunda  $k$  (a constante de Boltzmann) com  $K$  (algumas vezes usado para denotar energia cinética) e  $K$  (temperatura kelvin).

ção e de velocidade, quando colide elasticamente com as outras moléculas. Entre as colisões, ela se move numa linha reta com velocidade constante. Embora na figura todas as outras pareçam estacionárias, também estão se movendo de maneira semelhante.

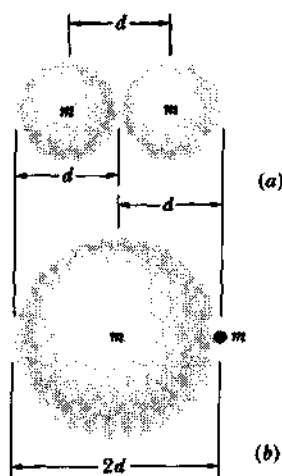
Um parâmetro útil para descrever este movimento aleatório é o **livre caminho médio**  $\lambda$ . Como o seu nome indica,  $\lambda$  é a distância média percorrida pela molécula entre duas colisões sucessivas. Esperamos que  $\lambda$  varie inversamente com o número de moléculas por unidade de volume,  $N/V$ . Quanto maior for  $N/V$ , mais colisões acontecerão e menor será o livre caminho médio. Também esperamos que  $\lambda$  varie inversamente com o tamanho das moléculas. (Se estas fossem pontos geométricos, nunca colidiriam entre si e o livre caminho médio seria infinito.) Assim, quanto maiores forem as moléculas, menor o livre caminho médio. Podemos inclusive prever que  $\lambda$  deve variar (inversamente) com o *quadrado* do diâmetro, pois é a seção transversal de uma molécula — e não o seu diâmetro — que determina a sua área efetiva para choques.

A expressão para o livre caminho médio é, na realidade,

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 N/V} \quad (\text{livre caminho médio}). \quad (21-18)$$

Para justificar a Eq. 21-18, focalizaremos nossa atenção numa única molécula e vamos supor — como a Fig. 21-5 sugere — que nossa molécula se desloca com velocidade constante  $v$  e que todas as outras moléculas estão em repouso. Mais tarde, relaxaremos esta condição.

Vamos supor, além disso, que as moléculas são esferas de diâmetro  $d$ . Acontecerá uma colisão sempre que os centros das moléculas chegarem a uma distância  $d$  um do outro, como na Fig. 21-6a. Outra maneira de olhar o proces-



**Fig. 21-6** (a) Uma colisão ocorre quando os centros de duas moléculas se aproximam até uma distância  $d$ , onde  $d$  é o diâmetro molecular. (b) Uma representação equivalente, porém mais conveniente, é imaginar a molécula em movimento tendo um raio  $d$ , todas as outras sendo pontuais. O critério para uma colisão permanece o mesmo.

so, é considerar nossa molécula tendo um raio  $d$  e todas as outras como sendo pontos, como na Fig. 21-6b. Isto não altera nosso critério para colisões.

À medida que nossa molécula zigzagueia através do gás, descreve um cilindro quebrado cuja área da seção reta é  $\pi d^2$ . Se observarmos esta molécula durante um intervalo de tempo  $\Delta t$ , ela se moverá de uma distância  $v \Delta t$ , onde  $v$  é a sua velocidade. O comprimento do nosso cilindro quebrado, após ser retificado é, então,  $v \Delta t$  e o volume do cilindro é  $(\pi d^2)(v \Delta t)$ . O número de colisões que ocorrem então é igual ao número de moléculas (pontuais) que estão dentro deste cilindro; veja Fig. 21-7.

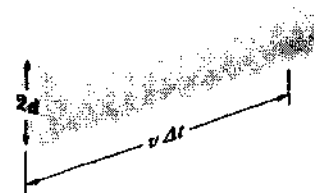
Como  $N/V$  é o número de moléculas por unidade de volume, o número de colisões é  $N/V$  multiplicado pelo volume do cilindro, ou  $(N/V)(\pi d^2 v \Delta t)$ . O livre caminho médio é o comprimento da trajetória (que é o mesmo do cilindro) dividido por este número, ou

$$\lambda = \frac{\text{extensão do caminho}}{\text{número de colisões}} \approx \frac{v \Delta t}{\pi d^2 v \Delta t N/V} = \frac{1}{\pi d^2 N/V} \quad (21-19)$$

Esta equação é aproximada porque se baseia na suposição de que todas as moléculas, exceto uma, estão em repouso. De fato, *todas* as moléculas estão em movimento; quando levamos isto em conta obtemos a Eq. 21-18. Note que ela difere da Eq. 21-19 (aproximada) somente por um fator  $1/\sqrt{2}$ .

Podemos ter uma noção do que está “aproximado” na Eq. 21-19. O  $v$  no numerador e o  $v$  no denominador não são exatamente a mesma coisa. O do numerador é  $\bar{v}$ , a velocidade média da molécula *com relação ao recipiente*. O do denominador é  $\bar{v}_{rel}$ , a velocidade média de nossa molécula *em relação às outras*, que estão em movimento. É esta última velocidade média que determina o número de colisões. Um cálculo detalhado, levando em conta a distribuição real de velocidades das moléculas, fornece  $\bar{v}_{rel} = \sqrt{2} \bar{v}$ , que é a origem do fator  $\sqrt{2}$ .

O livre caminho médio das moléculas do ar ao nível do mar é cerca de  $0,1 \mu\text{m}$ . A 100 km de altitude, a densidade



**Fig. 21-7** Num intervalo  $\Delta t$ , a molécula em movimento varre um cilindro quebrado, de comprimento  $v \Delta t$  e raio  $d$ . Este cilindro é visto retificado na figura por conveniência. A molécula colide com outras um número de vezes igual ao número de moléculas cujos centros estão dentro do cilindro.

do ar diminui tanto que o livre caminho médio vale cerca de 16 cm. A 300 km, o livre caminho médio é cerca de 20 km. Um problema encontrado pelos pesquisadores, que estudam no laboratório a física e a química da parte superior da atmosfera, é o fato de que não existem recipientes disponíveis grandes o suficiente para armazenar amostras de gás, simulando as condições da parte superior da atmosfera. No entanto, o estudo das concentrações de Freon, dióxido de carbono e ozônio nessa parte da atmosfera é de interesse vital para a população.

**EXEMPLO 21-7** Os diâmetros moleculares para diferentes espécies de moléculas de gases podem ser medidos experimentalmente medindo-se as taxas com que os diferentes gases se difundem uns nos outros. Para o oxigênio, foi encontrado  $d = 2,9 \times 10^{-10}$  m.

a. Qual é o livre caminho médio para o oxigênio à temperatura ambiente ( $T = 300$  K) e à pressão de 1,0 atm?

**Solução** Vamos encontrar primeiro  $N/V$ , o número de moléculas por unidade de volume sob essas condições. Usando a lei dos gases ideais, 1,0 mol de qualquer gás ocupa um volume igual a

$$V = \frac{nRT}{p} = \frac{(1,0 \text{ mol})(8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(300 \text{ K})}{(1,0 \text{ atm})(1,01 \times 10^5 \text{ Pa/atm})} = 2,47 \times 10^{-2} \text{ m}^3.$$

O número de moléculas por unidade de volume é, então,

$$\frac{N}{V} = \frac{nN_A}{V} = \frac{(1,0 \text{ mol})(6,02 \times 10^{23} \text{ moléculas/mol})}{2,47 \times 10^{-2} \text{ m}^3} = 2,44 \times 10^{25} \text{ moléculas/m}^3.$$

A Eq. 21-18 então fornece

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 N/V} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2}\pi)(2,9 \times 10^{-10} \text{ m})^2(2,44 \times 10^{25} \text{ m}^{-3})} \\ &= 1,1 \times 10^{-7} \text{ m.} \end{aligned} \quad \text{(Resposta)}$$

Este comprimento equivale a 380 diâmetros moleculares. Na média, as moléculas nesse gás estão somente a cerca de 11 diâmetros moleculares de distância umas das outras.

b. Se a velocidade média da molécula de oxigênio é 450 m/s, qual é a taxa de colisão média?

**Solução** Encontramos esta taxa dividindo a velocidade média pelo livre caminho médio; obtemos

$$\begin{aligned} \text{taxa} &= \frac{v}{\lambda} = \frac{450 \text{ m/s}}{1,1 \times 10^{-7} \text{ m}} \\ &= 4,1 \times 10^9 \text{ s}^{-1}. \end{aligned} \quad \text{(Resposta)}$$

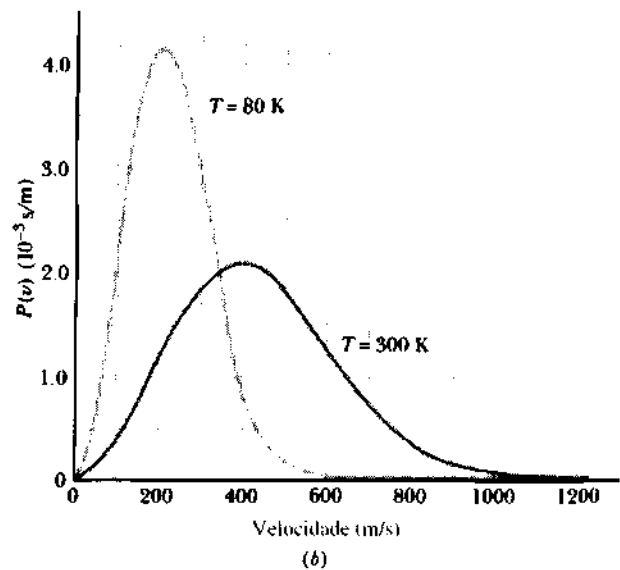
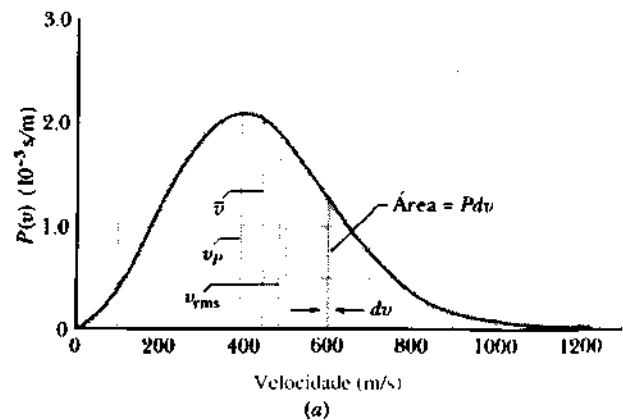
Assim, em média, cada molécula de oxigênio sofre mais de 4 bilhões de colisões por segundo!

## 21-7 Distribuição de Velocidades Moleculares (Opcional)

A velocidade média quadrática  $v_{rms}$ , nos dá uma idéia geral das velocidades moleculares para um gás a uma dada temperatura. Frequentemente, desejamos saber mais. Por exemplo, que fração das moléculas tem velocidades maiores do que o valor rms? E maiores do que duas vezes o valor rms? Para responder estas perguntas, precisamos saber como os possíveis valores da velocidade estão distribuídos entre as moléculas. A Fig. 21-8a mostra esta distribuição para moléculas de oxigênio à temperatura ambiente; a Fig. 21-8b compara essa curva com a distribuição de velocidades para  $T = 80$  K.

### Lei de Distribuição de Maxwell

Em 1852, o físico escocês James Clerk Maxwell resolveu, pela primeira vez, o problema de encontrar a distribuição



**Fig. 21-8** (a) A distribuição de velocidades de Maxwell para moléculas de oxigênio a  $T = 300$  K. As três velocidades características estão assinaladas. (b) As curvas para 300 K e 80 K. Note que as moléculas se movem mais devagar, à temperatura mais baixa. Como se trata de distribuições de probabilidade, a área sob cada curva é igual à unidade.

de velocidades das moléculas de um gás. A **lei de distribuição de velocidades de Maxwell** é

$$P(v) = 4\pi \left( \frac{M}{2\pi RT} \right)^{3/2} v^2 e^{-Mv^2/2RT} \quad (21-20)$$

Aqui,  $v$  é a velocidade molecular,  $T$  é a temperatura do gás,  $M$  é a massa molar do gás, e  $R$  é a constante dos gases. É esta expressão que tem o seu gráfico mostrado nas Figs. 21-8a e b. A quantidade  $P(v)$  na Eq. 21-20 e na Fig. 21-8 é uma **função de distribuição** que é definida como:

O produto  $P(v) dv$  (que é uma quantidade adimensional) é a fração das moléculas cujas velocidades estão na faixa entre  $v$  e  $v + dv$ .

Como vemos na Fig. 21-8a, esta fração é igual à área de uma faixa cuja altura é  $P(v)$  e largura,  $dv$ . A área total sob a curva de distribuição corresponde à fração das moléculas cujas velocidades estão entre zero e infinito. Todas estão incluídas nesta categoria, assim, o valor desta área total é um.

A Fig. 21-8a também mostra a velocidade média quadrática  $v_{rms}$  (= 483 m/s) e duas outras medidas da distribuição de velocidades para o oxigênio. A **velocidade mais provável**  $v_p$  (= 395 m/s) é a para a qual  $P(v)$  é a máxima. A **velocidade média**  $\bar{v}$  (= 445 m/s) é — como seu nome sugere — a média simples das velocidades moleculares. Um número pequeno de moléculas, localizadas na região à extrema direita da curva de distribuição, pode ter velocidades várias vezes maiores do que a média. Este simples fato torna possível, como demonstraremos, tanto a chuva como o brilho do Sol.

### Chuva

A distribuição de velocidades para as moléculas de água num lago, à temperatura normal de um dia de verão, pode ser representada por uma curva semelhante à da Fig. 21-8a. Muitas das moléculas não têm energia suficiente para escapar da água através da sua superfície. No entanto, um pequeno número de moléculas muito rápidas, cujas velocidades estão na região extrema direita da curva de distribuição, pode fazê-lo. São estas moléculas de água que “evaporam”, tomando possível a formação de nuvens e a chuva.

À medida que as moléculas de água rápidas abandonam a superfície, carregando energia com elas, a temperatura da água remanescente é mantida pela transferência de calor a partir do ambiente. Outras moléculas rápidas — produzidas em colisões particularmente favoráveis — imediatamente tomam o lugar das que evaporaram, e a distribuição de velocidades é mantida.

### Brilho do Sol

Agora, vamos aplicar a curva de distribuição da Fig. 21-8a aos prótons no núcleo do Sol, cuja energia é suprida por um processo de fusão nuclear que começa com a de dois prótons.

No entanto, os prótons se repelem por causa de suas cargas elétricas, assim prótons com velocidade igual à velocidade média não possuem energia cinética suficiente para iniciar essa reação. Mas prótons muito rápidos, com velocidades correspondendo ao extremo direito da curva de distribuição, podem vencer a repulsão eletrostática e se aproximar o suficiente para que a fusão aconteça e, assim, o Sol possa brilhar.

**EXEMPLO 21-8** Um recipiente contém oxigênio a 300 K. Que fração das moléculas tem velocidades na faixa 599-601 m/s? A massa molar  $M$  do oxigênio é de 0,0320 kg/mol.

**Solução** Este intervalo de velocidades  $\Delta v$  (= 2 m/s) é tão pequeno que podemos tratá-lo como infinitesimal e a fração  $f$  que procuramos é dada, com excelente aproximação, por  $P(v) \Delta v$ , onde  $P(v)$  deve ser calculada no ponto  $v = 600$  m/s, que é o ponto médio do intervalo; observe a faixa vertical na Fig. 21-8a. Assim, usando a Eq. 21-20, obtemos

$$f = P(v) \Delta v = 4\pi \left( \frac{M}{2\pi RT} \right)^{3/2} v^2 e^{-Mv^2/2RT} \Delta v$$

Para facilitar os cálculos, vamos dividir esta expressão em cinco fatores, do seguinte modo

$$f = (4\pi)(A)(v^2)(e^B)(\Delta v), \quad (21-21)$$

Onde  $A$  e  $B$  são dados por

$$A = \left( \frac{M}{2\pi RT} \right)^{3/2} = \left( \frac{0,0320 \text{ kg/mol}}{(2\pi)(8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(300 \text{ K})} \right)^{3/2} \\ = 2,92 \times 10^{-9} \text{ s}^3/\text{m}^3$$

$$B = -\frac{Mv^2}{2RT} = -\frac{(0,0320 \text{ kg/mol})(600 \text{ m/s})^2}{(2)(8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(300 \text{ K})} \\ = -2,31.$$

Substituindo  $A$  e  $B$  na Eq. 21-21 ficamos com

$$f = (4\pi)(A)(v^2)(e^B)(\Delta v) \\ = (4\pi)(2,92 \times 10^{-9} \text{ s}^3/\text{m}^3) \\ \times (600 \text{ m/s})^2 (e^{-2,31})(2 \text{ m/s}) \\ = 2,62 \times 10^{-3}. \quad (\text{Resposta})$$

Logo, à temperatura ambiente, 0,262% das moléculas de oxigênio terão velocidades no estreito intervalo entre 599 e 601 m/s. Se a faixa vertical na Fig. 21-8a fosse desenhada em escala, seria realmente muito estreita.

**EXEMPLO 21-9** a. Qual é a velocidade média  $\bar{v}$  das moléculas de oxigênio gasoso em  $T = 300$  K? A massa molar  $M$  do oxigênio é 0,0320 kg/mol.

**Solução** Para achar a velocidade média, calculamos uma média ponderada, onde o peso de cada velocidade  $v$  é  $P(v) dv$ . Assim,  $vP(v) dv$  é a fração das moléculas cujas velocidades estão no intervalo entre  $v$  e  $v + dv$ . Então, somamos (isto é, integramos) essas frações sobre todos os valores possíveis das velocidades. Assim,

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} vP(v) dv. \quad (21-22)$$

O próximo passo é substituir o valor de  $P(v)$  dado pela Eq. 21-20 e calcular a integral resultante. De uma tabela de integrais\*, obtemos

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \quad (\text{velocidade média}) \quad (21-23)$$

Substituindo os valores numéricos, vem

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \sqrt{\frac{(8)(8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(300 \text{ K})}{(\pi)(0,0320 \text{ kg/mol})}} \\ &= 445 \text{ m/s.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

b. Qual é a velocidade média quadrática  $v_{\text{rms}}$  das moléculas de oxigênio?

**Solução** Procedemos como no item anterior, exceto pelo fato de que agora multiplicamos  $P(v) dv$  por  $v^2$  (em vez de  $v$ ). Isto nos leva, depois de uma integração, a

$$\overline{v^2} = \int_0^{\infty} v^2 P(v) dv = \frac{3RT}{M}.$$

A velocidade rms é a raiz quadrada desta quantidade, ou

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad (\text{velocidade rms}). \quad (21-24)$$

A Eq. 21-24 é idêntica à Eq. 21-14, que deduzimos anteriormente. Entrando com os valores numéricos, obtemos

$$\begin{aligned} v_{\text{rms}} &= \sqrt{\frac{(3)(8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(300 \text{ K})}{(0,0320 \text{ kg/mol})}} \\ &= 483 \text{ m/s.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

c. Qual é a velocidade mais possível  $v_p$ ?

**Solução** A velocidade mais provável é aquela para a qual  $P(v)$ , dado pela Eq. 21-20, tem o seu valor máximo. Achamos este valor impondo que  $dP/dv = 0$  e resolvendo a equação resultante para  $v$ . Fazendo isto, resulta (como você deve mostrar),

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \quad (\text{velocidade mais provável}). \quad (21-25)$$

Numericamente, isso nos leva a

$$\begin{aligned} v_p &= \sqrt{\frac{(2)(8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(300 \text{ K})}{(0,0320 \text{ kg/mol})}} \\ &= 395 \text{ m/s.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

A Tabela 21-2 dá um resumo dessas três velocidades características da distribuição de velocidades de Maxwell.

## 21-8 Calores Específicos Molares de um Gás Ideal

Nesta seção, queremos deduzir uma expressão para a energia interna  $E_{\text{int}}$  de um gás ideal. Usaremos então o resulta-

**Tabela 21-2**  
Parâmetros de Velocidade para Distribuição de Velocidades de Maxwell

Parâmetro	Símbolo	Fórmula	Para Oxigênio a 300 K
Velocidade mais provável	$v_p$	$\sqrt{2RT/M}$	395 m/s
Velocidade média	$\bar{v}$	$\sqrt{8RT/\pi M}$	445 m/s
Velocidade média quadrática	$v_{\text{rms}}$	$\sqrt{3RT/M}$	483 m/s

do para deduzir uma expressão para o calor específico molar de um gás ideal.

### A Energia Interna $E_{\text{int}}$

Vamos supor primeiro que o nosso gás ideal é monoatômico, como o hélio, o neônio ou o argônio. Além disso, vamos lembrar do Cap. 8 que nos informou ser a energia interna associada ao movimento aleatório de átomos e moléculas. Logo, vamos supor que a energia interna  $E_{\text{int}}$  do nosso gás ideal seja simplesmente a soma das energias cinéticas de translação das suas moléculas. A energia cinética de translação média de uma molécula isolada só depende da temperatura do gás e é dada pela Eq. 21-16,  $\bar{K} = 3kT/2$ . Uma porção de  $n$  moles deste gás contém  $nN_A$  moléculas. Logo, a energia interna da porção de gás,  $E_{\text{int}}$ , é

$$E_{\text{int}} = (nN_A)\bar{K} = (nN_A)\left(\frac{3}{2}kT\right)$$

ou, como  $N_A k = R$ , a constante dos gases

$$E_{\text{int}} = \frac{3}{2}nRT \quad (\text{gás ideal monoatômico}). \quad (21-26)$$

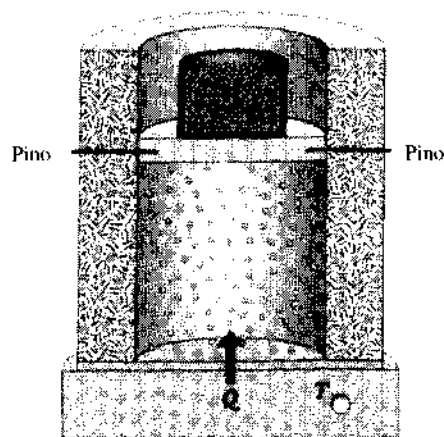
Vemos que a energia interna  $E_{\text{int}}$  é uma função só da temperatura do gás, sendo independente de outras variáveis tais como a pressão e a densidade.

De posse da Eq. 21-26, podemos agora deduzir uma expressão para o calor específico molar de um gás ideal. Na realidade, vamos deduzir duas expressões, uma para o caso em que o volume do gás permanece constante à medida que adicionamos calor a ele e outra para quando a pressão do gás permanece constante durante o processo. Os símbolos para esses dois calores específicos molares são  $C_v$  e  $C_p$ , respectivamente. (Por convenção, são representados por letras maiúsculas.)

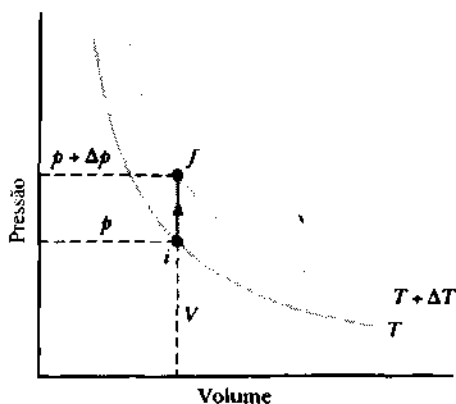
### Calor Específico Molar a Volume Constante

A Fig. 21-9a mostra  $n$  moles de um gás ideal à pressão  $p$  e à temperatura  $T$ , confinados em um cilindro de volume fixo  $V$ . Este estado inicial  $i$  do gás está marcado no diagrama  $p - V$  na Fig. 21-9b. Suponha agora que adicionamos uma

\*Uma destas tabelas é encontrada na seção A do *Handbook of Chemistry and Physics*, veja a integral 667 na lista de "Definite Integrals".



(a)



(b)

Fig. 21-9 (a) A temperatura de um gás ideal é aumentada de  $T$  para  $T + \Delta T$  a volume constante. O sistema ganhou calor, mas nenhum trabalho foi realizado. (b) O diagrama  $p - V$  para o processo.

pequena quantidade de calor  $Q$  ao gás, elevando lentamente a temperatura do reservatório térmico sobre o qual assenta o cilindro. A temperatura do gás aumenta um pouco para  $T + \Delta T$  e sua pressão para  $p + \Delta p$ , levando o gás para o estado final  $f$ .

A equação de definição para  $C_V$ , o calor específico molar a volume constante, é, de acordo com Eq. 20-3,

$$Q = nC_V \Delta T \text{ (volume constante).} \quad (21-27)$$

Substituindo esta expressão para  $Q$  na primeira lei da termodinâmica, encontramos

$$\Delta E_{\text{int}} + W = nC_V \Delta T.$$

Com o volume mantido constante,  $W = 0$ . Tirando então o valor  $C_V$ , obtemos

$$C_V = \frac{1}{n} \frac{\Delta E_{\text{int}}}{\Delta T} \quad (21-28)$$

Da Eq. 21-26 vemos que  $\Delta E_{\text{int}}/\Delta T = 3nR/2$ . Substituindo este resultado na Eq. 21-28, obtemos

$$C_V = \frac{3}{2}R = 12,5 \text{ J/mol} \cdot \text{K} \quad (21-29)$$

(gás monoatômico).

Como mostra a Tabela 21-3, esta previsão da teoria cinética concorda muito bem com a experiência para gases reais monoatômicos, que foi a nossa suposição inicial. Os valores experimentais de  $C_V$  (e os previstos) para gases diatômicos e poliatômicos são substancialmente maiores do que aqueles para os monoatômicos por razões que serão sugeridas na Seção 21-9.

Agora que definimos o calor específico molar a volume constante para um gás ideal, podemos generalizar a Eq. 21-26 para a sua energia interna:

$$E_{\text{int}} = nC_V T \text{ (gás ideal).} \quad (21-30)$$

Esta equação se aplica não somente a um gás ideal monoatômico, mas também a qualquer outro gás ideal (deve ser usado o valor apropriado de  $C_V$ ). Como já vimos na Eq. 21-26, essa expressão nos diz que a energia interna depende somente da temperatura do gás e não da sua pressão ou densidade.

Quando um gás ideal confinado sofre um aumento de temperatura  $\Delta T$ , então, da Eq. 21-28 ou da Eq. 21-30 podemos escrever a variação resultante na sua energia interna como

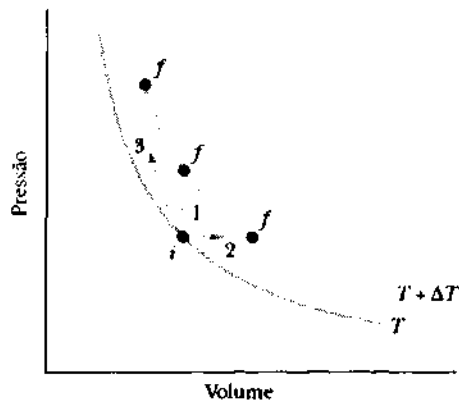
$$\Delta E_{\text{int}} = nC_V \Delta T \text{ (gás ideal, qualquer processo).} \quad (21-31)$$

Esta equação tem uma mensagem importante: a mudança na energia interna de um gás ideal confinado não depende do tipo de processo que causou a mudança de sua temperatura.

Como exemplos considere os três caminhos entre as duas isotermas no diagrama  $p - V$  da Fig. 21-10. O caminho 1 representa um processo a volume constante. O caminho 2 re-

Tabela 21-3  
Calores Específicos Molares

Molécula	Exemplo	$C_V$ (J/mol·K)
Monoatômica	Ideal	12,5
	He	12,5
	Ar	12,6
Diatômica	Ideal	20,8
	$N_2$	20,7
	$O_2$	20,8
Poliatômica	Ideal	24,9
	$NH_3$	29,0
	$CO_2$	29,7



**Fig. 21-10** Três caminhos representando três diferentes processos que levam um gás ideal de um estado inicial *i* a uma temperatura *T*, até algum estado final *f* à temperatura *T* + Δ*T*. A variação Δ*E*<sub>int</sub> na energia interna do gás é a mesma para os três processos e para qualquer outro que resulte na mesma variação de temperatura.

apresenta um processo à pressão constante (que logo iremos examinar em detalhe). O caminho 3 representa um processo em que nenhum calor é trocado com o ambiente que envolve o sistema (discutiremos isto na Seção 21-11). Embora os valores do calor *Q* e do trabalho *W* associados a estes três caminhos sejam diferentes, assim como *p<sub>i</sub>* e *V<sub>i</sub>*, os valores de Δ*E*<sub>int</sub> associados aos caminhos são idênticos, porque todos envolvem a mesma variação de temperatura Δ*T*.

### Calor Específico Molar a Pressão Constante

Vamos agora supor que a temperatura do gás seja aumentada da mesma pequena quantidade Δ*T* do caso anterior, mas que o calor necessário para isto tenha sido adicionado ao gás mantendo sua pressão constante. Um possível mecanismo para este processo é aquele mostrado na Fig. 21-11*a*; o diagrama *p* – *V* para o processo é mostrado na Fig. 21-11*b*. Podemos adivinhar imediatamente que o calor específico molar à pressão constante *C<sub>p</sub>*, que definimos a partir de

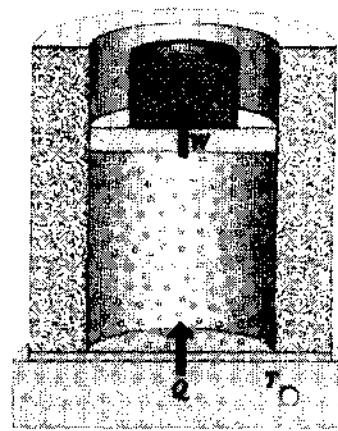
$$Q = nC_p \Delta T \text{ (pressão constante),} \quad (21-32)$$

será maior do que o calor específico molar a volume constante: teremos de fornecer energia não somente para aumentar a temperatura, mas também para realizar trabalho externo, isto é, para empurrar o êmbolo com o peso na Fig. 21-11*a*.

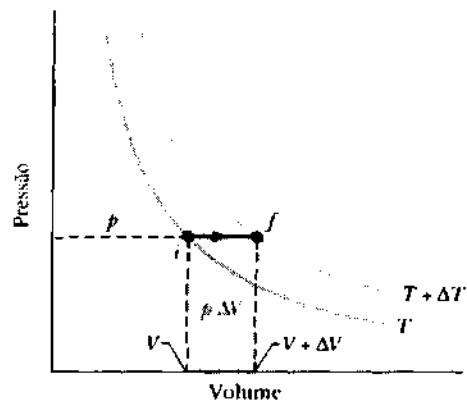
Para relacionar *C<sub>p</sub>* com *C<sub>v</sub>*, partimos da primeira lei da termodinâmica:

$$\Delta E_{\text{int}} = Q - W \quad (21-33)$$

Para Δ*E*<sub>int</sub>, substituímos seu valor dado pela Eq. 21-31. Substituímos *Q* pelo seu valor dado pela Eq. 21-32. Quanto a *W*, notamos primeiramente que, como a pressão per-



(a)



(b)

**Fig. 21-11** (a) A temperatura de um gás ideal é elevada de *T* para *T* + Δ*T* à pressão constante. O gás ganhou calor e realizou trabalho empurrando o pistão. (b) O diagrama *p* – *V* para o processo. O trabalho *p* Δ*V* é representado pela área sombreada sob a linha que liga os estados inicial e final.

manece constante, a Eq. 20-11 nos diz que *W* = *p* Δ*V*. Observamos então que, usando a lei dos gases ideais (*pV* = *nRT*), podemos escrever

$$W = p \Delta V = nR \Delta T$$

Fazendo essas substituições na Eq. 21-33 e dividindo a expressão resultante por *n* Δ*T*, encontramos

$$C_V = C_p - R,$$

ou

$$C_p - C_V = R. \quad (21-34)$$

Esta previsão da teoria cinética concorda bem com a experiência, não somente para gases monoatômicos, mas para gases em geral, desde que suas densidades não sejam muito altas.

**EXEMPLO 21-10** Uma bolha contendo 5,00 mol de hélio (monoatômico) é submersa até uma certa profundidade em água. Esta (e consequentemente o hélio) sofre um aumento de temperatura  $\Delta T$  de  $20,0^\circ\text{C}$  a pressão constante. Como consequência a bolha se expande.

a. Quanto calor  $Q$  é absorvido pelo hélio durante a expansão?

**Solução** Tratando o hélio como um gás ideal, partimos da Eq. 21-32 ( $Q = nC_p\Delta T$ ). Usamos então as Eqs. 21-34 e 21-29 e escrevemos

$$C_p = C_v + R = \frac{5}{2}R,$$

logo,

$$\begin{aligned} Q &= nC_p\Delta T = n\left(\frac{5}{2}R\right)\Delta T \\ &= (5,00 \text{ mol})(2,5)(8,31 \text{ J/mol}\cdot\text{K})(20,0^\circ\text{C}) \\ &= 2.077,5 \text{ J} \approx 2.080 \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

b. Qual a variação  $\Delta E_{\text{int}}$  na energia interna do hélio durante o aumento de temperatura?

**Solução** Embora a temperatura do hélio aumente a pressão constante (e não a volume constante), usamos a Eq. 21-31 para calcular a variação na energia interna (pelas mesmas razões mencionadas com aquela equação):

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{int}} &= nC_v\Delta T \\ &= (5,00 \text{ mol})(1,5)(8,31 \text{ J/mol}\cdot\text{K})(20,0^\circ\text{C}) \\ &= 1.246,5 \text{ J} \approx 1.250 \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

c. Qual o trabalho  $W$  realizado pelo hélio, à medida que se expande contra a pressão da água em volta, durante o aumento de temperatura?

**Solução** Usando a primeira lei da termodinâmica:

$$\begin{aligned} W &= Q - \Delta E_{\text{int}} = 2.077,5 \text{ J} - 1.246,5 \text{ J} \\ &= 831 \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

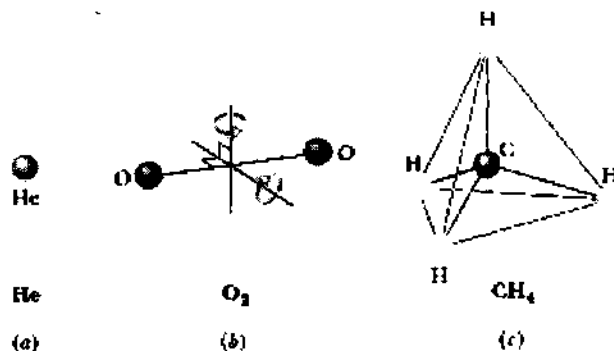
Note que, durante o aumento de temperatura, somente uma parte (1.250 J) do calor (2.080 J) que é transferido para o hélio vai aumentar a energia interna do gás e, logo, a sua temperatura. O restante (831 J) é utilizado pelo hélio para realizar trabalho durante a expansão. Se a água estivesse congelada, não permitiria a expansão da bolha, neste caso uma variação idêntica de temperatura ( $20,0^\circ\text{C}$ ) necessitaria somente de 1.250 J de calor, porque o hélio não realizaria trabalho.

## 21-9 A Equipartição da Energia

Como mostra a Tabela 21-3, a previsão  $C_v = 3R/2$  concorda com a experiência para o caso dos gases monoatômicos.

**Tabela 21-4**  
Graus de Liberdade para Várias Moléculas

Molécula	Exemplo	Graus de Liberdade			Calores Específicos Molares Previstos	
		Translacionais	Rotacionais	Total ( $f$ )	$C_v$ (Eq. 21.35)	$C_p = C_v + R$
Monoatômica	He	3	0	3	$\frac{3}{2}R$	$\frac{5}{2}R$
Diatômica	O <sub>2</sub>	3	2	5	$\frac{5}{2}R$	$\frac{7}{2}R$
Poliatômica	CH <sub>4</sub>	3	3	6	$3R$	$4R$



**Fig. 21-12** Modelos de moléculas usados em teoria cinética: (a) hélio, uma típica molécula monoatômica; (b) oxigênio, uma molécula diatômica (são vistos dois eixos de rotação); e (c) metano, uma molécula poliatômica típica.

mas falha para os diatômicos e poliatômicos. Vamos tentar explicar a discrepância, considerando a possibilidade de que as moléculas com mais de um átomo possam armazenar energia interna em outras formas além da energia cinética de translação.

A Fig. 21-12 mostra modelos propostos pela teoria cinética para o hélio (um gás monoatômico), oxigênio (diatômico) e metano (poliatômico). Com base na estrutura proposta por estes modelos, parece razoável supor que moléculas monoatômicas — que são quase pontuais, tendo uma inércia de rotação muito pequena — podem armazenar energia somente na forma de movimento translacional. As diatômicas e poliatômicas, no entanto, devem poder armazenar uma quantidade substancial de energia girando ou oscilando.

Como podemos levar essas possibilidades em conta, de uma maneira quantitativa? James Clerk Maxwell respondeu a esta pergunta, introduzindo o teorema da **equipartição da energia**:

Qualquer espécie de molécula tem um certo número  $f$  de *graus de liberdade*, que corresponde aos modos independentes pelos quais ela pode armazenar energia. Cada grau de liberdade tem associado a ele — em média — uma energia  $kT/2$  por molécula (ou  $RT/2$  por mol).

Para o movimento de translação, há três graus de liberdade, correspondendo às três direções perpendiculares ao longo das quais o movimento pode ocorrer. Para o movi-



mento de rotação, uma molécula monoatômica não possui qualquer grau de liberdade. Uma molécula diatômica — o haltere rígido da Fig. 21-12b — tem dois graus de liberdade rotacionais, correspondendo aos dois eixos perpendiculares em torno dos quais ela pode girar, armazenando energia rotacional. Esta molécula não pode armazenar energia rotacional girando em torno do eixo que liga os núcleos dos átomos que a constituem, pois sua inércia rotacional (ou seja seu momento de inércia) em torno deste eixo é aproximadamente zero. Uma molécula com mais de dois átomos tem seis graus de liberdade, três rotacionais e três translacionais.

Para estender o tratamento da Seção 21-8 aos gases diatômicos e poliatômicos, é necessário repetir as deduções daquela seção, detalhadamente, substituindo a Eq. 21-26 ( $E_{\text{int}} = 3 nRT/2$ ) por  $E_{\text{int}} = (f/2)nRT$ , onde  $f$  é o número de graus de liberdade, listado na Tabela 21-4. Procedendo assim, obtemos

$$C_V = \left(\frac{f}{2}\right) R = 4.16f \text{ J/mol} \cdot \text{K}. \quad (21-35)$$

que concorda — como deveria — com a Eq. 21-29 para  $f = 3$ . Como mostra a Tabela 21-3, esta previsão concorda com a experiência para gases monoatômicos ( $f = 3$ ) e diatômicos ( $f = 5$ ), mas este valor é muito baixo para o caso de gases poliatômicos.

**EXEMPLO 21-11** Uma cabana de volume  $V$  está cheia de ar (que consideraremos como sendo um gás ideal diatômico) a uma temperatura inicial baixa  $T_1$ . Depois que você acende um fogão a lenha, a temperatura aumenta até um valor  $T_2$ . Qual é a variação resultante na energia interna armazenada pelo ar dentro da cabana?

**Solução** Esta situação difere de outras que examinamos até agora pelo fato do recipiente (a cabana) não estar lacrado. Se estivesse, a equação dos gases ideais ( $pV = nRT$ ) indicaria que, à medida que a temperatura do ar dentro da cabana aumentasse, a pressão do ar também aumentaria. No entanto, como a cabana não está hermeticamente fechada, moléculas de ar escapam através das várias aberturas nas paredes, à medida que a temperatura aumenta, de tal modo que a pressão do ar dentro da cabana está sempre em equilíbrio com a pressão do ar do lado de fora.

Da Eq. 21-31, a variação de energia interna do ar dentro da cabana é

$$\Delta E_{\text{int}} = nC_V \Delta T$$

Usando a equação dos gases ideais, podemos substituir  $n \Delta T$  por  $\Delta(pV)/R$ , obtendo

$$\Delta E_{\text{int}} = \frac{C_V}{R} \Delta(pV).$$

Vemos então que, como nem a pressão  $p$  nem o volume  $V$  do ar dentro da cabana variam,

$$\Delta E_{\text{int}} \approx 0, \quad (\text{Resposta})$$

embora haja mudança de temperatura.

Se isto realmente acontece, por que uma pessoa se sente mais confortável dentro da cabana quando a temperatura é mais alta? Há pelo

menos dois fatores envolvidos. Seu corpo tende a esfriar porque (1) você emite radiação eletromagnética (radiação térmica) e (2) perde calor para as moléculas do ar que colidem com ele. Se você aumenta a temperatura do ambiente, (1) aumenta a quantidade de radiação térmica que o seu corpo intercepta, vinda das superfícies dentro da cabana, repondo o calor que emitiu e (2) aumenta a energia cinética das moléculas de ar que colidem com o seu corpo, diminuindo as perdas de calor para elas.

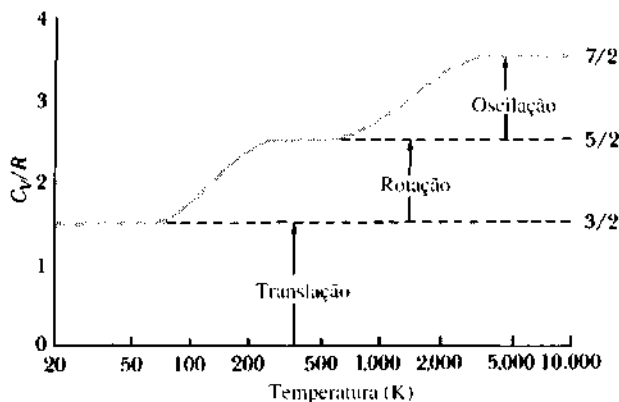
## 21-10 Uma Sugestão da Teoria Quântica

O próximo passo, logicamente, seria tentar melhorar a concordância da teoria cinética com a experiência, levando em conta a energia interna armazenada na forma de oscilações moleculares. No entanto, veremos que não vale a pena avançar ainda mais utilizando a teoria cinética clássica, que é baseada na mecânica newtoniana.

Em meados do século passado, James Clerk Maxwell (juntamente com outros) estava tentando obter uma representação coerente da estrutura de um átomo, baseada na teoria cinética e em medidas dos comprimentos de onda da luz emitida pelos átomos. Não obteve sucesso e foi levado a especular que a teoria clássica — pelo menos neste contexto — era de alguma maneira inadequada.

Maxwell, frustrado nas suas tentativas de entender o átomo, escreveu que nada mais restava, senão adotar uma atitude de “ignorância consciente que é o prelúdio de todo avanço verdadeiro no conhecimento”. Somente na primeira quarta parte do presente século — com o desenvolvimento da física quântica moderna — foi possível obter avanços reais nesse campo.

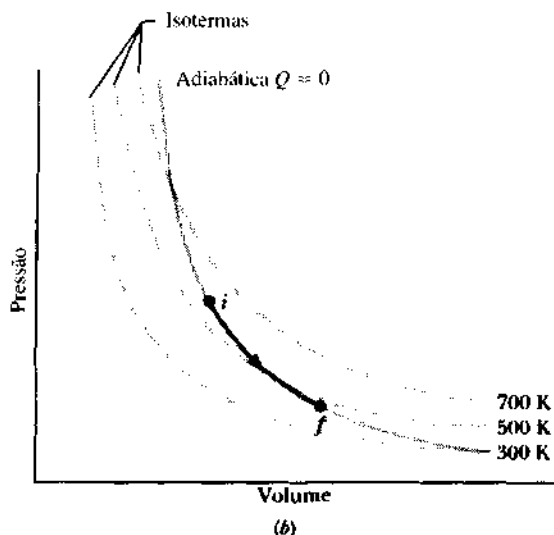
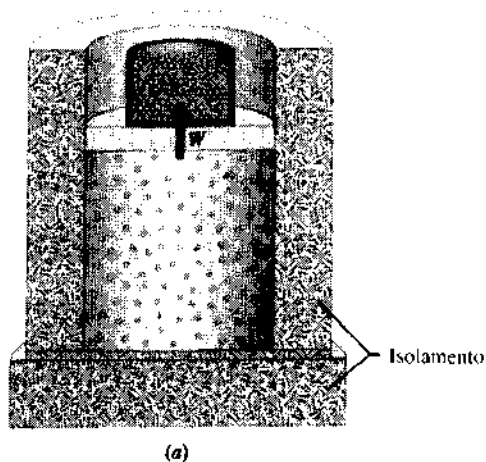
A Fig. 21-13 sugere como o fenômeno da *quantização da energia* (que é de central importância na teoria quântica) influencia a estrutura molecular. A razão  $C_V/R$  para o gás diatômico hidrogênio é mostrada como função da temperatura, onde fizemos a escala de temperatura logarítmica.



**Fig. 21-13** Um gráfico da razão  $C_V/R$  contra temperatura para hidrogênio gasoso. Somente o movimento de translação é possível a temperaturas muito baixas, pois as energias de rotação e oscilação são quantizadas. À medida que a temperatura aumenta, o movimento rotacional pode ser excitado por colisões. A temperaturas ainda mais altas, oscilações também podem ser excitadas.

ca por conveniência. A temperaturas muito baixas, abaixo de 80 K, essa razão tem o valor 1,5, característica de um gás *monoatômico*. Embora o hidrogênio seja uma molécula diatômica, a esta temperatura parece que somente os graus de liberdade de translação estão excitados. Isto acontece porque o movimento de rotação só ocorre para certas energias (é quantizado) e, a temperaturas baixas, as moléculas de H<sub>2</sub> simplesmente não têm energia cinética suficiente para imprimir rotação umas às outras quando colidem. À medida que a temperatura aumenta, no entanto, a rotação se torna possível de modo que, a temperaturas mais "ordinárias", a molécula de hidrogênio se comporta como o haltere rígido que usamos como modelo na teoria clássica. A temperaturas ainda mais altas, o movimento oscilatório (que também é quantizado) torna-se possível, mas a molécula dissocia-se em dois átomos a cerca de 3.200 K.

Como você pode ver, a física quântica descreve minuciosamente toda essa faixa de fenômenos. Assim, olhando em retrospectiva, não parece incorreto dizer que



**Fig. 21-14** (a) O volume de um gás ideal é aumentado retirando-se peso do pistão. O processo é adiabático ( $Q = 0$ ). (b) O diagrama  $p - V$  para o processo. Note que ele ocorre ao longo de uma curva adiabática.

as sementes da física quântica estão na teoria cinética dos gases.

### 21-11 Expansão Adiabática de um Gás Ideal

Vimos na Seção 18-2 que ondas sonoras se propagam no ar e em outros gases como uma série de compressões e expansões, que ocorrem tão rápido, que não há tempo para qualquer quantidade de calor ser transferida de uma parte do meio para outra. Como vimos na Seção 20-6, processos para os quais  $Q = 0$  são *adiabáticos*. Podemos nos assegurar que  $Q = 0$  executando o processo muito rapidamente (como no caso das ondas sonoras) ou executando-o lentamente, em um ambiente isolado, da melhor maneira possível. Vamos ver o que a teoria cinética tem a dizer sobre processos adiabáticos.

A Fig. 21-14a mostra um cilindro com paredes isolantes contendo um gás ideal. Retirando alguns pesos de cima do pistão, podemos permitir que o gás expanda adiabaticamente. À medida que o volume aumenta, tanto a pressão quanto a temperatura diminuem. Demonstraremos mais adiante que a relação entre pressão e volume, durante um processo adiabático, é

$$pV^\gamma = \text{constante} \quad (\text{processo adiabático}), \quad (21-36)$$

onde  $\gamma = C_p/C_v$ , a razão entre os calores específicos molares para o gás. A Eq. 21-36 nos diz que num diagrama  $p - V$ , como o da Fig. 21-14b, o processo ocorre ao longo de uma linha (chamada de *adiabática*) que é a representação gráfica da equação  $p = (\text{constante})/V^\gamma$ . Quando o gás vai de um estado inicial  $i$  para um final  $f$ , podemos reescrever a Eq. 21-36 como

$$p_i V_i^\gamma = p_f V_f^\gamma \quad (\text{processo adiabático}). \quad (21-37)$$

Podemos também escrever uma equação para um processo adiabático em termos de  $T$  e  $V$ . Para fazê-lo, usamos a equação dos gases ideais ( $pV = nRT$ ) para eliminar  $p$  da Eq. 21-36, obtendo

$$\left(\frac{nRT}{V}\right) V^\gamma = \text{constante}.$$

Como  $n$  e  $R$  são constantes, podemos reescrever esta expressão na forma alternativa

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante} \quad (\text{processo adiabático}), \quad (21-38)$$

onde a constante é diferente daquela na Eq. 21-36. Quando o gás vai de um estado inicial  $i$  até um final  $f$ , podemos reescrever a Eq. 21-38 como

$$T_i V_i^{\gamma-1} = T_f V_f^{\gamma-1} \quad (\text{processo adiabático}) \quad (21-39)$$

### A Razão dos Calores Específicos $\gamma$

A razão  $\gamma$  pode ser medida diretamente de várias maneiras, sem necessidade de se medir separadamente os dois calores específicos molares  $C_p$  e  $C_v$ . Podemos também deduzir uma expressão teórica para ela, a partir da teoria cinética. Fazemos isto combinando as Eqs. 21-35 ( $C_v = fR/2$ ) e 21-34 ( $C_p - C_v = R$ ), obtendo

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{R + C_v}{C_v} = \frac{R + \frac{1}{2}fR}{\frac{1}{2}fR} = 1 + \frac{2}{f}. \quad (21-40)$$

Este resultado concorda bem com a experiência no caso dos gases monoatômicos (para os quais  $f = 3$  e, logo,  $\gamma = 1,67$ ) e no dos gases diatômicos (para os quais  $f = 5$  e  $\gamma = 1,40$ ).

### Demonstração da Eq. 21-36

Suponha que você remova uma bolinha de chumbo de cima do pistão da Fig. 21-14a, permitindo que o gás ideal empurre o pistão e o peso restante para cima e, assim, aumente seu volume de uma quantidade infinitesimal  $dV$  (estamos supondo que ainda restaram muitas bolinhas de chumbo sobre o pistão, de modo que a variação do peso que comprime o gás e, conseqüentemente, a variação de volume resultante podem ser considerados infinitesimais). Como a variação de volume é muito pequena, podemos supor que a pressão  $p$  do gás sobre o pistão seja constante durante o processo. Isto nos permite dizer que o trabalho  $dW$  realizado pelo gás durante a expansão é  $p dV$ . Usando a Eq. 20-13, a primeira lei da termodinâmica pode então ser escrita como

$$dE_{int} = Q - p dV. \quad (21-41)$$

Como o gás está termicamente isolado (e logo a expansão é adiabática), fazemos  $Q = 0$  na expressão acima. Usamos então a Eq. 21-31 para substituir  $dE_{int}$  por  $nC_v dT$ . Com estas substituições e, após alguma álgebra, obtemos

$$n dT = - \left( \frac{p}{C_v} \right) dV. \quad (21-42)$$

Da equação dos gases ideais ( $pV = nRT$ ), temos

$$p dV + V dp = nR dT.$$

Substituindo  $R$  por  $C_p - C_v$ , somos levados a

$$n dT = \frac{p dV + V dp}{C_p - C_v}. \quad (21-43)$$

Igualando as Eqs. 21-42 e 21-43, obtemos, depois de alguns arranjos,

$$\frac{dp}{p} + \left( \frac{C_p}{C_v} \right) \frac{dV}{V} = 0.$$

Substituindo a razão dos calores específicos molares por  $\gamma$  e integrando (veja o Apêndice G), vem

$$\ln p + \gamma \ln V = \text{constante},$$

ou

$$pV^\gamma = \text{constante}, \quad (21-44)$$

que (compare com a Eq. 21-36) é o que queríamos demonstrar.

**EXEMPLO 21-12** No Exemplo 21-2, um mol de oxigênio (que supomos ser um gás ideal) se expande isotermicamente (a 310 K) de um volume inicial de 12 L até um volume final de 19 L. Qual seria a temperatura final, se o gás tivesse expandido adiabaticamente até esse mesmo volume final? O oxigênio ( $O_2$ ) é diatômico, assim  $\gamma = 1,40$ .

**Solução** Da Eq. 21-39, temos

$$T_f = \frac{T_i V_i^{\gamma-1}}{V_f^{\gamma-1}} = \frac{(310 \text{ K})(12 \text{ L})^{1,40-1}}{(19 \text{ L})^{1,40-1}} = 258 \text{ K}. \quad (\text{Resposta})$$

O fato de que o gás esfriou (de 310 até 258 K) significa que a sua energia interna diminuiu. Esta perda de energia é devida ao fato de o gás ter realizado trabalho na expansão (por exemplo, deslocando o pistão na Fig. 21-14a).

### TÁTICA PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

#### TÁTICA 3: UM RESUMO GRÁFICO

Neste capítulo, discutimos quatro processos especiais pelos quais pode passar um gás ideal. Um exemplo de cada um é visto na Fig. 21-15, e algumas das características associadas a cada um são dadas na Tabela 21-5, incluindo dois nomes (isobárico e isocórico) que não usamos neste capítulo, mas que você poderá ver em outros cursos.

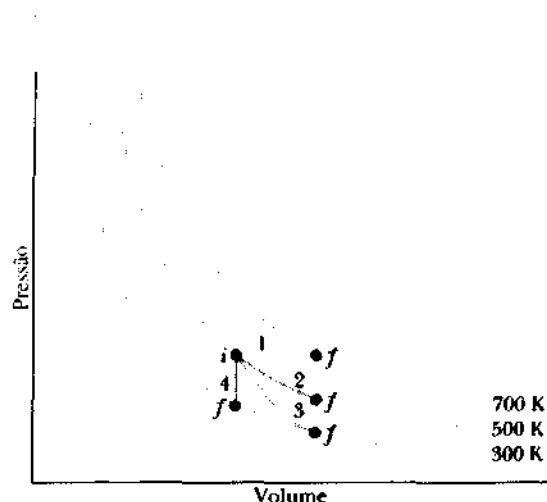


Fig. 21-15 Um diagrama  $p - V$  para quatro processos especiais, pelos quais pode passar um gás ideal.

Tabela 21-5  
Quatro Processos Especiais

Curva na Fig. 21-15	Quantidade Constante	Tipo de Processo	Alguns Resultados Especiais
			$(\Delta E_{\text{int}} = Q - W)$ $\Delta E_{\text{int}} = nC_V \Delta T$ para todas as curvas)
1	$p$	Isobárico	$Q = nC_p \Delta T$ ; $W = p \Delta V$
2	$T$	Isotérmico	$Q = W = nRT \ln(V_f/V_i)$ ; $\Delta E_{\text{int}} = 0$
3	$pV^\gamma$ ; $TV^{\gamma-1}$	Adiabático	$Q = 0$ ; $W = -\Delta E_{\text{int}}$
4	$V$	Isocórico	$Q = \Delta E_{\text{int}} = nC_V \Delta T$ ; $W = 0$

## RESUMO

### Teoria Cinética dos Gases

A teoria cinética dos gases dá a relação entre as propriedades macroscópicas dos gases (por exemplo, pressão e temperatura) e as propriedades microscópicas (por exemplo, velocidade e energia cinética das moléculas).

### Número de Avogadro

Um mol de uma substância contém  $N_A$  (número de Avogadro) unidades elementares (geralmente átomos ou moléculas). Experimentalmente, obtemos para  $N_A$

$$N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1} \quad (\text{número de Avogadro}). \quad (21-1)$$

Uma massa molar  $M$  de qualquer substância é a massa de um mol da substância.

### Gás Ideal

Um gás ideal é aquele em que a pressão  $p$ , o volume  $V$  e a temperatura  $T$  estão relacionados por

$$pV = nRT \quad (\text{equação dos gases ideais}) \quad (21-4)$$

Aqui  $n$  é o número de moles do gás e  $R (= 8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K})$  é a **constante dos gases**.

### Trabalho Numa Expansão Isotérmica

O trabalho realizado por um gás ideal durante uma variação isotérmica (temperatura constante) de um volume  $V_i$  até um volume  $V_f$  é

$$W = nRT \ln \frac{V_f}{V_i} \quad \begin{array}{l} \text{(gás ideal,} \\ \text{processo isotérmico)} \end{array} \quad (21-8)$$

### Pressão, Temperatura e Velocidades Moleculares

A pressão exercida por  $n$  moles de um gás ideal, em termos da velocidade das suas moléculas, é

$$p = \frac{nMv_{\text{rms}}^2}{3V}, \quad (21-13)$$

onde  $v_{\text{rms}} = \sqrt{v^2}$  é a **velocidade média quadrática** das moléculas do gás. Usando a Eq. 21-4, obtemos

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \quad (21-14)$$

### Temperatura e Energia Cinética

A energia cinética média translacional por molécula  $\bar{K}$  de um gás ideal é

$$\bar{K} = \frac{3}{2}kT \quad (21-16)$$

Aqui,  $k (= R/N_A = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K})$  é a **constante de Boltzmann**.

### Livre Caminho Médio

O livre caminho médio  $\lambda$  de uma molécula de um gás é o comprimento médio de sua trajetória entre as colisões e é dado por

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 N/V}, \quad (21-18)$$

onde  $N/V$  é o número de moléculas por unidade de volume e  $d$  é o diâmetro molecular.

### Distribuição de Velocidades de Maxwell

A distribuição de velocidades de Maxwell  $P(v)$  é uma função tal que  $P(v) dv$  dá a fração das moléculas com velocidades entre  $v$  e  $v + dv$ :

$$P(v) = 4\pi \left( \frac{M}{2\pi RT} \right)^{3/2} v^2 e^{-Mv^2/2RT} \quad (21-20)$$

Três medidas da distribuição de velocidades entre as moléculas de um gás são

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \quad (\text{velocidade mais provável}), \quad (21-25)$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \quad (\text{velocidade média}), \quad (21-23)$$

e a velocidade rms definida anteriormente pela Eq. 21-14.

### Calores Específicos Molares

O calor específico molar  $C_V$  de um gás a volume constante é

$$C_V = \frac{1}{n} \frac{Q}{\Delta T}, \quad (21-27)$$

onde  $Q$  é o calor transmitido para ou do gás e  $\Delta T$  é a variação de temperatura resultante do gás.  $C_V$  também pode ser escrito como

$$C_V = \frac{1}{n} \frac{\Delta E_{\text{int}}}{\Delta T}, \quad (21-28)$$

onde  $E_{\text{int}}$  é a energia interna do gás. Para um gás ideal,  $E_{\text{int}}$  só depende da temperatura do gás e pode ser escrito como

$$E_{\text{int}} = nC_V T \quad (\text{gás ideal}). \quad (21-30)$$

Assim, se um gás ideal confinado sofre uma mudança de temperatura devido a qualquer processo, sua energia interna varia de

$$\Delta E_{\text{int}} = nC_V \Delta T \quad (\text{gás ideal, qualquer processo}). \quad (21-31)$$

A primeira lei da termodinâmica conduz à relação

$$C_p - C_V = R, \quad (21-34)$$

onde  $C_p$  é o calor específico molar à *pressão constante*.  $C_p$  é definido por

$$C_p = \frac{1}{n} \frac{Q}{\Delta T}, \quad (21-32)$$

onde  $Q$  é o calor transferido para ou do gás e  $\Delta T$  é a variação de temperatura resultante do gás.

#### Teorema de Equipartição

Calculamos  $C_V$  usando o teorema da *equipartição da energia*, que afirma que cada grau de liberdade de uma molécula (isto é, cada maneira independente em que ela pode armazenar energia) está associada a —

em média — uma energia  $kT/2$  por molécula ( $= RT/2$  por mol). Se  $f$  é o número de graus de liberdade, então  $E_{\text{int}} = (f/2)nRT$  e

$$C_V = \left(\frac{f}{2}\right) R = 4.16f \text{ J/mol} \cdot \text{K} \quad (21-35)$$

Para gases monoatômicos  $f = 3$  (três graus de liberdade translacionais); para gases diatômicos  $f = 5$  (três graus translacionais e dois rotacionais). A Tabela 21-3 mostra que os valores de  $C_V$  calculados com a Eq. 21-35, para gases monoatômicos e diatômicos, estão em boa concordância com a experiência.

#### $C_V$ e a Física Quântica

A dependência de  $C_V$  com a temperatura para gases reais fornece uma forte evidência para a natureza quântica do movimento rotacional. A temperaturas altas,  $C_V$  tem o valor previsto pelo princípio da equipartição. A temperaturas baixas, no entanto, as colisões moleculares não são energéticas o suficiente para excitar o movimento de rotação quantizado. (Veja a Fig. 21-13.)

#### Expansão Adiabática

Quando um gás ideal passa por uma variação de volume adiabática (uma variação para a qual  $Q = 0$ ), sua pressão e seu volume são relacionados por

$$pV^\gamma = \text{constante} \quad (\text{processo adiabático}), \quad (21-36)$$

onde  $\gamma (= C_p/C_V)$  é a razão entre os calores específicos molares do gás.

## QUESTIONÁRIO

- Na teoria cinética, supomos que existe um grande número de moléculas em um gás. Gases reais se comportam como gases ideais a baixas densidades. Estas afirmativas são contraditórias? Se não, que conclusão você pode tirar delas?
- Supomos que as colisões das moléculas de um gás com as paredes de seu recipiente sejam elásticas. Na realidade, as colisões podem ser inelásticas. Por que isto não faz diferença, se as paredes estiverem a mesma temperatura do gás?
- Em um dia úmido, algumas pessoas dizem que o ar está "pesado". Como pode a densidade do ar úmido ser comparada com a do ar seco, à mesma temperatura e pressão?
- Como a velocidade média das moléculas do ar, à temperatura ambiente, se encaixa nesta seqüência: 0; 2 m/s (velocidade do caminhar humano); 30 m/s (carro correndo); 500 m/s (avião supersônico);  $1,1 \times 10^4$  m/s (velocidade de escape da Terra);  $3 \times 10^8$  m/s (velocidade da luz)?
- Dois salas de mesmo tamanho se comunicam por uma porta aberta. Entretanto, a média de temperaturas nas duas salas é mantida a valores diferentes. Em qual sala há mais ar?
- Movimentos moleculares são mantidos sem influência de forças externas e, mesmo assim, continuam indefinidamente sem sinais de diminuição na velocidade. Por que o atrito não leva essas minúsculas partículas ao repouso, como faz com outras partículas em movimento?
- Qual a justificativa para desprezar as variações na energia potencial gravitacional das moléculas de gás?
- Supomos que a força exercida por moléculas de um gás nas paredes de seu recipiente seja constante no tempo. Como podemos justificar esta suposição?
- A velocidade média das moléculas de um gás precisa ser zero, se o gás como um todo e seu recipiente não estiverem em movimento translacional. Explique, então, como pode o módulo de velocidade média não ser zero.
- Considere uma bola de golfe, quente, estacionária e colocada em um "T", e uma outra, fria, se movendo para longe do "T" depois de ser arremessada. A energia cinética total das moléculas das bolas, relativa ao "T", pode ser a mesma nos dois casos. Explique como. Qual a diferença entre os dois casos?
- Justifique o fato de que a pressão de um gás depende do quadrado da velocidade de suas partículas, explicando a dependência da pressão na frequência de colisão e na transferência de momento entre as partículas.
- Por que a temperatura de ebulição de um líquido aumenta com a pressão?
- Como pode a velocidade do som em um gás ser relacionada à sua pressão e temperatura?
- Em grandes altitudes (muito distante da superfície da Terra), a temperatura de um gás está na ordem de 1.000 K. Entretanto, uma pessoa sujeita a tal altitude irá congelar até a morte, ao invés de vaporizar-se. Explique.
- Por que a atmosfera da Terra não pode simplesmente "ir embora"? No topo da atmosfera, algumas moléculas irão ocasionalmente ser arremessadas para fora, com uma velocidade que excede a velocidade de escape. Não será somente uma questão de tempo?
- Titã, uma das muitas luas de Saturno, tem uma atmosfera, mas a nossa Lua não. Por quê?

17. Conforme o calor é adicionado ao gelo, este derrete para se tornar líquido e, então, o líquido eventualmente ferve para se tornar vapor (ou gás). Entretanto, quando o dióxido de carbono sólido é aquecido, vai direto para o estado gasoso — dizemos que ele *sublima* — sem passar pelo estado líquido. Como podemos produzir dióxido de carbono líquido?
18. Pode o conceito de temperatura ser aplicado ao vácuo? Considere o espaço interplanetário, por exemplo.
19. Que evidência direta temos para a existência de átomos? E indireta?
20. Como você pode esperar que a composição da atmosfera mude com a altitude, se houver alguma mudança?
21. Frequentemente, dizemos que vemos o vapor d'água saindo da chaleira, enquanto a água ferve. Entretanto, o vapor d'água é um gás incolor. O que realmente vemos?
22. Por que a fumaça de uma vela sobe, em vez de descer? Explique em termos de colisões moleculares.
23. Pode um gás, cujas moléculas sejam verdadeiros pontos geométricos, obedecer à lei do gás ideal?
24. Se você encher um pires com água à temperatura ambiente, ela irá evaporar completamente sob condições normais. É fácil acreditar que algumas das moléculas mais energéticas possam escapar da superfície da água, mas como podem *todas* elas, eventualmente, escapar? Muitas — de fato, a vasta maioria — não têm energia suficiente para fazê-lo.
25. Dê uma explicação qualitativa da conexão entre o livre caminho médio das moléculas de amônia no ar e o tempo que se leva para sentir o cheiro da amônia, quando um vidro é aberto do outro lado de uma sala.
26. Enumere algumas maneiras efetivas de aumentar o número de colisões moleculares por unidade de tempo em um gás.
27. Se as moléculas de um gás não são esféricas, que significado podemos atribuir a  $d$ , na Eq. 21-18, para o livre caminho médio? Em quais gases as moléculas podem se comportar mais aproximadamente como esferas rígidas?
28. As duas paredes opostas de um recipiente de gás são mantidas a diferentes temperaturas. O ar entre os vidros de uma janela contra-pestada é um bom exemplo. Descreva, em termos de teoria cinética, o mecanismo de condução de calor através do gás.
29. Um gás pode transmitir somente as ondas sonoras cujo comprimento de onda seja longo, comparado com o livre caminho médio. Você pode explicar isto? Descreva uma situação em que esta limitação pode ser importante.
30. Justifique qualitativamente a afirmativa: em uma mistura de moléculas de diferentes tipos em completo equilíbrio, cada tipo de molécula tem a mesma distribuição de Maxwell na velocidade que teria se as outras moléculas não estivessem presentes.
31. É possível para um gás ser constituído de moléculas que tenham todas a mesma velocidade?
32. Que tipo de observação forneceria uma boa evidência de que nem todas as moléculas de um corpo estão se movendo com a mesma velocidade a uma dada temperatura?
33. A fração de moléculas dentro de uma faixa  $\Delta v$  de velocidade rms diminui conforme a temperatura do gás aumenta. Explique.
34. (a) Metade das moléculas de um gás em equilíbrio térmico tem velocidades maiores do que  $v_p$ ? Que módulo de  $\bar{v}$ ? Que  $v_{rms}$ ? (b) Que velocidade  $v_p$ , módulo de  $\bar{v}$  ou  $v_{rms}$ , corresponde a uma molécula com energia cinética média?
35. Tendo em mente que a energia interna de um corpo consiste nas energias cinética e potencial de suas partículas, como você poderia distinguir entre a energia interna de um corpo e a sua temperatura?
36. Dois gases em dois recipientes idênticos estão a 1 atm e à temperatura ambiente (CNTP — condições normais de temperatura e pressão). Um contém gás hélio (monoatômico, massa molar 4 g/mol) e o outro, um igual número de moles do gás argônio (monoatômico, massa molar 40 g/mol). Se 1 cal de calor adicionado ao hélio aumentar sua temperatura em uma certa quantidade, qual quantidade de calor terá de ser adicionada ao gás argônio para que aumente sua temperatura desta mesma quantidade?
37. Explique como podemos manter um gás a uma temperatura constante, durante um processo termodinâmico.
38. Por que é mais comum excitar radiação de átomos de gases pelo uso de descargas elétricas, que por métodos térmicos?
39. Uma certa quantidade de um gás ideal é comprimido para a metade de seu volume inicial. O processo pode ser adiabático, isotérmico ou isobárico (pressão constante). Para qual processo é necessário maior quantidade de trabalho mecânico?
40. Explique por que a temperatura de um gás diminui em uma expansão adiabática.
41. Se o ar quente sobe, por que ele é mais frio no topo de uma montanha que ao nível do mar? (Sugestão: O ar é um mau condutor de calor.)
42. Um balão de borracha fechado contém um gás muito leve. O balão é solto e sobe alto na atmosfera. Descreva e explique a temperatura do gás e o tamanho do balão.

## EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

### Seção 21-2 Número de Avogadro

- 1E. O ouro tem massa molar de 197 g/mol. Considere uma amostra de 2,50 g de ouro puro. (a) Calcule o número de mole de ouro presentes. (b) Quantos átomos de ouro existem na amostra?
- 2E. Encontre a massa em quilogramas de  $7,50 \times 10^{23}$  átomos de arsênio, que tem uma massa molar de 74,9 g/mol.
- 3P. Se as moléculas de água em 1,00 g de água fossem distribuídas uniformemente pela superfície da Terra, quantas moléculas haveriam em 1,00 cm<sup>2</sup> dessa superfície?
- 4P. Considere esta afirmativa: Um(a) \_\_\_\_\_ de água contém aproximadamente o mesmo número de moléculas que o número de \_\_\_\_\_s de água em todos os oceanos. Qual das palavras seguintes se encaixa melhor nos dois espaços: gota, colher de chá, colher de sopa, xícara, litro, barril ou tonelada? Os oceanos cobrem 75% da superfície da Terra e têm uma profundidade média de cerca de 5 km. (De Edward M. Purcell.)
- 5P. Um famoso cientista escreveu: "Há moléculas em número suficiente na tinta que é necessária para desenhar uma letra desta sentença para não somente dar uma para cada habitante da Terra, mas uma para cada criatura, se cada estrela de nossa galáxia tivesse um planeta tão populo-

so quanto o nosso". Verifique esta afirmativa. Suponha que a amostra de tinta (massa molar 18 g/mol) tenha 1  $\mu\text{g}$ , a população da Terra seja  $5 \times 10^9$  e o número de estrelas em nossa galáxia seja cerca de  $10^{11}$ .

**Seção 21-3 Gases Ideais**

**6E.** (a) Qual o volume ocupado por 1,00 mol de um gás a condições normais, isto é, à pressão de 1,00 atm ( $= 1,01 \times 10^5 \text{ Pa}$ ) e temperatura de  $0^\circ\text{C}$  ( $= 273 \text{ K}$ )? (b) Mostre que o número de moléculas por centímetro cúbico (o número *Loschmidt*) a condições normais é  $2,69 \times 10^{25}$ .

**7E.** Encontre (a) o número de moles e (b) o número de moléculas em um gás contido em um volume de 1,00  $\text{cm}^3$ , à pressão de 100 Pa e à temperatura de 220 K.

**8E.** O melhor vácuo que pode ser obtido em um laboratório corresponde à pressão de cerca de  $1,00 \times 10^{-18}$  atm ou  $1,01 \times 10^{-13}$  Pa. Quantas moléculas existem por centímetro cúbico em tal vácuo, a 293 K?

**9E.** Uma quantidade de um gás ideal a  $10,0^\circ\text{C}$  e à pressão de 100 kPa ocupa um volume de 2,50  $\text{m}^3$ . (a) Quantos moles do gás estão presentes? (b) Se a pressão for elevada para 300 kPa e a temperatura para  $30,0^\circ\text{C}$ , qual o volume que o gás ocupará? Suponha que não haja perdas.

**10E.** Uma quantidade de oxigênio ocupando um volume de 1.000  $\text{cm}^3$  a  $40,0^\circ\text{C}$  e uma pressão de  $1,01 \times 10^5 \text{ Pa}$  se expande até um volume de 1.500  $\text{cm}^3$  e pressão de  $1,06 \times 10^5 \text{ Pa}$ . Encontre (a) o número de moles de oxigênio no sistema e (b) sua temperatura final.

**11E.** Um pneu de automóvel tem um volume de 1.000  $\text{pol}^3$  e contém ar à pressão manométrica de 24,0  $\text{lb/pol}^2$ , quando a temperatura é  $0,00^\circ\text{C}$ . Qual a pressão manométrica do ar no pneu, quando sua temperatura sobe para  $27^\circ\text{C}$  e seu volume para 1.020  $\text{pol}^3$ ? (*Sugestão:* Não é necessário converter unidades inglesas para unidades internacionais; por quê? Use  $P_{\text{atm}} = 14,7 \text{ lb/pol}^2$ .)

**12E.** Calcule o trabalho realizado por um agente externo, durante uma compressão isotérmica de 1,00 mol de oxigênio, de um volume de 22,4 L a  $0^\circ\text{C}$  e pressão de 1,00 atm, para 16,8 L.

**13P.** (a) Qual o número de moléculas por metro cúbico no ar a  $20^\circ\text{C}$  e à pressão de 1,0 atm ( $= 1,01 \times 10^5 \text{ Pa}$ )? (b) Qual a massa de 1  $\text{m}^3$  desse ar? Suponha que 75% das moléculas sejam de nitrogênio ( $\text{N}_2$ ) e 25% de oxigênio ( $\text{O}_2$ ).

**14P.** A pressão  $p$ , o volume  $V$  e a temperatura  $T$  para um certo material são relacionados por

$$p = \frac{AT - BT^2}{V}$$

Encontre uma expressão para o trabalho realizado pelo material, se a temperatura mudar de  $T_1$  para  $T_2$ , enquanto a pressão permanece constante.

**15P.** Uma amostra de ar, que ocupa 0,14  $\text{m}^3$  à pressão manométrica de  $1,03 \times 10^5 \text{ Pa}$ , se expande isotermicamente até atingir a pressão atmosférica e é então resfriada, à pressão constante, até que retorne ao seu volume inicial. Calcule o trabalho realizado pelo ar.

**16P.** Considere uma certa massa de um gás ideal. Compare as curvas representando pressão constante, volume constante e processos isotérmicos em (a) um gráfico  $p - V$ , (b) um gráfico  $p - T$  e (c) um gráfico  $V - T$ . (d) De que modo essas curvas dependem da massa do gás escolhida?

**17P.** Um recipiente contém dois gases ideais. Estão presentes dois moles do primeiro gás, como massa molar  $M_1$ . O segundo tem massa molar  $M_2$

$= 3M_1$ , e há 0,5 mol deste gás no recipiente. Qual fração da pressão total nas paredes do recipiente é devida ao segundo gás? (A explicação da teoria cinética para a pressão leva à lei de pressões parciais, descoberta experimentalmente, para uma mistura de gases que não reagem quimicamente: a pressão total exercida pela mistura é igual ao somatório das pressões que os gases presentes poderiam exercer separadamente, se cada um ocupasse o recipiente sozinho.)

**18P.** Um balão meteorológico é inflado com hélio à pressão de 1,0 atm ( $= 76 \text{ cm Hg}$ ) e temperatura de  $20^\circ\text{C}$ . O volume do gás é de 2,2  $\text{m}^3$ . A uma altura de 20.000 ft, a pressão atmosférica cai para 38 cm Hg e o hélio se expande, sem encontrar nenhuma resistência. A essa altura a temperatura do gás é  $-48^\circ\text{C}$ . Qual o volume do gás agora?

**19P.** Uma bolha de ar de 20  $\text{cm}^3$  está no fundo de um lago, a 40 m de profundidade, onde a temperatura é  $4,0^\circ\text{C}$ . Ela se solta e vai para a superfície, onde a temperatura é  $20^\circ\text{C}$ . Considere a temperatura da bolha como sendo a mesma da água à sua volta e encontre seu volume no exato momento em que alcança a superfície — ainda na água.

**20P.** Um tubo de comprimento  $L = 25,0 \text{ m}$ , aberto em uma das extremidades contém ar à pressão atmosférica. Ele é colocado verticalmente em um lago de água doce, até que a água preencha metade do tubo, como mostrado na Fig. 21-16. Qual a profundidade  $h$  da parte submersa do tubo? Considere a temperatura como sendo a mesma em todo lugar e constante.

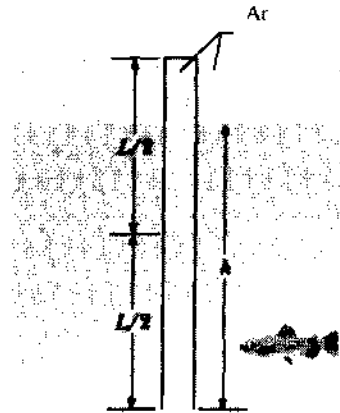


Fig. 21-16 Problema 20.

**21P.** A lona e a cesta de um balão de ar quente têm um peso combinado de 550 lb, e a lona tem capacidade de 77.000 pés<sup>3</sup>. Quando estiver completamente inflado, qual terá de ser a temperatura do ar dentro da lona para dar ao balão a capacidade de carregar 600 lb (fora o seu próprio peso)? Suponha que o ar em volta, a  $20^\circ\text{C}$ , tenha densidade de peso igual a  $7,56 \times 10^{-2} \text{ lb/pés}^3$ .

**22P.** Um tanque de aço contém 300 g de amônia ( $\text{NH}_3$ ) no estado gasoso, a uma pressão absoluta de  $1,35 \times 10^6 \text{ Pa}$  e temperatura de  $77^\circ\text{C}$ . (a) Qual o volume do tanque? (b) O tanque é inspecionado mais tarde, quando a temperatura cai para  $22^\circ\text{C}$  e a pressão absoluta para  $8,7 \times 10^5 \text{ Pa}$ . Quantos gramas de gás escaparam do tanque?

**23P.** O recipiente A, na Fig. 21-17, contém um gás ideal à pressão de  $5,0 \times 10^5 \text{ Pa}$  e à temperatura de 300 K. Ele está conectado por um fino tubo ao recipiente B, que tem quatro vezes o volume de A. O B contém o mesmo gás ideal, à pressão de  $1,0 \times 10^5 \text{ Pa}$  e à temperatura de 400 K. A válvula de conexão é aberta e o equilíbrio é atingido a uma

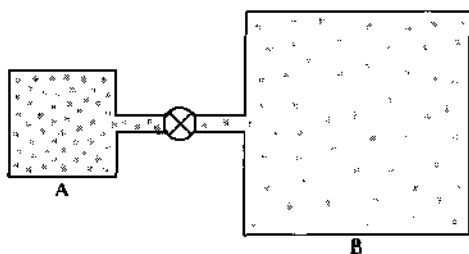


Fig. 21-17 Problema 23.

pressão comum, enquanto a temperatura de cada recipiente é mantida constante, em seu valor inicial. Qual a pressão final do sistema?

#### Seção 21-4 Pressão e Temperatura: Uma Visão Molecular

**24E.** Calcule a velocidade média quadrática dos átomos de hélio a 1.000 K. A massa molar do hélio é de 4,00 g/mol.

**25E.** A temperatura mais baixa possível no espaço sideral é 2,7 K. Qual a velocidade média quadrática das moléculas de hidrogênio nessa temperatura? (Use a Tabela 21-1.)

**26E.** Encontre a velocidade rms dos átomos de argônio a 313 K. A massa molar do argônio é de 39,9 g/mol.

**27E.** Considere o Sol como uma gigantesca bola de gás ideal à alta temperatura. A pressão e a temperatura na atmosfera solar são 0,0300 Pa e  $2,00 \times 10^6$  K, respectivamente. Calcule a velocidade rms dos elétrons livres (massa =  $9,11 \times 10^{-31}$  kg) na atmosfera solar.

**28E.** (a) Encontre a velocidade média quadrática de uma molécula de nitrogênio a 20°C. (b) A que temperaturas a velocidade média quadrática será a metade e o dobro desse valor?

**29E.** A que temperatura os átomos de hélio têm a mesma velocidade rms que os do hidrogênio a 20°C?

**30P.** A densidade de um gás a 273 K e  $1,00 \times 10^{-2}$  atm é de  $1,24 \times 10^{-5}$  g/cm<sup>3</sup>. (a) Encontre a velocidade  $v_{rms}$  para as moléculas do gás. (b) Ache a massa molar do gás e identifique-o.

**31P.** A massa da molécula de hidrogênio é de  $3,3 \times 10^{-24}$  g. Se  $10^{23}$  moléculas de hidrogênio por segundo atingissem 2,0 centímetros quadrados de uma parede, a um ângulo de 55° com a normal à parede, com velocidade  $1,0 \times 10^5$  cm/s, que pressão elas exerceriam sobre a parede?

#### Seção 21-5 Energia Cinética de Translação

**32E.** Qual a energia cinética translacional média das moléculas de nitrogênio a 1.600 K (a) em joules e (b) em elétron-volts?

**33E.** (a) Determine o valor médio, em elétron-volts, da energia cinética translacional das partículas de um gás ideal a 0,00°C e 100°C. (b) Qual a energia cinética translacional por mole de um gás ideal a esta temperatura, em joules?

**34E.** A que temperatura a energia cinética de translação de uma molécula é igual a 1,00 eV?

**35E.** Uma amostra de oxigênio (O<sub>2</sub>) a 273 K e 1,0 atm é confinada em um recipiente cúbico de aresta 10 cm. Calcule a razão entre (1) a variação na energia potencial gravitacional de uma molécula de oxigênio caindo de uma altura igual à aresta da caixa e (2) sua energia cinética translacional média.

**36P.** Mostre que a equação do gás ideal (Eq. 21-4) pode ser escrita nas formas alternativas: (a)  $p = \rho RT/M$ , onde  $\rho$  é a densidade de massa do gás e  $M$ , a massa molar; (b)  $pV = NkT$ , onde  $N$  é o número de partículas do gás (átomos ou moléculas).

**37P.** Uma amostra de água com a superfície aberta à atmosfera, a 32,0°C, evapora devido ao escape das moléculas através de sua superfície. O calor de vaporização (539 cal/g) é aproximadamente igual a  $\epsilon n$ , onde  $\epsilon$  é a energia média das moléculas que escapam e  $n$ , o número de moléculas por grama. (a) Calcule  $\epsilon$ . (b) Qual a razão entre  $\epsilon$  e a energia cinética média das moléculas da água, supondo que a energia cinética se relacione com a temperatura do mesmo modo que para os gases.

**38P.** A lei de Avogadro afirma que, sob as mesmas condições de temperatura e pressão, volumes iguais de diferentes gases contêm o mesmo número de moléculas. Esta lei equivale à equação dos gases ideais?

#### Seção 21-6 Livre Caminho Médio

**39E.** O livre caminho médio das moléculas de nitrogênio a 0,0°C e 1,0 atm é  $0,80 \times 10^{-5}$  cm. A estas temperatura e pressão há  $2,7 \times 10^{19}$  moléculas/cm<sup>3</sup>. Qual o diâmetro das moléculas?

**40E.** A 2.500 km acima da superfície da Terra, a densidade da atmosfera é cerca de 1 molécula/cm<sup>3</sup>. (a) Qual o valor do livre caminho médio previsto pela Eq. 21-18 e (b) qual o seu significado, sob estas condições? Suponha o diâmetro molecular igual a  $2,0 \times 10^{-8}$  cm.

**41E.** Qual o livre caminho médio para 15 esferas em um saco que é sacudido vigorosamente? Considere o volume do saco igual a 1,0 L e o diâmetro das esferas como sendo de 1,0 cm.

**42E.** Deduza uma expressão, em termos de  $N/V$ ,  $\bar{v}$  e  $d$ , para a frequência de colisões de uma molécula ou um átomo em um gás.

**43P.** Em um certo acelerador de partículas, os prótons percorrem um caminho circular de diâmetro de 23,0 m em uma câmara onde a pressão é  $1,00 \times 10^{-6}$  mm de Hg e a temperatura é 295 K. (a) Calcule o número de moléculas de gás por centímetro cúbico, a esta pressão. (b) Qual o livre caminho médio das moléculas de gás sob estas condições, se o diâmetro molecular for de  $2,00 \times 10^{-8}$  cm?

**44P.** A que frequência o comprimento de onda do som no ar será igual ao livre caminho médio do oxigênio a 1,00 atm e 0,00°C? Considere o diâmetro da molécula de oxigênio igual a  $3,0 \times 10^{-8}$  cm.

**45P.** (a) Qual o volume molar (volume por mol) de um gás ideal nas condições normais (0,00°C e 1,00 atm)? (b) Calcule a razão entre a velocidade rms dos átomos de hélio e a dos átomos de neônio, nestas condições. (c) Qual seria o livre caminho médio dos átomos de hélio, nestas condições? Suponha que o diâmetro atômico é de  $1,00 \times 10^{-8}$  cm. (d) Qual seria o livre caminho médio dos átomos de neônio, nestas condições? Suponha que o diâmetro atômico é o mesmo do hélio. (e) Comente os resultados dos itens (c) e (d) levando em conta o fato de que os átomos de hélio estão se deslocando mais rápido do que os de neônio.

**46P.** O livre caminho médio  $\lambda$  das moléculas de um gás pode ser determinado a partir de certas medidas (por exemplo, a partir de medidas da viscosidade do gás). A 20°C e à pressão de 75 cm de Hg, tais medidas forneceram para o argônio  $\lambda_a = 9,9 \times 10^{-6}$  cm e para o nitrogênio  $\lambda_n = 27,5 \times 10^{-6}$  cm. (a) Calcule a razão entre o diâmetro efetivo das moléculas de argônio e de nitrogênio. (b) Qual o livre caminho médio para o argônio a 20°C e 15 cm de Hg? (c) Qual o livre caminho médio para o argônio a -40°C e 75 cm de Hg?

**47P.** Mostre que cerca de  $10^{11}$  moléculas de ar são necessárias para o período que fecha esta sentença. Mostre que há cerca de  $10^{21}$  colisões de moléculas de ar por segundo com este período.



**Seção 21-7 A Distribuição de Velocidades Moleculares**

**48E.** As velocidades de um grupo de 10 moléculas são 2,0, 3,0, 4,0, ..., 11 km/s. (a) Qual a velocidade média do grupo? (b) Qual a velocidade média quadrática para o grupo?

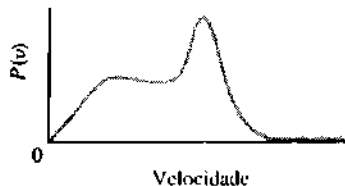
**49E.** Sejam as seguintes partículas ( $N_i$  representa o número de partículas que estão com velocidade  $v_i$ ):

$N_i$	$v_i$ (cm/s)
2	1,0
4	2,0
6	3,0
8	4,0
2	5,0

(a) Encontre a velocidade média  $\bar{v}$ . (b) Encontre a velocidade  $v_{rms}$ . (c) Das cinco velocidades tabeladas, qual a mais provável?

**50E.** (a) Dez partículas estão se movendo com as seguintes velocidades: quatro a 200 m/s, duas a 500 m/s e quatro a 600 m/s. Calcule as velocidades média e média quadrática. Qual delas é maior? (b) Construa o gráfico de distribuição de velocidades para as dez partículas e mostre que a velocidade média quadrática é maior ou igual à velocidade média, para esta distribuição. (c) Sob que condições (se existirem) a velocidade média quadrática é igual à velocidade média?

**51E.** Considere a distribuição de velocidades mostrada na Fig. 21-18. (a) Dê os valores de  $v_{rms}$ ,  $v_p$  e a velocidade média, em ordem crescente. (b) Compare esta distribuição com a de Maxwell.



**Fig. 21-18** Exercício 51.

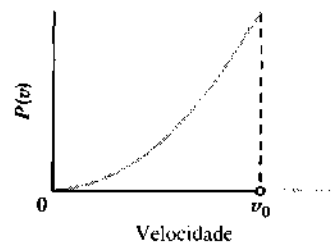
**52E.** A velocidade mais provável das moléculas de um gás à temperatura de equilíbrio  $T_2$  tem o mesmo valor que a velocidade rms das moléculas do mesmo gás, quando ele está à temperatura  $T_1$ . Calcule  $T_2/T_1$ .

**53P.** (a) Encontre as temperaturas em que a velocidade rms tem o mesmo valor que a velocidade de escape da superfície da Terra, para as moléculas de hidrogênio e de oxigênio. (b) Faça o mesmo para a velocidade de escape da superfície da Lua, supondo que a aceleração da gravidade na superfície lunar seja 0,16g. (c) A temperatura mais alta encontrada na camada superior da atmosfera é de cerca de 1.000 K. Você esperaria encontrar muito hidrogênio por lá? E oxigênio?

**54P.** Certa molécula de hidrogênio (diâmetro de  $1,0 \times 10^{-8}$  cm) escapa de um forno ( $T = 4.000$  K) com a velocidade média quadrática e entra em uma câmara contendo átomos de argônio frio (diâmetro de  $3,0 \times 10^{-8}$  cm), sendo a densidade deste último de  $4,0 \times 10^{19}$  átomos/cm<sup>3</sup>. (a) Qual a velocidade da molécula de hidrogênio? (b) Se a molécula de hidrogênio e um átomo de argônio colidirem, qual a menor distância entre seus centros, considerando ambos como esferas rígidas? (c) Qual o número inicial de colisões por segundo sofridas pela molécula de hidrogênio?

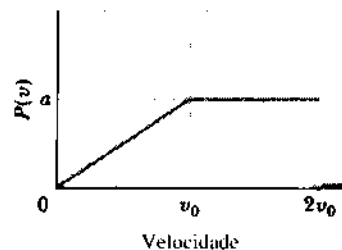
**55P.** Dois recipientes estão à mesma temperatura. O primeiro contém gás à pressão  $p_1$ , sendo  $m_1$  a massa de suas moléculas e  $v_{rms,1}$  a velocidade média quadrática destas. O segundo contém outro gás, cujas moléculas têm massa  $m_2$ , à pressão  $2p_1$ , e velocidade média  $\bar{v}_2 = 2v_{rms,1}$ . Calcule a razão entre as massas das moléculas.

**56P.** Para a distribuição hipotética de velocidades das  $N$  partículas de um gás, mostrada na Fig. 21-19 [ $P(v) = Cv^3$  para  $0 < v \leq v_0$ ;  $P(v) = 0$  para  $v > v_0$ ], encontre (a) uma expressão para  $C$  em termos de  $N$  e  $v_0$ , (b) a velocidade média das partículas e (c) a velocidade rms das partículas.



**Fig. 21-19** Problema 56.

**57P.** Uma amostra hipotética de  $N$  partículas de um gás tem a distribuição de velocidades mostrada na Fig. 21-20, onde  $P(v) = 0$  para  $v > 2v_0$ . (a) Expresse  $a$  em termos de  $N$  e  $v_0$ . (b) Quantas partículas têm velocidades entre  $1,5v_0$  e  $2,0v_0$ ? (c) Expresse a velocidade média das partículas em termos de  $v_0$ . (d) Encontre  $v_{rms}$ .



**Fig. 21-20** Problema 57.

**Seção 21-8 Calores Específicos Molares de um Gás Ideal**

**58E.** (a) Qual a energia interna de 1,0 mol de um gás ideal monoatômico a 273 K? (b) Ela depende do volume ou da pressão?

**59E.** Um mole de um gás ideal passa por uma expansão isotérmica. Encontre o calor adicionado ao gás em termos dos volumes inicial e final e da temperatura. (Sugestão: Use a primeira lei da termodinâmica.)

**60E.** A massa do átomo de hélio é de  $6,66 \times 10^{-27}$  kg. Calcule o calor específico a volume constante para o hélio gasoso, monoatômico (em J/kg·K), a partir do seu calor específico molar, também a volume constante.

**61P.** 20,9 J de calor são adicionados a um certo gás ideal. Como resultado, seu volume aumenta de 50,0 para 100 centímetros cúbicos, enquanto a pressão permanece constante (1,00 atm). (a) Qual a variação na energia interna do gás? (b) Se a quantidade de gás presente for de  $2,00 \times 10^{-3}$  mol, calcule o calor específico molar à pressão constante. (c) Calcule o calor específico molar a volume constante.

**62P.** Uma certa quantidade de um gás ideal monoatômico ( $n$  moles) está inicialmente à temperatura  $T_1$ . A pressão e o volume são então lentamente duplicados, de tal maneira que o processo é descrito por uma reta no gráfico  $p - V$ . Quais são, em termos de  $n$ ,  $R$  e  $T_1$ , (a)  $W$ , (b)  $\Delta E_{\text{int}}$  e (c)  $Q$ ? (d) Se quisermos definir um calor específico molar para este processo, qual seria o seu valor?

**63P.** Um recipiente contém uma mistura de três gases que não reagem entre si:  $n_1$  moles do primeiro gás, com calor específico  $C_{v1}$ , e assim por diante. Calcule o calor específico molar a volume constante da mistura, em termos dos calores específicos molares dos gases constituintes, bem como do número de moles de cada gás.

**64P.** A massa de uma molécula de gás pode ser calculada a partir do calor específico a volume constante  $c_v$ . Considere  $c_v = 0,075 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$  para o argônio e calcule (a) a massa de um átomo de argônio e (b) a massa molar do argônio.

### Seção 21-9 A Equipartição da Energia

**65E.** Um gás diatômico cujas moléculas apresentam rotação, mas não oscilam, perde 90 joules de calor. A perda de energia interna do gás será maior se o processo for à pressão constante ou a volume constante?

**66E.** Um mol de oxigênio (diatômico) é aquecido à pressão constante, com o processo tendo início a  $0^\circ\text{C}$ . Quanto calor precisa ser adicionado para que o gás duplique o seu volume? (Suponha que as moléculas girem, mas não oscilem).

**67E.** Suponha que 12,0 g de oxigênio (diatômico) sejam aquecidos, à pressão atmosférica constante, de  $25,0$  a  $125^\circ\text{C}$ . (a) Quantos moles de oxigênio estão presentes? (Veja Tabela 21-1.) (b) Quanto calor é transferido para o oxigênio? (As moléculas giram, mas não oscilam.) (c) Que fração do calor é usada para aumentar a energia interna do oxigênio?

**68P.** Suponha que 4,00 moles de um gás ideal diatômico, cujas moléculas estejam em rotação sem oscilar, sofrem um aumento de temperatura de  $60,0 \text{ K}$  à pressão constante. (a) Quanto calor foi transferido para o gás? (b) Em quanto aumentou a energia interna do gás? (c) Quanto trabalho foi realizado pelo gás? (d) Qual foi o aumento na energia interna translacional das moléculas do gás?

**69P.** A massa molar do iodo é de  $127 \text{ g/mol}$ . Uma onda estacionária em um tubo cheio de gás de iodo a  $400 \text{ K}$  tem os seus nós  $6,77 \text{ cm}$  distantes um do outro, quando a frequência é  $1.000 \text{ Hz}$ . O gás de iodo é monoatômico ou diatômico?

### Seção 21-11 Expansão Adiabática de um Gás Ideal

**70E.** Uma certa massa de gás ocupa um volume de  $4,3 \text{ L}$  à pressão de  $1,2 \text{ atm}$  e temperatura  $310 \text{ K}$ . Ele é comprimido adiabaticamente até o volume de  $0,76 \text{ L}$ . Determine (a) a pressão final e (b) a temperatura final, supondo que o gás seja ideal, com  $\gamma = 1,4$ . (Sugestão: Não é necessário fazer conversão de unidades.)

**71E.** (a) Um litro de gás com  $\gamma = 1,3$  está a  $273 \text{ K}$  e  $1,00 \text{ atm}$ . O gás é subitamente (adiabaticamente) comprimido até a metade do seu volume inicial. Calcule suas temperatura e pressão finais. (b) O gás é então resfriado até  $273 \text{ K}$ , à pressão constante. Qual o seu volume final?

**72E.**  $n$  moles de um gás ideal se expandem adiabaticamente a partir de uma temperatura inicial  $T_1$  até uma final  $T_2$ . Prove que o trabalho realizado pelo gás é  $nC_v(T_1 - T_2)$ , onde  $C_v$  é o calor específico molar a volume constante (Sugestão: Use a primeira lei da termodinâmica.)

**73E.** Sabemos que  $pV^\gamma = \text{uma constante}$  para um processo adiabático. Faça uma estimativa do valor desta "constante" para um processo adiabático envolvendo exatamente  $2,0 \text{ mol}$  de um gás ideal que passa, du-

rante o processo, por um estado onde  $p = 1,0 \text{ atm}$  e  $T = 300 \text{ K}$ . Considere um gás diatômico cujas moléculas apresentem rotação, mas não oscilem.

**74E.** Para um processo adiabático em um gás ideal, mostre que (a) o módulo de elasticidade volumar (ou volumétrica) é dado por

$$B = -V \frac{dp}{dV} = \gamma p,$$

e (b) a velocidade do som é

$$v_s = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

Veja as Eqs. 18-2 e 18-3.

**75E.** O ar a  $0,000^\circ\text{C}$  e a  $1,00 \text{ atm}$  tem densidade de  $1,29 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3$  e, nestas condições, a velocidade do som é de  $331 \text{ m/s}$ . Calcule a razão  $\gamma$  entre os calores específicos molares para o ar. (Sugestão: veja o Exercício 74.)

**76E.** A velocidade do som em diferentes gases a uma certa temperatura depende da massa molar dos gases. Mostre que  $v_1/v_2 = \sqrt{M_2/M_1}$  ( $T$  constante), onde  $v_1$  e  $v_2$  são as velocidades do som nos gases com massas molares  $M_1$  e  $M_2$ , respectivamente. (Sugestão: Veja o Exercício 74.)

**77P.** Use o resultado do Exercício 73 para mostrar que a velocidade do som no ar, nas proximidades de  $0^\circ\text{C}$ , aumenta cerca de  $0,61 \text{ m/s}$  para cada elevação de  $1^\circ\text{C}$  na temperatura.

**78P.** A partir do conhecimento de que o calor específico molar a volume constante para um gás em um recipiente é  $5,0 R$ , calcule a razão entre a velocidade do som neste gás e a velocidade rms de suas moléculas à temperatura  $T$ . (Sugestão: Veja o Exercício 74.)

**79P.** (a) Um gás ideal, inicialmente à pressão  $p_0$ , passa por uma expansão livre (adiabática, sem a realização de trabalho externo) até que o seu volume final seja 3,00 vezes o seu volume inicial. Qual a pressão do gás, após a expansão livre? (b) O gás é então lenta e adiabaticamente comprimido de volta ao seu volume original. A pressão após a compressão é  $(3,00)^{1/\gamma} p_0$ . Determine se o gás é monoatômico, diatômico ou poliatômico. (c) Como se comparam a energia cinética média por molécula em seu estado final e a mesma energia em seu estado inicial?

**80P.** Um gás ideal sofre uma compressão adiabática de  $p = 1,0 \text{ atm}$ ,  $V = 1,0 \times 10^6 \text{ L}$ ,  $T = 0,0^\circ\text{C}$  para  $p = 1,0 \times 10^5 \text{ atm}$ ,  $V = 1,0 \times 10^3 \text{ L}$ . (a) Este gás é monoatômico, diatômico ou poliatômico? (b) Qual a sua temperatura final? (c) Quantos moles do gás estão presentes? (d) Qual a energia cinética translacional total por mole, antes e depois da compressão? (e) Qual a razão entre os quadrados das velocidades rms de suas moléculas, antes e depois da compressão?

**81P.** Uma certa quantidade de um gás ideal ocupa um volume inicial  $V_0$ , à pressão  $p_0$  e temperatura  $T_0$ . O gás se expande até o volume  $V_1$  (a) à pressão constante, (b) à temperatura constante e (c) adiabaticamente. Construa o gráfico  $p - V$  para cada caso. Em qual deles  $Q$  é maior? E menor? Em qual caso  $W$  é maior? E menor? Em qual caso  $\Delta E_{\text{int}}$  é maior? E menor?

**82P.**  $C_v$  para um certo gás ideal é  $6,00 \text{ cal/mol} \cdot \text{K}$ . A temperatura de  $3,0$  moles do gás é aumentada em  $50 \text{ K}$  em cada um dos três processos diferentes seguintes: a volume constante, à pressão constante e em uma compressão adiabática. Complete a tabela a seguir, mostrando para cada processo o calor absorvido (ou cedido), o trabalho realizado pelo gás, a variação na energia interna do gás e a variação na energia cinética translacional total do gás.

Processo	Calor Adicionado	Trabalho Realizado pelo Gás	Varição de Energia Interna	Varição de Energia Cinética
Volume constante	—	—	—	—
Pressão constante	—	—	—	—
Adiabático	—	—	—	—

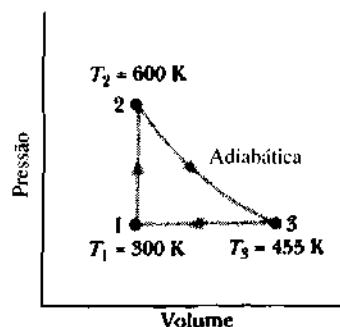


Fig. 21-21 Problema 83.

**83P.** Certa máquina térmica processa 1,00 mol de um gás ideal monoatômico através do ciclo mostrado na Fig. 21-21. O processo 1 → 2 acontece a volume constante, o 2 → 3 é adiabático e o 3 → 1 acontece à pressão constante. (a) Calcule o calor  $Q$ , a variação na energia interna  $\Delta E_{\text{int}}$  e o trabalho realizado  $W$ , para cada um dos três processos e para o ciclo como um todo. (b) Se a pressão inicial no ponto 1 for 1,00 atm, encontre a pressão e o volume nos pontos 2 e 3. Use  $1,00 \text{ atm} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$  e  $R = 8,314 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ .

**84P.** Em um motor de motocicleta, após ocorrer a combustão no topo do cilindro, o pistão é forçado para baixo (para o poço da manivela), à medida que a mistura dos produtos gasosos passa por uma expansão adiabática. Encontre a potência média envolvida nesta expansão, quando o motor está a 4.000 rpm, supondo que a pressão manométrica medida imediatamente após a combustão seja 15 atm, o volume inicial 50  $\text{cm}^3$  e o volume ao final da cilindrada 250  $\text{cm}^3$ . Suponha que os gases sejam diatômicos e que o tempo envolvido nesta expansão seja a metade do tempo total do ciclo. Expresse a sua resposta em watts e em HP.

**PROBLEMAS ADICIONAIS**

**85.** Uma amostra de um gás ideal passa pelo processo cíclico ilustrado no gráfico  $p - V$  da Fig. 21-22. A temperatura do gás no ponto  $a$  é 200 K. (a) Quantos moles do gás existem na amostra? Quais são (b) a temperatura do gás no ponto  $b$ , (c) a temperatura do gás no ponto  $c$  e (d) o calor total adicionado ao gás durante o ciclo?

**87.** Um mol de um gás ideal diatômico passa por uma transição do estado  $a$  para o  $c$ , através do caminho diagonal mostrado na Fig. 21-23. A temperatura do gás no ponto  $a$  é 1.200 K. Durante a transição, (a) qual a variação na energia interna do gás e (b) quanto calor é adicionado ao gás? (c) Quanto calor seria adicionado ao gás, se ele fosse de  $a$  até  $c$ , passando por  $b$ ?

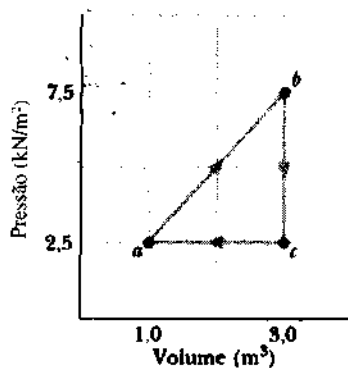


Fig. 21-22 Problema 85.

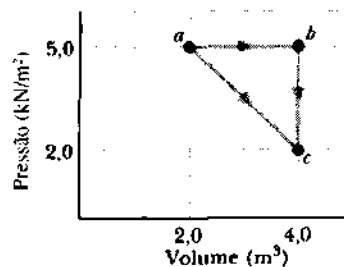


Fig. 21-23 Problema 87.

**86.** Um gás ideal, inicialmente a 300 K, é comprimido à pressão constante igual a 25  $\text{N/m}^2$ , de um volume de 3,0 metros cúbicos até um volume de 1,8 metros cúbicos. Durante o processo, o gás perde 75 J de calor. Quais serão (a) a variação de energia interna do gás e (b) a temperatura final do gás?

**88.** Uma amostra de gás ideal se expande de pressão e volume iniciais correspondentes a 32 atm e 1,0 L, respectivamente, para um volume final de 4,0 L. A temperatura inicial do gás era de 300 K. Quais serão a pressão e temperatura finais desse gás e quanto trabalho ele realizará durante a expansão, se esta for (a) isotérmica, (b) adiabática e o gás monoatômico, e (c) adiabática e o gás diatômico?

# As Emissões Industriais de CO<sub>2</sub> Estão Aquecendo Nosso Meio Ambiente?

BARBARA LEVI  
PHYSICS TODAY

Nos últimos anos, artigos sobre o "aquecimento global" têm aparecido constantemente nos jornais. Os cientistas têm nos advertido que o clima mundial pode ficar cada vez mais quente, se as atividades de nossa civilização continuarem a causar a emissão de dióxido de carbono e outros determinados gases na atmosfera. As possíveis conseqüências incluem a inundação de muitas cidades costeiras, a alteração drástica das características climáticas atuais e o desaparecimento de muitos produtos agrícolas e espécies de animais. Mas não há ainda uma evidência convincente de que o aquecimento global já tenha começado. Assim, a questão é se o nosso país e os outros deveriam tomar medidas imediatas para diminuir a produção de dióxido de carbono. Isto parece prudente, mas muitas das medidas neste sentido podem nos afetar de maneira direta. O dióxido de carbono que a civilização tem jogado na atmosfera vem da queima de combustíveis fósseis — petróleo, carvão e gás. Esses combustíveis alimentam nossos geradores de energia elétrica, movimentam nossos automóveis. Você gostaria de, um dia, ter de escolher entre seu automóvel ou seu clima?

Antes da existência de seres humanos, a atmosfera da Terra já continha algum dióxido de carbono e este, junto com o vapor d'água e alguns poucos gases da atmosfera, tem feito do nosso planeta um lugar mais confortavelmente quente do que seria sem a sua presença. Mas a nossa civilização está adicionando aproximadamente 22 bilhões de toneladas de dióxido de carbono à atmosfera a cada ano, e a maior parte deste gás irá permanecer ali por 50-200 anos. Como resultado, muitos cientistas concluíram que a Terra irá se tornar mais quente. Entretanto, eles não sabem em quanto irá subir o termômetro e nem com que rapidez. A temperatura global parece ter subido de 0,3 a 0,6°C nos últimos 100 anos, mas ninguém pode provar com certeza absoluta que o dióxido de carbono foi a causa.

O clima é um sistema tão complexo que fazer previsões confiáveis requer o uso de computadores altamente sofisticados. Todavia, é relativamente fácil entender o mecanismo básico pelo qual o dióxido de carbono esquenta nosso planeta atualmente. Neste texto complementar, tentaremos entender — através de um modelo simples — exatamente que fatores e equações determinam a temperatura da Terra como nós a conhecemos. Isto nos ajudará a compreender como um aumento de dióxido de

carbono na atmosfera poderia afetar essa temperatura.

A temperatura da Terra é em grande parte determinada pela radiação que ela recebe do Sol. Este, como todos os corpos quentes — uma lâmpada incandescente, por exemplo — irradia calor na forma de radiação eletromagnética. Para os nossos objetivos atuais, você precisa saber somente que esta radiação pode ser descrita por um modelo ondulatório e que as ondas carregam energia. A intensidade da radiação  $I$ , emitida por qualquer corpo, é fortemente dependente da temperatura deste corpo, de acordo com a relação conhecida como lei de Stefan-Boltzmann:

$$I = \epsilon \sigma T^4 \quad (1)$$

onde  $I$  é a potência (em watts) irradiada a partir da unidade de área de qualquer objeto à temperatura  $T(K)$ . Duas constantes aparecem nesta equação:  $\sigma$  é conhecida como constante de Stefan-Boltzmann ( $5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$ ) e  $\epsilon$  é a emissividade do corpo radiante, isto é, sua tendência a emitir radiação. Para um radiador perfeito,  $\epsilon = 1$ , e para outros corpos  $\epsilon < 1$ . Note que a potência irradiada depende muito fortemente da temperatura: um corpo com o dobro da temperatura irradia 16 vezes mais energia no mesmo intervalo de tempo.

## Problema 1

Use a lei de Stefan-Boltzmann para fazer uma estimativa da intensidade da radiação emitida pelo Sol, supondo que ele seja um radiador perfeito e que a temperatura em sua superfície seja 6.000 K. Calcule então a intensidade solar na superfície da Terra, lembrando que a energia solar estará distribuída sobre uma superfície esférica cujo raio é igual à distância média do Sol à Terra ( $1,495 \times 10^{11} \text{ m}$ ). O raio do Sol é de cerca de  $6,96 \times 10^8 \text{ m}$ .

A taxa com que a energia solar alcança a superfície da Terra por unidade de área é conhecida como constante solar  $S$  e seu valor medido é aproximadamente  $1,360 \text{ W/m}^2$ . (A resposta que você encontrou é relativamente maior do que este valor medido. Por quê?) Se esta energia fosse continuamente irradiada sobre nosso planeta, e a Terra não irradiasse nenhuma energia, ela ficaria cada vez mais quente. Para que a Terra (ou qualquer objeto) permaneça a uma temperatura constante de equilíbrio, a taxa com que ela absorve energia pre-

## LEITURA COMPLEMENTAR 7



Barbara Goss Levi é editora associada da *Physics Today*. Ela recebeu o B.A. do Carleton College (1965) e seu Ph.D. da Universidade de Stanford (1971), em física de partículas. Além de lecionar (em Georgia Tech e Rutgers) e escrever artigos de divulgação sobre física, ela trabalhou na Universidade de Princeton em problemas ligados à conservação de energia e ao controle de armamentos. É membro da American Physical Society e da Associação Americana para o Progresso da Ciência. Foi co-editora de *Global Warming: Physics and Facts*, publicado em 1992 pelo American Institute of Physics.

cisa ser perfeitamente balanceada pela taxa com que a energia é irradiada por ela. Este princípio de balanço energético determina a temperatura da Terra.

A constante solar nos informa qual a potência irradiada sobre cada unidade de área. Para calcular a potência interceptada pela Terra, devemos multiplicar a constante solar pela área da projeção bidimensional da superfície da Terra. Esta é um círculo, cuja área é  $\pi R_T^2$ . Esta potência irradiada pelo Sol não é totalmente absorvida pelo nosso planeta: medidas indicam que cerca de 30% da luz solar incidente é refletida de volta para o espaço. Esta refletividade é chamada de albedo  $\alpha$  e é expressa em termos da fração da luz solar (0,3 neste caso) que é refletida. Uma fração  $(1 - \alpha)$  é absorvida pela Terra.

A potência irradiada pela Terra é igual à intensidade, dada pela lei de Stefan-Boltzmann, multiplicada pela área da superfície da Terra,  $4\pi R_T^2$ . Para efetuar este cálculo, vamos supor que a emissividade da Terra seja 1. Igualando a potência oriunda do Sol à potência irradiada pela Terra, temos

$$\pi R_T^2 (1 - \alpha) S = 4\pi R_T^2 \sigma T_E^4 \quad (2)$$

ou

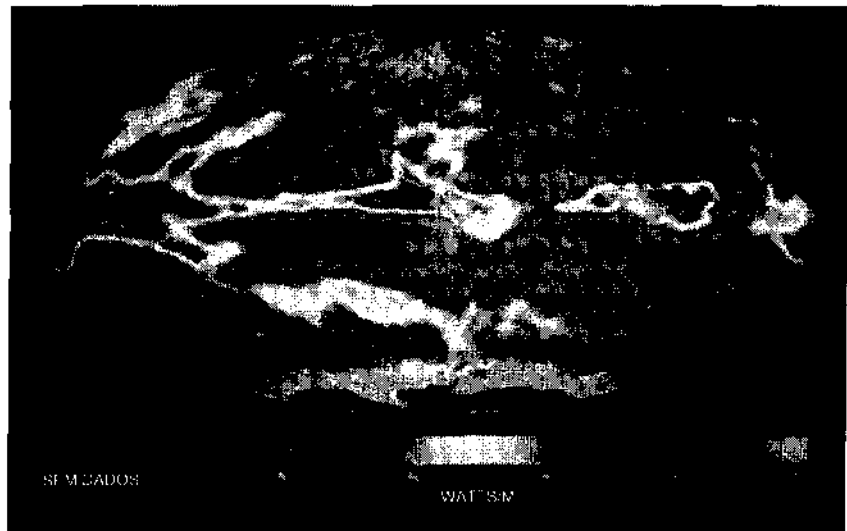
$$(1 - \alpha)S/4\sigma = T_E^4 \quad (3)$$

Explicitando  $T_T$ , temos

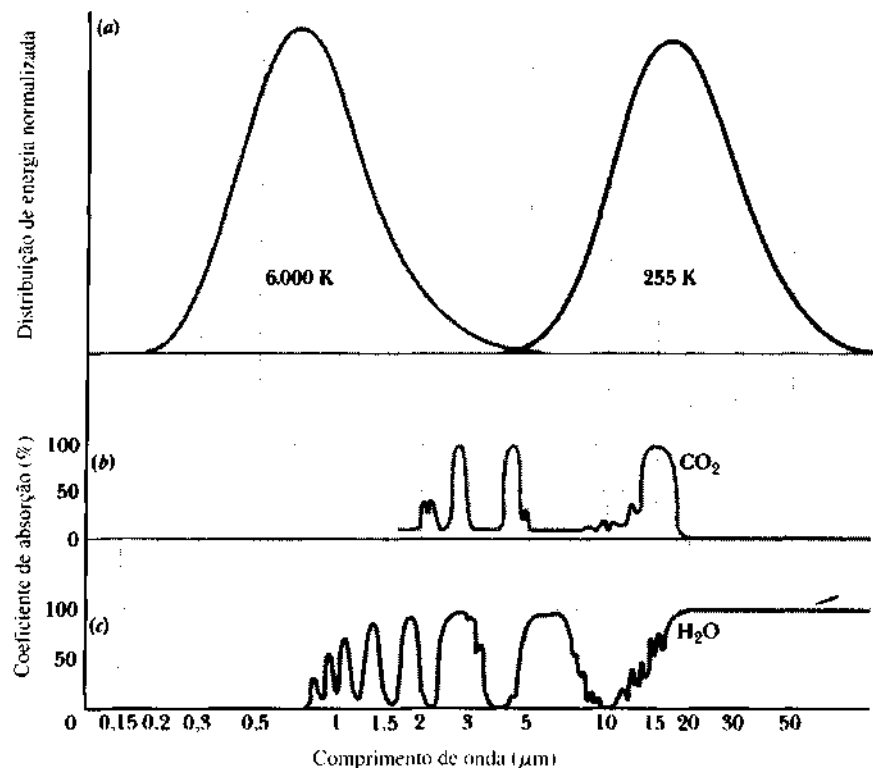
$$T_T = [(1 - \alpha)S/4\sigma]^{1/4} = 255 \text{ K } (-18^\circ\text{C}). \quad (4)$$

Esta temperatura é bastante próxima àquela medida por satélites no limite superior da atmosfera. Parece bastante baixa! Mas lembre-se que neste cálculo ignoramos o efeito dos gases atmosféricos que envolvem a Terra. A verdadeira temperatura média global na superfície do planeta é muito mais confortável,  $T_{ST} = 288 \text{ K } (15^\circ\text{C})$ , ou  $33^\circ\text{C}$  mais alta. A superfície da Terra é mantida nesta temperatura, que proporciona condições mais habitáveis, pelas camadas de gases e partículas na atmosfera (Fig. 1).

Na verdade, somente alguns dos gases atmosféricos ajudam a manter a superfície da Terra mais quente. Esses gases, que são chamados "gases de estufa", têm duas propriedades fundamentais: transmitem radiação com grande facilidade nos comprimentos de onda mais curtos, característicos da radiação solar, mas absorvem com a mesma facilidade a radiação nos comprimentos de onda mais longos, típicos da radiação emitida pela Terra. (Esta radiação emitida pela Terra — ou por qualquer outro corpo à temperatura ambiente — é chamada de "energia térmica".) As curvas na Fig. 2a mostram como a intensidade da radiação emitida por um radiador perfeito varia com o comprimento de onda. A curva da esquerda corresponde a um corpo (como o Sol) à temperatura de 6.000 K, e a curva da direita, a um corpo a 255 K (como a Terra). As curvas nas Figs. 2b e 2c mostram os comprimentos de onda em que os "gases de estufa"



**Fig. 1** Dados obtidos por satélites para estudar o clima da Terra. A gradação de tons (correspondentes às cores do espectro) mostra quanta radiação de comprimento de onda longo é aprisionada pelas nuvens — um efeito que tende a aquecer a Terra. Note as intensidades bem altas sobre o Oceano Índico, onde existe a formação de cirrus (um tipo de nuvem) espessos. As nuvens também refletem radiação, tendendo a esfriar a Terra. Na atmosfera normal, o efeito resultante das nuvens é esfriar o clima.

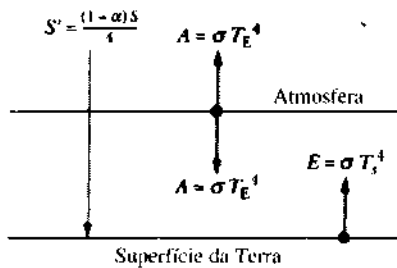


**Fig. 2** (a) As curvas superiores (a) mostram a intensidade da radiação emitida em cada comprimento de onda para radiadores perfeitos a 6.000 K (à esquerda) e 255 K (à direita). A curva da esquerda representa aproximadamente a radiação solar incidente e a curva da direita, a radiação emitida pela Terra. (b,c) Os picos nestas curvas mostram os comprimentos de onda para os quais as moléculas de água e de óxido de carbono na atmosfera absorvem fortemente a radiação. Note que esses gases absorvem mais a radiação proveniente da Terra que a radiação solar. Adaptado de J. P. Pleixoto e H. O. Oort, *Physics of Climate*, American Institute of Physics, 1992, Fig. 6.2.

mais importantes — dióxido de carbono e vapor d'água — absorvem esta radiação. Embora estes dois gases absorvam radiação em vários dos comprimentos de onda emitidos pela Terra, somente o vapor d'água absorve, de modo considerável a radiação vinda do Sol. Assim, a maior parte da radiação vinda do Sol atravessa a atmosfera terrestre, mas a radiação vinda da Terra é, em grande parte, absorvida pela sua atmosfera.

Para termos uma noção intuitiva de como esses gases afetam a temperatura, vamos imaginar que a Terra inicialmente não tinha as camadas de "gases de estufa" em sua atmosfera: assim, a temperatura de sua superfície seria 255 K, como calculamos antes. Suponha agora que alguns dos "gases de estufa" sejam subitamente adicionados à atmosfera. Inicialmente, a superfície da Terra irá ainda irradiar a quantidade de energia correspondente à sua temperatura, de acordo com a lei de Stefan-Boltzmann: esta quantidade irá contrabalançar a energia vinda do Sol. Mas agora os "gases de estufa" irão absorver uma quantidade significativa desta energia. Eles irão reirradiar esta energia, sendo uma parte enviada de volta à superfície da Terra, que vai então receber mais energia que emitir, logo, sua temperatura aumentará. À medida que a superfície esquentar, emitirá mais radiação térmica. Este processo continuará até que seja atingido o equilíbrio térmico.

Podemos calcular a temperatura em que a Terra terá atingido este equilíbrio, utilizando um modelo simples. Veja a Fig. 3. O modelo tem duas camadas bidimensionais: a atmosfera e a superfície da Terra. Simplificando, podemos supor que a radiação solar  $S'$  passa sem alteração pelos "gases de estufa" até a superfície da Terra, mas a radiação térmica emitida pela Terra, que chamaremos de  $T$ , é completamente absorvida pelos mesmos gases. Estes, após a absorção, reirradia esta energia



**Fig. 3** Um modelo simples para o balanço de radiação da Terra relacionando a radiação incidente vinda do Sol  $S'$  com a radiação emitida pela superfície da Terra  $E$  e a radiação emitida pela atmosfera  $A$ . No topo da atmosfera, a radiação emitida  $A$  deve ser igual à radiação incidente  $S'$ . De modo semelhante, na superfície da Terra,  $E$  deve ser igual a  $S' + A$ .

uniformemente em todas as direções, como mostram as setas  $A$ . Você pode observar, a partir da figura, que o efeito resultante é que a superfície da Terra recebe não somente a radiação vinda do Sol, mas também aquela reirradiada pela atmosfera.

Na Fig. 3, a radiação solar recebida é representada por  $S'$ , e seu valor é exatamente a energia solar não refletida  $(1 - \alpha)S$  dividida por 4. (O fator 4 vem do fato de que a radiação emitida pela Terra é proporcional à área total de sua superfície, enquanto a radiação que ela recebe é proporcional à sua área projetada; a razão entre estas duas áreas é 4.)

A conservação da energia impõe que seu fluxo seja equilibrado nas duas superfícies. Assim, temos as duas equações:

topo da atmosfera:  $S' = A;$  (5)

superfície da Terra:  $S' + A = T.$  (6)

Se substituirmos o valor de  $A$  dado pela Eq. 3 na Eq. 6 e lembrarmos que a potência irradiada pela Terra pode ser escrita em termos da lei de Stefan-Boltzmann, teremos

$$E = 2S'$$

ou

$$T_s^4 = 2(1 - \alpha)S/4\sigma \quad (7)$$

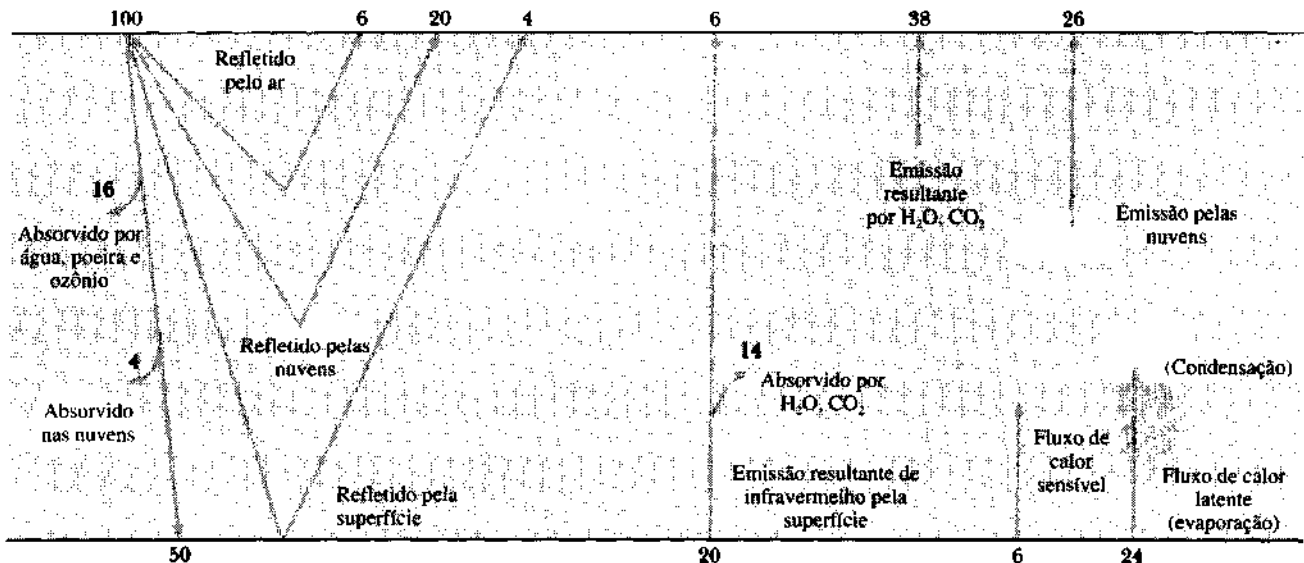
$$T_s = 303 \text{ K } (30^\circ\text{C}). \quad (8)$$

A resposta encontrada é maior do que a temperatura média observada na superfície, 15°C, mas ignoramos alguns efeitos muito importantes quando construímos nosso modelo simplificado. Você pode imaginar alguns deles? Para dar um exemplo, lembramos que os gases de estufa absorvem um pouco da radiação solar e refletem um pouco de radiação de volta à Terra.

**Problema 2**

No modelo de duas superfícies, considere o caso em que a atmosfera absorve uma fração  $a < 1$  da radiação emitida pela Terra. Neste caso, a energia irradiada para o espaço, a partir do topo da atmosfera, irá incluir uma parte desta radiação, que não foi absorvida pela atmosfera. Que valor deverá ter o coeficiente de absorção da atmosfera para que a temperatura da superfície tenha o valor observado, 288 K?

Outro efeito ignorado em nosso modelo simplificado é a energia transportada para fora da superfície por evaporação, assim como pela irradiação. Um terceiro efeito vem do fato de que, a uma certa temperatura, a atmosfera não é constituída de uma única camada, sendo na realidade estratificada, com a temperatura di-



**Fig. 4** Os fluxos de energia na atmosfera são mais complexos do que sugere o modelo simples. Os números representam os fluxos de energia expressos como porcentagem da radiação incidente, a que foi atribuída arbitrariamente o valor 100. Adaptado de J. P. Pleixoto e H. O. Oort, *Physics of Climate*, American Institute of Physics, 1992, Fig. 6-3.

minuindo com a altitude, até cerca de 10 km. Há ainda um quarto fator que foi excluído, a convecção: à medida que o ar próximo à superfície da Terra é aquecido, ele sobe, carregando calor para as camadas superiores. Além disso, um modelo realístico teria de considerar as variações de intensidade solar com a latitude, as correntes de convecção subseqüentes causadas pelas diferenças de temperatura entre o equador e os pólos, a topologia da superfície terrestre, os efeitos das nuvens e as interações entre os oceanos, atmosfera, terra e massas de gelo. (A Fig. 4 mostra um diagrama mais realista do fluxo de energia para o sistema atmosfera-Terra.)

### Problema 3

*Na década de 80, um grupo de cientistas alertou que uma guerra nuclear poderia dar início a um "inverno nuclear", um período de clima extremamente frio. Isto poderia acontecer, se a fuligem originária das explosões nucleares tornasse a atmosfera bem mais opaca à luz do Sol do que atualmente. Adicione uma terceira superfície — fuligem — abaixo da atmosfera no modelo simplificado. Suponha que a fuligem absorva toda a luz do Sol e deixe passar toda a radiação térmica vinda da Terra e de sua atmosfera. Calcule a temperatura da superfície do nosso planeta. (A questão de quão severo pode ser um "inverno nuclear" ainda é polêmica e necessita de um tratamento muito mais sofisticado que o nosso modelo simples.)*

O dióxido de carbono emitido por atividades humanas já aumentou a sua concentração na atmosfera em 25%, para 350 partes por milhão, em termos de volume. Se continuarmos a produzir esse gás e outros "gases de estufa" nas taxas atuais, a concentração poderá atingir um nível, nos próximos 50 anos, que será o dobro da concentração antes da era industrial. Os modelos de clima em computador, agora desenvolvidos, calculam que esta duplicação dos níveis de dióxido de carbono irá aumentar a temperatura da Terra entre 1,5 e 4,5°C. O aumento pode ser maior em algumas partes do globo do que em outras e pode vir acompanhado por outros efeitos climáticos, como alterações na frequência das chuvas ou aumento na incidência de furacões, assim como aumento do nível dos mares. Ninguém sabe se a rapidez nas mudanças do clima poderá superar a habilidade dos ecossistemas naturais e das instituições humanas para se adaptarem. E, além disso, grandes esforços para diminuir a emissão de CO<sub>2</sub> podem ter um custo financeiro extremamente alto. Todavia, muitos grupos de cientistas têm clamado por providências para restringir emissões de dióxido de carbono e outros gases, como os clorofluorcarbonos (que também causam problemas para a camada de ozônio), metano e óxidos nitrosos. Se suas recomendações forem seguidas, você pode não ter de deixar de dirigir seu carro, mas certamente terá de comprar um que faça muitos quilômetros a mais por litro — ou utilizar como combustível algo que não seja um combustível fóssil!

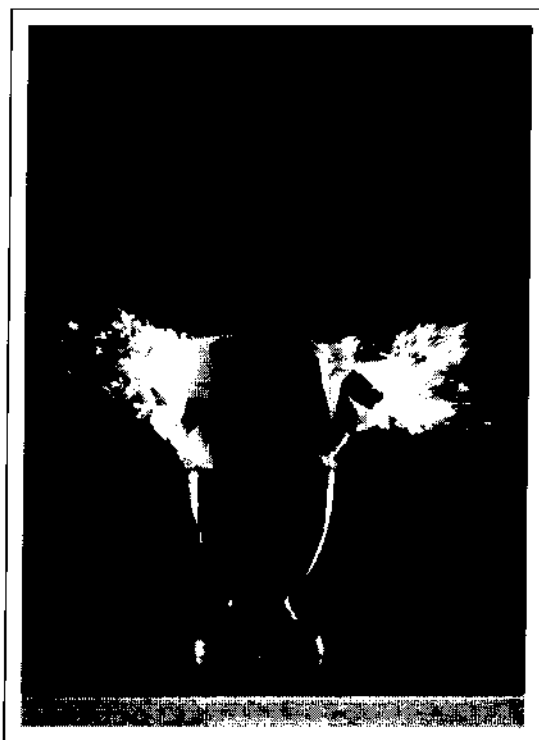
### Respostas

1.  $7,35 \times 10^7 \text{ W/m}^2$ ;  $1,590 \text{ W/m}^2$   
(20% maior do que o valor medido).
2.  $2 = 25/\sigma T_e^4 = 0,78$ .
3.  $[(1 - \alpha) S/8\sigma]^{1/4} = 214 \text{ K}$ .

\*As considerações expostas acima por Barbara Levi desprezam totalmente aspectos muito importantes dos efeitos causados pela emissão de poluentes na atmosfera terrestre. O mais importante para o cotidiano do habitante das cidades é a degradação da qualidade do ar que ele respira e que causa sérios problemas à saúde da população. Em muitas cidades em todo o mundo, São Paulo inclusive, às vezes se adota um rodízio, pelo algarismo final da placa, para diminuir o número de carros nas ruas. São feitos também grandes esforços para diminuir a emissão de gases tóxicos pelas indústrias. Além disso, o problema da camada de ozônio, tocado de passagem pela autora, é extremamente sério; nas regiões da Argentina e do Chile, mais próximas da Antártida, o número de casos de câncer de pele aumentou consideravelmente nos últimos anos. Como se sabe, a radiação ultravioleta — que atinge o solo com grande intensidade, caso não haja ozônio na parte superior da atmosfera para absorvê-la — provoca câncer de pele, além de causar a destruição de várias espécies vegetais. O "buraco" na camada de ozônio sobre a Antártida vem aumentando a uma taxa alarmante nos últimos anos. Além disso, os dados que a autora cita ao falar do "efeito estufa" estão bastante ultrapassados. Simulações e medidas mais recentes indicam que os efeitos térmicos da emissão continuada de dióxido de carbono nas taxas atuais serão aqueles para os quais os cientistas já nos alertaram anteriormente. (N. do T.)

# ENTROPIA E A SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA

# 22



*Um grafite anônimo numa parede do Pecan Street Cafe em Austin, Texas, dizia: "Tempo foi a maneira que Deus encontrou de evitar que todas as coisas acontecessem de uma só vez." O tempo também tem direção — algumas coisas acontecem numa certa seqüência e nunca poderiam acontecer espontaneamente na seqüência inversa. Como exemplo, imagine um ovo que cai acidentalmente sobre uma xícara, fragmentando-se. O processo inverso, isto é, os fragmentos se reunindo para formar um ovo inteiro, que saltaria para a mão de uma pessoa, nunca acontece espontaneamente. Mas, por que não? Por que este processo não pode ser revertido, como se estivéssemos passando uma fita em sentido contrário? O que, no Universo, dá direção ao tempo?*

## 22-1 Algumas Coisas que Não Acontecem

Uma moeda deixada sobre uma mesa simplesmente nunca — sem interferência externa — irá flutuar no ar, se tornar tão quente que não possa ser tocada ou inchar até que se torne do tamanho de um pires. O fato dessas ocorrências serem impossíveis não nos surpreende e podemos justificar isso dizendo: "É preciso gastar *energia* para elevar a moeda, aquecê-la ou fazê-la inchar. Caso contrário, estaríamos violando o princípio de conservação da energia."

Aqui estão mais três coisas que nunca acontecem, mas a diferença é que não se pode explicar por que isto não ocorre de maneira tão simples. (1) Café, repousando normalmente em uma xícara, nunca se esfria de modo espontâneo e nem começa a circular. (2) Uma extremidade de uma colher colocada em uma mesa nunca se torna quente, de maneira natural, enquanto a outra se esfria. (3) As moléculas de ar numa sala nunca se movem todas para um

canto da sala e permanecem ali. Ao contrário do exemplo da moeda, *estes* acontecimentos impossíveis não consomem energia. Presume-se que o café poderia obter a energia cinética, para a circulação, esfriando-se. A extremidade quente de uma colher poderia provavelmente obter energia da extremidade fria. E as moléculas de ar não estariam modificando suas energias cinéticas, apenas suas posições.

Observe um fato, entretanto. Os processos *inversos* desses três eventos impossíveis ocorrem de forma natural e espontânea. O café, circulando em sua xícara, acabará por parar de circular e sua energia rotacional, transformada em energia térmica, irá esquentá-lo levemente. Diferenças de temperatura entre as duas extremidades de uma colher tendem a equalizar-se. Moléculas de ar irão espalhar-se, a partir de um canto, e ocuparão uniformemente o espaço da sala.

O mundo é cheio de eventos que acontecem em uma direção mas nunca na oposta. Estamos tão acostumados



com isso que os achamos “óbvios”, quando acontecem na direção “certa”, mas ficaríamos totalmente desorientados se acontecessem no outro sentido.

A direção na qual ocorrências naturais acontecem é regida pela **segunda lei da termodinâmica**, o assunto deste capítulo. A segunda lei pode ser expressa em muitas formas equivalentes, duas delas envolvendo afirmações simples sobre trabalho e calor. Iremos explorar estas formas nas próximas seções e, então, considerar uma terceira formulação da lei em termos de um novo e útil conceito — *entropia*.

## 22-2 Máquinas

Se você mexer café numa xícara à temperatura ambiente, seu trabalho sobre a colher resultará na transferência de energia para o café. Este possui, então, energia cinética — ele circula. À medida que pára de circular, o excesso de energia se torna energia interna (ou térmica) do café. Como a temperatura dele fica (levemente) maior do que a da sala, ele transfere o excesso de energia para esta, na forma de calor. Neste processo, você transformou *trabalho em calor* de maneira simples e completa.

O processo inverso — transformação de *calor em trabalho* — é bem mais complexo. Aqui está, como um desafio, uma formulação da segunda lei da termodinâmica:

**SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA (PRIMEIRA FORMA):** Não é possível transformar calor completamente em trabalho, com nenhuma outra mudança ocorrendo no ambiente.

Recompensas, além de seus maiores sonhos, o esperam se puder construir um dispositivo que viole essa lei. Embora nunca tenhamos conseguido fazê-lo antes, vamos dar-lhe mais uma chance.

A Fig. 22-1a mostra um cilindro contendo um gás ideal e colocado sobre um reservatório de calor à temperatura  $T$ . Removendo gradualmente o peso (esferas metálicas) do pistão, podemos permitir ao gás se expandir. Este permanece a temperatura constante enquanto se expande, absorvendo calor  $Q$  do reservatório. O sistema (o gás) segue o processo isotérmico mostrado na Fig. 22-1b e — ao levantar o pistão — realiza trabalho  $W$ , como indicado pela área sombreada na figura. A energia interna  $E_{int}$  — que, para um gás ideal, depende somente da temperatura — não muda durante a expansão isotérmica. Da primeira lei da termodinâmica,  $E_{int} = Q - W$ , e o trabalho  $W$  é assim exatamente igual ao calor  $Q$  extraído do reservatório. Transformamos calor completamente em trabalho?

De fato, o fizemos, mas não cumprimos o requisito essencial “com nenhuma outra mudança ocorrendo”. Ocorreram mudanças; o gás no cilindro não está do mesmo estado que estava antes do processo. Seu volume mudou, por exemplo, e também sua pressão. Para vencer nosso desafio, de algum modo temos de fazer o gás voltar à sua con-

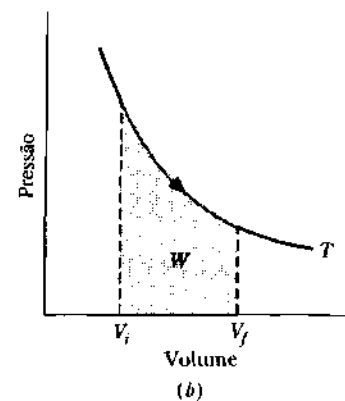
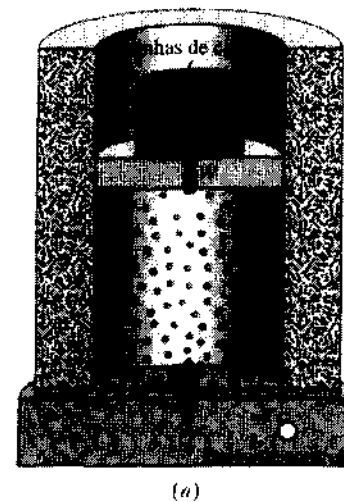


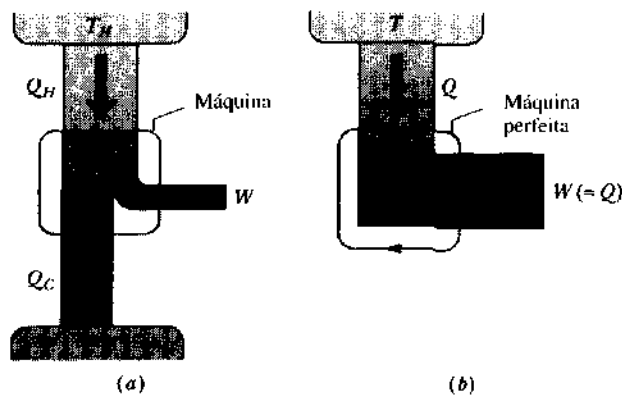
Fig. 22-1 (a) Um gás ideal expande isotermicamente, absorvendo calor  $Q$  e realizando trabalho  $W$ . (b) O gás segue uma isoterma num diagrama  $p - V$ . Embora todo o calor seja transformado em trabalho, não há violação da segunda lei da termodinâmica, porque outras mudanças ocorreram. O sistema não retorna ao seu estado original no final do processo.

dição inicial. Isto significa que o sistema pistão-cilindro precisa operar em um ciclo, com o gás retornando ao seu estado inicial no fim do ciclo. Um dispositivo que transforma calor em trabalho, enquanto opera em um ciclo, é chamado de **máquina térmica** ou, mais simplesmente, **máquina** ou ainda motor.

A Fig. 22-2a sugere um esquema generalizado da operação de uma máquina. Durante cada ciclo, energia é extraída como calor  $Q_H$  de um reservatório à temperatura  $T_H$  (fonte quente), uma parte sendo transformada em trabalho útil  $W$  e o resto sendo descarregado (perdido) como calor  $Q_C$  para um reservatório à temperatura baixa  $T_C$  (fonte fria).

Como a máquina opera em um ciclo, a energia interna  $E_{int}$  do sistema, isto é, do gás no cilindro, retorna ao seu valor original ao fim do ciclo. Assim,  $\Delta E_{int} = 0$  e, da primeira lei da termodinâmica ( $\Delta E_{int} = Q - W$ ), o trabalho resultante feito por ciclo pelo sistema precisa ser igual ao calor resultante transferido por ciclo. Escrevemos isso como

$$|W| = |Q_H| - |Q_C|, \quad (22-1)$$



**Fig. 22-2** Indicamos uma máquina (ou motor) envolvendo-a com setas no sentido horário. (a) Em uma máquina real, o calor extraído de um reservatório (fonte quente) é convertido parcialmente em trabalho, com o calor restante sendo rejeitado em outro reservatório à temperatura mais baixa (fonte fria). (b) Em uma máquina perfeita, todo o calor extraído da fonte quente é transformado em trabalho. Ninguém jamais conseguiu construir tal máquina.

Optamos aqui por trabalhar com os valores (positivos) absolutos de  $Q$  e  $W$ , que escrevemos como  $|Q|$  e  $|W|$ , respectivamente. Assim, para  $Q = +10 \text{ J}$  e  $Q = -10 \text{ J}$ , temos  $|Q| = 10 \text{ J}$  e da mesma maneira para o trabalho. Sempre precisamos ser claros sobre se o calor está sendo adicionado ao sistema ( $Q$  é positivo) ou retirado ( $Q$  é negativo) e se o trabalho feito pelo sistema foi negativo ou positivo. (E nas últimas seções deste capítulo, quando discutimos o trabalho feito sobre um sistema, precisamos lembrar que tal trabalho é sempre o negativo do trabalho feito por aquele sistema.)

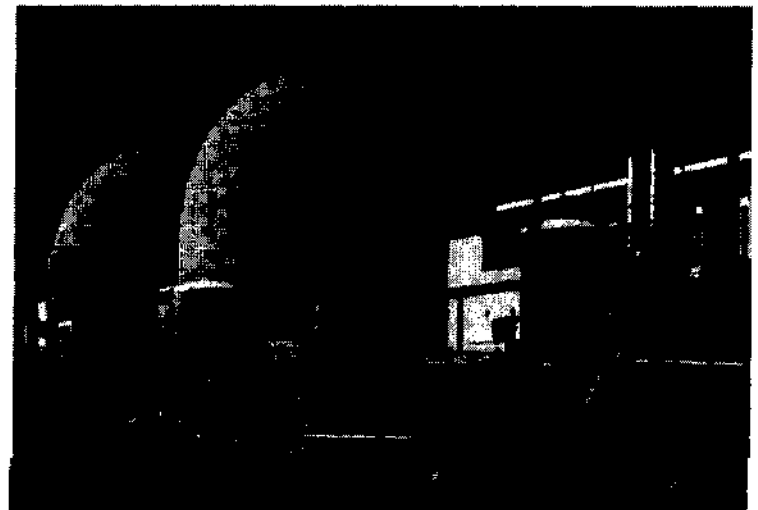
O objetivo da máquina é transformar, tanto quanto possível, calor extraído  $Q_H$  em trabalho. O sucesso é medido pela sua **eficiência térmica**  $e$ , definida como a razão entre o trabalho que ela realiza por ciclo — o que você extrai — e o calor que absorve por ciclo — que você fornece. Usando a Eq. 22-1, temos

$$e = \frac{|W|}{|Q_H|} = \frac{|Q_H| - |Q_C|}{|Q_H|} \quad (22-2)$$

A Eq. 22-2 mostra que a eficiência da máquina pode ser unitária ou 100%, somente se  $Q_C = 0$ , isto é, se nenhum calor for transferido para o reservatório à baixa temperatura. A Fig. 22-2b é um esquema dessa máquina “perfeita”. A partir de experiências acumuladas, os físicos concluíram que é impossível construir tal máquina — o que nunca fez os esperançosos inventores pararem de tentar. Assim, uma outra maneira de expressar a segunda lei da termodinâmica (primeira forma) é: *não existem máquinas térmicas perfeitas.*

### Máquinas Reais

Precisamos ser claros sobre a relação entre a máquina esquemática da Fig. 22-2a e as máquinas do mundo real.



**Fig. 22-3** A usina nuclear North Anna, próximo a Charlottesville, Virgínia, EUA gera energia elétrica a uma taxa de 900 MW. Ao mesmo tempo, de maneira deliberada, ela descarrega energia no rio próximo, à taxa de cerca de 2.100 MW. Esta usina — e outras, nucleares ou não — desperdiça mais energia do que entrega de forma capaz a ser utilizada pela rede elétrica. É um exemplo realístico da máquina ilustrada na Fig. 22-2a.

Considere, por exemplo, a usina nuclear mostrada na Fig. 22-3. O reservatório de alta temperatura, marcado como  $T_H$  na Fig. 22-2a, é a câmara do reator nuclear, da qual o calor é removido e levado ao gerador de vapor pela água circulante. O reservatório de baixa temperatura, marcado como  $T_C$  na Fig. 22-2a, é o condensador de vapor, que é resfriado pela água do rio bombeada através dele. A *substância de trabalho*, que corresponde ao gás ideal no cilindro da Fig. 22-1a, é a água que absorve calor e se torna vapor no gerador de vapor, passa pela turbina — realizando trabalho sobre ela — e pelo condensador para perder calor e se tornar novamente água, na sua condição original. Não confunda a *substância de trabalho* com o *combustível*. O objetivo deste último, que podem ser pastilhas de urânio, carvão ou óleo, é manter a temperatura do reservatório de alta temperatura (fonte quente) em uma máquina real.

A conexão entre o motor em seu carro e a máquina esquemática da Fig. 22-2a é complicada pelo fato de que o motor de seu carro é uma máquina de combustão interna. O reservatório de alta temperatura é fornecido — dentro dos cilindros — pela queima da mistura ar-combustível. O reservatório de baixa temperatura é o ar externo no qual os gases de exaustão são expelidos. O combustível é a gasolina, e a substância de trabalho é a mistura de ar e combustível queimado. Uma máquina de combustão interna bem mais poderosa é mostrada na Fig. 22-4.

**EXEMPLO 22-1** A Fig. 22-5 é um gráfico  $p - V$  para uma versão idealizada de um pequeno motor Stirling, cujo nome vem do Reverendo Robert Stirling, da Igreja da Escócia, que propôs o esquema em 1816.



**Fig. 22-4** Este motor RD-170, construído em 1980, é o motor para foguetes mais potente do mundo. É capaz de produzir 190 MW.

A máquina usa  $n = 8,1 \times 10^{-3}$  moles de um gás ideal, operando entre reservatórios de alta e baixa temperaturas com  $T_H = 95^\circ\text{C}$  e  $T_C = 24^\circ\text{C}$ , e funcionando à taxa de 0,70 ciclos por segundo. Um ciclo consiste em uma expansão isotérmica ( $ab$ ), uma compressão isotérmica ( $cd$ ) e dois processos de volume constante ( $bc$  e  $da$ ).

a. Qual o trabalho resultante da máquina, por ciclo?

**Solução** Para encontrar o trabalho resultante  $W$  realizado pela máquina em um ciclo, precisamos primeiro encontrar o trabalho realizado pelo gás da máquina durante cada um dos quatro processos. Da Eq. 21-8, o trabalho  $W_{ab}$  realizado durante a expansão isotérmica  $ab$  do volume  $V_a$  para o  $1,5V_a$  (à temperatura  $T_H$ ) é

$$W_{ab} = nRT_H \ln \frac{1,5V_a}{V_a} = nRT_H \ln 1,5. \quad (22-3)$$

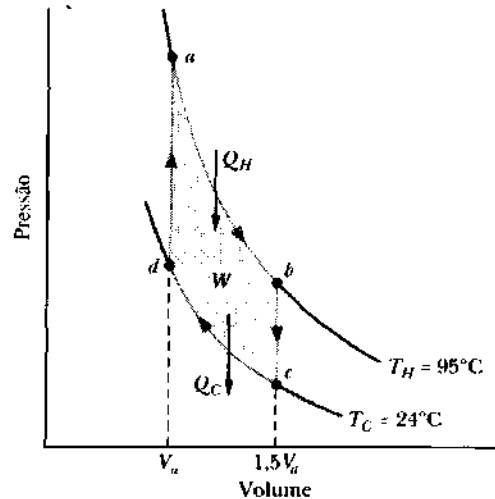
De modo semelhante, o trabalho  $W_{cd}$  realizado durante a compressão isotérmica  $cd$  do volume  $1,5V_a$  para o  $V_a$  (à temperatura  $T_C$ ) é

$$W_{cd} = nRT_C \ln \frac{V_a}{1,5V_a} = -nRT_C \ln 1,5.$$

onde usamos o fato de que  $\ln(1/A) = -\ln A$ . Durante os processos de volume constante  $bc$  e  $da$  sabemos, do Cap. 21, que nenhum trabalho é realizado; isto é,  $W_{bc} = W_{da} = 0$ .

Assim, o trabalho resultante  $W$  realizado pela máquina durante um ciclo é

$$\begin{aligned} W &= W_{ab} + W_{bc} + W_{cd} + W_{da} \\ &= nRT_H \ln 1,5 + 0 - nRT_C \ln 1,5 + 0 \\ &= nR \ln 1,5(T_H - T_C). \end{aligned} \quad (22-4)$$



**Fig. 22-5** Exemplo 22-1. Um diagrama  $p - V$  para um idealizado motor Stirling que utiliza um gás ideal. O trabalho resultante feito pelo sistema durante o ciclo é representado pela região sombreada.  $Q_H$  representa o calor adicionado ao sistema durante a expansão isotérmica  $ab$ .  $Q_C$  representa o calor perdido pelo sistema durante a contração isotérmica  $cd$ . (Durante o processo a volume constante  $bc$ , energia térmica é armazenada em uma parte do motor, em geral uma rede metálica. A mesma quantidade de energia é retirada da rede durante o processo a volume constante  $da$ .) O motor percorre o ciclo no sentido horário (como na Fig. 22-2a).

Inserindo os dados conhecidos, temos então

$$\begin{aligned} W &= (8,1 \times 10^{-3} \text{ mol})(8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}) \\ &\quad \times (\ln 1,5)(95^\circ\text{C} - 24^\circ\text{C}) \\ &= 1,937 \text{ J} \approx 1,9 \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

b. Qual a potência da máquina?

**Solução** Do Cap. 7, sabemos que a potência  $P$  é dada por  $P = W/t$ . Aqui,  $W$  é o trabalho por ciclo e  $t$  é o tempo de um ciclo. Como a máquina funciona à taxa de  $0,70 \text{ s}^{-1}$ , um ciclo leva  $1/0,70 \text{ s}^{-1}$  ou 1,429 s, assim,

$$P = \frac{W}{t} = \frac{1,937 \text{ J}}{1,429 \text{ s}} \approx 1,4 \text{ W}. \quad (\text{Resposta})$$

c. Qual o calor resultante transferido para o gás durante o ciclo?

**Solução** Como o gás retorna ao seu estado original ao fim de cada ciclo, a mudança resultante  $\Delta E_{\text{int}}$  em sua energia interna, durante um ciclo, é zero. Da primeira lei da termodinâmica, podemos então escrever

$$\Delta E_{\text{int}} = Q - W,$$

o que, com  $W = 1,937 \text{ J}$  e  $\Delta E_{\text{int}} = 0$ , nos dá

$$Q = W = 1,937 \text{ J} \approx 1,9 \text{ J}. \quad (\text{Resposta})$$

d. Qual a eficiência  $e$  da máquina?

**Solução** Para utilizarmos a Eq. 22-2 ( $e = W/Q_H$ ), temos de encontrar o calor transferido  $Q_H$  do reservatório de alta temperatura para o gás da máquina, durante a expansão isotérmica  $ab$ . Lembre-se que em um processo isotérmico a transferência de calor é igual ao trabalho realizado pelo sistema (veja Tabela 21-5). Usando a Eq. 22-3, escrevemos

$$Q_H = W_{ab} = nRT_H \ln 1,5,$$

e então, com a Eq. 22-4, podemos usar a Eq. 22-2 para escrever

$$e = \frac{|W|}{|Q_H|} = \frac{nR(T_H - T_C) \ln 1,5}{nRT_H \ln 1,5} = \frac{T_H - T_C}{T_H} \quad (22-5)$$

Note que esta resposta é independente do valor de  $n$  e dos valores reais da pressão e do volume do gás durante o processo.

Agora, precisamos ser cuidadosos: embora a *diferença de temperatura*  $T_H - T_C$  no numerador possa ser expressa em graus Celsius ou kelvins, a *temperatura*  $T_H$  no denominador precisa ser expressa em kelvins — isto é, 368 K. Tomando esta precaução, temos

$$e = \frac{(95^\circ\text{C} - 24^\circ\text{C})}{368 \text{ K}} = 0,1929 \approx 19\%.$$

Embora essa máquina seja razoavelmente eficiente, sua potência é muito baixa. Máquinas Stirling mais sofisticadas têm sido testadas como alternativas aos motores de carro convencionais.

**EXEMPLO 22-2** Um motor de automóvel, cuja eficiência térmica  $e$  é 22%, opera a 95,0 ciclos por segundo e realiza trabalho à taxa de 120 hp.

a. Quanto trabalho (em joules) a máquina realiza por ciclo?

**Solução** O trabalho por ciclo é

$$W = \frac{(120 \text{ hp})(746 \text{ W/hp})(1 \text{ J/W}\cdot\text{s})}{95,0 \text{ s}^{-1}} = 942 \text{ J.} \quad (\text{Resposta})$$

Não confunda os símbolos  $W$  para trabalho e  $W$  para watt, uma unidade de potência.

b. Quanto calor a máquina absorve (extrai do reservatório) por ciclo?

**Solução** Da Eq. 22-2, temos

$$Q_H = \frac{W}{e} = \frac{942 \text{ J}}{0,220} = 4.282 \text{ J.} \quad (\text{Resposta})$$

c. Quanto calor é descartado pela máquina por ciclo e perdido para o reservatório de baixa temperatura?

**Solução** Da Eq. 22-1

$$|Q_C| = |Q_H| - |W| = 4.282 \text{ J} - 942 \text{ J} = 3.340 \text{ J.}$$

O calor descartado *pela* máquina é uma quantidade negativa, assim

$$Q_C = -3.340 \text{ J.} \quad (\text{Resposta})$$

Podemos observar que esse motor extrai 4.282 J de calor por ciclo, que precisa ser compensado pela bomba de gás, realiza 942 J de trabalho e descarta 3.340 J de calor para o cano de descarga. A máquina descarta 3.340/942 ou 3,6 vezes mais energia que converte para fins utilizáveis.

## TÁTICA PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

### TÁTICA 1: A LINGUAGEM DA TERMODINÂMICA

Uma linguagem rica, mas muitas vezes confusa, é usada em estudos científicos da termodinâmica. E você precisa entender os seus signifi-

cados. Verá enunciados dizendo que o calor é absorvido, extraído, rejeitado, descarregado, descartado, removido, fornecido, ganho, perdido ou expelido, ou que ele flui de um corpo para outro (como se fosse um líquido). Também verá enunciados que descrevem um corpo como *ten-*do calor (como se calor pudesse ser mantido ou possuído), ou que seu calor é aumentado ou diminuído. Você precisa ter sempre em mente o significado do termo *calor*:

Calor é energia transferida de um corpo para outro, devido a uma diferença de temperatura entre esses corpos.

Quando identificamos um dos corpos como sendo o sistema de nosso interesse, qualquer transferência de energia para dentro do sistema é calor positivo  $Q$  e qualquer transferência de energia para fora do sistema é calor negativo  $Q$ .

O termo *trabalho* também requer muita atenção. Você pode ver enunciados dizendo que trabalho é produzido ou gerado, ou combinado com calor ou obtido a partir deste. Aqui está o significado do termo *trabalho*:

Trabalho é energia transferida de um corpo para outro devido a uma força que age entre eles.

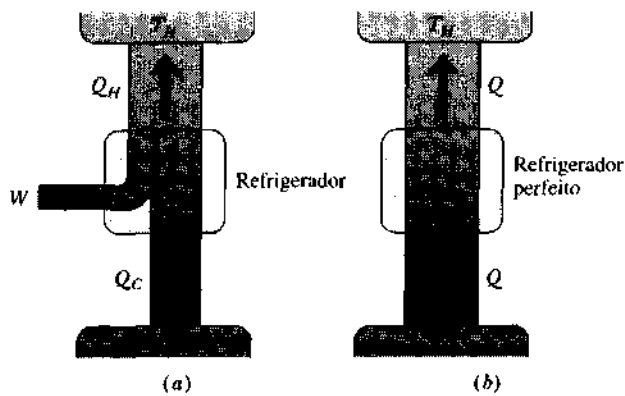
Quando identificamos um dos corpos como sendo o sistema de nosso interesse, qualquer transferência de energia para fora do sistema é chamada como trabalho positivo  $W$  feito *pelo* sistema ou trabalho negativo  $W$  feito *sobre* o sistema. E qualquer transferência de energia para dentro do sistema é chamada de trabalho negativo feito *pelo* sistema e trabalho positivo feito *sobre* o sistema. (A preposição que é usada é importante.) Obviamente, isto pode ser confuso: sempre que você ler o termo *trabalho*, precisa analisar cuidadosamente o texto para evitar erros.

## 22-3 Refrigeradores

Calor é transferido naturalmente de um local quente para um local frio, como do Sol para a Terra. Não existe qualquer transferência “natural” na outra direção. Expressaremos esta observação em outra formulação da segunda lei da termodinâmica:

**SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA (SEGUNDA FORMA):** Não é possível que o calor seja transmitido de um corpo para outro, que esteja à temperatura mais alta, sem que outra mudança ocorra no ambiente.

Um dispositivo que transfere energia como calor de um local frio para um quente é chamado de **refrigerador**. A Fig. 22-6a mostra as transferências de calor e trabalho que ocorrem. O calor  $Q_C$  é extraído de um reservatório de baixa temperatura e o trabalho  $W$  é feito *sobre o sistema* por um agente externo; as energias transferidas como calor e trabalho são combinadas e descarregadas como calor  $Q_H$  em um reservatório de alta temperatura. Em seu refrigerador caseiro, o reservatório de baixa temperatura é a câmara fria, onde a comida é guardada. O reservatório de alta temperatura é a sala onde está o refrigerador. O trabalho, que parece de maneira explícita na conta de energia elétrica, é realizado pelo motor que opera a unidade. Em um condicionador de ar, o reservatório à baixa temperatura é a



**Fig. 22-6** Indicamos um refrigerador envolvendo-o com setas no sentido anti-horário. (a) Num refrigerador real, o calor é extraído de um reservatório à baixa temperatura (fonte fria), algum trabalho é realizado e o equivalente em energia deste calor e deste trabalho é descarregado como calor em um reservatório à temperatura mais alta (fonte quente). (b) Num refrigerador ideal, não é necessário realizar trabalho. Ninguém jamais construiu tal refrigerador.

sala a ser esfriada, o reservatório de alta temperatura é o ar externo, onde as bobinas condensadoras ficam localizadas, e novamente o trabalho é realizado pelo motor que opera a unidade.

O objetivo do refrigerador e do condicionador de ar é transferir energia como calor do reservatório de baixa temperatura para o reservatório de alta temperatura, realizando o menor trabalho possível sobre o sistema. Classificamos essas unidades por seus **coeficientes de performance K**, definido como

$$K = \frac{|Q_c|}{|W|} = \frac{|Q_c|}{|Q_h| - |Q_c|} \quad (22-6)$$

Engenheiros que projetam refrigeradores e todos que pagam tarifa de energia elétrica desejam que o coeficiente de performance de um refrigerador seja o maior possível. Um valor de 5 é típico para um refrigerador caseiro, e um entre 2 e 3 é mais comum para os condicionadores de ar.

A Fig. 22-6b mostra um refrigerador “perfeito” — que esfria sem a necessidade de realizar trabalho; ele teria um coeficiente de performance infinito. As experiências têm mostrado que é impossível construir tal dispositivo. Assim, outra maneira de expressar a segunda lei da termodinâmica (segunda forma) é: *não existem refrigeradores perfeitos*.

O segundo dos eventos impossíveis que foram propostos na Seção 22-1, isto é, o aparecimento espontâneo da diferença de temperatura entre as duas extremidades de uma colher, equivale ao refrigerador perfeito. Na colher, a energia seria transferida espontaneamente como calor de um local mais frio para um local mais quente, uma violação da segunda forma da segunda lei.

**EXEMPLO 22-3** Um refrigerador caseiro, cujo coeficiente de performance  $K$  é 4,70, extrai calor da câmara fria à taxa de 250 J por ciclo.

a. Quanto trabalho por ciclo é necessário para operar o refrigerador?

**Solução** Da Eq. 22-6, temos

$$|W| = \frac{|Q_c|}{K} = \frac{250 \text{ J}}{4,70} = 53 \text{ J}.$$

Estes 53 J de energia são transferidos para o sistema. Assim, o trabalho realizado *sobre* o sistema do refrigerador é

$$W = +53 \text{ J} \quad (\text{sobre o sistema}). \quad (\text{Resposta})$$

Podemos também dizer, nesta situação, que o trabalho realizado *pelo* sistema é  $-53 \text{ J}$ . Esta resposta é a que importa para a pessoa que paga a operação do refrigerador.

b. Quanto calor por ciclo é descarregado na sala, que constitui o reservatório de alta temperatura do refrigerador?

**Solução** A Eq. 22-1, que é a primeira lei da termodinâmica para um dispositivo cíclico, funciona para refrigeradores tão bem como para máquinas. Então, temos

$$\begin{aligned} |Q_h| &= |W| + |Q_c| \\ &= 53 \text{ J} + 250 \text{ J} = 303 \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Observamos que um refrigerador também é um eficiente aquecedor de ambiente! Pagando por 53 J de trabalho (o motor) você tem 303 J de calor liberado para a sala, a partir das bobinas condensadoras da parte traseira do refrigerador. Se você aquecesse a sala com um aquecedor elétrico, iria obter somente 53 J de calor para cada 53 J de trabalho que pagasse. Pense sobre a sabedoria (?) de se deixar a porta do refrigerador aberta, em um dia quente, para esfriar a cozinha!

## 22-4 A Segunda Lei da Termodinâmica

As versões resumidas das duas formas da segunda lei da termodinâmica são:

**PRIMEIRA FORMA:** Não existem máquinas térmicas perfeitas.

**SEGUNDA FORMA:** Não existem refrigeradores perfeitos.

Embora estas afirmativas pareçam diferentes, iremos mostrar que são exatamente equivalentes, no sentido de que a violação de uma implica obrigatoriamente na violação da outra. Isto é, se você conseguir construir uma máquina perfeita, também conseguirá construir um refrigerador perfeito e vice-versa.

Consideremos primeiro que você construiu uma máquina perfeita. Você pode usar esta máquina para fornecer o trabalho para um refrigerador real e, assim, transformá-lo em um refrigerador perfeito. A Fig. 22-7 mostra como isso pode ser feito. Acople a máquina e o refrigerador juntos, como um mecanismo único, e ajuste ambos de modo que o trabalho realizado por ciclo pela máquina seja exatamente igual ao trabalho necessário por ciclo para operar o refrigerador. Então, nenhum trabalho externo estará envolvido na combinação máquina + refrigerador, que chamamos de *dispositivo X*.

Considere um exemplo numérico. Na Fig. 22-7a, a máquina perfeita extrai 100 J do reservatório de alta tempera-

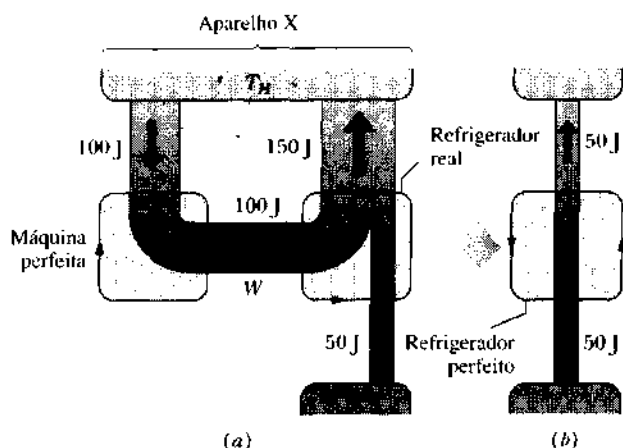


Fig. 22-7 (a) O trabalho  $W$  realizado por uma máquina (suposta perfeita) é utilizado para operar um refrigerador real. (b) A combinação destes dois aparelhos (que chamaremos de aparelho X) age como um refrigerador perfeito.

tura e os converte em 100 J de trabalho. O refrigerador extrai 50 J do reservatório de baixa temperatura, os combina com os 100 J de trabalho liberados para ele pela máquina, e descarrega 150 J de calor para o reservatório a alta temperatura. Como é mostrado na Fig. 22-7b, o efeito total do dispositivo X é extrair 50 J de calor do reservatório a baixa temperatura e transferi-los para o reservatório a alta temperatura, sem precisar de trabalho externo. O dispositivo X é um refrigerador perfeito! Assim, se conseguir construir uma máquina perfeita, também conseguirá construir um refrigerador perfeito.

Como um exercício, você pode demonstrar que, se puder construir um refrigerador perfeito, poderá usá-lo para transformar uma máquina real em máquina perfeita. As duas formulações da segunda lei da termodinâmica são na verdade, então, a mesma lei. Se você violar uma, estará automaticamente violando a outra.

## 22-5 Uma Máquina Ideal

Não existem máquinas perfeitas. Isto é, nenhuma máquina real tem uma eficiência de 100%. A questão permanece: Se não a 100%, a quanto pode chegar a eficiência de uma máquina real? Para responder esta pergunta, precisamos pensar detalhadamente no funcionamento de uma máquina.

Quando estudamos gases, evitamos a complexidade dos gases reais, introduzindo um conceito útil: o gás ideal. Sua utilidade reside no fato de que ele representa o comportamento limite dos gases reais. Ao estudar máquinas, seguiremos esse mesmo caminho. Evitaremos a complexidade de máquinas reais introduzindo outro conceito útil: a máquina ideal. Esta — como veremos mais adiante — representa o comportamento limite das máquinas reais.

Nossa máquina ideal consiste em um arranjo pistão-cilindro contendo um gás ideal. Um reservatório de alta tem-

peratura  $T_H$ , outro de alta temperatura  $T_C$  e uma base isolante também fazem parte de nossa máquina. O gás ideal constitui o sistema sobre o qual aplicaremos as leis da termodinâmica. O cilindro com seu pistão, a base isolante e os dois reservatórios térmicos constituem o ambiente deste sistema.

Consideraremos primeiro que nossa máquina ideal não possui atrito, turbulência de fluido nem transferências de calor indesejáveis. Estas são todas as coisas que um engenheiro iria querer obviamente eliminar. Além disso, entretanto, consideraremos que todos os processos que produzem o ciclo operacional da máquina — todas as expansões, compressões e mudanças na temperatura e pressão — serão realizados de modo extremamente lento; isto é, consideraremos esses processos como sendo *quasestáticos*. Ao fazer isso, asseguramos que o sistema estará essencialmente em equilíbrio térmico o tempo todo e que poderemos esquematizar o *status* do sistema em um gráfico  $p - V$ .

Um processo que se desenvolve desta forma é chamado de *processo reversível* que, por definição, é assim denominado quando se pode fazer o processo caminhar na direção oposta com apenas uma mudança mínima — mais rigorosamente, uma mudança *diferencial* — nas condições externas. Assim, se removermos lentamente peso do pistão, permitindo ao gás se expandir, poderemos — a qualquer momento — decidir *adicionar*, ao invés de subtrair, peso ao pistão, transformando assim a expansão em compressão.

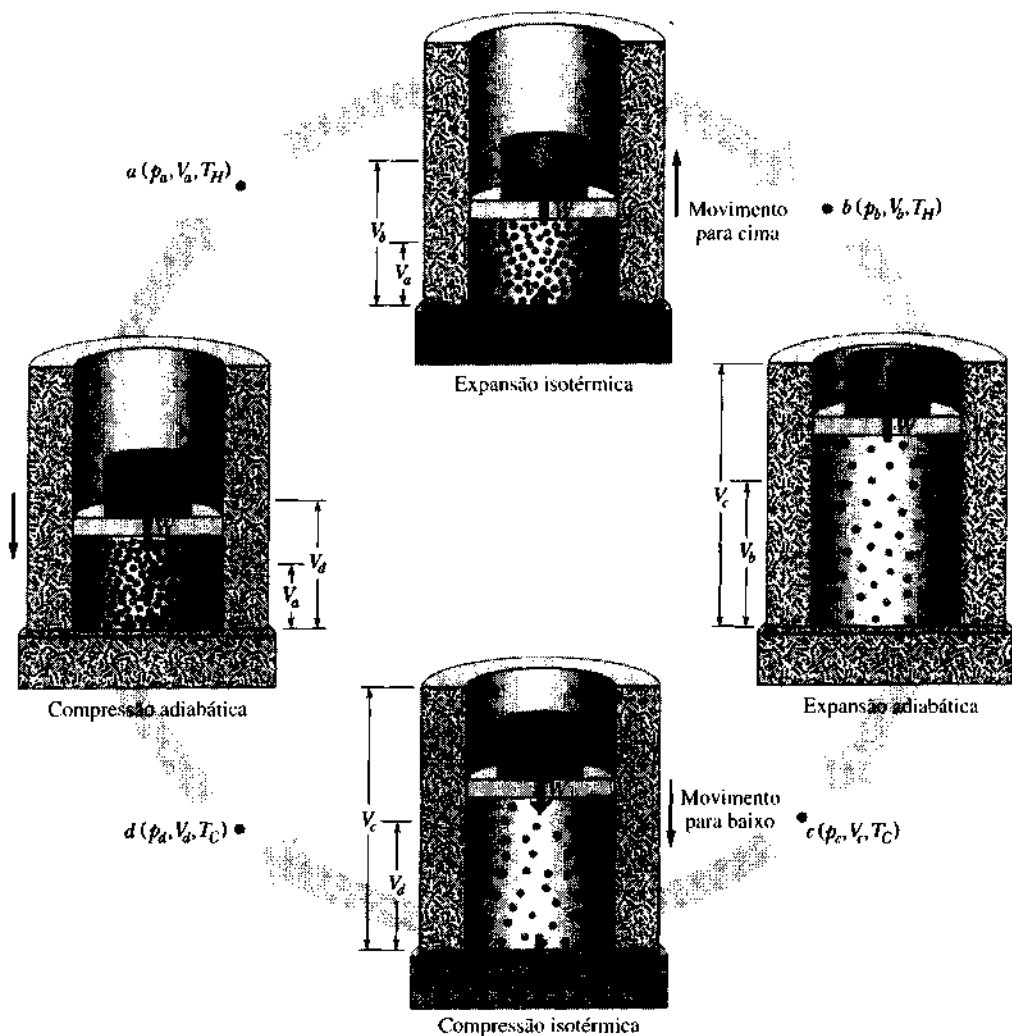
Como todos os processos são reversíveis, o ciclo como um todo também é reversível. Isto significa que a máquina pode funcionar ao contrário, agindo como um refrigerador ideal, as transferências de calor e trabalho mudando em sinal, mas não em magnitude. Nossa máquina ideal é uma máquina *reversível*; de fato, isto é o que há de ideal nela.

## 22-6 O Ciclo de Carnot

Ainda precisamos descrever o ciclo pelo qual irá passar o gás ideal que constitui a substância de trabalho de nossa máquina ideal reversível. Escolhemos um **ciclo de Carnot**,\* que consiste em dois processos isotérmicos e dois adiabáticos. A Fig. 22-8 sugere a sua mecânica; a Fig. 22-9 mostra o ciclo em um gráfico  $p - V$ . Ele é constituído pelos quatro passos seguintes:

**Passo 1:** Começaremos com o cilindro no reservatório de alta temperatura, assim o sistema, que é o gás ideal, está no estado representado pelo ponto *a* na Fig. 22-9. Gradualmente, removemos peso do pistão, permitindo ao sistema se expandir lentamente até o ponto *b*, à temperatura constante  $T_H$ . Durante este processo, calor  $Q_H$  é absorvido pelo sistema, vindo do reservatório de alta temperatura. Como esse processo é isotérmico, a energia interna do sis-

\*Denominação em homenagem ao cientista e engenheiro francês N. L. Sadi Carnot, que propôs pela primeira vez o conceito em 1824.



**Fig. 22-8** Um ciclo de Carnot. Os pontos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  correspondem aos pontos com as mesmas letras na Fig. 22-9. São vistos passos intermediários do arranjo cilindro-pistão que ligam pontos adjacentes do ciclo. Em cima, durante o passo 1, a diminuição de peso sobre o pistão e o calor transferido da fonte quente permitem que o gás ideal dentro do cilindro se expanda isotermicamente do volume  $V_a$  para o  $V_b$ . À direita, durante o passo 2, um peso ainda menor e o isolamento térmico permitem que o gás se expanda adiabaticamente até o volume máximo  $V_c$ . Embaixo, durante o passo 3, o aumento e a perda de calor para a fonte fria fazem com que o gás seja comprimido isotermicamente até o volume  $V_d$ . À esquerda, durante o passo 4, um peso ainda maior e o isolamento térmico fazem com que o gás seja comprimido adiabaticamente até o volume mínimo  $V_a$ .

tema não muda e todo o calor absorvido é transformado em trabalho positivo, realizado pelo sistema durante a expansão.

**Passo 2:** Colocamos o cilindro na base isolante e, removendo mais peso do pistão, permitimos ao sistema novamente realizar uma expansão lenta, até chegar ao ponto  $c$  da Fig. 22-9. Esta expansão é adiabática porque nenhum calor entra ou deixa o sistema, que realiza trabalho positivo ao erguer o pistão e sua temperatura cai para  $T_C$ , porque a energia para realizar o trabalho tem de vir da energia interna do sistema.

**Passo 3:** Colocamos o cilindro no reservatório de baixa temperatura. Adicionamos mais peso ao pistão, gradualmente, comprimindo o gás lentamente até o ponto  $d$ , à temperatura constante  $T_C$ . Durante esse processo, calor  $Q_C$  é transferido do gás para o reservatório. Como o processo é isotérmico,  $Q_C$  é igual ao trabalho negativo realizado pelo gás conforme o pistão desce.

**Passo 4:** Colocamos o cilindro na base isolante e, adicionando mais peso, comprimimos o gás lentamente de volta ao ponto inicial  $a$  da Fig. 22-9, completando assim o ciclo. A compressão é adiabática porque nenhum calor entra ou deixa o sistema. O gás realiza trabalho negativo e sua temperatura aumenta para  $T_H$ .

A propriedade especial da máquina de Carnot é — como podemos observar — sua eficiência térmica, que pode ser escrita como

$$\epsilon_C = \frac{T_H - T_C}{T_H} \quad (\text{máquina de Carnot}). \quad (22-7)$$

Assim, a eficiência da máquina de Carnot depende *so-*mente das temperaturas dos dois reservatórios entre os quais ela opera. A sua importância é que — como você verá na próxima seção — nenhuma máquina real operando entre

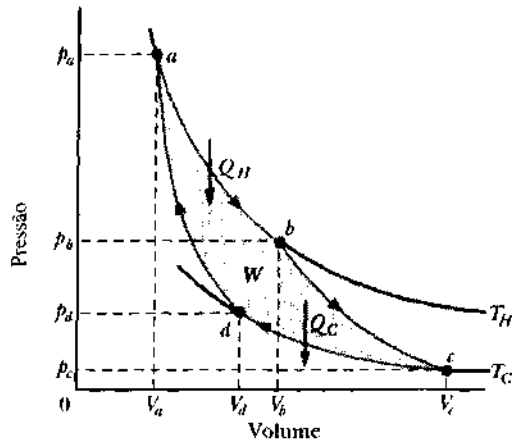


Fig. 22-9 Um diagrama  $p - V$  para o ciclo de Carnot ilustrado na Fig. 22-8. A substância utilizada é um gás ideal.

duas temperaturas pode ter uma eficiência maior do que a de Carnot, operando entre essas mesmas temperaturas. É neste sentido que ela representa o comportamento limite das máquinas reais. Se, como um engenheiro prático, você estiver tentando aumentar a eficiência de uma máquina real, é muito útil saber que este é um limite fundamental, ditado pelas leis da termodinâmica e que, possivelmente, não pode ser ultrapassado.

Você não pode exceder a eficiência de uma máquina ideal de Carnot, nem mesmo com outra máquina ideal. Note, como exemplo, que a expressão na Eq. 22-5 para a eficiência de uma máquina ideal de Stirling corresponde àquela da Eq. 22-7 para a máquina de Carnot. (Voltaremos a essa semelhança de expressões na próxima seção.)

Uma máquina de Carnot — por ser reversível — pode ser operada de modo inverso, como um refrigerador de Carnot. Como provaremos adiante, seu coeficiente de performance é dado por

$$K_{\text{Car}} = \frac{T_C}{T_H - T_C} \quad (\text{refrigerador de Carnot}). \quad (22-8)$$

A Eq. 22-8 nos mostra que esse coeficiente de um refrigerador de Carnot aumenta como  $T_H \rightarrow T_C$ . Curiosamente, quando menos precisamos do refrigerador, melhor ele funciona!

### Demonstração das Equações 22-7 e 22-8

A temperatura permanece constante por todo o caminho  $ab$ , na Fig. 22-9. Como o gás é ideal, sua energia interna, que depende somente da temperatura, também permanece constante. Da primeira lei da termodinâmica então,  $\Delta E_{\text{int}} = 0$ , e assim o calor transferido do reservatório de alta temperatura precisa ser igual ao trabalho realizado pelo gás que se expande. Da Eq. 21-8, temos então

$$|Q_H| = |W_H| = nRT_H \ln \frac{V_b}{V_a}.$$

De modo semelhante, para o processo  $cd$  na Fig. 22-9, podemos escrever

$$|Q_C| = |W_C| = nRT_C \ln \frac{V_c}{V_d}.$$

Dividindo essas duas equações, obtemos

$$\frac{|Q_H|}{|Q_C|} = \frac{T_H \ln(V_b/V_a)}{T_C \ln(V_c/V_d)}. \quad (22-9)$$

A Eq. 21-38 nos permite escrever, para os dois processos adiabáticos  $bc$  e  $da$ ,

$$T_H V_b^{\gamma-1} = T_C V_c^{\gamma-1} \quad \text{e} \quad T_H V_a^{\gamma-1} = T_C V_d^{\gamma-1}.$$

Dividindo essas duas equações, obtemos

$$\frac{V_b^{\gamma-1}}{V_a^{\gamma-1}} = \frac{V_c^{\gamma-1}}{V_d^{\gamma-1}}$$

ou

$$\frac{V_b}{V_a} = \frac{V_c}{V_d}. \quad (22-10)$$

Combinando as Eqs. 22-9 e 22-10, vem

$$\frac{|Q_H|}{|Q_C|} = \frac{T_H}{T_C}. \quad (22-11)$$

Combinando este resultado com a Eq. 22-2, somos levados imediatamente à Eq. 22-7; levando em conta a Eq. 22-3, chegamos à Eq. 22-8. Estas eram as equações que queríamos demonstrar.

### 22-7 A Eficiência das Máquinas Reais

A importância da máquina de Carnot é resumida neste teorema:

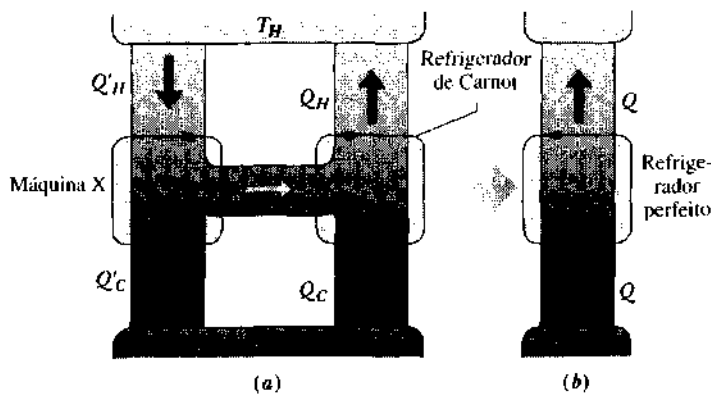
Nenhuma máquina real, operando entre duas temperaturas, pode ter uma eficiência maior do que uma máquina de Carnot operando entre as mesmas duas temperaturas.

Para demonstrar o teorema, suponhamos que um inventor de fundo de quintal alegue que construiu uma máquina, que chamaremos de máquina X, cuja eficiência  $e_X$  — alega — é maior do que  $e_{\text{Car}}$ , a eficiência da máquina de Carnot. Isto é,

$$e_X > e_{\text{Car}} \quad (\text{uma alegação}). \quad (22-12)$$

Vamos acoplar a máquina X à de Carnot operando no sentido inverso, como um refrigerador (Fig. 22-10a). Ajuste





**Fig. 22-10** (a) A máquina X opera um refrigerador de Carnot. (b) Se, como se alega, a máquina X é mais eficiente que um refrigerador de Carnot, então a combinação mostrada em (a) é equivalente ao refrigerador perfeito mostrado aqui. Isto viola a segunda lei da termodinâmica, assim, concluímos que a máquina X não pode ser mais eficiente que um refrigerador de Carnot.

tamos o refrigerador de Carnot de tal maneira que o trabalho que necessita por ciclo é justamente o fornecido pela máquina X.

Se a Eq. 22-12 for verdadeira, então, da definição de eficiência (Eq. 22-2), deveremos ter

$$\frac{|W|}{|Q'_H|} > \frac{|W|}{|Q_H|},$$

onde o lado direito da desigualdade é a eficiência da máquina de Carnot quando opera como um motor. Esta desigualdade implica em

$$|Q_H| > |Q'_H|. \quad (22-13)$$

Como o trabalho realizado pela máquina X é igual ao executado sobre o refrigerador de Carnot, temos, da Eq. 22-1

$$|Q_H| - |Q_C| = |Q'_H| - |Q'_C|,$$

que pode ser escrita como

$$|Q_H| - |Q'_H| = |Q_C| - |Q'_C| = Q. \quad (22-14)$$

Por causa da Eq. 22-13,  $Q$  na Eq. 22-14 deve ser positivo.

Comparando a Eq. 22-10 com a Fig. 22-7, vemos que o efeito resultante da combinação da máquina X com o refrigerador de Carnot é a transferência de calor  $Q$  de uma fonte fria para uma quente, sem a necessidade de nenhum trabalho. Assim, a combinação age como o refrigerador perfeito da Fig. 22-10b, o que viola a segunda lei da termodinâmica.

Algo deve estar errado em nossas suposições; só pode ser a Eq. 22-12. Concluímos que nenhuma máquina real pode ter uma eficiência maior do que a máquina de Carnot, operando entre as mesmas temperaturas. Pode ter, no máximo, uma eficiência igual à da máquina de Carnot.

### Uma Nota sobre a Demonstração

Nesta demonstração, consideramos a máquina de Carnot da Seção 22-6, isto é, uma que utiliza um gás ideal como sua substância de trabalho. Será que esta máquina, utilizando uma outra substância de trabalho (por exemplo amônia ou etanol), ou alguma outra máquina reversível usando um ciclo diferente, poderia ter eficiência maior do que a máquina de Carnot que consideramos?

É uma esperança infundada. Pode-se mostrar que *todas* as máquinas reversíveis, operando entre um dado par de temperaturas, têm *exatamente* a mesma eficiência que uma de Carnot utilizando um gás ideal, entre as mesmas temperaturas. Assim, a eficiência da máquina de Carnot dada pela Eq. 22-7 pode ser estendida a todas as máquinas reversíveis, não importando o ciclo que elas empregam. (Como um exemplo, note que ela é a mesma que a Eq. 22-5 para um motor Stirling reversível.) O uso de um gás ideal como substância de trabalho não é essencial. A demonstração é análoga à que já demos, no caso da máquina X.

**EXEMPLO 22-4** A turbina de uma usina termoeletrica retira vapor de um boiler a  $520^\circ\text{C}$  e o injeta em um condensador a  $100^\circ\text{C}$ . Qual a máxima eficiência possível?

**Solução** Esta eficiência máxima é a de uma máquina de Carnot operando entre as temperaturas dadas. Da Eq. 22-7, então,

$$e_{\max} = \frac{T_H - T_C}{T_H} = \frac{793 \text{ K} - 373 \text{ K}}{793 \text{ K}} = 0.53 \text{ ou } 53\%. \quad (\text{Resposta})$$

Por causa do atrito, turbulência e perdas de calor indesejáveis, a eficiência real desta máquina a vapor está em torno de 40%. Note que a eficiência máxima teórica só depende das duas temperaturas e não da pressão ou de outros fatores.

A eficiência teórica de um motor ordinário de automóvel é de cerca de 56%, mas considerações práticas a reduzem para cerca de 25%.

**EXEMPLO 22-5** Um inventor alega ter construído um motor que, num certo intervalo de tempo, absorve 110 MJ de calor a 415 K e rejeita 50 MJ a 212 K, enquanto realiza 16,7 kW·h de trabalho. Você investiria seu dinheiro neste projeto?

**Solução** Da Eq. 22-2, a eficiência alegada para o aparelho é

$$e = \frac{|W|}{|Q_H|} = \frac{(16.7 \text{ kW} \cdot \text{h})(3.60 \text{ MJ/kW} \cdot \text{h})}{110 \text{ MJ}} = 0.55 \text{ ou } 55\%.$$

Da Eq. 22-7, a eficiência teórica máxima para as temperaturas dadas é

$$e = \frac{T_H - T_C}{T_H} = \frac{415 \text{ K} - 212 \text{ K}}{415 \text{ K}} = 0.49 \text{ ou } 49\%.$$

A eficiência alegada é maior do que o máximo teórico. Melhor decisão: não investir.

**EXEMPLO 22-6** Uma bomba térmica é um dispositivo que — atuando como um refrigerador — pode aquecer uma casa retirando calor do exterior, realizando algum trabalho e descarregando calor dentro da casa. Suponha que a temperatura no exterior é de  $-10^{\circ}\text{C}$  e a do interior da casa é mantida a  $22^{\circ}\text{C}$ . É necessário injetar calor no interior da casa à taxa de  $16\text{ kW}$ , para compensar as perdas normais de calor. Com que taxa mínima a energia deve ser fornecida à bomba térmica?

**Solução** Da Eq. 22-8, o coeficiente máximo de performance da bomba, atuando como um refrigerador, é

$$K = \frac{T_C}{T_H - T_C} = \frac{(273 - 10)\text{ K}}{(273 + 22)\text{ K} - (273 - 10)\text{ K}} = 8.22.$$

Podemos reescrever a Eq. 22-6 como

$$K = \frac{|Q_C|}{|W|} = \frac{|Q_H| - |W|}{|W|}.$$

Tirando o valor de  $|W|$  e dividindo pelo tempo para expressar o resultado em termos de potência, temos

$$\frac{|W|}{t} = \frac{|Q_H|/t}{K + 1} = \frac{16\text{ kW}}{8.22 + 1} = 1.7\text{ kW}. \quad (\text{Resposta})$$

Eis como a “mágica” da bomba térmica funciona. Usando a bomba como refrigerador para esfriar o lado de fora, você pode injetar  $16\text{ kW}$  no interior da casa, mas tem de pagar somente pelos  $1,7\text{ kW}$  necessários para operar a bomba. Na realidade,  $1,7\text{ kW}$  é um mínimo teórico, baseado numa performance ideal. Na prática, é preciso uma potência maior, mas ainda existe um considerável ganho econômico em comparação com o uso de aquecedores convencionais. Neste último caso, você teria de pagar por cada  $\text{kW}$  consumido. Quando a temperatura do exterior é maior do que a do interior, a bomba pode ser usada como um condicionador de ar. Ainda operando como um refrigerador, ela agora retira calor do interior para o exterior. Novamente, trabalho deve ser realizado (e devemos pagar por ele), mas a energia removida como calor de dentro da casa é maior do que a energia equivalente ao trabalho realizado. Outra barganha termodinâmica!

## 22-8 Entropia: Uma Nova Variável

Cada uma das três leis da termodinâmica está associada a uma variável termodinâmica específica. Para a lei zero

(Cap. 19) a variável é a temperatura  $T$ . Para a primeira lei (Cap. 20) é a energia interna  $E_{\text{int}}$ . Para a segunda lei, a variável é uma que você nunca encontrou antes; é chamada de **entropia**  $S$ .

Planejamos definir entropia nesta seção e, nas posteriores, expressar a segunda lei em termos desta variável. Começamos considerando o ciclo de Carnot da Fig 22-9, para o qual (da Eq. 22-11)

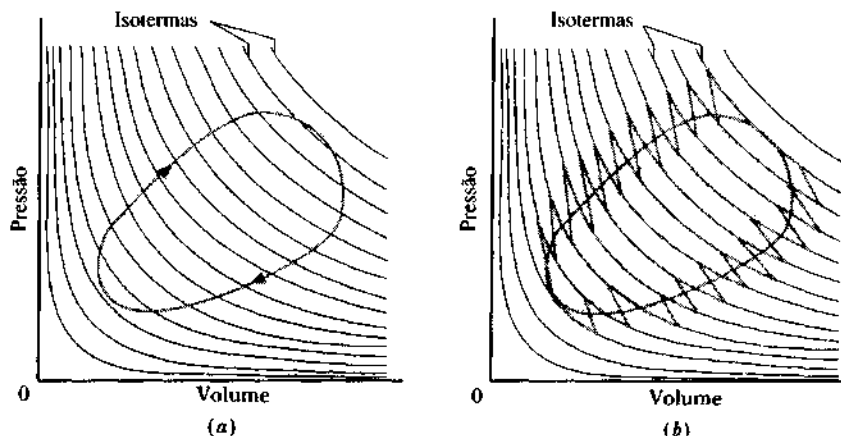
$$\frac{|Q_H|}{T_H} = \frac{|Q_C|}{T_C}.$$

Vamos agora abolir a notação de módulo, reconhecendo no processo que, se o ciclo de Carnot é percorrido no sentido horário, como um motor, ou no anti-horário, como um refrigerador,  $Q_H$  e  $Q_C$  têm sinais opostos. Com isto em mente, escrevemos aquela equação como

$$\frac{Q_H}{T_H} + \frac{Q_C}{T_C} = 0. \quad (22-15)$$

Como  $Q_H$  e  $Q_C$  são as únicas transferências de calor no ciclo fechado da Fig. 22-9, a Eq. 22-15 nos diz que a soma algébrica da quantidade  $Q/T$ , calculada ao longo do ciclo, é zero.

Queremos agora generalizar a Eq. 22-15 de forma que se aplique não somente ao ciclo de Carnot, mas a qualquer ciclo reversível. A Fig. 22-11a mostra um desses ciclos generalizados, superposto a uma família de isotermas. Podemos aproximar esse ciclo arbitrário tão bem quanto quisermos, ligando isotermas adjacentes utilizando pequenos segmentos de linhas adiabáticas convenientemente escolhidos, como na Fig. 22-12b. Desta maneira, formamos um conjunto de longos e estreitos ciclos de Carnot. Convença-se de que percorrer em seqüência os ciclos de Carnot individuais na Fig. 22-11b é completamente equivalente — em termos de calor transferido e trabalho realizado — a percorrer a série de isotermas e adiabáticas que aproximam o ciclo real. Isso acontece porque ciclos de Carnot adjacentes (como na Fig. 22-12) têm uma



**Fig. 22-11** (a) Um ciclo reversível arbitrário, desenhado num diagrama  $p - V$  com uma família de isotermas ao fundo. (b) O ciclo representado como um conjunto de ciclos de Carnot adjacentes.

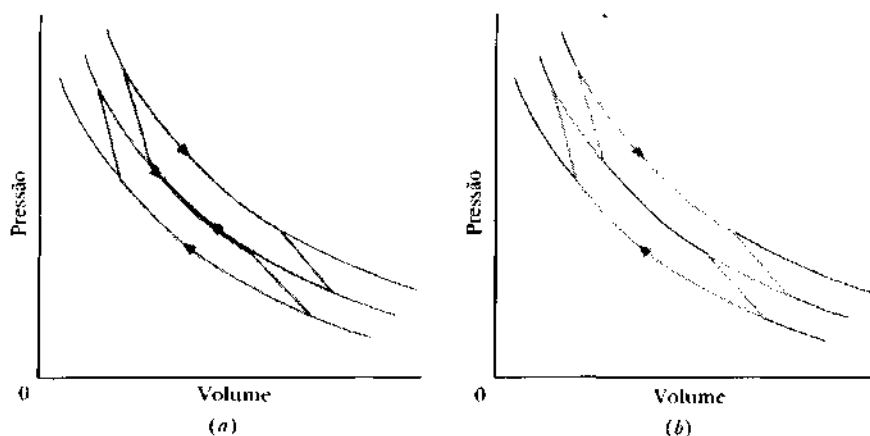


Fig. 22-12 (a) Dois dos ciclos da Fig. 22-11 e (b) seus equivalentes.

isoterma em comum e as duas passagens, em direções opostas, de cada isoterma se cancelam para efeitos de transferência de calor e trabalho realizado.

Estendemos a Eq. 22-15 escrevendo, para um conjunto de ciclos de Carnot e, logo depois, para a seqüência da Fig. 22-11b,

$$\sum \frac{Q}{T} = 0.$$

No limite de diferenças de temperaturas infinitesimais entre pares de isothermas na Fig. 22-11b, a seqüência de ziguezagues torna-se o ciclo generalizado da Fig. 22-11a e a equação fica

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0 \text{ (ciclo reversível)}. \tag{22-16}$$

O círculo no símbolo da integral indica que ela é calculada sobre uma volta completa do ciclo, começando e terminando no mesmo ponto, arbitrariamente escolhido.

Já estabelecemos que a temperatura  $T$  e a energia interna  $E_{int}$  são propriedades intrínsecas ao sistema. Um teste para identificar tais **variáveis de estado** é, se fizermos o sistema percorrer um ciclo reversível completo, a soma algébrica das variações desta variável deverá ser nula. Se não fosse assim, a variável não retornaria ao seu valor inicial e não poderia ser uma propriedade intrínseca ao sistema. Assim, o teste que uma quantidade  $X$  deve satisfazer para ser uma variável de estado é

$$\oint dX = 0 \text{ (ciclo reversível)}. \tag{22-17}$$

Comparando as Eqs. 22-16 e 22-17 vemos que  $dQ/T$  deve representar uma variação infinitesimal de alguma variável de estado não encontrada anteriormente. Chamaremos esta nova variável de **entropia**  $S$  do sistema e escreveremos, usando a Eq. 22-17,

$$dS = \frac{dQ}{T} \text{ e } \oint dS = 0. \tag{22-18}$$

A unidade SI para entropia é a de calor dividida pela temperatura, isto é, joule por kelvin.

Note que o calor  $Q$  e o trabalho  $W$  não são variáveis de estado, pois  $\oint dQ \neq 0$  e  $\oint dW \neq 0$ , como você pode verificar facilmente para o caso especial de um ciclo de Carnot.

Demonstraremos adiante que a propriedade de uma variável de estado  $X$ , representada pela Eq. 22-17, é exatamente o equivalente a afirmar que  $\int dX$  entre dois estados quaisquer tem o mesmo valor para todos os caminhos reversíveis ligando esses estados. Suponha, por exemplo, que um sistema evolui de um estado inicial  $i$  para um estado final  $f$ , onde a temperatura é 15 K mais alta. Esta diferença de temperatura permanece, não importando qual dos infinitos caminhos possíveis o sistema percorreu para evoluir de  $i$  para  $f$ . Isto é verdadeiro para qualquer outra variável de estado. A diferença de pressão seria a mesma para todos os caminhos; o mesmo valendo para a diferença de volume. Como a entropia também é uma variável de estado, isso deve ser válido também para a diferença de entropia. Assim, podemos escrever, para a diferença de entropia entre dois estados quaisquer  $i$  e  $f$ ,

$$S_f - S_i = \int_i^f dS = \int_i^f \frac{dQ}{T} \tag{22-19}$$

(caminho reversível),

onde a integral é calculada ao longo de qualquer caminho reversível ligando os dois estados.

A Eq. 22-19 define a **diferença de entropia** entre dois estados, ao invés da entropia de um estado. No entanto, é nestas diferenças que estamos interessados. Uma constante arbitrária pode ser adicionada à entropia absoluta (como pode ser adicionada à energia interna absoluta) de qualquer estado, sem alterar nenhuma de nossas conclusões.

### Variações de Entropia num Processo Reversível

A Eq. 22-19 é válida *somente para processos reversíveis*, isto é, para processos onde não há atrito e que são realizados tão lentamente que o processo pode ser revertido em qualquer estágio efetuando-se uma variação *infinitesimal* no ambiente do sistema. Se houver troca de calor entre o sistema e seu ambiente em tal processo, a Eq. 22-19 nos diz que a entropia do sistema irá variar. Se for *adicionado* calor ao sistema, o aumento de  $dQ$  na Eq. 22-19 (de acordo com a nossa convenção de sinal para calor) será *positivo*, de modo que a variação de entropia resultante para o sistema será um *aumento*. Ao mesmo tempo, a entropia do ambiente, isto é, do reservatório térmico de onde o calor foi retirado e transferido para o sistema, diminuirá da mesma quantidade que a entropia do sistema aumentar. Isto deve ser assim porque, cada vez que um milijoule de calor entra no sistema a uma dada temperatura, um milijoule de calor deve deixar o reservatório, à mesma temperatura.

O inverso também é verdadeiro. Se removermos calor do sistema, sua entropia diminuirá e a do ambiente aumentará da mesma quantidade. Logo, concluímos que:

Para processos reversíveis, a entropia do *sistema* pode aumentar, diminuir ou permanecer constante. A variação da entropia do *ambiente* do sistema será sempre igual em módulo, mas de sinal oposto à do sistema. Assim, num processo reversível, a entropia do *sistema + ambiente* permanece constante.

Na próxima seção, examinaremos cuidadosamente as variações de entropia em processos *irreversíveis* e reuniremos nossas conclusões como uma nova formulação da segunda lei da termodinâmica. Primeiro, no entanto, aqui está a demonstração prometida.

### Demonstração da Independência do Caminho para a Eq. 22-19

Podemos escrever a Eq. 22-18 (veja Fig. 22-13) como

$$\int_{\text{caminho 1}}^b dS + \int_b^a dS = 0,$$

onde  $a$  e  $b$  são pontos arbitrários e as integrais são calculadas ao longo dos caminhos 1 e 2 ligando esses pontos. Como o ciclo é reversível, podemos escrever esta equação como

$$\int_{\text{caminho 1}}^b dS - \int_{\text{caminho 2}}^b dS = 0. \quad (22-20)$$

Na Eq. 22-20 decidimos simplesmente percorrer o caminho 2 na direção oposta, isto é, de  $a$  para  $b$ , ao invés de  $b$  para  $a$ . Fazemos isto invertendo a ordem dos limites na segunda in-

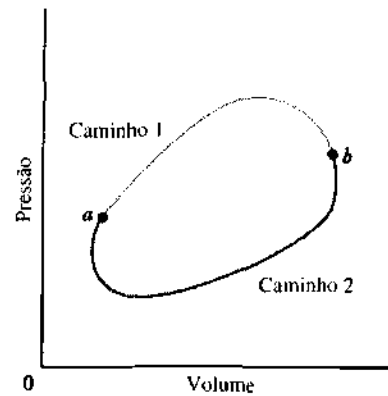


Fig. 22-13 Os caminhos 1 e 2 são independentes, ligando os pontos  $a$  e  $b$ .

tegral, o que impõe que também troquemos o seu sinal, obtendo assim a Eq. 22-20. Podemos, então, escrevê-la como

$$\int_{\text{caminho 1}}^b dS = \int_{\text{caminho 2}}^b dS. \quad (22-21)$$

Isto é o que queríamos provar. As Eqs. 22-19 e 22-21 nos dizem que, se a diferença de entropia entre dois estados ( $i$  e  $f$  ou  $a$  e  $b$ ) não depender do caminho, então, poderemos calculá-la ao longo de qualquer caminho (reversível).

**EXEMPLO 22-7** Um bloco de gelo com massa  $m$  de 235 g derrete (reversivelmente). A temperatura permaneceu em  $0^\circ\text{C}$  durante todo o processo.

a. Qual a variação de entropia para o gelo? O calor de fusão do gelo é,  $333 \text{ kJ/kg}$ .

**Solução** A imposição de que o gelo derreta de maneira reversível significa que devemos colocá-lo em contato com um reservatório térmico cuja temperatura exceda  $0^\circ\text{C}$  somente por um infinitésimo. (Se abaixarmos então a temperatura do reservatório para um infinitésimo *abaixo* de  $0^\circ\text{C}$ , o gelo derretido começará a congelar — o processo será revertido.) Como o processo é reversível, podemos usar a Eq. 22-19, obtendo

$$S_{\text{água}} - S_{\text{gelo}} = \int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int dQ = \frac{Q}{T}.$$

Mas

$$Q = mL_f = (0.235 \text{ kg})(333 \text{ kJ/kg}) = 7.83 \times 10^4 \text{ J}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} S_{\text{água}} - S_{\text{gelo}} &= \frac{Q}{T} = \frac{7.83 \times 10^4 \text{ J}}{273 \text{ K}} \\ &= 287 \text{ J/K}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

b. Qual a variação de entropia do ambiente?

**Solução** Neste caso, o ambiente é o reservatório térmico de onde o calor é retirado para derreter o gelo. Cada unidade de calor que *entra* no gelo deve ter *deixado* o reservatório, sendo a temperatura de ambos

aproximadamente a mesma. Assim, a variação de entropia do reservatório é igual em módulo, mas de sinal contrário à do gelo, ou

$$\Delta S_{\text{reservatório}} = -287 \text{ J/K.} \quad (\text{Resposta})$$

A variação de entropia para o sistema *gelo + reservatório* é zero, como deve ser para um processo reversível.

Na prática, a fusão do gelo é provavelmente irreversível, como quando você joga um cubo de gelo dentro de um copo d'água à temperatura ambiente. A diferença de temperatura entre o gelo e o reservatório, neste caso a água, não é infinitesimal, mas cerca de 20°C, o processo ocorre apenas em uma direção — o gelo derrete — e não pode ser revertido em qualquer estágio efetuando-se apenas uma mudança infinitesimal na temperatura da água. Você não pode usar a Eq. 22-19 neste caso e os cálculos mostrados não são válidos para estas condições.

## 22-9 Variações de Entropia para Processos Irreversíveis

A Eq. 22-19 nos diz como calcular a variação de entropia de um sistema que passou por um processo reversível. Estritamente falando, não existem tais processos no mundo real. Atrito e fluxo de calor indesejados estão sempre presentes e as diferenças de pressão e temperatura entre um sistema e seu ambiente não são, em geral, infinitesimais. Todo processo termodinâmico real é — em maior ou menor grau — irreversível.

O que devemos fazer para calcular a variação de entropia entre os estados inicial e final em tais casos? Vamos tirar vantagens do fato que a diferença de entropia — ou de qualquer outra variável de estado, como temperatura ou energia interna — entre dois estados de equilíbrio não depende de como o sistema passa de um estado para o outro:

Para encontrar a variação de entropia num processo irreversível entre dois estados de equilíbrio, encontre um processo reversível ligando estes mesmos estados e calcule a variação de entropia para este processo, usando a Eq. 22-19.

Considere dois exemplos.

**1. Expansão livre.** Como na Seção 20-6 (veja a Fig. 20-6), imagine um gás ideal que aumenta o seu volume expandindo-se em uma região onde foi feito vácuo,  $W = 0$ . Além disso, como o sistema é envolvido por paredes isolantes,  $Q = 0$ . Da primeira lei da termodinâmica  $\Delta E_{\text{int}} = Q - W$ , vem então que  $\Delta E_{\text{int}} = 0$  ou

$$E_{\text{int},f} = E_{\text{int},i}, \quad (22-22)$$

onde  $i$  e  $f$  se referem aos estados inicial e final. Como o gás é ideal, a energia interna  $E_{\text{int}}$  depende só da temperatura, assim, a Eq. 22-22 nos diz que  $T_f = T_i$ .

Se tentássemos usar a Eq. 22-19 para calcular a diferença de entropia  $S_f - S_i$  para uma expansão livre, teríamos um problema imediato. Como  $Q = 0$  poderíamos ser levados a prever, usando a Eq. 22-19, que  $\Delta S = 0$ , que é um

resultado incorreto, como logo veremos. De acordo com o procedimento sugerido, devemos encontrar um processo reversível — qualquer processo reversível — que ligue os estados inicial e final e aplicar a Eq. 22-19 — não à expansão livre, mas àquele processo.

Como  $T_f = T_i$  para uma expansão livre para um gás ideal, um processo reversível conveniente é uma expansão isotérmica como aquela que ocorre entre os pontos  $a$  e  $b$  do ciclo de Carnot na Fig. 22-9. A expansão isotérmica envolve um conjunto de operações bastante diferente daquele da expansão livre, os dois processos tendo em comum *somente* os estados inicial e final. Aplicando a Eq. 22-19 à expansão isotérmica, obtemos

$$S_f - S_i = \int_{V_i}^{V_f} \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int_{V_i}^{V_f} dQ.$$

Aqui, passamos a temperatura  $T$  para fora do símbolo da integral porque ela permanece constante num processo isotérmico. Neste processo,  $Q$  é igual a  $W$  (e logo,  $dQ = dW$ ). Assim, podemos escrever esta equação como

$$S_f - S_i = \frac{1}{T} \int_{V_i}^{V_f} dW. \quad (22-23)$$

A integral na Eq. 22-23 é o trabalho realizado num processo isotérmico, que (veja Eq. 21-8) é

$$W = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}. \quad (22-24)$$

Substituindo a Eq. 22-24 na Eq. 22-23, ficamos com

$$S_f - S_i = nR \ln \frac{V_f}{V_i} \quad (\text{expansão livre}). \quad (22-25)$$

Embora tenhamos calculado esta variação de entropia para uma expansão isotérmica reversível entre dois estados, ela é válida para qualquer processo ligando esses mesmos estados, incluindo uma expansão livre.

Como  $V_f > V_i$ , a Eq. 22-25 nos mostra que a entropia do sistema aumenta durante uma expansão livre. Notamos que a entropia do ambiente envolto do sistema não varia durante a expansão livre, pois o gás se expande dentro de uma caixa com paredes perfeitamente isolantes, como foi considerado na Fig. 20-6. Assim, a entropia do sistema + ambiente aumenta durante uma expansão livre.

**2. Transferência irreversível de calor.** A Fig. 22-14a mostra dois blocos de metal, cada um com massa  $m$  e calor específico  $c$ , que estão termicamente isolados um do outro, dentro de uma caixa isolante. Os blocos são idênticos em todos os aspectos, exceto pelo fato de que um está a uma temperatura mais alta do que o outro. Se removermos a parede isolante que separa os dois blocos e os colocarmos em contato (como na Fig. 22-14b), acabarão por atingir uma

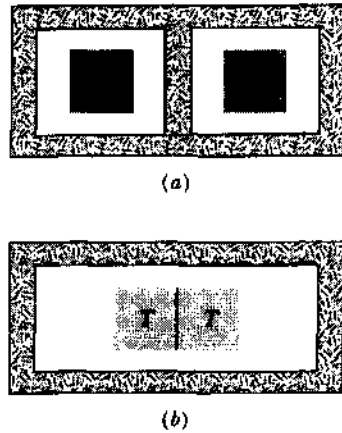


Fig. 22-14 (a) O estado inicial: dois blocos metálicos a temperaturas diferentes em caixas isolantes individuais. (b) O estado final: a parede isolante entre as caixas é removida e deixamos os blocos atingirem o equilíbrio térmico à temperatura  $T$ .

temperatura comum  $T$ . Da mesma forma que a expansão livre, esse processo é irreversível, pois perdemos totalmente o seu controle assim que colocamos os dois blocos em contato um com o outro.

Para achar a variação de entropia entre o estado inicial da Fig. 22-14a e o estado final da Fig. 22-14b, devemos mais uma vez encontrar um processo reversível que os ligue e calcular a variação de entropia aplicando a Eq. 22-19 a este processo.

Podemos construir um processo reversível usando um reservatório térmico de grande capacidade calorífica cuja temperatura podemos controlar, por exemplo, girando um botão. Ajustamos primeiro a temperatura do reservatório para  $T + \Delta T$ , a temperatura do bloco mais quente, e colocamos este em contato térmico com o reservatório. Abaixamos então lentamente (de maneira reversível) a temperatura do reservatório, desde  $T + \Delta T$  até  $T$ , extraíndo calor do bloco mais quente. Como este perde calor, sua entropia diminui, a variação de entropia sendo

$$\begin{aligned} \Delta S_H &= \int_i^f \frac{dQ}{T} = \int_{T+\Delta T}^T \frac{mc \, dT}{T} = mc \int_{T+\Delta T}^T \frac{dT}{T} \\ &= mc \ln \frac{T}{T + \Delta T}. \end{aligned} \quad (22-26)$$

Aqui, substituímos  $dQ$ , o calor extraído do bloco mais quente à medida que sua temperatura varia de  $dT$ , por  $mc \, dT$ . Como a quantidade da qual se torna o logaritmo na Eq. 22-26 é menor do que um, o logaritmo é negativo, confirmando que a entropia diminui durante este processo.

Para continuar com o processo reversível, ajustamos agora a temperatura do reservatório para  $T - \Delta T$ , a temperatura do bloco mais frio, e colocamos *este* em contato com o reservatório. Aumentamos então lentamente (de modo reversível) a temperatura do reservatório, desde de  $T - \Delta T$  até  $T$ , adicionando calor ao bloco mais frio. Como este

ganhou calor, sua entropia aumenta, sendo a variação de entropia agora

$$\Delta S_C = mc \ln \frac{T}{T - \Delta T}. \quad (22-27)$$

Os dois blocos estão agora no seu estado final de equilíbrio e o processo reversível está completo. A variação de entropia total para o sistema é obtida adicionando as Eqs. 22-26 e 22-27, o que fornece

$$\begin{aligned} S_f - S_i &= \Delta S_H + \Delta S_C \\ &= mc \ln \frac{T}{T + \Delta T} + mc \ln \frac{T}{T - \Delta T} \end{aligned}$$

ou

$$S_f - S_i = mc \ln \frac{T^2}{T^2 - \Delta T^2} \quad (22-28)$$

(transferência irreversível de calor)

Para obter a Eq. 22-28 usamos o fato de que  $\ln a + \ln b = \ln ab$  e  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ .

A quantidade da qual tomamos o logaritmo na Eq. 22-28 é maior do que 1. Assim, o logaritmo é positivo. Isto implica em  $S_f > S_i$ . Logo, a entropia do sistema aumenta durante esta transferência de calor irreversível. Como o sistema está termicamente isolado do seu ambiente, a entropia do conjunto *sistema + ambiente* também aumenta durante este processo irreversível, da mesma maneira que para uma expansão (irreversível) livre.

**EXEMPLO 22-8** Um mol de um gás ideal se expande livremente até duas vezes o seu volume original (Fig. 20-6). Qual a variação de entropia do gás? E do ambiente?

**Solução** A variação de entropia do gás é dada pela Eq. 22-25:

$$\begin{aligned} S_f - S_i &= nR \ln \frac{V_f}{V_i} \\ &= (1.00 \text{ mol})(8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(\ln 2) \\ &= 5.76 \text{ J/K}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Isto corresponde a um aumento de entropia. A entropia do ambiente não muda porque o gás está termicamente isolado. Assim, a variação de entropia para o *sistema + ambiente* é + 5.76 J/K.

**EXEMPLO 22-9** Dois blocos de cobre, cada um com massa  $m$  de 850 g, são postos em contato térmico dentro de uma caixa isolada, como na Fig. 22-14b. As temperaturas iniciais dos dois blocos são 325 K e 285 K e o calor específico do cobre é 0,386 J/g·K.

a. Qual a temperatura final de equilíbrio  $T$  dos dois blocos?

**Solução** O calor perdido pelo bloco mais quente deve ser absorvido pelo mais frio, assim,

$$mc(325 \text{ K} - T) = mc(T - 285 \text{ K}).$$

Cancelando os fatores  $mc$  e resolvendo para  $T$ , obtemos

$$T = \frac{1}{2}(325 \text{ K} + 285 \text{ K}) = 305 \text{ K.} \quad (\text{Resposta})$$

b. Qual a variação de entropia para os dois blocos?

**Solução** A quantidade  $\Delta T$  que aparece na Eq. 22-28 é

$$\Delta T = 325 \text{ K} - 305 \text{ K} = 20 \text{ K.}$$

Para conferir, note  $305 \text{ K} - 285 \text{ K} = 20 \text{ K}$ . Da Eq. 22-28 temos, então,

$$\begin{aligned} S_f - S_i &= mc \ln \frac{T^2}{T^2 - \Delta T^2} \\ &= (0.850 \text{ kg})(386 \text{ J/kg} \cdot \text{K}) \\ &\quad \times \ln \frac{(305 \text{ K})^2}{(305 \text{ K})^2 - (20 \text{ K})^2} \\ &= 1.41 \text{ J/K.} \quad (\text{Resposta}) \end{aligned}$$

Como no caso da expansão livre, a entropia aumenta neste processo irreversível. Como o processo ocorre num ambiente isolado, a variação de entropia do ambiente é zero e a variação total para o sistema + ambiente é + 1,41 J/K, o que corresponde a um aumento.

## 22-10 Entropia e a Segunda Lei da Termodinâmica

Podemos agora formular a segunda lei da termodinâmica em termos de entropia:

**SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA (TERCEIRA FORMA):** Em qualquer processo termodinâmico que vai de um estado de equilíbrio para outro, a entropia do conjunto *sistema + ambiente* aumenta ou permanece constante.

Não existe qualquer procedimento que faça com que a entropia do *sistema + ambiente* diminua. É verdade que podemos fazer a entropia de um *sistema* decrescer, mas este decréscimo será sempre acompanhado por um acréscimo maior ou igual na entropia do ambiente onde está o sistema.

O terceiro exemplo de um não-evento proposto na Seção 22-1, o deslocamento espontâneo do ar numa sala para um canto, é o que podemos chamar de uma *compressão livre*, o oposto de uma expansão livre. Vimos na seção anterior que uma expansão livre é sempre acompanhada por um aumento da entropia do *sistema + ambiente*. Uma compressão livre resultaria numa diminuição da entropia e, assim, seria uma violação da segunda lei da termodinâmica.

Vamos nos assegurar que a segunda lei da termodinâmica expressa em termos de entropia é consistente com as duas formas já apresentadas.

**1. Não existem máquinas perfeitas (moto perpétuo de segunda espécie).** Esta é a versão resumida da primeira for-

ma da segunda lei. Como uma máquina opera em um ciclo, a variação de entropia para o sistema, isto é, para o gás que é a substância que realiza trabalho, deve ser zero em um ciclo de operação. Logo, precisamos nos preocupar apenas com as variações de entropia do ambiente. Para uma máquina perfeita, o ambiente é o reservatório único de calor da Fig. 22-2b e a variação de entropia é negativa, pois o calor é retirado do reservatório. Assim, uma máquina perfeita (cuja existência viola a primeira forma) gera um decréscimo de entropia ao ser operada, uma violação da segunda lei em termos de entropia.

**2. Não existem refrigeradores perfeitos.** Esta é a versão resumida da segunda forma da segunda lei. Novamente, a variação de entropia para o gás num refrigerador perfeito é zero em um ciclo de operação, e precisamos nos preocupar apenas com a variação de entropia do ambiente. Neste caso, o ambiente são os dois reservatórios da Fig. 22-6b e a variação de entropia é

$$\Delta S = \frac{Q}{T_H} - \frac{Q}{T_C}.$$

Como  $T_H > T_C$ , esta variação de entropia é negativa. Logo, o refrigerador perfeito (que viola a primeira forma) também é uma violação da segunda lei em termos de entropia.

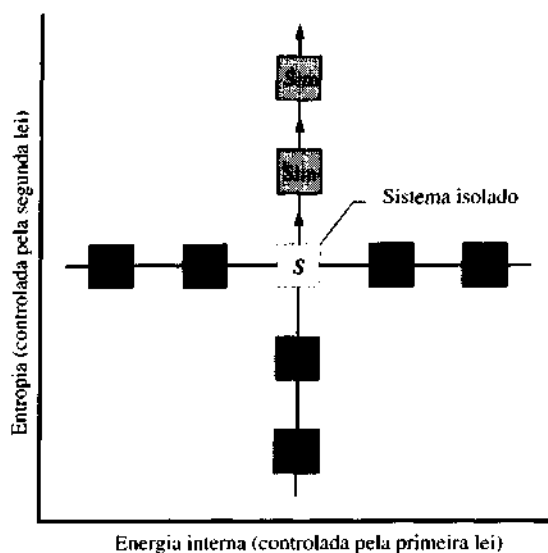
## Entropia, Energia Interna e Processos Espontâneos

Um processo espontâneo é aquele que ocorre sem nenhuma causa externa, sendo devido somente à constituição interna do sistema onde ocorre o processo. Por exemplo, o Sol brilha espontaneamente devido a processos nucleares internos, e não em razão de qualquer causa externa.

Como podemos descobrir se algum processo pode ocorrer de modo espontâneo no mundo real? Mesmo que ele seja consistente com todos os princípios de conservação (conservação da energia, por exemplo), ainda deverá preencher mais um requisito para ocorrer espontaneamente: deve sempre resultar num aumento de entropia.

A Fig. 22-15 resume os processos que podem ocorrer naturalmente num sistema isolado, com base em considerações sobre entropia e energia interna. O quadrado central representa o sistema, num estado inicial  $S$  com valores definidos de energia interna medida no eixo horizontal, e entropia, medida no eixo vertical. As únicas transições que podem ocorrer de forma natural para este sistema são para estados diretamente acima do inicial. Para essas transições, a energia permanece constante e a entropia aumenta, em concordância com a primeira e a segunda leis.

Transições para estados diretamente abaixo de  $S$  não podem ocorrer porque implicam uma diminuição da entropia; isto é proibido — para sistemas isolados — pela segunda lei. Transições para estado à direita ou esquerda de  $S$ , na Fig. 22-15, não podem ocorrer pois representam variações de energia; estas variações são proibidas — para sistemas isolados — pela primeira lei.



**Fig. 22-15** O bloco central representa o estado inicial  $S$  de um sistema termodinâmico isolado. Os outros blocos representam possíveis estados finais. Somente transições para estado verticalmente acima de  $S$  são consistentes com a primeira e a segunda leis da termodinâmica. Transições para todos os outros estados são proibidas por uma ou outra dessas leis.

Embora considerações entre entropia e energia revelem *se* um processo pode ocorrer espontaneamente, nada nos dizem sobre *quando* ele ocorrerá. Alguns processos, como a expansão livre de um gás num ambiente onde se fez vácuo, ocorrem rapidamente; outros, como o decaimento radioativo de certos isótopos de urânio, levam bilhões de anos.

### 22-11 O Que é Entropia Afinal de Contas?

Como a nossa discussão da entropia até aqui tem sido bastante formal, você pode não ter ainda desenvolvido um sentimento físico para este importante conceito. Vamos resumir o que já discutimos e tentar tornar este conceito mais físico, explorando o seu significado em novas direções.

#### Entropia: A Seta do Tempo

A entropia  $S$ , como a energia  $E_{\text{int}}$  e a temperatura  $T$ , é simplesmente uma das várias propriedades físicas de um sistema que pode ser medida em laboratório e à qual podemos associar um número e uma unidade. (Na realidade algumas pessoas crêem que — no nível mais fundamental — entropia é a *mais simples* dessas três propriedades, no que concerne ao entendimento em termos físicos.)

Considere um sistema, isolado de seu ambiente, que pode existir em dois estados — vamos chamá-los  $A$  e  $B$  — que têm a mesma energia. Se o sistema estiver no estado  $A$ , passará espontaneamente para o  $B$ , à medida que o tempo transcorre? Se estiver no estado  $B$ , passará normalmente para o  $A$ ? A entropia fornece a resposta. A segunda lei da termodinâmica nos diz:

As únicas mudanças possíveis num sistema isolado são aquelas em que a entropia do sistema aumenta ou permanece constante. Processos nos quais a entropia diminui, não ocorrem.

A entropia permanece a mesma somente para processos reversíveis. Nenhum processo natural é completamente reversível, assim, praticamente em todos os casos, quando um processo ocorre espontaneamente, procuramos por um *aumento* de entropia.

Podemos encontrar casos em que a entropia de um sistema particular *diminui* num processo espontâneo, mas você pode estar certo que um aumento (maior) de entropia está ocorrendo, simultaneamente, em alguma parte do ambiente. Os sistemas ordenados da Fig. 22-16 foram formados às custas de um acréscimo da entropia do ambiente.

A primeira e a segunda leis da termodinâmica podem ser resumidas assim:

A energia do universo permanece constante; a entropia do universo sempre aumenta.

A energia obedece a uma lei de conservação; a entropia, não.

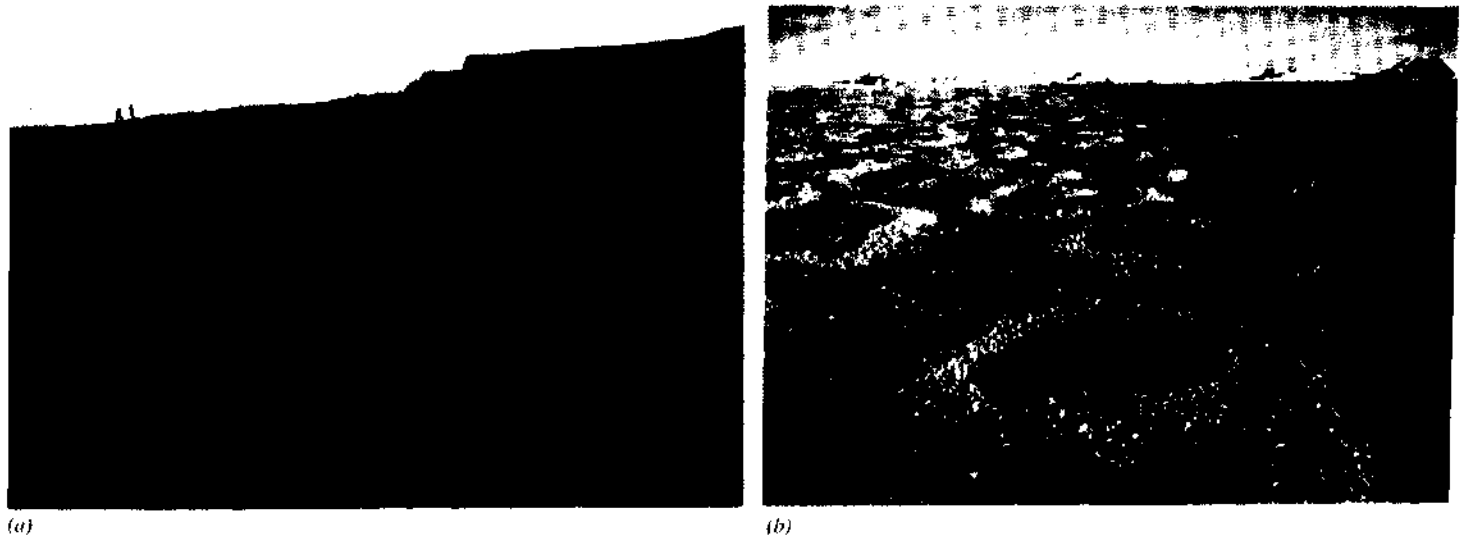
#### Entropia: Uma Medida da Desordem Atômica

A entropia também é associada à *desordem* de um sistema, uma noção que tem chamado a atenção do público. A afirmativa que a desordem do universo (ou do nosso cantinho nele) sempre aumenta à medida que o tempo passa, é aceita pela maioria das pessoas, sem problemas. Se a desordem e a entropia *aumentam* com o passar do tempo, podem estar relacionadas. Na realidade estão; para estabelecer a relação devemos definir *desordem* de uma maneira útil e quantitativa.

O tratamento formal da entropia, a partir deste ponto de vista, é o assunto da *termodinâmica estatística*, que não será tratada neste livro. Podemos, no entanto, discutir alguns exemplos qualitativos, que mostram como a desordem de um sistema — de acordo com sua definição formal — pode aumentar.

1. Duplicação súbita do volume de um recipiente isolante que contém um gás, como no caso de uma expansão livre. Já vimos antes que esta expansão envolve um aumento de entropia. A desordem atômica do gás *também* aumenta, pois há agora mais posições no espaço que podem ser ocupadas pelas moléculas do gás.
2. Aumento da temperatura de um gás num recipiente de volume fixo, adicionando calor. Mesmo que o calor seja absorvido pelo gás de maneira reversível, a Eq. 22-19 nos diz que a entropia do gás deve aumentar. A desordem *também* aumenta, porque existem agora mais valores para a velocidade que as moléculas do gás podem adquirir.





**Fig. 22-16** Algumas vezes, uma ordem surpreendente aparece naturalmente. (a) Por exemplo, o Giant's Causeway na Irlanda do Norte consiste em grandes colunas de pedra muitas das quais de seção reta hexagonal, dando a impressão de terem sido projetadas. Elas se formaram quando o magma incandescente aflorou e foi resfriado. (b) Também podemos ver ordem nos círculos arrumados de cascalho e pedras que ocorrem naturalmente numa ilha do Norte da Noruega. Como as colunas e os círculos se formaram ainda é uma questão polêmica, mas podemos estar certos de que, como a entropia do magma e das pedras diminuiu, a entropia dos seus ambientes aumentou.

3. Dissipação gradual da energia no movimento circular do café, depois que mexemos o cafezinho numa xícara para dissolver o açúcar. Já vimos que neste processo espontâneo a entropia aumenta. A desordem atômica também aumenta, pois o movimento de rotação inicial do café estava associado a um estado relativamente ordenado.

Não existe limite para o número de exemplos que poderíamos enunciar. Será suficiente dizer aqui que a desordem pode ser definida de maneira quantitativa e também ser relacionada formalmente à entropia. O caminho foi indicado por Ludwig Boltzmann (1844-1906), cuja constante  $k$  já utilizamos em outras ocasiões. A equação

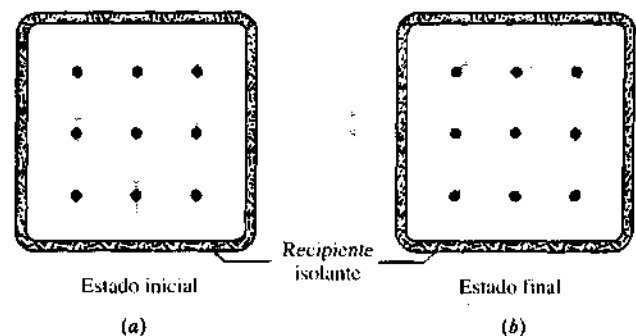
$$S = k \log W,$$

que foi formulada pela primeira vez por Boltzmann, é a equação central da termodinâmica estatística, relacionando entropia com desordem de maneira quantitativa. Ela está gravada no seu túmulo. Aqui,  $S$  é a entropia do sistema e  $W$  (que é, em geral, um número muito grande) é uma medida da desordem do sistema. Podemos definir  $W$  como o número de arranjos diferentes dos átomos de um sistema que podem ser feitos sem alterar as propriedades macroscópicas externas do sistema.

Falando de maneira não muito rigorosa,  $W$  (e, conseqüentemente,  $S$ ) é muito maior para um ovo quebrado do que para um ovo inteiro. Isto é, existe um número muito maior de maneiras para obter um ovo quebrado a partir de seus constituintes, do que maneiras de construir um ovo inteiro. Se você deixar cair um ovo, ele se fragmentará espontaneamente; o processo inverso nunca acontece!

### Uma Aplicação Muito Interessante da Entropia

A entropia é fundamental para entender um método de produzir temperaturas muito baixas, chamado *desmagnetização adiabática*. Uma amostra de um sólido, como um sal de cromo-alumínio, onde alguns átomos são equivalentes a minúsculos ímãs, é colocada num ambiente termicamente isolado na temperatura mais baixa que se puder atingir (talvez uns poucos milikelvins). Um ímã que gera um campo magnético muito intenso é colocado perto da amostra, como na Fig. 22-17a, fazendo com que os átomos se alinhem com o campo magnético externo, formando um estado altamente ordenado. O ímã é então afastado da amo-



**Fig. 22-17** Um método para obter temperaturas muito baixas. (a) Ímãs (dipolos magnéticos) atômicos num sal de cromo-alumínio são alinhados por um campo magnético externo. (b) Quando o campo externo é removido, a desordem (entropia) associada à orientação dos átomos aumenta. Como não pode haver variação de entropia neste processo reversível isolado termicamente, a desordem (entropia) associada à temperatura da amostra deve diminuir da mesma quantidade.

tra de modo a não poder mais afetá-la. Devido à agitação térmica, os ímãs associados aos átomos assumem agora orientações aleatórias, como na Fig. 22-17b. A desordem (e conseqüentemente a entropia) associada ao arranjo dos átomos aumentou evidentemente.

O sistema está isolado, logo, nenhum calor pode entrar ou sair. O processo de remover o ímã e (em conseqüência) tornar aleatórias as orientações dos ímãs associados aos átomos é muito aproximadamente reversível. Assim, da segunda lei, esperamos que o sistema não sofra nenhuma variação de entropia. No entanto, já vimos que o processo de tornar uma distribuição aleatória envolve um *aumento* de entropia.

Onde está a *diminuição* de entropia para compensar? Ela pode se manifestar somente como uma diminuição nas oscilações da estrutura da amostra. Em outras palavras, a temperatura da amostra deve diminuir — e isto realmente acontece. Esta técnica tem sido usada com grande sucesso para obter recordes de baixa temperatura.

## 22-12 A Natureza das Leis Físicas: Uma Digressão\*

Já encontramos neste livro várias leis físicas, entre elas: leis do movimento de Newton; a lei da gravitação de Newton, a lei da energia, momento linear e momento angular; e também a primeira e a segunda leis da termodinâmica. Ao encerrarmos o estudo da termodinâmica, parece apropriado fazer uma revisão e considerar a natureza das leis físicas em geral.

Uma lei da física é simplesmente uma afirmativa — em forma de palavras, como a segunda lei da termodinâmica ou em forma de equação, como a lei de Newton para a gravitação — que resume os resultados da experiência e da observação para uma certa faixa de fenômenos físicos. Como “verdade” é um conceito bastante abstrato, com uma enorme carga de conceitos filosóficos e éticos, os físicos raramente dizem quando se referem a uma lei: “Ela é verdadeira?” A pergunta quase sempre feita é muito mais específica e sua resposta é muito mais fácil: “Os resultados previstos por esta lei concordam com a experiência?”

\*Veja Richard Feynman, *The Character of Physical Law*, MIT Press, Cambridge, MA, 1965.

Os físicos estão continuamente levando a limites extremos as variáveis em que uma lei é expressa, para ver se ela continua válida. Esta lei vale para temperaturas altas ou altas velocidades? Uma lei da física não é uma verdade eterna, mas uma afirmativa que deve ser posta à prova. A lei pode passar por essas provas sem modificações ou pode ter de ser modificada de alguma maneira. Em qualquer caso, deve sempre esperar pelo desafio de novos dados experimentais. Como disse Einstein, “Nenhum número de experiências, por maior que seja, pode provar que estou certo; mas basta uma única experiência para provar que estou errado.”

Por exemplo, as leis de Newton do movimento — cuja importância deveria ser óbvia para todos — não concordam com a experiência, quando aplicadas a partículas cujas velocidades são uma fração apreciável da velocidade da luz. Esta falha não é súbita, mas gradual, com a discordância entre a teoria e a experiência ficando cada vez maior à medida que a velocidade da partícula se aproxima da velocidade da luz.

Neste caso outra lei, a teoria especial da relatividade de Einstein, concorda plenamente com a experiência em toda a faixa de velocidades observável. Como ficam as leis de Newton neste caso? Elas se tornam um caso particular extremamente útil de uma lei mais ampla. A utilidade das leis de Newton permanece intacta no vasto e importante campo em que elas concordam com a experiência.

E a segunda lei da termodinâmica? No seu estado atual, se nos limitarmos a processos que começam e terminam em estados de equilíbrio, não existem exceções a essa lei. Se um inventor afirmar que construiu uma máquina que viola essa lei (o moto perpétuo de segunda espécie), o peso de décadas de experiência compartilhadas por cientistas competentes e engenheiros em todo o mundo cairá sobre o inventor. Ele poderá estar certo, mas terá de provar cuidadosamente a sua afirmativa. Ainda assim, nenhum cientista negaria que a segunda lei da termodinâmica pode um dia vir a ser reinterpretada como um caso especial de uma lei mais geral.

Talvez o fato mais impressionante sobre as leis físicas seja que elas existem e têm formas tão simples. O fato de que domínios tão vastos da experiência possam ser resumidos numa única sentença ou numa única equação continua deixando maravilhados todos os que pensam com clareza. Mais uma vez Einstein colocou a questão de maneira correta, quando afirmou que “a coisa mais incompreensível acerca do Universo é que ele é compreensível.”

## RESUMO

### Máquinas

Uma *máquina* é um dispositivo que, de uma maneira cíclica, retira calor  $Q_H$  de um reservatório à temperatura mais alta (a temperatura  $T_H$ , em Kelvins) e realiza trabalho  $W$ . Existe sempre uma perda de calor  $Q_C$  num reservatório à temperatura mais baixa  $T_C$ . A **eficiência térmica**  $e$  de uma máquina é

$$e = \frac{|W|}{|Q_H|} = \frac{|Q_H| - |Q_C|}{|Q_H|} \quad (22-2)$$

A segunda lei da termodinâmica diz que é impossível a existência de máquinas perfeitas, ou seja, com  $e = 1$ . Não é possível transformar calor

completamente em trabalho, sem o aparecimento de nenhuma outra transformação.

### Refrigeradores

Um *refrigerador* é um aparelho que, de maneira cíclica, remove calor de um local mais frio e, realizando trabalho, transfere-o para um local mais quente. Sua eficiência é medida pelo **coeficiente de performance**  $K$ , definido como

$$K = \frac{|Q_C|}{|W|} = \frac{|Q_C|}{|Q_H| - |Q_C|} \quad (22-6)$$

(A segunda lei da termodinâmica nega a existência de refrigeradores perfeitos, com  $K = \infty$ . Não é possível transferir calor de um corpo à temperatura mais baixa para outro a temperatura mais alta, sem causar outras mudanças no ambiente.

#### Processos Reversíveis

Um processo reversível é uma transformação idealizada de um estado inicial  $i$  para um estado final  $f$ , que pode ser revertido por meio de mudanças infinitesimais nas condições externas.

#### O Ciclo de Carnot

O ciclo de Carnot descreve o funcionamento de uma máquina térmica ideal (isto é, reversível). Como mostram as Figs. 22-8 e 22-9, consiste em dois processos adiabáticos (para os quais  $Q = 0$ ), alternados em dois processos isotérmicos (para os quais  $T = \text{constante}$ ). A eficiência de qualquer máquina que utilize o ciclo de Carnot é

$$e_{\text{Car}} = \frac{T_H - T_C}{T_H} \quad (\text{máquina de Carnot}) \quad (22-7)$$

e o coeficiente de performance de um refrigerador de Carnot é

$$K_{\text{Car}} = \frac{T_C}{T_H - T_C} \quad (\text{refrigerador de Carnot}). \quad (22-8)$$

#### As Duas Formas da Segunda Lei da Termodinâmica

Nenhum motor (ou refrigerador) real, operando entre duas temperaturas, pode ter uma eficiência maior (ou coeficiente de performance) do que uma máquina de Carnot (ou refrigerador) operando entre as mesmas temperaturas.

#### Entropia

Entropia  $S$ , como pressão e volume, é uma propriedade (uma **variável de estado**) de um sistema em equilíbrio. A variação  $S$  para um sistema

que sofre uma mudança reversível de um estado  $i$  para um estado  $f$  é definida como

$$S_f - S_i = \int_i^f dS = \int_i^f \frac{dQ}{T} \quad (\text{processo reversível}), \quad (22-19)$$

onde  $dQ$  é a quantidade transferida à temperatura  $T$ . A variação de entropia  $S_f - S_i$  depende somente dos estados inicial e final e não depende de maneira alguma da natureza do processo reversível que liga os estados. A unidade SI para entropia é o joule por kelvin.

#### Variação de Entropia para um Processo Irreversível

A variação de entropia para um processo irreversível pode ser calculada (1) encontrando um processo reversível que ligue os estados  $i$  e  $f$ , e (2) calculando  $S_f - S_i$  para este processo, usando a Eq. 22-19. O resultado é a variação de entropia para o processo irreversível.

#### A Segunda Lei da Termodinâmica em Termos de Entropia

O conceito de entropia é importante porque, em qualquer processo termodinâmico que comece e termine em estados de equilíbrio, a entropia do sistema + ambiente aumenta ou permanece constante. Esta forma da segunda lei da termodinâmica é equivalente àquela em termos de "motor" e "refrigerador" vista anteriormente.

#### Lei Física

Uma lei da física é um enunciado que resume resultados da experiência e da observação para uma certa faixa de fenômenos físicos. Ela está sempre sujeita a experiências adicionais e algumas vezes é modificada, à medida que novas evidências aparecem. Quando uma versão anterior de uma lei é substituída por outra mais geral, a versão anterior permanece, freqüentemente, como um caso particular útil da lei geral.

## QUESTIONÁRIO

- Um ser humano é uma máquina térmica? Explique.
- Não poderíamos definir a eficiência de uma máquina como  $e = W/Q_C$  em vez de  $e = W/Q_H$ ? Por que não o fazemos?
- A eficiência de usinas nucleares é menor do que aquelas que usam combustíveis fósseis. Por quê?
- Pode uma dada quantidade de energia mecânica ser convertida inteiramente em calor? Em caso afirmativo, dê um exemplo.
- Um inventor sugeriu aquecer uma casa da seguinte maneira: um sistema semelhante a um refrigerador retira o calor da Terra e o transfere para a casa. Ele argumentava que o calor fornecido à casa poderia ser maior do que o trabalho realizado pelo motor do sistema. Qual a sua opinião?
- Explique qualitativamente como as forças de atrito entre duas superfícies aumentam a temperatura destas superfícies. Por que o processo inverso não ocorre?
- Um bloco volta à sua posição inicial, depois de se mover dissipando energia por atrito. Por que este processo não é termicamente reversível?
- Veja se os seguintes processos são reversíveis: (a) quebrar uma garrafa de refrigerante vazia; (b) misturar café com leite; (c) derreter um cubo de gelo num copo com chá; (d) queimar um pedaço de lenha; (e) furar um pneu; (f) terminar a "Sinfonia Inacabada"; (g) escrever este livro.
- Dê alguns exemplos de processos naturais que sejam aproximadamente reversíveis.
- Podemos calcular o trabalho realizado durante um processo irreversível em termos de uma área num diagrama  $p - V$ ? Algum trabalho é realizado?
- Sugira um processo reversível para fornecer calor a um sistema. Por que fornecer calor usando um bico de Bunsen não é um processo reversível?
- Para percorrer um ciclo de Carnot, um sistema não precisa começar do ponto  $a$  na Fig. 22-9, podendo começar indiferentemente dos pontos  $b$ ,  $c$  ou  $d$  ou de qualquer outro intermediário. Explique.
- Se uma máquina de Carnot tem um rendimento independente da substância que realiza o trabalho, talvez as máquinas reais sejam também, até um certo ponto, independentes. Por que então nos preocupamos, no caso das máquinas reais, em escolher combustíveis apropriados como carvão, gasolina ou material fissionável? Por que não usamos pedras como combustível?
- Sob que condições uma máquina térmica ideal seria 100% eficiente?
- Que fatores reduzem a eficiência de uma máquina térmica a valores abaixo do valor ideal?
- Você deseja aumentar a eficiência de uma máquina de Carnot o máximo possível. Pode fazê-lo aumentando  $T_H$  de uma certa quantidade

de, enquanto mantém  $T_c$  constante, ou diminuindo  $T_c$  da mesma quantidade e mantendo  $T_H$  constante. Qual dos dois procedimentos adota?

17. Podemos resfriar uma cozinha deixando a porta da geladeira aberta? Explique.

18. Por que um carro faz menos quilômetros por litro de gasolina no inverno que no verão?

19. De tempos em tempos inventores afirmam ter aperfeiçoado aparelhos que realizam trabalho útil, mas não consomem (ou consomem muito pouco) combustível. Quais das seguintes afirmativas é mais provavelmente correta: (a) os inventores estão corretos; (b) os inventores fizeram medidas erradas; (c) os inventores são trapaceiros. Você acha que uma afirmativa dessas seria analisada cuidadosamente por uma comissão de engenheiros e cientistas? Na sua opinião, o tempo e o esforço consumidos se justificam?

20. Vimos que máquinas reais sempre rejeitam uma quantidade substancial de calor no reservatório a baixa temperatura (fonte fria). Não parece correto desperdiçar esta energia. Por que não usá-la para operar uma segunda máquina, com a fonte fria da primeira máquina servindo como reservatório à alta temperatura da segunda?

21. Dê exemplos de processos em que a entropia de um sistema diminui, e explique por que a segunda lei da termodinâmica não é violada.

22. Seres vivos violam a segunda lei da termodinâmica? Quando a galinha se desenvolve a partir de um ovo, por exemplo, ela se torna cada vez mais ordenada e organizada. Aumentar a entropia, no entanto, leva à desordem e à desagregação. A entropia de uma galinha realmente diminui enquanto ela cresce?

23. Duas amostras de um gás, inicialmente à mesma temperatura e pressão, são comprimidas do volume  $V$  para o volume  $V/2$ , um isotermicamente e outro adiabaticamente. Em qual dos casos a pressão final é maior? A entropia do gás varia durante qualquer um dos processos?

24. Suponha que decidimos representar os estados de um sistema usando sua entropia e sua temperatura (em Kelvins), em vez da pressão e do volume. (a) Qual o aspecto de um ciclo de Carnot em um diagrama  $T - S$ ? (b) Que significado físico, se houver algum, podemos associar à área sob uma curva num diagrama  $T - S$ ?

25. Ocorre alguma variação de entropia em movimentos puramente mecânicos?

26. Mostre que a entropia total aumenta quando energia cinética é dissipada por atrito entre duas superfícies. Descreva o aumento da desordem.

27. Dois pedaços de argila de massas iguais se movem em direções opostas com a mesma velocidade, colinearmente. Eles colidem, permanecendo unidos após a colisão. Trate os dois pedaços como um único sistema e diga se cada uma das seguintes quantidades é positiva, negativa ou zero para este processo:  $\Delta E_{int}$ ,  $W$ ,  $Q$  e  $\Delta S$ . Justifique suas respostas.

28. Calor é transferido do Sol para a Terra. Mostre que a entropia do sistema Terra-Sol aumenta durante o processo.

29. É verdade que a energia do Universo está ficando cada vez menos utilizável? Em caso afirmativo, por quê?

30. Critique o seguinte comentário feito pelos físicos Panofsky e Phillips: "Do ponto de vista formal da física existe somente um conceito que é assimétrico no tempo, ou seja, entropia. Mas isso faz com que seja razoável supor que a segunda lei da termodinâmica pode ser usada para estabelecer o sentido do tempo independente de qualquer sistema de referência; isto é, tomamos como direção positiva do tempo aquela associada ao aumento estatístico da desordem ou da entropia." (Veja "The Arrow of Time" por David Layzer, *Scientific American*, dezembro de 1975.)

31. Explique a afirmativa: "Os raios cósmicos *diminuem* continuamente a entropia da Terra, no local onde caem." Por que isto não contradiz a segunda lei da termodinâmica?

## EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

### Seção 22-2 Máquinas

1E. Uma máquina térmica absorve 52 Kcal de calor e rejeita 36 Kcal de calor em cada ciclo. Calcule (a) A eficiência; (b) O trabalho realizado em quilocalorias por ciclo.

2E. O motor de um carro realiza 8,2 kJ de trabalho por ciclo. (a) Antes de uma revisão, a eficiência é 25%. Calcule, por ciclo, o calor absorvido da queima do combustível e o calor rejeitado para a atmosfera; (b) Depois de uma revisão, a eficiência é 31%. Quais os novos valores das quantidades calculadas em (a)?

3E. Calcule a eficiência de uma usina que utiliza combustíveis fósseis, consumindo 380 toneladas métricas de carvão por hora para produzir trabalho útil à taxa de 750 MW. O calor de combustão de 1,0 kg de carvão é 28 MJ.

4P. Um mol de um gás ideal monoatômico passa pelo ciclo mostrado na Fig. 22-18. O processo  $bc$  é uma expansão adiabática;  $p_b = 10,0$  atm,  $V_b = 1,00 \times 10^{-3}$  m<sup>3</sup>, e  $V_c = 8,00 V_b$ . Calcule: (a) O calor adicionado ao gás; (b) O calor cedido pelo gás; (c) O trabalho realizado pelo gás; e (d) A eficiência do ciclo.

5P. Um mol de um gás ideal monoatômico, inicialmente ocupando um volume de 10 L e à temperatura de 300 K, é aquecido a volume constante até a temperatura de 600 K, expande isotermicamente até atingir a pressão inicial e finalmente é comprimido isobaricamente (à pressão

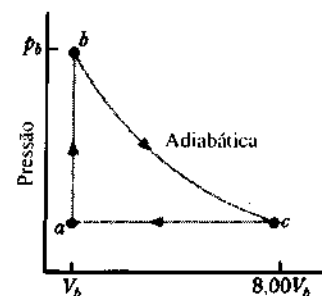


Fig. 22-18 Problema 4.

constante), retornando ao volume, pressão e temperatura originais. (a) Calcule o calor absorvido pelo sistema durante um ciclo; (b) Qual o trabalho realizado pelo gás durante um ciclo? (c) Qual a eficiência deste ciclo?

### Seção 22-3 Refrigeradores

6E. Um refrigerador realiza 150 J de trabalho para retirar 560 J de calor de sua câmara fria. (a) Qual é o coeficiente de performance do refrigerador? (b) Quanto calor é injetado na cozinha, por ciclo?

7E. Para fazer gelo, um freezer extrai 42 kcal de calor de um reservatório a  $-12^\circ\text{C}$  em cada ciclo. O coeficiente de performance do freezer é

5.7. A temperatura do ambiente é  $26^{\circ}\text{C}$ . (a) Quanto calor, por ciclo, é rejeitado para o ambiente? (b) Qual a quantidade de trabalho por ciclo necessária para manter o freezer em funcionamento?

### Seção 22-7 A Eficiência das Máquinas Reais

8E. Uma máquina térmica a gás ideal opera num ciclo de Carnot entre  $235^{\circ}\text{C}$  e  $115^{\circ}\text{C}$ . Ela absorve  $6,30 \times 10^4$  cal por ciclo no reservatório à alta temperatura. (a) Qual a eficiência da máquina? (b) Quanto trabalho por ciclo esta máquina é capaz de realizar?

9E. Quanto trabalho deve ser realizado para extrair  $1,0$  J de calor (a) de um reservatório a  $7,0^{\circ}\text{C}$  e transferi-lo para outro a  $27^{\circ}\text{C}$ , usando um refrigerador que opere a um ciclo de Carnot; (b) de um reservatório a  $-73^{\circ}\text{C}$  para outro a  $27^{\circ}\text{C}$ ; (c) de um reservatório a  $-173^{\circ}\text{C}$  para um a  $27^{\circ}\text{C}$ ; e (d) de um reservatório a  $-223^{\circ}\text{C}$  para outro a  $27^{\circ}\text{C}$ ?

10E. Num ciclo de Carnot, a expansão isotérmica de um gás ideal acontece a  $400$  K e a compressão isotérmica a  $300$  K. Durante a expansão,  $500$  cal de calor são transferidas pelo gás. Calcule (a) o trabalho realizado pelo gás durante a expansão isotérmica; (b) o calor rejeitado pelo gás durante a compressão isotérmica e (c) o trabalho realizado pelo gás durante a compressão isotérmica.

11E. Num reator nuclear de fusão hipotético, o combustível é deutério (D) gasoso à temperatura de  $7 \times 10^8$  K. Se este gás pudesse ser usado para operar uma máquina térmica ideal com  $T_c = 100^{\circ}\text{C}$ , qual seria a sua eficiência?

12E. Uma máquina de Carnot tem uma eficiência de 22%. Ela opera entre reservatórios térmicos cujas temperaturas diferem por  $75^{\circ}\text{C}$ . Quais são as temperaturas dos reservatórios?

13E. Um aparelho que liquefaz hélio num aposento a  $300$  K. Se o hélio dentro do aparelho está a  $4,0$  K, qual é a razão mínima entre o calor rejeitado para o aposento e o removido do hélio?

14E. Um condicionador de ar ideal e reversível retira calor de um quarto a  $70^{\circ}\text{F}$  e o transfere para o ambiente, que está a  $96^{\circ}\text{F}$ . Para cada joule de energia elétrica necessário para operar o condicionador de ar, quantos joules de calor são removidos do quarto?

15E. Para o ciclo de Carnot ilustrado na Fig. 22-9, mostre que o trabalho realizado pelo gás durante o processo *bc* (passo 2) tem o mesmo valor absoluto que o realizado durante o processo *da* (passo 4).

16E. (a) Para um refrigerador (ideal) de Carnot, mostre que

$$|W| = |Q_c| \frac{T_H - T_C}{T_C}$$

(b) Num refrigerador real, as serpentinas estão a  $-13^{\circ}\text{C}$  e o gás comprimido no condensador está a  $26^{\circ}\text{C}$ . Qual o coeficiente de performance teórico?

17E. (a) Uma máquina de Carnot opera entre uma fonte quente a  $320$  K e uma fria a  $260$  K. Se ela absorve  $500$  J de calor por ciclo na fonte quente, quanto trabalho por ciclo realiza? (b) Se a mesma máquina, trabalhando em sentido contrário, funciona como um refrigerador entre as mesmas fontes térmicas, quanto trabalho por ciclo deve ser fornecido para remover  $1.000$  J de calor da fonte fria?

18E. Uma combinação mercúrio-turbina a vapor coleta vapor de mercúrio saturado de um boiler a  $876^{\circ}\text{F}$  e o injeta num boiler a vapor a  $460^{\circ}\text{F}$  para aquecê-lo. A turbina a vapor recebe vapor a esta temperatura e o injeta em um condensador que está a  $100^{\circ}\text{F}$ . Qual a eficiência máxima desta combinação?

19E. Numa bomba térmica, o calor do ambiente a  $-5^{\circ}\text{C}$  é transferido para um aposento a  $17^{\circ}\text{C}$ , com a energia sendo fornecida por um motor

elétrico. Quantos joules de calor serão injetados no aposento, para cada joule de energia elétrica consumido? Suponha uma bomba térmica ideal.

20P. Uma bomba térmica é usada para aquecer um edifício. Do lado de fora a temperatura é  $-5^{\circ}\text{C}$  e dentro do edifício deve ser mantida a  $22^{\circ}\text{C}$ . O coeficiente de performance é 3,8 e a bomba injeta  $1,8$  Mcal de calor no edifício por hora. A que taxa devemos realizar trabalho para manter a bomba operando?

21P. Uma máquina de Carnot tem uma potência de  $500$  W. Ela opera entre  $100^{\circ}\text{C}$  e  $60,0^{\circ}\text{C}$ . Calcule (a) a taxa de entrada de calor e (b) a taxa de saída de calor em quilocalorias por segundo.

22P. O motor de um refrigerador tem  $200$  W de potência. Se o compartimento frio está a  $270$  K e o ar em volta a  $300$  K, qual a quantidade máxima de calor que pode ser extraída do compartimento frio, supondo eficiência ideal, em  $10$  min?

23P. Ache a relação entre a eficiência de uma máquina térmica reversível ideal e o coeficiente de performance do refrigerador reversível obtido ao operar a máquina em sentido inverso.

24P. (a) Mostre que, quando um ciclo de Carnot é traçado num diagrama temperatura (Kelvin) versus entropia ( $T - S$ ), o resultado é um retângulo. Para o ciclo de Carnot mostrado na Fig. 22-19, calcule (b) o calor ganho e (c) o trabalho realizado pelo sistema.

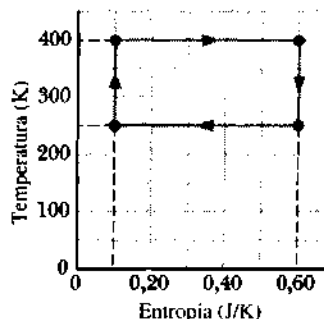


Fig. 22-19 Problema 24.

25P. Numa máquina de Carnot de dois estágios, uma quantidade  $Q_1$  de calor é absorvida à temperatura  $T_1$ , o trabalho  $W_1$  é feito e uma quantidade  $Q_2$  é rejeitada à temperatura  $T_2$  pelo primeiro estágio. O segundo estágio absorve o calor rejeitado pelo primeiro, realiza um trabalho  $W_2$ , e rejeita uma quantidade de calor  $Q_3$  a uma temperatura  $T_3$ . Prove que a eficiência desta combinação é  $(T_1 - T_3)/T_1$ .

26P. (a) Faça um gráfico preciso de um ciclo de Carnot num diagrama  $p - V$  para  $1,0$  mL de um gás ideal (veja Fig. 22-9). O ponto *a* corresponde a  $p = 1,00$  atm,  $T = 300$  K e o ponto *b*, a  $p = 0,500$  atm,  $T = 300$  K; considere a temperatura da frente fria igual a  $100$  K. Tome  $\gamma = 1,50$ . (b) Calcule graficamente o trabalho realizado neste ciclo. (c) Calcule o trabalho analiticamente.

27P. Uma máquina de Carnot trabalha entre as temperaturas  $T_1$  e  $T_2$ . Ela opera um refrigerador de Carnot que trabalha entre duas temperaturas diferentes  $T_3$  e  $T_4$  (Fig. 22-20). Ache a razão  $|Q_3|/|Q_4|$  em termos das quatro temperaturas.

28P. Um condicionador de ar operando entre  $93$  e  $70^{\circ}\text{F}$  é fabricado com uma capacidade de esfriamento igual a  $4.000$  Btu/h. Seu coeficiente de performance é 27% daquele de um refrigerador de Carnot operando entre as mesmas temperaturas. Qual a potência do motor do aparelho em hp?

29P. Suponha que um poço profundo foi escavado na crosta terrestre perto de um dos pólos, onde a temperatura na superfície é  $-40^{\circ}\text{C}$ , até

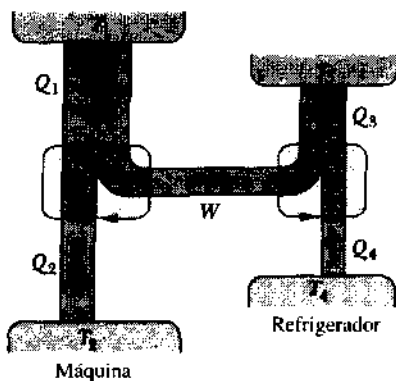


Fig. 22-20 Problema 27.

uma profundidade onde a temperatura é 800°C. (a) Qual o limite teórico para a eficiência de uma máquina operando entre estas temperaturas; (b) Se todo o calor entregue no reservatório à baixa temperatura fosse utilizado para derreter gelo inicialmente a -40°C, a que taxa seria produzida água líquida a 0°C por uma usina de potência 100 MW? O calor específico do gelo é 0,50 cal/g °C; seu calor de fusão é 80 cal/g. (Note que as máquinas poderiam operar somente entre 0 e 800°C neste caso. Energia liberada a -40°C não pode ser usada para elevar a temperatura de qualquer coisa acima de -40°C.)

30P. Um mol de um gás ideal monoatômico é usado para realizar trabalho em uma máquina que opera seguindo o ciclo mostrado na Fig. 22-21. Suponha que  $p = 2p_0$ ,  $V = 2V_0$ ,  $p_0 = 1,01 \times 10^5$  Pa, e  $V_0 = 0,0225$  m<sup>3</sup>. Calcule (a) O trabalho realizado por ciclo; (b) O calor adicionado por ciclo durante o trecho de expansão  $abc$ , e (c) A eficiência da máquina. (d) Qual a eficiência de Carnot de uma máquina operando entre as temperaturas mais altas e mais baixas que ocorrem neste ciclo? Compare esta eficiência com aquela calculada em (c).

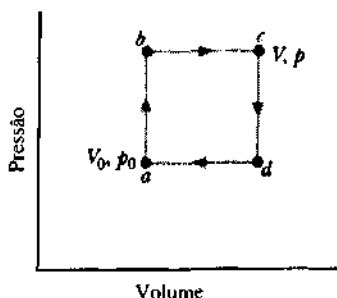


Fig. 22-21 Problema 30.

31P. Calcule a eficiência do ciclo mostrado no Problema 83 do Cap. 21. Neste caso, o calor não será absorvido a uma temperatura fixa, como no caso do ciclo de Carnot.

32P\*. Um motor de combustão interna a gasolina pode ser aproximadamente representado, quando em operação, pelo ciclo mostrado na Fig. 22-22. Suponha um gás ideal e use uma razão de compressão de 4:1 ( $V_2 = 4V_1$ ). Suponha que  $p_2 = 3p_1$ . (a) Determine a pressão e a temperatura em cada um dos vértices da figura em termos de  $p_1$ ,  $T_1$  e da razão de calores específicos do gás; (b) Qual a eficiência do ciclo?

**Seção 22-8 Entropia: Uma Nova Variável**

33E. Na Fig. 22-14, suponha que a variação de entropia do sistema, ao passar do estado  $a$  para o  $b$  ao longo do caminho 1, é +0,602 cal/K. Qual a variação de entropia ao passar (a) do estado  $a$  para o  $b$  ao longo do caminho 2 e (b) do estado  $b$  para o  $a$  ao longo do caminho 2.

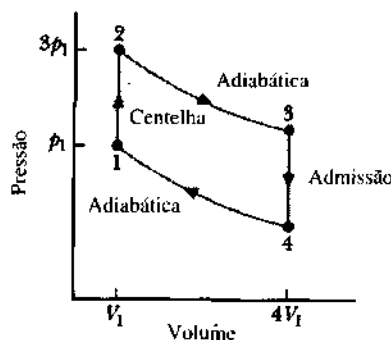


Fig. 22-22 Problema 32.

34E. Encontre (a) o calor absorvido e (b) a variação de entropia de um bloco de cobre de 1,0 kg, cuja temperatura é aumentada reversivelmente de 25 a 100°C. O calor específico do cobre é  $9,2 \times 10^{-2}$  cal/g·°C.

35E. Calor pode ser removido da água a 0,0°C e pressão atmosférica sem que a água congele, se o processo for feito com o mínimo possível de perturbação sobre a água. Suponha que uma gota d'água é resfriada desta maneira até que sua temperatura seja a do ar circundante, que é -5,0°C. A gota subitamente se congela e transfere calor para o ar até ficar novamente a -5°C. Qual é a variação de entropia por grama de água durante o congelamento e a transferência de calor?

36P. Um inventor afirma ter criado quatro máquinas, todas operando entre 400 e 300 K. As características de cada máquina, por ciclo, são as seguintes: máquina (a)  $Q_H = 200$  J,  $Q_C = -175$  J,  $W = 40$  J; máquina (b):  $Q_H = 500$  J,  $Q_C = -200$  J,  $W = 400$  J; máquina (c):  $Q_H = 600$  J,  $Q_C = -200$  J,  $W = 400$  J; máquina (d):  $Q_H = 100$  J,  $Q_C = -90$  J,  $W = 10$  J. Usando a primeira e a segunda leis da termodinâmica, verifique para cada máquina se alguma destas leis está violada.

37P. A temperaturas muito baixas, o calor específico molar  $C_V$  para muitos sólidos é (aproximadamente) proporcional a  $T^3$ ; isto é  $C_V = AT^3$ , onde  $A$  depende da substância. Para o alumínio,  $A = 7,53 \times 10^{-6}$  cal/mol·K<sup>4</sup>. Ache a variação de entropia de 4,00 moles de alumínio, quando sua temperatura varia de 5,00 a 10,0 K.

**Seção 22-9 Variações de Entropia para Processos Irreversíveis**

38E. Um gás ideal passa por uma expansão isotérmica a 77,0°C, aumentando seu volume de 1,30 para 3,40 L. A variação de entropia do gás é 22,0 J/K. Quantos moles do gás estão presentes?

39E. Um gás ideal passa por uma expansão isotérmica reversível a 132°C. A variação de entropia é 46,0 J/K. Quanto calor foi absorvido?

40E. Um mol de um gás ideal expande isotermicamente a 360 K até que seu volume dobre de valor. Qual o aumento na entropia do gás?

41E. Suponha que a mesma quantidade de calor, por exemplo, 260 J, é transferida por condução de um reservatório a 400 K para outro a (a) 100 K, (b) 200 K, (c) 300 K e (d) 360 K. Calcule a variação de entropia em cada caso.

42E. Uma barra de latão está em contato com um reservatório térmico a 130°C em um dos extremos e no outro com um reservatório a 24,0°C. (a) Calcule a variação total de entropia causada pela condução de 1.200 cal através da barra. (b) A entropia da barra muda durante o processo?

43E. Numa experiência de calores específicos, 200 g de alumínio ( $c = 0,215$  cal/g·°C) a 100°C se misturam com 50,0 g de água a 20,0°C. (a) Ache a temperatura de equilíbrio. Encontre a variação de entropia (b) do alumínio e (c) da água. (d) Calcule a variação de entropia do sistema. (Sugestão: veja as Eqs. 22-26 e 22-27.)

**44P.** Um cubo de gelo de 10 g a  $-10^{\circ}\text{C}$  é colocado num lago que está a  $15^{\circ}\text{C}$ . Calcule a variação de entropia do sistema quando o cubo de gelo atingir o equilíbrio térmico com o lago. O calor específico do gelo é  $0,50 \text{ cal/g}\cdot^{\circ}\text{C}$ . (Sugestão: O cubo de gelo afetará a temperatura do lago?)

**45P.** Um cubo de gelo de 8 g a  $-10^{\circ}\text{C}$  é colocado numa garrafa térmica contendo  $100 \text{ cm}^3$  de água a  $20^{\circ}\text{C}$ . Qual a variação de entropia do sistema quando foi alcançado o estado final de equilíbrio? O calor específico do gelo é  $0,50 \text{ cal/g}\cdot^{\circ}\text{C}$ .

**46P.** Quatro moles de um gás ideal expandem de um volume  $V_1$  para um volume  $V_2 = 2V_1$ . (a) Se a expansão é isotérmica a  $T = 400 \text{ K}$ , encontre o trabalho realizado pelo gás. (b) Ache a variação de entropia, se houver alguma. (c) Se a expansão é reversivelmente adiabática em vez de isotérmica, qual a variação de entropia?

**47P.** Um bloco de 50 g de cobre a  $400 \text{ K}$  é colocado numa caixa isolante junto com um bloco de 100 g de chumbo a  $200 \text{ K}$ . (a) Qual a temperatura de equilíbrio do sistema formado pelos dois blocos? (b) Qual a variação da energia interna do sistema, desde quando os blocos são postos em contato até o equilíbrio ser atingido; (c) Qual a variação de entropia do sistema? (Veja Tabela 20-1.)

**48P.** Um mol de um gás ideal monoatômico evolui de um estado inicial à pressão  $p$  e volume  $V$  até um estado final à pressão  $2p$  e volume  $2V$ , através de dois diferentes processos. (I) Ele expande isotermicamente até dobrar o volume e, então, sua pressão aumenta a volume constante até o estado final. (II) Ele é comprimido isotermicamente até duplicar a pressão e, então, seu volume aumenta isobaricamente até o estado final. Mostre a trajetória de cada processo num diagrama  $p - V$ . Para cada processo calcule, em função de  $p$  e  $V$ : (a) o calor absorvido pelo gás em cada parte do processo; (b) o trabalho realizado pelo gás em cada parte do processo; (c) a variação de energia interna do gás,  $E_{\text{int},f} - E_{\text{int},i}$ ; e (d) a variação de entropia do gás,  $S_f - S_i$ .

**49P.** Um gás ideal diatômico passa pelo ciclo mostrado no diagrama  $p - V$  da Fig. 22-23, onde  $V_2 = 3,00V_1$ . Determine, em função de  $p_1$ ,  $V_1$ ,  $T_1$  e  $R$ : (a)  $p_2$ ,  $p_3$  e  $T_3$  e (b)  $W$ ,  $Q$ ,  $\Delta E_{\text{int}}$  e  $\Delta S$  por mol para os três processos.

**50P.** Um objeto de capacidade calorífica constante  $C$  é aquecido de uma temperatura inicial  $T_i$  até a temperatura final  $T_f$ , por meio do contato com um reservatório térmico a  $T_f$ . (a) Represente o processo num gráfico  $C/T$  versus  $T$  e mostre graficamente que a variação total de entropia  $\Delta S$  (do objeto + reservatório) é positiva. (b) Mostre como o uso de reservatórios térmicos a temperaturas intermediárias permitiria que o processo fosse percorrido de maneira a fazer  $\Delta S$  tão pequena quanto desejarmos.

**51P.** Uma mistura de 1.773 g de água e 227 g de gelo a  $0,0^{\circ}\text{C}$  é levada a um estado de equilíbrio final, através de um processo reversível, onde a razão entre as massas de gelo e água é 1:1 a  $0,0^{\circ}\text{C}$ . (a) Calcule a vari-

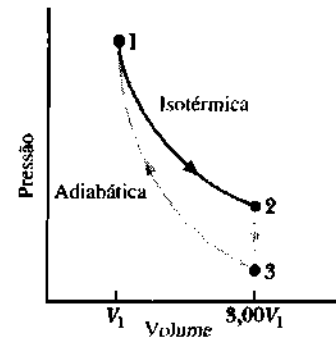


Fig. 22-23 Problema 49.

ação de entropia do sistema durante este processo (o calor de fusão da água é  $79,5 \text{ cal/g}$ ). (b) O sistema retorna ao primeiro estado de equilíbrio, mas de maneira irreversível (usando um bico de Bunsen, por exemplo). Calcule a variação de entropia do sistema durante este processo. (c) Sua resposta é compatível com a segunda lei da termodinâmica?

**52P.** Uma barra cilíndrica de prata, com diâmetro de 1,0 cm e comprimento de 15 cm, tem seus extremos em contato com reservatórios térmicos a  $60$  e  $20^{\circ}\text{C}$ , e um fluxo estacionário de calor foi atingido. Qual será a taxa inicial de variação da entropia da barra se (a) o extremo mais quente for subitamente isolado do reservatório a  $60^{\circ}\text{C}$ , ou (b) a barra inteira for subitamente isolada?

**53P.** Um mol de um gás ideal monoatômico passa pelo ciclo mostrado na Fig. 22-24. (a) Quanto trabalho é realizado quando o gás se expande de  $a$

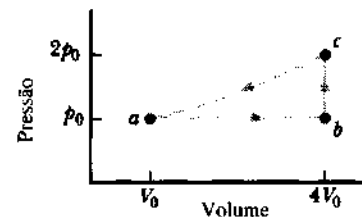


Fig. 22-24 Problema 53.

até  $c$  pelo caminho  $abc$ ? (b) Quais as variações de energia interna e entropia de  $b$  até  $c$ ? (c) Quais as variações de energia interna e entropia num ciclo completo? Expresse todas as respostas em termos de  $p_0$ ,  $V_0$  e  $T_0$ .

### PROBLEMAS ADICIONAIS

**54.** Um gás ideal monoatômico inicialmente a  $T_0$  (em Kelvins) expande de um volume inicial  $V_0$  até  $2V_0$  através de um dos cinco processos indicados no gráfico temperatura versus volume na Fig. 22-25. Em qual dos processos a expansão é: (a) isotérmica, (b) isobárica (pressão constante) e (c) adiabática. Explique suas respostas. (d) Em qual dos processos a entropia do gás diminui?

**55.** Uma máquina de Carnot cuja fonte fria está a  $17^{\circ}\text{C}$  tem uma eficiência de 40%. De quanto devemos aumentar a temperatura da fonte quente para aumentar a eficiência para 50%?

**56.** Um mol de um gás ideal é usado em uma máquina que opera seguindo o ciclo da Fig. 22-26.  $BC$  e  $DA$  são processos adiabáticos reversíveis. (a) O gás é monoatômico, diatômico ou poliatômico? (b) Qual a eficiência da máquina?

**57.** Um mol de um gás ideal monoatômico, inicialmente à pressão de  $5,00 \text{ kN/m}^2$  e temperatura de  $600 \text{ K}$  expande a partir de um volume inicial  $V_i = 1,00 \text{ m}^3$  até  $V_f = 2,00 \text{ m}^3$ . Durante a expansão, a pressão  $p$  e o volume  $V$  do gás estão relacionados por

$$p = 5,00 e^{(V_i - V)/\alpha},$$

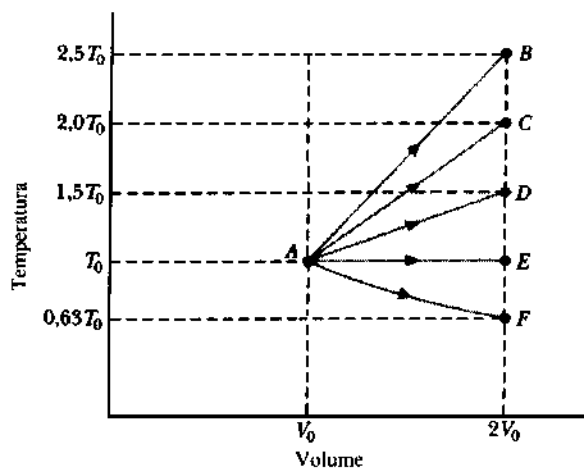


Fig. 22-25 Problema 54.

onde  $p$  está em  $\text{kN/m}^2$ ,  $V_i$  e  $V_f$  estão em  $\text{m}^3$  e  $a = 1,00 \text{ m}^3$ . Quais são: (a) a pressão final e (b) a temperatura final do gás? (c) Qual o trabalho realizado pelo gás durante a expansão; (d) Qual a variação de entropia do gás durante a expansão? (*Sugestão*: Use dois processos reversíveis simples para achar a variação de entropia.)

58. Dois moles de um gás ideal monoatômico passam pelo processo mostrado no diagrama temperatura versus entropia da Fig. 22-27. (a) Quanto calor é absorvido pelo gás (b) Qual a variação de energia interna do gás (c) Qual o trabalho realizado pelo gás?

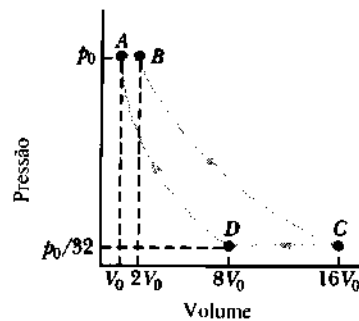


Fig. 22-26 Problema 56.

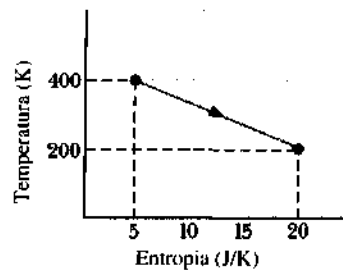


Fig. 22-27 Problema 58.



## APÊNDICE A

# O SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI)\*

### 1. AS UNIDADES FUNDAMENTAIS DO SI

GRANDEZA	NOME	SÍMBOLO	DEFINIÇÃO
comprimento	metro	m	"... o comprimento do percurso coberto pela luz, no vácuo, em 1/299.792.458 de um segundo." (1983)
massa	quilograma	kg	"... este protótipo (um certo cilindro de liga de platina-irídio) será considerado daqui por diante a unidade de massa." (1889)
tempo	segundo	s	"... a duração de 9.192.631.770 vibrações da transição entre dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de césio 133." (1967)
corrente elétrica	ampère	A	"... a corrente constante que, mantida em dois condutores retilíneos, paralelos, de comprimento infinito, de seção circular desprezível e separados pela distância de 1 metro no vácuo, provoca entre esses condutores uma força igual a $2 \times 10^{-7}$ newtons por metro de comprimento." (1946)
temperatura termodinâmica	kelvin	K	"... a fração 1/273,16 da temperatura termodinâmica do ponto triplo da água." (1967)
quantidade de substância	mol	mol	"... a quantidade de substância de um sistema que contém tantas entidades elementares quantos são os átomos em 0,012 quilogramas de carbono 12." (1971)
intensidade luminosa	candela	cd	"... a intensidade luminosa, na direção perpendicular, de uma superfície de 1/600.000 metros quadrados, de um corpo negro na temperatura de solidificação da platina, sob a pressão de 101,325 newtons por metro quadrado." (1967)

\*Adaptado do "The International System of Units (SI)," National Bureau of Standards Special Publication 330, edição de 1972. As definições acima foram adotadas pela Conferência Geral de Pesos e Medidas, organismo internacional, nas datas mencionadas. Neste livro, não usamos a candela.

## 2. ALGUMAS UNIDADES DERIVADAS DO SI

GRANDEZA	NOME DA UNIDADE	SÍMBOLO	
área	metro quadrado	m <sup>2</sup>	
volume	metro cúbico	m <sup>3</sup>	
freqüência	hertz	Hz	s <sup>-1</sup>
massa específica (densidade)	quilograma por metro cúbico	kg/m <sup>3</sup>	
velocidade, velocidade escalar	metro por segundo	m/s	
velocidade angular	radiano por segundo	rad/s	
aceleração	metro por segundo por segundo	m/s <sup>2</sup>	
aceleração angular	radiano por segundo por segundo	rad/s <sup>2</sup>	
força	newton	N	kg·m/s <sup>2</sup>
pressão	pascal	Pa	N/m <sup>2</sup>
trabalho, energia, quantidade de calor	joule	J	N·m
potência	watt	W	J/s
quantidade de carga elétrica	coulomb	C	A·s
diferença de potencial, força eletromotriz	volt	V	W/A
intensidade do campo elétrico	volt por metro (ou newton por coulomb)	V/m	N/C
resistência elétrica	ohm	Ω	V/A
capacitância	farad	F	A·s/V
fluxo magnético	weber	Wb	V·s
indutância	henry	H	V·s/A
densidade de fluxo magnético	tesla	T	Wb/m <sup>2</sup>
intensidade do campo magnético	ampère por metro	A/m	
entropia	joule por kelvin	J/K	
calor específico	joule por quilograma kelvin	J/(kg·K)	
condutividade térmica	watt por metro kelvin	W/(m·K)	
intensidade radiante	watt por esterradiano*	W/sr	

## 3. UNIDADES SUPLEMENTARES DO SI

GRANDEZA	NOME DA UNIDADE	SÍMBOLO
ângulo plano	radiano	rad
ângulo sólido	esterradiano*	sr

\*Embora o termo seja bem conhecido como *estereoradiano*, inclusive assim dicionarizado, preferimos usar a grafia recomendada pela ABNT (Associação Brasileira de Normas Técnicas) e registrada nos *Cadernos IEL* (Volume 8 — Sistema Internacional de Unidades). (N. do T.)

## APÊNDICE B

# ALGUMAS CONSTANTES FUNDAMENTAIS DA FÍSICA\*

CONSTANTE	SÍMBOLO	VALOR PARA CÁLCULO	MELHOR VALOR (1986)	
			VALOR <sup>a</sup>	INCERTEZA <sup>b</sup>
Velocidade da luz no vácuo	$c$	$3,00 \times 10^8$ m/s	2,99792458	exato
Carga elementar	$e$	$1,60 \times 10^{-19}$ C	1,60217738	0,30
Massa do elétron	$m_e$	$9,11 \times 10^{-31}$ kg	9,1093897	0,59
Massa do próton	$m_p$	$1,67 \times 10^{-27}$ kg	1,6726230	0,59
Razão entre a massa do próton e a massa do elétron	$m_p/m_e$	1.840	1.836,152701	0,020
Massa de nêutron	$m_n$	$1,68 \times 10^{-27}$ kg	1,6749286	0,59
Massa do múon	$m_\mu$	$1,88 \times 10^{-28}$ kg	1,8835326	0,61
Massa do elétron <sup>c</sup>	$m_e$	$5,49 \times 10^{-4}$ u	5,48579902	0,023
Massa do próton <sup>c</sup>	$m_p$	1,0073 u	1,007276470	0,012
Massa do nêutron <sup>c</sup>	$m_n$	1,0087 u	1,008664704	0,014
Massa do átomo de hidrogênio <sup>c</sup>	$m_{1H}$	1,0078 u	1,007825035	0,011
Massa do átomo de deutério <sup>c</sup>	$m_{2H}$	2,0141 u	2,0141019	0,053
Massa do átomo de hélio <sup>c</sup>	$m_{4He}$	4,0026 u	4,0026032	0,067
Razão entre a carga e a massa do elétron	$e/m_e$	$1,76 \times 10^{11}$ C/kg	1,75881961	0,30
Permissividade elétrica do vácuo	$\epsilon_0$	$8,85 \times 10^{-12}$ F/m	8,85418781762	exato
Permeabilidade magnética do vácuo	$\mu_0$	$1,26 \times 10^{-6}$ H/m	1,25663706143	exato
Constante de Planck	$h$	$6,63 \times 10^{-34}$ J·s	6,6260754	0,60
Comprimento de onda Compton do elétron	$\lambda_C$	$2,43 \times 10^{-12}$ m	2,42631058	0,089
Constante universal dos gases	$R$	8,31 J/mol·K	8,314510	8,4
Número de Avogadro	$N_A$	$6,02 \times 10^{23}$ mol <sup>-1</sup>	6,0221367	0,59
Constante de Boltzmann	$k$	$1,38 \times 10^{-23}$ J/K	1,380657	11
Volume molar de um gás ideal em CNTP <sup>d</sup>	$V_m$	$2,24 \times 10^{-2}$ m <sup>3</sup> /mol	2,241409	8,4
Constante de Faraday	$F$	$9,65 \times 10^4$ C/mol	9,6485309	0,30
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma$	$5,67 \times 10^{-8}$ W/m <sup>2</sup> ·K <sup>4</sup>	5,67050	34
Constante de Rydberg	$R$	$1,10 \times 10^7$ m <sup>-1</sup>	1,0973731534	0,0012
Constante da gravitação universal	$G$	$6,67 \times 10^{-11}$ m <sup>3</sup> /s <sup>2</sup> ·kg	6,67260	100
Raio de Bohr	$r_B$	$5,29 \times 10^{-11}$ m	5,29177249	0,045
Momento magnético do elétron	$\mu_e$	$9,28 \times 10^{-24}$ J/T	9,2847700	0,34
Momento magnético do próton	$\mu_p$	$1,41 \times 10^{-26}$ J/T	1,41060761	0,34
Magnéton de Bohr	$\mu_B$	$9,27 \times 10^{-24}$ J/T	9,2740154	0,34
Magnéton nuclear	$\mu_N$	$5,05 \times 10^{-27}$ J/T	5,0507865	0,34

<sup>a</sup>Os valores nesta coluna têm as mesmas unidades e as mesmas potências de 10 que os valores para cálculo.

<sup>b</sup>Em partes por milhão.

<sup>c</sup>Estas massas estão em unidades de massa atômica unificada (u), com  $1 \text{ u} = 1,6605402 \times 10^{-27}$  kg.

<sup>d</sup>CNTP significa condições normais de temperatura e pressão: 0°C e 1,0 atm (0,1 MPa).

\*Os valores desta tabela foram escolhidos, em grande parte, de uma listagem maior em *Symbols, Units and Nomenclature in Physics* (IUPAP), preparada por E. Richard Cohen e Pierre Giacomo, 1986.

## APÊNDICE C

# ALGUNS DADOS ASTRONÔMICOS

### ALGUMAS DISTÂNCIAS DA TERRA

Até a Lua*	$3,82 \times 10^8$ m
Até o Sol	$1,50 \times 10^{11}$ m
Até a estrela mais próxima (Proxima Centauri)	$4,04 \times 10^{16}$ m
Até o centro da nossa galáxia	$2,2 \times 10^{20}$ m
Até a galáxia de Andrômeda	$2,1 \times 10^{22}$ m
Até a fronteira do universo observável	$\sim 10^{26}$ m

\*Distância média.

### O SOL, A TERRA E A LUA

PROPRIEDADE	UNIDADE	SOL	TERRA	LUA
Massa	kg	$1,99 \times 10^{30}$	$5,98 \times 10^{24}$	$7,36 \times 10^{22}$
Raio médio	m	$6,96 \times 10^8$	$6,37 \times 10^6$	$1,74 \times 10^6$
Densidade média	kg/m <sup>3</sup>	1.410	5.520	3.340
Aceleração da gravidade na superfície	m/s <sup>2</sup>	274	9,81	1,67
Velocidade de escape	km/s	618	11,2	2,38
Período de rotação <sup>a</sup>	—	37 d nos pólos <sup>b</sup> 26 d no equador <sup>b</sup>	23 h 56 min	27,3 d
Potência de radiação <sup>c</sup>	W	$3,90 \times 10^{26}$		

<sup>a</sup>Medido em relação às estrelas distantes.

<sup>b</sup>O Sol, uma bola de gás, não gira como um corpo rígido.

<sup>c</sup>A energia solar é recebida na fronteira da atmosfera, sob incidência normal, à taxa de 1.340 W/m<sup>2</sup>.

## ALGUMAS PROPRIEDADES DOS PLANETAS

	MERCÚRIO	VÊNUS	TERRA	MARTE	JÚPITER	SATURNO	URANO	NETUNO	PLUTÃO
Distância média ao Sol, 10 <sup>6</sup> km	57,9	108	150	228	778	1.430	2.870	4.500	5.900
Período de revolução, anos	0,241	0,615	1,00	1,88	11,9	29,5	84,0	165	248
Período de rotação, dias	58,7	-243 <sup>b</sup>	0,997	1,03	0,409	0,426	-0,451 <sup>b</sup>	0,658	6,39
Velocidade orbital, km/s	47,9	35,0	29,8	24,1	13,1	9,64	6,81	5,43	4,74
Inclinação do eixo do planeta na órbita	<28°	≈3°	23,4°	25,0°	3,08°	26,7°	97,9°	29,6°	57,5°
Inclinação da órbita em relação ao plano da órbita da Terra	7,00°	3,39°		1,85°	1,30°	2,49°	0,77°	1,77°	17,2°
Excentricidade da órbita	0,206	0,0068	0,0167	0,0934	0,0485	0,0556	0,0472	0,0086	0,250
Diâmetro equatorial, km	4.880	12.100	12.800	6.790	143.000	120.000	51.800	49.500	2.300
Massa (Terra = 1)	0,0558	0,815	1,000	0,107	318	95,1	14,5	17,2	0,002
Densidade (água = 1)	5,60	5,20	5,52	3,95	1,31	0,704	1,21	1,67	2,03
Valor de g na superfície, m/s <sup>2</sup>	3,78	8,60	9,78	3,72	22,9	9,05	7,77	11,0	0,5
Velocidade de escape, km/s	4,3	10,3	11,2	5,0	59,5	35,6	21,2	23,6	1,1
Satélites conhecidos	0	0	1	2	16 + anel	18 + anéis	15 + anéis	8 + anéis	1

<sup>a</sup>Medido com relação às estrelas distantes.

<sup>b</sup>Vênus e Urano giram em sentido oposto ao seu movimento orbital.

<sup>c</sup>Aceleração da gravidade medida no equador do planeta.

## APÊNDICE D

# PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS

Todas as propriedades físicas referem-se à pressão de 1 atm, exceto quando há observação em contrário.

ELEMENTO	SÍMBOLO	NÚMERO ATÔMICO, Z	MASSA MOLAR, g/mol	MASSA ESPECÍFICA (DENSIDADE) g/cm <sup>3</sup> A 20°C	PONTO DE FUSÃO, °C	PONTO DE EBULIÇÃO, °C	CALOR ESPECÍFICO, J/(g°C) A 25°C
Actínio	Ac	89	(227)	10,06	1.323	(3.473)	0,092
Alumínio	Al	13	26,9815	2,699	660	2.450	0,900
Americío	Am	95	(243)	13,67	1.541	—	—
Antimônio	Sb	51	121,75	6,691	630,5	1.380	0,205
Argônio	Ar	18	39,948	$1,6626 \times 10^{-3}$	-189,4	-185,8	0,523
Arsênio	As	33	74,9216	5,78	817 (28 atm)	613	0,331
Astatínio	At	85	(210)	—	(302)	—	—
Bário	Ba	56	137,34	3,594	729	1.640	0,205
Berílio	Be	4	9,0122	1,848	1.287	2.770	1,83
Berquélio	Bk	97	(247)	14,79	—	—	—
Bismuto	Bi	83	208,980	9,747	271,37	1.560	0,122
Boro	B	5	10,811	2,34	2.030	—	1,11
Bromo	Br	35	79,909	3,12 (líquido)	-7,2	58	0,293
Cádmio	Cd	48	112,40	8,65	321,03	765	0,226
Cálcio	Ca	20	40,08	1,55	838	1.440	0,624
Califórnio	Cf	98	(251)	—	—	—	—
Carbono	C	6	12,01115	2,26	3.727	4.830	0,691
Centésimo quarto	Unq	104	261	—	—	—	—
Centésimo quinto	Unp	105	262	—	—	—	—
Cério	Ce	58	140,12	6,768	804	3.470	0,188
Césio	Cs	55	132,905	1,873	28,40	690	0,243
Chumbo	Pb	82	207,19	11,35	327,45	1.725	0,129
Cloro	Cl	17	35,453	$3,214 \times 10^{-3}$ (0°C)	-101	-34,7	0,486
Cobalto	Co	27	58,9332	8,85	1.495	2.900	0,423
Cobre	Cu	29	63,54	8,96	1.083,40	2.595	0,385
Criptônio	Kr	36	83,80	$3,488 \times 10^{-3}$	-157,37	-152	0,247
Cromo	Cr	24	51,996	7,19	1.857	2.665	0,448
Cúrio	Cm	96	(247)	13,3	—	—	—
Disprósio	Dy	66	162,50	8,55	1.409	2.330	0,172
Einsteinio	Es	99	(254)	—	—	—	—
Enxofre	S	16	32,064	2,07	119,0	444,6	0,707
Érbio	Er	68	167,26	9,15	1.522	2.630	0,167
Escândio	Sc	21	44,956	2,99	1.539	2.730	0,569
Estanho	Sn	50	118,69	7,2984	231,868	2.270	0,226
Estrôncio	Sr	38	87,62	2,54	768	1.380	0,737
Európio	Eu	63	151,96	5,243	817	1.490	0,163
Férmio	Fm	100	(237)	—	—	—	—
Ferro	Fe	26	55,847	7,874	1.536,5	3.000	0,447
Flúor	F	9	18,9984	$1,696 \times 10^{-3}$ (0°C)	-219,6	-188,2	0,753
Fósforo	P	15	30,9738	1,83	44,25	-280	0,741
Frâncio	Fr	87	(223)	—	(27)	—	—
Gadolínio	Gd	64	157,25	7,90	1.312	2.730	0,234
Gálio	Ga	31	69,72	5,907	29,75	2.237	0,377
Germânio	Ge	32	72,59	5,323	937,25	2.830	0,322
Háfnio	Hf	72	178,49	13,31	2.227	5.400	0,144
Hélio	He	2	4,0026	$0,1664 \times 10^{-3}$	-269,7	-268,9	5,23

## 270 APÊNDICE D PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS

ELEMENTO	SÍMBOLO	NÚMERO ATÔMICO, Z	MASSA MOLAR, g/mol	MASSA ESPECÍFICA (DENSIDADE) g/cm <sup>3</sup> A 20°C	PONTO DE FUSÃO, °C	PONTO DE EBULIÇÃO, °C	CALOR ESPECÍFICO, J/(g°C) A 25°C
Hidrogênio	H	1	1,00797	$0,08375 \times 10^{-3}$	-259,19	-252,7	14,4
Hólmio	Ho	67	164,930	8,79	1.470	2.330	0,165
Índio	In	49	114,82	7,31	156,634	2.000	0,233
Iodo	I	53	126,9044	4,93	113,7	183	0,218
Iródio	Ir	77	192,2	22,5	2.447	(5.300)	0,130
Itérbio	Yb	70	173,04	6,965	824	1.530	0,155
Ítrio	Y	39	88,905	4,469	1.526	3.030	0,297
Lantânio	La	57	138,91	6,189	920	3.470	0,195
Laurêncio	Lr	103	(257)	—	—	—	—
Lítio	Li	3	6,939	0,534	180,55	1.300	3,58
Lutécio	Lu	71	174,97	9,849	1.663	1.930	0,155
Magnésio	Mg	12	24,312	1,738	650	1.107	1,03
Manganês	Mn	25	54,9380	7,44	1.244	2.150	0,481
Mendelévio	Md	101	(256)	—	—	—	—
Mercúrio	Hg	80	200,59	13,55	-38,87	357	0,138
Molibdênio	Mo	42	95,94	10,22	2.617	5.560	0,251
Neodímio	Nd	60	144,24	7,007	1.016	3.180	0,188
Neônio	Ne	10	20,183	$0,8387 \times 10^{-3}$	-248,597	-246,0	1,03
Netúnio	Np	93	(237)	20,25	637	—	1,26
Nióbio	Nb	41	92,906	8,57	2.468	4.927	0,264
Níquel	Ni	28	58,71	8,902	1.453	2.730	0,444
Nitrogênio	N	7	14,0067	$1,1649 \times 10^{-3}$	-210	-195,8	1,03
Nobélio	No	102	(255)	—	—	—	—
Ósmio	Os	76	190,2	22,59	3.027	5.500	0,130
Ouro	Au	79	196,967	19,32	1.064,43	2.970	0,131
Oxigênio	O	8	15,9994	$1,3318 \times 10^{-3}$	-218,80	-183,0	0,913
Paládio	Pd	46	106,4	12,02	1.552	3.980	0,243
Platina	Pt	78	195,09	21,45	1.769	4.530	0,134
Plutônio	Pu	94	(244)	19,8	640	3.235	0,130
Polônio	Po	84	(210)	9,32	254	—	—
Potássio	K	19	39,102	0,862	63,20	760	0,758
Praseodímio	Pr	59	140,907	6,773	931	3.020	0,197
Prata	Ag	47	107,870	10,49	960,8	2.210	0,234
Promécio	Pm	61	(145)	7,22	(1.027)	—	—
Protactínio	Pa	91	(231)	15,37 (estimada)	(1.230)	—	—
Rádio	Ra	88	(226)	5,0	700	—	—
Radônio	Rn	86	(222)	$9,96 \times 10^{-3}$ (0°C)	(-71)	-61,8	0,092
Rênio	Re	75	186,2	21,02	3.180	5.900	0,134
Ródio	Rh	45	102,905	12,41	1.963	4.500	0,243
Rubídio	Rb	37	85,47	1,532	39,49	688	0,364
Rutênio	Ru	44	101,107	12,37	2.250	4.900	0,239
Samário	Sm	62	150,35	7,52	1.072	1.630	0,197
Selênio	Se	34	78,96	4,79	221	685	0,318
Silício	Si	14	28,086	2,33	1.412	2.680	0,712
Sódio	Na	11	22,9898	0,9712	97,85	892	1,23
Tálio	Tl	81	204,37	11,85	304	1.457	0,130
Tântalo	Ta	73	180,948	16,6	3.014	5.425	0,138
Tecnécio	Tc	43	(99)	11,46	2.200	—	0,209
Telúrio	Te	52	127,60	6,24	449,5	990	0,201
Térbio	Tb	65	158,924	8,229	1.357	2.530	0,180
Titânio	Ti	22	47,90	4,54	1.670	3.260	0,523
Tório	Th	90	(232)	11,72	1.755	(3.850)	0,117
Túlio	Tm	69	168,934	9,32	1.545	1.720	0,159
Tungstênio	W	74	183,85	19,3	3.380	5.930	0,134
Urânio	U	92	(238)	18,95	1.132	3.818	0,117
Vanádio	V	23	50,942	6,11	1.902	3.400	0,490
Xenônio	Xe	54	131,30	$5,495 \times 10^{-3}$	-111,79	-108	0,159
Zinco	Zn	30	65,37	7,133	419,58	906	0,389
Zircônio	Zr	40	91,22	6,506	1.852	3.580	0,276

Os valores entre parênteses, na coluna das massas molares, são os números de massa do isótopo de vida mais longa dos elementos radioativos. Os pontos de fusão e de ebulição entre parênteses são incertos.

Os dados para os gases valem somente quando cada qual está no seu estado molecular ordinário, por exemplo, H<sub>2</sub>, He, O<sub>2</sub>, Ne etc. Os calores específicos dos gases são os valores a pressão constante.

Fonte: Adaptado de Wehr, Richards, Adair, *Physics of the Atom*, 4.ª ed., Addison-Wesley, Reading, MA, 1984, e também de J. Emsley, *The Elements*, 2.ª ed., Clarendon Press, Oxford, 1991.





## APÊNDICE F

# FATORES DE CONVERSÃO

Os fatores de conversão podem ser lidos diretamente nas tabelas seguintes. Por exemplo, 1 grau =  $2,778 \times 10^{-3}$  revolução, e então  $16,7^\circ = 16,7 \times 2,778 \times 10^{-3}$  rev. As unidades

SI estão em maiúsculas. As tabelas foram adaptadas, em parte, de G. Shortley e D. Williams, *Elements of Physics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.

### ÂNGULO PLANO

	°	'	"	RADIANO	rev
1 grau =	1	60	3.600	$1,745 \times 10^{-2}$	$2,778 \times 10^{-3}$
1 minuto =	$1,667 \times 10^{-2}$	1	60	$2,909 \times 10^{-4}$	$4,630 \times 10^{-5}$
1 segundo =	$2,778 \times 10^{-4}$	$1,667 \times 10^{-2}$	1	$4,848 \times 10^{-6}$	$7,716 \times 10^{-7}$
1 RADIANO =	57,30	3.438	$2,063 \times 10^5$	1	0,1592
1 revolução (volta) =	360	$2,16 \times 10^4$	$1,296 \times 10^6$	6,283	1

### ÂNGULO SÓLIDO

1 esfera =  $4\pi$  esterradianos = 12,57 esterradianos

### COMPRIMENTO

	cm	METRO	km	in.	ft	mi
1 centímetro =	1	$10^{-2}$	$10^{-5}$	0,3937	$3,281 \times 10^{-2}$	$6,214 \times 10^{-6}$
1 METRO =	100	1	$10^{-3}$	39,37	3,281	$6,214 \times 10^{-4}$
1 quilômetro =	$10^5$	1.000	1	$3,937 \times 10^4$	3.281	0,6214
1 polegada =	2,540	$2,540 \times 10^{-2}$	$2,540 \times 10^{-5}$	1	$8,333 \times 10^{-2}$	$1,578 \times 10^{-5}$
1 pé =	30,48	0,3048	$3,048 \times 10^{-4}$	12	1	$1,894 \times 10^{-4}$
1 milha =	$1,609 \times 10^5$	1.609	1,609	$6,336 \times 10^4$	5.280	1
1 angström = $10^{-10}$ m		1 fermi = $10^{-15}$ m		1 braça = 6 pés		1 vara = 16,5 pés
1 milha náutica = 1.852 m		1 ano-luz = $9,460 \times 10^{12}$ km		1 raio de Bohr = $5,292 \times 10^{-11}$ m		1 mil = $10^{-3}$ polegadas
= 1,151 milhas = 6,076 pés		1 parsec = $3,084 \times 10^{13}$ km		1 jarda = 3 pés		1 nm = $10^{-9}$ m

### ÁREA

	METRO <sup>2</sup>	cm <sup>2</sup>	ft <sup>2</sup>	in. <sup>2</sup>
1 METRO QUADRADO =	1	$10^4$	10,76	1,550
1 centímetro quadrado =	$10^{-4}$	1	$1,076 \times 10^{-3}$	0,1550
1 pé quadrado =	$9,290 \times 10^{-2}$	929,0	1	144
1 polegada quadrada =	$6,452 \times 10^{-4}$	6,452	$6,944 \times 10^{-3}$	1
1 milha quadrada = $2,788 \times 10^7$ ft <sup>2</sup>			1 acre = 43.560 ft <sup>2</sup>	
= 640 acres			1 hectare = $10^4$ m <sup>2</sup> = 2,471 acres	
1 barn = $10^{-28}$ m <sup>2</sup>				

**VOLUME**

	METRO <sup>3</sup>	cm <sup>3</sup>	l	ft <sup>3</sup>	in. <sup>3</sup>
1 METRO CÚBICO = 1	1	10 <sup>6</sup>	1.000	35,31	6,102 × 10 <sup>3</sup>
1 centímetro cúbico = 10 <sup>-6</sup>	10 <sup>-6</sup>	1	1,000 × 10 <sup>-4</sup>	3,531 × 10 <sup>-5</sup>	6,102 × 10 <sup>-7</sup>
1 litro = 1,000 × 10 <sup>-3</sup>	1,000 × 10 <sup>-3</sup>	1.000	1	3,531 × 10 <sup>-2</sup>	61,02
1 pé cúbico = 2,832 × 10 <sup>-2</sup>	2,832 × 10 <sup>-2</sup>	2,832 × 10 <sup>4</sup>	28,32	1	1,728
1 polegada cúbica = 1,639 × 10 <sup>-5</sup>	1,639 × 10 <sup>-5</sup>	16,39	1,639 × 10 <sup>-2</sup>	5,787 × 10 <sup>-4</sup>	1

1 galão americano = 4 quartos americanos = 8 pints americanos = 128 onças americanas = 231 in.<sup>3</sup>

1 galão inglês = 277,4 in.<sup>3</sup> = 1,201 galões americanos

**MASSA**

As grandezas que estão na área escurecida não são unidades de massa, mas são usadas, muitas vezes, como se fossem. Quando escrevemos, por exemplo, 1 kg "≈" 2,205 lb, isto significa que o quilograma é uma *massa* que *pesa* 2,205 libras num local onde *g* tem o valor padrão 9,80665m/s<sup>2</sup>.

	g	QUILOGRAMA	slug	u	oz	lb	ton
1 grama = 1	1	0,001	6,852 × 10 <sup>-5</sup>	6,022 × 10 <sup>23</sup>	3,527 × 10 <sup>-2</sup>	2,205 × 10 <sup>-3</sup>	1,102 × 10 <sup>-6</sup>
1 QUILOGRAMA = 1.000	1.000	1	6,852 × 10 <sup>-2</sup>	6,022 × 10 <sup>26</sup>	35,27	2,205	1,102 × 10 <sup>-3</sup>
1 slug = 1,459 × 10 <sup>4</sup>	1,459 × 10 <sup>4</sup>	14,59	1	8,786 × 10 <sup>27</sup>	514,8	32,17	1,609 × 10 <sup>-2</sup>
1 unidade de							
massa atômica = 1,661 × 10 <sup>-24</sup>	1,661 × 10 <sup>-24</sup>	1,661 × 10 <sup>-27</sup>	1,138 × 10 <sup>-28</sup>	1	5,857 × 10 <sup>-26</sup>	3,662 × 10 <sup>-27</sup>	1,830 × 10 <sup>-30</sup>
1 onça = 28,35	28,35	2,835 × 10 <sup>-2</sup>	1,943 × 10 <sup>-3</sup>	1,718 × 10 <sup>25</sup>	1	6,250 × 10 <sup>-2</sup>	3,125 × 10 <sup>-5</sup>
1 libra = 453,6	453,6	0,4536	3,108 × 10 <sup>-2</sup>	2,732 × 10 <sup>26</sup>	16	1	0,0005
1 ton (curta) = 9,072 × 10 <sup>5</sup>	9,072 × 10 <sup>5</sup>	907,2	62,16	5,463 × 10 <sup>29</sup>	3,2 × 10 <sup>4</sup>	2,000	1

1 tonelada métrica = 1.000 kg

**MASSA ESPECÍFICA (DENSIDADE)**

As grandezas na área escurecida são pesos específicos e, portanto, são dimensionalmente diferentes das massas específicas (densidades de massa). Ver a nota na tabela de massa.

	slug/ft <sup>3</sup>	QUILOGRAMA/ METRO <sup>3</sup>	g/cm <sup>3</sup>	lb/ft <sup>3</sup>	lb/in. <sup>3</sup>
1 slug por pé <sup>3</sup> = 1	1	515,4	0,5154	32,17	1,862 × 10 <sup>-2</sup>
1 QUILOGRAMA por METRO <sup>3</sup> = 1,940 × 10 <sup>-3</sup>	1,940 × 10 <sup>-3</sup>	1	0,001	6,243 × 10 <sup>-2</sup>	3,613 × 10 <sup>-5</sup>
1 grama por centímetro <sup>3</sup> = 1,940	1,940	1.000	1	62,43	3,613 × 10 <sup>-2</sup>
1 libra por pé <sup>3</sup> = 3,108 × 10 <sup>-2</sup>	3,108 × 10 <sup>-2</sup>	16,02	1,602 × 10 <sup>-2</sup>	1	5,787 × 10 <sup>-4</sup>
1 libra por polegada <sup>3</sup> = 53,71	53,71	2,768 × 10 <sup>4</sup>	27,68	1,728	1

**TEMPO**

	a	d	h	min	SEGUNDO
1 ano = 1	1	365,25	8,766 × 10 <sup>3</sup>	5,259 × 10 <sup>5</sup>	3,156 × 10 <sup>7</sup>
1 dia = 2,738 × 10 <sup>-3</sup>	2,738 × 10 <sup>-3</sup>	1	24	1,440	8,640 × 10 <sup>4</sup>
1 hora = 1,141 × 10 <sup>-4</sup>	1,141 × 10 <sup>-4</sup>	4,167 × 10 <sup>-2</sup>	1	60	3,600
1 minuto = 1,901 × 10 <sup>-6</sup>	1,901 × 10 <sup>-6</sup>	6,944 × 10 <sup>-4</sup>	1,667 × 10 <sup>-2</sup>	1	60
1 SEGUNDO = 3,169 × 10 <sup>-8</sup>	3,169 × 10 <sup>-8</sup>	1,157 × 10 <sup>-5</sup>	2,778 × 10 <sup>-4</sup>	1,667 × 10 <sup>-2</sup>	1

**VELOCIDADE**

	ft/s	km/h	METRO/ SEGUNDO	mi/h	cm/s
1 pé por segundo = 1	1	1,097	0,3048	0,6818	30,48
1 quilômetro por hora = 0,9113	0,9113	1	0,2778	0,6214	27,78
1 METRO por SEGUNDO = 3,281	3,281	3,6	1	2,237	100
1 milha por hora = 1,467	1,467	1,609	0,4470	1	44,70
1 centímetro por segundo = 3,281 × 10 <sup>-2</sup>	3,281 × 10 <sup>-2</sup>	3,6 × 10 <sup>-2</sup>	0,01	2,237 × 10 <sup>-2</sup>	1

1 nó = 1 milha náutica por hora = 1,688 ft/s    1 mi/min = 88,00 ft/s = 60,00 mi/h

**FORÇA**

As unidades na área sombreada são cada vez menos usadas. Para esclarecer: 1 grama-força (= 1 gf) é a força da gravidade que atua sobre um corpo de massa igual a 1g num local onde g tem o valor padrão 9,80665 m/s<sup>2</sup>.

	dina	NEWTON	lb	pdl	gf	kgf
1 dina =	1	10 <sup>-5</sup>	2,248 × 10 <sup>-6</sup>	7,233 × 10 <sup>-5</sup>	1,020 × 10 <sup>-3</sup>	1,020 × 10 <sup>-6</sup>
1 NEWTON =	10 <sup>5</sup>	1	0,2248	7,233	102,0	0,1020
1 libra =	4,448 × 10 <sup>5</sup>	4,448	1	32,17	453,6	0,4536
1 poundal (pdl) =	1,383 × 10 <sup>7</sup>	0,1383	3,108 × 10 <sup>-2</sup>	1	14,10	1,410 × 10 <sup>-2</sup>
1 grama-força =	980,7	9,807 × 10 <sup>-3</sup>	2,205 × 10 <sup>-3</sup>	7,093 × 10 <sup>-2</sup>	1	0,001
1 quilograma-força =	9,807 × 10 <sup>5</sup>	9,807	2,205	70,93	1.000	1

**PRESSÃO**

	atm	dina/cm <sup>2</sup>	polegada de água	cm Hg	PASCAL	lb/in. <sup>2</sup>	lb/ft <sup>2</sup>
1 atmosfera =	1	1,013 × 10 <sup>6</sup>	406,8	76	1,013 × 10 <sup>5</sup>	14,70	2,116
1 dina por centímetro <sup>2</sup> =	9,869 × 10 <sup>-7</sup>	1	4,015 × 10 <sup>-4</sup>	7,501 × 10 <sup>-5</sup>	0,1	1,405 × 10 <sup>-5</sup>	2,089 × 10 <sup>-3</sup>
1 polegada de água a 4°C =	2,458 × 10 <sup>-3</sup>	2,491	1	0,1868	249,1	3,613 × 10 <sup>-2</sup>	5,202
1 centímetro de mercúrio a 0°C =	1,316 × 10 <sup>-2</sup>	1,333 × 10 <sup>4</sup>	5,353	1	1,333	0,1934	27,85
1 PASCAL =	9,869 × 10 <sup>-6</sup>	10	4,015 × 10 <sup>-3</sup>	7,501 × 10 <sup>-4</sup>	1	1,450 × 10 <sup>-4</sup>	2,089 × 10 <sup>-2</sup>
1 libra por polegada <sup>2</sup> =	6,805 × 10 <sup>-2</sup>	6,895 × 10 <sup>4</sup>	27,68	5,171	6,895 × 10 <sup>3</sup>	1	144
1 libra por pé <sup>2</sup> =	4,725 × 10 <sup>-3</sup>	478,8	0,1922	3,591 × 10 <sup>-2</sup>	47,88	6,944 × 10 <sup>-3</sup>	1

\*Num local onde a gravidade g tenha o valor padrão 9,80665 m/s<sup>2</sup>.

1 bar = 10<sup>6</sup> dina/cm<sup>2</sup> = 0,1 MPa

1 milibar = 10<sup>3</sup> dina/cm<sup>2</sup> = 10<sup>2</sup> Pa

1 torr = 1 mmHg

**ENERGIA, TRABALHO, CALOR**

As grandezas nas áreas sombreadas não são propriamente unidades de energia, mas aparecem no quadro por serem convenientes. Aparecem em virtude da fórmula relativística de equivalência entre massa e energia, E = mc<sup>2</sup>, e representam a energia liberada se um quilograma de massa, ou se uma unidade unificada de massa atômica (u), for completamente transformado em energia (nas duas filas de baixo), ou a massa que seria completamente transformada em uma unidade de energia (nas duas colunas da direita).

	Btu	erg	ft · lb	hp · h	JOULE	cal	kW · h	eV	MeV	kg	u
1 unidade térmica britânica (Btu) =	1	1,055 × 10 <sup>10</sup>	777,9	3,929 × 10 <sup>-4</sup>	1,055	252,0	2,930 × 10 <sup>-4</sup>	6,585 × 10 <sup>21</sup>	6,585 × 10 <sup>15</sup>	1,174 × 10 <sup>-14</sup>	7,070 × 10 <sup>12</sup>
1 erg =	9,481 × 10 <sup>-11</sup>	1	7,376 × 10 <sup>-8</sup>	3,725 × 10 <sup>-14</sup>	10 <sup>-7</sup>	2,389 × 10 <sup>-8</sup>	2,778 × 10 <sup>-14</sup>	6,242 × 10 <sup>11</sup>	6,242 × 10 <sup>5</sup>	1,113 × 10 <sup>-24</sup>	670,2
1 pé-libra =	1,285 × 10 <sup>-3</sup>	1,356 × 10 <sup>7</sup>	1	5,051 × 10 <sup>-7</sup>	1,356	0,3238	3,766 × 10 <sup>-7</sup>	8,464 × 10 <sup>18</sup>	8,464 × 10 <sup>12</sup>	1,509 × 10 <sup>-17</sup>	9,037 × 10 <sup>9</sup>
1 hp-hora =	2,545	2,685 × 10 <sup>13</sup>	1,980 × 10 <sup>6</sup>	1	2,685 × 10 <sup>6</sup>	6,413 × 10 <sup>5</sup>	0,7457	1,676 × 10 <sup>25</sup>	1,676 × 10 <sup>19</sup>	2,988 × 10 <sup>-31</sup>	1,799 × 10 <sup>16</sup>
1 JOULE =	9,481 × 10 <sup>-4</sup>	10 <sup>7</sup>	0,7376	3,725 × 10 <sup>-7</sup>	1	0,2389	2,778 × 10 <sup>-7</sup>	6,242 × 10 <sup>18</sup>	6,242 × 10 <sup>12</sup>	1,113 × 10 <sup>-17</sup>	6,702 × 10 <sup>9</sup>
1 caloria =	3,969 × 10 <sup>-3</sup>	4,186 × 10 <sup>7</sup>	3,088	1,560 × 10 <sup>-6</sup>	4,186	1	1,163 × 10 <sup>-6</sup>	2,613 × 10 <sup>19</sup>	2,613 × 10 <sup>13</sup>	4,660 × 10 <sup>-17</sup>	2,806 × 10 <sup>10</sup>
1 quilowatt-hora =	3,413	3,600 × 10 <sup>13</sup>	2,655 × 10 <sup>6</sup>	1,341 × 10 <sup>6</sup>	3,600 × 10 <sup>6</sup>	8,600 × 10 <sup>5</sup>	1	2,247 × 10 <sup>25</sup>	2,247 × 10 <sup>19</sup>	4,007 × 10 <sup>-11</sup>	2,413 × 10 <sup>16</sup>
1 elétron-volt =	1,519 × 10 <sup>-22</sup>	1,602 × 10 <sup>-12</sup>	1,182 × 10 <sup>-19</sup>	5,967 × 10 <sup>-26</sup>	1,602 × 10 <sup>-19</sup>	3,827 × 10 <sup>-20</sup>	4,450 × 10 <sup>-26</sup>	1	10 <sup>-6</sup>	1,783 × 10 <sup>-36</sup>	1,074 × 10 <sup>-9</sup>
1 milhão de elétrons-volt =	1,519 × 10 <sup>-16</sup>	1,602 × 10 <sup>-6</sup>	1,182 × 10 <sup>-13</sup>	5,967 × 10 <sup>-20</sup>	1,602 × 10 <sup>-13</sup>	3,827 × 10 <sup>-14</sup>	4,450 × 10 <sup>-20</sup>	10 <sup>-6</sup>	1	1,783 × 10 <sup>-30</sup>	1,074 × 10 <sup>-3</sup>
1 quilograma =	8,521 × 10 <sup>13</sup>	8,987 × 10 <sup>23</sup>	6,629 × 10 <sup>16</sup>	3,348 × 10 <sup>10</sup>	8,987 × 10 <sup>16</sup>	2,146 × 10 <sup>16</sup>	2,497 × 10 <sup>10</sup>	5,610 × 10 <sup>35</sup>	5,610 × 10 <sup>29</sup>	1	6,022 × 10 <sup>26</sup>
1 unidade unificada de massa atômica =	1,415 × 10 <sup>-13</sup>	1,492 × 10 <sup>-3</sup>	1,101 × 10 <sup>-10</sup>	5,559 × 10 <sup>-17</sup>	1,492 × 10 <sup>-10</sup>	3,564 × 10 <sup>-11</sup>	4,146 × 10 <sup>-17</sup>	9,320 × 10 <sup>8</sup>	932,0	1,661 × 10 <sup>-27</sup>	1

**POTÊNCIA**

	Btu/h	ft·lb/s	hp	cal/s	kW	WATT
1 unidade térmica britânica por hora	= 1	0,2161	$3,929 \times 10^{-4}$	$6,998 \times 10^{-2}$	$2,930 \times 10^{-4}$	0,2930
1 pé-libra por segundo	= 4,628	1	$1,818 \times 10^{-3}$	0,3239	$1,356 \times 10^{-3}$	1,356
1 hp	= 2,545	550	1	178,1	0,7457	745,7
1 caloria por segundo	= 14,29	3,088	$5,615 \times 10^{-3}$	1	$4,186 \times 10^{-3}$	4,186
1 quilowatt	= 3,413	737,6	1,341	238,9	1	1.000
1 WATT	= 3,413	0,7376	$1,341 \times 10^{-3}$	0,2389	0,001	1

**FLUXO MAGNÉTICO**

	maxwell	WEBER
1 maxwell	= 1	$10^{-8}$
1 WEBER	= $10^8$	1

**CAMPO MAGNÉTICO**

	gauss	TESLA	miligauss
1 gauss	= 1	$10^{-4}$	1.000
1 TESLA	= $10^4$	1	$10^7$
1 miligauss	= 0,001	$10^{-7}$	1

1 tesla = 1 weber/metro<sup>2</sup>

## APÊNDICE H

# LAUREADOS COM O PRÊMIO NOBEL DE FÍSICA\*

1901	Wilhelm Konrad Röntgen	1845-1923	pela descoberta dos raios X
1902	Hendrik Antoon Lorentz Pieter Zeeman	1853-1928 1865-1943	pelas pesquisas relativas à influência do magnetismo sobre os fenômenos de radiação
1903	Antoine Henri Becquerel Pierre Curie Marie Sklowdowska-Curie	1852-1908 1859-1906 1867-1934	pela descoberta da radioatividade espontânea pelas suas pesquisas conjuntas sobre os fenômenos de radiação descobertos por Becquerel
1904	Lord Rayleigh (John William Strutt)	1842-1919	pelas investigações sobre as densidades dos gases mais importantes e pela descoberta do argônio
1905	Philipp Eduard Anton von Lenard	1862-1947	pelo trabalho sobre os raios catódicos
1906	Joseph John Thomson	1856-1940	pelas investigações teóricas e experimentais sobre a condução de eletricidade nos gases
1907	Albert Abraham Michelson	1852-1931	pelos instrumentos óticos de precisão construídos e pelas investigações metrológicas efetuadas com eles
1908	Gabriel Lippmann	1845-1921	pelo método de reprodução fotográfica de cores com base em fenômenos de interferência
1909	Guglielmo Marconi Carl Ferdinand Braun	1874-1937 1850-1918	pelas contribuições ao desenvolvimento da telegrafia sem fios
1910	Johannes Diderik van der Waals	1837-1932	pelo trabalho sobre a equação de estado de gases e líquidos
1911	Wilhelm Wien	1864-1928	pelas descobertas sobre as leis que governam a radiação de calor
1912	Nils Gustaf Dalén	1869-1937	pela invenção de reguladores automáticos para uso em conjunto com acumuladores de gás para iluminação de faróis e bóias
1913	Heike Kamerlingh Onnes	1853-1926	pelas investigações das propriedades da matéria em baixas temperaturas, que levaram, entre outras coisas, à produção do hélio líquido
1914	Max von Laue	1879-1960	pela descoberta da difração dos raios X pelos cristais
1915	William Henry Bragg William Lawrence Bragg	1862-1942 1890-1971	pelos trabalhos de análise da estrutura dos cristais utilizando os raios X
1917	Charles Glover Barkla	1877-1944	pela descoberta dos raios X característicos dos ele- mentos
1918	Max Planck	1858-1947	pela descoberta dos quanta de energia
1919	Johannes Stark	1874-1957	pela descoberta do efeito Doppler em raios canais e do desdobramento das linhas espectrais em campos elétricos
1920	Charles-Édouard Guillaume	1861-1938	pelo serviço prestado às medições de precisão na física em virtude da descoberta que fez de anomalias em ligas de aço-níquel

\*Biografias e discursos de recepção do prêmio encontram-se em *Nobel Lectures, Physics, 1901-1970*, Elsevier Publishing Company.

1921	Albert Einstein	1879-1955	pelos serviços prestados à física teórica, especialmente pela descoberta da lei do efeito fotoelétrico
1922	Niels Bohr	1885-1962	pelas investigações sobre a estrutura dos átomos e sobre a radiação emitida por eles
1923	Robert Andrews Millikan	1868-1953	pelo seu trabalho sobre a carga elementar de eletricidade e sobre o efeito fotoelétrico
1924	Karl Manne Georg Siegbahn	1888-1979	pelas descobertas e pesquisas no campo da espectroscopia de raios X
1925	James Franck	1882-1964	pela descoberta das leis que governam a colisão de um elétron com um átomo
	Gustav Hertz	1887-1975	
1926	Jean Baptiste Perrin	1870-1942	pelo seu trabalho sobre a estrutura descontínua da matéria e especialmente pela descoberta do equilíbrio de sedimentação
1927	Arthur Holly Compton	1892-1962	pela descoberta do efeito que recebeu seu próprio nome
	Charles Thomson Rees Wilson	1869-1959	pelo seu método de tornar visíveis as trajetórias de partículas carregadas, graças à condensação de vapor
1928	Owen Willians Richardson	1879-1959	pelo seu trabalho sobre fenômenos termoiônicos e especialmente pela descoberta da lei que recebeu o seu próprio nome
1929	Príncipe Louis Victor de Broglie	1892-1987	pela descoberta da natureza ondulatória dos elétrons
1930	Sir Chandrasekhara Venkata Raman	1888-1970	pelo seu trabalho sobre o espalhamento da luz e pela descoberta do efeito que recebeu o seu próprio nome
1932	Werner Heisenberg	1901-1976	pela criação da mecânica quântica, cuja aplicação provocou, entre outras coisas, a descoberta das formas alotrópicas do hidrogênio
1933	Erwin Schrödinger	1887-1961	pela descoberta de novas formas produtivas da teoria atômica
	Paul Adrien Maurice Dirac	1902-1984	
1935	James Chadwick	1891-1974	pela descoberta do nêutron
1936	Victor Franz Hess	1883-1964	pela descoberta da radiação cósmica
	Carl David Anderson	1905-1991	pela descoberta do pósitron
1937	Clinton Joseph Davison	1881-1958	pela descoberta experimental da difração de elétrons
	George Paget Thomson	1892-1975	por cristais
1938	Enrico Fermi	1901-1954	por suas demonstrações sobre a existência de novos elementos radioativos produzidos por irradiação com nêutrons e pela descoberta de reações nucleares provocadas por nêutrons lentos
1939	Ernest Orlando Lawrence	1901-1958	pela invenção e desenvolvimento do ciclotron e pelos resultados obtidos com o aparelho, especialmente com elementos radioativos artificiais
1943	Otto Stern	1888-1969	pela contribuição ao desenvolvimento do método dos raios moleculares e pela descoberta do momento magnético do próton
1944	Isidor Isaac Rabi	1898-1988	pelo método de ressonância para o registro das propriedades magnéticas dos núcleos atômicos
1945	Wolfgang Pauli	1900-1958	pela descoberta do princípio da exclusão (também chamado princípio de Pauli)
1946	Percy Williams Bridgman	1882-1961	pela invenção de um aparelho para produzir pressões muito elevadas e pelas descobertas feitas com esse aparelho no campo da física das altas pressões
1947	Sir Edward Victor Appleton	1892-1965	pelas investigações sobre a física da alta atmosfera, especialmente pela descoberta da chamada camada de Appleton
1948	Patrick Maynard Stuart Blackett	1897-1974	pelo desenvolvimento do método da câmara de nuvem de Wilson e pelas descobertas que com ela realizou em física nuclear e radiação cósmica
1949	Hideki Yukawa	1907-1981	pela previsão sobre a existência de mésons com base no trabalho teórico sobre forças nucleares

1950	Cecil Frank Powell	1903-1969	pelo desenvolvimento de método fotográfico para estudar os processos nucleares e pelas descobertas sobre os mésons, feitas com esse método
1951	Sir John Douglas Cockcroft Ernest Thomas Sinton Walton	1897-1967 1903-	pelo trabalho pioneiro sobre a transmutação dos núcleos atômicos por partículas atômicas artificialmente aceleradas
1952	Felix Bloch Edward Mills Purcell	1905-1983 1912-	pelo desenvolvimento de novo método de precisão nuclear-magnético e pelas descobertas feitas a partir dele
1953	Frits Zernike	1888-1966	pela demonstração do método do contraste de fase, especialmente pela invenção do microscópio de contraste de fase
1954	Max Born	1882-1970	pela pesquisa fundamental na mecânica quântica, especialmente pela interpretação estatística da função de onda
	Walther Bothe	1891-1957	pelo método das coincidências e pelas descobertas feitas com ele
1955	Willis Eugene Lamb	1913-	pelas descobertas sobre a estrutura fina do espectro de hidrogênio
	Polykarp Kusch	1911-	pela determinação precisa do momento magnético do elétron
1956	William Shockley John Bardeen Walter Houser Brattain	1910-1989 1908-1991 1902-1987	pelas pesquisas sobre semicondutores e pela descoberta do transistor
1957	Chen Ning Yang Tsung Dao Lee	1922- 1926-	pelas profundas investigações sobre as leis da paridade que levaram a importantes descobertas relativas às partículas elementares
1958	Pavel Aleksejevič Čerenkov Il'ja Michajlovič Frank Igor' Evgen' evič Tamm	1904-1990 1908-1990 1895-1971	pela descoberta e interpretação do efeito Čerenkov
1959	Emilio Gino Segrè Owen Chamberlain	1905-1989 1920-	pela descoberta do antipróton
1960	Donald Arthur Glaser	1926-	pela invenção da câmara de bolhas
1961	Robert Hofstadter	1915-1990	pelo estudo pioneiro sobre o espalhamento dos elétrons pelos núcleos atômicos e pelas descobertas que assim fez sobre a estrutura dos núcleos
	Rudolf Ludwig Mössbauer	1929-	pelas pesquisas sobre a absorção ressonante de raios gama e pelas descobertas associadas ao efeito que recebeu o seu próprio nome
1962	Lev Davidovič Landau	1908-1968	pelas teorias pioneiras sobre a matéria condensada, especialmente sobre o hélio líquido
1963	Eugene P. Wigner	1902-	pelas contribuições para a teoria dos núcleos atômicos e das partículas elementares, particularmente pelas descobertas decorrentes da aplicação de princípios de simetria fundamentais
	Maria Goeppert Mayer	1906-1972	pelas descobertas referentes à estrutura de camadas do núcleo
	J. Hans D. Jensen	1907-1973	
1964	Charles H. Townes Nikolai G. Basov Alexander M. Prochorov	1915- 1922- 1916-	pelo trabalho fundamental no campo da eletrônica quântica que levou à construção de osciladores e amplificadores baseados no princípio do maser-laser
1965	Sin-itiro Tomonaga Julian Schwinger Richard P. Feynman	1906-1979 1918- 1918-1988	pelo trabalho fundamental em eletrodinâmica quântica, com profundas conseqüências para a física das partículas elementares
1966	Alfred Kastler	1902-1984	pela descoberta e desenvolvimento de métodos óticos para o estudo da ressonância hertziana nos átomos

1967	Hans Albrecht Bethe	1906-	pelas contribuições à teoria das reações nucleares, especialmente pelas descobertas relativas à produção de energia nas estrelas
1968	Luis W. Alvarez	1911-1988	pela decisiva contribuição à física das partículas elementares, em particular pela descoberta de um grande número de estados de ressonância, feita pelo desenvolvimento de técnicas de emprego da câmara de bolhas de hidrogênio e da análise dos dados assim obtidos
1969	Murray Gell-Mann	1929-	pelas contribuições e descobertas relativas à classificação e às interações das partículas elementares
1970	Hannes Alfvén	1908-	pelo trabalho e descobertas fundamentais na magnetoidrodinâmica, com aplicações frutíferas em diferentes áreas da física dos plasmas
	Louis Néel	1904-	pelo trabalho e descobertas fundamentais relativos ao antiferromagnetismo e ao ferrimagnetismo, que levaram a importantes aplicações na física do estado sólido
1971	Dennis Gabor	1900-1979	pela descoberta dos princípios da holografia
1972	John Bardeen	1908-1991	pelo desenvolvimento de uma teoria da supercondutividade
	Leon N. Cooper	1930-	
	J. Robert Schrieffer	1931-	
1973	Leo Esaki	1925-	pela descoberta do tunelamento em semicondutores
	Ivar Giaever	1929-	pela descoberta do tunelamento em supercondutores
	Brian D. Josephson	1940-	pela previsão teórica das propriedades de uma supercorrente provocada pelo tunelamento de uma barreira
1974	Antony Hewish	1924-	pela descoberta dos pulsares
	Sir Martin Ryle	1918-1984	pelo trabalho pioneiro em radioastronomia
1975	Aage Bohr	1922-	pela descoberta de uma relação entre movimento coletivo e movimento de uma partícula e pelo desenvolvimento de uma teoria da estrutura do núcleo atômico com base nessa relação
	Ben Mottelson	1926-	
	James Rainwater	1917-1986	
1976	Burton Richter	1931-	pela descoberta (independente) de importante partícula fundamental
	Samuel Chao Chung Ting	1936-	
1977	Philip Warren Anderson	1923-	pelas investigações teóricas fundamentais sobre a estrutura eletrônica dos sistemas magnéticos e desordenados
	Nevill Francis Mott	1905-	
	John Hasbrouck Van Vleck	1899-1980	
1978	Peter L. Kapitza	1894-1984	pelas invenções e descobertas básicas na física de baixas temperaturas
	Arno A. Penzias	1933-	pela descoberta da radiação cósmica de fundo em microondas
	Robert Woodrow Wilson	1936-	
1979	Sheldon Lee Glashow	1932-	pelo modelo unificado da ação das forças fracas e eletromagnéticas e pela previsão da existência de correntes neutras
	Abdus Salam	1926-	
	Steven Weinberg	1933-	
1980	James W. Cronin	1931-	pela descoberta de violações dos princípios fundamentais de simetria no decaimento dos mésons K neutros
	Val. L. Fitch	1923-	
1981	Nicolaas Bloembergen	1920-	pela contribuição ao desenvolvimento da espectroscopia a laser
	Arthur Leonard Schawlow	1921-	
	Kai M. Siegbahn	1918-	pela contribuição à espectroscopia de alta resolução com elétrons
1982	Kenneth Geddes Wilson	1936-	pelo método de análise dos fenômenos críticos inerentes às mudanças da matéria sob a influência da pressão e da temperatura



# CRÉDITOS DAS FOTOS

## **Capítulo 13**

*Abertura:* Jose Azel/Woodfin Camp & Associates. Pág. 2: (em cima) Fred Hirschmann/Allstock; (embaixo) Andy Levin/Photo Researchers. Pág. 3: Randy G. Taylor/Leo de Wys. Pág. 12: Cortesia de Micro-Measurements Division, Measurements Group, Inc., Raleigh, North Carolina. Pág. 16: Hideo Kurihara/Tony Stone Worldwide.

## **Capítulo 14**

*Abertura:* Tom van Dyke/Sygma. Pág. 26: Kent Knudson/FPG International. Pág. 39: Bettmann Archive. Pág. 43: Cortesia da NASA.

## **Capítulo 15**

*Abertura:* Cortesia de Lund Observatory. Pág. 52: Cortesia da NASA. Pág. 59: Kim Gordon/AstroStock. Pág. 65: Cortesia da NASA. Cortesia de Finley-Holiday Film Corporation.

## **LEITURA COMPLEMENTAR 3**

Págs. 27 e 28: Cortesia da NASA.

## **Capítulo 16**

*Abertura e 4.ª capa do volume:* Steven Frink. Pág. 89: John Amos/Photo Researchers. Pág. 90: Will McIntyre/Photo Researchers. Pág. 91 (embaixo): Cortesia de D. H. Peregrine, University of Bristol, Inglaterra; (em cima): Cortesia da Volvo North America Corporation. Pág. 97: Cortesia do San Francisco Maritime National Historical Park Museum. Pág. 99: T. Champion/Sygma. Pág. 103: Kick Stewart/Allsport.

## **LEITURA COMPLEMENTAR 4**

Pág. 108: Cortesia de Peter Brancazio.

## **Capítulo 17**

*Abertura:* John Visser/Bruce Coleman. Pág. 126: Richard Megna/Fundamental Photographs. Pág. 128: Cortesia de T. D. Rossing, Northern Illinois University.

## **Capítulo 18**

*Abertura:* Stephen Dalton/Animals Animals. Pág. 138: (à esquerda) Howard Sochurack/Stock Market; (à direita) cortesia de John Foster,

IBM Corporation. Pág. 146: Bob Gruen/Star File Photos. Pág. 147: John Eastcott/Yva Momatiuk/DRK Photo. Pág. 153: Philippe Plailly/Science Photo Library/Photo Researchers. Pág. 163: Cortesia dos Observatórios de Mt. Wilson e Palomar.

## **LEITURA COMPLEMENTAR 5**

Pág. 164: (à direita) Cortesia de John Rigden; (à esquerda) cortesia do Lincoln Center. Pág. 165: Lincoln Russell/Stock, Boston. Págs. 166 e 167: Cortesia do Lincoln Center, fotos de Norman Mc Grath.

## **Capítulo 19**

*Abertura:* Jim Brandenburg/Minden Pictures. Pág. 175: AP/Wide World Photos.

## **Capítulo 20**

*Abertura:* Tom Owen Edmunds/Image Bank. Pág. 193: Peter Arnold/Peter Arnold. Pág. 194: Cortesia de Daedalus Enterprises. Pág. 198: Mark Newman.

## **LEITURA COMPLEMENTAR 6**

Pág. 203: Jeff R. Werner.

## **Capítulo 21**

*Abertura e capa do volume:* Bryan e Cherry Alexander Photography. Pág. 212: Cortesia da NASA.

## **LEITURA COMPLEMENTAR 7**

Pág. 232: Cortesia de Barbara Levi. Pág. 233: Cortesia da NASA/Langley Research Center.

## **Capítulo 22**

*Abertura:* Steven Dalton/Photo Researchers. Pág. 239: Richard Ustinich/Image Bank. Pág. 240: V. Kiselev/Sovfoto. Pág. 254: (à esquerda) Carry Wolinski/Stock, Boston; (à direita) Cortesia do Professor Hallett, Universidade de Washington, Seattle.

# ÍNDICE ALFABÉTICO

## A

Aceleração  
- da gravidade, 54  
- - *versus* aceleração de queda livre, 55  
- de queda livre *g*, 34  
- - *versus* aceleração da gravidade, 55  
- equivalência com a gravitação, 66  
Acústica de uma sala de concertos, 164-167  
Adiabática, 222  
Aerodinâmica, 108-110  
Afinação de instrumentos musicais, 150  
Aglomerados globulares, 58  
Água, 171, 177, 184, 186  
- ebulição da, 203-205  
Ambiente, 183, 243  
Amplitude, 26, 33, 113  
- angular, 33  
Análise de Fourier, 121  
Antinós, 125  
Aquecimento da Terra, 232-235  
Áreas, lei das, 61-62  
Arrastamento, 96  
Arrasto, 91  
- coeficiente de, 109  
Asa  
- de um avião, dinâmica do fluido em torno da, 96  
- dinâmica dos fluidos numa, 96  
Astronomia, observações Doppler, 154  
Atmosfera  
- efeito do dióxido de carbono, 232, 235  
- unidade de pressão, 83  
Atrito e equilíbrio estático, 6, 8  
Avogrado, Amedeo, 208

## B

Balança de torção, 56  
Ballot, Buyes, 150  
Barômetro de mercúrio, 86  
Bartlett, Albert A., 179  
Batimentos de ondas sonoras, 149-150  
Beisebol, aerodinâmica do, 110  
Bell, Alexander Graham, 144  
Beranek, Leo L., 164  
Bernoulli, Daniel, 93  
Boerhaave, Hermann, 204  
Bolas, sustentação dinâmica, 97  
Boltzmann, Ludwig, 254  
Bomba térmica, 247  
Borut, A., 195  
Brahe, Tycho, 61  
Brancazio, Peter J., 108  
Brown, Robert, 208  
BTU (unidade térmica inglesa), 184

## C

*c*, veja Velocidade escalar da luz  
Calibrador de deformação, 13  
Calor, 184-187, 241  
- capacidade calorífica, 184  
- de fusão, 186  
- de transformação, 186  
- de vaporização, 186  
- e trabalho, 187-189, 237-239, 241  
- específico molar, 185

- - gases ideais, 217-219  
- específico, 185  
- - gases ideais, 217  
- - razão entre, 223  
Caloria, 185  
Calorímetros de fluxo, 199  
Camada  
- e gravitação, 53  
- limite, 96, 97, 108, 193  
Caminhada no fogo, 205  
Caminho médio livre, 213-215  
Carnot, N. L. Sadi, 243  
Cavendish, Henry, 56  
Celsius, escala, 173-174  
Centro  
- de empuxo, 89  
- de gravidade, 3-4  
- de oscilação, 34  
Chapas, condução em, 193  
Ciclo  
- de Carnot/máquinas, 243-248  
- oscilações, 26-27  
Círculo de referência, 37  
CO<sub>2</sub> e aquecimento da Terra, 232-233  
Coeficiente  
- de expansão linear, 175  
- de expansão volumar, 176  
- de performance (refrigeradores), 242  
Compressibilidade, 13, 82  
Compressão, 12, 13  
- hidráulica, 13  
- livre, 252  
Comprimento de onda, 113  
Condutividade  
- elétrica térmica, 192  
- térmica, 192  
Constante(s)  
- de amortecimento, 38  
- de Boltzmann, 213  
- de permissividade, 228  
- de torção, 31  
- dos gases, 209  
- fundamentais, 265  
- gravitacional, 52  
- - mediação da, 56  
Cordas, ondas em, 112-113, 117  
- e música, 146-149  
Corpos(s)  
- flutuantes, 89  
- rígidos, elasticidade, 11  
Curvas tensão-deformação, 12

## D

Da Vinci, Leonardo, 111  
Deformação, 11  
Densidade linear de cordas, 117  
Doppler, Johann Christian, 150  
Derivadas, 116, 279  
- parciais, 116  
Deslocamento  
- amplitude, 141  
- para o azul, 154  
- para o vermelho, 155  
Desmagnetização, 254  
- adiabática, 254  
Desordem e entropia, 253  
Diagrama

- de fase, 100  
- do corpo livre, 9  
Diferença de comprimento, 142  
Difusão de isótopos, 213  
Dióxido de carbono, e o aquecimento da Terra, 232-235  
Dipolo elétrico, veja Dipolo  
Dispersão, 122-123  
Distância  
- ao afélio, 63  
- ao periélio, 63  
Distribuição de Maxwell, 215-217

## E

Ebulição, 203-205  
- de películas, 204-205  
- nuclear, 203  
Efeito  
- Cerenkov, 153  
- Doppler, 150-154  
- - com luz, 150, 154  
- - detector em movimento, fonte em movimento, 152  
- - detector em movimento, fonte em repouso, 150  
- - detector em repouso, fonte em movimento, 152  
- - velocidade supersônica, 153-154  
- Leidenfrost, 204-205  
- Magnus, 110  
Eficiência térmica, máquinas térmicas, 239, 245  
Einstein, Albert, 66, veja também Relatividade  
Elasticidade, 10-14  
Elementos, 269-271  
Empuxo, 89  
Energia  
- cinética  
- - de ondas, 120  
- - de translação, 212-213  
- equipartição, 220  
- interna, veja Energia térmica  
- potencial  
- - de átomos numa rede, 177  
- - de ondas, 119  
- - gravitacional, 58-61  
- térmica, 183, 189  
- - gases ideais, 217  
Entropia, 247-249, 252-254  
- e a segunda lei, 252  
- em processos irreversíveis, 250-252  
- em processos reversíveis, 249  
Equação  
- da continuidade, 92  
- de Bernoulli, 93-96  
Equilíbrio, 1-3  
- de forças, equilíbrio estático, 2, 4-9  
- de torques, 3-9  
- dinâmico, 3  
- estático, 1, 4-10  
- - condições para, 2-3  
- - de fluidos (hidrostática), 83-86  
- - estável/instável, 1-2  
- - problemas indeterminados, 10  
- térmico, 171  
Equipartição de energia, 220  
Equivância, princípio da, 66  
Escala  
- centígrada, 173-174  
- decibel, 144  
- Fahrenheit, 173-174

- internacional de temperatura, 173  
 - kelvin, 169-170, 171, 174  
 Escoramento, 90  
 - arrastamento, 96  
 - camada limite, 96, 108, 193  
 - de fluido real, 96  
 - em canais, 92  
 - equação de Bernoulli, 93  
 - incompressível, 90  
 - irrotacional, 91  
 - laminar, 90  
 - sustentação dinâmica, 97  
 - turbulento, 90  
 - viscoso, 90  
 Espaçoave, 64  
 - e imponderabilidade, 77-79  
 Esportes e aerodinâmica, 109-110  
 Estados termodinâmicos, 186-189  
 Excentricidade, 61  
 Expansão térmica, 174-178  
 Exploração sísmica, 137  
 Explorador da radiação cósmica de fundo, 179  
 Explosões, 138  
 - sônica, 153

**F**

Fase inicial, 26, 123  
 Fator de separação, 213  
 Finch, V., 195  
 Física  
 - lei da, 255  
 - vencedores do Prêmio Nobel, 281-285  
 Flettner, Anton, 97  
 Fluidos, 13, 81-82  
 - arrastamento, 96  
 - hidrostática, 83  
 - ideais, 90  
 - pressão, 13, 82  
 - - variação com a altura, 85  
 - princípio de Arquimedes, 88-89  
 - princípio de Pascal, 88  
 - transmissão de onda num, 138  
 Forças  
 - de amortecimento, 38  
 - de atrito, *veja* Atrito  
 - de sustentação, 97, 108  
 - de viscosidade, 90, 109  
 - empuxo, 88  
 - peso como, 3  
 - volume, 3  
 Fórmulas matemáticas, 277-279  
 Fourier, Jean Baptiste, 121  
 Fractais, 208  
 French, A. P., 36  
 Frentes de ondas sonoras, 137  
 Frequência, 26, 113  
 - angular, 27, 114  
 - natural, 39  
 - ressonante, 127, 146-149, *veja também* Ressonância  
 Funções de distribuições, 216  
 Fusão, calor de, 186

**G**

g, 34, 55  
 G, 52, 56-57  
 Galáxias, 51  
 Galileu, 36  
 Gases, 81-82, *veja também* Fluidos  
 - calor específico molar, 217-219  
 - de estufa, 233-234  
 - diatômicos, 218, 220  
 - energia térmica (interna), 217  
 - expansão adiabática, 222-224  
 - expansão isotérmica, 209  
 - lei dos gases ideais, 209  
 - monoatômicos, 217, 218, 220, 221, 222  
 - poliatômicos, 218, 220  
 - razão entre os calores específicos, 223  
 - teoria cinética dos, *veja* Teoria cinética  
 - trabalho a temperatura constante, 209  
 Golfe, aerodinâmica do, 110  
 Grandezas dependentes da trajetória, 189  
 Graus de liberdade, 220  
 Gravitação  
 - da Terra, 54-58  
 - e peso, 55  
 - e princípio da superposição, 53  
 - e sistema de partículas, 53, 58

- equivalência com a aceleração, 66  
 - lei de Newton da, 51-54  
 - velocidade de escape, 60  
 - visão relativística, 66  
 Greenslade, Thomas B. Jr., 36  
 Grupo local, 51

**H**

Halliday, David, 66  
 Harmônicos, 127, 147  
 - fundamental, 127  
 - Harris, Cyril M., 164  
 Hertz (unidade), 26  
 Hidrostática, 83  
 Hough, S. E., 40

**I**

Impulso, 112  
 Instrumentos musicais, 148  
 Integrais, 279  
 Interferência, 123  
 - construtiva, 123, 142-143  
 - de ondas sonoras, 142  
 - destrutiva, 124, 142  
 Interferogramas, 128  
 Inverno nuclear, 235  
 Isolamento, 192  
 - térmico, 192

**J**

Johnson, Philip, 164  
 Joule, 184

**K**

Kepler, Johannes, 61

**L**

Lâmina bimetalica, 175  
 Lazer, David, 257  
 Leites  
 - da gravitação de Newton, 51-53, 66  
 - e princípio da superposição, 53-54  
 - de Avogadro, 228  
 - de Hooke, forma angular da, 31, 33  
 - de Kepler, 61-64  
 - de Stefan-Boltzmann, 232  
 - dos gases ideais, 209, *veja também* gases  
 - dos períodos, 62  
 - zero da termodinâmica, 170  
 Leidenfrost, Johann Gottlieb, 204  
 Levi, Barbara Gross, 232  
 Limite elástico, 12  
 Linhas de corrente, em escoamentos, 91  
 Líquidos, 13, 81, *veja também* Fluidos magnéticos  
 Luz, 123, *veja também* Difração; Interferência;  
 - Velocidade da luz  
 - efeito Doppler, 150, 154

**M**

Manobra de Heimlich, 87  
 Manômetro, 86  
 - de tubo aberto, 86  
 Máquina(s)  
 - de combustão interna, 239  
 - Stirling, 239  
 - térmicas, 238-241  
 - Carnot, 243, 246, 247  
 - eficiência térmica das, 239, 245-247  
 - ideais, 243  
 - reais, 239  
 - Stirling, 239, 241  
 - substância que realiza o trabalho, 239  
 Marte, movimento em laço, 61  
 Massa  
 - específica, 67  
 - gravitacional, 67  
 - inercial, 67  
 - molar, 208  
 Materiais, 12  
 - de interesse para a engenharia, 13  
 Maxwell, James Clerk, 215, 220, 221

Medidores  
 - de tensão, 12-13  
 - de Venturi, 95  
 Metais, estrutura de rede, 10-11  
 Microvácuo, 100  
 Milímetros de mercúrio, 83  
 Modo fundamental, 147  
 Modos de oscilação, 126, 146  
 Módulo  
 - de cisalhamento, 12  
 - de elasticidade, 11  
 - - volumétrica, 13, 139  
 - de Young, 12  
 - volume, 13, 138  
 Mol, 207  
 Momento  
 - angular, no equilíbrio, 1  
 - e teoria cinética, 210  
 - linear, 1  
 Morcegos, 154  
 Movimento  
 - browniano, 208, 213  
 - circular, *veja também* Rotação  
 - e movimento harmônico simples, 36-38  
 - - uniforme, 36-38  
 - harmônico, simples, 26-31  
 - - amortecido, 38  
 - - angular, 31-32  
 - - e movimento circular uniforme, 36-38  
 Mudanças de fase, 186  
 Música, 146-149

**N**

Navio de Pesquisa FLIP, 90  
 Newton, Isaac, 51  
 Nodostros, 125  
 Número  
 - de Avogadro, 207-208  
 - de Loschmidt, 227  
 - de Mach, 153  
 - de onda, 114  
 - angular, 114  
 - harmônico, 127, 148

**O**

Ondas, *veja também* Luz  
 - acústicas, *veja* Ondas sonoras  
 - amplitude, 26, 33, 113  
 - análise de Fourier, 121  
 - de choque, 153  
 - de matéria, 112  
 - de reflexão, 126  
 - diferença de comprimento, 142  
 - difração, *veja* Difração  
 - dispersão, 122-123  
 - efeito Doppler, *veja* Efeito Doppler  
 - eletromagnéticas e transferência de calor por radiação, 194  
 - energia cinética, 120  
 - energia potencial, 120  
 - estacionárias, 124-127  
 - - modos de oscilação, 126, 146  
 - forma de, 112  
 - frentes de, 138  
 - frequência angular, 114  
 - interferência, *veja* Interferência  
 - longitudinais, 112, 137, 138  
 - mecânicas, 112  
 - - cordas, 111-114, 117-119, 146  
 - número de onda angular, 114  
 - período, 114  
 - plano-polarizadas, 130  
 - polarização plana, 130  
 - potência transmitida, 120  
 - progressivas, 115  
 - - sonoras, 140-142  
 - pulsos, 112, 122  
 - senoidais, 113, 121, 124  
 - sonoras, 137-138  
 - - acústica de uma sala de concertos, 164-167  
 - - amplitude de deslocamento, 141  
 - - amplitude de pressão, 141  
 - - batimentos, 149  
 - - diferença de comprimento, 142  
 - - e música, 146-149  
 - - efeito Doppler, *veja* Efeito Doppler  
 - - frentes de, 138

- intensidade, 143
- interferência, 143
- nível em decibéis, 144-146
- progressivas, 141
- raios, 137
- velocidade das, 138, 212
- velocidade média quadrática, 212
- superposição, 121, 125
- transversais, 112, 137
- velocidade, 115, 117
- Qunt. H. O., 233, 234
- Órbitas
  - de satélites, 64-66
  - geossincronizada, 74
  - geostacionária, 74
  - lei das, 61
- Oscilações, 25, *veja também* Ressonância
  - amortecidas, 25, 38-39
  - centro de, 34
  - forçadas, 39-40
  - frequência natural, 39
  - livres, 39
- Oscilador harmônico, 31, *veja também* Pêndulos, 28
  - angular, 31
  - energia do, 30

## P

- Partículas, 111
- Pascal (unidade), 83
- Peixoto, J.P., 234
- Pêndulo, 32-36
  - centro de oscilação, 34
  - de torção, 31
  - real *versus* ideal, 32
- Período de ondas, 114
- Peso
  - ausência de, 77-79
  - com força volumar, 3
- Pivô, 15
- Planetas, 61-64, 268
- Ponto
  - de ebulição, 173
  - de fusão, 173
  - de vapor, 173
  - triplo, 171
- Potência de ondas, 119-120
- Prensas hidráulicas, 87-88
- Pressão, 82-83
  - absoluta/manométrica, 84, 86
  - amplitude, 141
  - atmosférica, 86
  - hidráulica, 13
  - hidrostática, 83, 87-88
  - manométrica, 84, 86
  - medida da, 86-87
  - sistólica, 83
  - variação com a altura, 85
  - visão molecular (cinética), 210-212
- Primeira lei da termodinâmica, 189-191
- Primeiro harmônico, 127, 147
- Princípio
  - da superposição, 53-54, 121, 125
  - de Arquimedes, 88-90
  - de Pascal, 88
- Problemas indeterminados, 10
- Processos)
  - a pressão constante, 219
  - a volume constante, 190, 218
  - adiabáticos, 190, 222-224
  - cíclicos, 189, 190, 247-248
  - de expansão livre, 190, 250
  - espontâneos, 238, 253
  - estacionários, 193
  - estado estacionário, 193
  - irreversíveis, 250-252
  - isobáricos, 223
  - isocóricos, 223
  - isotérmicos, 209, 223
  - reversíveis, 243, 249
  - termodinâmicos, 188
  - adiabáticos, 190, 191, 222
  - cíclico, 190
  - espontâneo, 237, 252
  - estado estacionário, 193
  - expansão livre, 190
  - irreversível, 250
  - isobárico, 224
  - isocórico, 224
  - isotérmico, 209, 224

- pressão constante, 219
- reversível, 243, 248
- volume constante, 190, 217-218
- Projéteis, aerodinâmica dos, 108-110
- Pulsos, 112, 122

## Q

Quantização da energia e teoria cinética, 221

## R

- Radiação
  - cósmica de fundo, 179-180
  - de fundo, 179
  - e aquecimento da Terra, 232-235
  - solar e aquecimento da Terra, 232-235
  - transferência de calor por, 194
- Raios para ondas sonoras, 137
- Rayleigh, Lord, 91
- Redes cristalinas, 177
- energia potencial de átomos vizinhos, 177
- Refrigeradores, 241-242
  - Carnot, 245
  - de ar, 241
- Relatividade, teoria geral da, 66
- Resistência
  - à deformação, 12
  - devida à forma, 108
  - do ar, 108
  - térmica, 192, 197
- Resnick, Robert, 66
- Ressonância, 39
  - pico de, 40
- Ride, Sally, K., 77
- Rigden, John S., 164
- Ruptura, 12

## S

- Sabine, Wallace C., 165
- Satélites, órbitas, 64-66
- Segunda lei de Newton e a velocidade da onda numa corda, 117
- Segunda lei da termodinâmica
  - entropia e, 252
  - formas alternativas, 238, 241
- Segundo harmônico, 127, 147
- Semi-eixo maior, 61
- Séries harmônicas, 127
- Shkofnik, A., 195
- Shortley, G., 273
- Sifão, 106
- Sistemas, 183, 243
  - de partículas, gravitação num, 52
  - Internacional de Unidades, 263-264
  - não-isolados, 188-189
- Sobreprensão, 86
- Sólidos, 12, 13, 175
- Súperaquecimento, 203
- Sustentação dinâmica, 97

## T

- Tabela periódica, 271
- Taxa de escoamento de massa, 92
- Taylor, C. R., 195
- Temperatura, 169-170
  - e a lei zero da termodinâmica, 170
  - escala Celsius (centígrada), 173-174
  - escala Fahrenheit, 173-174
  - escala internacional, 173
  - escala kelvin, 169, 171, 174
  - medição da, 171-173
  - padrão, 173
  - visão molecular (cinética), 210-212
- Tempo de reverberação, 165
- Tensão, 12
  - de cisalhamento, 12
  - de ruptura, 12
  - de tração, 11, 12
  - hidráulica, 11, 12
  - superficial, 78-79
- Teoria cinética, 207
  - distribuição de Maxwell, 216
  - energia cinética de translação, 212-213
  - energia térmica (interna), 217
  - equipartição da energia, 220-221

- graus de liberdade, 220
- livre caminho médio, 213
- quantização da energia, 221
- velocidade escalar
  - média quântica, 211
  - média, 216
  - molecular, 210, 215
- Terceiro harmônico, 127, 148
- Termistores, 180
- Termodinâmica, 169, *veja também* Energia; Calor; Máquinas térmicas; Refrigeradores
  - ambiente, 183, 243
  - ciclos, 189, 248
  - de Carnot, 243-245
  - entropia, *veja* Entropia
  - estados, 186, 188
  - estatística, 253
  - grandezas dependentes do processo, 189
  - lei zero da, 170
  - primeira lei da, 189-191
  - sistemas, 183, 189, 243
  - variáveis de estado, 248
- Termômetros, 170, 175
  - a gás a volume constante, 172
  - de resistência, 180
- Termopar, 180
- Termoscópios, 170
- Termostatos, 175
- Terra, 55, 57, 267
  - aquecimento global, 232-235
  - gravitação, 53-58
- Torque restaurador, 89
- Torr, 83
- Trabalho, 241
  - e calor, 187, 238, 241
  - e primeira lei, 189-191
  - gases a temperatura constante, 209
- Transferência de calor, 184-186, *veja também* Máquinas térmicas; Refrigeradores
  - e primeira lei, 190
  - estado estacionário, 193
  - irreversível, variações de entropia, 250
  - por condução, 192-194
  - por convecção, 193
  - radiação, 194, 232-235
- Transformação, calor de, 186
- Trocadores de calor, 204
- Tubos
  - escoamento em, 92
  - frequências de ressonância, 146

## U

- Ultra-som, 137
- Unidades, 263-264
  - derivadas, 263-264
  - SI, 263-264
- Universo, radiação de fundo, 179

## V

- Valor R., 192
- Vaporização, calor de, 186
- Variáveis de estado, 248
- Vazão, 92
  - volumétrica, 92
- Velocidade, *veja também* Aceleração; Movimento; Relatividade
  - da luz, 119
  - de escape, 60-61
  - de grupo, 123
  - escalar
    - de ondas, 115, 117
    - do som, 138, 212
    - média quadrática, 211
    - média quadrática, 211
    - supersônica, efeito Doppler e, 152
- Vencedores do Prêmio Nobel de Física, 281-285
- Vetores, 278
- Via Láctea, 51
- Viscosidade, 90-91
- Vogel, Stephen, 92
- Volume específico, 176

## W

- Walker, Jearl, 203
- Williams, D., 273

# RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

## Capítulo 13

1. (a) Dois. (b) Sete. 3. 8,7 N. 5. (a)  $-27\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$  N. (b)  $176^\circ$  anti-horário a partir da direção  $+x$ . 7. 7.920 N. 9. 0,29. 11. (a) 2.770 N. (b) 3.890 N. 13. (a) 1.160 N, para baixo. (b) 1.740 N, para cima. (c) Esquerda, esticado; direita, comprimido. 15. Um quarto do comprimento da barra, a partir da extremidade livre. 17. (a)  $3W$ . (b)  $4W$ . 19. (a) Fundo:  $2W$ ; laterais:  $W$ . (b)  $\sqrt{2}W$ . 21. (a) 49 N. (b) 28 N. (c) 57 N. (d)  $29^\circ$ . 25. (a) 408 N. (b)  $F_h = 245$  N (direita). (c)  $F_v = 163$  N (para cima). 27.  $W \frac{\sqrt{2rh-h^2}}{r-h}$ . 29. (a) 42 N. (b) 66 N. 31. (a) 192,6 N. (b) 96,5 N. (c) 55,6 N. 33. (a) 6.630 N. (b)  $F_h = 5.740$  N. (c)  $F_v = 5.960$  N. 35. (a)  $Wx/(L \sin \theta)$ . (b)  $Wx/(L \tan \theta)$ . (c)  $W(1-x/L)$ . 37. (a)  $-800,6$  N;  $266,9$  N. (b)  $800,6$  N;  $266,9$  N. (c)  $800,6$  N;  $934$  N. (d)  $-800,6$  N;  $-266,9$  N. 39. 0,34. 41. As barras  $BC$ ,  $CD$  e  $DA$  estão sob tensão devido às forças  $\mathbf{T}$ ; as diagonais  $AC$  e  $BD$  estão sob compressão devido às forças  $\sqrt{2}\mathbf{T}$ . 43. (a) 445 N. (b) 0,50. (c) 315 N. 45. (a)  $3,9$  m/s<sup>2</sup>. (b) 2.000 N em cada roda traseira; 3.500 N em cada roda dianteira. (c) 790 N em cada roda traseira; 1.410 N em cada roda dianteira. 47. (a)  $1,9 \times 10^{-3}$ . (b)  $1,3 \times 10^7$  N/m<sup>2</sup>. (c)  $6,9 \times 10^9$  N/m<sup>2</sup>. 49. 3,1 cm. 51.  $2,4 \times 10^9$  N/m<sup>2</sup>. 53. (a)  $1,8 \times 10^7$  N. (b)  $1,4 \times 10^7$  N. (c) 16. 55. (a) 867 N. (b) 143 N. (c) 0,165.

## Capítulo 14

1. (a) 0,50 s. (b) 2,0 Hz. (c) 18 cm. 3. (a) 245 N/m. (b) 0,284 s. 5. 708 N/m. 7.  $f > 500$  Hz. 9. (a) 100 N/m. (b) 0,45 s. 11. (a)  $6,28 \times 10^5$  rad/s. (b) 1,59 mm. 13. (a) 1,0 mm. (b) 0,75 m/s. (c) 570 m/s<sup>2</sup>. 15. (a)  $1,29 \times 10^5$  N/m. (b) 2,68 Hz. 17. (a) 4,0 s. (b)  $\pi/2$  rad/s. (c) 0,37 cm. (d) (0,37 cm)  $\cos(\pi/2)t$ . (e)  $(-0,58$  cm/s)  $\sin(\pi/2)t$ . (f) 0,58 cm/s. (g) 0,91 cm/s<sup>2</sup>. (h) Zero. (i) 0,58 cm/s. 19. (b) 12,47 kg. (c) 54,43 kg. 21. 1,6 kg. 23. (a) 1,6 Hz. (b) 1,0 m/s. (c) 10 m/s<sup>2</sup>.  $\pm 10$  cm. (d)  $(-10$  N/m)  $x$ . 25. 22 cm. 27. (a) 25 cm. (b) 2,2 Hz. 29. (a) 0,500 m. (b)  $-0,251$  m. (c) 3,06 m/s. 31. (a) 0,183A. (b) Mesma direção. 37. (a)  $k_1 = (n+1)k/n$ ;  $k_2 = (n+1)k$ . (b)  $f_1 = \sqrt{(n+1)/n} f$ ;  $f_2 = \sqrt{n+1} f$ . 39.  $3,7 \times 10^{-2}$  J. 41. (a) 130 N/m. (b) 0,62 s. (c) 1,6 Hz. (d) 5,0 cm. (e) 0,17 J. (f) 0,51 m/s. 43. (a)  $7,25 \times 10^6$  N/m. (b) 49.400. 45. (a)  $mv\sqrt{m+M}$ . (b)  $mv\sqrt{k(m+M)}$ . 47. (a)  $(-80$  N)  $\cos[(2.000$  rad/s) $t - \pi/3$  rad]. (b) 3,1 ms. (c) 4,0 m/s. (d) 0,080 J. 49. (a) 16,7 cm. (b) 1,23%. 51. (a) 0,735 kg·m<sup>2</sup>. (b) 0,024 N·m. (c) 0,181 rad/s. 53. 0,079 kg·m<sup>2</sup>. 55. 9,79 pol. 57. 99 cm. 61.  $T/\sqrt{2}$ . 63. 5,6 cm. 65. (a) 0,869 s. (b)  $r = R/2$ . 69. (a)  $2\pi \sqrt{\frac{L^2+12x^2}{12gx}}$ . (b) 0,289. 71. (a) 0,35 Hz. (b) 0,39 Hz. (c) Zero. 73.  $14,0^\circ$ . 75.  $21\pi \sqrt{m/3k}$ . 77. (a) 2,0 s. (b) 19,8 N·m/rad. 79. 0,29 L. 81. 0,39. 83. (a) 0,102 kg/s. (b) 0,137 J. 85.  $k = 490$  N/cm;  $b = 1.100$  kg/s. 87. 1,9 pol.

## Capítulo 15

1. 19 m. 3. 2,16. 5. 1/2. 7.  $3,4 \times 10^5$  km. 9.  $3,7 \times 10^5$  N, direção em que  $y$  aumenta. 11.  $M = m$ . 13.  $3,2 \times 10^{-7}$  N. 15.  $\frac{GmM}{d^2} \left( 1 - \frac{1}{8(1-R/2d)^2} \right)$ . 17. (a) 1,62 m/s<sup>2</sup>. (b) 4,9 s. 19. 0,016 lb. 21. (a)  $3,4 \times 10^{-3}$  g. (b)  $6,1 \times 10^{-4}$  g. (c)  $1,4 \times 10^{-11}$  g. 23. 9,78 m/s<sup>2</sup>. 25. (b) 1,9 h. 27. (b) 3,2 m. 31. (a)  $G(M_1 + M_2) m/a^2$ . (b)  $GM_1 m/b^2$ . (c) 0. 35. (b)  $2,0 \times 10^8$  N/m<sup>2</sup>. (c) 360 km. 37. (a)  $-4,4 \times 10^{-11}$  J. (b)  $-2,9 \times 10^{-11}$  J. (c)  $2,9 \times 10^{-11}$  J. 39. 1/2. 41. 220 km/s. 44.  $-Gm(M_E/R + M_J/r)$ . 49.  $2,6 \times 10^4$  km. 51. (a) 82 km/s. (b)  $1,8 \times 10^4$  km/s. 53. (a)  $\frac{GMmx}{(x^2+R^2)^{3/2}}$ . (b)  $v^2 = 2GM \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}} \right)$ . 55. 1,87 ano. 57.  $5,93 \times 10^{24}$  kg. 59. 0,35 mês lunar. 61. 3,9 anos. 63.  $5,01 \times 10^9$  m ou 7,20 raios solares. 65.  $3,58 \times 10^4$  km. 67.  $81^\circ$ . 73. (a) 42,1 km/s. (b) 12,3 km/s. (c) 16,6 km/s. 75. 1,6 cm/s, para oeste, ao longo do equador. 77. (a)  $-GM_E m/r$ . (b)  $-2GM_E m/r$ . (c) Cai radialmente em direção à Terra. 81. (a) Não. (b) O mesmo. (c) Sim. 83. (a)  $T \propto r^{3/2}$ . (b)  $K \propto r^{-1}$ . (c)  $L \propto r^{1/2}$ . (d)  $v \propto r^{-1/2}$ . 85. (a) 0. (b)  $1,8 \times 10^{12}$  J. (c)  $1,8 \times 10^{12}$  J. (d) 0,99 km/s.

## Capítulo 16

1. 1.000 kg/m<sup>3</sup>. 3.  $1,1 \times 10^5$  Pa ou 1,1 atm. 5.  $2,9 \times 10^4$  N. 7. 6,0 lb/pol.<sup>2</sup>. 9.  $1,90 \times 10^4$  Pa (143 mm Hg). 11.  $5,4 \times 10^4$  Pa. 13. 0,52 m. 15. (a) 6,06  $\times 10^8$  N. (b) 20 atm. 17. 0,412 cm. 19. 2,0. 21. 44 km. 23. (a)  $\rho g WD^2/2$ . (b)  $\rho g WD^3/6$ . (c)  $D/3$ . 27.  $-3,9 \times 10^{-3}$  atm. 29. (a)  $fA/g$ . (b) 20 lb. 31. 1,070 g. 33. 1,5 g/cm<sup>3</sup>. 35. 600 kg/m<sup>3</sup>. 37. (a) 670 kg/m<sup>3</sup>. (b) 740 kg/m<sup>3</sup>. 39. 390 kg. 41. (a) 1,2 kg. (b) 1.300 kg/m<sup>3</sup>. 43. 0,126 m<sup>3</sup>. 45. Cinco. 47. (a) 1,80 m<sup>3</sup>. (b) 4,75 m<sup>3</sup>. 49. 2,79 g/cm<sup>3</sup>. 51. (b) 3,17 s. 53. 4,0 m. 55. 28 ft/s. 57. 43 cm/s. 59. (a) 2,40 m/s. (b) 245 Pa. 61. (a) 12 ft/s. (b) 13 lb/pol.<sup>2</sup>. 63. 0,72 ft·lb/ft<sup>3</sup>. 65. (a) 2. (b)  $R_1/R_2 = 1/2$ . (c) Esvazie-o até  $h_2 = h/4$ . 67. 116 m/s. 71. 110 m/s. 73.  $1,11 \times 10^4$  N. 75.  $1/2 \rho v^2 A$ , onde  $\rho$  é a densidade do ar. 77. 1,4 cm. 79. (a) 74 N. (b) 150 m<sup>3</sup>. 83. (a)  $v = 4,1$  m/s,  $v = 21$  m/s. (b)  $8,0 \times 10^{-3}$  m/s. 85. (a) 830 W. (b) 1.100 W.

## Capítulo 17

1. (a) 75 Hz. (b) 13 ms. 3. (a) 1,7 s. (b) 2,0 m/s. (c) 3,3 m. (d) 15 cm. 5. (a) 0,68 s. (b) 1,47 Hz. (c) 2,06 m/s. 7. (c) 200 cm/s; direção de  $x$  negativo. 9. (a) 5 cm/s. (b) Na direção de  $x$  crescente. 11. (a) 2,0 mm; 96 Hz; 30 m/s; 31 cm. (b) 1,2 m/s. 13. (a) 6,0 cm. (b) 100 cm. (c) 2,0 Hz. (d) 200 cm/s. (e) Direção  $-x$ . (f) 75 cm/s. (g)  $-2,0$  cm. 17. 129 m/s. 19. 135 N. 23. (a) 15 m/s. (b) 0,036 N. 25.  $y = (0,12$  mm)  $\sin[(141$  m<sup>-1</sup>)  $x + (628$  s<sup>-1</sup>)  $t$ . 27. (a) 5,0 cm. (b) 40 cm. (c) 12 m/s. (d) 0,033 s. (e) 9,4

m/s. (f)  $5,0 \text{ sen}(16x + 190t + 0,79)$ , com  $x$  em m,  $y$  em cm,  $t$  em s. **29.** (a)  $v_1 = 28,6 \text{ m/s}$ ;  $v_2 = 22,1 \text{ m/s}$ . (b)  $M_1 = 188 \text{ g}$ ;  $M_2 = 313 \text{ g}$ . **31.** (a)  $\sqrt{k(\Delta l)(l + \Delta l)/m}$ . **33.** (a)  $P_2 = 2P_1$ . (b)  $P_2 = P_1/4$ . **35.** (a)  $3,65 \text{ m/s}$ . (b)  $12,2 \text{ N}$ . (c) Zero. (d)  $44,3 \text{ W}$ . (e) Zero. (f) Zero. (g)  $0,50 \text{ cm}$ . **37.**  $82,8^\circ$ ,  $1,45 \text{ rad}$ . **41.**  $5,0 \text{ cm}$ . **43.**  $10 \text{ cm}$ . **45.** (a)  $82,0 \text{ m/s}$ . (b)  $16,8 \text{ m}$ . (c)  $4,88 \text{ Hz}$ . **47.** (a)  $-0,0390 \text{ m}$ . (b)  $y = 0,15 \text{ sen}(0,79x + 13t)$ . (c)  $-0,14 \text{ m}$ . **49.** (a)  $66,1 \text{ m/s}$ . (b)  $26,4 \text{ Hz}$ . **51.** (a)  $144 \text{ m/s}$ . (b)  $3,00 \text{ m}$ ;  $1,50 \text{ m}$ . (c)  $48,0 \text{ Hz}$ ;  $96,0 \text{ Hz}$ . **53.** O primeiro e o segundo harmônicos de  $A$  são iguais ao quarto e ao oitavo de  $B$ , respectivamente. **55.** (a)  $0,25 \text{ cm}$ ,  $120 \text{ cm/s}$ . (b)  $3,0 \text{ cm}$ . (c) Zero. **61.** (a)  $1,3 \text{ m}$ . (b)  $y = (0,002) \text{ sen}(9,4x) \cos(3,800t)$ , com  $x$  e  $y$  em m,  $t$  em s.

### Capítulo 18

**1.** (a)  $\approx 6\%$ . **3.** A pessoa que ouve a emissão de rádio, com uma diferença de tempo de  $0,85 \text{ s}$ . **5.**  $7,9 \times 10^{10} \text{ Pa}$ . **7.** Se há incerteza só na medida do comprimento, ele deve ser conhecido com precisão de  $10^{-4} \text{ cm}$ . Se houver imprecisão só na medida do tempo, ela não pode ser maior do que uma parte em  $10^5$ . **9.**  $43,5 \text{ m}$ . **11.**  $40,7 \text{ m}$ . **13.**  $100 \text{ kHz}$ . **15.** (a)  $2,29$ ,  $0,229$ ,  $22,9 \text{ kHz}$ . (b)  $1,14$ ,  $0,114$ ,  $11,4 \text{ kHz}$ . **17.** (a)  $6,0 \text{ m/s}$ . (b)  $y = 0,30 \text{ sen}(\pi x/12 + 50\pi t)$ , onde  $x$  e  $y$  estão em cm e  $t$  em s. **19.**  $4,12 \text{ rad}$ . **21.** (a)  $343(1 + 2m) \text{ Hz}$ , onde  $m$  é um inteiro que varia de  $0$  a  $28$ . (b)  $686m \text{ Hz}$ , onde  $m$  é um inteiro que varia de  $0$  a  $29$ . **23.** (a) Oito. (b) Oito. **25.**  $64,7 \text{ Hz}$ ,  $129 \text{ Hz}$ . **27.** (a)  $0,080 \text{ W/m}^2$ . (b)  $0,013 \text{ W/m}^2$ . **29.**  $35,7 \text{ nm}$ . **31.** (a)  $1,000$ . (b)  $32$ . **33.** (a)  $39,7 \mu\text{W/m}^2$ . (b)  $166 \text{ nm}$ . (c)  $0,923 \text{ Pa}$ . **35.** (a)  $59,7$ . (b)  $2,81 \times 10^{-4}$ . **37.** (a)  $I \propto r^{-1}$ . (b)  $s_m \propto r^{-1/2}$ . **39.** (a)  $5,000$ . (b)  $71$ . (c)  $71$ . **41.**  $171 \text{ m}$ . **43.**  $3,16 \text{ km}$ . **45.** (a)  $5,200 \text{ Hz}$ . (b) Amplitude  $s_{AB}$ /Amplitude  $s_{BD} = 2$ . **47.**  $350 \text{ m}$ . **51.** (a)  $833 \text{ Hz}$ . (b)  $0,418 \text{ m}$ . **53.** Por um fator  $4$ . **55.** Água até uma altura de  $7/8$ ,  $5/8$ ,  $3/8$ ,  $1/8 \text{ m}$ . **57.** (a)  $L \left(1 - \frac{1}{r}\right)$ . (b)  $13 \text{ cm}$ . (c)  $5/6$ . **59.**  $12,4 \text{ m}$ . **61.** (a)  $71,5 \text{ Hz}$ . (b)  $64,8 \text{ N}$ . **63.**  $45,3 \text{ N}$ . **65.**  $2,25 \text{ ms}$ . **67.**  $0,02$ . **69.**  $3,8 \text{ Hz}$ . **71.** (a)  $380 \text{ mi/h}$ , afastando-se do dono. (b)  $77 \text{ mi/h}$ , afastando-se do dono. **73.**  $15,1 \text{ ft/s}$ . **75.**  $3,1 \text{ m/s}$ . **77.**  $2,6 \times 10^8 \text{ m/s}$ . **79.** (a)  $77,6 \text{ Hz}$ . (b)  $77,0 \text{ Hz}$ . **81.** (a)  $42^\circ$ . (b)  $11 \text{ s}$ . **83.**  $0,189 \text{ MHz}$ . **85.** (a)  $970 \text{ Hz}$ . (b)  $1,030 \text{ Hz}$ . (c)  $60 \text{ Hz}$ . Não. **87.** (a)  $1,02 \text{ kHz}$ . (b)  $1,04 \text{ kHz}$ . **89.**  $1,540 \text{ m/s}$ . **91.** (a)  $8,29 \text{ Hz}$ . (b)  $13,9 \text{ Hz}$ . **93.** (a)  $598 \text{ Hz}$ . (b)  $608 \text{ Hz}$ . (c)  $589 \text{ Hz}$ . **95.**  $0,073$ . **97.** (a)  $1,94 \times 10^4 \text{ km/s}$ . (b) Afastando-se. **99.**  $\pm 3,78 \text{ pm}$ . **101.**  $49,5 \text{ m/s}$ .

### Capítulo 19

**1.**  $2,71 \text{ K}$ . **3.**  $31,5$ . **5.**  $291,1 \text{ K}$ . **7.**  $348 \text{ K}$ . **9.**  $7 \text{ Celsius}$ . **11.** Não;  $310 \text{ K} = 98,6^\circ\text{F}$ . **13.** (a)  $10,000^\circ\text{F}$ . (b)  $37,0^\circ\text{C}$ . (c)  $-57^\circ\text{C}$ . (d)  $-297^\circ\text{F}$ . (e)  $25^\circ\text{C} = 77^\circ\text{F}$ , por exemplo. **15.**  $-91,9^\circ\text{X}$ . **17.** (a) Dimensões de inverso de tempo. **21.**  $1,1 \text{ cm}$ . **23.**  $2,731 \text{ cm}$ . **25.** (a)  $13 \times 10^{-9}^\circ\text{F}$ . (b)  $0,17 \text{ pol}$ . **27.**  $23 \times 10^{-9}^\circ\text{C}$ . **29.**  $0,32 \text{ cm}^3$ . **31.**  $29 \text{ cm}^3$ . **33.**  $0,432 \text{ cm}^3$ . **35.**  $-157^\circ\text{C}$ . **43.**  $9,1 \text{ s}$ ; o relógio está atrasando. **45.** (a)  $+9,0 \times 10^{-9}$ . (b)  $-1,3 \times 10^{-3}$ . **47.**  $7,5 \text{ cm}$ . **49.** Aumenta  $0,1 \text{ mm}$ . **51.**  $2,64 \times 10^8 \text{ Pa}$ . **53.** (b)  $E_1 E_2 (\alpha_1 + \alpha_2) \Delta T / (E_1 + E_2)$ .

### Capítulo 20

**1.**  $333 \text{ J}$ . **3.**  $35,7 \text{ m}^3$ . **5.**  $6,7 \times 10^{12} \text{ J}$ . **7.**  $42,7 \text{ kJ}$ . **9.**  $250 \text{ g}$ . **11.**  $220 \text{ m/s}$ . **13.**  $1,17^\circ\text{C}$ . **15.**  $160 \text{ s}$ . **17.** (a)  $20,300 \text{ cal}$ . (b)  $1,110 \text{ cal}$ . (c)  $873^\circ\text{C}$ . **19.**  $45,4^\circ\text{C}$ . **21.** (a)  $18,700$ . (b)  $10,4 \text{ h}$ . **23.**  $2,8 \text{ dias}$ . **25.**  $82 \text{ cal}$ . **27.**  $13,5^\circ\text{C}$ . **29.** (a)  $5,3^\circ\text{C}$ , não restou nenhum gelo. (b)  $0^\circ\text{C}$ , restaram  $60 \text{ g}$  de gelo. **31.**  $8,72 \text{ g}$ . **33.** (b)  $C \propto T^{-2/3}$ . **35.**  $A: 120 \text{ J}$ ;  $B: 75 \text{ J}$ ;  $C: 30 \text{ J}$ . **37.** (a)  $-200 \text{ J}$ . (b)  $-293 \text{ J}$ . (c)  $-93 \text{ J}$ . **39.**  $-5,0 \text{ J}$ . **41.**  $33,3 \text{ kJ}$ . **43.** (a)  $0,36 \text{ mg/s}$ . (b)  $0,81 \text{ J/s}$ . (c)  $-0,69 \text{ J/s}$ . **45.** (a)  $1,2 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ ;  $0,70 \text{ Btu/ft} \cdot ^\circ\text{F} \cdot \text{h}$ . (b)  $0,030 \text{ ft}^2 \cdot ^\circ\text{F} \cdot \text{h/Btu}$ . **47.**  $1,660 \text{ J/s}$ . **51.** Arranjo (b). **53.** (a)  $2,0 \text{ MW}$ . (b)  $220 \text{ W}$ . **55.**  $2,0 \times 10^7 \text{ J}$ . **57.**  $0,40 \text{ cm/h}$ . **59.**  $\text{Cu-Al}$ ,  $84,3^\circ\text{C}$ ;  $\text{latão}$ ,  $57,6^\circ\text{C}$ .

### Capítulo 21

**1.** (a)  $0,0127$ . (b)  $7,65 \times 10^{23}$ . **3.**  $6,560$ . **5.** Número de moléculas na tinta  $\approx 3 \times 10^{16}$ . Número de pessoas  $= 5 \times 10^{20}$ . A afirmativa está errada, por um fator de aproximadamente  $20,000$ . **7.** (a)  $5,47 \times 10^{-8} \text{ mol}$ . (b)  $3,29 \times 10^{16}$ . **9.** (a)  $106$ . (b)  $0,892 \text{ m}^3$ . **11.**  $27,0 \text{ lb/pol}^2$ . **13.** (a)  $2,5 \times 10^{25}$ . (b)  $1,2 \text{ kg}$ . **15.**  $5,700 \text{ N} \cdot \text{m}$ . **17.**  $1/5$ . **19.**  $100 \text{ cm}^3$ . **21.**  $198^\circ\text{F}$ . **23.**  $2,0 \times 10^8 \text{ Pa}$ . **25.**  $180 \text{ m/s}$ . **27.**  $9,53 \times 10^6 \text{ m/s}$ . **29.**  $307^\circ\text{C}$ . **31.**  $1,9 \times 10^4 \text{ dinas/cm}^2$ . **33.** (a)  $0,0353 \text{ eV}$ ;  $0,0483 \text{ eV}$ . (b)  $3,400 \text{ J}$ ;  $4,650 \text{ J}$ . **35.** (a)  $3,26 \times 10^{-6}$ . **37.** (a)  $6,75 \times 10^{-20} \text{ J}$ . (b)  $10,7$ . **39.**  $0,32 \text{ nm}$ . **41.**  $15 \text{ cm}$ . **43.** (a)  $3,26 \times 10^{10}$ . (b)  $173 \text{ m}$ . **45.** (a)  $22,5 \text{ L}$ . (b)  $2,25$ . (c)  $8,4 \times 10^{-5} \text{ cm}$ . (d) O mesmo que (c). **49.** (a)  $3,2 \text{ cm/s}$ . (b)  $3,4 \text{ cm/s}$ . (c)  $4,0 \text{ cm/s}$ . **51.** (a)  $\bar{v}$ ,  $v_{\text{rms}}$ ,  $v_p$ . (b)  $v_p$ ,  $v$ ,  $v_{\text{rms}}$ . **53.** (a)  $1,0 \times 10^4 \text{ K}$ ;  $1,6 \times 10^5 \text{ K}$ . (b)  $440 \text{ K}$ ;  $7,000 \text{ K}$ . **55.**  $4,7$ . **57.**  $2N/3 v_0$ . (b)  $N/3$ . (c)  $1,22 v_0$ . (d)  $1,31 v_0$ . **59.**  $RT \ln(V_f/V_i)$ . **61.** (a)  $15,9 \text{ J}$ . (b)  $34,4 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ . (c)  $26,1 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ . **63.**  $(n_1 C_1 + n_2 C_2 + n_3 C_3)/(n_1 + n_2 + n_3)$ . **65.** Volume constante. **67.** (a)  $0,375 \text{ mol}$ . (b)  $1,090 \text{ J}$ . (c)  $0,714$ . **69.** Diatômico. **71.** (a)  $2,5 \text{ atm}$ ,  $340 \text{ K}$ . (b)  $0,40 \text{ L}$ . **73.**  $1,500 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ . **75.**  $1,40$ . **79.** (a)  $p_f/3$ . (b) Poliatômico (ideal). (c)  $K_f/K_i = 1,44$ . **81.**  $Q$ ,  $W$  e  $\Delta E_{\text{int}}$  têm o maior valor possível no caso (a) e o menor no caso (c). **83.** (a) Em joules, na ordem  $Q$ ,  $\Delta E_{\text{int}}$ ,  $W$ :  $1 \rightarrow 2$ :  $3,740$ ,  $3,740$ ,  $0$ ;  $2 \rightarrow 3$ :  $0$ ,  $-1,810$ ,  $1,810$ ;  $3 \rightarrow 1$ :  $-3,220$ ,  $-1,930$ ,  $-1,290$ ; Ciclo:  $520$ ,  $0$ ,  $520$ . (b)  $V_2 = 0,0246 \text{ m}^3$ ;  $p_2 = 2,00 \text{ atm}$ ;  $V_3 = 0,0373 \text{ m}^3$ ;  $p_3 = 1,00 \text{ atm}$ .

### Capítulo 22

**1.** (a)  $31\%$ . (b)  $16 \text{ kcal}$ . **3.**  $25\%$ . **5.** (a)  $7,200 \text{ J}$ . (b)  $960 \text{ J}$ . (c)  $13\%$ . **7.** (a)  $49 \text{ kcal}$ . (b)  $31 \text{ kJ}$ . **9.** (a)  $0,071 \text{ J}$ . (b)  $0,50 \text{ J}$ . (c)  $2,0 \text{ J}$ . (d)  $5,0 \text{ J}$ . **11.**  $99,999947\%$ . **13.**  $75$ . **17.** (a)  $94 \text{ J}$ . (b)  $230 \text{ J}$ . **19.**  $13 \text{ J}$ . **21.** (a)  $1,11 \text{ kcal/s}$ . (b)  $0,995 \text{ kcal/s}$ . **23.**  $e = \frac{1}{K+1}$ . **27.**  $[1 - (T_2/T_1)]/[1 - (T_4/T_3)]$ . **29.** (a)  $78\%$ . (b)  $81 \text{ kg/s}$ . **31.**  $0,139$ . **33.** (a)  $+0,602 \text{ cal/K}$ . (b)  $-0,602 \text{ cal/K}$ . **35.**  $-0,30 \text{ cal/g} \cdot \text{K}$ . **37.**  $8,79 \times 10^{-3} \text{ cal/K}$ . **39.**  $4,450 \text{ cal}$ . **41.** (a)  $1,95 \text{ J/K}$ . (b)  $0,650 \text{ J/K}$ . (c)  $0,217 \text{ J/K}$ . (d)  $0,072 \text{ J/K}$ . **43.** (a)  $57^\circ\text{C}$ . (b)  $-5,27 \text{ cal/K}$ . (c)  $+5,95 \text{ cal/K}$ . (d)  $+0,68/\text{K}$ . **45.**  $+0,15 \text{ cal/K}$ . **47.** (a)  $320 \text{ K}$ . (b) Zero. (c)  $+0,41 \text{ cal/K}$ . **49.** (a)  $p_f/3$ ;  $p_f/3^{1/4}$ ;  $T_f/3^{3/4}$ . (b) Pela ordem  $W$ ,  $Q$ ,  $\Delta E_{\text{int}}$ ,  $\Delta S$ :  $1 \rightarrow 2$ :  $1,10RT_1$ ,  $1,10RT_1$ ,  $0$ ,  $1,10R$ ;  $2 \rightarrow 3$ :  $0$ ,  $-0,889RT_1$ ,  $-0,889RT_1$ ,  $-1,10R$ ;  $3 \rightarrow 1$ :  $-0,889RT_1$ ,  $0$ ,  $0,889RT_1$ ,  $0$ . **51.** (a)  $-225 \text{ cal/K}$ . (b)  $+225 \text{ cal/K}$ . **53.** (a)  $3p_0 V$ . (b)  $6RT_0$ ;  $3/2R \ln 2$ . (c) Ambas são nulas.