25. Dada a função do 1º grau $f(x, y) = ax + by + c$, mostre que a diferencial da função em qualquer ponto (x, y) é exatamente igual a Δf, quaisquer que sejam Δx e Δy (grandes ou pequenos).

26. Use o resultado do exercício anterior para calcular Δf nos seguintes casos:
    a) $f(x, y) = 4x + 3y + 5$, para $\Delta x = 5$ e $\Delta y = 10$;
    b) $f(x, y) = 3x - 2y + 1$, para $\Delta x = 100$ e $\Delta y = 250$;
    c) $f(x, y) = 10x + 8y$, para $\Delta x = 600$ e $\Delta y = 1.000$;
    d) $f(x, y) = 2x - y$, para $\Delta x = 18$ e $\Delta y = 96$.

27. Calcule a diferencial de f, num ponto genérico (x_0, y_0), nos seguintes casos:
    a) $f(x, y) = 2x^3 - y$
    b) $f(x, y) = \ln(2x^2 + 3y^2)$
    c) $f(x, y) = \cos(2x + y^3)$
    d) $f(x, y) = x^2 \operatorname{sen} y$
    e) $f(x, y) = e^{x^2 + y^2}$

28. Calcule a diferencial de f, num ponto genérico (x, y), nos seguintes casos:
    a) $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x + y}$
    b) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$

29. Considere a função custo de produção de dois bens de quantidades x e y:

$$C(x, y) = 15 + 2x^2 + 5y^2 + xy$$

    a) Calcule a diferencial do custo no ponto $x = 10$ e $y = 15$, para $\Delta x = \Delta y = 0{,}1$.
    b) Calcule a diferencial do custo num ponto genérico (x, y), para $\Delta x = 0{,}1$ e $\Delta y = 0{,}05$.
    c) Calcule a diferencial do custo num ponto genérico (x, y), para $\Delta x = \Delta y = h$.

30. Considere a função receita de vendas de dois produtos de quantidades x e y:

$$R(x, y) = -x^2 - y^2 + 100x + 200y$$

    a) Calcule a diferencial da receita no ponto $x = 10$ e $y = 30$, para $\Delta x = \Delta y = 0{,}01$.
    b) Calcule a diferencial da receita num ponto genérico (x, y), para $\Delta x = 0{,}1$ e $\Delta y = 0{,}05$.
    c) Calcule a diferencial da receita num ponto genérico (x, y), para $\Delta x = \Delta y = h$.

31. Dada a função utilidade de um consumidor $U(x, y) = x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{3}{4}}$, em que x e y são as quantidades consumidas de dois bens, calcule a diferencial da função utilidade quando x passa de 100 para 99, e y passa de 300 para 301.

32. Encontre o aumento real e aproximado do volume de um tanque cilíndrico quando seu raio da base aumenta de 3 m para 3,05 m e sua altura aumenta de 10 m para 10,1 m.
    (O volume do cilindro é dado por $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, em que r é o raio da base e h a altura.)

33. Considere a seguinte relação macroeconômica:

$$Y = \frac{C_0 + I + G - bT}{1 - b},$$

em que

Y é a renda nacional,
C_0 e b são constantes,
I representa o gasto com investimentos,
G representa o gasto governamental,
T representa o total de impostos.

Usando a diferencial de função, verifique o que ocorre com a renda nacional, se o gasto governamental e os impostos aumentarem em 2 unidades monetárias e o gasto com investimentos permanecer constante.

10.5 Função Composta — Regra da Cadeia

Consideremos uma função de produção $P(x, y) = 6x^{0,5}y^{0,5}$ em que x e y são as quantidades de dois insumos, capital e trabalho, e P, a quantidade produzida de um produto.

Suponhamos que o capital x cresça com o tempo t, de acordo com a relação $x = 0,16t$, e o trabalho cresça de acordo com a relação $y = 0,09t$.

Se quisermos expressar a produção em função do tempo, temos que substituir $x = 0,16t$ e $y = 0,09t$ na relação $P(x, y) = 6x^{0,5}y^{0,5}$. Procedendo dessa forma, teremos:

$$P(t) = 6(0,16t)^{0,5}(0,09t)^{0,5} = 0,72t.$$

À função de t, dada por $P(t) = 0,72t$, chamamos de função composta de P com x e y.

A derivada da função composta dada por $P(t) = 0,72t$ em relação a t é imediata (função de uma variável):

$$P'(t) = \frac{dP}{dt} = 0,72.$$

Isto é, a taxa de crescimento do produto em relação ao tempo é 0,72.

De modo geral, a derivada da função composta pode ser obtida facilmente por mera substituição e derivação da função de uma variável, como vimos no exemplo. Entretanto, existe uma fórmula alternativa de cálculo da derivada da função composta, conhecida como regra da cadeia, que veremos a seguir.

Teorema 10.2 — Regra da cadeia

Seja f uma função de duas variáveis x e y, diferenciável num ponto (x_0, y_0) do domínio, e sejam as funções dadas por $x(t)$ e $y(t)$ diferenciáveis em t_0, de modo que $x(t_0) = x_0$ e $y(t_0) = y_0$. Então a função F composta de f com x e y é tal que:

$$\frac{dF}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \frac{dy}{dt}(t_0),$$

ou abreviadamente

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Exemplo 10.9. Sejam $f(x, y) = 2x + 5y - 3$, $x(t) = 2t$ e $y(t) = 3t - 1$. A função composta de f com x e y é dada por:

$$F(t) = 2 \cdot (2t) + 5 \cdot (3t - 1) - 3 = 19t - 8.$$

a) Cálculo direto de $\frac{dF}{dt}$:

$$\frac{dF}{dt} = 19.$$

b) Cálculo de $\frac{dF}{dt}$ pela regra da cadeia

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 5,$$

$$\frac{dx}{dt} = 2, \qquad \frac{dy}{dt} = 3,$$

logo

$$\frac{dF}{dt} = 2 \times 2 + 5 \times 3 = 19.$$

Exemplo 10.10. Sejam $f(x, y) = x^2 + 3y - 5$, $x(t) = e^t$ e $y(t) = t^3$. A função composta de f com x e y é dada por:

$$F(t) = e^{2t} + 3t^3 - 5.$$

a) Cálculo direto de $\frac{dF}{dt}$

$$\frac{dF}{dt} = 2e^{2t} + 9t^2.$$

b) Cálculo de $\frac{dF}{dt}$ pela regra da cadeia

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 2e^t, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3,$$

$$\frac{dx}{dt} = e^t, \qquad \frac{dy}{dt} = 3t^2,$$

portanto

$$\frac{dF}{dt} = (2e^t)e^t + 3(3t^2) = 2e^{2t} + 9t^2.$$

Exercícios

34. Obtenha $\frac{dF}{dt}$ diretamente e pela regra da cadeia, sendo F a função composta de f, com x e y nos seguintes casos:
   a) $f(x, y) = 3x + 6y - 9$, $x(t) = 3t$ e $y(t) = t^2 - 1$
   b) $f(x, y) = 3x + y^2$, $x(t) = \text{sen } t$ e $y(t) = \cos t$
   c) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $x(t) = 3t$ e $y(t) = t - 1$
   d) $f(x, y) = e^{x+y}$, $x(t) = t^2$ e $y(t) = 2t^3 - 1$
   e) $f(x, y) = x^2y^3 + x^3y^2$, $x(t) = \frac{1}{t}$ e $y(t) = \frac{1}{t^2}$

35. Seja $P = 10 \cdot x^{0,2} \cdot y^{0,8}$ uma função de produção, em que x indica o capital e y, o trabalho. Suponha que o capital cresça com o tempo t de acordo com a relação $x = 0{,}32t$, e o trabalho cresça com o tempo de acordo com $y = 0{,}2t^5$. Obtenha:
   a) A produção em função do tempo.
   b) A taxa de crescimento da produção em relação ao tempo.

36. Uma pessoa tem a seguinte função utilidade:

$$U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 \cdot x_2},$$

em que x_1 é o número de horas de lazer por semana e x_2, a renda semanal. Suponha que x_1 e x_2 dependam do número t de horas trabalhadas por semana, de acordo com as relações

$$x_1 = 168 - t \quad \text{e} \quad x_2 = 0{,}5t.$$

   a) Obtenha a utilidade em função de t, $U(t)$.
   b) Calcule t de modo que $U(t)$ seja máxima.
   c) Nas condições do item (b), qual a renda da pessoa e qual seu número de horas de lazer?

10.6 Funções Definidas Implicitamente

Consideremos a equação $x + y - 3 = 0$. Resolvendo-a, em relação a y, obtemos $y = 3 - x$; esta última expressão representa uma função de uma variável $h(x) = 3 - x$, derivável para todo x real. Dizemos então que a equação $x + y - 3 = 0$ define implicitamente uma função $y = h(x)$, derivável em relação a x.

Se considerarmos também a equação $x^2 + y^2 = 0$, veremos que ela é satisfeita apenas pelo par (0, 0) e, portanto, a equação $x^2 + y^2 = 0$ não define implicitamente uma função $y = h(x)$ derivável em relação a x (representa uma função em que o domínio é $\{0\}$ e o conjunto imagem é $\{0\}$).

Consideremos agora a equação $x^3y + xy^3 + x^2y^2 + xy - 4 = 0$. Não é fácil isolar y dessa equação e saber se tal equação define implicitamente uma função $y = h(x)$.

De modo geral, como saber se determinada equação a duas variáveis x e y define implicitamente uma função?

A resposta a essa pergunta comparece no chamado teorema da função implícita, cujo enunciado veremos a seguir.

Teorema 10.3 (Teorema da função implícita)

Sejam $f(x, y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ funções contínuas num domínio D e $(x_0, y_0) \in D$. Se $f(x_0, y_0) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, então existe um intervalo I, com centro em x_0, em que a equação $f(x_0, y_0) = 0$ define implicitamente uma única função derivável $y = h(x)$, tal que $y_0 = h(x_0)$ e $f(x, h(x)) = 0$, $\forall x \in I$.

Assim, por exemplo, a equação

$$f(x, y) = x^3y + xy^3 + x^2y^2 + xy - 4 = 0$$

define implicitamente uma função $y = h(x)$, num intervalo I centrado em $x_0 = 1$, pois:

a) f e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 3xy^2 + 2x^2y + x$ são contínuas em R^2;

b) $f(1, 1) = 0$;

c) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 7 \neq 0$.

Consideremos a função derivável $y = h(x)$, definida implicitamente pela equação $f(x, y) = 0$. Como $F(x) = f(x, h(x)) = 0$, segue-se, pela regra da cadeia, que

$$F'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

de onde obtemos a seguinte fórmula:

Derivada da função definida implicitamente

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}.$$

Exemplo 10.11. Consideremos a equação $f(x, y) = 2x^2 + y - 1 = 0$. Tal equação define implicitamente a função $y = 1 - 2x^2$.

Calculemos a derivada $\dfrac{dy}{dx}$ diretamente e pela fórmula da derivada da função definida implicitamente. Temos:

a) Cálculo direto de $\dfrac{dy}{dx}$

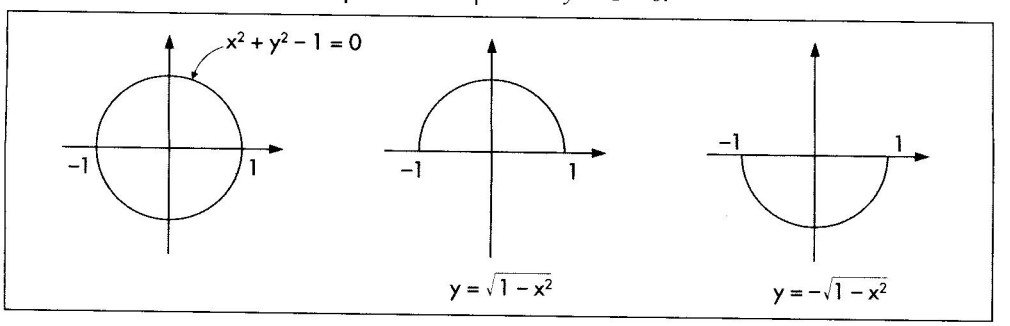
$$\frac{dy}{dx} = -4x.$$

b) Cálculo de $\dfrac{dy}{dx}$ pela fórmula da derivada da função definida implicitamente

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{4x}{1} = -4x.$$

Exemplo 10.12. Consideremos a equação $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, que representa uma circunferência de centro na origem e raio igual a 1. Tal equação define implicitamente as funções $y = \sqrt{1 - x^2}$ e $y = -\sqrt{1 - x^2}$ deriváveis no intervalo $]-1, 1[$ (Figura 10.3).

Figura 10.3: Função definida implicitamente por $x^2 + y^2 - 1 = 0$.



Calculemos de dois modos a derivada $\dfrac{dy}{dx}$ da função $y = \sqrt{1 - x^2}$.

a) Cálculo direto de $\dfrac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

b) Cálculo de $\dfrac{dy}{dx}$ pela fórmula da derivada da função definida implicitamente

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

Entretanto, como $y = \sqrt{1 - x^2}$, vem

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Procedendo de modo análogo, pode-se mostrar que para a função $y = -\sqrt{1 - x^2}$, a derivada $\frac{dy}{dx}$ é dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Exercícios

37. Determine a derivada $\frac{dy}{dx}$ das funções definidas implicitamente pelas equações:
    a) $2x + 3y - 7 = 0$, num ponto genérico (x_0, y_0);
    b) $3x^2 + 2y - 5 = 0$, num ponto genérico (x_0, y_0);
    c) $x^2 + y^2 - 9 = 0$, no ponto $(1, 2\sqrt{2})$;
    d) $2x^2 + 3y^2 = 1$, no ponto $\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;
    e) $x^{0,5}y^{0,5} - 10 = 0$, no ponto $(4, 25)$;
    f) $x^2 + xy - 9 = 0$, no ponto $(1, 8)$;
    g) $y^3 - xy + 1 = 0$, no ponto $(2, 1)$;
    h) $x^2 - e^{xy} - 3 = 0$, no ponto $(2, 0)$.

38. Considere a função de produção $P = x^{0,5}y^{0,5}$.
    a) Esboce a curva de nível correspondente a $P = 8$. (Tal curva recebe o nome de curva de isoproduto para $P = 8$.)
    b) Calcule a taxa marginal de substituição técnica $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ na curva do item anterior, no ponto $x = 2$ e $y = 32$. Interprete o resultado.

39. Considere a função de produção $P = x^{0,2}y^{0,8}$.
    a) Esboce a curva de isoproduto correspondente a $P = 32$.
    b) Na curva do item anterior, obtenha a taxa marginal de substituição técnica $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ num ponto genérico (x, y).

40. Encontre a equação da reta tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$, no ponto (x_0, y_0), com $y_0 \neq 0$.

    Resolução

    - A equação da reta tangente é $y - y_0 = m(x - x_0)$, em que $m = \frac{dy}{dx}(x_0, y_0)$.
    - Se considerarmos a função $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, teremos $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$.
    - Portanto, a equação da reta tangente procurada é $y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x, -x_0)$.

- Por exemplo, no ponto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, a equação da tangente é $y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, ou seja, $x + y - \sqrt{2} = 0$.

41. Encontre a equação da reta tangente às curvas abaixo, nos pontos indicados:

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (elipse com $a > b$), no ponto (x_0, y_0), com $y_0 \neq 0$.

b) $x^2 + y^2 - 4x = 0$ (circunferência), no ponto $(2, 2)$.

c) $y^2 = 2ax$ (parábola), no ponto $\left(\frac{a}{2}, a\right)$ com $a > 0$.

10.7 Funções Homogêneas — Teorema de Euler

Seja f uma função de duas variáveis x e y. Dizemos que f é homogênea de grau m se, para toda constante positiva λ, tivermos:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y).$$

Exemplo 10.13. A função $f(x, y) = 3x^2 + 6xy$ é homogênea de grau 2, pois

$$f(\lambda x, \lambda y) = 3(\lambda x)^2 + 6(\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2(3x^2 + 6xy),$$

isto é

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 f(x, y).$$

Exemplo 10.14. A função Cobb-Douglas de produção $P(x, y) = k \cdot x^{\alpha} \cdot y^{1-\alpha}$, com $0 < \alpha < 1$ é homogênea de grau 1, pois

$$P(\lambda x, \lambda y) = k \cdot (\lambda x)^{\alpha} \cdot (\lambda y)^{1-\alpha} = \lambda \cdot (kx^{\alpha}y^{1-\alpha}),$$

isto é

$$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^1(P(x, y)).$$

Exemplo 10.15. A função de demanda de um produto, $Q(x, y) = \frac{10y}{x}$, em que y é a renda do consumidor e x, o preço unitário do produto, é homogênea de grau zero, pois

$$Q(\lambda x, \lambda y) = \frac{10(\lambda y)}{\lambda x} = \lambda^0\left(\frac{10y}{x}\right) = \lambda^0 Q(x, y).$$

O conceito de homogeneidade de uma função diz respeito ao que ocorre com $f(x, y)$ quando x e y passam a valer λx e λy, respectivamente, isto é, sofrem uma variação porcentual igual a $(\lambda - 1)100\%$. Assim, um valor de $\lambda = 1{,}5$ corresponde a uma variação porcentual de 50% $((1{,}5 - 1) \cdot 100\%)$.

Se f for homogênea de grau zero, significa que qualquer variação porcentual sofrida por x e y não altera o valor de $f(x, y)$ (é o caso do exemplo 10.15).

Se f for homogênea de grau 1, significa que, toda vez que x e y forem multiplicados por um valor λ, a nova imagem de f será igual a λ vezes a imagem inicial (é o caso da função do exemplo 10.14).

Se f for homogênea de grau 2, significa que, toda vez que x e y forem multiplicados por um valor λ, a nova imagem de f será igual a λ^2 vezes a imagem inicial (é o caso da função do exemplo 10.13).

Cumpre observar finalmente que nem toda função é homogênea; por exemplo, a função $f(x, y) = 2x + y + 3$ não é homogênea.

As funções homogêneas gozam de uma importante propriedade, conhecida como teorema de Euler (Leonard Euler, matemático suíço, 1707–1783), que veremos a seguir.

Teorema 10.4 — Teorema de Euler

Seja f uma função de duas variáveis x e y, homogênea de grau m. Então

$$m \cdot f(x, y) = x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Demonstração

Sendo f homogênea de grau m, teremos

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m \cdot f(x, y).$$

Derivando ambos os membros dessa relação, em relação a λ, considerando as funções $x(\lambda) = \lambda x$ e $y(\lambda) = \lambda y$ e a regra da cadeia, teremos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x, \lambda y), \frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial y}(\lambda x, \lambda y) \cdot \frac{dy}{d\lambda} = m\lambda^{m-1} f(x, y).$$

Como $\frac{dx}{d\lambda} = x$ e $\frac{dy}{d\lambda} = y$ segue que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x, \lambda y) \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(\lambda x, \lambda y) \cdot y = m\lambda^{m-1} f(x, y).$$

Tendo em vista que essa última igualdade se verifica para todo $\lambda > 0$, em particular, para $\lambda = 1$, teremos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot y = mf(x, y),$$

conforme queríamos demonstrar.

O teorema de Euler tem um importante papel em Economia, no que diz respeito à função de produção e à remuneração dos insumos.

Com efeito, consideremos a função Cobb-Douglas de produção $P = k \cdot x^{\alpha} \cdot y^{1-\alpha}$, homogênea de grau 1, em que x e y indicam as quantidades dos insumos trabalho e capital respectivamente.

Pelo teorema de Euler

$$P = x \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial P}{\partial y},$$

em que as derivadas parciais $\frac{\partial P}{\partial x}$ e $\frac{\partial P}{\partial y}$ indicam as produtividades marginais do trabalho e do capital, respectivamente.

Assim, se cada unidade de insumo for remunerada de acordo com sua produtividade marginal, teremos

$$t = \frac{\partial P}{\partial x} \cdot s$$

e

$$c = \frac{\partial P}{\partial y} \cdot s,$$

em que t é a remuneração de cada unidade de trabalho, c é a remuneração de cada unidade de capital, s é o preço unitário do produto.

Substituindo esses valores na expressão de P, resulta:

$$P = \frac{t}{s} \cdot x + \frac{c}{s} \cdot y,$$

e, portanto,

$$Ps = tx + cy.$$

Essa última relação nos mostra que a receita total (Ps) se decompõe em duas parcelas:

tx, que é a remuneração total do trabalho,

e

cy, que é a remuneração do capital.

Enfatizamos mais uma vez que tal conclusão só é válida se forem verificadas as condições:

a) função de produção homogênea de grau 1;

b) remuneração dos insumos de acordo com suas produtividades marginais.

Assim sendo, constitui um problema de Economia a verificação dessas condições.

Exercícios

42. Nas funções a seguir, indique as homogêneas e dê seu grau de homogeneidade:

a) $f(x, y) = 2x + 5y$
b) $f(x, y) = 3x^2 + 10y^2$
c) $f(x, y) = 4y^2 - 6xy$
d) $f(x, y) = 4x^3 - y^2$
e) $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$
f) $f(x, y) = e^{x+y}$
g) $f(x, y) = \text{sen}(x^2 + y^2)$
h) $f(x, y) = 2x^{0,3}y^{0,7}$
i) $f(x, y) = x^{0,2}y^{0,6}$
j) $f(x, y) = 6x^{0,5}y^{0,7}$

43. Considere a seguinte função de produção

$P = 6x^{0,5}y^{0,5}$ (em que x é a quantidade de trabalho e y a de capital).

a) Mostre que a função é homogênea de grau 1.
b) Calcule a produtividade marginal do trabalho $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ e a do capital $\dfrac{\partial P}{\partial y}$.
c) Se o nível de produção é de 1.200 unidades, e o preço por unidade do produto for \$ 2,00, qual a remuneração do trabalho e do capital se ambas as remunerações por unidade forem iguais às produtividades marginais?

44. Resolva o exercício anterior considerando a função de produção $P = Ax^{\alpha}y^{1-\alpha}$, em que $0 < \alpha < 1$.

45. Uma ilha produz apenas um produto: suco de abacaxi. A função de produção é $P = 20x^{0,5}y^{0,5}$, em que P é a produção diária (em litros de suco), x é a quantidade de trabalho (em homens-hora), e y é o número de máquinas utilizadas. Se cada unidade de trabalho e de capital forem remunerados de acordo com suas produtividades marginais e se o preço de venda do produto é \$ 0,80 por litro:

a) Qual a produção diária se forem utilizados 1.600 homens-hora e 100 máquinas?
b) Qual o salário por homem-hora?
c) Qual a remuneração diária por máquina recebida pelos proprietários das máquinas?

46. Em relação ao exercício anterior, o que ocorre com o salário por homem-hora se houver um aumento em 21% na quantidade de trabalho, mantido o número de máquinas?

47. Em relação ao exercício 45, o que ocorre com o salário por homem-hora se houver um aumento em 21% na quantidade de trabalho e um aumento em 21% na quantidade de máquinas?

48. Ainda em relação ao exercício 45, o que ocorre com a produção diária e com o salário, se a quantidade de trabalho e a de máquinas aumentarem em 21%, e em virtude de um aperfeiçoamento tecnológico a função de produção passar a ser $P = 24{,}2x^{0,5}y^{0,5}$?

49. Mostre que a função $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy \log \dfrac{y}{x}$ é homogênea de grau 2.

50. Qual o grau de homogeneidade das funções:

a) $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x^2 + xy + y^2}$
b) $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

10.8 Derivadas Parciais de Segunda Ordem

Seja f uma função de duas variáveis x e y, f_x e f_y suas derivadas parciais. Se calcularmos as derivadas parciais de f_x e f_y, obteremos quatro funções chamadas derivadas parciais de segunda ordem. São elas:

(a) derivada de f_x em relação a x, indicada por

$$f_{xx} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2};$$

(b) derivada de f_x em relação a y, indicada por

$$f_{xy} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x};$$

(c) derivada de f_y em relação a x, indicada por

$$f_{yx} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y};$$

(d) derivada de f_y em relação a y, indicada por

$$f_{yy} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Exemplo 10.16. Se $f(x, y) = 4x^2 + 3y^2 - 6xy$, então

$$\begin{aligned} f_x &= 8x - 6y, & f_y &= 6y - 6x, \\ f_{xx} &= 8, & f_{yx} &= -6, \\ f_{xy} &= -6, & f_{yy} &= 6. \end{aligned}$$

Exercícios

51. Calcule as derivadas parciais de segunda ordem para as funções:
    a) $f(x, y) = 2x + 6y$
    b) $f(x, y) = xy$
    c) $f(x, y) = 2x^2 + y^2$
    d) $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$
    e) $f(x, y) = 6x^{0,5}y^{0,5}$
    f) $f(x, y) = \operatorname{sen} x + 2 \cos y$
    g) $f(x, y) = e^{x+y}$

52. Calcule as derivadas mistas f_{xy} e f_{yx} da função

$$f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$$

53. Mostre que a função $f(x, y) = R \operatorname{sen}(a\lambda y + \varphi) \operatorname{sen} \lambda x$ satisfaz a condição

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

10.9 Integrais Duplas

Introdução

Consideremos uma função de duas variáveis $f(x, y)$ e suponhamos que a derivada parcial, em relação a x, seja $f_x(x, y) = 6xy$.

Mantendo y como constante e integrando essa derivada parcial em relação a x, obtemos a função $f(x, y)$:

$$\int f_x(x, y)dx = \int 6xydx = 3x^2y + c(y).$$

Assim

$$f(x, y) = 3x^2y + c(y).$$

A integral calculada é chamada integral parcial em relação a x. A constante de integração $c(y)$ é função de y, pois y é mantido constante na integração parcial em relação a x.

Caso quiséssemos calcular a integral definida de $f_x(x, y)$, com limites de integração entre 0 e $2y$, teríamos:

$$\int_0^{2y} f_x(x, y)dx = \int_0^{2y} 6xydx = [3x^2y]_0^{2y} = 3(2y)^2y - 0 = 12y^3.$$

Analogamente, se em uma função $f(x, y)$ conhecêssemos a derivada parcial em relação a y, $f_y(x, y) = 2x + y$, o cálculo de $f(x, y)$ seria feito pela integral parcial em relação a y, ou seja:

$$f(x, y) = \int f_y(x, y)dy = \int (2x + y)dy = 2xy + \frac{y^2}{2} + c(x),$$

em que $c(x)$ é uma constante que depende de x. Caso estivéssemos calculando a integral parcial definida, em relação a y, entre os limites 1 e x, teríamos:

$$\int_1^x (2x + y)dy = \left[2xy + \frac{y^2}{2}\right]_1^x = 2x(x) + \frac{x^2}{2} - \left(2x \cdot 1 + \frac{1^2}{2}\right) = \frac{5}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{2}.$$

Exercício

54. Calcule as integrais parciais

a) $\int (2x^3y + 4x)dx$

b) $\int (2x^3y + 4x)dy$

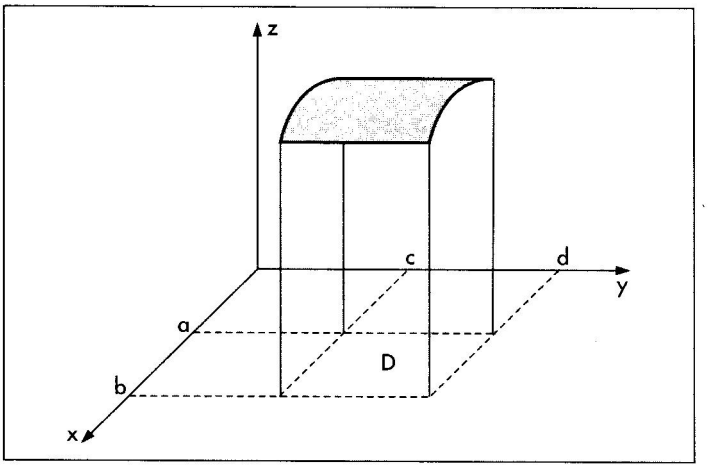
c) $\int_0^{3y} 4xydx$

d) $\int_1^{2x} 4xydy$

Integral Dupla

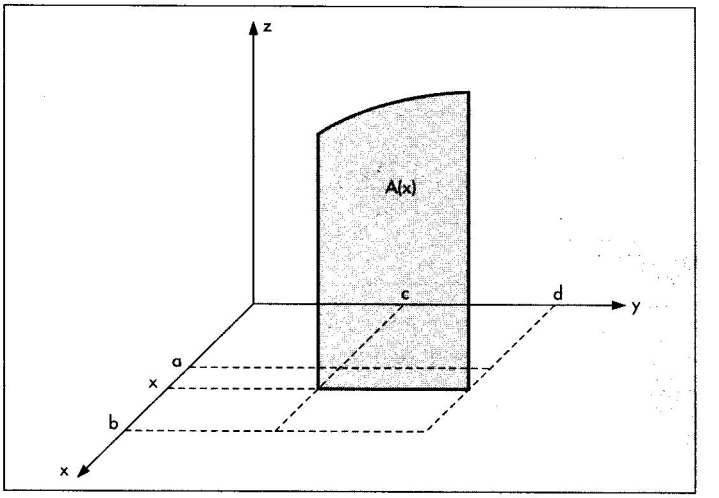
Consideremos uma função $f(x, y)$ não negativa, definida no domínio D constituído do retângulo dado pelas inequações $a \leq x \leq b$ e $c \leq y \leq d$ (Figura 10.4).

Figura 10.4: Função definida no domínio D.



Ao calcularmos a integral parcial (em relação a y) $A(x)$, entre c e d, estaremos mantendo x constante. Assim, $A(x)$ representará a área da secção do gráfico da função, perpendicular ao eixo x, num ponto genérico entre a e b. Isto é, $A(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy$ (Figura 10.5).

Figura 10.5: Integral parcial $A(x)$.



O produto $A(x)dx$ representa o volume do sólido de área $A(x)$ e espessura dx. Assim, a integral de $A(x)$ em relação a x representará o volume do sólido sob o gráfico de $f(x, y)$, acima do domínio D.

A esse volume damos o nome de integral dupla de $f(x, y)$ no domínio D. Dessa forma, indicando por V o volume do referido sólido, teremos

$$V = \int_a^b A(x)dx.$$

Simbolizando a integral dupla por $\iint_D f(x, y)dxdy$, podemos escrever:

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dy \right] dx.$$

Poderíamos também ter calculado a área de uma secção perpendicular ao eixo y, $B(y)$, da seguinte forma

$$B(y) = \int_a^b f(x, y)dx,$$

e em seguida calculado o volume do sólido sob o gráfico da função e acima do domínio D por

$$V = \int_c^d B(y)dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)dx \right] dy.$$

Exemplo 10.17. Consideremos a função $f(x, y) = x + y$, definida no domínio D dado pelas inequações $0 \leq x \leq 5$ e $0 \leq y \leq 3$ e calculemos a integral dupla $\iint_D f(x, y)dxdy$, ou seja, o volume V do sólido sob o gráfico da função e acima de D.

a) Primeiro modo

$$A(x) = \int_0^3 (x + y)dy = \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^3 = 3x + \frac{9}{2},$$

$$V = \int_0^5 \left(3x + \frac{9}{2} \right) dx = \left[\frac{3x^2}{2} + \frac{9}{2}x \right]_0^5 = \frac{75}{2} + \frac{45}{2} = 60.$$

b) Segundo modo

$$B(y) = \int_0^5 (x + y)dx = \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_0^5 = \frac{25}{2} + 5y,$$

$$V = \int_0^3 \left(\frac{25}{2} + 5y \right) dy = \left[\frac{25y}{2} + \frac{5y^2}{2} \right]_0^3 = \frac{75}{2} + \frac{45}{2} = 60.$$

Exercícios

55. Calcule o volume do sólido sob o gráfico da função $f(x, y) = x + y$ e acima do domínio dado pelas inequações $0 \leq x \leq 4$ e $0 \leq y \leq 4$.

56. Calcule o volume do sólido sob o gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ e acima do domínio dado pelas inequações $2 \leq x \leq 4$ e $1 \leq y \leq 2$.

57. Calcule a integral dupla $\iint_D 7dxdy$, em que D é dado pelas inequações $0 \leq x \leq 5$ e $1 \leq y \leq 3$.

Uma outra situação que ocorre no cálculo da integral dupla é aquela em que o domínio D da função é dado por

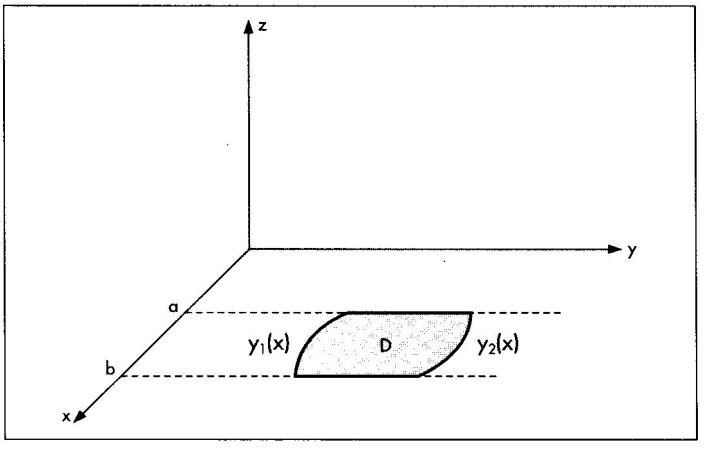
$$a \leq x \leq b$$

e

$$y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$$

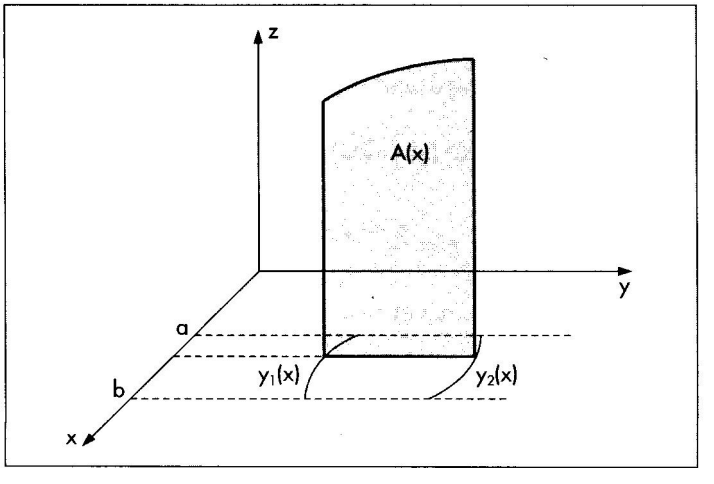
Veja a Figura 10.6.

Figura 10.6: Domínio de uma função definida por duas funções de x e duas constantes.



O 1º passo para o cálculo da integral dupla consiste em achar a área $A(x)$ de uma secção do gráfico perpendicular ao eixo x, $A(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy$ (Figura 10.7).

Figura 10.7: Integral parcial $A(x)$.



No 2º passo, o volume sob o gráfico e acima do domínio D, é dado por

$$V = \int_a^b A(x)dx.$$

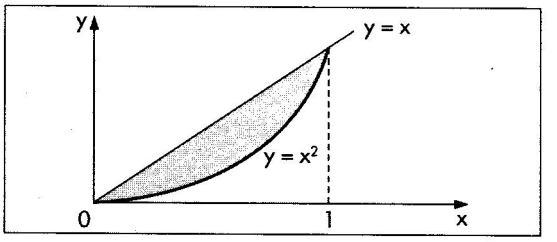
Portanto, a integral dupla de $f(x, y)$ em D é dada por

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy \right] dx.$$

Exemplo 10.18. Seja $f(x, y) = 1$ e D a região dada pelas inequações $0 \leq x \leq 1$ e $x^2 \leq y \leq x$. Calculemos o volume do sólido sob o gráfico da função acima de D.

A região D é dada pela Figura 10.8.

Figura 10.8: Domínio da função do Exemplo 10.18.



Temos

$$A(x) = \int_{x^2}^{x} 1dy = [y]_{x^2}^{x} = x - x^2,$$

$$V = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Exercícios

58. Calcule o volume do sólido sob o gráfico da função $f(x, y) = 5$ e acima do domínio dado pelas inequações $0 \leq x \leq 4$ e $x \leq y \leq 2x$.

59. Calcule o volume do sólido sob o gráfico da função $f(x, y) = xy^2$ e acima do domínio dado pelas inequações $0 \leq x \leq 1$ e $x^2 \leq y \leq x$.

Uma terceira situação que ocorre no cálculo da integral dupla é aquela em que o domínio D de $f(x, y)$ é dado por

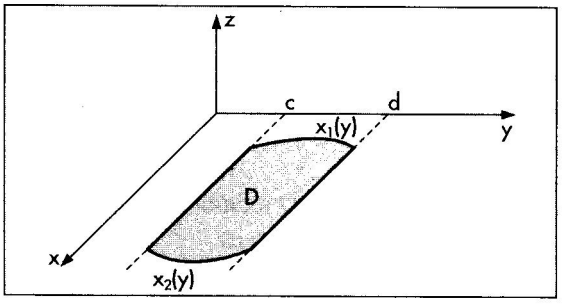
$$c \leq y \leq d$$

e

$$x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$$

Veja a Figura 10.9.

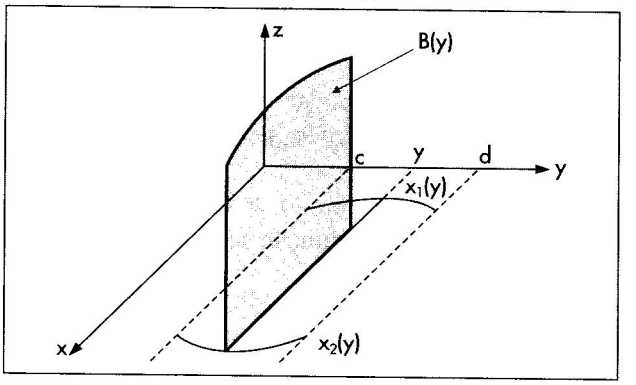
Figura 10.9



O 1º passo para calcular a integral dupla consiste em achar a área $B(y)$ de uma secção do gráfico da função perpendicular ao eixo y. Isto é

$$B(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx \text{ (Figura 10.10).}$$

Figura 10.10: Integral parcial $B(y)$.



O 2º passo consiste em calcular o volume sob o gráfico de $f(x, y)$ e acima de D, por meio da integral

$$V = \int_c^d f(x, y)dy.$$

Portanto, a integral dupla de $f(x, y)$ em D é dada por

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx \right] dy.$$

Exemplo 10.19. Consideremos a função $f(x, y) = x + y$ e calculemos a integral dupla $\iint_D f(x, y)dxdy$, em que a região D é dada por

$$1 \leqslant y \leqslant 2$$

e

$$y \leqslant x \leqslant 3y.$$

Temos

$$B(y) = \int_y^{3y} (x + y)dx = \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_y^{3y} = \frac{9y^2}{2} + 3y^2 - \frac{y^2}{2} - y^2 = 6y^2,$$

$$V = \int_1^2 6y^2 dy = [2y^3]_1^2 = 2 \cdot (8) - 2 \cdot (1) = 14.$$

Portanto, a integral dupla procurada vale 14.

Exercícios

60. Calcule o volume do sólido sob o gráfico da função $f(x, y) = 5$ e acima do domínio dado pelas inequações $y \leqslant x \leqslant 3y$ e $0 \leqslant y \leqslant 5$.

61. Calcule a integral dupla $\iint_D y dxdy$, em que D é dado pelas inequações $y \leqslant x \leqslant 8 - y$ e $2 \leqslant y \leqslant 4$.

Observações

a) De modo geral, se o domínio D não puder ser expresso de acordo com as situações descritas, então subdividimos o domínio em partes tais que cada uma se enquadre nos casos dados.

b) Nos casos estudados, consideramos $f(x, y) \geqslant 0$; caso tenhamos $f(x, y) \leqslant 0$, então $-f(x, y) \geqslant 0$. Assim, a integral dupla da função será o oposto do volume do sólido compreendido entre D e o gráfico da função.

Capítulo 11

Máximos e Mínimos para Funções de Duas Variáveis

11.1 Introdução

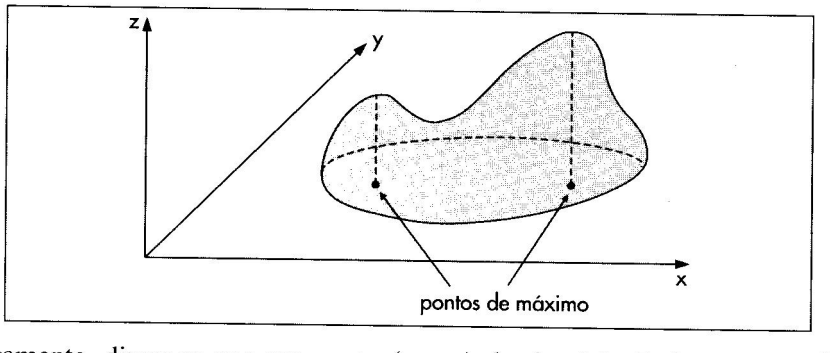
Uma importante aplicação do estudo das derivadas parciais é a da otimização de funções. Otimizar uma função significa encontrar seu ponto de máximo ou de mínimo. Assim, determinar a máxima produção de uma firma com um dado orçamento constitui um problema de maximização; entre as possíveis combinações de insumos, aquela que nos permite obter certo nível de produção, a custo mínimo, consiste em resolver um problema de minimização. Vamos tornar mais precisas essas idéias, com algumas definições.

Seja f uma função de duas variáveis x e y. Dizemos que um ponto (x_0, y_0) do domínio D é um ponto de máximo relativo de f, ou simplesmente ponto de máximo, se existir uma bola aberta de centro (x_0, y_0) e raio r, tal que, para todo ponto $P(x, y)$ do domínio situado no interior dessa bola aberta, tenhamos

$$f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0).$$

Ao número $f(x_0, y_0)$ damos o nome de valor máximo de f (Figura 11.1).

Figura 11.1: Pontos de máximo de uma função.

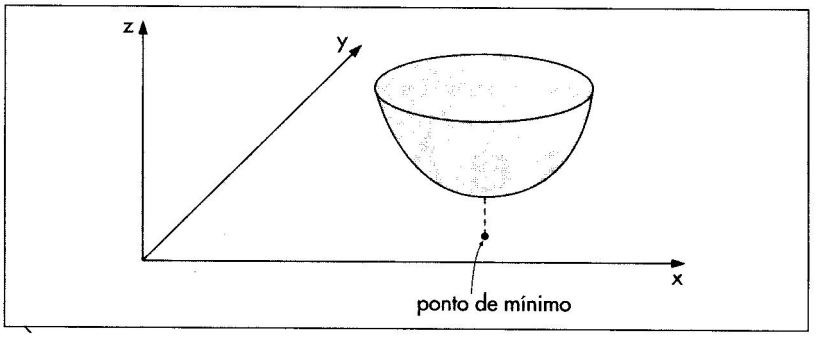


Analogamente, dizemos que um ponto (x_0, y_0) do domínio D é um ponto de mínimo relativo de f, ou simplesmente ponto de mínimo, se existir uma bola aberta de centro (x_0, y_0) e raio r, tal que, para todo ponto $P(x, y)$ do domínio situado no interior dessa bola aberta, tenhamos

$$f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0).$$

Ao número $f(x_0, y_0)$ damos o nome de valor mínimo de f (Figura 11.2).

Figura 11.2: Ponto de mínimo de uma função.



Seja f uma função de duas variáveis x e y. Dizemos que um ponto (x_0, y_0) do domínio D é um ponto de máximo global (ou absoluto) de f se, para todo ponto $P(x, y)$ do domínio, tivermos

$$f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0).$$

Analogamente, dizemos que um ponto (x_0, y_0) do domínio D é um ponto de mínimo global (ou absoluto) de f se, para todo ponto $P(x, y)$ do domínio, tivermos

$$f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0).$$

A descoberta de um ponto de máximo ou de mínimo exige, na maioria dos casos, o conhecimento do gráfico de f, o que, conforme vimos, não é um problema fácil.

Entretanto, existem teoremas que nos auxiliam nesse sentido, e que passaremos a estudar.

Teorema 11.1

Seja f uma função com duas variáveis x e y e seja (x_0, y_0) um ponto interior ao domínio.
Se (x_0, y_0) for um ponto de máximo ou de mínimo de f e se existirem as derivadas parciais f_x e f_y, então

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \text{ e } f_y(x_0, y_0) = 0.$$

Demonstração

Suponhamos que (x_0, y_0) seja um ponto de máximo. Existe a bola aberta de centro (x_0, y_0) e raio r, no interior do domínio D, cujos pontos (x, y) são tais que $f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$ (Figura 11.3).