CURVAS DEFINIDAS POR EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NO PLANO

Jorge Sotomayor

13º COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA

Poços de Caldas · MG. · 12 a 24 · 7 · 1981

CNPq
CONSELHO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO E TECNOLÓGICO

impa
Instituto de Matemática Pura e Aplicada

CURVAS DEFINIDAS POR EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NO PLANO

Jorge Sotomayor

PREFÁCIO

O presente texto, preparado para servir de referência ao curso ministrado pelo autor no 13º Colóquio Brasileiro de Matemática, está dirigido ao leitor com algum conhecimento básico de Equações Diferenciais. Por isso no Capítulo I nos limitamos a relembrar os fundamentos da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais, dentro da qual podem considerar-se inseridos os assuntos aqui desenvolvidos.

Fizemos algum esforço para minimizar a interseção deste texto com outros de reputação já estabelecida. Referimo-nos principalmente à "Teoria Geométrica das Equações Diferenciais" por M. Peixoto e à "Introdução aos Sistemas Dinâmicos" por J. Palis e W. Melo.

Nosso texto, pelo fato de que nos restringimos ao plano, é provavelmente mais elementar. Conseguimos entretanto focalizar temas de cunho clássico tais como os ciclos limites e as bifurcações, mas cuja relevância atual, no contexto de pesquisa e das aplicações, é indiscutível.

Outro assunto abordado neste texto é o da estabilidade estrutural, peça fundamental da Teoria e do qual, em contraste com os temas anteriores, pode-se dizer que, no caso do plano, atingiu seu estágio definitivo. Escolhemos a versão de M.Peixoto e M.C. Peixoto que tem a virtude de ser a pioneira, no âmbito das Equações Diferenciais, na síntese harmoniosa da estabilidade estrutural e das propriedades genéricas.

Agradecemos a ajuda prestada por Roberto Paterlini, da U.F.S.C., na preparação do texto e na discussão de aspectos matemáticos e de apresentação do mesmo.

Somos gratos também pela colaboração prestada por Rodrigo Bamón, Rafael Labarca, Moacir Lima e Walterson Ferreira, na revisão de versões preliminares do texto.

Finalmente, registramos nosso reconhecimento à Lais Ventura Santos por sua eficiência no trabalho de datilografia.

Rio, 30 de maio de 1981.

Í N D I C E

INTRODUÇÃO

O estudo global das curvas definidas por equações diferenciais inicia-se com a memória de H. Poincaré "Sur les courbes définies par une équation differéntielle", publicada em 1881. Inaugurou-se com este trabalho uma linha de pensamento e de contribuições conhecida como Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais. Após 100 anos de existência enriqueceu com novos problemas e gerou várias ramificações de importância atual inegável.

Como introdução ao estudo da Teoria Qualitativa, abordaremos neste curso os três assuntos seguintes: ciclos limites, estabilidade estrutural e bifurcações.

O Capítulo I é dedicado a relembrar os fundamentos da Teoria Qualitativa, incluindo o Teorema de Poincaré-Bendixson, que descreve o comportamento assintótico das soluções de sistemas de equações da forma

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = P(x,y) \\ y' = Q(x,y) \;. \end{cases}$$

Relembram-se também a estrutura local das soluções vizinhas de um ponto singular hiperbólico (foco, nó, sela) e generalidades sobre os ciclos limites.

Um ciclo limite é uma solução ou trajetória periódica de (1) que é isolada, e para a qual todas as trajetórias suficientemente próximas tendem, espiralando, para tempo crescente ou decrescente.

Poincaré dedicou uma atenção especial na memória acima citada, ao problema da localização e determinação do número dos ciclos limites de equações (1), no caso em que P e Q são polinômios. O próprio Teorema de Poincaré-Bendixson e a análise local dos pontos singulares hiperbólicos, aparecem no seu trabalho como peças fundamentais que conduzem ao seguinte Teorema de Finitude: "no caso geral" os sistemas polinomiais do tipo (1) possuem um número finito de ciclos limites. O termo "caso geral" na obra de Poincaré tem o sentido do termo "genérico", mais usado atualmente para indicar que uma pequena perturbação nos coeficientes de uma equação do tipo (1), que não satisfaz à conclusão do Teorema, "caso excepcional", a leva ao "caso geral".

O Capítulo II deste texto é dedicado à demonstração de uma versão mais precisa do Teorema de Finitude dos ciclos limites de Poincaré. A hipótese de Poincaré elimina a presença de ciclos singulares, também chamados de gráficos, que são conjuntos formados por pontos singulares do tipo sela conectados por trajetórias (separatrizes). A versão dada no texto implica que os casos excepcionais, i.e. os campos com ciclos singulares ou gráficos, estão contidos na união enumerável de variedades analíticas magras, de modo que formam um conjunto de medida nula.

Numa outra versão desenvolvida neste texto admite-se um tipo de ciclo singular chamado simples, o qual é estudado para este fim. A virtude desta versão é que a validade ou não de suas hipóteses pode ser verificada por operações algébricas, a partir das funções polinomiais P e Q, enquanto a ausência de ciclos singulares, na hipótese de Poincaré, envolve operações estritamente analíticas para sua verificação.

A questão da finitude dos ciclos limites de sistemas polinomiais no plano está longe de alcançar seu desenvolvimento definitivo. Mesmo o notável trabalho de H. Dulac "Sur les cycles limites" (1923) no qual ele formula a mesma conclusão de finitude para sistemas (1) polinomiais (retirando, portanto, as hipóteses de hiperbolicidade das singularidades e de ausência dos gráficos), não pode, a nosso ver, ser considerado concluído. De fato, ele apresenta uma lacuna em um ponto crucial da argumentação. Anotemos entretanto que os métodos de Dulac se aplicam a sistemas (1), onde (P,Q) é analítico com pontos singulares isolados.

Por outro lado a questão proposta por D. Hilbert (1900) relativa à limitação do número dos ciclos limites em função do grau g de P e Q - Problema 16º - está totalmente em aberto mesmo para o caso $g = 2$. Sabe-se, entretanto, por um exemplo devido a Shi Song ling (1980) que esse número é superior ou igual a 4.

No Capítulo III abordaremos o estudo dos sistemas diferenciais (1), ou campos de vetores $X = (P,Q)$, de classe C^r, estruturalmente estáveis numa região plana M com fronteira suave ∂M.

Trata-se de caracterizar aqueles sistemas cujos retratos de fase em M não se alteram qualitativamente por pequenas perturbações de suas componentes, as funções P e Q.

Não nos parece inútil enfatizar a mudança de ponto de vista com respeito ao enfoque representado, por exemplo, pelos trabalhos de Poincaré e de Dulac dos quais já demos uma breve idéia. Neles o estudo global do retrato de fase baseia-se na classe das funções P e Q que definem o sistema - polinomiais para Poincaré, analíticas para Dulac. Procura-se no estudo da estabilidade estrutural conhecer os retratos de fase suficientemente robustos para resistir, se bem que qualitativamente a perturbações de classe C^r das funções P e Q.

Nossa apresentação da estabilidade estrutural baseia-se na versão devida a M.C. Peixoto e M.M. Peixoto (1959) a qual representa uma extensão fundamental da formulação pioneira devida a A. Andronov e L. Pontrjagin (1937).

A compreensão do conjunto Σ^r dos sistemas estruturalmente estáveis, sua caracterização em termos dos elementos essenciais do sistema (singularidades, órbitas periódicas e separatrizes), sua abertura e densidade no espaço $\mathfrak{X}^r$ de todos os sistemas de classe C^r, que são as conclusões a que chegamos no Capítulo III, constitui o ponto de partida para o estudo das mudanças estruturais (bifurcações) nos retratos de fase de famílias de sistemas

$$(1_\lambda) \qquad \begin{cases} x' = P(x,y;\lambda) \\ y' = Q(x,y;\lambda) \end{cases}$$

que dependem de parâmetros. Pois estas mudanças,acontecem somente para valores λ_0 (chamados de bifurcação) para as quais o sistema encontra o complementar $\mathfrak{X}_1^r = \mathfrak{X}^r - \Sigma^r$, dos sistemas estruturalmente estáveis.

No Capítulo IV inicia-se um estudo sistemático das bifurcações que podem apresentar-se em famílias (1_λ) que dependem de um parâmetro real λ, definidos numa região compacta M do plano.

Restringir-nos-emos ao caso das bifurcações estruturalmente estáveis, ou seja aquelas cujas propriedades essenciais não se alteram por pequenas perturbações da família, isto é, das funções $P(x,y,\lambda)$, $Q(x,y,\lambda)$.

Chegaremos a caracterizar tais bifurcações em termos de transversalidade de (1_λ) a uma subvariedade suave denotada Σ_1^r, de codimensão 1 de $\mathfrak{X}_1^r$, considerando (1_λ) como uma curva em $\mathfrak{X}^r$. Demonstraremos que as famílias de sistemas (1_λ) que possuem somente bifurcações estáveis formam um conjunto aberto e denso.

A exposição constitui uma adaptação para o plano de resultados obtidos pelo autor para variedades compactas. Estes resultados constituem extensões substanciais do trabalho de Andronov e Leontovich (1938), no qual estes autores soviéticos inauguram o estudo das bifurcações a partir de suas relações com a estabilidade estrutural por perturbações pequenas em $\mathfrak{X}^r$ restringidas ao espaço $\mathfrak{X}_1^r$ (estabilidade estrutural de primeira ordem).

Cabe entretanto, anotar que há uma diferença conceitual importante, entre a versão dada neste texto e a de Andronov e Leontovich. Enquanto esta última ao restingir-se às bifurcações derivadas do encontro da família com os sistemas estruturalmente estáveis de primeira ordem, $\tilde{\Sigma}^r$, focaliza apenas as bifurcações estáveis isoladas; a consideração da parte Σ^r já mencionada permite descrever também as bifurcações estáveis que são naturalmente limites de outras bifurcações, permitindo assim caracterizar todos as possíveis bifurcações estáveis. Acreditamos ter esclarecido satisfatoriamente no Capítulo IV a relação conceitual entre Σ_1^r, $\tilde{\Sigma}_1^r$ e as bifurcações estáveis.

O estudo sistemático das bifurcações de equações diferenciais com vários parâmetros está longe de atingir sua plenitude mesmo no caso do plano. Para o caso de 2-parâmetros é possível continuar a linha de raciocínios usada no Capítulo IV. Aparecem entretanto numerosos casos essencialmente novos.*

Sem pretender ser exaustivos, mencionamos no final de cada Capítulo as referências bibliográficas originais relacionadas com os assuntos abordados no texto.

---

* A ser apresentado em "Bifurcations of Vector Fields depending on two parameters", trabalho em fase atual de preparação.

Demonstração (Ver [S, VII].

Referências (Capítulo I)

[L] Lima E. Análise no espaço $\mathbb{R}^n$. E. Blücher, 1970.

[S] Sotomayor J. Lições de Equações Diferenciais. Projeto Euclides CNPq. 1979.

REFERÊNCIAS (Capítulo II)

[G] Gonzales Velasco E., Generic properties of polynomial vector fields at infinity transactions. A.M.S., 143, 1969.

A apresentação das seções 3 e 4 foi baseada, neste artigo.

[P] Poincaré H., Sur les courbes définies par une équation différentielle. Obra Completa Vol. 1.

O Teorema XVII desta memória motivou todo o presente capítulo.

[W] Walker R.J., Algebraic Curves. Dover, 1950.

REFERÊNCIAS (Capítulo III)

[F] Fernández P. Medida e Integração. Projeto Euclides, CNPq, 1976.

[P-P] Peixoto M.C. e Peixoto M.M. - Structural stability in the plane with enlarged boundary conditions. An.Acad.Bras. Ciencias, Vol 31, 1959.

[P-M] Palis J., Melo W. - Introdução aos Sistemas Dinâmicos. Projeto Euclides 1978.

[S] Sotomayor J. - Lições de Equações Diferenciais Ordinárias. Projeto Euclides, CNPq, 1979.

[S_1] Sotomayor J. - Singularidades de Aplicações Diferenciáveis ELAM, IMPA, 1976.

[Sa] Sard A. - The measure of the critical values of differentiable maps. B.A.M.S. Vol. 48, 1942.

Prova-se neste trabalho o importante teorema que estabelece o seguinte "Se $f: A_n \to R^p$ é uma aplicação diferenciável de classe C^k, num aberto $A_n \subset R^n$, então, se $k \geq n-p+1$, o conjunto de valores criticos de f i.e.

$$K(f) = \{y = f(x);\ \ Df(x) \text{ não é sobre}\}$$

tem medida de Lebesgue nula em R^p". Em [S_1] encontra-se uma prova deste teorema para o caso $k = \infty$

REFERÊNCIAS (Capítulo IV)

[A] Andronov A., Leontovich E., et. al., Theory of Bifurcations of Dynamical Systems on a Plane. I.P.S.T. I.P.S.T., Jerusalem, 1971.

[P-M] Palis J., Melo W., Introdução aos Sistemas Dinâmicos. Projeto Euclides, CNPq. 1978.

[S_2] Sotomayor J., Estabilidade Estrutural de Primeira ordem e Variedades de Banach. Tese de Doutoramento, IMPA, 1964.

[S_3] Sotomayor J., Generic one parameter families of vector fields on two dimensional manifolds, Publ.Math. I.H.E.S., Vol. 43, 1974.

[T] Teixeira M., Generic bifurcation on manifolds with boundary. J.D.E., Vol. 25,1, 1977.