UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA.

QUADRADO LATINO

Disciplina MA673 – Elementos de Álgebra Turma: A
Professor responsável: Fernando Eduardo Torres Orihuela
Alunos: Natália De Nadai RA: 034964
Bruno Cézar da Silva RA: 143204

Campinas, 07 maio de 2015

ÍNDICE

1.INTRODUÇÃO

Neste trabalho iremos explicar e trabalhar com o quadrado latino. Um quadrado latino de ordem *n* é uma matriz *n* x *n* preenchida com *n* diferentes informações de tal maneira que ocorrem no máximo uma vez em cada linha ou coluna.
Além disso, trabalharemos com uma breve parte histórica e uma explicação sobre os quadrados latinos e suas aplicações.

2.PARTE HISTÓRICA

O quadrado latino é uma estrutura bi-dimensional utilizada para armazenar dados do mesmo tipo, ou seja, uma matriz quadrada de ordem *n*, onde os elementos são dispostos em formas de linhas e colunas. O nome quadrado latino teve origem com Leonhard Euler, trabalhando com matrizes quadradas utilizando caracteres latinos como símbolos. Os caracteres obedecem a seguinte condição para serem termos dessa matriz:

[Aij], onde i representa as linhas e j são as colunas. [1]

Antes do Quadrado Latino, porém, houve alguns predecessores, os Quadrados Mágicos, com cerca de 4mil anos de história. Nesses quadriculados, um mesmo número corresponde à soma dos algarismos de cada linha, coluna e diagonal.

O mais antigo quadrado mágico que se tem notícia é o Lo Shu Square, encontrado em manuscritos chineses de 2.800 AC, que faziam parte da lenda sobre como acalmar a fúria do rio Lo. No Egito e na Índia, os quadrados mágicos apareceram gravados em pedra ou metal, como forma de talismã e tinham lugar na astrologia e na religião. [2]

Em sua disposição, ocupadas por letras ou números, se as letras dispõem-se em ordem alfabética na primeira linha e na primeira coluna ou se os números estiverem na sua ordem natural é considerado reduzido (também, quadrados latinos padrões ou quadrados latinos standard). Por exemplo, o primeiro quadrado latino é reduzido porque a sua primeira linha e coluna são ambas 1.2.3 (ao invés de 3.1.2 ou qualquer outra ordem).

O quadrado latino é utilizado quando um fator precisa ser modificado por outras duas fontes conhecidas, diminuindo assim a taxa de erro e assumindo que anteriormente os fatores não interajam antes do processo. Não se costuma utilizar o quadrado latino com mais de 8 tratamentos por haver um excessivo número de repetições ou em menores que 4x4 pelo fato de que o número de parcelas ficaria muito reduzido.

Observe alguns exemplos de quadrados latinos na forma matricial.

$M_3=\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$, e $T_4=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

2.1 Sudoku

O sudoku, um quebra cabeça que contem 81 casas distribuídas em nove linhas e nove colunas, é um quadrado bidimensional agrupado em 9 quadrados menores com 9 casas cada um. O jogo, um exemplo de quadrado latino, já é confeccionado com algumas casas preenchidas por números (que poderiam ser quaisquer símbolos, desde que respeitem as regras), cabendo ao jogador completar as casas restantes com algarismos de 1 a 9 de modo que esses símbolos não se repitam na mesma linha ou coluna ou mesmo ate dentro da "subgrade". Cada quebra-cabeça tem sua única solução. O jogo não envolve nenhuma operação numérica, por isso pode ser substituída por qualquer símbolo.
O aposentado Wayne Goul conheceu o jogo numa visita ao Japão em 1997; se interessou e criou um programa de computador para gerar varias configurações do quadrado. Em 2004, Gould fez uma proposta aos Times de Londres que foi aceita, que consistia em publicar o quebra-cabeça e em 2005 no Daily Telegraph, levando assim o jogo ao sucesso.

3.DEFINIÇÕES

Definição (quadrado latino): Um quadrado latino de ordem n é uma matriz n × n preenchida com n diferentes símbolos de tal maneira que ocorrem no máximo uma vez em cada linha ou coluna

Definição (grupos): um conjunto não vazio G é dito grupo se existir uma operação · em G tal de GxG → G/ $(g_1, g_2) \rightarrow g_1 . g_2$

1 $(g_1 . g_2).g_3$,∀ g_1, g_2, g_3 ∈ G

2 ∃ e ∈ G/$eg = ge = g$,∀$g \in G$

3 ∃ h ∈ G/ hg = gh = e ,∀ $g \in G$

Definição (grupo abeliano): Um grupo G é dito abeliano se $g_1 \, g_2 = g_2 \, g_1$ ∀ g_1 ,g_2 ∈ G

(permutação): seja X um e $\alpha: X \rightarrow X$ é uma **permutação** se é uma bijeção.

Definição (Ordem): Seja G um grupo. A ordem de G é a cardinalidade de G como conjunto.

Notação: IGI

Lema:

Seja X conjunto finito e G= perm(X). Se IXI = n então IGI =n!

Demonstração: seja g ∈ G, g(1),g(2),........, g(n) e X = { 1,2,3,4,.........n}

Existem n possibilidades para g(1) tirando um dos elementos temos (n- 1) possibilidades para g(2). E assim por diante até sobrar apenas uma possibilidade para g(n).

Logo para G = perm(x) temos n(n-1)... 1 = n! Possibilidades, isto é, IGI = n!

A partir destas definições vamos relacionar a teoria de grupos com o quadrado latino

Exemplos:

(1º) Vamos construir a tabela de grupos para a composição das funções:

Dado X ={1,2,3} todas as permutações de X são dadas por:

$\partial 0 = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}$ $\partial 1 = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{matrix}$

$\partial 2 = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix}$ $\partial 3 = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix}$

$\partial 4 = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix}$ $\partial 5 = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix}$

Portanto:

$$\partial 3 \,{}^\circ \partial 2(1) = \partial 3(2) = 3$$
$$\partial 3^\circ \partial 2(2) = \partial 3(1) = 2$$
$$\partial 3^\circ \, \partial 2(3) = \partial 3(3) = 1$$

Temos: $\partial 3^\circ \partial 2 = \partial 5$

Tabela 1:

$\circ$	$\partial 0$	$\partial 1$	$\partial 2$	$\partial 3$	$\partial 4$	$\partial 5$
$\partial 0$	$\partial 0$	$\partial 1$	$\partial 2$	$\partial 3$	$\partial 4$	$\partial 5$
$\partial 1$	$\partial 1$	$\partial 0$	$\partial 4$	$\partial 5$	$\partial 2$	$\partial 3$
$\partial 2$	$\partial 2$	$\partial 3$	$\partial 0$	$\partial 1$	$\partial 5$	$\partial 4$
$\partial 3$	$\partial 3$	$\partial 2$	$\partial 5$	$\partial 4$	$\partial 0$	$\partial 1$
$\partial 4$	$\partial 4$	$\partial 5$	$\partial 1$	$\partial 0$	$\partial 3$	$\partial 2$
$\partial 5$	$\partial 5$	$\partial 4$	$\partial 3$	$\partial 2$	$\partial 1$	$\partial 0$

Observe que lXl=3 , lGl =3! = 6, G={e,$\partial 1, \partial 2, \partial 3, \partial 4, \partial 5\}$

2º exemplo

Consideremos agora $(z_4$, +):

z_4= {0, 1, 2,3} onde 0,1,2,3 são classes de equivalência de z_4

A ordem de z_4=4

Tabela 2:

+	0	1	2	3
0	o	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Vemos que a tabela 1 e tabela 2 são tabelas de grupos, pois todos os seus elementos possuem inversa, elemento neutro e os elementos são associativos. E na tabela 2 temos um grupo abeliano visto que todos os elementos se comutam o que não ocorre na tabela 1, pois:

$\partial 1 \circ \partial 2 \neq \partial 2 \circ \partial 1$.

Observamos também que a tabela de um grupo tem estrutura de um quadrado latino. Basta observar que a tabela de um grupo não repetem seus elementos nas mesmas linhas e colunas, por se tratar de uma operação binária e associativa.[4]

4. CONCLUSÃO

As aplicações dos quadrados latinos são muitas, podemos encontra-los em jogos, como vimos o sudoku é um dos mais famosos, além disso, podemos encontra-los em tratamento de dados em agronegócios [5], em comparação e análise de fertilizantes [6].
O quadrado latino é uma maneira simples de trabalhar com matrizes e à partir dos resultados é possível uma análise determinada dos dados de acordo com as necessidades da pesquisa.

5.BIBLIOGRAFIA

[1] www.ime.usp.br/~elo/IntroducaoComputacao/Matrizes.htm
[2] http://www.abril.com.br/noticia/diversao/no_168200.shtml
[3]http://paginapessoal.utfpr.edu.br/sheilaro/estatistica-aplicada-a-experimentos/AULA09QuadradosLatinos.pdf
[4] Garcia, Arnaldo. Elementos de álgebra/ Arnaldo Garcia, Yves Lequain.4.ed.Rio de Janeiro:IMPA 2006
[5]http://www.uel.br/pessoal/silvano/Ciencia_Animal/Slides/Slides%205%20-%20Quadrado%20Latino.pdf
[6] http://www.ime.usp.br/~botter/mae327/Quadrado%20latino.pdf