

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/359175613>

Teoria dos Grafos para Computação

Preprint · March 2022

DOI: 10.13140/RG.2.2.10555.49449/1

CITATIONS

0

READS

8,250

1 author:



Alexandre L M Levada

Universidade Federal de São Carlos

130 PUBLICATIONS 389 CITATIONS

SEE PROFILE

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Encoded Blue Eyes Project (EBE) [View project](#)



Double Noise Filtering in CT: Pre- and Post-Reconstruction [View project](#)



Departamento de Computação
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Universidade Federal de São Carlos

Teoria dos Grafos para Computação

Fundamentos teóricos, problemas e algoritmos

Prof. Alexandre Luis Magalhães Levada
Email: alexandre.levada@ufscar.br

Sumário

- Fundamentos básicos
- O problema do isomorfismo
- Cadeias de Markov e random walks
- O modelo Pagerank
- Árvores
- O Problema da árvore geradora mínima
 - O algoritmo de Kruskal
 - O algoritmo de Prim
- Busca em grafos
 - Busca em Largura (Breadth-First Search)
 - Busca em Profundidade (Depth-First Search)
- Caminhos mínimos em grafos
 - O algoritmo de Bellman-Ford
 - O algoritmo de Dijkstra
 - A heurística A*
- Grafos Eulerianos
 - O problema do carteiro chinês
- Grafos Hamiltonianos
 - O problema do caixeiro viajante
- Grafos Planares
- Coloração de vértices
- Emparelhamentos
 - O algoritmo húngaro
- Emparelhamentos estáveis
 - O algoritmo de Gale-Shapley
- O problema do fluxo máximo em redes
 - Min-cut/Max-flow
 - O algoritmo Ford-Fulkerson
- Introdução as redes complexas

“As coisas que você faz para si mesmo vão com você, mas as coisas que você faz para os outros permanecem como seu legado.”
(Kalu Ndukwe Kalu)

Fundamentos Básicos

Grafos são estruturas matemáticas que representam relações binárias entre elementos de um conjunto finito. Em termos gerais, um grafo consiste em um conjunto de vértices que podem estar ligados dois a dois por arestas. Se dois vértices são unidos por uma aresta, então eles são vizinhos. É uma estrutura fundamental para a computação, uma vez que diversos problemas do mundo real podem ser modelados com grafos, como encontrar caminhos mínimos entre dois pontos, alocação de recursos e modelagem de sistemas complexos.

Def: $G = (V,E)$ é um grafo se:

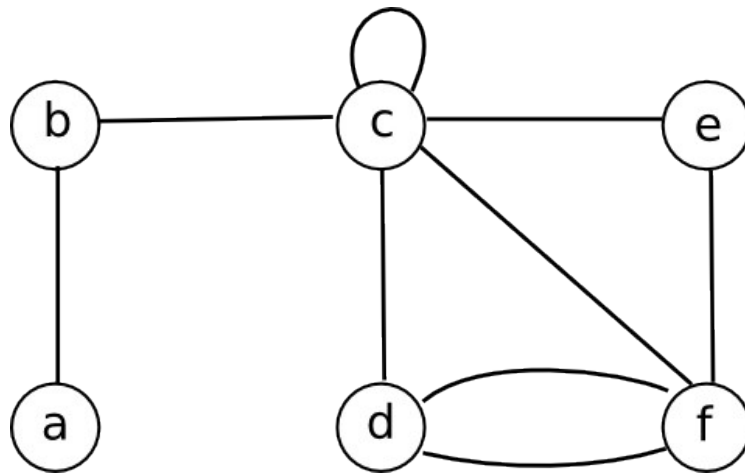
i) V é um conjunto não vazio de **vértices**

ii) $E \subseteq V \times V$ é uma relação binária qualquer no conjunto de vértices (não precisa ser apenas equivalência ou ordem parcial, pode ser qualquer coisa): conjunto de **arestas**

Obs: Convenção

Grafo não direcionado: $(a,b) = (b,a)$

Grafo direcionado ou dígrafo: $\langle a,b \rangle \neq \langle b,a \rangle$



Grafo ou Multigrafo

- Existem loops
- Existem arestas paralelas

Grafo básico simples

- Não existem loops
- Não existem arestas paralelas

Denotamos por $N(v)$ o conjunto vizinhança do vértice v . Por exemplo, $N(b) = \{a, c\}$

Def: Grau de um vértice v : $d(v)$

É o número de vezes que um vértice v é extremidade de uma aresta. Num grafo básico simples, é o mesmo que o número de vizinhos de v . Ex: $d(a) = 1$, $d(b) = 2$, $d(c) = 6$, $d(d) = 3$, ...

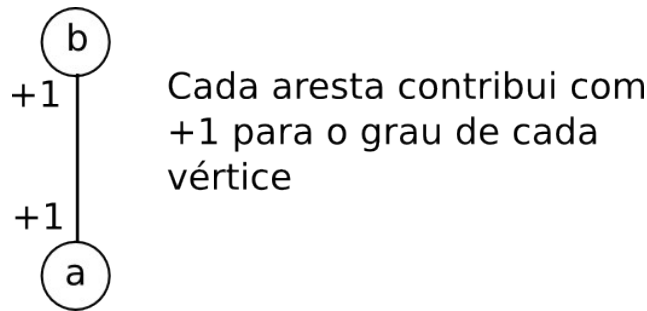
Lista de graus de G : graus dos vértices de G em ordem crescente

$L_G = (1, 2, 2, 3, 4, 6)$

Handshaking Lema: A soma dos graus dos vértices de G é igual a duas vezes o número de arestas.

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m \quad (\text{condição de existência para grafos})$$

onde $n = |V|$ e $m = |E|$ denotam respectivamente o número de vértices e arestas.



Prova: (por indução)

Seja o predicado $P(n)$ definido como:

$$P(n): \sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m$$

BASE: Note que nesse caso, $n = 1$, o que implica dizer que temos um único vértice. Então, para todo $m \geq 0$ (número de arestas), a soma dos graus será sempre um número par pois ambas as extremidades das arestas incidem sobre o único vértice de G . (OK)

PASSO DE INDUÇÃO: Para k arbitrário, mostrar que $P(k) \rightarrow P(k+1)$

Note que para k vértices, temos:

$$P(k): \sum_{i=1}^k d(v_i) = 2m$$

Ao adicionarmos exatamente um vértice a mais, temos $k + 1$ vértices:

$$P(k+1): \sum_{i=1}^{k+1} d(v_i) = 2m'$$

Ao passar de k para $k + 1$ vértices, temos duas opções: a) o grau do novo vértice é zero; b) o grau do novo vértice é maior que zero.

Caso a): Nessa situação, temos o número de arestas permanece inalterado, ou seja, $m = m'$. Pela hipótese de indução e sabendo que o grau no novo vértice é zero, podemos escrever:

$$\sum_{i=1}^{k+1} d(v_i) = \sum_{i=1}^k d(v_i) + d(v_{k+1}) = 2m + 0 = 2m' \quad (\text{OK})$$

ou seja, $P(k + 1)$ é válida.

Caso b): Nessa situação, temos que o número de arestas $m' > m$. Seja $m' = m + a$, onde a denota o número de arestas adicionadas ao inserir o novo vértice $k + 1$. Então, pela hipótese de indução e sabendo que o grau do novo vértice será a , podemos escrever:

$$\sum_{i=1}^{k+1} d(v_i) = \sum_{i=1}^k d(v_i) + d(v_{k+1}) + 1 + 1 + 1 + \dots + 1$$

a vezes 1

pois para cada extremidade das arestas no novo vértice, haverá outra extremidade em algum outro vértice. Isso implica em:

$$\sum_{i=1}^{k+1} d(v_i) = 2m + a + a = 2m + 2a = 2(m+a) = 2m' \quad (\text{OK})$$

ou seja, $P(k+1)$ é válida. Note que mesmo que alguma das arestas inseridas possuam ambas as extremidades no novo vértice $k+1$, a soma dos graus também será igual a $2m + 2a$, o que continuará validando $P(k+1)$. Portanto, a prova está concluída.

Teorema: Em um grafo $G = (V, E)$ o número de vértices com grau ímpar é sempre par. Podemos particionar V em 2 conjuntos: P (grau par) e I (grau ímpar). Assim,

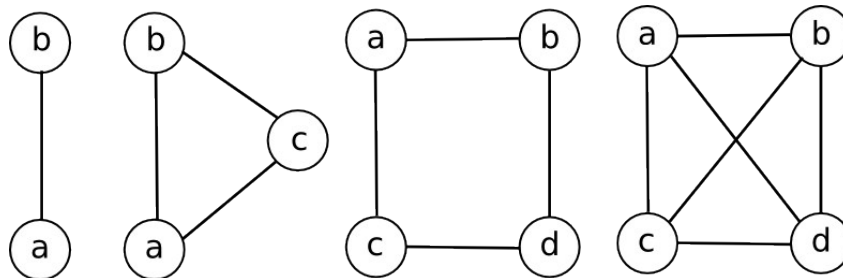
$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = \sum_{v \in P} d(v) + \sum_{u \in I} d(u) = 2m$$

Isso implica em

$$\sum_{u \in I} d(u) = 2m - \sum_{v \in P} d(v)$$

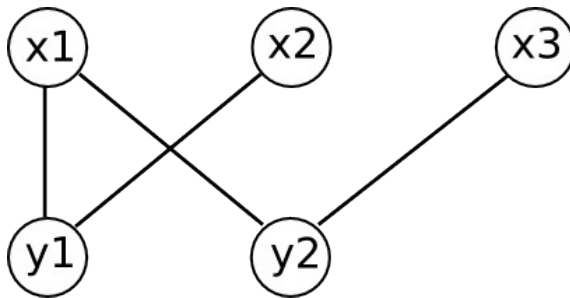
Como $2m$ é par e a soma de números pares é sempre par, resulta que a soma dos números ímpares também é par. Para que isso ocorra temos que ter $|I|$ par (número de elementos do conjunto I é par)

Def: G é k -regular $\Leftrightarrow \forall v \in V (d(v) = k)$, ou seja, $L_G = (k, k, k, k, \dots, k)$

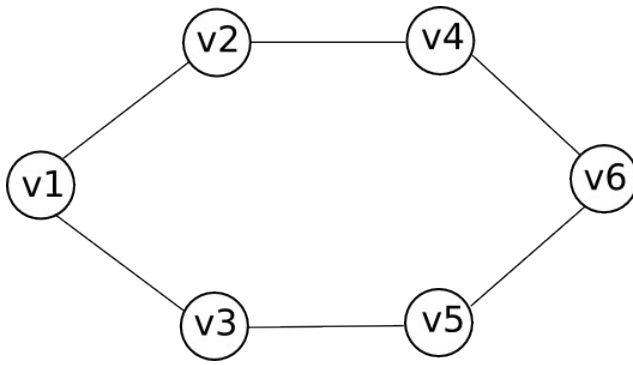


Def: Grafo Bipartido

$G = (V, E)$ é bipartido $\Leftrightarrow V = X \cup Y$ com $X \cap Y = \emptyset$ tal que $\forall e \in E (e = (a, b) / a \in X \wedge b \in Y)$



Ex: O grafo a seguir é bipartido ou não? Justifique sua resposta



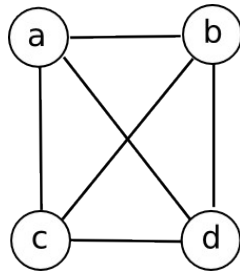
SIM, é bipartido!
Mesmo parecendo que não.

Como decidir se grafo G é bipartido? Seja $R = \{0, 1\}$ o conjunto de rótulos e seja $r \in R$ um rótulo arbitrário e $\bar{r} \in R$ o seu complementar, ou seja, $\bar{r} = 1 - r$.

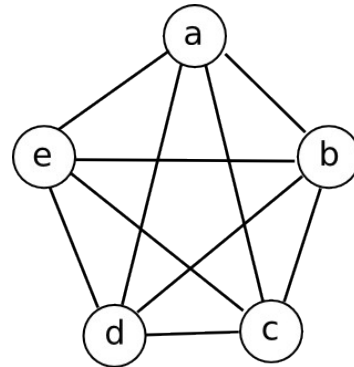
- 1) Escolha um vértice inicial v e rotule-o como r .
- 2) Para todos os vértices u vizinhos de v ainda não rotulados, rotule-os como \bar{r} . Ou seja, se um vértice recebe rótulo r , todos seus vizinhos não rotulados devem receber rótulo \bar{r} e vice-versa.
- 3) Condição de parada: Pare quando todos os vértices do grafo estiverem rotulados.
- 4) Se ao fim do processo toda aresta do grafo for do tipo (r, \bar{r}) então o grafo G é bipartido. Caso contrário, o grafo não é bipartido.

Def: Grafo completo

G é um grafo completo de n vértices, denotado por K_n , se cada vértice é ligado a todos os demais, ou seja, se $L_G = (n-1, n-1, n-1, \dots, n-1)$



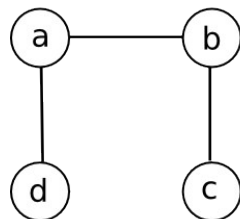
K_4



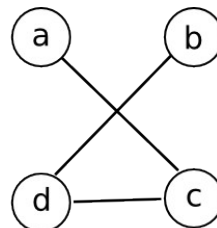
K_5

O número de arestas do grafo K_n é dado por $\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2}$

Def: Complementar de um grafo G : $\bar{G} = K_n - G$



G



\bar{G}

Obs: $G + \bar{G} = K_n$

Def: Subgrafo

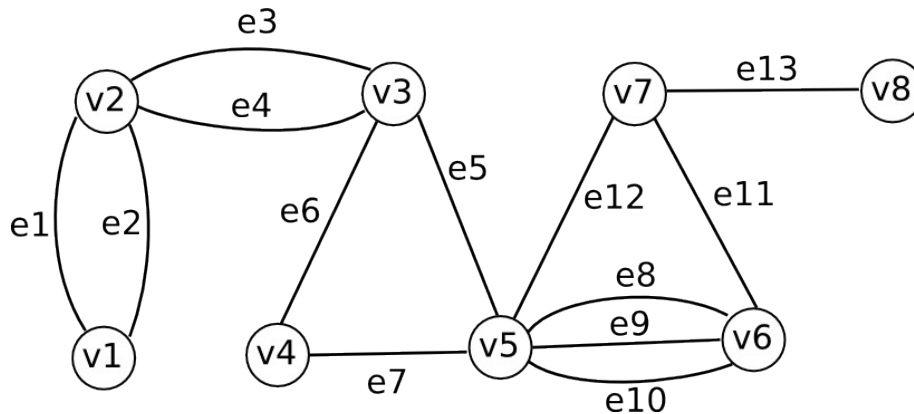
Seja $G = (V, E)$ um grafo. Dizemos que $H = (V', E')$ é um subgrafo de G se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$

Em outras palavras, é todo grafo que pode ser obtido a partir de G através de remoção de vértices e/ou arestas.

Def: Subgrafos disjuntos não possuem vértices em comum

Subgrafos arestas disjuntos: não possuem aresta em comum

Caminhos e ciclos



a) Passeio: não tem restrição alguma quanto a vértices e arestas

$$P = v1 \ e1 \ v2 \ e1 \ v1 \ e1 \ v2$$

b) Trilha: não há repetição de arestas

$$T = v1 \ e1 \ v2 \ e3 \ v3 \ e4 \ v2$$

Se trilha é fechada, temos um circuito. Ex: $T = v1 \ e1 \ v2 \ e3 \ v3 \ e4 \ v2 \ e2 \ v1$

c) Caminho: não há repetição de vértices

$$C = v1 \ e1 \ v2 \ e3 \ v3 \ e6 \ v4 \ e7 \ v5$$

Se caminho é fechado, temos um ciclo

Obs: O comprimento/tamanho de um caminho/trilha/passeio é o número de arestas percorridas

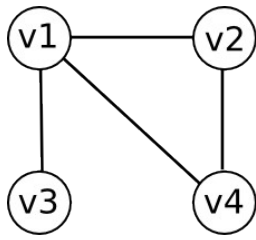
Obs: O caminho/trilha/passeio trivial é aquele composto por zero arestas

Representações computacionais de grafos

1) Matriz de adjacências A : matriz quadrada $n \times n$ definida como:

a) Grafos básicos simples

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1, & i \leftrightarrow j \\ 0, & c.c \end{cases}$$

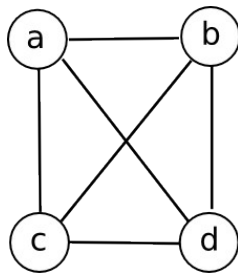


$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriedades básicas

- i) $\text{diag}(A) = 0$
- ii) matriz binária
- iii) $A = A^T$ (com exceção de dígrafos)
- iv) $\sum_j A_{i,j} = d(v_i)$
- v) Esparsa
- vi) $O(n^2)$ em espaço

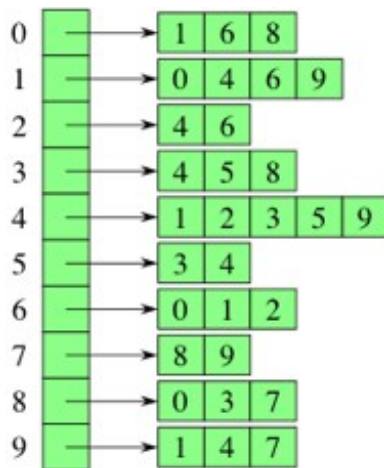
2) Matriz de Incidência M: matriz $n \times m$ em que as linhas referem-se aos vértices e as colunas referem-se as arestas



$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Obs: Loops são indicados pelo número 2 no vértice em questão

3) Lista de adjacências: estrutura do tipo hash-table (mais eficiente em termos de memória)



OBS: Em Python, na biblioteca NetworkX a classe Graph implementa grafos básicos simples e a classe MultiGraph implementa multigrafos (permitem arestas paralelas).

A estrutura de dados básica utilizada é um dicionário de dicionários de dicionários, que simula uma tabela hash na forma de uma lista de adjacências. As chaves do dicionário são os nós de modo que

$G[u]$ retorna um dicionário cuja chave é o extremo da respectiva aresta e o campo valor é um dicionário para os atributos da aresta. A expressão $G[u][v]$ retorna o dicionário que armazena os atributos da aresta (u,v). O código em Python a seguir mostra como podemos criar e manipular um grafo utilizando a biblioteca NetworkX.

```
# Classes e funções para manipulação de grafos
import networkx as nx
# Classes e funções para plotagem de gráficos
import matplotlib.pyplot as plt

# Cria grafo vazio
G = nx.Graph()

# Adiciona vértices
G.add_node('v1')
G.add_node('v2')
G.add_node('v3')
G.add_node('v4')
G.add_node('v5')

# Adiciona arestas
G.add_edge('v1', 'v2')
G.add_edge('v2', 'v3')
G.add_edge('v3', 'v4')
G.add_edge('v4', 'v5')
G.add_edge('v5', 'v1')
G.add_edge('v2', 'v4')

# Lista os vértices
print('Lista de vértices')
print(G.nodes())
input()

# Percorre o conjunto de vértices
print('Percorrendo os vértices')
for v in G.nodes():
    print(v)
input()

# Lista as arestas
print('Lista de arestas')
print(G.edges())
input()

# Percorre o conjunto de arestas
print('Percorrendo as arestas')
for e in G.edges():
    print(e)
input()

# Mostra a lista de graus
print('Lista de graus de G')
print(G.degree())
input()
# Acessa o grau do vértice v2
print('0 grau do vértice v2 é %d' %G.degree()['v2'])
```

```

print()

# Grafo como lista de adjacências
print('Grafo como lista de adjacências')
print(G['v1'])
print(G['v2'])
print(G['v3'])
print(G['v4'])
print(G['v5'])
input()

# Obtém a matriz de adjacências do grafo G
print('Matriz de adjacências de G')
A = nx.adjacency_matrix(G)          # retorna uma matriz esparsa para
economizar memória
print(A.todense())                 # converte para matriz densa (padrão)

# Adiciona um campo peso em cada aresta do grafo
G['v1']['v2']['peso'] = 5
G['v2']['v3']['peso'] = 10
G['v3']['v4']['peso'] = 2
G['v4']['v5']['peso'] = 7
G['v5']['v1']['peso'] = 4
G['v2']['v4']['peso'] = 8

# Lista cada aresta e seus respectivos pesos
print('Adicionando pesos as arestas')
for edge in G.edges():
    u = edge[0]
    v = edge[1]
    print('0 peso da aresta', edge, 'vale ', G[u][v]['peso'])
input()
print()

print('Plotando o grafo como imagem...')

plt.figure(1)
# Há vários layouts, mas spring é um dos mais bonitos
nx.draw_networkx(G, pos=nx.spring_layout(G), with_labels=True)
plt.show()

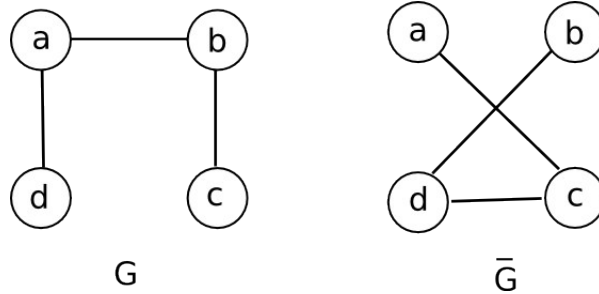
```

Um excelente guia de referência oficial para a biblioteca NetworkX pode ser encontrada em: https://networkx.github.io/documentation/stable/_downloads/networkx_reference.pdf

O leitor poderá encontrar diversos exemplos práticos de inúmeras funções da biblioteca.

O Problema do Isomorfismo

Um problema recorrente no estudo dos grafos consiste em determinar sob quais condições 2 grafos são de fato idênticos, ou seja, queremos saber se G_1 "é igual" a G_2 . Dizemos que grafos que satisfazem essa condição de igualdade são isomorfos (iso = mesma, morfos = forma).

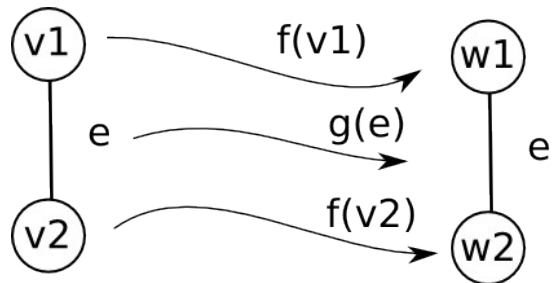


Def: $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ são isomorfos se:

- i) $\exists f: V_1 \rightarrow V_2$ tal que f é bijetora (mapeamento 1 para 1)
- ii) $\exists g: E_1 \rightarrow E_2$ tal que g é bijetora

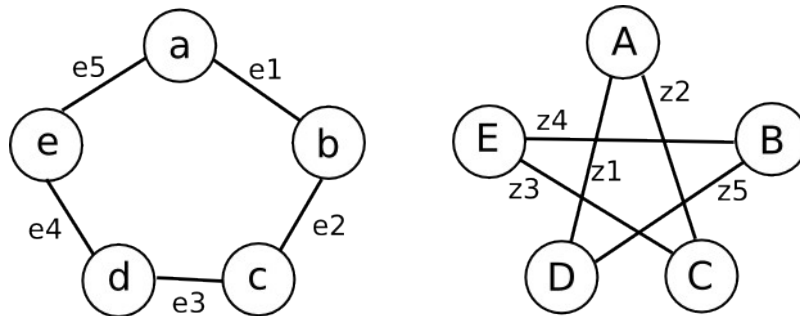
satisfazendo a seguinte restrição (*)

$$v_1 \leftarrow e \rightarrow v_2 \Leftrightarrow f(v_1) \leftarrow g(e) \rightarrow f(v_2)$$



Em termos práticos, G_1 e G_2 são isomorfos se é possível obter G_2 a partir de G_1 sem cortar e religar arestas, ou seja, apenas movendo seus vértices (transformação isomórfica).

Exercício: Os grafos abaixo são isomorfos? Prove ou refute.



Passo 1: Encontrar mapeamento f

v	a	b	c	d	e
f(v)	A	C	E	B	D

Passo 2: Encontrar mapeamento g , sujeito a restrição (*)

e	e1	e2	e3	e4	e5
f(e)	z2	z3	z4	z5	z1

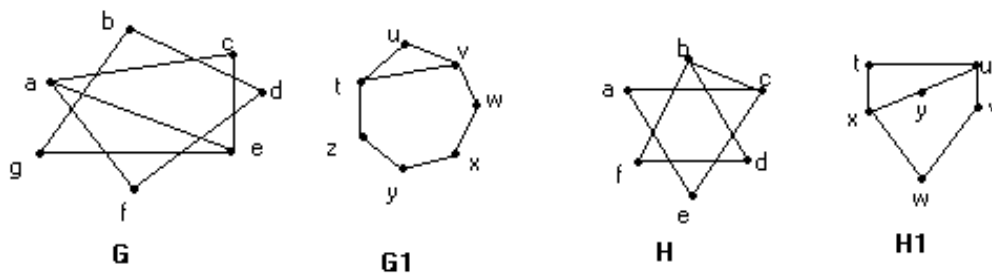
- i) $e_1 = (a, b) \rightarrow g(e_1)$ deve ser a aresta que une $f(a)$ com $f(b)$: $(A, C) = z_2$
 - ii) $e_2 = (b, c) \rightarrow g(e_2)$ deve ser a aresta que une $f(b)$ com $f(c)$: $(C, E) = z_3$
 - iii) $e_3 = (c, d) \rightarrow g(e_3)$ deve ser a aresta que une $f(c)$ com $f(d)$: $(C, E) = z_4$
 - iv) $e_4 = (d, e) \rightarrow g(e_4)$ deve ser a aresta que une $f(d)$ com $f(e)$: $(B, D) = z_5$
 - v) $e_5 = (e, a) \rightarrow g(e_5)$ deve ser a aresta que une $f(e)$ com $f(a)$: $(D, A) = z_1$
- Portanto, os grafos G_1 e G_2 são isomorfos.

Propriedades Invariantes

Na determinação de isomorfismo entre grafos torna-se útil o estudo de propriedades invariantes. Em outras palavras, ao se obter medidas invariantes a transformações isomórficas, pode-se facilmente verificar que dois grafos não são isomorfos se tais medidas não forem idênticas. Sejam $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ dois grafos isomorfos. Então,

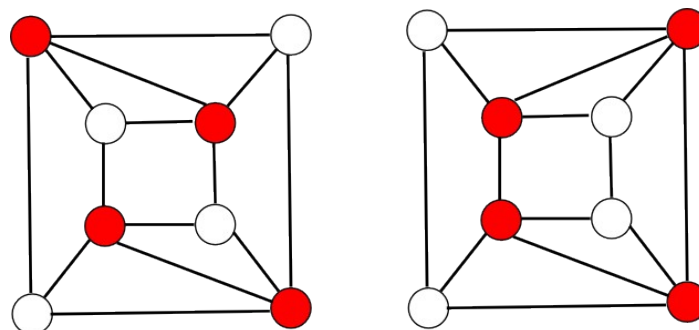
- 1) $|V_1| = |V_2|$ (o número de vértices é igual)
- 2) $|E_1| = |E_2|$ (o número de arestas é igual)
- 3) $\omega(G_1) = \omega(G_2)$ (mesmo número de componentes conexos)
- 4) $L_{G_1} = L_{G_2}$ (listas de graus são idênticas)
- 5) Ambos G_1 e G_2 admitem ciclos de comprimento k , para $k \leq n$

Ex:



Note que G é isomorfo a G_1 . Porém, H não é isomorfo a H_1 pois enquanto H admite ciclo de comprimento 3, H_1 não admite.

Ex:

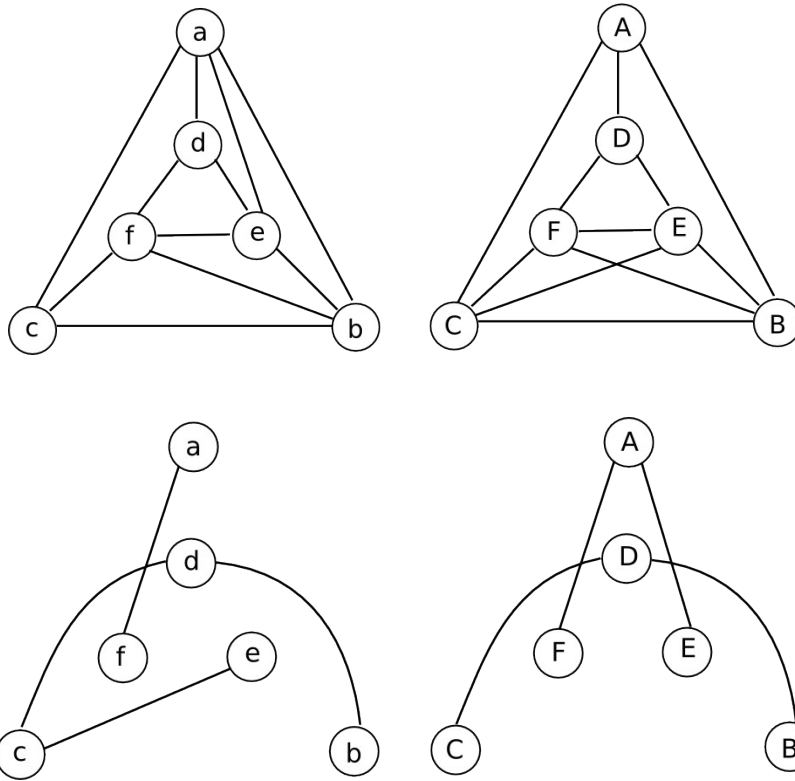


- Número de vértices: 8
- Número de arestas: 8
- Lista de graus: (3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4)
- Ciclos de comprimentos 3, 4, 5, 6, 7 e 8 \rightarrow OK

Note que, apesar de não ferir nenhuma das propriedades invariantes, não podemos afirmar que os grafos são isomorfos. Na verdade, os grafos em questão não são isomorfos. Note que em um deles, todos os vértices de grau 4 (vermelho) possuem como vizinhos exatamente um outro vértice vermelho, enquanto no outro, cada vértice de grau 4 possui exatamente 2 vértices vermelhos. Isso significa uma ruptura na topologia, o que implica em corte e posterior religação de aresta.

Teorema: $G_1 \cong G_2 \Leftrightarrow \bar{G}_1 \cong \bar{G}_2$

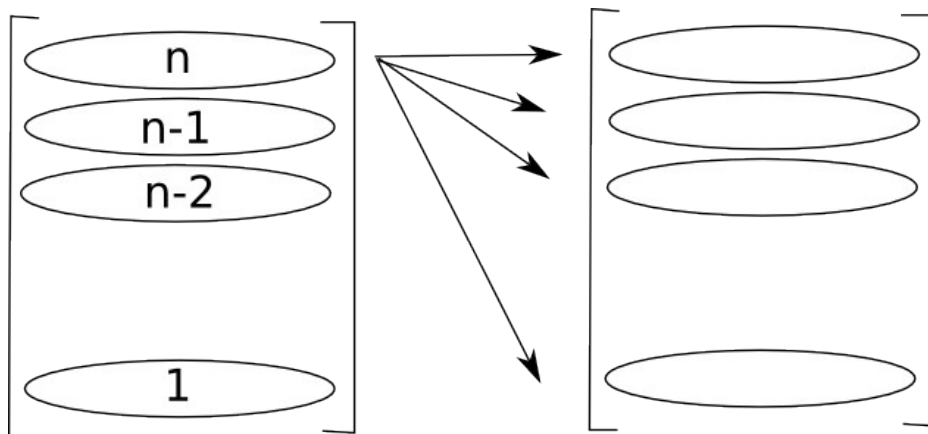
Dois grafos são isomorfos se e somente se seus complementares também o forem.



Note que no primeiro grafo os vértices de grau 2 são adjacentes, o que não ocorre no segundo.

Teorema: $G_1 \cong G_2 \Leftrightarrow A_1 = A_2$ para alguma sequência de permutações de linhas e colunas.

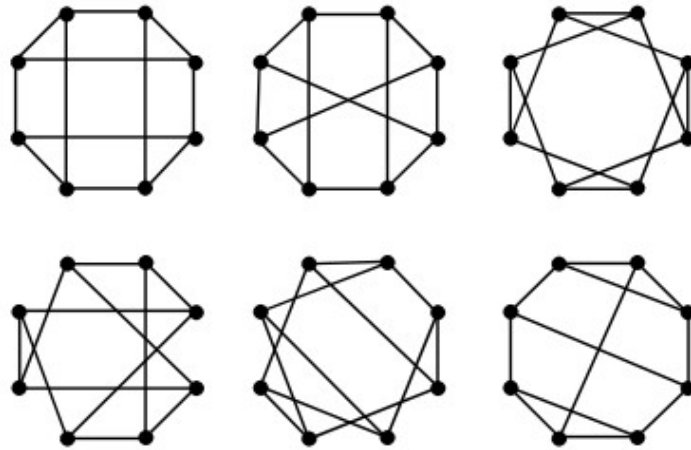
Algoritmo: Dadas duas matrizes de adjacências A1 e A2, permutar linhas e colunas de A1 de modo a chegar em A2. Em termos de complexidade, note que para as linhas temos o seguinte cenário



o que resulta num total de $n!$ possibilidades. O mesmo vale para as colunas, de forma que a

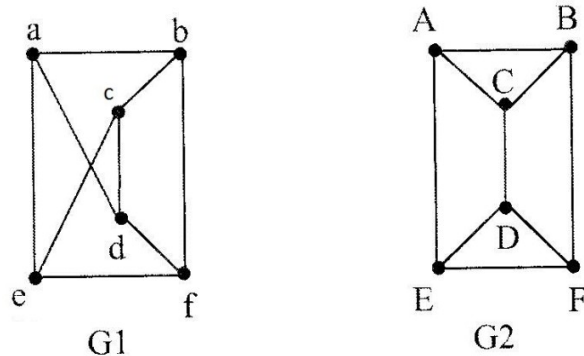
complexidade do algoritmo é da ordem de $O(n!)$, tornando o método inviável para a maioria dos grafos. Atualmente, ainda não se conhecem algoritmos polinomiais para esse problema. Para algumas classes de grafos o problema é polinomial (árvores, grafos planares). Esse é o primeiro dos problemas que veremos que ainda não tem solução: o problema do isomorfismo entre grafos pode ser resolvido em tempo polinomial? Não se conhece resposta completa para a pergunta.

Ex: Os seis grafos a seguir consistem objetos isomorfos. Identifique quais são isomorfos a quais.



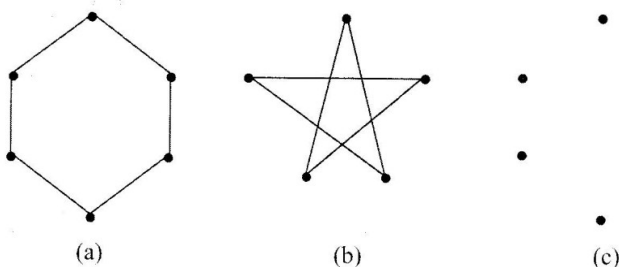
Ex: Os dois grafos a seguir são isomorfos ou não? Prove sua resposta.

c).



Ex: Um grafo simples G é chamado de autocomplementar se ele for isomorfo ao seu próprio complemento.

a) Quais dos grafos a seguir são autocomplementares?



b) Prove que, se G é um grafo autocomplementar com n vértices, então $n = 4t$ ou $n = 4t + 1$, para algum inteiro t (dica: considere o número de arestas do K_n).

Conectividade em grafos

Para fundamentar diversas propriedades de grafos é preciso apresentar aspectos relacionados a conectividade. Noções como componentes conexos e condições para conexidade são cruciais no estudo de tais objetos.

Def: Dois vértices u e v são conectados se existe um caminho P_{uv}

Def: G é conexo $\Leftrightarrow \forall u, v \in V (\exists \text{ caminho } P_{uv})$

Def: Componente conexo: subgrafo conexo máximo

Prop1: Todo grafo conexo tem $|E| \geq |V| - 1$

Prop2: Se $|E| \geq \binom{|V|-1}{2}$ então o grafo G é conexo

Prop3: Seja G é um grafo conexo. G é bipartido \Leftrightarrow Todo ciclo de G tem comprimento par

(ida) bipartido \rightarrow apenas ciclos pares

Se G é bipartido então toda aresta é (X, Y) . Se saio do lado X , único modo de voltar é passar por duas arestas, uma de X para Y e outra de Y para X . Isso implica que o comprimento de qualquer ciclo será múltiplo de 2.

Tabela verdade

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

(volta) apenas ciclos pares $\rightarrow G$ bipartido = G não bipartido \rightarrow existe ciclos ímpares

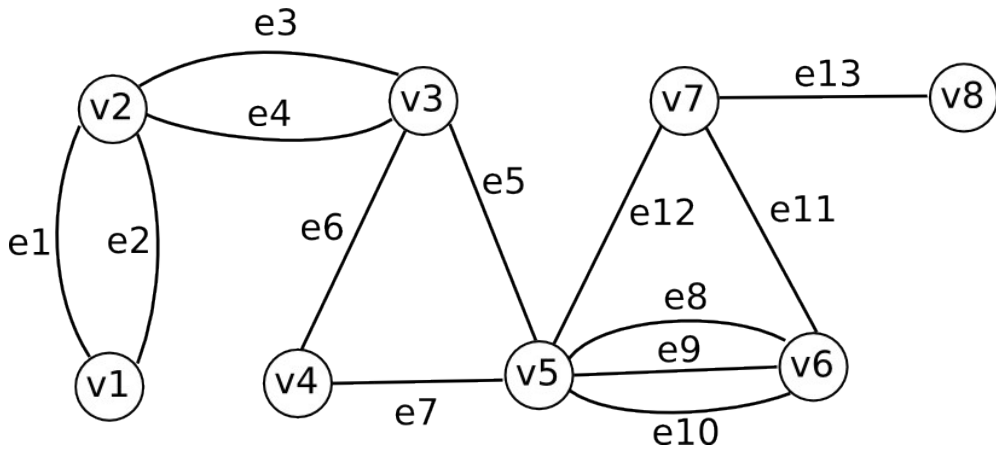
Se G não é bipartido, existe ao menos uma aresta (X, X) ou (Y, Y) , o que implica na existência de um triângulo em G (ciclo de comprimento 3).

Def: A distância geodésica entre u e v , denotada por $d(u,v)$ é o comprimento do menor caminho entre u e v

Métricas

a) Excentricidade de um vértice: $e(v) = \max\{d(v,u) \mid u, v \in V \wedge u \neq v\}$

Em palavras, é o quão longe posso chegar a partir do vértice v , andando apenas por caminhos mínimos (é a máxima distância geodésica de v a qualquer outro u). Maior menor caminho.



$e(v1) = 5$ $e(v2) = 4$ $e(v3) = 3$ $e(v4) = 3$
 $e(v5) = 3$ $e(v6) = 4$ $e(v7) = 4$ $e(v8) = 5$

b) Raio de um grafo: $r(G) = \min\{e(v) \mid v \in V\}$
 É a mínima excentricidade de um vértice
 $r(G) = 3$

c) Diâmetro de um grafo: $d(G) = \max\{e(v) \mid v \in V\}$
 É a máxima excentricidade de um vértice
 $d(G) = 5$

Obs: Diâmetro da internet e redes sociais (6 graus de separação)

Prop: $r(G) \leq d(G) \leq 2r(G)$

Pode ser verificado observando os casos extremos

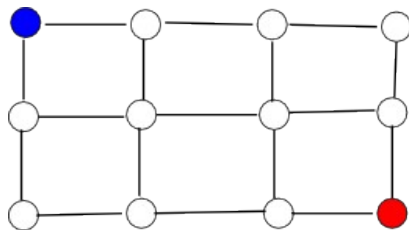
- i) o grafo mais compacto que existe: K_n (excentricidades dos vértices menor possível)
- ii) o grafo mais espalhado que existe (grafo caminho): P_n

Número de passeios

Em diversas ocasiões precisamos saber de quantas formas podemos nos locomover de um ponto a outro de um grafo (exemplo numa matriz que é mais fácil de ver)

Para sair do ponto azul e chegar no ponto vermelho há várias possibilidades. Alguns exemplos são E, E, E, B, B ou E, E, B, B, E ou E, E, B, E, B etc...

É fácil enumerar todas elas pois a grade retangular é um reticulado e possui um padrão bem definido. Mas e no caso de um grafo G qualquer?



Teorema: Seja A a matriz de adjacência de G e $A^k = A \cdot A \cdot A \cdot \dots \cdot A$. O elemento $a_{ij}^{(k)}$ da matriz A^k denota o número de passeios de tamanho k que existem entre v_i e v_j

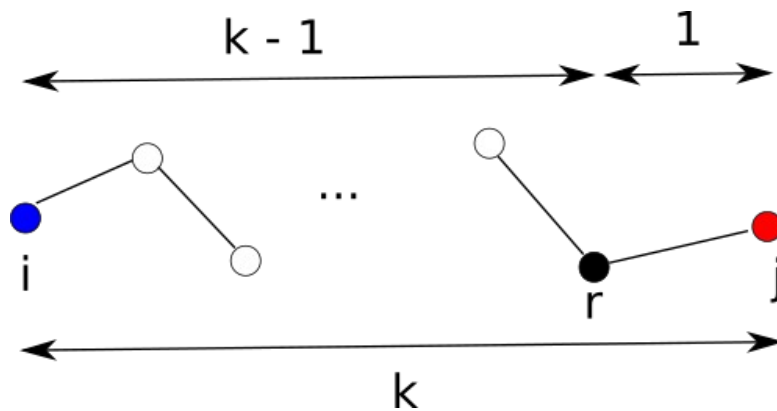
PROVA:

A prova é por indução em k (comprimento do passeio)

Passo 1: Para $k = 1$, trivialmente satisfeito pois $a_{ij}^{(1)}$ é o número de arestas entre v_i e v_j (base)

Passo 2: Assumir $k > 1$ e supor que afirmação é válida para $k - 1$. Mostrar que afirmação vale para k . (passo de indução)

i) Considere um passeio de tamanho k entre v_i e v_j



Note que tal passeio pode ser decomposto em 2 partes: um passeio de tamanho $k - 1$ de v_i a um vértice v_r vizinho a v_j e a aresta $v_r - v_j$

ii) Pela nossa suposição ($a_{ij}^{(k-1)}$ denota o número de passeios de tamanho $k - 1$ entre v_i e v_j), o número de possíveis passeios de tamanho $k - 1$ de v_i a um vizinho v_r de v_j é $a_{ir}^{(k-1)}$ (de A^{k-1}) e o número de passeios de tamanho 1 de v_r a v_j é a_{rj} (de A). Então o número de passeios de tamanho k de v_i a v_j via v_r (porta de entrada é v_r) é $a_{ir}^{(k-1)} a_{rj}$

iii) O número total de passeios de tamanho k entre v_i e v_j pode ser obtido computando o termo anterior para todas as possíveis portas de entrada em v_j , ou seja:

$$a_{i1}^{(k-1)} a_{1j} + a_{i2}^{(k-1)} a_{2j} + a_{i3}^{(k-1)} a_{3j} + \dots + a_{ir}^{(k-1)} a_{rj} + \dots + a_{in}^{(k-1)} a_{nj}$$

Note que se um vértice w não é porta de entrada para v_j então $a_{wj} = 0$ o que automaticamente anula o valor da parcela.

A equação anterior é justamente o elemento a_{ij} da matriz A^k pois

$$\begin{array}{c}
 \text{coluna } j \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 & & & \\
 & & & \\
 \text{linha } i & & & \\
 a_{i1}^{(k-1)} & a_{i2}^{(k-1)} & \dots & a_{in}^{(k-1)}
 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c}
 a_{1j} \\
 a_{2j} \\
 \vdots \\
 a_{nj}
 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \dots a_{ij}^{(k)} \dots \\
 \vdots
 \end{array} \right] \\
 A^{(k-1)} \quad A \quad A^{(k)}
 \end{array}$$

Então, como a partir da suposição de que a afirmação é válida para $k - 1$, verificamos sua validade para k , a prova por indução está completa.

Cadeias de Markov e Random Walks

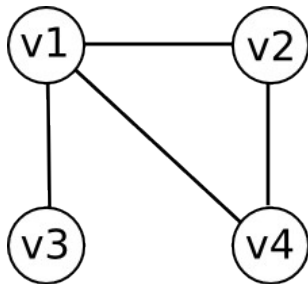
Random Walks

Cenário: Andar do bêbado

Seja $G = (V, E)$ um grafo básico simples com matriz de adjacência A . Então, podemos definir a matriz P como segue:

$$P = \Delta^{-1} A \quad \text{onde} \quad \Delta^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d(v_1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d(v_2)} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d(v_n)} \end{bmatrix}$$

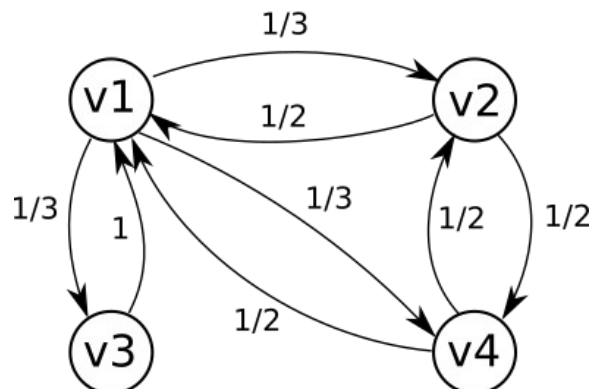
Ex:



$$P = \Delta^{-1} A = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que P não é simétrica! (Ela não define um grafo mas sim um dígrafo)

Diagrama de estados de P



Note que isso significa que, para todo i, j temos:

$$p_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_j a_{ij}} = \frac{a_{ij}}{d(v_i)}$$

ou seja, $p_{ij} \in [0, 1]$ (representa a probabilidade de sair de i e chegar em j com uma única aresta)

Chamamos P de matriz de probabilidades de transição de estados, pois ela define um processo aleatório conhecido como Cadeia de Markov. Toda matriz P pode ser representada graficamente por um diagrama de estados.

Cadeias de Markov Homogêneas

Def: Uma cadeia de Markov homogênea de estados finitos e tempo discreto pode ser definida pela tupla:

$$CM = (S, X_k, P, \vec{w}^{(k)}) \quad \text{onde}$$

- i) $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ é o conjunto de estados
- ii) X_k é uma variável aleatória que assume valores em S
- iii) $\vec{w}^{(k)}$ é um vetor de probabilidades de cada estado no tempo k .

$$\vec{w}^{(k)} = [p(X_k = s_0), p(X_k = s_1), p(X_k = s_2), p(X_k = s_3), \dots, p(X_k = s_n)]$$

o i -ésimo elemento de $\vec{w}^{(k)}$ denota a probabilidade de no tempo k estarmos no estado s_i

$\vec{w}^{(0)}$: probabilidade de iniciar o processo em cada estado: na analogia com autômatos finitos ao invés de um único estado inicial, podemos ter vários mas com diferentes probabilidades

Note que sempre devemos ter $\sum_i w_i = 1$

iv) P é a matriz de probabilidades de transição de estados (função de transição do autômato) CM homogênea significa que a matriz P não muda no tempo.

Porque uma matriz?

Propriedade Markoviana (cadeia de Markov): o futuro só depende do presente e não do passado anterior

Para uma sequência $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$ de observações a probabilidade conjunta é dada por:

$$\begin{aligned} P(X_0, X_1, X_2, \dots, X_n) &= \prod_{t=0}^n P(X_t | X_0, X_1, \dots, X_{t-1}) \\ &= P(X_0) P(X_1 | X_0) P(X_2 | X_0, X_1) P(X_3 | X_0, X_1, X_2) \dots P(X_T | X_0, X_1, X_2, \dots, X_{T-1}) \end{aligned}$$

Se processo é Markoviano (sem memória) então:

$$P(X_T | X_0, X_1, X_2, \dots, X_{T-1}) = P(X_T | X_{T-1})$$

A probabilidade de estar no estado T dado que passei por 0, 1, 2, ... T-1 só depende do último estado em que estive: T-1 (cadeias de Markov de primeira ordem podem ser representadas por matrizes de transição em que a probabilidade de transicionar de i para j é dado por $P_{ij} = P(X_j | X_i)$)

Em outras palavras, a probabilidade de eu acessar um estado s3 no tempo t não depende do histórico todo mas apenas de onde eu estava no tempo anterior

Equações de Chapman-Kolmogorov

Na forma vetorial, a relação entre distribuição de probabilidades dos estados no tempo k e k-1 pode ser expressa por uma equação linear, dada por:

$$\vec{w}^{(k)} = \vec{w}^{(k-1)} P$$

Ex: Matriz de Oz

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} R & C & S \end{matrix} \\ \begin{matrix} R \\ C \\ S \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} R \\ C \\ S \end{matrix} \quad \text{3 estados: R (rain), C (cloud), S (sun)}$$

Supor $\vec{w}^{(0)} = [0, 0, 1]$ (começa com dia de sol), o que vai acontecer no longo prazo, ou seja, quem será $\vec{w}^{(k)}$ para $k \rightarrow \infty$. Distribuição converge ou diverge? Depende diretamente de propriedades matemáticas relacionadas as componentes do modelo.

Def: Uma CM homogênea é irredutível se é possível atingir qualquer estado i a partir de qualquer outro j.

Def: Uma CM homogênea é aperiódica se $\exists k | P^k$ contém apenas elementos não nulos

Def: Se um CM homogênea é irredutível e aperiódica então ela é ergódica

Pode-se mostrar que caminhadas aleatórias em grafos não direcionados satisfazem:

i) P é irredutível \Leftrightarrow G é conexo

ii) P é aperiódica \Leftrightarrow G não é bipartido

iii) P é reversível, isto é atinge o equilíbrio (no equilíbrio a matriz P se comporta como simétrica)

Obs: Na prática para determinar se CMH é ergódica basta gerar a matriz P e computar P^k , para k suficientemente grande. Se todos os seus elementos forem não nulos, CMH é ergódica.

Teorema Fundamental das CM's

Seja P a matriz de transição de uma CM homogênea ergódica. Então a distribuição estacionária existe, é única e:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P^k \text{ com } W = \begin{bmatrix} \vec{w}^{(k)} \\ \dots \\ \vec{w}^{(k)} \end{bmatrix} \text{ onde } \vec{w}^{(k)} \text{ é a distribuição estacionária}$$

Obs: Note que $\vec{w}^{(k)}$ não depende de $\vec{w}^{(0)}$ (de onde começo).

Power Method

Método iterativo para obter a distribuição de probabilidades dos estados num tempo k.

$$\vec{w}^{(k)} = \vec{w}^{(k-1)} P = (\vec{w}^{(k-2)} P) P = ((\vec{w}^{(k-3)} P) P) P = \dots$$

$$\vec{w}^{(k)} = \vec{w}^{(0)} P^k$$

Solução analítica

Pode-se mostrar que no caso de CM's ergódicas é possível computar a distribuição estacionária teórica (analítica). Por exemplo, no caso de caminhadas aleatórias em grafos não direcionados, conexos e não bipartidos podemos obter $\vec{w}^{(k)}$ sem adotar o método iterativo.

No equilíbrio temos (pois a CMH é reversível - função de transição se comporta como se fosse simétrica):

$$w_i p_{i,j} = w_j p_{j,i} \quad (\text{prob. de estar em } i \text{ e trans. para } j = \text{prob. de estar em } j \text{ e trans. de } j \text{ para } i)$$

Da matriz P sabemos que $p_{i,j} = \frac{1}{d(v_i)}$ então:

$$w_i \frac{1}{d(v_i)} = w_j \frac{1}{d(v_j)} = K$$

Assim, temos:

$$w_i = K d(v_i) \quad (*)$$

Somando ambos os lados em relação a i:

$$\sum_{i=1}^n w_i = K \sum_{i=1}^n d(v_i)$$

Pelo Handshaking Lema, a equação anterior fica:

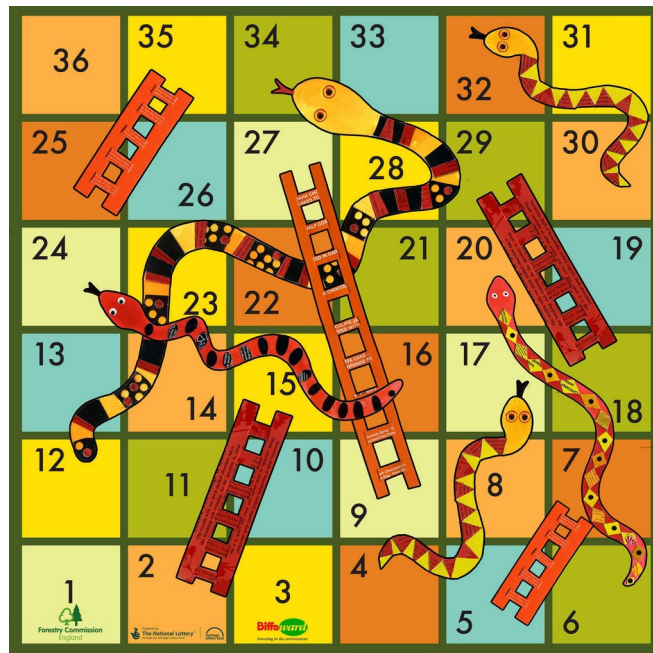
$$1 = K \frac{2|E|}{2|E|} \quad \text{ou seja,} \quad K = \frac{1}{2|E|}$$

Portanto, de (*) temos que a distribuição estacionária é dada por:

$$\vec{w} = \left[\frac{d(v_1)}{2|E|}, \frac{d(v_2)}{2|E|}, \dots, \frac{d(v_n)}{2|E|} \right]$$

onde $|E|$ é o número de arestas.

Snakes and Ladders



Snakes and Ladders é um jogo de tabuleiro em que a cada rodada um jogador joga uma moeda não viciada e avança 1 casa se obtiver cara ou avança 2 casas se obtiver coroa. Se o jogador para no pé da escada, então ele imediatamente sobe para o topo da escada. Se o jogador cai na boca de um cobra então ele imediatamente escorrega para o rabo. O jogador sempre inicia no quadrado de número 1. O jogo termina quando ele atinge o quadrado de número 36. Com base nas informações, responda:

- a) Especifique o diagrama de estados da cadeia de Markov que representa o jogo, computando para isso a matriz de transição de estados P . O que podemos dizer sobre o estado 36?
- b) Implemente um programa/script para calcular a distribuição estacionária da cadeia de Markov homogênea em questão. Qual é a probabilidade de um jogador vencer o jogo, ou seja, qual a probabilidade de se atingir o estado 36 no longo prazo? Considere $k = 50$ um número suficiente de iterações no Power Method. Utilize outros vetores iniciais e observe o comportamento do método.

O Modelo Pagerank

Motivação: Caminhadas aleatórias em dígrafos (i.e., internet)

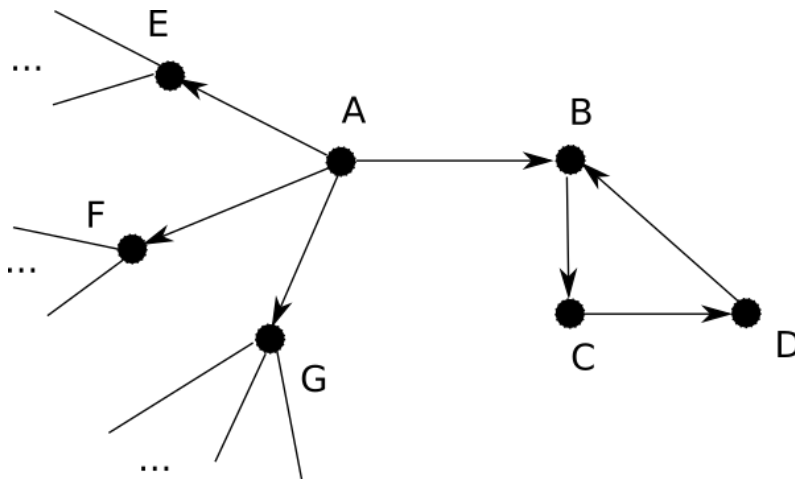
Problema: CM não é irredutível nem aperiódica, distribuição estacionária $\vec{w}^{(k)}$ não é única (depende diretamente de onde começa: $\vec{w}^{(0)}$)

É preciso ajustar o modelo padrão para resolver problemas:

a) Presença de *dangling nodes* (pontos sem saída): estados absorventes, uma vez acessado nunca mais sairá.

Solução: permitir eventuais saltos, com pequena probabilidade
Ligar todos os nós com todos com probabilidade uniforme ($1/n$)

b) Pode não existir k tal que seja possível estar em qualquer estado com probabilidade não nula (ficamos presos em um subgrafo, o que torna a caminhada periódica)



Se inicio em A em $t = 0$ e vou para B em $t = 1$, caminhada fica periódica (BCDBCDBC...)

Solução: permitir loops (posso permanecer num estado com uma dada probabilidade)
Introduzir elementos não nulos na diagonal de P

Ideia geral: processo estocástico que modela um navegador que
- realiza uma caminhada aleatória padrão com probabilidade $(1-\alpha)$
- salta para um estado aleatório com probabilidade α (teleporte)

Pode-se mostrar que esse processo é equivalente a modelar uma CM caracterizada pela seguinte matriz de transição

$$\bar{P} = (1-\alpha)P + \alpha \frac{1}{n}U \quad (\text{Google matrix}) \text{ onde}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \text{ denota uma matriz } n \times n \text{ de 1's e } \alpha \in [0,1]$$

Resumo

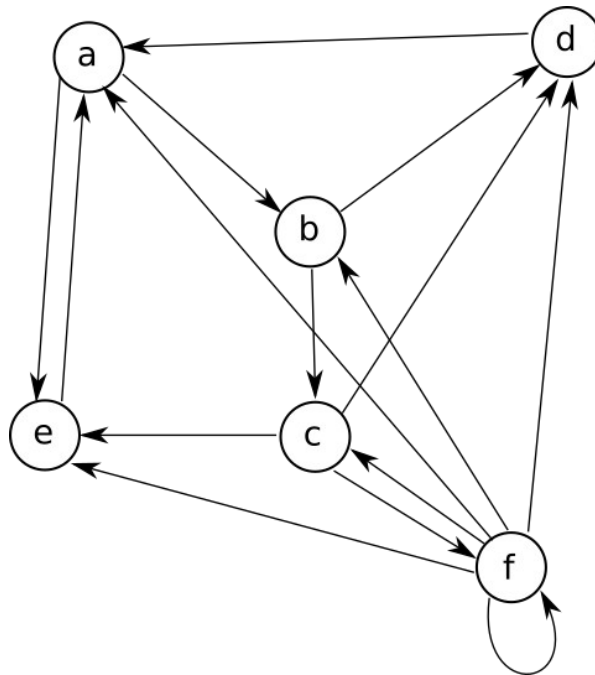
G (digrafo) $\rightarrow A$ (mat. adj.) $\rightarrow P$ (probs. RW padrão) $\rightarrow \bar{P}$ (escolhido α)

Observações:

- $\alpha=0 \rightarrow \bar{P}=P$ (RW padrão)
Distribuição estacionária depende de $\vec{w}^{(0)}$ (não é única)
- $\alpha=1 \rightarrow$ distribuição estacionária totalmente não informativa (descarta completamente a topologia de G)

Objetivo: encontrar compromisso entre os casos limites

Ex:



De posse do grafo, geramos a matriz de transição de probabilidade P .

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$$

Obs: Se $\exists v \in V | d_{(out)} = 0$ (dangling node)

$$P = P + \frac{1}{n} \vec{z} \vec{u}^T \quad (\text{na prática preenche a linha de zeros com } 1/n)$$

onde $\vec{u}^T = [1, 1, 1, \dots, 1]$ (vetor de 1's) e $\vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$ (indicador de quais linhas são nulas)

=> Em resumo, as linhas de P onde todos os elementos são nulos, terão valor igual a $\frac{1}{n}$

Vamos considerar um valor de $\alpha = 0.15$.

$$\bar{P} = 0.85P + 0.15 \frac{1}{6}U$$

$$\text{Linha 1: } \frac{85}{100} \frac{1}{2} + \frac{15}{100} \frac{1}{6} = \frac{85}{200} + \frac{5}{200} = \frac{90}{200} = \frac{18}{40} \quad \text{e} \quad \frac{15}{100} \frac{1}{6} = \frac{5}{200} = \frac{1}{40}$$

$$\text{Linha 2: } \frac{85}{100} \frac{1}{2} + \frac{15}{100} \frac{1}{6} = \frac{85}{200} + \frac{5}{200} = \frac{90}{200} = \frac{18}{40} \quad \text{e} \quad \frac{15}{100} \frac{1}{6} = \frac{5}{200} = \frac{1}{40}$$

$$\text{Linha 3: } \frac{85}{100} \frac{1}{3} + \frac{15}{100} \frac{1}{6} = \frac{85}{300} + \frac{5}{200} = \frac{185}{600} = \frac{37}{120} \quad \text{e} \quad \frac{15}{100} \frac{1}{6} = \frac{5}{200} = \frac{1}{40} = \frac{3}{120}$$

$$\text{Linha 4: } \frac{85}{100} + \frac{15}{100} \frac{1}{6} = \frac{85}{100} + \frac{5}{200} = \frac{175}{200} = \frac{35}{40} \quad \text{e} \quad \frac{15}{100} \frac{1}{6} = \frac{5}{200} = \frac{1}{40}$$

$$\text{Linha 5: } \frac{85}{100} + \frac{15}{100} \frac{1}{6} = \frac{85}{100} + \frac{5}{200} = \frac{175}{200} = \frac{35}{40} \quad \text{e} \quad \frac{15}{100} \frac{1}{6} = \frac{5}{200} = \frac{1}{40}$$

$$\text{Linha 6: } \frac{85}{100} \frac{1}{6} + \frac{15}{100} \frac{1}{6} = \frac{85}{600} + \frac{15}{600} = \frac{100}{600} = \frac{1}{6}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1/40 & 18/40 & 1/40 & 1/40 & 18/40 & 1/40 \\ 1/40 & 1/40 & 18/40 & 18/40 & 1/40 & 1/40 \\ 3/120 & 3/120 & 3/120 & 37/120 & 37/120 & 37/120 \\ 35/40 & 1/40 & 1/40 & 1/40 & 1/40 & 1/40 \\ 35/40 & 1/40 & 1/40 & 1/40 & 1/40 & 1/40 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$$

Note que todas as linhas somam 1.

Essa matriz modela uma CM irreduzível e aperiódica, de modo que agora a distribuição estacionária é única e não depende de $\vec{w}^{(0)}$. Na prática isso significa que o ranking de pageranks é único. Seria um problema para o Google por exemplo se os rankings das páginas com maiores pageranks fosse dependente da inicialização. Cada dia teríamos um diferente, inconsistência seria grande.

Para se chegar na distribuição estacionária, basta aplicar o Power Method: $\vec{w}^{(k)} = \vec{w}^{(k-1)} \bar{P}$

Pergunta: Existe solução analítica ou preciso usar o Power method?

Note que no equilíbrio, isto é, quando a distribuição estacionária converge temos:

$$\vec{w} = \vec{w} \bar{P}$$

$$\vec{w} = \vec{w} \left[(1-\alpha)P + \alpha \frac{1}{n} U \right]$$

$$\vec{w} = (1-\alpha) \vec{w} P + \alpha \frac{1}{n} \vec{w} U$$

Como $\vec{w} U = [1, 1, 1, \dots, 1] = \vec{u}$ e sabendo que I denota a matriz identidade temos:

$$I \vec{w} = (1-\alpha) \vec{w} P + \alpha \frac{1}{n} \vec{u}$$

$$I \vec{w} - (1-\alpha) \vec{w} P = \alpha \frac{\vec{u}}{n}$$

$$I \vec{w} - (1-\alpha) \vec{w} P = \alpha \frac{\vec{u}}{n}$$

o que finalmente nos leva a:

$$\vec{w} = \alpha \frac{\vec{u}}{n} [I - (1-\alpha)P]^{-1}$$

Assim, embora exista uma solução analítica ela é inviável devido a necessidade de inversão da matriz. Imagine inverter uma matriz referente a internet toda! É computacionalmente inviável.

Interpretação do Pagerank

Pode-se reescrever \vec{w} de modo a expressar a soma de uma P.G. infinita. Note que

$$S_{\infty} = \frac{1}{1-q} = (1-q)^{-1} \quad \text{onde } q \text{ é a razão da progressão geométrica}$$

Identificando a razão como sendo $(1-\alpha)P$ temos:

$$[I - (1-\alpha)P]^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} [(1-\alpha)P]^k$$

o que nos leva a:

$$\vec{w} = \alpha \frac{\vec{u}}{n} \sum_{k=1}^{\infty} (1-\alpha)^k P^k = \frac{\vec{u}}{n} [(1-\alpha)P + (1-\alpha)^2 PP + (1-\alpha)^3 PPP + \dots] \alpha$$

$\frac{\vec{u}}{n}$ probabilidade uniforme de escolher uma página aleatória

$[(1-\alpha)P + (1-\alpha)^2 PP + (1-\alpha)^3 PPP + \dots]$ probabilidade de navegar com 1, 2, 3, ..., K passos

α probabilidade de saltar/parar

Essa expressão fornece a interpretação conhecida como “The Impatient Surfer”, onde os coeficientes w_i representam as probabilidades de um usuário qualquer tendo iniciado sua navegação em uma página arbitrária, parar exatamente na página i .

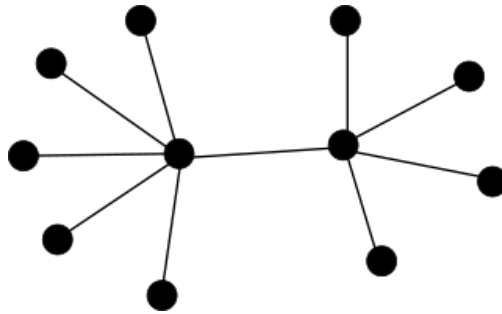
Convergência: quão rápido \vec{w} se aproxima da distribuição estacionária?

Pode-se mostrar que a taxa de convergência para \vec{w} depende de λ_2 , ou seja, o segundo maior autovalor da matriz \bar{P} . Quanto maior λ_2 melhor. Além disso, pode-se verificar que $|\lambda_2| \leq (1-\alpha)$. Em geral, temos $\alpha=0.1$, $\alpha=0.15$

Árvores

Árvores são grafos especiais com diversas propriedades únicas. Devido a essas propriedades são extremamente importantes na resolução de vários tipos de problemas práticos. Veremos ao longo do curso que vários problemas que estudaremos se resumem a: dado um grafo G , extrair uma árvore T a partir de G , de modo que T satisfaça uma certa propriedade (como por exemplo, mínima profundidade, máxima profundidade, mínimo peso, mínimos caminhos, etc).

Def: Um grafo $G = (V, E)$ é uma árvore se G é acíclico e conexo.



Teoremas e propriedades

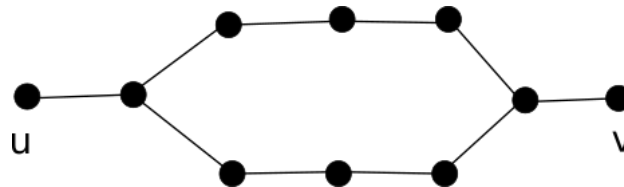
Teorema: G é uma árvore $\Leftrightarrow \exists$ um único caminho entre quaisquer 2 vértices $u, v \in V$

(ida) $p \rightarrow q = !q \rightarrow !p$

\nexists um único caminho entre quaisquer $u, v \rightarrow G$ não é uma árvore

a) Pode existir um par u, v tal que \nexists caminho (zero caminhos). Isso implica em G desconexo, o que implica que G não é uma árvore

b) Pode existir um par u, v tal que \exists mais de um caminho.

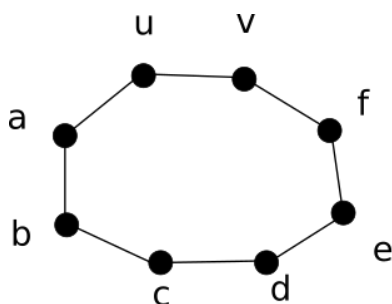


Porém neste caso temos a formação de um ciclo e portanto G não pode ser árvore.

(volta) $q \rightarrow p = !p \rightarrow !q$

G não é árvore $\rightarrow \nexists$ único caminho entre quaisquer u, v

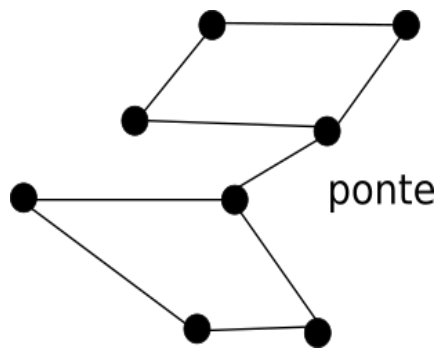
Para G não ser árvore, G deve ser desconexo ou conter um ciclo. Note que no primeiro caso existe um par u, v tal que não há caminho entre eles. Note que no segundo caso existem 2 caminhos entre u e v , conforme ilustra a figura



$P1 = uv$

$P2 = uabcdefv$

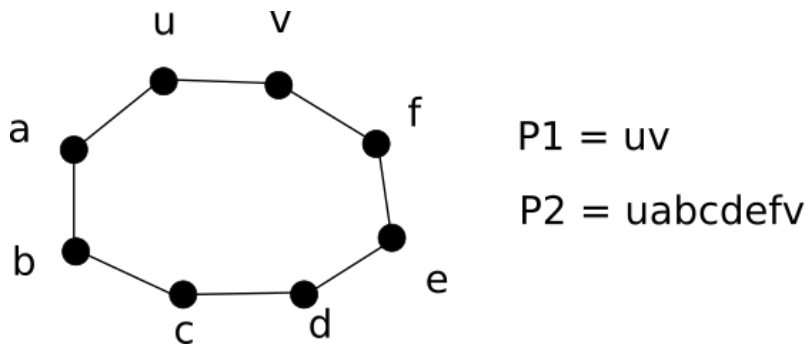
Def: Uma aresta $e \in E$ é ponte se $G - e$ é desconexo
 Ou seja, a remoção de uma aresta ponte desconecta o grafo



Como identificar arestas ponte?

Teorema: Uma aresta $e \in E$ é ponte \Leftrightarrow aresta não pertence a um ciclo C

(ida) $p \rightarrow q = !q \rightarrow !p$
 $e \in C \rightarrow$ aresta não é ponte



Como aresta pertence a um ciclo C , há 2 caminhos entre u e v . Logo a remoção da aresta $e = (u,v)$ não impede que o grafo seja conexo, ou seja, $G - e$ ainda é conexo. Portanto, e não é ponte

(volta) $q \rightarrow p = !p \rightarrow !q$
 aresta não é ponte $\rightarrow e \in C$

Se aresta não é ponte então $G - e$ ainda é conexo. Se isso ocorre, deve-se ao fato de que em $G - e$ ainda existe um caminho entre u e v que não passa por e . Logo, em G existem 2 caminhos, o que nos leva a conclusão de que a união entre os 2 caminhos gera um ciclo C .

Teorema: G é uma árvore \Leftrightarrow Toda aresta é ponte

(ida) $p \rightarrow q = !q \rightarrow !p$
 \exists aresta não ponte $\rightarrow G$ não é árvore

A existência de uma aresta não ponte implica na existência de ciclo. A presença de um ciclo C faz com que G não seja um árvore

(volta) $q \rightarrow p = !p \rightarrow !q$
 G não é árvore $\rightarrow \exists$ aresta não ponte

Para G não ser uma árvore, deve existir um ciclo em G . Logo, todas as arestas pertencentes ao ciclo não são pontes.

Teorema: Se $G = (V, E)$ é uma árvore com $|V| = n$ então $|E| = n - 1$

Prova por indução

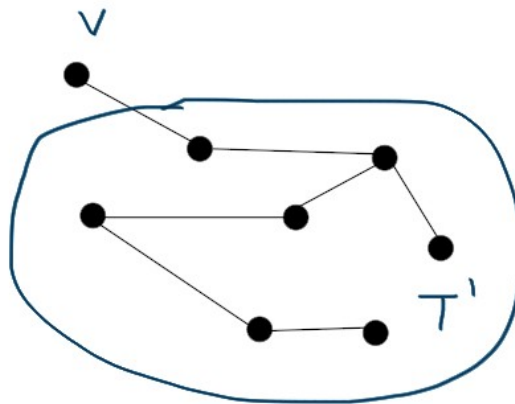
$P(n)$: Toda árvore de n vértices tem $n - 1$ arestas

Base: $P(1)$: $n = 1 \rightarrow 0$ arestas (OK)

Passo de indução: $P(k) \rightarrow P(k+1)$ para k arbitrários

$P(k+1)$: Toda árvore de $n + 1$ vértices tem n arestas

1. Seja $T = (V_T, E_T)$ com $|V_T| = n + 1$
2. Seja $v \in V_T$ uma folha em T
3. Seja $T' = (V'_T, E'_T)$ a árvore obtida removendo v e a única aresta incidente a v : $T' = T - v$



4. Note que T' é uma árvore, pois como T é conexo, T' também é e como T é acíclico, T' também é. Logo, podemos dizer que $T' = (V'_T, E'_T)$ possui n' vértices e m' arestas: $|V'_T| = n'$ e $|E'_T| = m'$.
5. Mas pela hipótese de indução, toda árvore de n' vértices tem $n' - 1$ arestas, então $m' = n' - 1$
6. Como T' tem exatamente uma aresta e um vértice a menos que T :

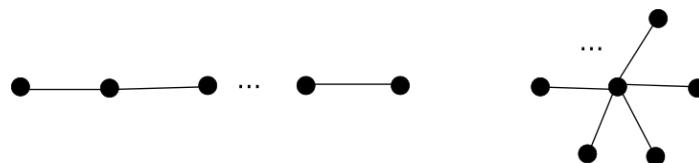
$$m' = m - 1 = n' - 1 = (n - 1) - 1$$

o que implica em $m - 1 = n - 1 - 1$, ou seja, $m = n - 1$. A prova está concluída.

Teorema: A soma dos graus de uma árvore de n vértices não depende da lista de graus, sendo dada por $2n - 2$

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2|E| = 2(n - 1) = 2n - 2$$

Ex:



$$L_1 = (1, 1, 2, 2, 2, \dots, 2)$$

$$L_2 = (1, 1, \dots, 1, n-1)$$

Teorema: Seja $T = (V, E)$ uma árvore. Então, $T + e$, em que e é uma aresta que não pertence ao conjunto E , contém exatamente um único ciclo.

Prova: Como T é árvore, T é acíclico (0 ciclos). Como T é árvore, T é conexo. Além disso, sabemos que existe um único caminho entre quaisquer dois vértices u e v . Seja e a aresta (u,v) . Haverá exatamente dois caminhos entre u e v , o que significa que temos um ciclo C . Portanto, $T + e$ tem exatamente 1 ciclo.

Teorema: Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo com $|V| = n$ e $|E| = m$. Se $m \geq n$, então G contém um ciclo.

$$m \geq n \rightarrow 2m \geq 2n$$

Mas $2m$ é a soma dos graus, ou seja:

$$\sum_{v \in V} d(v) \geq 2n$$

o que é o mesmo que

$$\sum_{v \in V} d(v) \geq 2(n-1) + 2$$

Isso implica em dizer que a soma dos graus nesse grafo é igual a $2(n-1)$, o mesmo de uma árvore, mais duas unidades. Isso significa que temos uma árvore T adicionada de pelo menos uma aresta e . Pelo teorema anterior, isso significa que existe ao menos um ciclo em G .

Teorema: Toda árvore com mais de 1 vértice possui ao menos 2 folhas (vértices de grau 1)

Prova por contradição:

Suponha que exista ao menos um vértice v tal que $d(v) = 1$

Caso a) $\nexists v \in V \mid d(v) = 1$

1. Sabemos que $|E| = n - 1$

2. Logo, $\sum_{v \in V} d(v) = 2(n-1)$ (pois T é árvore)

3. Mas, nesse caso, todos os vértices tem $d(v) \geq 2$, ou seja a soma dos graus deve ser maior ou igual a $2n$

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2(n-1) \geq 2n \quad (\text{contradição})$$

Caso b) Existe apenas um vértice v tal que $d(v) = 1$

1. Como no caso anterior, sabemos que $\sum_{v \in V} d(v) = 2(n-1)$ (pois T é árvore)

2. Mas, como temos $(n-1)$ vértices com $d(v) \geq 2$, a soma dos graus deve ser maior ou igual a $2(n-1) + 1$

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2(n-1) \geq 2(n-1) + 1 \quad (\text{contradição})$$

Portanto, sempre haverá ao menos duas folhas em uma árvore.

Teorema: Toda árvore T é um grafo bipartido.

1. Escolha um vértice raiz v
2. Seja u um vértice arbitrário de T
3. Como T é árvore, existe um único caminho P_{uv}
4. Seja $f(u)$ o comprimento do caminho P_{uv} e defina

$$V_I = \{u \in V \mid f(u) \text{ é ímpar}\}$$

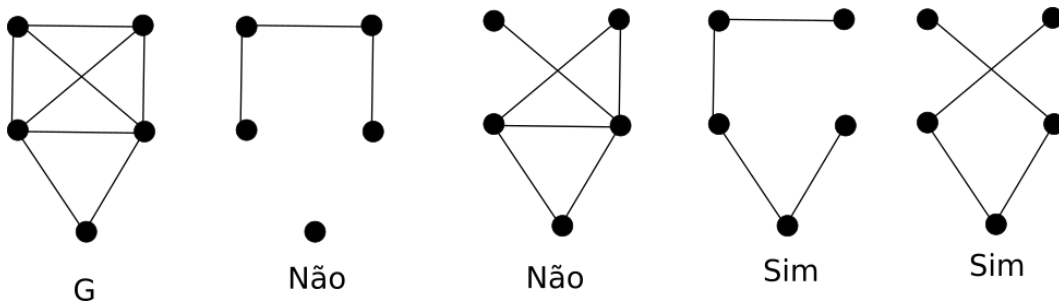
$$V_P = \{u \in V \mid f(u) \text{ é par}\}$$

5. Note que $V_I \cap V_P = \emptyset$ e $V_I \cup V_P = V$, de modo que temos uma bipartição.
6. Como T não possui ciclos, toda aresta de T tem uma extremidade em V_I e outra em V_P .
7. Portanto, T é bipartido.

Dentre as árvores que podem ser extraídas a partir de um grafo, há um tipo que é sem dúvidas o mais importante: as árvores geradoras. Em resumo, uma árvore geradora representa uma forma resumida de representar um grafo G pois há um e apenas um caminho entre qualquer par de vértices.

Def: **Árvore geradora (spanning tree)**

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Dizemos que $T = (V, E_T)$ é uma árvore geradora de G se T é um subgrafo de G que é uma árvore (ou seja tem que conectar todos os vértices)



Teorema: Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo. Uma aresta $e \in E$ é uma ponte se e somente se ela pertence a toda árvore geradora de G .

$p \leftrightarrow q$

Parte 1 (ida): $p \rightarrow q = !q \rightarrow !p$ (prova por contrapositiva)

existe árvore geradora que não contém aresta $e \rightarrow e$ não é ponte

1. Seja T uma árvore geradora que não contém a aresta e
2. Então, T também é árvore geradora de $G - e$
3. Para quaisquer u e v arbitrários em T , existe um único caminho P_{uv} em T
4. Mas esse caminho P_{uv} também existe em $G - e$
5. Logo, $G - e$ é conexo.
6. Portanto, e não pode ser ponte (sua remoção não desconecta o grafo)

Parte 2 (volta): $q \rightarrow p = !p \rightarrow !q$ (prova por contrapositiva)

e não é ponte \rightarrow existe árvore geradora T que não contém e

1. Suponha uma aresta e não ponte
2. Então, $G - e$ é conexo e existe T que é árvore geradora de $G - e$

3. Como o conjunto de vértices de G é igual ao conjunto de vértices de $G - e$, T é árvore geradora de G também (note que T não contém e)

Como pode ser visto, um grafo G admite inúmeras árvores geradoras. A pergunta que surge é: Quantas árvores geradoras existem num grafo $G = (V, E)$ de n vértices?

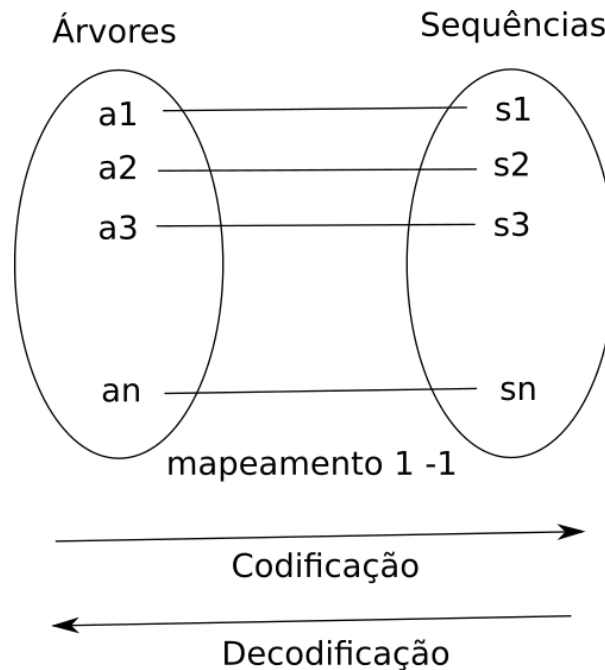
Para entender a resposta dessa pergunta iremos discutir o código de Prüfer.

Código de Prüfer

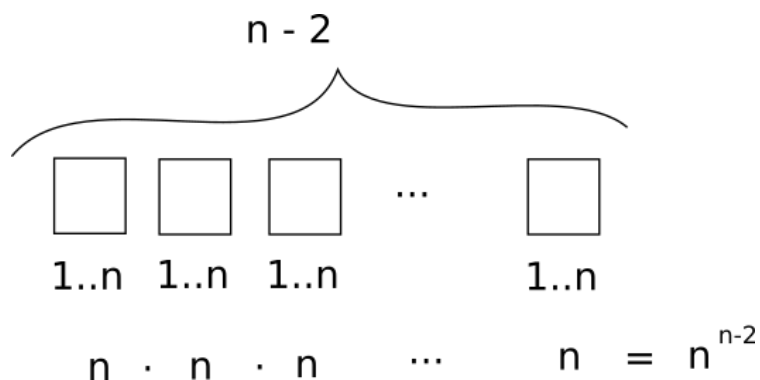
Trata-se de um método para compressão de dados.

Dada uma rotulação dos vértices, é um código que identifica unicamente cada possível árvore com $n > 2$ vértices. É como se fosse o CPF de uma árvore, cada possível árvore distinta tem o seu próprio código único.

Foi descoberto que existe uma bijeção entre o conjunto das árvores de n vértices e o conjunto de sequencias de inteiros de tamanho $n - 2$



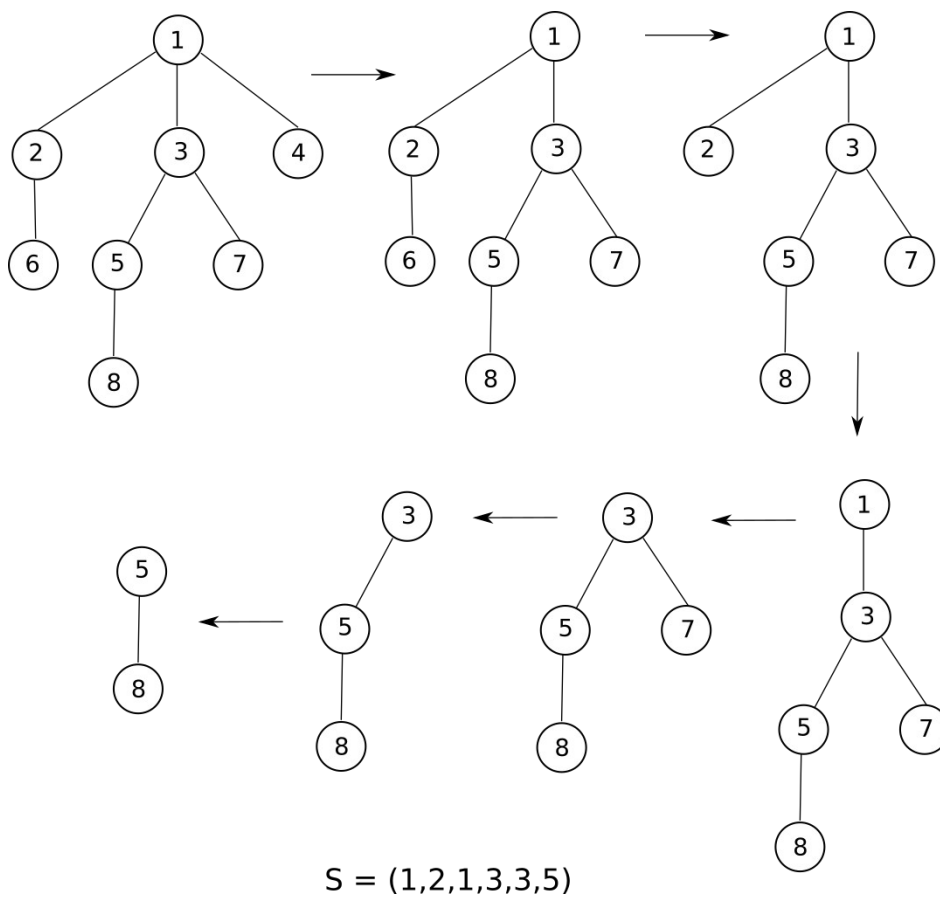
Cada sequencia é composta por $n - 2$ inteiros que podem assumir valores de 1 até n



Teorema de Cayley: O grafo K_n tem n^{n-2} árvores geradoras
 Ou seja, isso significa que o número de árvores de n vértices é n^{n-2}
 A seguir, iremos apresentar os algoritmos para codificação e decodificação.

Algoritmo: Codificação de Prüfer
 Entrada: árvore T

- 1) Rotular cada vértice da árvore com um número inteiro distinto
- 2) O vértice v incidente à folha de menor rótulo é único. Identificar v .
 (v é a resposta para a seguinte pergunta: quem é o pai da folha de menor rótulo?)
- 3) O rótulo de v é adicionado a uma lista S e a folha é removida da árvore
- 4) Repetir passos 2 e 3 até que reste apenas um único vértice ou aresta



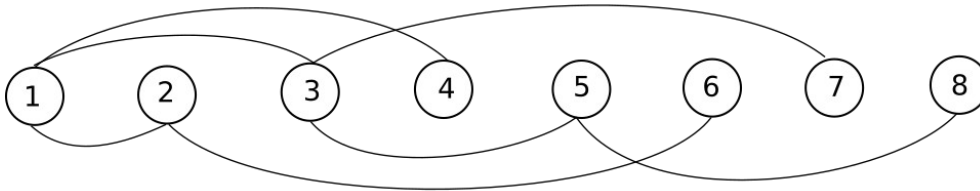
Algoritmo: Decodificação de Prüfer
 Entrada: Código C

- 1) Representar a árvore inicial como o grafo nulo de n vértices
- 2) Definir o conjunto $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$
- 3) Buscar em S o menor inteiro que não está no código C . Chamaremos esse número de s_{\min}
- 4) Adicionar à árvore T a aresta formada pelo elemento mais a esquerda de C e s_{\min}

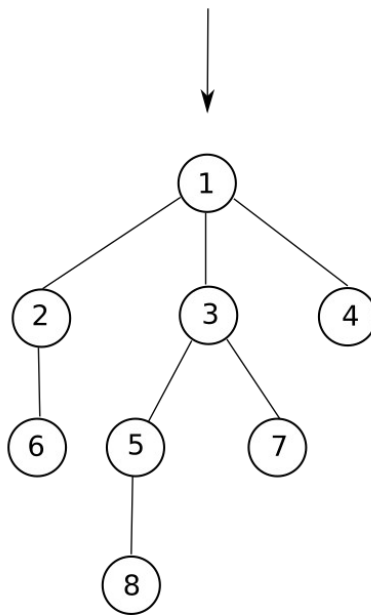
- 5) Excluir s_{\min} de S e o elemento mais a esquerda de C, formando novos S e C
- 6) Repetir os passos 3 a 5 até que não exista mais elementos em C
- 7) Por fim, adicione a T a aresta correspondente aos dois vértices restantes em S

$C = (1,2,1,3,3,5)$

$S = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$



- Passo 1) $e = (4, 1)$
 Passo 2) $e = (6, 2)$
 Passo 3) $e = (2, 1)$
 Passo 4) $e = (1, 3)$
 Passo 5) $e = (7, 3)$
 Passo 6) $e = (3, 5)$
 Passo 7) $e = (5, 8)$



Árvores Geradoras Mínimas (Minimum Spanning Trees - MST's)

Até o presente momento, estamos lidando com grafos sem pesos nas arestas. Isso significa que dado um grafo G , temos inúmeras formas de obter uma árvore geradora T (vimos que existem muitas dessas árvores num grafo de n vértices). A partir de agora, iremos lidar com grafos ponderados, ou seja, grafos em que as arestas possuem um peso/custo de conexão. O objetivo da seção em questão consiste em fornecer algoritmos para resolver o seguinte problema: dado um grafo ponderado G , obter dentre todas as árvores geradoras possíveis, aquela com o menor peso.

Definição do problema: Dado $G = (V, E, w)$, onde $w: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ (peso da aresta e), obter a árvore geradora T que minimiza o seguinte critério:

$$w(T) = \sum_{e \in T} w(e) \quad (\text{soma dos pesos das arestas que compõem a árvore})$$

Obs: A matriz de adjacência de um grafo ponderado é dada por:

$$A_{i,j} = \begin{cases} w_{ij}, & i \leftrightarrow j \\ \infty, & \text{c.c} \end{cases}$$

Exemplo: Interligação banda larga dos bairros de São Carlos (NET)

Ideia geral: a cada passo escolher a aresta de menor peso que seja segura
Aresta segura = aresta que ao ser inserida não faz a árvore deixar de ser árvore

Como determinar se uma aresta é segura?
Cada algoritmo propõe suas especificações próprias para isso

Algoritmo de Kruskal

Objetivo: escolher a cada passo a aresta de menor peso que não forme um ciclo

Entrada: $G = (V, E, w)$ conexo

Saída: $T = (V, E_T)$

1. Defina $T = (V, E_T)$ como o grafo nulo de n vértices
2. Enquanto $|E_T| < n - 1$
 - a) $T = T + \{e\}$, com e sendo a aresta de menor peso em G que não forma um ciclo em T
 - b) $E = E - \{e\}$

Segundo Cormen, uma metodologia para detecção de ciclos pode ser implementada utilizando a seguinte ideia: inicialmente cada vértice é colocado num grupo distinto e cada vez que uma aresta é inserida, os dois vértices extremidades passam a fazer parte do mesmo grupo. Assim, arestas que ligam vértices do mesmo grupo, formam ciclos e devem ser evitadas.

Para isso, Cormen apresenta 3 primitivas básicas:

`make_set(v)`: cria um grupo contendo um único vértice, v

`find_set(v)`: retorna o grupo a que o vértice v pertence

`union(u, v)`: faz a união dos grupos de u e v , criando um único grupo

PSEUDOCÓDIGO (Cormen)

MST_Kruskal(G, w) // Entrada: grafo G ponderados

```

{
  A = ∅
  for each v ∈ V
    make_set(v)
  sort edges into nondecreasing order
  for each e ∈ E (ordered)
  {
    if (find_set(u) ≠ find_set(v))
    {
      A = A ∪ {(u, v)}
      union(u, v)
    }
  }
}

```

Trata-se de um algoritmo Guloso (segue estratégia de resolver problemas fazendo sempre a escolha ótima em cada passo. Nesse caso, sempre tenta a aresta de menor peso)

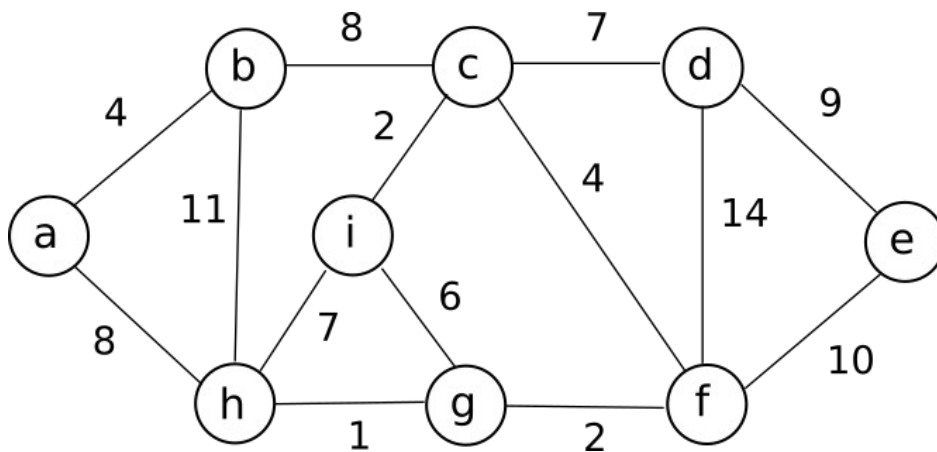
A seguir iremos realizar um trace do algoritmo (simulação passo a passo). Para isso iremos considerar a seguinte notação:

E^- : conjunto das arestas de peso mínimo não seguras ($\text{find_set}(u) = \text{find_set}(v)$)

E^+ : conjunto das arestas de peso mínimo seguras ($\text{find_set}(u) \neq \text{find_set}(v)$)

e_k : aresta escolhida no passo k

Ex: Suponha que os vértices representem bairros e as arestas com pesos os custos de interligação desses bairros (fibra ótica)



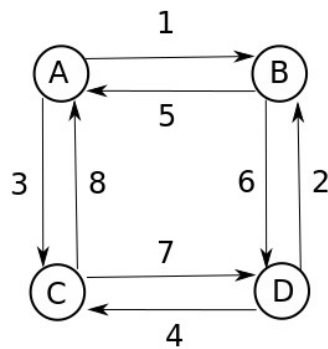
$E = [1, 2, 2, 4, 4, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 10, 11, 14]$

k	E^-	E^+	e_k
1	-	{(g,h)}	(g,h)
2	-	{(c,i), (f,g)}	(c,i)
3	-	{(g,f)}	(g,f)
4	-	{(a,b), (c,f)}	(a,b)

5	-	{(c,f)}	(c,f)
6	{(g,i)}	-	-
7	{(h,i)}	{(c,d)}	(c,d)
8	-	{(a,h), (b,c)}	(a,h)
9	{(b,c)}	-	-
10	-	{(d,e)}	(d,e)

Observações:

- 1) Padrão de crescimento: o subgrafo gerado a cada iteração não é uma árvore (o método segue adicionando arestas a T_k , mas só podemos garantir que temos uma árvore após a inserção da última aresta, ou seja, T_k só é de fato uma árvore na última iteração)
- 2) O algoritmo não deixa explícito como evitar a formação de ciclos
- 3) Limitação: grafos direcionados podem ser problemáticos



A seguir iremos demonstrar a otimalidade do algoritmo de Kruskal.

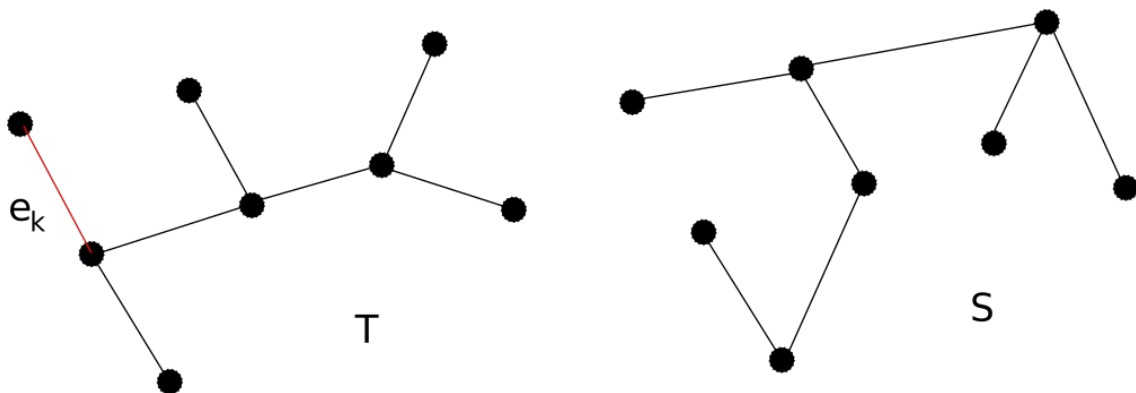
Teorema: Toda árvore T gerado pelo algoritmo de Kruskal é uma MST de G

Garante que o algoritmo sempre funciona e é ótimo

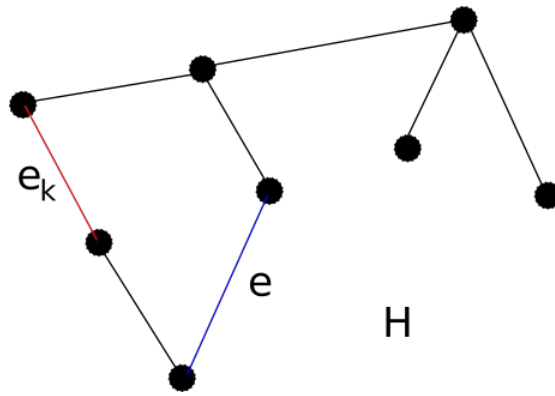
Prova por contradição

Obs: T é a árvore retornada por Kruskal

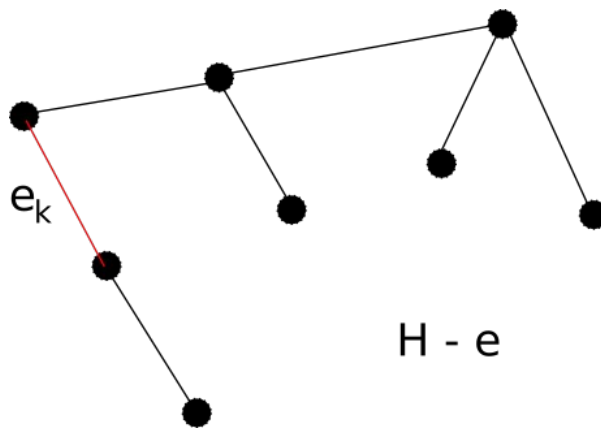
1. Supor que $\exists S \neq T$ tal que $w(S) < w(T)$ (S é uma árvore)
2. Seja $e_k \in T$ a primeira aresta adicionada em T que não está em S (pois árvores são diferentes)



3. Faça $H = (S + e_k)$. Note que H não é mais uma árvore e contém um ciclo



4. Note que no ciclo C , $\exists e \in S$ tal que $e \notin T$ (pois senão C existiria em T). O subgrafo $H - e$ é conexo, possui $n - 1$ arestas e define uma árvore geradora de G .

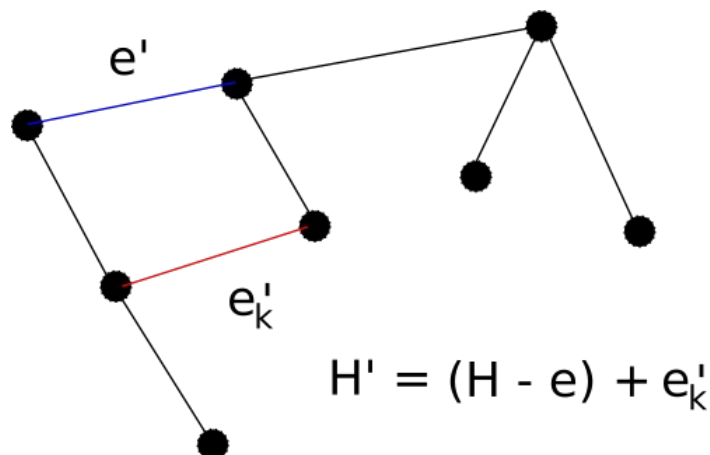


5. Porém, $w(e_k) \leq w(e)$ e assim $w(H - e) \leq w(S)$ (pois de acordo com Kruskal e_k vem antes de e na lista ordenada de arestas, é garantido pela ordenação)

Lista de arestas (após ordenação)



6. Repetindo o processo usado para gerar $H - e$ a partir de S é possível produzir uma sequência de árvores que se aproximam cada vez mais de T .



$S \rightarrow (H - e) \rightarrow (H' - e') \rightarrow (H'' - e'') \rightarrow \dots \rightarrow T$

de modo que

$$w(S) \geq w(H - e) \geq w(H' - e') \geq \dots \geq w(T) \quad (\text{contradição a suposição inicial})$$

Portanto, não existe árvore com peso menor que T, mostrando que T tem peso mínimo. (Não há como S ter peso menor que T)

Algoritmo de Prim

Ideia geral: Inicia em uma raiz r. Enquanto T não contém todos os vértices de G, o algoritmo iterativamente adiciona a T a aresta de menor peso que sai do conjunto dos vértices finalizados (S) e chega no conjunto dos vértices em aberto (V - S)

Assim como o Kruskal, também é considerado um algoritmo guloso.

Definições de variáveis

$\lambda(v)$: menor custo estimado de entrada para o vértice v (até o presente momento)

$\pi(v)$: predecessor de v na árvore (vértice pelo qual entrei em v)

Q: fila de prioridades dos vértices (maior prioridade = menor $\lambda(v)$)

Como sei que atingi o menor valor de entrada para um vértice v ?

Basta olhar na fila Q. Quando v é removido da fila, seu custo é mínimo ($\lambda(v)$ não muda mais).

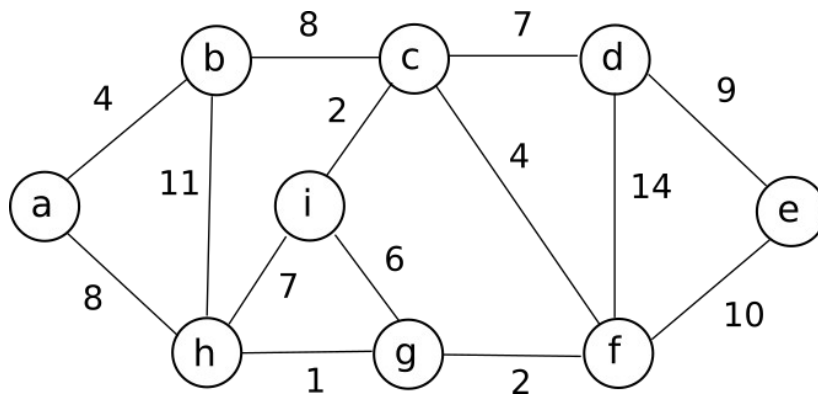
Para todo vértice v inserido em S, é garantido que o menor $\lambda(v)$ já foi encontrado.

PSEUDOCÓDIGO

```

MST_Prim(G, w, r) {
    for each  $v \in V$  {
         $\lambda(v) = \infty$ 
         $\pi(v) = nil$ 
    }
     $\lambda(r) = 0$       (raiz deve iniciar com custo zero pois é primeira a sair da fila)
    Q = V           (fila de prioridades inicial é todo conjunto de vértices)
    S =  $\emptyset$ 
    while Q  $\neq \emptyset$  {
        u = ExtractMin(Q)      (remove da fila o vértice de menor prioridade)
        S = S  $\cup$  {u}         (já obtive o menor custo de entrada para u)
        for each  $v \in N(u)$  {
            (se não estiver na fila Q, não pode mais modificar  $\lambda(v)$  )
            if (  $v \in Q$  and  $\lambda(v) > w(u, v)$  ) { (achou porta de entrada de menor
custo)
                 $\lambda(v) = w(u, v)$       (atualiza o custo para o menor valor)
                 $\pi(v) = u$              (muda o predecessor, pois achei nova entrada
melhor)
            }
        }
    }
}

```



OBS: Note que os códigos a seguir fazem exatamente a mesma operação

```

if ( v ∈ Q and λ(v) > w(u,v) ) {
    λ(v) = w(u,v)
    π(v) = u
}

if v ∈ Q {
    λ(v) = min{λ(v), w(u,v)}
    if ( λ(v) was updated )
        π(v) = u
}

```

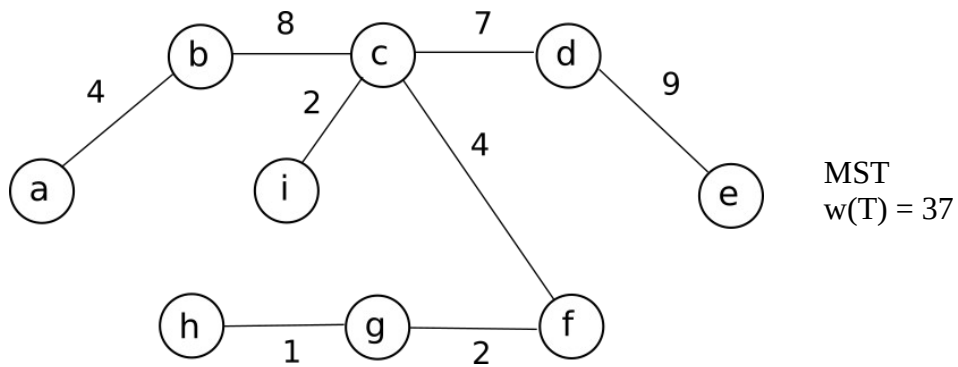
Fila

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
$\lambda^{(0)}(v)$	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$\lambda^{(1)}(v)$		4	∞	∞	∞	∞	∞	8	∞
$\lambda^{(2)}(v)$			8	∞	∞	∞	∞	8	∞
$\lambda^{(3)}(v)$				7	∞	4	∞	8	2
$\lambda^{(4)}(v)$				7	∞	4	6	7	
$\lambda^{(5)}(v)$				7	10		2	7	
$\lambda^{(6)}(v)$				7	10			1	
$\lambda^{(7)}(v)$					9				

Ordem de acesso aos vértices

u	$V' = \{v \in N(u) \wedge v \in Q\}$	$\lambda(v), \forall v \in V'$	$\pi(v)$
a	{b, h}	$\lambda(b) = \min\{\lambda(b), w(a,b)\} = \min\{\infty, 4\} = 4$ $\lambda(h) = \min\{\lambda(h), w(a,h)\} = \min\{\infty, 8\} = 8$	$\pi(b) = a$ $\pi(h) = a$
b	{c, h}	$\lambda(c) = \min\{\lambda(c), w(b,c)\} = \min\{\infty, 8\} = 8$ $\lambda(h) = \min\{\lambda(h), w(b,h)\} = \min\{8, 11\} = 8$	$\pi(c) = b$ ---
c	{d, f, i}	$\lambda(d) = \min\{\lambda(d), w(c,d)\} = \min\{\infty, 7\} = 7$ $\lambda(f) = \min\{\lambda(f), w(c,f)\} = \min\{\infty, 4\} = 4$ $\lambda(i) = \min\{\lambda(i), w(c,i)\} = \min\{\infty, 2\} = 2$	$\pi(d) = c$ $\pi(f) = c$ $\pi(i) = c$
i	{h, g}	$\lambda(h) = \min\{\lambda(h), w(i,h)\} = \min\{8, 7\} = 7$	$\pi(h) = i$

f	{d, e, g}	$\lambda(g) = \min\{\lambda(h), w(i, g)\} = \min\{\infty, 6\} = 6$	$\pi(g) = i$
		$\lambda(g) = \min\{\lambda(d), w(f, d)\} = \min\{7, 14\} = 7$	---
		$\lambda(e) = \min\{\lambda(e), w(f, e)\} = \min\{\infty, 10\} = 10$	$\pi(e) = f$
		$\lambda(e) = \min\{\lambda(e), w(f, e)\} = \min\{\infty, 10\} = 10$	$\pi(e) = f$
g	{h}	$\lambda(h) = \min\{\lambda(h), w(g, h)\} = \min\{7, 1\} = 1$	$\pi(h) = g$
h	\emptyset	---	---
d	{e}	$\lambda(e) = \min\{\lambda(e), w(d, e)\} = \min\{10, 9\} = 9$	$\pi(e) = d$
e	\emptyset	---	---

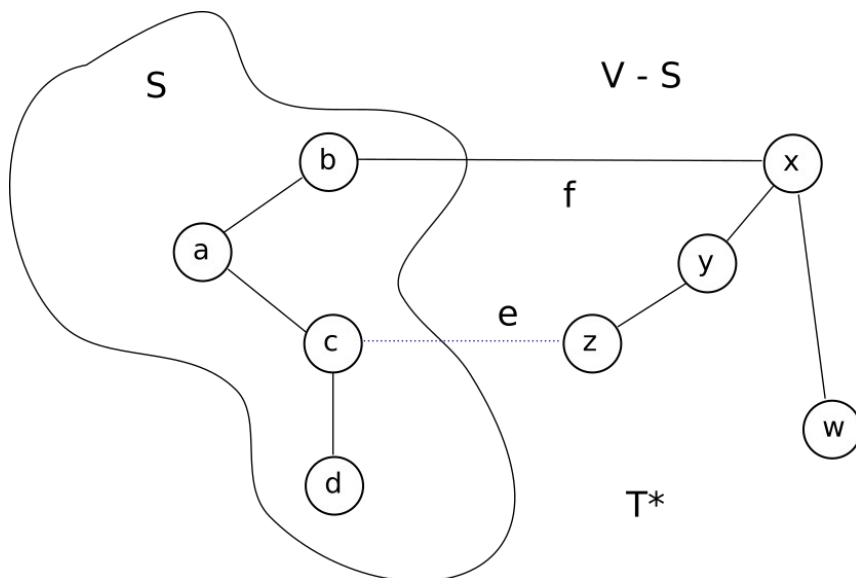


Mapa de predecessores (árvore final)

v	a	b	c	d	e	f	g	h	i
$\pi(v)$	--	a	b	c	d	c	f	g	c
$\lambda(v)$	0	4	8	7	9	4	2	1	2

A seguir veremos um resultado fundamental para provar a otimalidade do algoritmo de Prim.

Propriedade do corte: Seja $G = (V, E, w)$ um grafo, S um subconjunto qualquer de V e $e \in E$ a aresta de menor custo com exatamente uma extremidade em S . Então, a MST de G contém e .

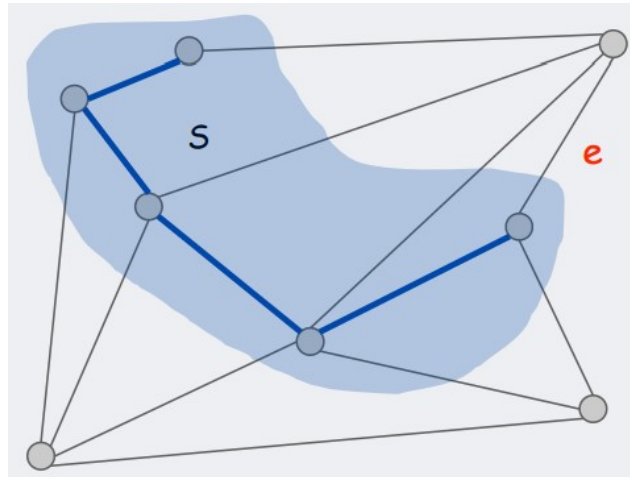


Prova por contradição:

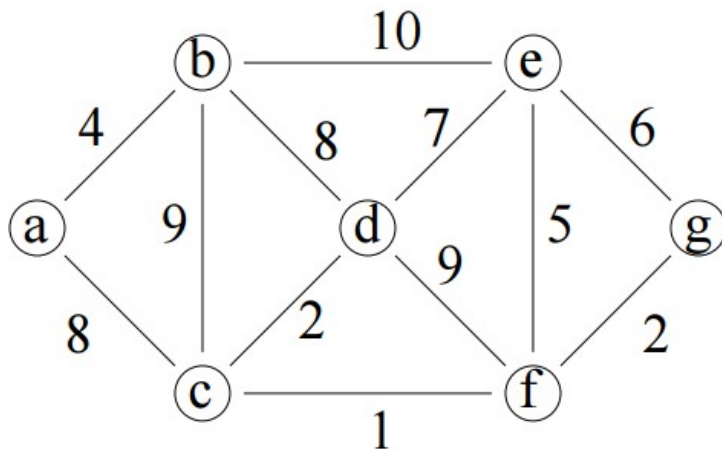
Suponha que $e \notin T^*$. Ao adicionar e em T^* cria-se um único ciclo C . Para que $T^* - e$ fosse uma MST, tem que haver alguma outra aresta f com apenas uma extremidade em S (senão T^* seria desconexo). Então $T = T^* + e - f$ também é árvore geradora. Como, $w(e) < w(f)$, segue que T tem peso mínimo. Portanto, T^* não é MST de G

Teorema: A árvore T obtida pelo algoritmo de Prim é uma MST de G .

Seja S o subconjunto de vértices de G na árvore T (definido pelo algoritmo). O algoritmo de Prim adiciona em T a cada passo a aresta de menor custo com apenas um vértice extremidade em S . Portanto, pela propriedade do corte, toda aresta adicionada pertence a MST de G .



Exercício: encontre a MST do grafo a seguir utilizando o algoritmo de Prim. Mostre o trace completo (passo a passo) do método



Busca em grafos

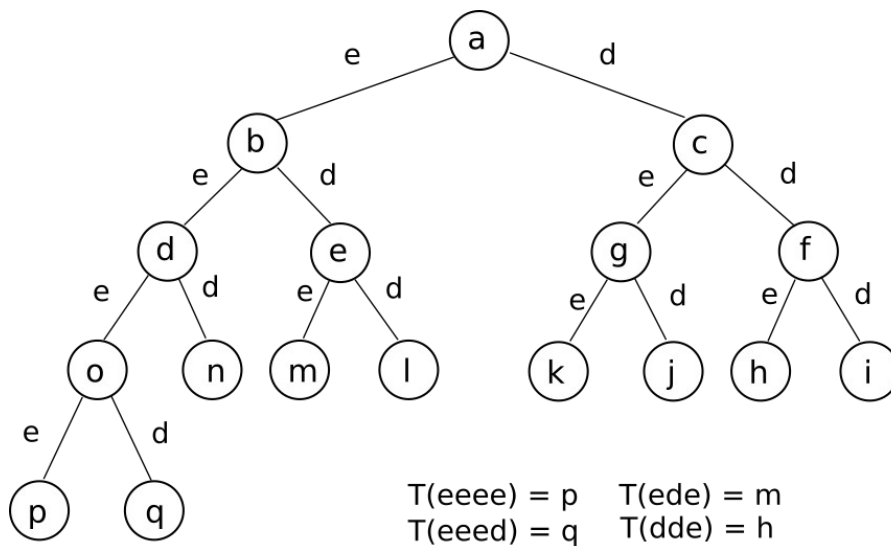
Importância: como navegar em grafos de maneira determinística de modo a percorrer um conjunto de dados não estruturado (não há linhas, colunas, índices, etc)

Objetivo: acessar/recuperar todos os elementos do conjunto V

Perguntas: De quantas maneiras podemos fazer isso? Como? Qual a melhor maneira?

Relação entre busca em grafos e árvores

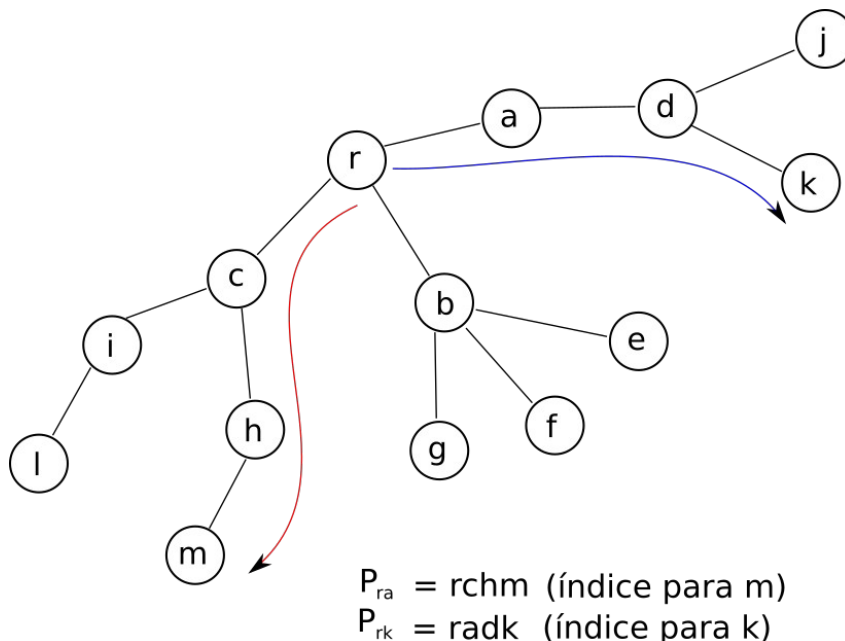
Buscar elementos num grafo G é basicamente o processo de extrair uma árvore T a partir de G. Mas porque? Como busca se relaciona com uma árvore? Isso vem de uma das propriedades das árvores. Numa árvore existe um único caminho entre 2 vértices u, v. Considere uma árvore binária



índices identificam unicamente os elementos

Pode-se criar um esquema de indexamento baseado nos nós a esquerda e a direita. Cada elemento do conjunto possui um índice único que o recupera.

No caso de árvores genéricas, o caminho faz o papel do índice único



Portanto, dado um grafo G , extrair uma árvore T com raiz r a partir dele, significa indexar unicamente cada elemento do conjunto.

Busca em Largura (Breadth-First Search – BFS)

Ideia geral: a cada novo nível descoberto, todos os vértices daquele nível devem ser visitados antes de prosseguir para o próximo nível

Definição das variáveis (pseudo-código)

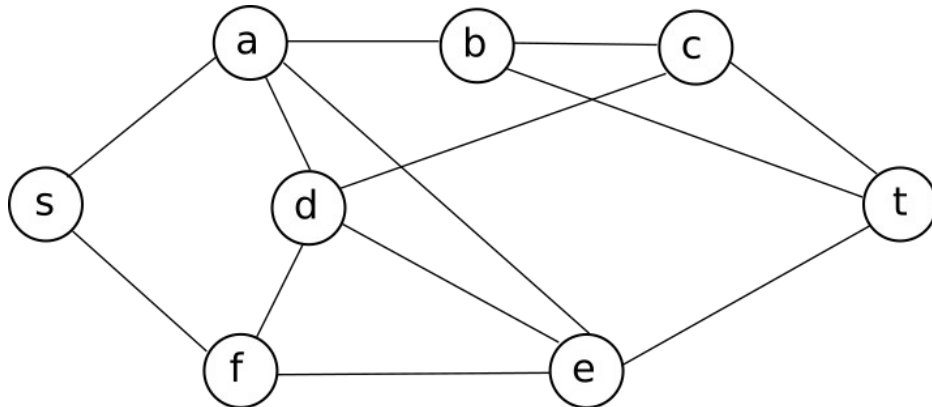
- i) v .color : status do vértice v (existem 3 possíveis valores)
 - a) WHITE: vértice v ainda não descoberto (significa que v ainda não entrou na fila Q)
 - b) GRAY: vértice já descoberto (significa que v está na fila Q)
 - c) BLACK: vértice finalizado (significa que v já saiu da fila Q)
- ii) $\lambda(v)$: armazena a menor distância de v até a raiz
- iii) $\pi(v)$: predecessor de v (onde estava quando descobri v)
- iv) Q : Fila (FIFO)
 - 2 primitivas
 - a) pop: remove elemento do início da fila
 - b) push: adiciona um elemento no final da fila

PSEUDOCÓDIGO

BFS(G, s)

```
{
  for each  $v \in V - \{s\}$ 
  {
     $v$ .color = WHITE
     $\lambda(v) = \infty$ 
     $\pi(v) = nil$ 
  }
   $s$ .color = GRAY
   $\lambda(s) = 0$ 
   $\pi(s) = nil$ 
   $Q = \emptyset$ 
  push( $Q, s$ )
  while  $Q \neq \emptyset$ 
  {
     $u = pop(Q)$ 
    for each  $v \in N(u)$  // para todo vizinho de  $u$ 
    {
      if  $v$ .color == WHITE // se ainda não passei por aqui, processo vértice  $v$ 
      {
         $\lambda(v) = \lambda(u) + 1$  //  $v$  é descendente de  $u$  então distancia +1
         $\pi(v) = u$ 
         $v$ .color = GRAY
        push( $Q, v$ ) // adiciona  $v$  no final da fila
      }
    }
     $u$ .color = BLACK // Após explorar todos vizinhos de  $u$ , finalizo  $u$ 
  }
}
```

O algoritmo BFS recebe um grafo não ponderado G e retorna uma árvore T , conhecida como BFS-tree. Essa árvore possui uma propriedade muito especial: ela armazena os menores caminhos da raiz s a todos os demais vértices de T (menor caminho de s a v , $\forall v \in V$)



Trace do algoritmo BFS

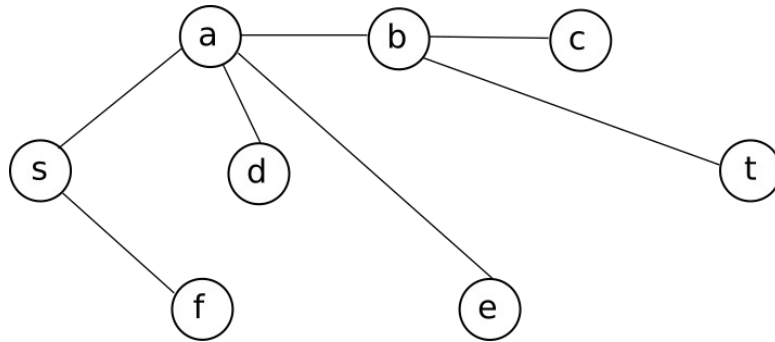
i	$u = \text{pop}(Q)$	$V' = \{ v \in N(u) \mid v.\text{color} = \text{WHITE} \}$	$\lambda(v)$	$\pi(v)$
0	s	{a, f}	$\lambda(a) = \lambda(s) + 1 = 1$ $\lambda(f) = \lambda(s) + 1 = 1$	$\pi(a) = s$ $\pi(f) = s$
1	a	{b, d, e}	$\lambda(b) = \lambda(a) + 1 = 2$ $\lambda(d) = \lambda(a) + 1 = 2$ $\lambda(e) = \lambda(a) + 1 = 2$	$\pi(b) = a$ $\pi(d) = a$ $\pi(e) = a$
2	f	\emptyset	---	---
3	b	{c, t}	$\lambda(c) = \lambda(b) + 1 = 3$ $\lambda(t) = \lambda(b) + 1 = 3$	$\pi(c) = b$ $\pi(t) = b$
4	d	\emptyset	---	---
5	e	\emptyset	---	---
6	c	\emptyset	---	---
7	t	\emptyset	---	---

FILA

- $Q^{(0)} = [s]$
- $Q^{(1)} = [a, f]$
- $Q^{(2)} = [f, b, d, e]$
- $Q^{(3)} = [b, d, e]$
- $Q^{(4)} = [d, e, c, t]$
- $Q^{(5)} = [e, c, t]$
- $Q^{(6)} = [c, t]$
- $Q^{(7)} = [t]$
- $Q^{(8)} = \emptyset$

Árvore BFS

v	s	a	b	c	d	e	f	t
$\pi(v)$	---	s	a	b	a	a	s	b
$\lambda(v)$	0	1	2	3	2	2	1	3

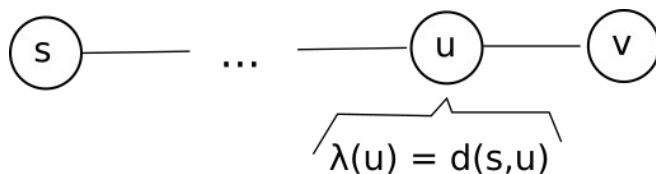


Note que a árvore nada mais é que a união dos caminhos mínimos de s (origem) a qualquer um dos vértices do grafo (destinos). A BFS-tree geralmente não é única, porém todas possuem a mesma profundidade (mínima distância da raiz ao mais distante)

Pergunta: Como podemos implementar um script para computar o diâmetro de um grafo G usando a BFS? Pense em termos do cálculo da excentricidade de cada vértice.

Teorema: A BFS sempre termina com $\lambda(v) = d(s, v)$ para $\forall v \in V$, onde $d(s, v)$ é a distância geodésica (menor distância entre s e v).
(Prova por contradição)

1. Sabemos que na BFS $\lambda(v) \geq d(s, v)$
2. Suponha que $\exists v \in V$ tal que $\lambda(v) > d(s, v)$, onde v é o primeiro vértice que isso ocorre ao sair da fila Q
3. Então, existe caminho P_{sv} pois senão $\lambda(v) = d(s, v) = \infty$ (contradiz 2)
4. Se existe P_{sv} então existe um caminho mínimo P_{sv}^*
5. Considere $u \in V$ como predecessor de v em P_{sv}^*



pois v foi 1º a ter $\lambda(v) > d(s, v)$

6. Então, $d(s, v) = d(s, u) + 1$ (pois u é predecessor de v)

7. Assim, temos

$$\lambda(v) > d(s,v) = d(s,u) + 1 = \lambda(u) + 1$$

(2) (6) (5)

e portanto $\lambda(v) > \lambda(u) + 1$ (*), o que é uma contradição pois só existem 3 possibilidades quando u sai da fila Q, ou seja, $u = \text{pop}(Q)$

i) v é WHITE: $\lambda(v) = \lambda(u) + 1$ (contradição)

ii) v é BLACK: se isso ocorre significa que v sai da fila Q antes de u, ou seja, $\lambda(v) < \lambda(u)$ (contradição)

iii) v é GRAY: então v foi descoberto por um w removido de Q antes de u, ou seja, $\lambda(w) \leq \lambda(u)$. Além disso, $\lambda(v) = \lambda(w) + 1$. Assim, temos $\lambda(w) + 1 \leq \lambda(u) + 1$, o que finalmente implica em $\lambda(v) \leq \lambda(u) + 1$ (contradição)

Portanto, $\nexists v \in V$ tal que $\lambda(v) > d(s,v)$.

Uma pergunta que o algoritmo anterior ainda não responde é: quantos caminhos mínimos existem de s a t? Em diversas aplicações é interessante saber o número de rotas ótimas no caso de haver mais de uma. Para isso precisamos lançar mão de um algoritmo de Backtracking

Algoritmo: Backtracking com número de caminhos

Entrada: BFS-tree (saída do BFS)

1) Faça $i = \lambda(t)$, $\mu(t) = 1$ e $\forall v \in V (\lambda(v) = \lambda(t) \rightarrow \mu(v) = 0)$ (marcar vértice destino com 1)

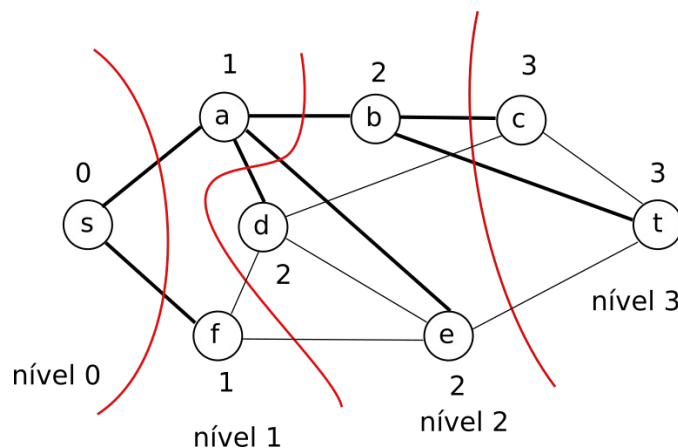
2) $\forall v \in V \mid \lambda(v) = i - 1$ faça
 $\mu(v) = \sum \mu(u)$, $\forall u \in N(v) \mid \lambda(u) = i$

3) Se $i = 0$, PARE. Senão, $i = i - 1$ e volte para 2)

Iremos considerar a saída obtida no exemplo anterior. Primeiramente, o algoritmo inicia fazendo:

$$i = 3, \mu(t) = 1, \mu(c) = 0$$

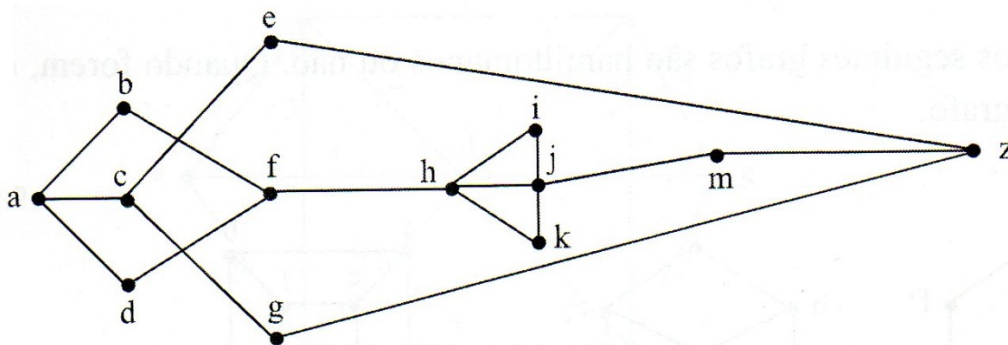
A figura a seguir ilustra a rotulação obtida pelo algoritmo BFS. Note que é possível dividir o conjunto de vértices em diferentes níveis de profundidade. O algoritmo de Backtracking inicia sempre no nível de maior profundidade e rotula os vértices de trás para frente até finalmente atingir a raiz da árvore.



i	$V' = \{v / \lambda(v)=i-1 \}$	$\mu(v), v \in V'$
3	{b, d, e}	$\mu(b)=\mu(c)+\mu(t)=0+1=1$ $\mu(d)=\mu(c)=0$ $\mu(e)=\mu(t)=1$
2	{a, f}	$\mu(a)=\mu(b)+\mu(d)+\mu(e)=1+0+1=2$ $\mu(f)=\mu(d)+\mu(e)=0+1$
1	{s}	$\mu(s)=\mu(a)+\mu(f)=2+1=3$
0	PARE!	

Portanto, existem 3 caminhos mínimos de s a t: sabt, saet, sfet

Exercício: Obtenha a BFS-Tree do grafo a seguir. Qual a profundidade da árvore? Obtenha o número de caminhos mínimos de a até m.



Busca em Profundidade (Depth-First Search – DFS)

Ideia geral: a cada vértice descoberto, explorar um de seus vizinhos não visitados (sempre que possível). Imita exploração de labirinto, aprofundando sempre que possível.

Definição das variáveis

i) v.d: discovery time (tempo de entrada em v)
v.f: finishing time (tempo de saída de v)

ii) v. color : status do vértice v (existem 3 possíveis valores)

- WHITE: vértice v ainda não descoberto
- GRAY: vértice já descoberto
- BLACK: vértice finalizado

iii) $\pi(v)$: predecessor de v (onde estava quando descobri v)

iv) Q: Pilha (LIFO)

Para simular a pilha de execução, pode-se utilizar um recurso computacional: Recursão!

Assim, não é necessário implementar de fato essa estrutura de dados (vantagem)

Porém, em casos extremos (tamanho muito grande), recursão pode gerar problemas.

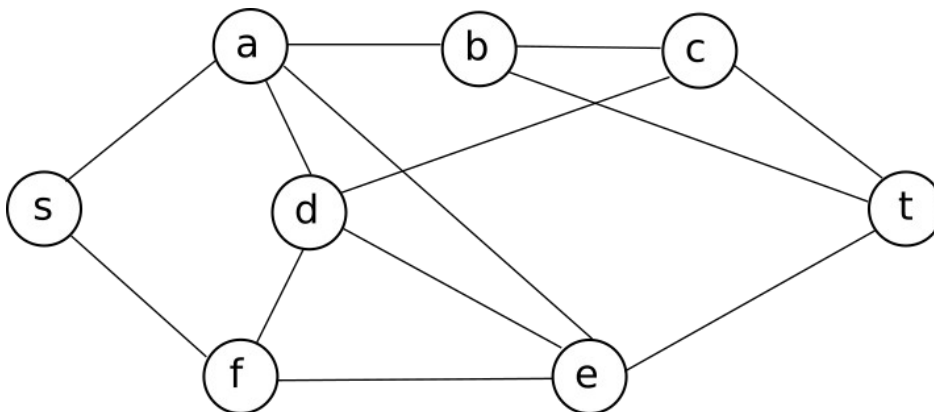
PSEUDOCÓDIGO (versão recursiva)

```
DFS(G, s)
{
    for each  $u \in V$ 
    {
        u.color = WHITE
         $\pi(u) = nil$ 
    }
    time = 0 // variável global para armazenar o tempo
    DFS_visit(G, s)
}

// Função recursiva que é chamada sempre que um vértice é descoberto
DFS_visit(G, u)
{
    time++
    u.d = time
    u.color = GRAY
    for each  $v \in N(u)$ 
    {
        if v.color == WHITE
        {
             $\pi(v) = u$ 
            DFS_visit(G, v) // chamada recursiva
        }
    }
    u.color = BLACK
    time++
    u.f = time
}
```

Da mesma forma que o algoritmo BFS, esse método recebe um grafo G não ponderado e retorna uma árvore, a DFS_tree.

Ex:



u	u.color	u.d	$V' = \{ v \in N(u) \mid v.color = WHITE \}$	$\pi(u)$	u.f
s	G	1	{a, f}	--	16
a	G	2	{b, d, e}	s	15
b	G	3	{c, t}	a	14
c	G	4	{d, t}	b	13
d	G	5	{e, f}	c	12
e	G	6	{f, t}	d	11
f	G	7	\emptyset	e	8
t	G	9	\emptyset	e	10

BFS

x

DFS

- aspecto espacial
- caminhos mínimos
- Fila

- aspecto temporal
- vértices de corte, ordenação topológica
- Pilha

Propriedades da DFS_tree

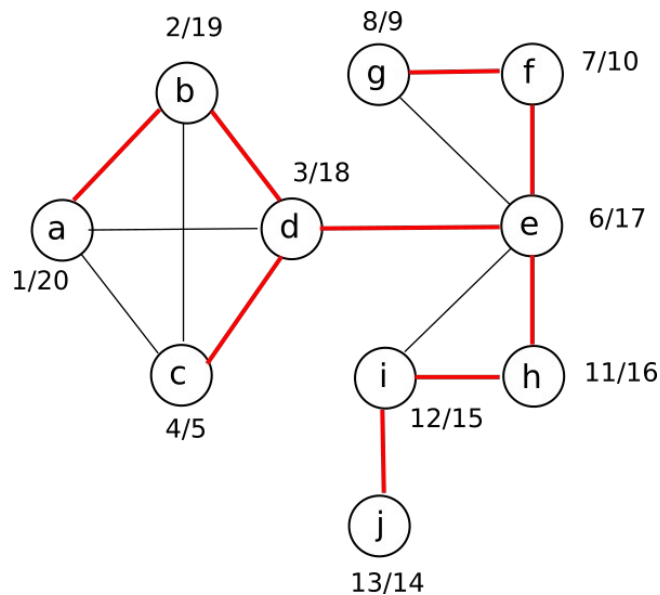
1) A rotulação tem o seguinte significado:

- $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$: u é descendente de v
- $[v.d, v.f] \subset [u.d, u.f]$: v é descendente de u
- $[v.d, v.f]$ e $[u.d, u.f]$ são disjuntos: estão em ramos distintos da árvore

2) Após a DFS, podemos classificar as arestas de G como:

- tree_edges: $e \in T$
- fb_edges (forward-backward edge): $e \notin T$

Def: v é um vértice de corte \Leftrightarrow v tem um filho s tal que \nexists fb_edge ligando s ou qualquer descendente de s a um ancestral de v



Perguntas:

- b é vértice de corte? Não pois fb_edge (a, d) liga um sucessor a um antecessor

- b) d é vértice de corte? Sim, pois não há fb_edge entre sucessor e antecessor
 c) e é vértice de corte? Sim, pois não há fb_edge

Ordenação Topológica (TopSort)

É uma aplicação muito importante em computação. Exemplos de aplicações da TopSort incluem a resolução de dependências entre bibliotecas de software, bem como gerenciamento de projetos.

Classe particular de grafos: DAG's (directed acyclic graphs)

Def: A ordenação topológica de um DAG G é uma ordenação linear de modo que se $(u, v) \in E$ então u aparece antes de v

Algoritmo: TopSort(G)

1. Chamar DFS(G) (Obs.: a função DFS deve ser ligeiramente modificada *)
2. Conforme cada vértice é finalizado (BLACK), insira-o no início de uma lista L
3. Retorne a lista L

Obs: Substituir o comando DFS_visit(G, s) pelo seguinte trecho de código

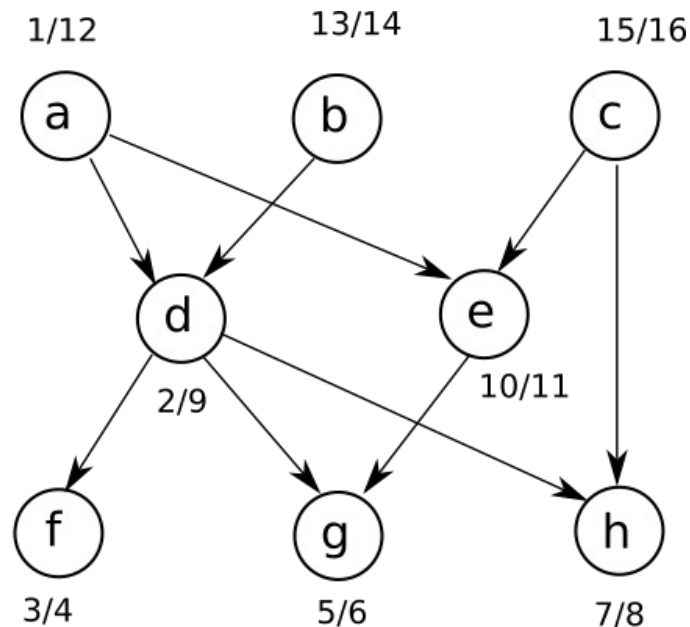
```
* for each  $v \in V$  {
    if v.color == WHITE
        DFS_visit( $G, v$ )
}
```

Ex: Considere o seguinte DAG

vértices = tarefas/jobs/processos

aresta $(x, y) = x$ deve estar pronto antes de y iniciar

Qual é uma ordem válida de execução das tarefas? TopSort(G)



$L = [c, b, a, e, d, h, g, f]$

Caminhos mínimos em grafos ponderados

Existem basicamente 3 subproblemas principais:

- i) 1 para 1 (Dijkstra) – caminho s-t
- ii) 1 para N (Dijkstra) – árvore de caminhos mínimos
- iii) M para N (Floyd-Warshall) – matriz de distâncias ponto a ponto

Def: Caminho ótimo

Seja $G = (V, E)$ e $w: E \rightarrow R^+$ uma função de custo para as arestas. Um caminho P^* de v_0 a v_n é ótimo se seu peso

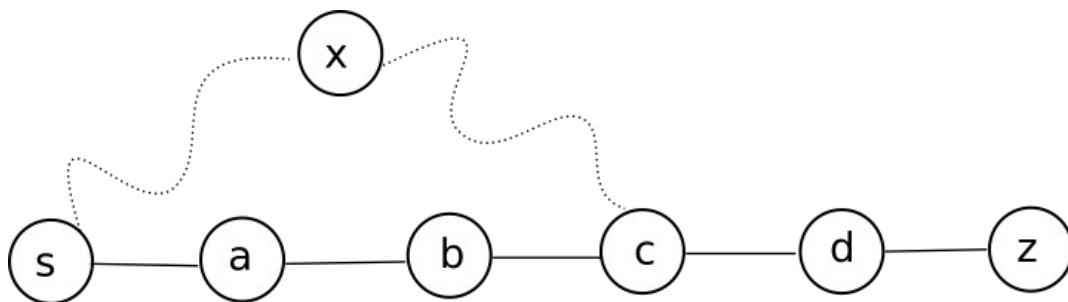
$$w(P^*) = \sum_{i=0}^{n-1} w(v_i, v_{i+1}) = w(v_0, v_1) + w(v_1, v_2) + \dots + w(v_{n-1}, v_n) \quad (\text{soma dos pesos das arestas})$$

é o menor possível.

Teorema: Todo subcaminho de um caminho ótimo é ótimo

Suponha no grafo a seguir que o caminho ótimo de s a z é $P^* = \text{sabcdz}$

Suponha ainda que exista um caminho mínimo de s a c que não passa por a e b mas sim por x, ou seja, $P' = \text{sxc}$. Ora, se isso é verdade, então claramente P^* não é ótimo pois é possível minimizá-lo ainda mais, criando $P = \text{sxcdz}$. Assim, subcaminhos de caminhos ótimos devem ser ótimos



Importante resultado na obtenção de algoritmos de programação dinâmica (problema com subestrutura ótima, ou seja, é possível utilizar partes de soluções já obtidas na construção da solução final). Em outras palavras, é isso que permite a utilização de programação dinâmica em algoritmos de caminhos mínimos. Antes de introduzirmos os algoritmos, iremos apresentar uma primitiva comum a todos eles. Trata-se da função relax, que aplica a operação conhecida como relaxamento a uma aresta de um grafo ponderado.

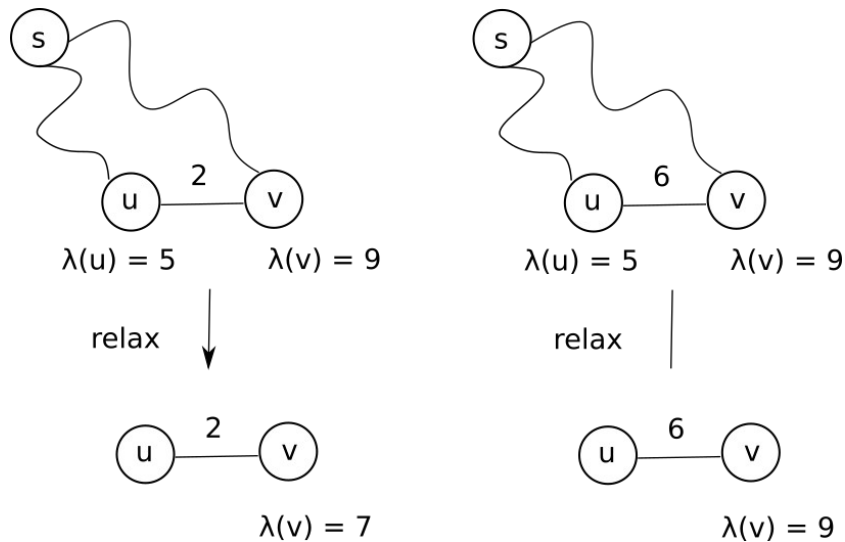
Primitiva relax

$\text{relax}(u, v, w)$: relaxar a aresta (u, v) de peso w sabendo os valores de $\lambda(u)$ e $\lambda(v)$

Quem é $\lambda(u)$? É o custo atual de sair da origem s e chegar até u

Quem é $\lambda(v)$? É o custo atual de sair da origem s e chegar até v

Ideia geral: é uma boa passar por u para chegar em v sabendo que o custo de ir de u até v é w?



Obs: A operação $\text{relax}(u, v, w)$ nunca aumenta o valor de $\lambda(v)$, apenas diminui

PSEUDOCODIGO

$\text{relax}(u, v, w)$

```
{
    if  $\lambda(v) > \lambda(u) + w(u, v)$ 
    {
         $\lambda(v) = \lambda(u) + w(u, v)$ 
         $\pi(v) = u$ 
    }
}
```

$\text{relax}(u, v, w)$

```
{
     $\lambda(v) = \min\{\lambda(v), \lambda(u) + w(u, v)\}$ 
    if  $\lambda(v)$  was updated
         $\pi(v) = u$ 
}
```

O que varia nos diversos algoritmos para encontrar caminhos mínimos são os seguintes aspectos:

- i) Quantas e quais arestas devemos relaxar?
- ii) Quantas vezes devemos relaxar as arestas?
- iii) Em que ordem devemos relaxar as arestas?

Algoritmo Bellman-Ford

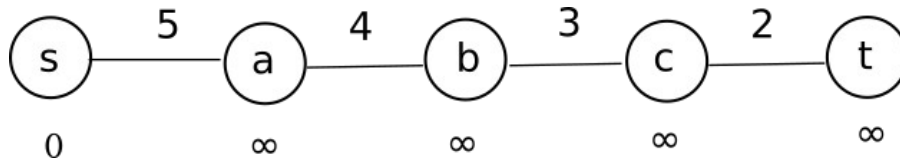
Ideia geral: a cada passo relaxar $\forall e \in E$ em ordem arbitrária, repetindo o processo $|V| - 1$ vezes

PSEUDOCODIGO

$\text{Bellman_Ford}(G, w, s)$

```
{
    for each  $v \in V$ 
    {
         $\lambda(v) = \infty$ 
         $\pi(v) = \text{nil}$ 
    }
     $\lambda(s) = 0$ 
    for  $i = 1$  to  $|V| - 1$ 
    {
        for each  $e = (u, v)$  in  $E$ 
             $\text{relax}(u, v, w)$ 
    }
}
```

Ex:



Dependendo da ordem que começo a relaxar arestas, pode demorar mais ou menos iterações para o algoritmo convergir. No pior caso, são necessários $|V| |E|$ operações e portanto o algoritmo em questão é considerado bastante ineficiente: $O(|V| |E|)$

A seguir veremos um algoritmo muito mais eficiente para resolver o problema: o algoritmo de Dijkstra. Basicamente, esse algoritmo faz uso de uma política de gerenciamento de vértices baseada em aspectos de programação dinâmica. O que o método faz é basicamente criar uma fila de prioridades para organizar os vértices de modo que quanto menor o custo $\lambda(v)$ maior a prioridade do vértice em questão. Assim, a ideia é expandir primeiramente os menores ramos da árvore de caminhos mínimos, na expectativa de que os caminhos mínimos mais longos usarão como base os subcaminhos obtidos anteriormente. Trata-se de um mecanismo de reaproveitar soluções de subproblemas para a solução do problema como um todo.

Definição das variáveis

$\lambda(v)$: menor custo até o momento para o caminho s-v

$\pi(v)$: predecessor de v na árvore de caminhos mínimos

Q: fila de prioridades dos vértices (maior prioridade = menor $\lambda(v)$)

PSEUDOCODIGO

Dijkstra(G, w, s)

```
{
     $\lambda(s)=0$ 
     $\pi(s)=0$ 
    for each  $v \in V$ 
    {
         $\lambda(v)=\infty$ 
         $\pi(v)=nil$ 
    }
    Q = V (fila de prioridades)
    while  $Q \neq \emptyset$ 
    {
        u = ExtractMin(Q)
        S = S ∪ {u}
        for each  $v \in N(u)$ 
            relax(u, v, w)
    }
}
```

Algoritmos e estruturas de dados

BFS – Fila

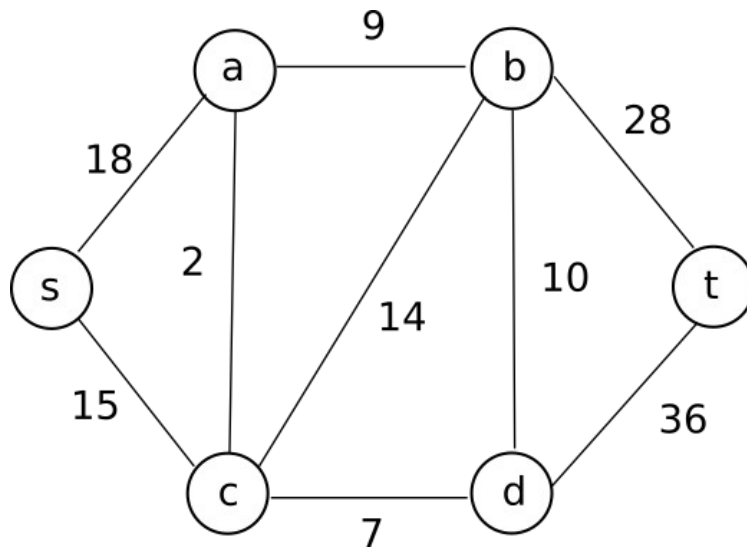
DFS – Pilha

Dijkstra – Fila de prioridades

Obs: Note que o algoritmo de Dijkstra é uma generalização da BFS

Ambos crescem primeiro os menores ramos da árvore. A BFS toda aresta tem mesmo tamanho, no Dijkstra esse tamanho é variável.

Ex:



Fila

Fila	s	a	b	c	d	t
$\lambda^{(0)}(v)$	0	∞	∞	∞	∞	∞
$\lambda^{(1)}(v)$		18	∞	15	∞	∞
$\lambda^{(2)}(v)$		17	29		22	∞
$\lambda^{(3)}(v)$			26		22	∞
$\lambda^{(4)}(v)$			26			58
$\lambda^{(5)}(v)$						54

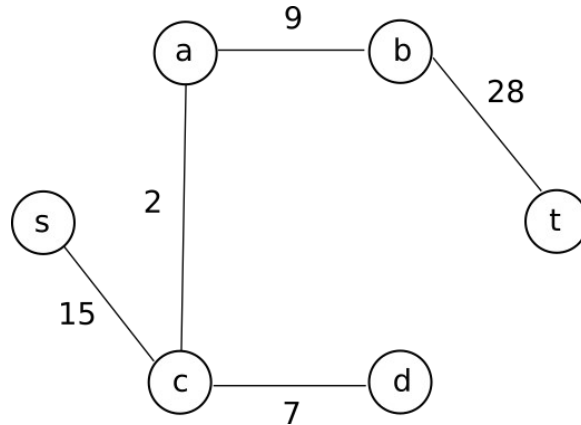
Ordem de acesso aos vértices

u	$V' = \{v \in N(u) \wedge v \in Q\}$	$\lambda(v), \forall v \in V'$	$\pi(v)$
s	{a, c}	$\lambda(a) = \min\{\lambda(a), \lambda(s) + w(s, a)\} = \min\{\infty, 18\} = 18$ $\lambda(c) = \min\{\lambda(c), \lambda(s) + w(s, c)\} = \min\{\infty, 15\} = 15$	$\pi(a) = s$ $\pi(c) = s$
c	{a, b, d}	$\lambda(a) = \min\{\lambda(a), \lambda(c) + w(c, a)\} = \min\{18, 17\} = 17$ $\lambda(b) = \min\{\lambda(b), \lambda(c) + w(c, b)\} = \min\{\infty, 29\} = 29$ $\lambda(d) = \min\{\lambda(d), \lambda(c) + w(c, d)\} = \min\{\infty, 22\} = 22$	$\pi(a) = c$ $\pi(b) = c$ $\pi(d) = c$
a	{b}	$\lambda(b) = \min\{\lambda(b), \lambda(a) + w(a, b)\} = \min\{29, 26\} = 26$	$\pi(b) = a$
d	{b, t}	$\lambda(b) = \min\{\lambda(b), \lambda(d) + w(d, b)\} = \min\{26, 32\} = 26$ $\lambda(t) = \min\{\lambda(t), \lambda(d) + w(d, t)\} = \min\{\infty, 58\} = 58$	--- $\pi(t) = d$
b	{t}	$\lambda(t) = \min\{\lambda(t), \lambda(b) + w(b, t)\} = \min\{58, 54\} = 54$	$\pi(t) = b$
t	\emptyset	---	---

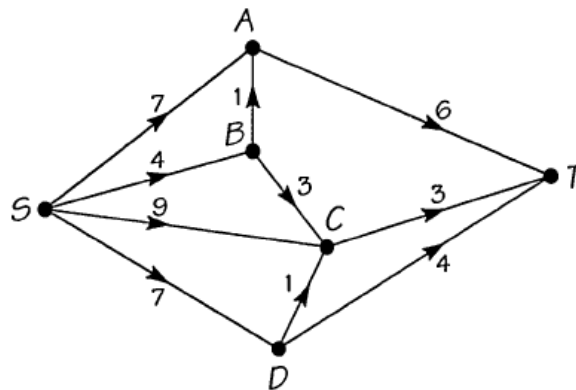
Mapa de predecessores (árvore final)

v	s	a	b	c	d	t
$\pi(v)$	---	c	a	s	c	b

Árvore de caminhos mínimos (armazena os menores caminhos de s a todos os demais vértices)



Ex: Utilizando o algoritmo de Dijkstra, construa a árvore de caminhos mínimos (trace completo)



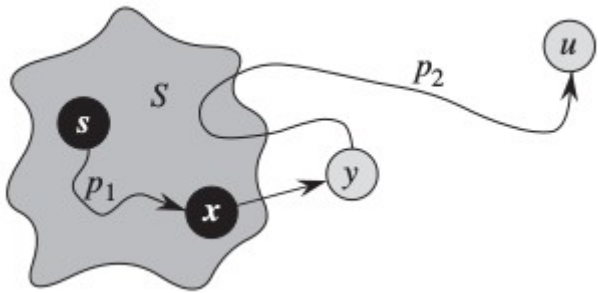
A seguir iremos demonstrar a otimalidade do algoritmo de Dijkstra.

Teorema: O algoritmo de Dijkstra termina com $\lambda(v) = d(s, v), \forall v \in V$
(Prova por contradição)

Obs: Note que sempre $\lambda(v) \geq d(s, v)$ (*)

- Suponha que u seja o 1º vértice para o qual $\lambda(u) \neq d(s, u)$ quando u entra em S.
- Então, $u \neq s$ pois senão $\lambda(s) = d(s, s) = 0$
- Assim, existe um caminho P_{su} pois senão $\lambda(u) = d(s, u) = \infty$. Portanto, existe um caminho mínimo P_{su}^*
- Antes de adicionar u a S, P_{su}^* possui $s \in S$ e $u \in V - S$

5. Seja y o 1º vértice em P_{su}^* tal que $y \in V - S$ e seja x seu predecessor ($x \in S$)



$$P_{su}^* = s \xrightarrow{p1} xy \xrightarrow{p2} u$$

Obs: Note que tanto $p1$ quanto $p2$ não precisam ter arestas

6. Como $x \in S$, $\lambda(x) = d(s, x)$ e no momento em que ele foi inserido a S , a aresta (x, y) foi relaxada, ou seja:

$$\lambda(y) = \lambda(x) + w(x, y) = d(s, x) + w(x, y) = d(s, y)$$

7. Mas y antecede a u no caminho e como $w: E \rightarrow R^+$ (pesos positivos), temos:

$$d(s, y) \leq d(s, u)$$

e portanto

$$\lambda(y) = d(s, y) \leq d(s, u) \leq \lambda(u) \quad (*)$$

8. Mas como ambos y e u pertencem a $V - S$, quando u é escolhido para entrar em S temos $\lambda(u) \leq \lambda(y)$

9. Como $\lambda(y) \leq \lambda(u)$ e $\lambda(u) \leq \lambda(y)$ então temos que $\lambda(u) = \lambda(y)$, o que implica em:

$$\lambda(y) = d(s, y) = d(s, u) = \lambda(u)$$

o que gera uma contradição. Portanto $\nexists u \in V$ tal que $\lambda(u) \neq d(s, u)$ quando u entra em S .

Dijkstra multisource

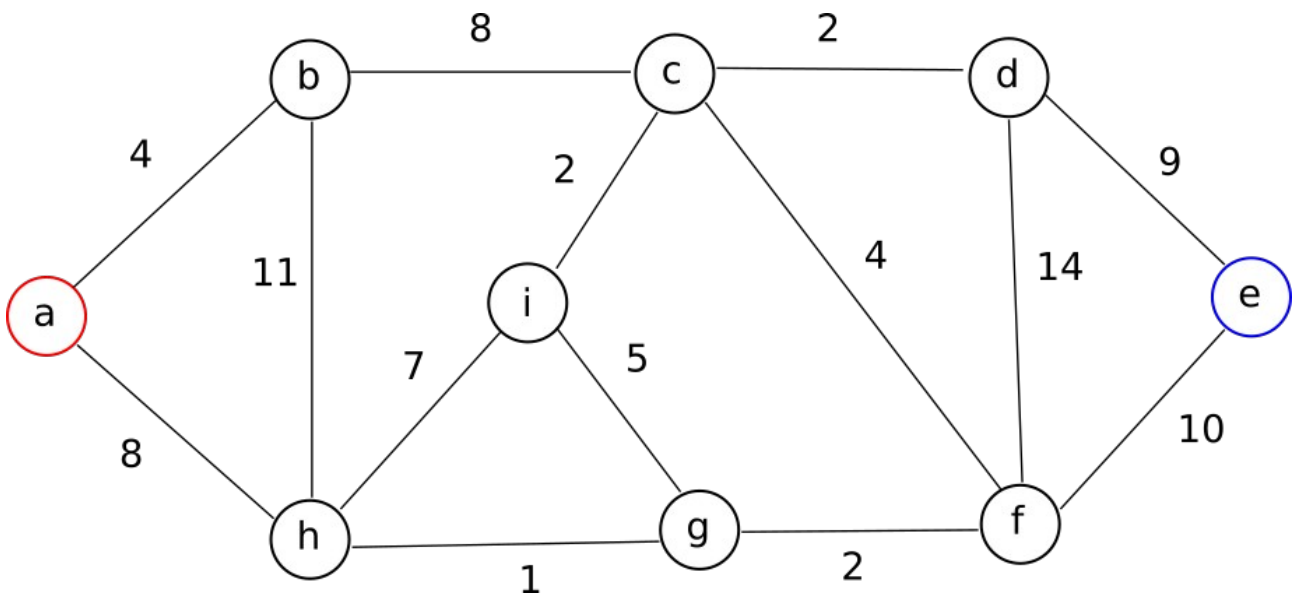
Ideia: utilizar múltiplas sementes/raízes

Processo de competição: cada vértice pode ser conquistado por apenas uma das sementes (pois ao fim, um vértice só pode estar pendurado em uma única árvore)

Durante a execução do algoritmo, nesse processo de conquista, uma semente pode “roubar” um nó de seus concorrentes, oferecendo a ele um caminho menor que o atual

Ao final temos o que se chama de floresta de caminhos ótimos, composta por várias árvores (uma para cada semente)

Cada árvore representa um agrupamento/comunidade.



Desejamos encontrar 2 agrupamentos. Para isso, utilizaremos 2 sementes: os vértices A e E. Na prática, isso significa inicializar o algoritmo de Dijkstra com $\lambda(a)=\lambda(e)=0$

Fila

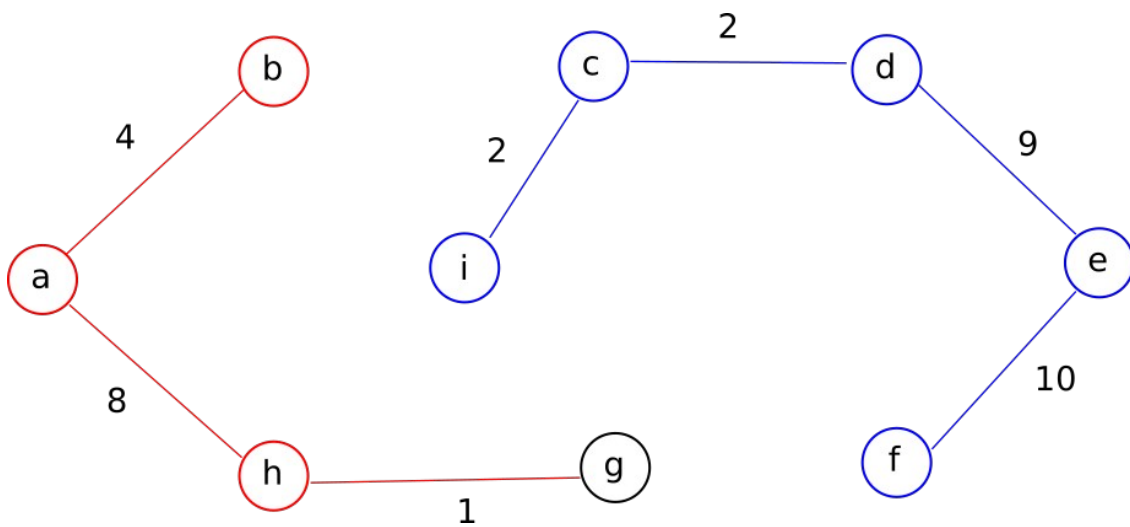
	a	b	c	d	e	f	g	h	i
$\lambda^{(0)}(v)$	0	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞
$\lambda^{(1)}(v)$		4	∞	∞	0	∞	∞	8	∞
$\lambda^{(2)}(v)$		4	∞	9		10	∞	8	∞
$\lambda^{(3)}(v)$			12	9		10	∞	8	∞
$\lambda^{(4)}(v)$			12	9		10	9		15
$\lambda^{(5)}(v)$			11			10	9		15
$\lambda^{(6)}(v)$			11			10			14
$\lambda^{(7)}(v)$			11						14
$\lambda^{(8)}(v)$									13

Ordem de acesso aos vértices

u	$V'=\{v \in N(u) \wedge v \in Q\}$	$\lambda(v), \forall v \in V'$	$\pi(v)$
a	{b, h}	$\lambda(b) = \min\{\infty, 4\} = 4$ $\lambda(h) = \min\{\infty, 8\} = 8$	$\pi(b) = a$ $\pi(h) = a$
e	{d, f}	$\lambda(d) = \min\{\infty, 9\} = 9$ $\lambda(f) = \min\{\infty, 10\} = 10$	$\pi(d) = e$ $\pi(f) = e$
b	{c, h}	$\lambda(c) = \min\{\infty, 4+8\} = 12$ $\lambda(h) = \min\{8, 4+11\} = 8$	$\pi(c) = b$ -----
h	{i, g}	$\lambda(i) = \min\{\infty, 8+7\} = 15$	$\pi(i) = h$

d	{c, f}	$\lambda(g) = \min\{\infty, 8+1\} = 9$	$\pi(g) = h$
		$\lambda(c) = \min\{12, 9+2\} = 11$	$\pi(c) = d$
		$\lambda(f) = \min\{10, 9+14\} = 10$	-----
g	{f, i}	$\lambda(f) = \min\{10, 9+14\} = 10$	-----
		$\lambda(i) = \min\{15, 9+5\} = 14$	$\pi(i) = g$
f	{c}	$\lambda(c) = \min\{11, 10+4\} = 11$	-----
c	{i}	$\lambda(i) = \min\{14, 11+2\} = 13$	$\pi(i) = c$
i	\emptyset	-----	-----

Floresta de caminhos ótimos



A heurística A*

É uma técnica aplicada para acelerar a busca por caminhos mínimos em certos tipos de grafos. Pode ser considerado uma generalização do algoritmo de Dijkstra. Um dos problemas com o algoritmo de Dijkstra é não levar em consideração nenhuma informação sobre o destino. Em grafos densamente conectados esse problema é amplificado devido ao alto número de arestas e aos muitos caminhos a serem explorados. Em suma, o algoritmo A* propõe uma heurística para dizer o quanto estamos chegando próximos do destino através da modificação da prioridades dos vértices na fila Q. É um algoritmo muito utilizado na IA de jogos eletrônicos.

Ideia: modificar a função que define a prioridade dos vértices

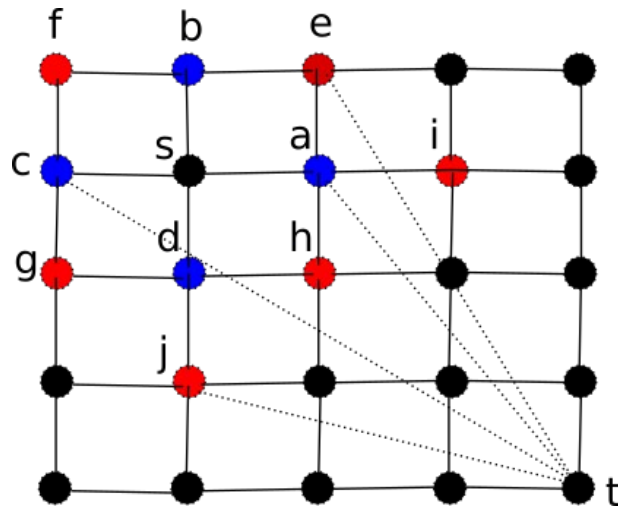
$$\alpha(v) = \lambda(v) + \gamma(v) \quad \text{onde}$$

$\lambda(v)$: custo atual de ir da origem s até v

$\gamma(v)$: custo estimado de v até o destino t (alvo)

Desafio: como calcular $\gamma(v)$?

- É viável apenas alguns casos específicos



Considere o grafo acima. O vértice s é a origem e o vértice t é o destino. Neste caso temos:

$$\lambda(a) = \lambda(b) = \lambda(c) = \lambda(d) = 1$$

o que significa que no Dijkstra, todos eles teriam a mesma prioridade. Note porém que, utilizando a distância Euclidiana para obter uma estimativa de distância até a origem, temos:

$$\begin{aligned} \gamma(a) &= \gamma(d) = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \\ \gamma(b) &= \gamma(c) = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

Ou seja, no A*, devemos priorizar a e d em detrimento de b e c uma vez que

$$1 + \sqrt{13} < 1 + 5$$

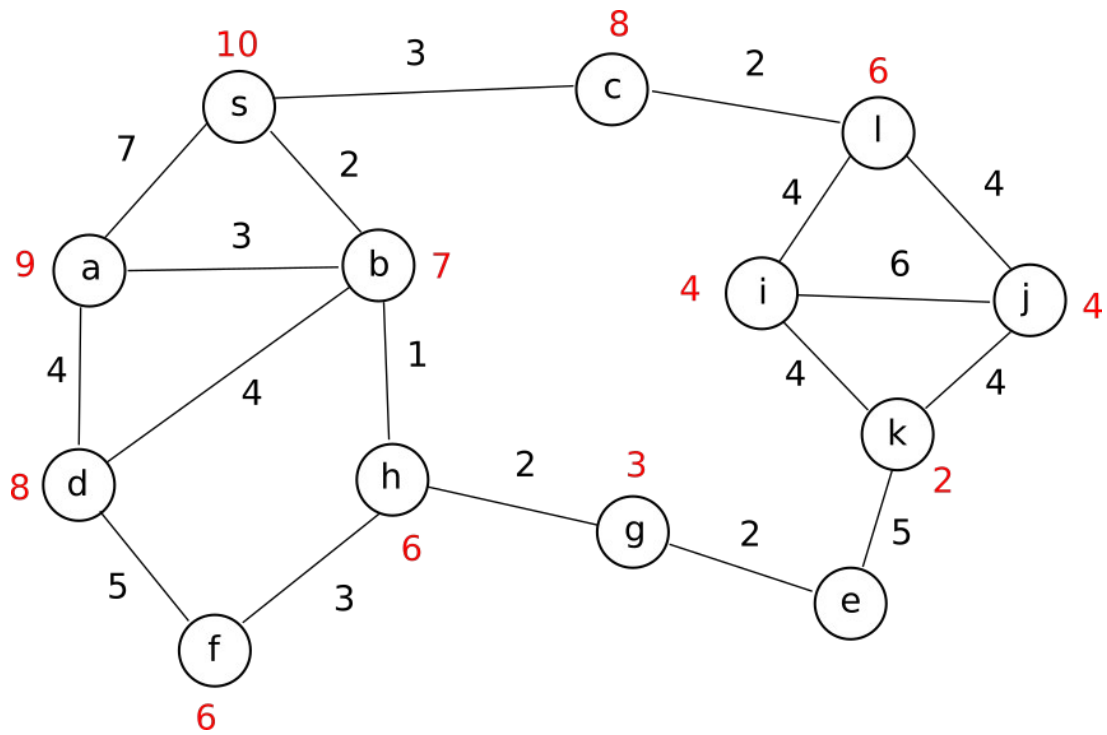
e portanto a e d saem da fila de prioridades antes. Isso ocorre pois no A* eles são considerados mais importantes. O mesmo ocorre nos demais níveis

$$\lambda(e) = \lambda(f) = \lambda(g) = \lambda(h) = \lambda(i) = \lambda(j) = 2$$

$$\gamma(e) = \sqrt{18} \quad \gamma(j) = \sqrt{10} \quad \gamma(h) = \sqrt{8}$$

A ideia é que o alvo t atraia o caminho. Se t se move, a busca por caminhos mínimos usando A* costuma ser bem mais eficiente que o Dijkstra em casos como esse.

Ex: O grafo ponderado a seguir ilustra um conjunto de cidades e os pesos das arestas são as distâncias entre elas. Estamos situados na cidade s e deseja-se encontrar um caminho mínimo até a cidade e. O números em vermelho indicam o valor de $\gamma(v)$, ou seja, são uma estimativa para a distância de v até o destino e. Sabendo disso, execute o algoritmo A* para obter o caminho mínimo de s a e.



Fila

	s	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
$\gamma^{(0)}(v)$	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$\gamma^{(1)}(v)$		7+9	2+7	3+8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$\gamma^{(2)}(v)$		5+9		3+8	6+8	∞	∞	∞	3+6	∞	∞	∞	∞
$\gamma^{(3)}(v)$		5+9		3+8	6+8	∞	6+6	5+3					
$\gamma^{(4)}(v)$		5+9		3+8	6+8	7	6+6						

Ordem de acesso aos vértices

u	$V' = \{v \in N(u) \wedge v \in Q\}$	$\lambda(v), \forall v \in V'$	$\pi(v)$
s	{a, b, c}	$\lambda(a) = \min\{\infty, 7\} = 7$ $\lambda(b) = \min\{\infty, 2\} = 2$ $\lambda(c) = \min\{\infty, 3\} = 3$	$\pi(a) = s$ $\pi(b) = s$ $\pi(c) = s$
b	{a, d, h}	$\lambda(a) = \min\{7, 2+3\} = 5$ $\lambda(d) = \min\{\infty, 2+4\} = 6$ $\lambda(h) = \min\{\infty, 2+1\} = 3$	$\pi(a) = b$ $\pi(d) = b$ $\pi(h) = b$
h	{f, g}	$\lambda(f) = \min\{\infty, 3+3\} = 6$ $\lambda(g) = \min\{\infty, 3+2\} = 5$	$\pi(f) = h$ $\pi(g) = h$
g	{e}	$\lambda(e) = \min\{\infty, 5+2\} = 7$	$\pi(e) = g$

Note como a ordem de retirada dos vértices da fila é orientada ao destino.

RESUMO: O algoritmo de Dijkstra

Vantagens

Resolve todos os tipos de problemas envolvendo caminhos mínimos

i) 1 – 1 (caminho ótimo s-t): basta parar ao remover t da fila de prioridades

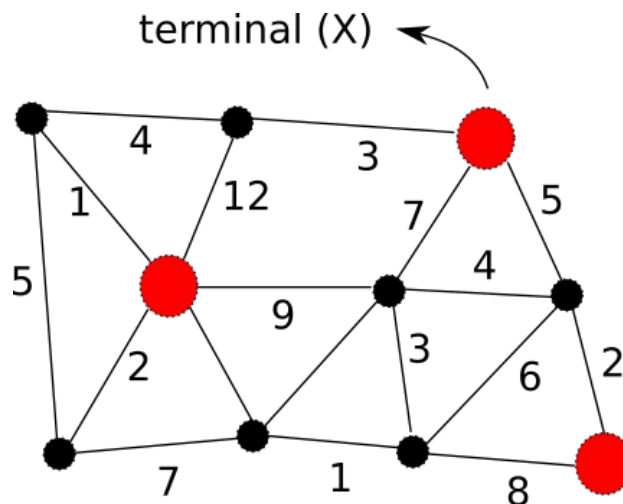
ii) 1 – N (árvore de caminhos ótimos)

iii) N – N (múltiplas árvores): executar Dijkstra N vezes, cada uma com uma raiz diferente

Obs: Há um algoritmo que resolve exclusivamente o subproblema iii): Floyd-Warshall, cuja complexidade computacional é $O(n^3)$. Porém, em termos de custo computacional é equivalente a executar N vezes o algoritmo de Dijkstra.

O problema da árvore de Steiner

Seja $G = (V, E, w, X, \Lambda)$ onde $w: E \rightarrow R^+$, X é o conjunto de vértices terminais e $\Lambda = V - X$ é o conjunto dos vértices de Steiner. O objetivo consiste em encontrar o subgrafo de peso mínimo que interconecta todos os vértices terminais (não é necessário usar todos os vértices de Steiner)



Esse problema é NP-Hard Porém dois casos especiais possuem solução ótima:

i) $|X| = 2 \rightarrow$ caminho mínimo (Dijkstra)

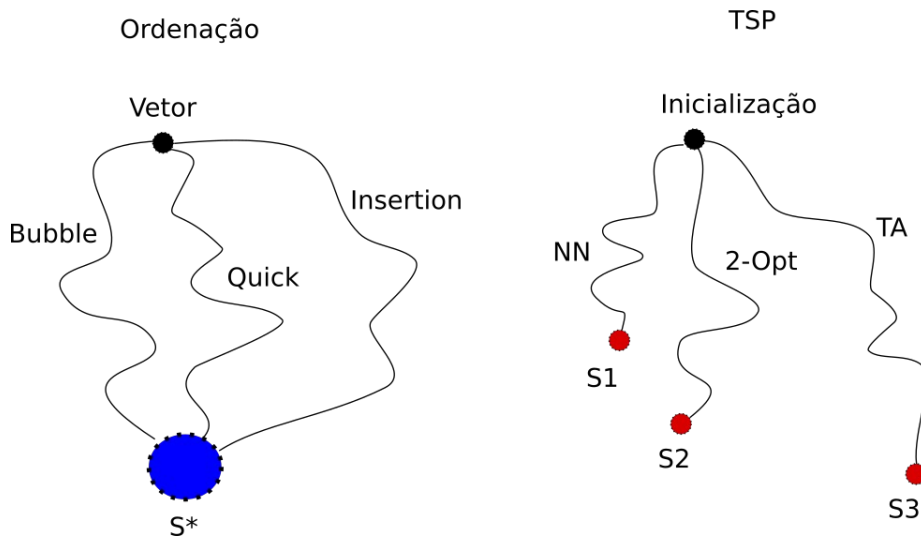
ii) $X = V$ ou $(\Lambda = \emptyset) \rightarrow$ MST (Prim)

Até o presente momento, os problemas estudados possuem algoritmos que nos oferecem sempre a melhor solução possível, ou seja, soluções ótimas. Em toda instância do problema é garantido que obteremos sempre a melhor solução. A partir de agora iremos estudar classes de problemas em que isso não se observa. São problemas para os quais muitas vezes teremos aproximações, ou seja, são soluções boas, mas não há garantias de que os algoritmos sempre fornecerão a solução ótima

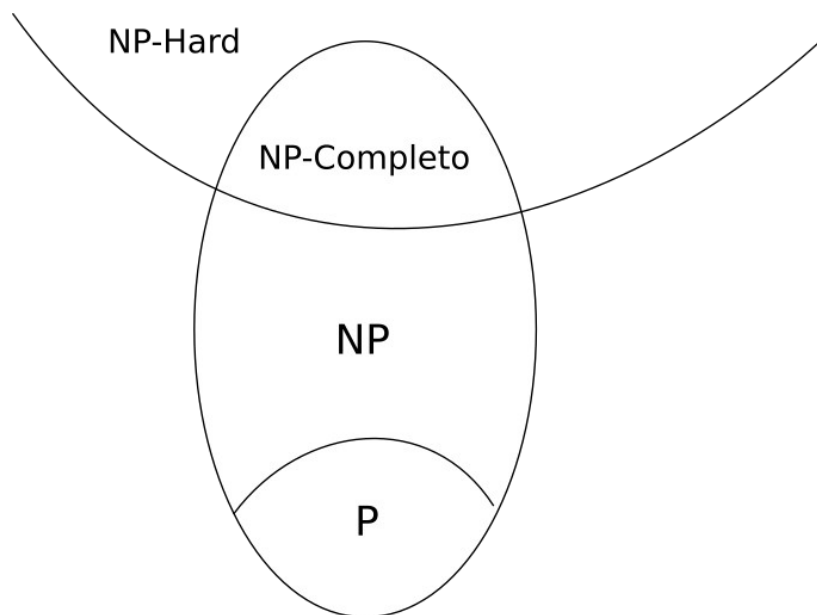
Classificação de Problemas

Problemas	X	Algoritmos
- ordenação		- Bubble, Quick, Insertion, ... ($O(n^2)$, $O(n \log n)$, ...)
- busca		- Sequencial, Binária, Largura, ,...
- TSP		- NN, 2-Opt, Twice-Around,...

O que ocorre é que em alguns problemas todos os algoritmos chegam no mesmo ponto, independente da inicialização e do caminhos. Em problemas mais complexos isso não ocorre.



Classes de Problemas computacionais



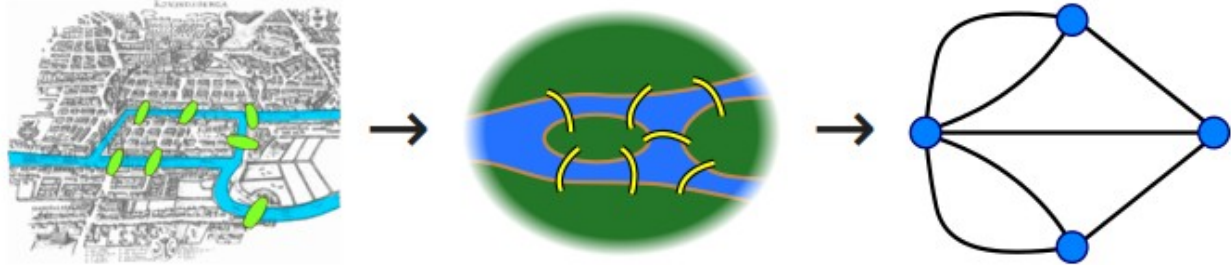
- i) $p \in P$ se é facilmente solucionável
 \exists algoritmo A $O(n^k)$ (polinomial) que resolve p
- ii) $p \in NP$ se é facilmente verificável mas não facilmente solucionável
 \nexists algoritmo eficiente que resolva p, mas dada uma solução é fácil verificar se ela é válida

\exists problemas $p \in NP$ para os quais $\forall q \in NP$ pode ser transformado em p em tempo polinomial. Ou seja, é possível converter qualquer problema de NP nesse p de maneira eficiente: Dizemos que p é NP-Completo.

- iii) $\exists p \notin NP$ para os quais verificar se uma dada solução é válida sequer é viável: NP-Hard
 Porque problemas NP-Completo são tão importantes e estudados em computação?
 Devido a possibilidade de que se for descoberto um algoritmo polinomial para um problema NP-Completo, todos os problemas em NP podem ser resolvidos de maneira eficiente: $P = NP$?

Grafos Eulerianos

Grafos Eulerianos definem uma classe muito importante de grafos que modelam diversos problemas reais. O estudo de grafos Eulerianos nos remete as origens da Teoria dos Grafos, quando em 1736, Leonard Euler propôs o problema das 7 pontes de Königsberg



Def: Trilha de Euler

É uma trilha que engloba toda aresta de G (ou seja, passa exatamente 1 única vez em cada aresta)
 Pode ter origem e destino diferentes

Def: Tour de Euler/Circuito Euleriano

É toda trilha de Euler fechada

Def: $G = (V, E)$ é Euleriano $\Leftrightarrow G$ admite um tour de Euler

Teorema (Euler, 1766):

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo. G é Euleriano se e somente se satisfaz a propriedade a seguir:

$$\forall v \in V (d(v) \bmod 2 = 0)$$

ou seja, se o grau de todo vértice é par.

PROVA: **(ida)** G é Euleriano $\rightarrow G$ satisfaz propriedade E

1. G admite um tour de Euler $W = s a b c d \dots s$

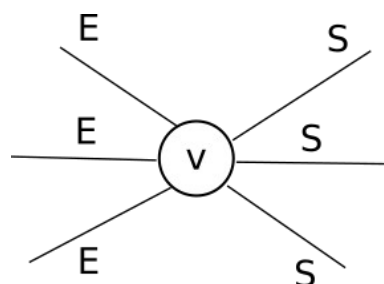
$\forall v \in V$ aparece em W (com repetições)

$\forall e \in E$ aparece em W (exatamente uma única vez)

Percorra W iniciando em s .

2. Para todo $\forall v \in V$ com $v \neq s$, seja k_v o número de vezes que o vértice v é visitado.

A cada visita a v , entramos por uma aresta (x,v) e saímos por uma aresta (v,y) .



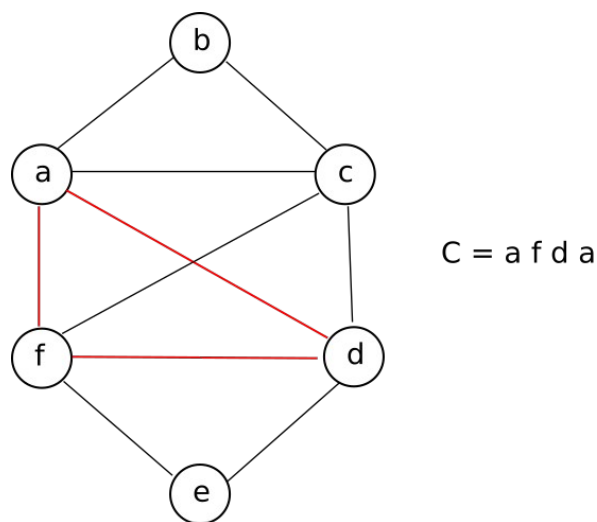
Como o tour não termina em v , segue que se consigo entrar em v , deve haver uma saída. Então, $d(v) = 2k_v$, o que resulta em um número par.

3. A única exceção é o vértice s : $d(s) = 2k_s - 2$, que também é par, pois na primeira visita apenas saímos de s e na última visita apenas entramos em s .

(volta) G satisfaz propriedade E $\rightarrow G$ contém um circuito Euleriano

A prova dessa afirmação é feita apresentando um algoritmo que, dado um grafo G que satisfaz E, sempre produz um tour de Euler.

1. Escolha um vértice arbitrário $v \in V$ e inicie um circuito C .
 - a) A cada passo, escolha uma aresta, atravesse-a e apague-a de G .
 - b) Pare apenas ao retornar a v .



2. **FATO:** Enquanto não retornamos a v , não podemos ficar presos (pois graus são todos pares)

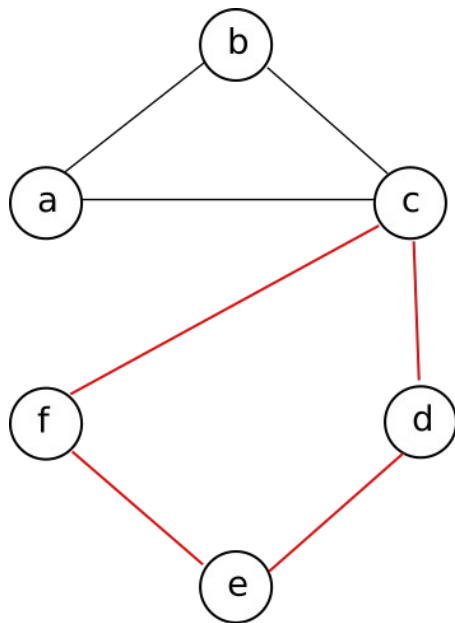
$\forall u \in V - \{v\}$ não há como ficar preso em u pois:

- Antes de cada visita a u , ele tem grau par, o que implica em
 - Enquanto visitamos u , ele tem grau ímpar, o que implica em
 - É impossível visitar u quando ele tem grau zero (não havendo saída)

3. Se o circuito C encontrado contém $\forall e \in E$, OK. Ele é Euleriano como desejado.

4. Caso contrário, um dos vértices visitados ainda possui grau positivo (> 0), pois G é conexo e ao deletar as arestas do circuito C , subtraímos 2 dos graus dos vértices $v \in C$. Isso significa que ainda há arestas a serem percorridas. Além disso, o grau de todos os vértices restante é par.

5. Escolha um vértice $v \in C$ e percorra outro circuito C , como antes, até retornar ao ponto de partida. Isso novamente é possível de ser realizado de acordo com o passo 2,

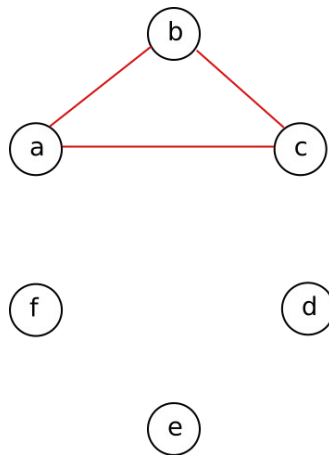


$$C' = f e d c f$$

6. Temos agora, 2 circuitos arestas disjuntos com ao menos um vértice em comum que podem ser combinados para gerar um novo circuito C.

$$\begin{array}{l}
 C = a \rightarrow f \rightarrow d \rightarrow a \\
 \quad \quad \quad + \quad \quad \quad \Rightarrow \\
 C' = f \rightarrow e \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow f
 \end{array}
 \quad C = a \rightarrow f \rightarrow e \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow f \rightarrow d \rightarrow a$$

7. Repita os passos 3, 4, 5 e 6 até não restar mais arestas em G.



$$C'' = c b a c$$

$$\begin{array}{l}
 C = a \rightarrow f \rightarrow e \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow f \rightarrow d \rightarrow a \\
 \quad \quad \quad + \quad \quad \quad \Rightarrow \\
 C'' = c \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow c
 \end{array}
 \quad C = a \rightarrow f \rightarrow e \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow c \rightarrow f \rightarrow d \rightarrow a$$

8. Ao fim do processo, é obtido um circuito que contém $\forall e \in E$
 Esse resultado é importante pois nos fornece uma maneira eficiente para decidir se um dado grafo G é Euleriano ou não. Decidir se G é Euleriano é algo trivial, feito em tempo polinomial (basta verificar se a lista de graus contém apenas números pares)

Veremos a seguir um algoritmo para a construção de um tour de Euler válido a partir de um grafo G Euleriano.

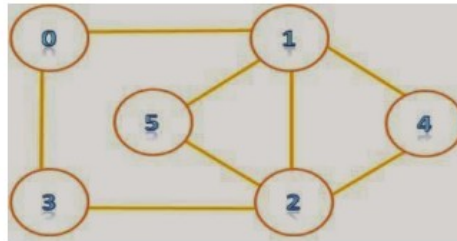
Algoritmo de Fleury

Entrada: $G = (V, E)$ Euleriano

Saída: Tour de Euler

1. Escolha um vértice inicial v_0 qualquer
2. Se $W_i = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_i v_i$ escolha e_{i+1} tal que
 - a) e_{i+1} é incidente a v_i
 - b) e_{i+1} não é ponte no subgrafo $G - W_i$ (a menos que seja a única opção)
3. Pare se W_i tiver $\forall e \in E$. Senão, volta para o passo 2.

Ex:



Variáveis:

E^- : conjunto das arestas ponte com extremidade no vértice atual v

E^+ : conjunto de arestas não ponte com extremidade no vértice atual v

$T^{(i)}$: tour de Euler no i -ésimo passo

$T^{(0)} = [0]$ (iniciaremos o tour no vértice 0)

i	E^-	E^+	$T^{(i)}$
1	\emptyset	$\{(0,1), (0,3)\}$	$[0, 1]$
2	\emptyset	$\{(1,2), (1,4), (1,5)\}$	$[0, 1, 2]$
3	$\{(2,3)\}$	$\{(2,4), (2,5)\}$	$[0, 1, 2, 4]$
4	$\{(4,1)\}$	\emptyset	$[0, 1, 2, 4, 1]$
5	$\{(1,5)\}$	\emptyset	$[0, 1, 2, 4, 1, 5]$
6	$\{(5,2)\}$	\emptyset	$[0, 1, 2, 4, 1, 5, 2]$
7	$\{(2,3)\}$	\emptyset	$[0, 1, 2, 4, 1, 5, 2, 3]$
8	$\{(3,0)\}$	\emptyset	$[0, 1, 2, 4, 1, 5, 2, 3, 0]$

Problema: O algoritmo de Fleury é mais complicado de se implementar pois depende de quão bem você consegue detectar pontes em grafos G . Há vários algoritmos para esse fim, sendo um dos mais conhecidos o método de Tarjan (Tarjan bridge finding algorithm). Outros métodos baseados na busca em profundidade (DFS) também existem. Veremos a seguir um outro algoritmo para construir um tour de Euler que não depende de detecção de ciclos.

Algoritmo de Hierholzer

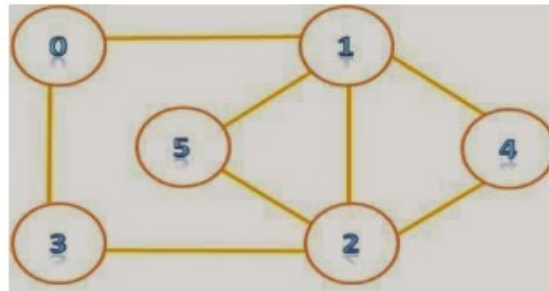
Entrada: G Euleriano

Saída: Tour de Euler T

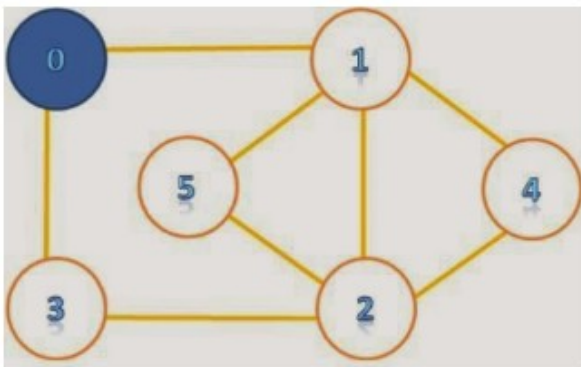
1. Escolha um vértice inicial v e insira o na pilha S . Todas as arestas iniciam desmarcadas.
2. Enquanto S não é vazia

- a. Seja u o vértice do topo.
 - b. Se u possui uma aresta incidente desmarcada para um vértice w , então adicione w a pilha S e marque aresta (u,w)
 - c. Se u não possui aresta incidente desmarcada, remova u do topo da pila S e imprima u .
3. Quando S se tornar vazia, o algoritmo terá imprimido uma sequencia de vértices T que corresponde a um tour de Euler.

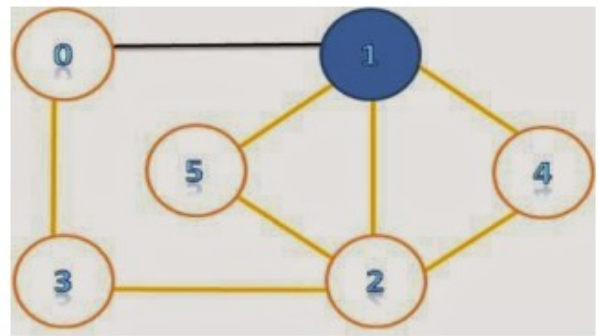
Ex:



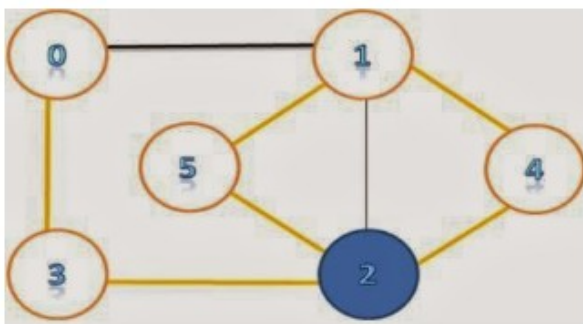
$$S = \emptyset, T = \emptyset$$



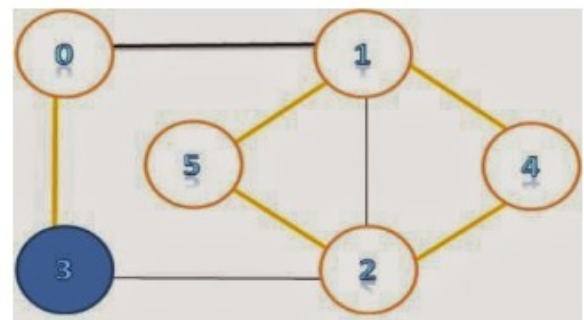
$$S = [0], T = \emptyset$$



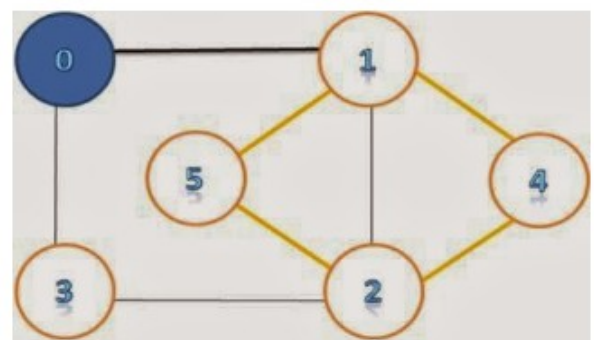
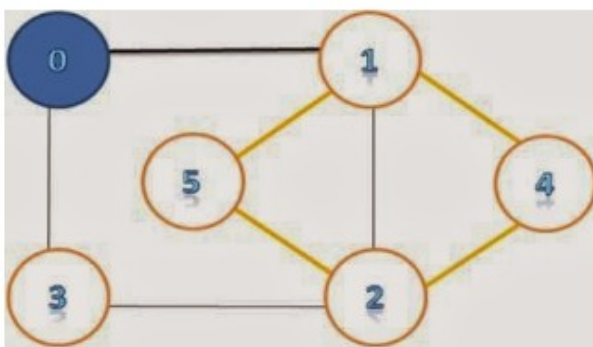
$$S = [0,1], T = \emptyset$$



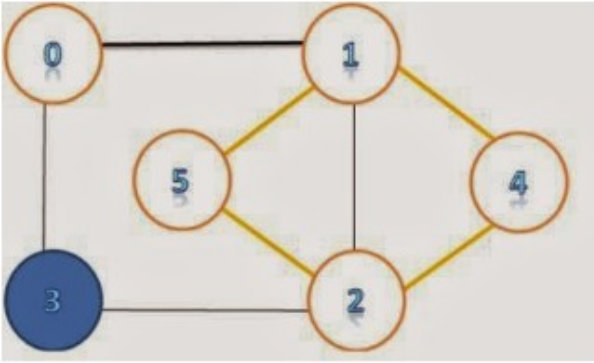
$$S = [0,1,2], T = \emptyset$$



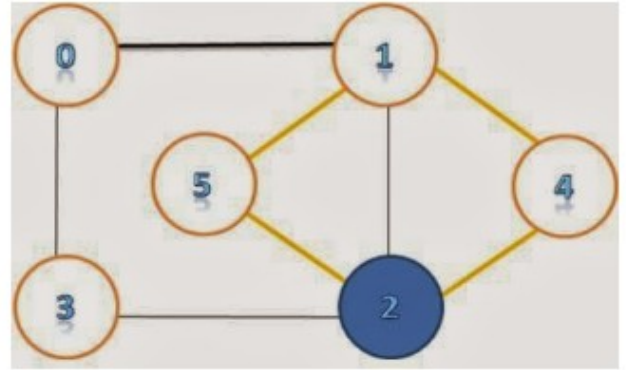
$$S = [0,1,2,3], T = \emptyset$$



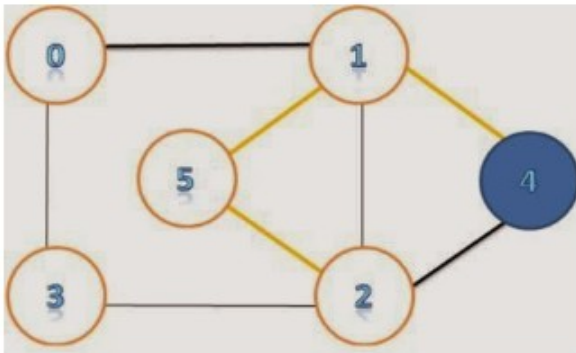
$S=[0,1,2,3,0]$, $T=\emptyset$



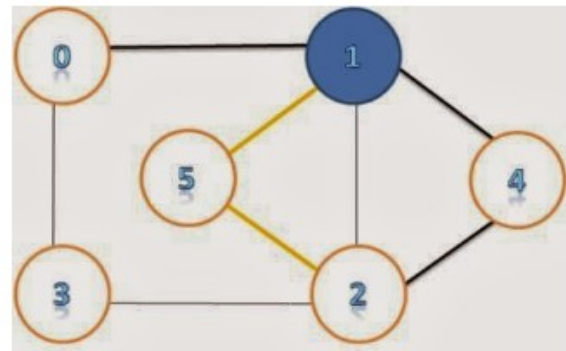
$S=[0,1,2,3]$, $T=[0]$



$S=[0,1,2]$, $T=[0,3]$

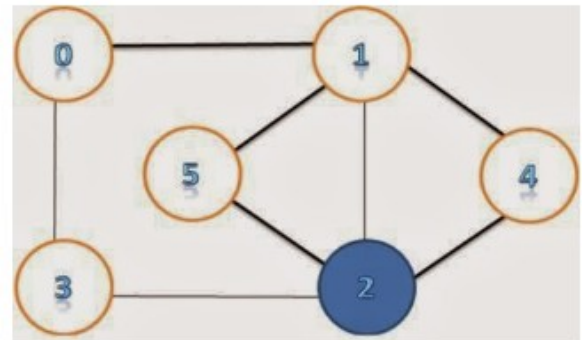
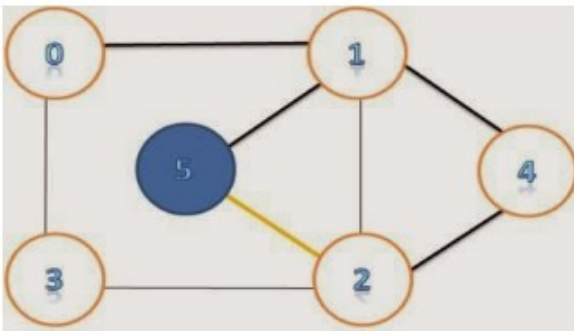


$S=[0,1,2]$, $T=[0,3]$



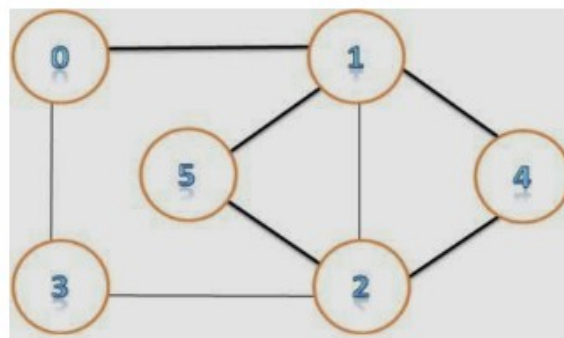
$S=[0,1,2,4]$, $T=[0,3]$

$S=[0,1,2,4,1]$, $T=[0,3]$



$S=[0,1,2,4,1,5]$, $T=[0,3]$

$S=[0,1,2,4,1,5,2]$, $T=[0,3]$



$S=\emptyset$, $T=[0,3,2,5,1,4,2,1,0]$

Veremos a seguir um importante problema envolvendo grafos Eulerianos.

O Problema do Carteiro Chinês (Chinese Postman Problem)

Objetivo: encontrar um tour de Euler de peso mínimo num grafo G ponderado

Solução trivial: G é Euleriano

Algoritmo de Fleury

Problema: E se o grafo G não for Euleriano?

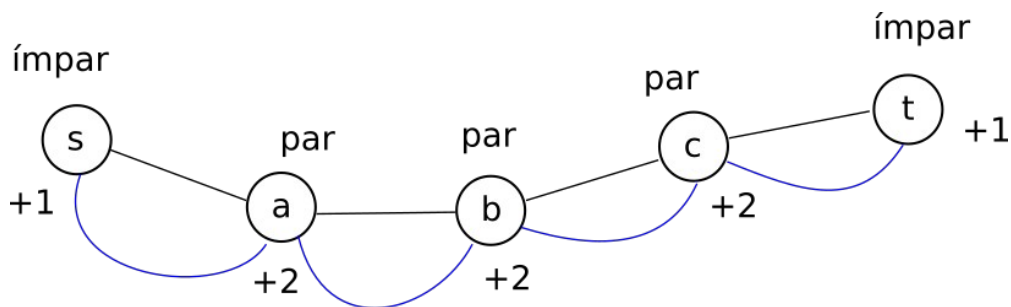
i) Transformar G num supergrafo Euleriano G^*

Objetivo: Encontrar, por duplicação de arestas, um supergrafo G^* de modo a minimizar

$$\sum_{e \in E(G^*) - E(G)} w(e) \quad (\text{minimizar soma dos pesos das arestas duplicadas})$$

Obs: $E(G^*) - E(G)$ denota o conjunto das arestas novas inseridas em G

Solução: Por simplificação iremos considerar o caso mais trivial do problema: o grafo G não é Euleriano pois existem exatamente 2 vértices de grau ímpar, ou seja, $|I| = 2$.

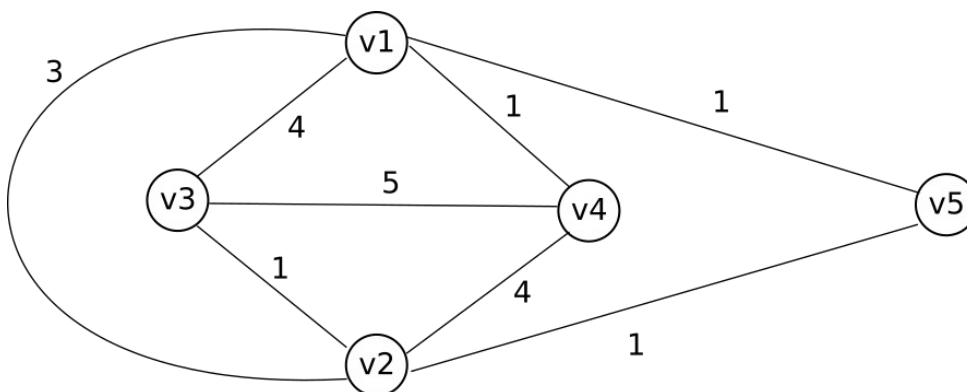


i) Aplicar algoritmo de Dijkstra para encontrar caminho mínimo P_{st}^* entre os vértices ímpares.

ii) Aplicar algoritmo de Fleury em G^* para obter um tour de Euleriano

Obs: Note que o passo crítico na solução é i), uma vez que ao realizar a duplicação de maneira incorreta, todo tour de Euler subsequente não é uma solução válida.

Ex: Supor que $v1$ é o correio central. Carteiro deve sair de $v1$ entregar cartas e voltar a $v1$ andando o mínimo possível



1) Transformar G em G^*

Aplicar algoritmo de Dijkstra para descobrir menor caminho de $v3$ a $v4$

Fila	v1	v2	v3	v4	v5
$\lambda^{(0)}(v)$	∞	∞	0	∞	∞
$\lambda^{(1)}(v)$	4	1		5	∞
$\lambda^{(2)}(v)$	4			5	2
$\lambda^{(3)}(v)$	3			5	
$\lambda^{(4)}(v)$				4	

Ordem de acesso aos vértices

u	$V' = \{v \in N(u) \wedge v \in Q\}$	$\lambda(v), \forall v \in V'$	$\pi(v)$
v3	{v1, v2, v4}	$\lambda(v_1) = \min\{\infty, 4\} = 4$ $\lambda(v_2) = \min\{\infty, 1\} = 1$ $\lambda(v_4) = \min\{\infty, 5\} = 5$	$\pi(v_1) = v_3$ $\pi(v_2) = v_3$ $\pi(v_4) = v_3$
v2	{v1, v4, v5}	$\lambda(v_1) = \min\{4, 1+3\} = 4$ $\lambda(v_4) = \min\{5, 1+4\} = 5$ $\lambda(v_5) = \min\{\infty, 1+1\} = 2$	--- --- $\pi(v_5) = v_2$
v5	{v1}	$\lambda(v_1) = \min\{4, 2+1\} = 3$	$\pi(v_1) = v_5$
v1	{v4}	$\lambda(v_4) = \min\{5, 3+1\} = 4$	$\pi(v_4) = v_1$
v4	\emptyset	---	---

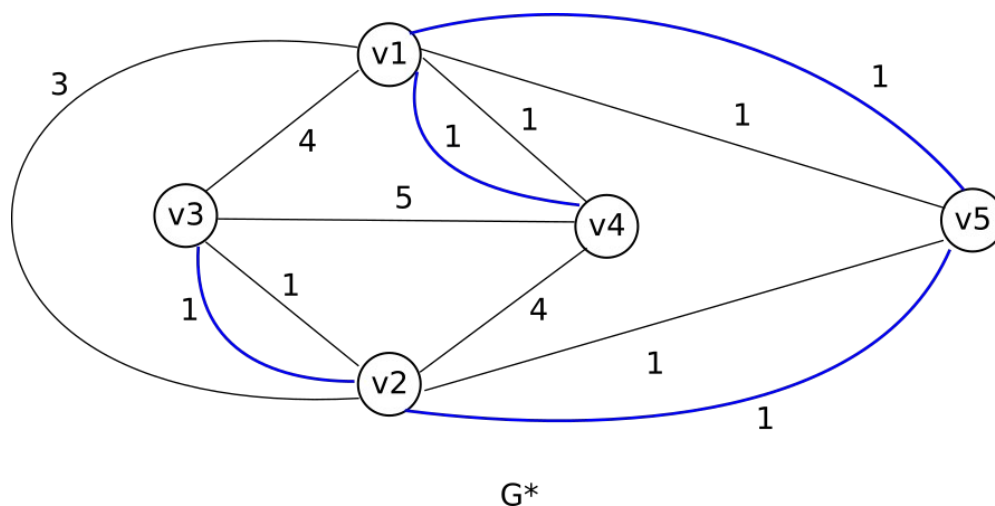
Mapa de predecessores (árvore final)

v	v1	v2	v3	v4	v5
$\pi(v)$	v5	v3	---	v1	v2

Portanto, pelo mapa de predecessores, o caminho mínimo entre v3 e v4 é dado por:

$$P^* = v3 \ v2 \ v5 \ v1 \ v4$$

Assim, o supergrafo G^* fica:



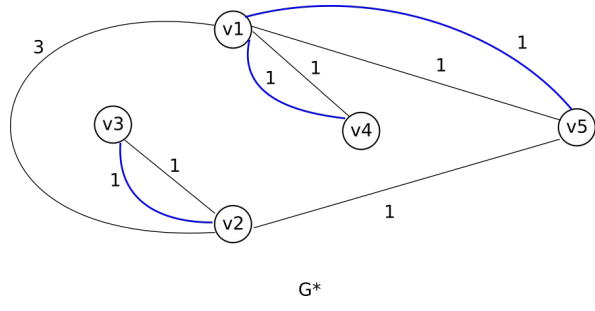
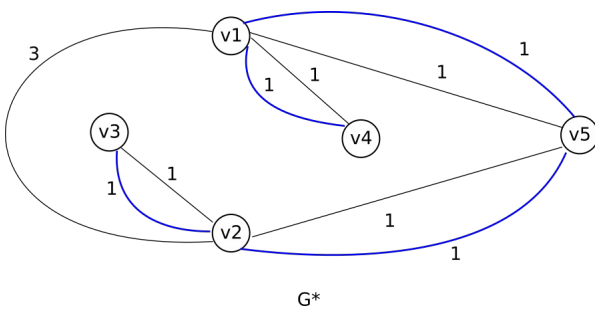
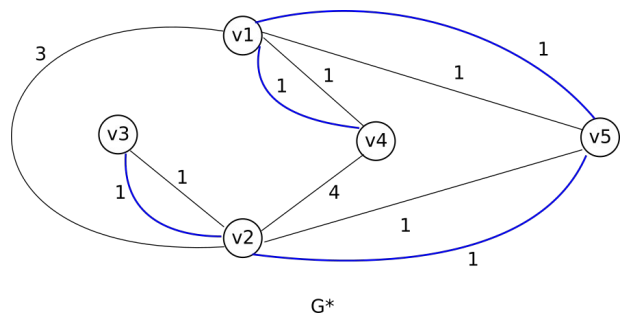
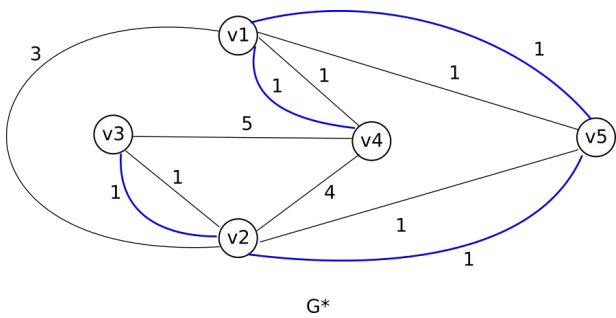
2) Obter o tour de Euler com o algoritmo de Fleury ou Hierholzer

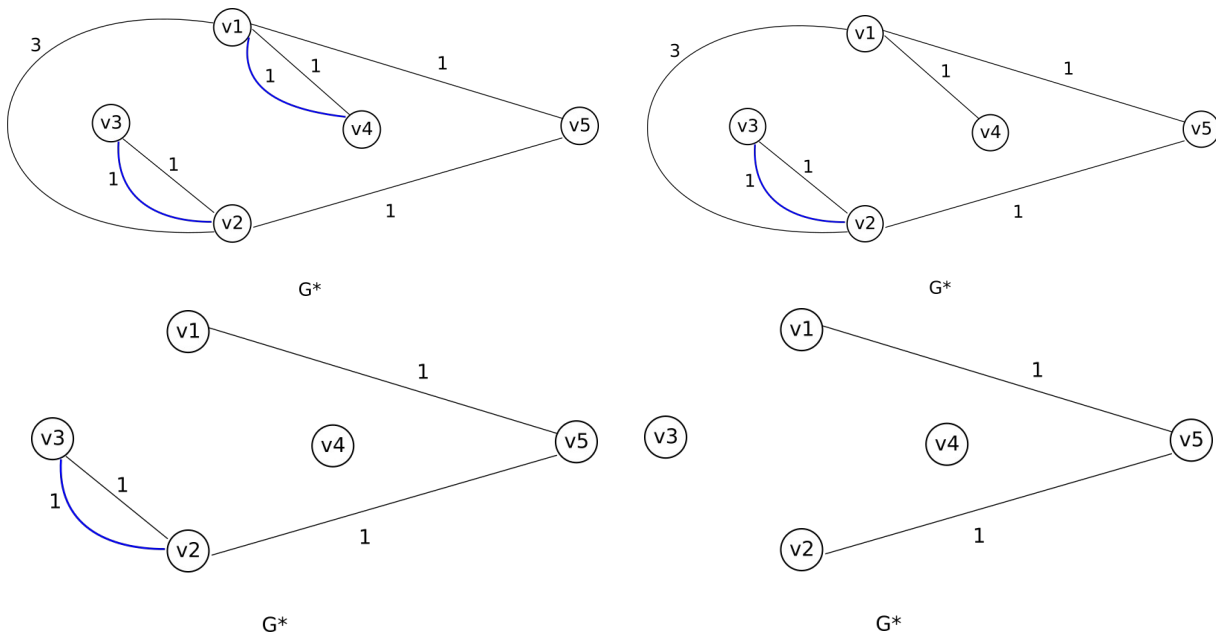
Na verdade, qualquer tour de Euler válido será de peso mínimo agora. Existem inúmeras possibilidades, dentre elas a solução mostrada a seguir.

$$T^{(0)} = [v_1] \quad (\text{iniciaremos o tour no vértice 1})$$

i	E^-	E^+	$T^{(i)}$
1	\emptyset	$\{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_1, v_4), (v_1, v_5)\}$	v_3
2	\emptyset	$\{(v_3, v_2), (v_3, v_2), (v_3, v_4)\}$	v_4
3	\emptyset	$\{(v_4, v_1), (v_4, v_1), (v_4, v_2)\}$	v_2
4	\emptyset	$\{(v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_2, v_3), (v_2, v_5), (v_2, v_5)\}$	v_5
5	\emptyset	$\{(v_5, v_2), (v_5, v_1), (v_5, v_1)\}$	v_1
6	\emptyset	$\{(v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_1, v_4), (v_1, v_5)\}$	v_4
7	$\{(v_4, v_1)\}$	\emptyset	v_1
8	\emptyset	$\{(v_1, v_2), (v_1, v_5)\}$	v_2
9	$\{(v_2, v_5)\}$	$\{(v_2, v_3), (v_2, v_3)\}$	v_3
10	$\{(v_3, v_2)\}$	\emptyset	v_2
11	$\{(v_2, v_5)\}$	\emptyset	v_5
12	$\{(v_5, v_1)\}$	\emptyset	v_1

$$T = v_1 v_3 v_4 v_2 v_5 v_1 v_4 v_1 v_2 v_3 v_2 v_5 v_1$$





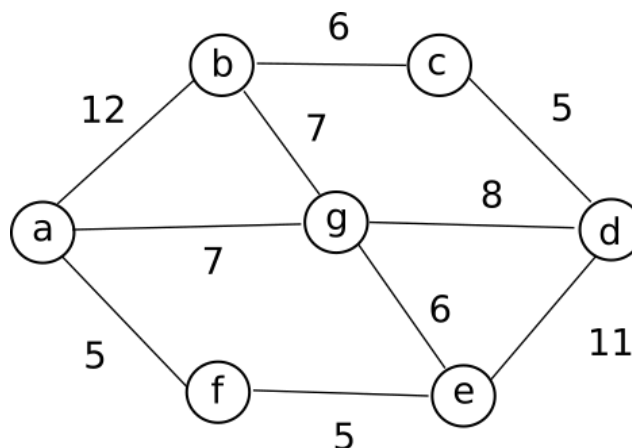
Obs: Cabe ressaltar que num grafo com muitos vértices, há um número imenso de possíveis tours de Euler, mas também há vários pontos em que somos obrigados a evitar pontes para não gerar uma solução inválida.

O caso geral ($|I| > 2$)

O caso geral do problema não limita o número de vértices ímpares. Nesse caso a solução é muito mais complexa, envolvendo subproblemas como encontrar um emparelhamento mínimo. De maneira resumida a solução envolve os seguintes subproblemas:

- Encontrar caminhos mínimos entre todos os pares de vértices ímpares
- Supondo n vértices ímpares, montar um grafo K_n em que o peso das arestas é o peso de cada caminho.
- Encontrar um emparelhamento mínimo no grafo completo em questão

Ex: suponha um grafo com $|I| = 4$, ou seja, 4 vértices ímpares.



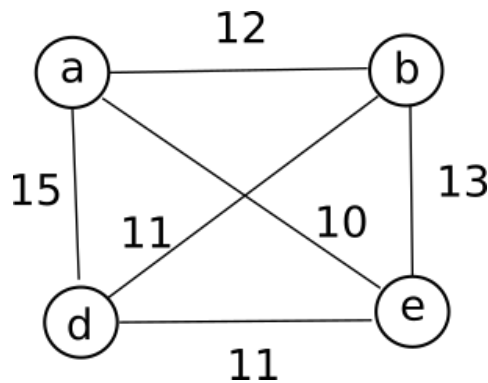
Note que existem $m = 4$ vértices ímpares: a, b, d, e

Passo 1: Encontrar o caminho mínimo entre todos os vértices ímpares. Isso significa aplicar o algoritmo de Dijkstra diversas vezes. Neste caso, teríamos:

Dijkstra a, b	
Dijkstra a, d	3
Dijkstra a, e	
Dijkstra b, d	2
Dijkstra b, e	
Dijkstra d, e	1

Note que 3 execuções do algoritmo de Dijkstra são suficientes. No caso geral de se ter m vértices ímpares, é necessário executar ao menos $m - 1$ vezes o algoritmo de Dijkstra.

Passo 2: Montar grafo K_m com os vértices ímpares em que os pesos das arestas são os custos dos caminhos mínimos



Passo 3: Obter um emparelhamento perfeito de custo mínimo em K_m (conj. independente de arestas)

Note que nesse caso existem apenas 3 possibilidades:

- (a, b) + (d, e) = 12 + 11 = 23
- (a, d) + (b, e) = 15 + 13 = 28
- (a, e) + (b, d) = 10 + 11 = 21 ← menor custo

No caso geral, pode-se mostrar que o número de emparelhamentos perfeitos em um grafo completo de m vértices é dado por:

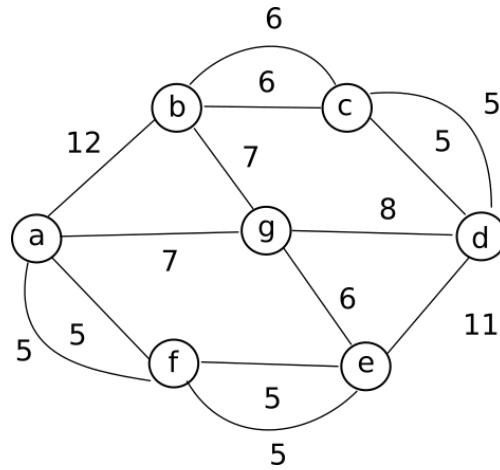
$$\prod_{\substack{i \text{ ímpar} \\ i < m}} i$$

Por exemplo, para os valores de m a seguir temos:

- $m = 4 \rightarrow 1 \times 3 = 3$
- $m = 6 \rightarrow 1 \times 3 \times 5 = 15$
- $m = 8 \rightarrow 1 \times 3 \times 5 \times 7 = 105$
- $m = 10 \rightarrow 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 = 945$

Passo 4: Duplicar em G as arestas dos caminhos mínimos selecionados. Isso garante que não haverá

vértices de grau ímpar pois os caminhos mínimos não se cruzam.



Passo 5: Extrair um tour de Euler no grafo resultante aplicando o algoritmo de Fleury ou Hierholzer

T = a b c d g b c d e f a g e f a

Grafos Hamiltonianos

Relação direta com o problema do caixeiro viajante (Traveling Salesman Problem – TSP), que é NP-Completo, sendo um dos mais importantes de toda computação!

Def: Um ciclo Hamiltoniano é um ciclo que engloba todo vértice de G (ciclo não permite repetição)

Def: Um grafo G é Hamiltoniano se e somente se G possui um ciclo Hamiltoniano (dual de Euler)

Obs: $\forall n > 2$ K_n é Hamiltoniano

Processo de crescimento das arestas

Supor um grafo G arbitrário não Hamiltoniano

$$G \xrightarrow{+e} G' \xrightarrow{+e} G'' \xrightarrow{+e} G''' \xrightarrow{+e} \dots \xrightarrow{+e} K_n$$

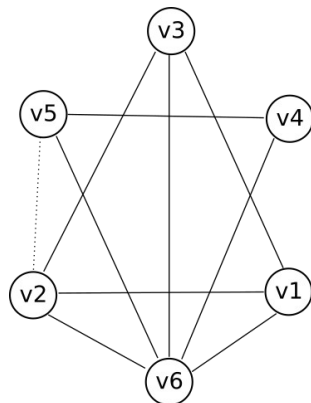
A cada passo, uma aresta é inserida em G . Como K_n é Hamiltoniano, segue que em algum momento entre G e K_n , o grafo torna-se Hamiltoniano. Usaremos essa noção para a definição a seguir.

Def: Um grafo G é não Hamiltoniano maximal se G não é Hamiltoniano mas a adição de qualquer nova aresta o torna Hamiltoniano (está na iminência de se tornar Hamiltoniano)

Ex: considere o grafo G a seguir. Note que G não admite um ciclo Hamiltoniano mas ao adicionar qualquer aresta nova, G torna-se Hamiltoniano

No caso da aresta $(v2, v5)$ temos: $v6 - v4 - v5 - v2 - v1 - v3 - v6$

No caso da aresta $(v1, v4)$ temos: $v6 - v5 - v4 - v1 - v2 - v3 - v6$



Pergunta: Como decidir se um dado grafo G é Hamiltoniano? Problema difícil. (NP-Completo)
Porque? Melhor resultado que se tem até hoje

Teorema (Dirac, 1952)

Seja $G = (V, E)$ um grafo básico simples com $|V| = n > 2$. Então,

$$\forall v \in V (d(v) \geq \frac{n}{2}) \rightarrow G \text{ é Hamiltoniano}$$

Em outras palavras, o que esse resultado nos diz é que se cada um dos vértices de G se liga pelo menos a metade dos demais, então G é Hamiltoniano. (esse resultado ainda é considerado o estado da arte na identificação de grafos Hamiltonianos, no sentido que não há nada mais poderoso)

PROVA: (por contradição)

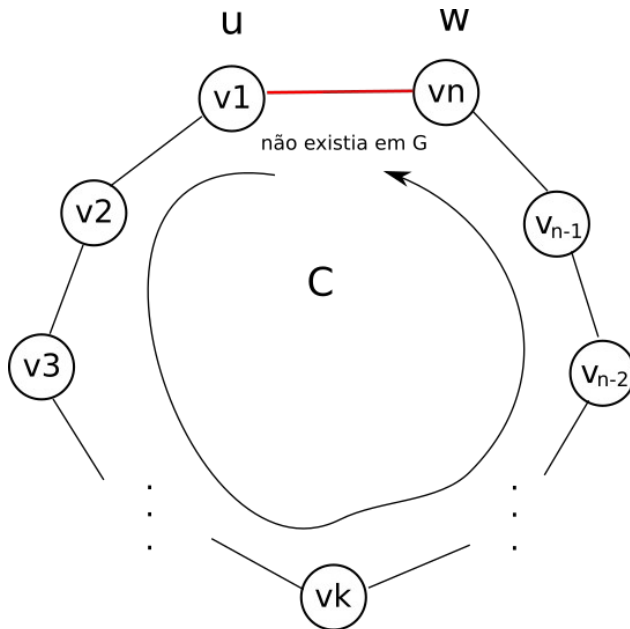
Ideia é verificar que não pode existir G que satisfaça propriedade H e não seja Hamiltoniano

Suponha que $\exists G = (V, E)$ básico simples que satisfaz propriedade mas não é Hamiltoniano.

Considere G como sendo não Hamiltoniano maximal. Então \exists em G $u, w \in V$ não adjacentes.

Faça $H = G + (u, w)$. H é Hamiltoniano, então \exists ciclo C que passa por $\forall v \in V$

Chamaremos $u = v_1$ e $w = v_n$



$$H = G + (u, w)$$

$$C = v_1 v_2 v_3 \dots v_{n-1} v_n$$

com

$$v_1 = v_{n+1} = u$$

$$v_n = w$$

Defina 2 conjuntos de vértices, S e T , como segue:

$$S = \{ v_i : \exists \text{ aresta que liga } u \text{ a } v_{i+1} \}$$

$$T = \{ v_j : \exists \text{ aresta que liga } w \text{ a } v_j \}$$

Obs: Quem está em S ? Não importa! Quantos elementos estão em S ? Isso importa

Assim, temos que $|T| = d(w)$ e $|S| = d(u)$ (número de ligações).

Agora, iremos verificar que \exists ao menos um vértice que não está em S nem em T : v_n

Note que:

i) $v_n \notin S$: Porque? \exists aresta que liga u a $v_{n+1} = u$? Não pois não há loops!

ii) $v_n \notin T$: Porque? \exists aresta que liga w a $v_n = w$? Não pois não há loops!

Dessa forma, $v_n \notin S \cup T$, o que implica que $|S \cup T| < n$

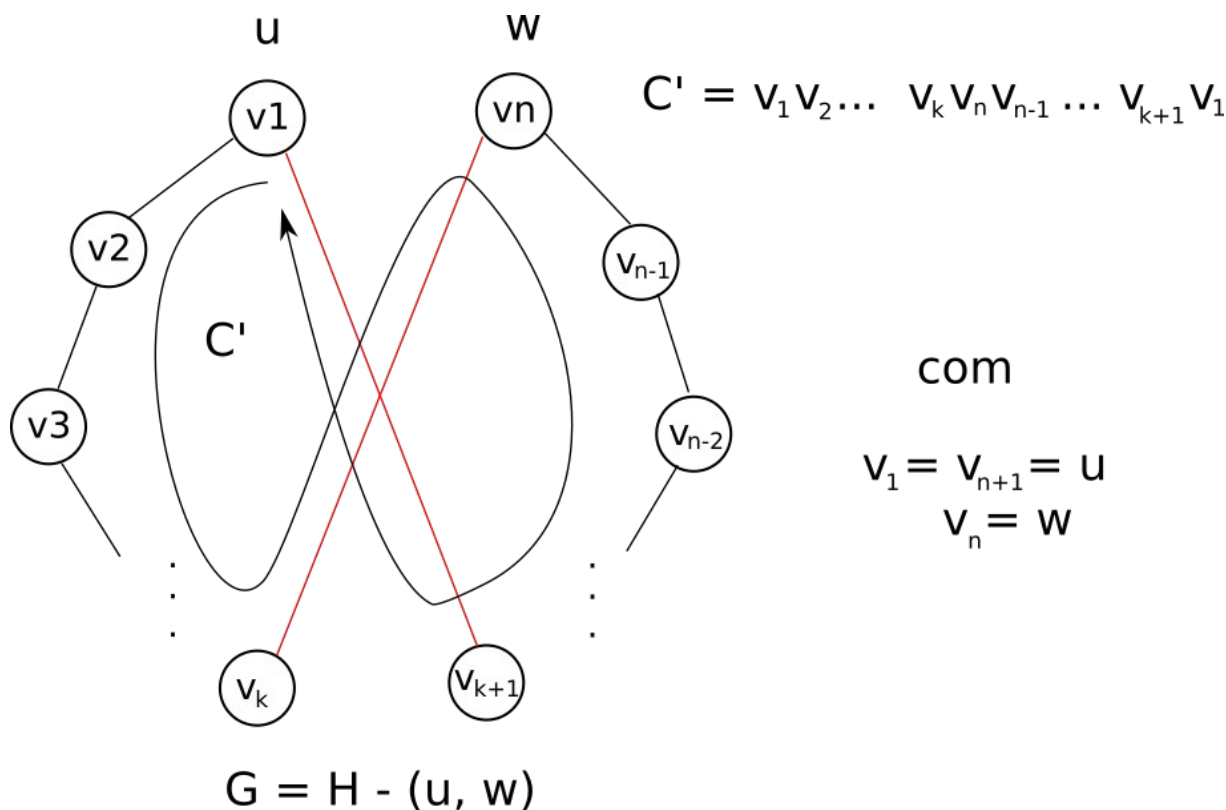
O próximo passo consiste em responder a pergunta: $\exists v_k \in S \cap T$?

Suponha que sim, se chegarmos numa contradição é porque não pode existir. Vamos considerar que

$v_k \in S \cap T$. Então,

i) se $v_k \in S$: \exists aresta que liga u a v_{k+1}

ii) se $v_k \in T$: \exists aresta que liga w a v_k



Porém, nesse caso G seria Hamiltoniano pois existiria um ciclo C' que envolve todo vértice de G . Isso fere a definição inicial de que G é não Hamiltoniano Maximal, gerando uma contradição e portanto invalidando a suposição de que $\exists v_k \in S \cap T$. O fato é que $\nexists v_k \in S \cap T$. Isso implica que $S \cap T = \emptyset$.

Dessa forma, da teoria dos conjuntos temos:

$$|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T| = d(u) + d(w)$$

Mas como de (*) temos que $|S \cup T| < n$ finalmente chegamos a:

$$d(u) + d(w) < n$$

o que é uma contradição para a primeira suposição, pois todo grafo que satisfaz H tem

$$d(u) \geq \frac{n}{2} \quad \text{e} \quad d(w) \geq \frac{n}{2}$$

para quaisquer u e w em V , ou seja, $d(u) + d(w) \geq n$. Em outras palavras, a hipótese de que existe G que satisfaz H e não seja Hamiltoniano é falsa.

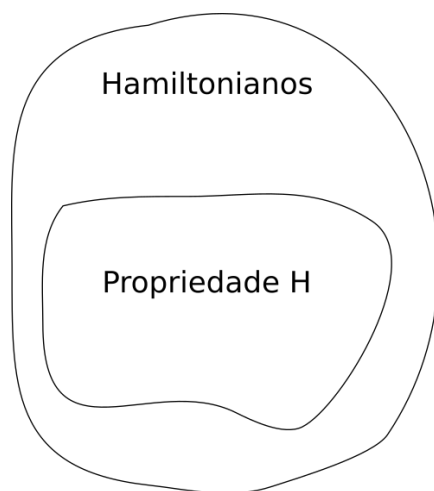
Conclusão: Não existe grafo G que satisfaz a propriedade H e não seja Hamiltoniano.
(se H é verdade então é certeza que G é Hamiltoniano)

Mas isso garante que é simples decidir se um dado G é Hamiltoniano? Não, pois posso ter grafos G para os quais H falha e mesmo assim eles são Hamiltonianos. Exemplo: grafo 2-regular conexo

Problema em aberto: ninguém nunca demonstrou a volta. Nem mesmo propôs um critério mais efetivo (do tipo se e somente se)

O teorema anterior, apesar de poderoso, não nos fornece uma caracterização completa de grafos Hamiltonianos. Basicamente, ele diz que todo grafo que satisfaz a propriedade H é Hamiltoniano, mas nem todo grafo Hamiltoniano satisfaz a propriedade H.

Pergunta: Você é capaz de apontar um grafo Hamiltoniano que não satisfaz H?



Teorema (Ore): Seja $G = (V, E)$ um grafo básico simples de n vértices e sejam u e v vértices não adjacentes tais que:

$$d(u) + d(v) \geq n$$

Então, G é Hamiltoniano se e somente se $G + (u, v)$ é Hamiltoniano.

Prova: $p \leftrightarrow q$

Parte 1: $p \rightarrow q$

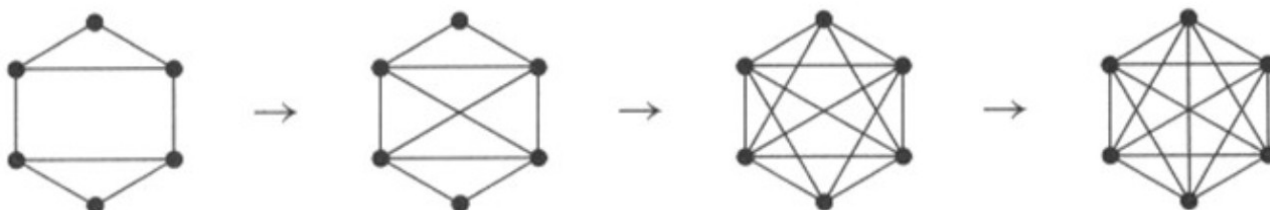
Se G é Hamiltoniano, é trivial que a adição de qualquer aresta faz com que ele permaneça Hamiltoniano.

Parte 2: $q \rightarrow p$ (por contradição)

1. Suponha que $H = G + (u, v)$ seja Hamiltoniano.
2. Então, para G não ser Hamiltoniano devemos ter $d(u) + d(v) < n$ (contrapositiva do teorema de Dirac)
3. Essa é uma contradição para a hipótese inicial.
4. Portanto, G deve ser Hamiltoniano.

Def: Fechamento de um grafo G .

Seja $G = (V, E)$ um grafo básico simples. Enquanto existir vértices não adjacentes u e v tal que $d(u) + d(v) \geq n$, una-os por uma aresta. O grafo final, $c(G)$, é denominado de fechamento de G (closure).



Teorema (Bondy e Chvatal, 1976): Um grafo básico simples G é Hamiltoniano se e somente se seu fechamento $c(G)$ é Hamiltoniano.

Prova: $p \leftrightarrow q$

Parte 1: $p \rightarrow q$

É fácil perceber que se G é Hamiltoniano, a adição de qualquer aresta em G o mantém Hamiltoniano.

Parte 2: $q \rightarrow p$

1. Suponha que $c(G)$ seja Hamiltoniano.

2. Seja $G, G_1, G_2, G_3, \dots, G_{K-1}, G_K = c(G)$ a sequência de grafos obtidos aplicando a operação de fechamento.

3. Como $c(G) = G_K$ é obtido de G_{K-1} por

$$G_K = G_{K-1} + (u, v)$$

onde u, v são vértices não adjacentes em G_{K-1} com $d(u) + d(v) \geq n$.

4. Pelo teorema anterior, G_{K-1} é Hamiltoniano.

5. Pelo mesmo raciocínio, $G_{K-2}, G_{K-3}, \dots, G$ são Hamiltonianos.

Corolário: Seja $G = (V, E)$ um grafo básico simples com $|V| > 2$. Se $c(G) = K_n$, ou seja, o fechamento é Hamiltoniano, então G é Hamiltoniano.

Teorema (Pósa, 1962): Seja $G = (V, E)$ um grafo básico simples com $|V| > 2$ e $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ a sequência dos graus dos vértices em ordem crescente. Se para todo i , tal que $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$, $d_i \geq i+1$, então G é Hamiltoniano.

Por questões de complexidade, iremos omitir a prova desse importante resultado.

Ex: $L_G = (2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6)$ é a lista de graus de um grafo G Hamiltoniano? Justifique.

$$n/2 = 4 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$i = 1: \quad d_1 = 2 \geq 1+1 \quad \text{ok}$$

$$i = 2: \quad d_2 = 3 \geq 2+1 \quad \text{ok}$$

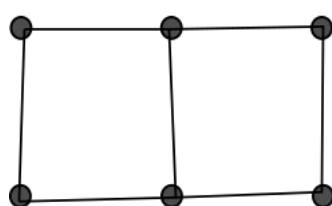
$$i = 3: \quad d_3 = 4 \geq 3+1 \quad \text{ok}$$

$$i = 4: \quad d_4 = 4 \geq 4+1 \quad \text{X (falhou)}$$

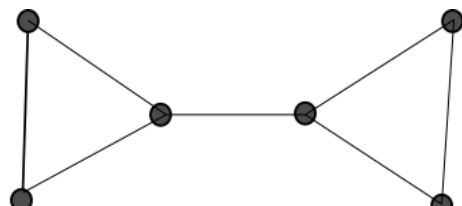
Portanto, não podemos afirmar que G é Hamiltoniano (pode ser ou pode não ser: indeterminação).

Observação: Note que uma mesma sequência de graus pode representar dois grafos distintos: um grafo G Hamiltoniano e um grafo G' não Hamiltoniano.

$$L_G = (2, 2, 2, 2, 3, 3)$$



G



G'

O Problema do Caixeiro Viajante (*Travelling Salesman Problem – TSP*)

Objetivo: Dado um grafo $G = (V, E, w)$ encontrar um ciclo Hamiltoniano de custo mínimo, ou seja, obter o ciclo C que minimiza:

$$w(C) = \sum_{e \in C} w(e)$$

Descrição do problema: A partir de um vértice inicial v_0 , visitar todos os demais uma única vez, voltando para v_0 , caminhando o mínimo possível

Ex: Motoboy deve sair da lanchonete, passar por 5 casas e voltar andando o mínimo possível

Relevância:

- Modelar e resolver vários problemas em diversas áreas da ciência (logística, seq. genoma, NASA)
- NP-Completo

Desafios: em qualquer instância do TSP, precisamos de respostas para 2 perguntas:

- $G = (V, E)$ é Hamiltoniano? (existe ciclo Hamiltoniano) → problema NP-Completo
- Se sim, como obter ciclo Hamiltoniano de custo mínimo? → problema NP-Hard

Limitações e restrições

a) Em relação a i)

Na prática, assume-se uma hipótese simplificadora: grafo de entrada é completo (K_n)

Heurística para converter $G = (V, E)$ em K_n

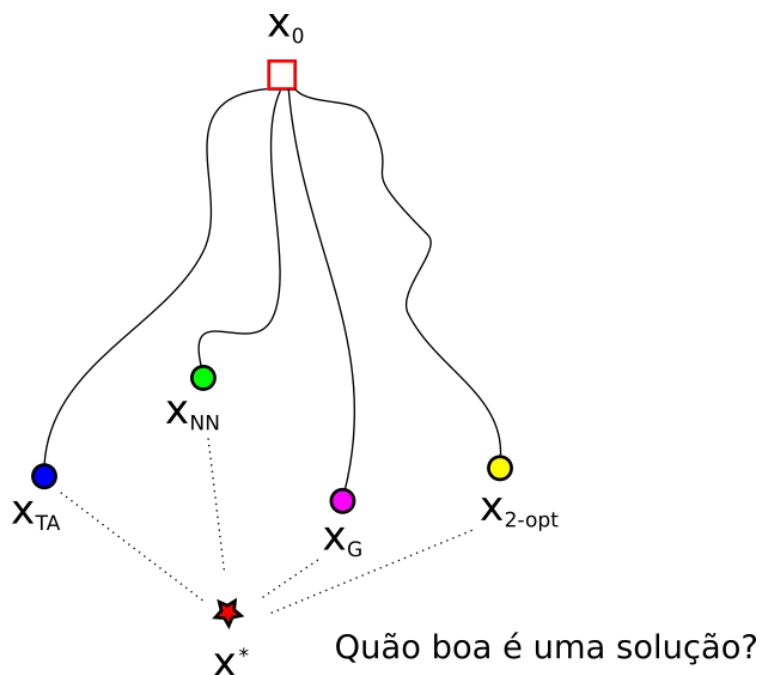
- se $e \in E$, mantém $w(e)$ intacto
- se $e \notin E$, $w(e) = \sum_{e \in E} w(e)$ (soma de todos os pesos)

b) Em relação a ii)

Não se conhece algoritmo ótimo (que produz sempre a melhor solução)

Não há garantias de que teremos a melhor solução x^*

Aceitamos algoritmos subótimos (aproximações)



Uma pergunta que deseja-se responder ao se utilizar algoritmos sub-ótimos é: quão próximo da solução ótima estamos com aquele determinado algoritmo?

Definem-se

$f(x^*)$: custo da solução ótima (melhor possível)

$f(x_A)$: custo da solução obtida pelo algoritmo A

Dizemos que o algoritmo A fornece uma c-aproximação para o TSP se $f(x_A) \leq c f(x^*)$

Def: Grafo Euclidiano (tipo de grafo muito comum em problemas de transporte)

Seja $G = (V, E, w)$ um grafo conexo com $w: E \rightarrow R^+$. G é Euclidiano se

$$\forall i, j, k \quad w(v_i, v_k) \leq w(v_i, v_j) + w(v_j, v_k)$$

ou seja, se vale a desigualdade triangular. Isso significa que tomar atalhos é sempre vantajoso.

Um grafo é Euclidiano se seus vértices representam pontos no plano e os pesos das arestas são distâncias entre os pontos.

Comentário: Essencialmente o que se faz com essa definição é considerar um grafo como um objeto contínuo, ou seja, se estamos no meio da aresta (u,v) sabemos exatamente o quão próximo estamos de u ou v. Isso representa bem cidades e estradas, bem como outros cenários do mundo real.

Algoritmos para TSP

Por motivos de simplificação consideraremos que todos os grafos são Hamiltonianos (se não forem, podem ser facilmente convertidos para um usando a heurística descrita anteriormente)

Algoritmo 1: Nearest Neighbor (NN)

Ler grafo $G = (V, E, w)$

$H \leftarrow \{v_0\}$ (ponto de partida)

Enquanto $|H| < n$ {

Encontrar v_i mais próximo do último elemento de H

$H \leftarrow H \cup \{v_i\}$

}

$H \leftarrow H \cup \{v_0\}$

Teorema: A solução obtida pelo algoritmo NN em grafos Euclidianos satisfaz:

$$f(x_{NN}) \leq \frac{1}{2} (\log_2 n + 1) f(x^*) \quad (\text{se grafo crescer qualidade da solução cai})$$

Algoritmo 2: Twice-Around

Ler grafo $G = (V, E, w)$

$H \leftarrow \emptyset$

Passo 1. $T \leftarrow \text{MST}(G)$ (Kruskal ou Prim)

Para cada $e \in T$

$T \leftarrow T + e$ (Duplique aresta e)

Passo 2. Encontre um circuito Euleriano L em T (Fleury)

Passo 3. Enquanto $L \neq \emptyset$ {

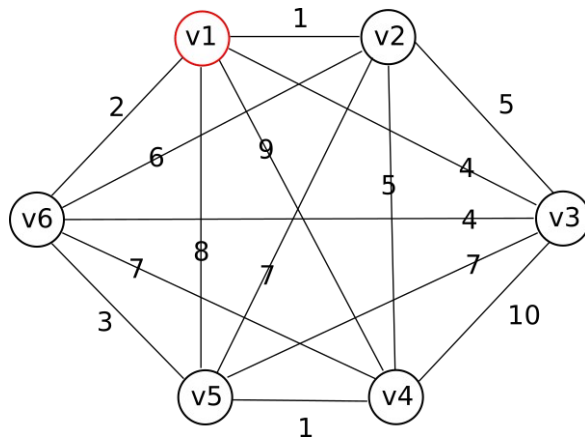
Escolha sequencialmente $l_k \in L$

Se $l_k \notin H$ então

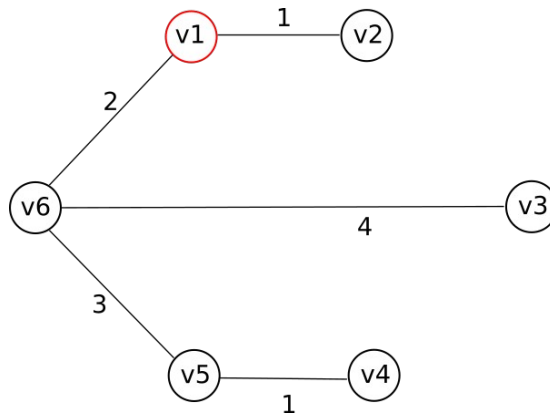
$H \leftarrow H \cup \{l_k\}$

$L \leftarrow L - \{l_k\}$

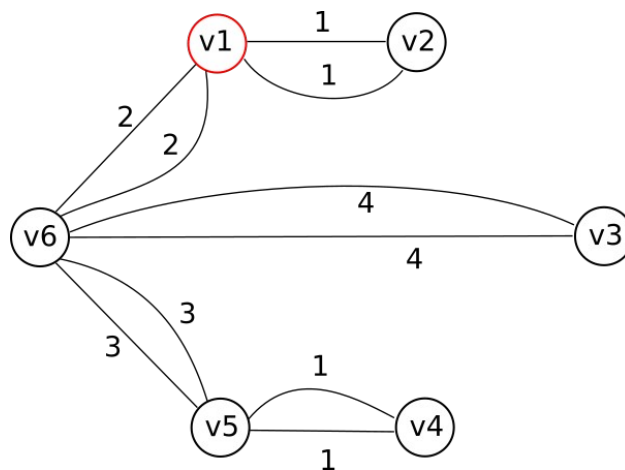
Teorema: Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo. Se T é uma MST de G , então se definirmos um supergrafo T' duplicando toda aresta de T , T' será Euleriano.



Passo 1: MST a partir de G (Aplicando Kruskal ou Prim)



Duplicando as arestas, temos um grafo Euleriano:



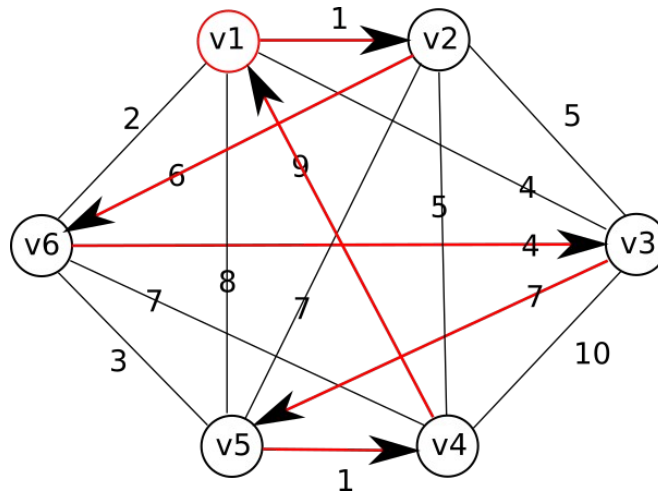
Passo 2: Tour de Euler em T

Note que embora todos os tours de Euler que possam ser extraídos pelo algoritmo de Fleury possuam o mesmo peso, a ordem de visita dos vértices acaba por afetar o resultado final, uma vez que eles determinam quais “atalhos” iremos tomar.

$L = \{v1, v2, v1, v6, v3, v6, v5, v4, v5, v6, v1\}$

Passo 3: Eliminar repetições (equivale a tomar atalhos no grafo)

$H = \{v1, v2, v6, v3, v5, v4, v1\}$



O peso do ciclo é $w(H) = 1 + 6 + 4 + 7 + 1 + 9 = 28$

Teorema: A solução obtida pelo algoritmo Twice-Around em grafos Euclidianos satisfaz:

$$f(x_{TA}) \leq 2f(x^*)$$

É fácil verificar que se x^* é a solução ótima, então se subtrairmos uma aresta de x^* , obtemos uma árvore T , ou seja, $T = x^* - e$. Também sabemos que essa árvore T tem peso maior ou igual que a MST do grafo e por isso temos:

$$f(x^*) > w(T) \geq w(T_{MST})$$

o custo de x^* é maior que de T pois o ciclo tem uma aresta a mais

Então temos que:

$$f(x^*) > w(T_{MST})$$

o que implica em

$$2f(x^*) > 2w(T_{MST}) \quad (*) \text{ (é o peso do tour de Euler extraído no passo 2)}$$

Se G é Euclidiano (tomar atalhos é sempre mais vantajoso devido a desigualdade triangular)

$$f(x_{TA}) \leq 2w(T_{MST}) \quad (**)$$

E portanto, combinando (*) e (**)

$$2f(x^*) > 2w(T_{MST}) \geq f(x_{TA})$$

Algoritmo 2 -Otimil (2-Opt)

- Método iterativo

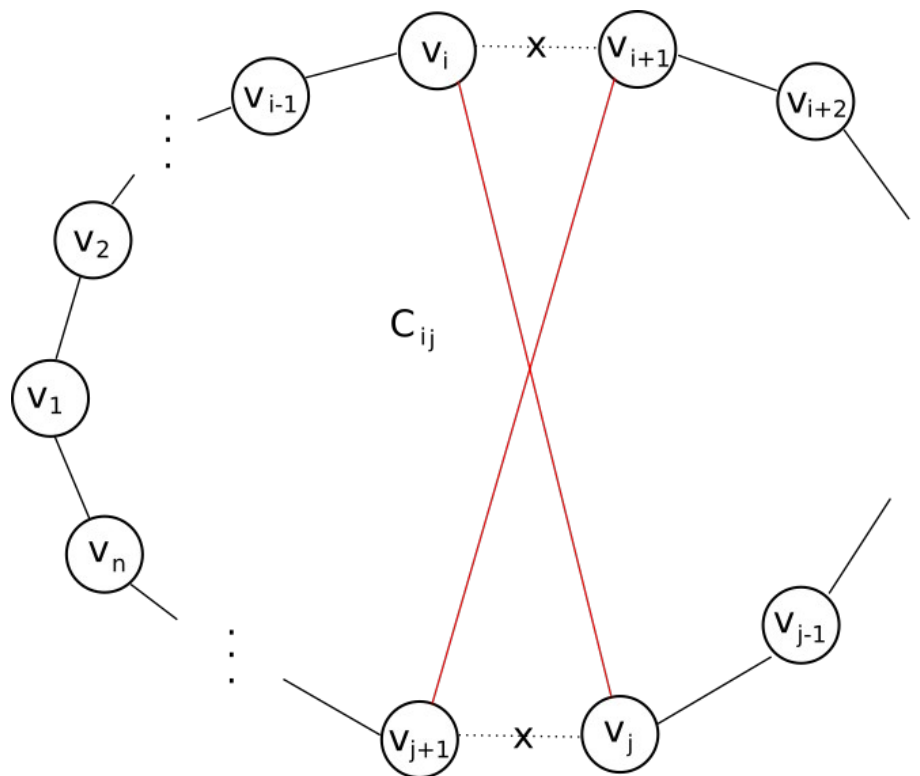
Ideia geral: partir de uma inicialização e tentar melhorá-la a cada passo (resultado final depende do chute inicial)

Obs: Não é força bruta! Há confusão pois os exemplos contém poucos vértices. Em casos com n grande a diferença é enorme. Força bruta é $O(n!)$ e 2-otimal é $O(n^2)$

Algoritmo

1. Seja $C = v_1v_2v_3 \dots v_nv_1$ uma solução inicial. Então $w(C) = w(v_1,v_2) + w(v_2,v_3) + \dots + w(v_n,v_1)$
2. Faça $i = 1$
3. Faça $j = i + 2$
4. Seja C_{ij} o ciclo obtido desligando v_i de v_{i+1} e v_j de v_{j+1} e religando da única maneira possível

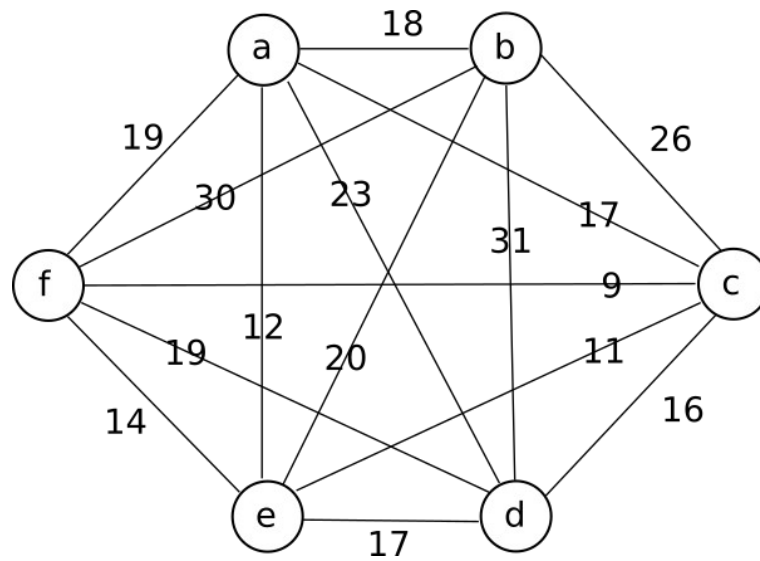
$$C_{ij} = v_1 v_2 \dots v_i v_j v_{j-1} v_{j-2} \dots v_{i+1} v_{j+1} \dots v_n v_1 \quad (\text{torção aplicada no ciclo } C)$$



Se $w(C_{ij}) < w(C)$ então $C = C_{ij}$ e volte para o passo 2. usando a nova sequencia. Caso contrário, siga para o passo 5.

5. Faça $j = j + 1$. Se $j \leq n$, volte para o passo 4. Caso contrário, $i = i + 1$ e se $i \leq n - 2$ volte para o passo 3, senão, PARE!

Ex:



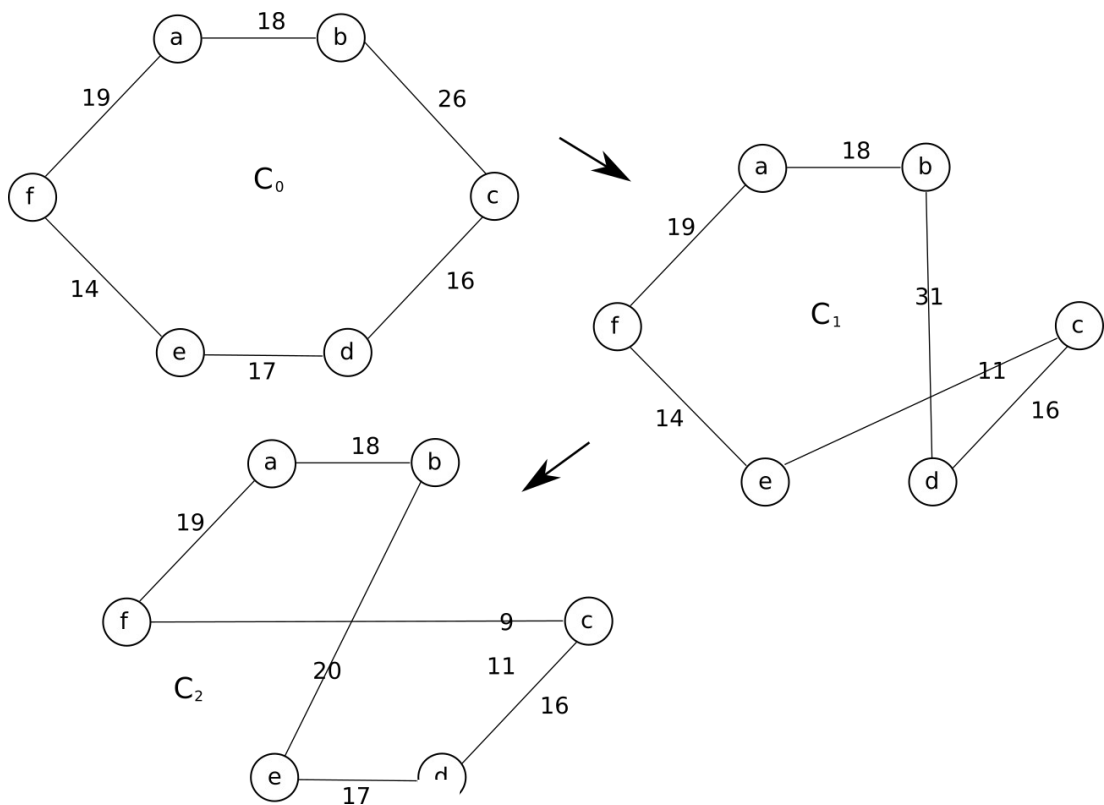
A seguir apresentamos um trace completo do algoritmo, partindo de uma solução inicial qualquer.

		C						W	
		1	2	3	4	5	6		
i	j	a	b	c	d	e	f	a	
1	3	a	c	b	d	e	f	a	110
1	3	a	c	b	d	e	f	a	124
1	4	a	d	c	b	e	f	a	118
1	5	a	e	d	c	b	f	a	120
1	6	a	f	e	d	c	b	a	110
2	4	a	b	d	c	e	f	a	109 *
1	3	a	d	b	c	e	f	a	124
1	4	a	c	d	b	e	f	a	117
1	5	a	e	c	d	b	f	a	119
1	6	a	f	e	c	d	b	a	109
2	4	a	b	c	d	e	f	a	110
2	5	a	b	e	c	d	f	a	103 *
1	3	a	e	b	c	d	f	a	112
1	4	a	c	e	b	d	f	a	117
1	5	a	d	c	e	b	f	a	119
1	6	a	f	d	c	e	b	a	103
2	4	a	b	c	e	d	f	a	110
2	5	a	b	d	c	e	f	a	109
2	6	a	b	f	d	c	e	a	104
3	5	a	b	e	d	c	f	a	99 *
1	3	a	e	b	d	c	f	a	107
1	4	a	d	e	b	c	f	a	114

1	5	a	c	d	e	b	f	a	119
1	6	a	f	c	d	e	b	a	99
2	4	a	b	d	e	c	f	a	105
2	5	a	b	c	d	e	f	a	110
2	6	a	b	f	c	d	e	a	102
3	5	a	b	e	c	d	f	a	103
3	6	a	b	e	f	c	d	a	100
4	6	a	b	e	d	f	c	a	100

PARE!

Representação gráfica

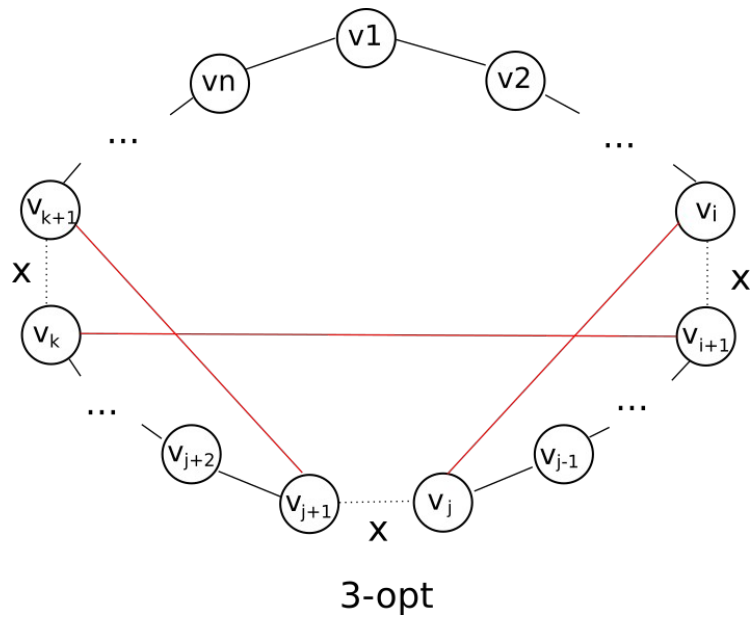


Teorema: A solução obtida pelo algoritmo 2-Opt em grafos Euclidianos satisfaz:

$$f(x_{2-opt}) \leq \log n f(x^*)$$

Para grafos genéricos (não necessariamente Euclidianos): $f(x_{2-opt}) \leq \sqrt{n} f(x^*)$

K-opt é a versão genérica do 2-opt, onde o número de cortes no ciclo é um número arbitrário K. Nesse caso, o número de combinações possíveis cresce, fazendo com que o custo computacional do algoritmo seja $O(n^K)$. Quanto maior K mais próximo da força bruta



Existem inúmeros algoritmos para a resolução do problema do caixeiro-viajante, dentre os quais podemos citar métodos estocásticos, baseado em meta-heurísticas, algoritmos genéticos, dentre outros. Porém, até o presente momento, ainda não se conhece uma prova formal que garanta a existência de um algoritmo que forneça a solução ótima para instâncias genéricas desse problema em grafos quaisquer. Note que se um dia tal prova for elaborada, então teremos que $P = NP$, pois o TSP é um problema NP-completo, o que significa que todos os problemas NP poderiam ser reduzidos a ele.

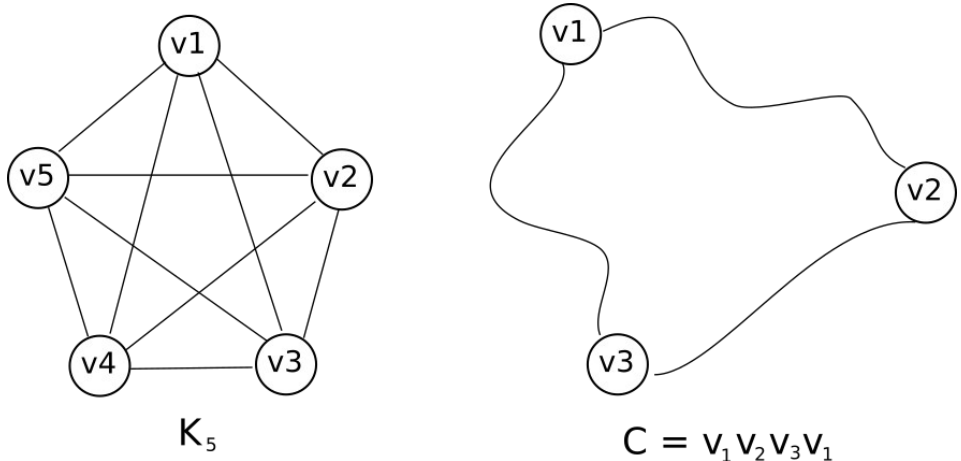
Obs: A noção de curva de Jordan para nós em grafos será a de ciclo. Todo ciclo pode ser visto como uma curva de Jordan uma vez que é uma trajetória fechada e que não repete vértices

Prop: Se C é uma curva de Jordan com $x \in \text{int}(C)$ e $y \in \text{ext}(C)$ então qualquer curva que una x a y intercepta C .

Queremos encontrar pistas sobre quais os menores blocos não planares que existem. Nessa busca, pode-se verificar o seguinte fato.

Teorema: O grafo completo K_5 não é planar

Iremos assumir que ele é planar. Veremos então que chegamos num absurdo, o que contradiz a hipótese inicial



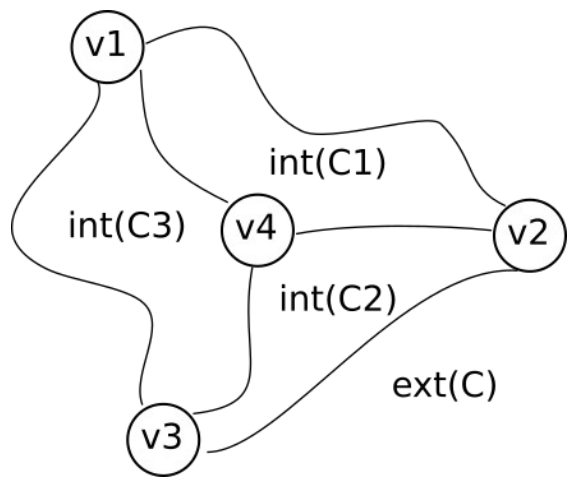
Seja $C = v_1 v_2 v_3 v_1$ (curva de Jordan)

Como $v_4 \notin C$ temos 2 opções:

- a) $v_4 \in \text{int}(C)$
- b) $v_4 \in \text{ext}(C)$

Vamos primeiramente supor a), ou seja, $v_4 \in \text{int}(C)$. Assim, temos

- $C_1 = v_1 v_2 v_4 v_1$
- $C_2 = v_2 v_3 v_4 v_2$
- $C_3 = v_3 v_4 v_1 v_3$

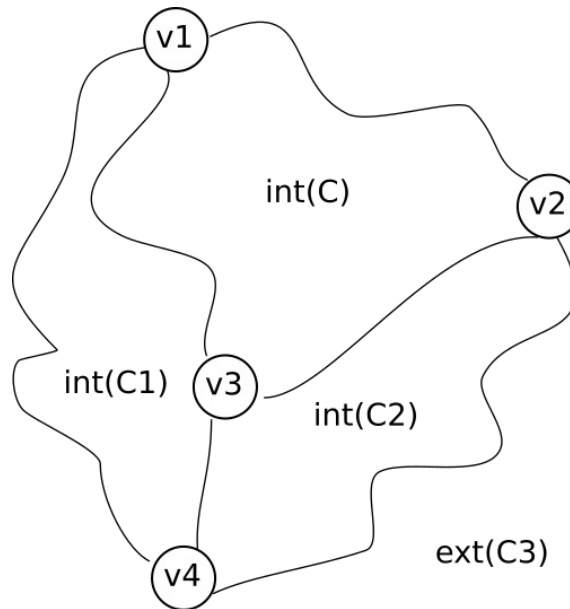


Então, temos a subdivisão do plano em 4 regiões. Para v_5 temos:

- i) $v_5 \in \text{ext}(C)$: aresta (v_4, v_5) cruza
- ii) $v_5 \in \text{int}(C_1)$: aresta (v_3, v_5) cruza
- iii) $v_5 \in \text{int}(C_2)$: aresta (v_1, v_5) cruza
- iv) $v_5 \in \text{int}(C_3)$: aresta (v_2, v_5) cruza

Senso assim, para v_4 no interior de C , não é possível K_5 ser planar. Vamos agora ao caso b), onde $v_4 \in \text{ext}(C)$. Assim, temos:

- $C = v_1 v_2 v_3 v_1$
- $C_1 = v_1 v_3 v_4 v_1$
- $C_2 = v_2 v_3 v_4 v_2$
- $C_3 = v_1 v_2 v_4 v_1$



Novamente, temos a partição do plano em 4 regiões, de modo que para v_5 tem-se:

- i) $v_5 \in \text{int}(C)$: aresta (v_4, v_5) cruza
- ii) $v_5 \in \text{int}(C_1)$: aresta (v_2, v_5) cruza
- iii) $v_5 \in \text{int}(C_2)$: aresta (v_1, v_5) cruza
- iv) $v_5 \in \text{ext}(C_3)$: aresta (v_3, v_5) cruza

Portanto, não há como K_5 ser planar.

Teorema (Fórmula de Euler): Seja $G = (V, E)$ um grafo plano conexo com $|V| = n$, $|E| = m$ e f faces ou regiões. Então,

$$n - m + f = 2$$

Prova (por indução em m):

Base ($m = 0$)

$P(0)$: G é o grafo nulo (sem arestas). Nesse caso, $n = 1$ e $f = 1$, o que nos leva a

$$1 - 0 + 1 = 2 \quad (\text{ok})$$

Passo de indução: $P(k) \rightarrow P(k+1)$ para k arbitrário

Hipótese de indução $P(k)$: $n - k + f = 2$ (assume-se que isso vale para todo grafo G com k arestas e iremos provar que se isso vale então ao adicionar uma nova aresta vai continuar valendo).

1. Suponha G em que $m = k + 1$ (o número de arestas é exatamente uma unidade maior).
2. Se G é uma árvore, então $m = n - 1$, o que implica em $n = m + 1 = k + 2$.
 - a) Como não há ciclos em árvores, existe uma única face, ou seja, $f = 1$.
 - b) Assim, temos $n - m + f = (k + 2) - (k + 1) + 1 = 2 - 1 + 1 = 2$ (ok, temos que $P(k+1)$ é V)
3. Se G não é uma árvore, então G contém um ciclo C .
 - a) Seja e uma aresta do ciclo C . Faça $G' = G - e$.
 - b) G' tem $m' = k = m - 1$ arestas e $n' = n$ vértices.
4. Mas, pela hipótese de indução, sabemos que $P(k)$ é verdade, ou seja, para qualquer grafo G com k arestas a fórmula de Euler é válida. Então, como G' tem k arestas, podemos escrever:

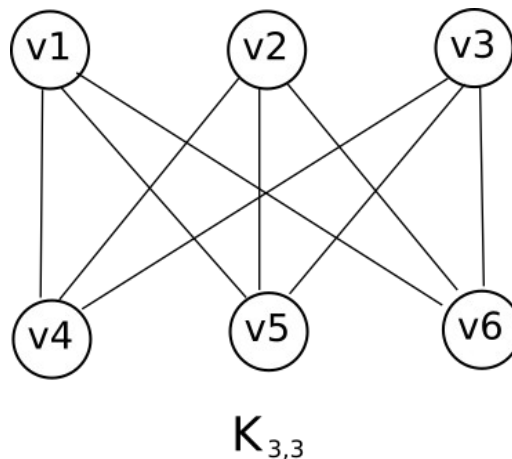
$$n' - m' + f' = 2$$

5. Como ao passar de G para G' eliminamos um ciclo, temos $f' = f - 1$ e

$$n - m + f = n' - (m' + 1) + (f' + 1) = n' - m' + f' = 2 \text{ (pelo passo anterior).}$$

Portanto, a prova está concluída.

Teorema: O grafo bipartido completo $K_{3,3}$ não é planar



Prova (por contradição):

1. Suponha inicialmente que o grafo $K_{3,3}$ seja representado por um grafo plano.
2. Sabemos que $n = 6$ e $m = 9$, porém precisamos elaborar em relação ao número de faces.
3. Como $K_{3,3}$ é bipartido, o comprimento do menor ciclo é 4 (não tem ciclo ímpar).
4. Assim, todas as faces ou regiões devem ter pelo menos 4 arestas.
5. Suponha que tenhamos k faces ou regiões: R_1, R_2, \dots, R_k e que $B(R)$ denote o número de arestas na borda da região R .
6. Seja $N = \sum_{i=1}^k B(R_i)$. Como cada região (face) é formada por pelo menos 4 arestas, então:

$$N \geq 4f$$

7. Entretanto, como cada aresta pode ser contada até duas vezes (quando está na fronteira entre 2 regiões), temos:

$$N \leq 2m = 18$$

8. Assim, podemos escrever $4f \leq 18$, o que implica em $f \leq \frac{9}{2} = 4.5$

9. Mas, usando a fórmula de Euler, chega-se em:

$$n - m + f = 6 - 9 + f = -3 + f$$

10. Como $f \leq 4.5$, temos que $-3 + f \leq 1.5$, o que é uma contradição, pois de acordo com a fórmula de Euler, esse valor deveria ser igual a 2.

Portanto, o grafo bipartido completo $K_{3,3}$ não é planar.

O problema do compartilhamento de recursos (The utility problem)

Suponha que existam 3 residências em um plano e cada uma precisa ser conectada as tubulações de 3 companhias: gás, água e eletricidade. Sem utilizar uma terceira dimensão, é possível realizar todas as nove conexões necessárias sem que as linhas se interceptem, ou seja, é possível alimentar as 3 casas com os 3 recursos? Imagine como se o mapa fosse um matriz enorme onde ficam os objetos

No plano ou esfera não, mas num toro SIM!

Habitantes da esfera e do toro, como distinguir a diferença (saber que há buraco no meio)

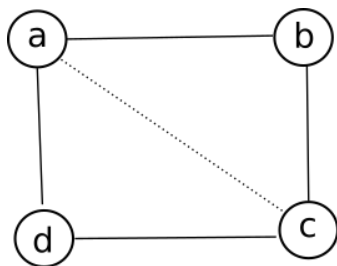
Problema: Dado um grafo G , como decidir se ele é planar ou não?

Queremos definir critérios que nos permitam responder a essa pergunta. O que eu devo procurar notar num grafo para saber se ele é planar ou não?

Em outras palavras, podemos encontrar uma imersão planar para o $K_{3,3}$ no toro! Na prática, você pode desenhar um grafo $K_{3,3}$ no toro sem cruzar nenhuma aresta! Acredite, isso é possível!

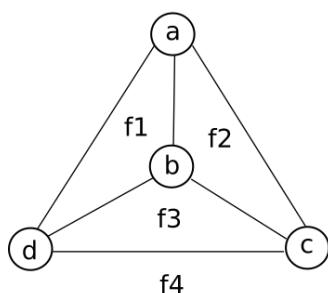
Teorema: Se G é planar com $|V| = n > 2$ e $|E| = m$ então $m \leq 3(n - 2)$

Represente G como um grafo plano (imersão planar). Pela fórmula de Euler $n - m + f = 2$. Toda face de G deve ser um triângulo pois se m é o número máximo de arestas, ele não pode ser aumentado dividindo uma face com uma aresta.

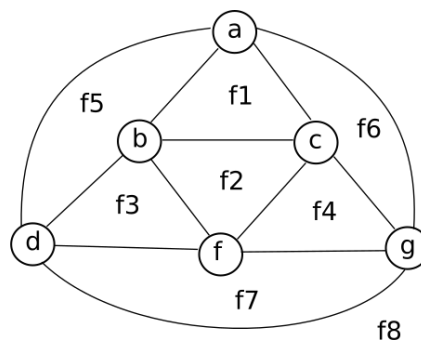


com uma face quadrada número de arestas pode ser aumentado

Nesse caso, como cada face é composta por 3 arestas, ao computar $3f$ estamos na verdade calculando 2 vezes o número de arestas, ou seja, $3f = 2m$. Note que contamos duas vezes cada aresta.



$$3f = 3 \cdot 4 = 6 \cdot 2 = 2m$$



$$3f = 3 \cdot 8 = 2 \cdot 12 = 2m$$

Assim, pela fórmula de Euler temos

$$n - m + \frac{2}{3}m = 2 \rightarrow n - \frac{1}{3}m = 2 \rightarrow \frac{3n - m}{3} = 2 \rightarrow 3n - m = 6 \rightarrow m = 3n - 6$$

Teorema: Todo grafo simples planar $G = (V, E)$ possui um vértice de grau no máximo 5.

Iremos provar por contradição. Sendo assim, assumamos que todos os vértices de G tenham grau maior que 5, ou seja: $\forall v \in V (d(v) > 6)$. Então, pelo Handshaking Lema:

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m \rightarrow 6n < 2m \rightarrow m > 3n$$

Pelo teorema anterior, se G é planar $m \leq 3n - 6$, o que implica em $3n < 3n - 6$, que é claramente uma contradição.

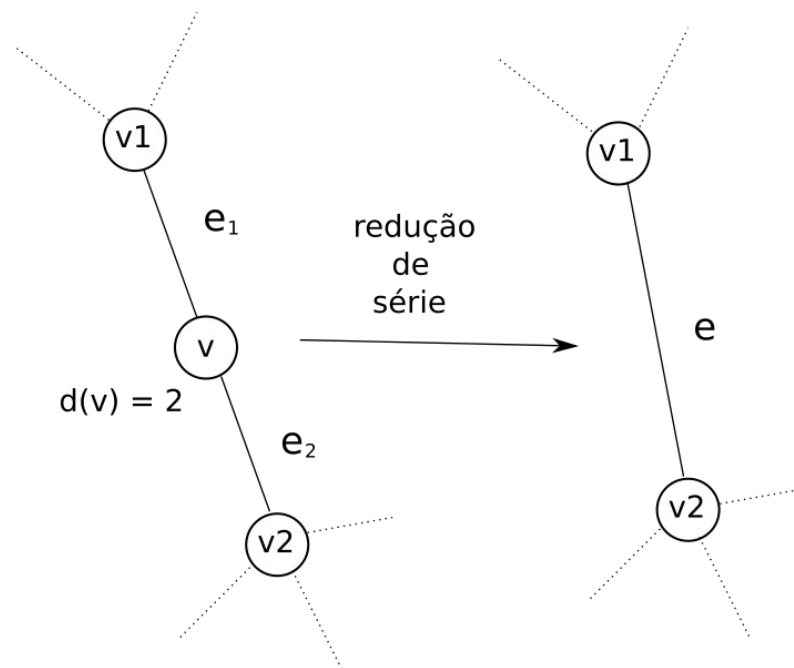
Obs: Resultados interessantes mas não podem ser usadas para decidir se G é planar. (para ser aplicado o grafo precisa estar desenhado como plano, então já preciso saber que é planar)

Veremos a seguir algumas definições importantes para a apresentação do resultado fundamental para a detecção de planaridade: o Teorema de Kuratowski.

Vimos que K_5 e $K_{3,3}$ não são planares. Então, todo grafo que os contenha como subgrafo não pode ser planar. Mas, existem grafos que não contêm K_5 ou $K_{3,3}$ como subgrafo e mesmo assim não são planares. Mas, tais grafos podem ser reduzidos a K_5 ou $K_{3,3}$ pela operação conhecida como redução de série.

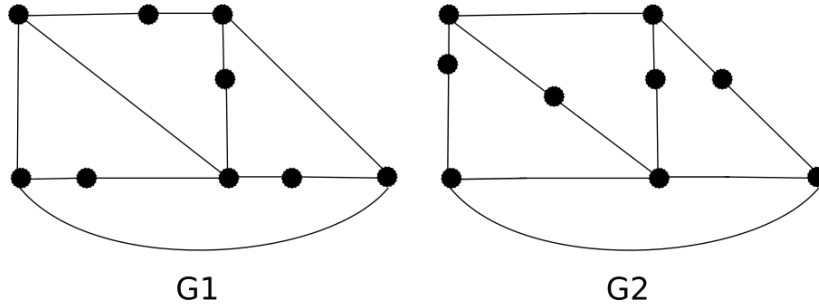
Def: Redução de série

Se um grafo G tem um vértice v de grau 2 e arestas (v_1, v) e (v, v_2) com $v_1 \neq v_2$ diz-se que as arestas (v_1, v) e (v, v_2) estão em série

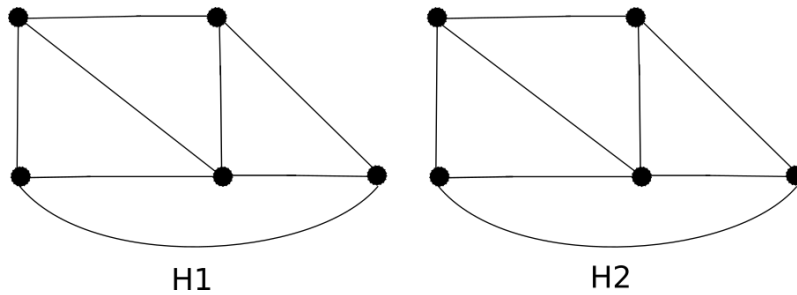


Def: G_1 e G_2 são homeomorfos se são reduzidos a grafos isomorfos a partir de reduções de série

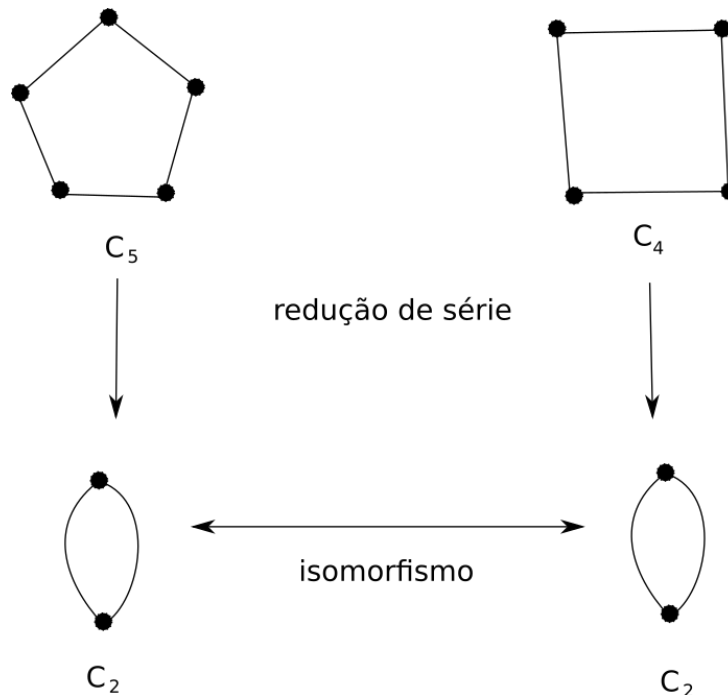
Por exemplo, os dois grafos a seguir são homeomorfos.



Isso pode ser facilmente percebido uma vez que ao aplicarmos reduções de séries em ambos, obtemos o seguinte resultado, ou seja, H1 é isomorfo a H2

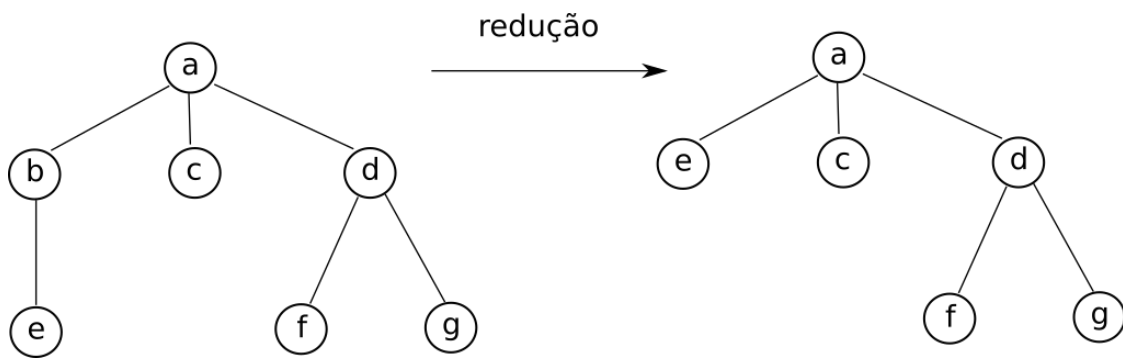


Outro exemplo de grafos homeomorfos são os grafos ciclos. A figura a seguir ilustra que os grafos C_5 e C_4 são homeomorfos.

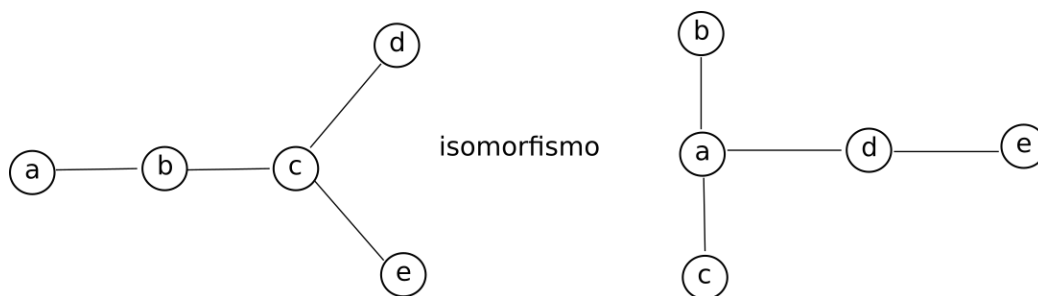


Problema (“Good Will Hunting”): Liste todas as árvores homeomorfas irredutíveis de 10 vértices. (https://www.youtube.com/watch?v=iW_LkYiuTKE)

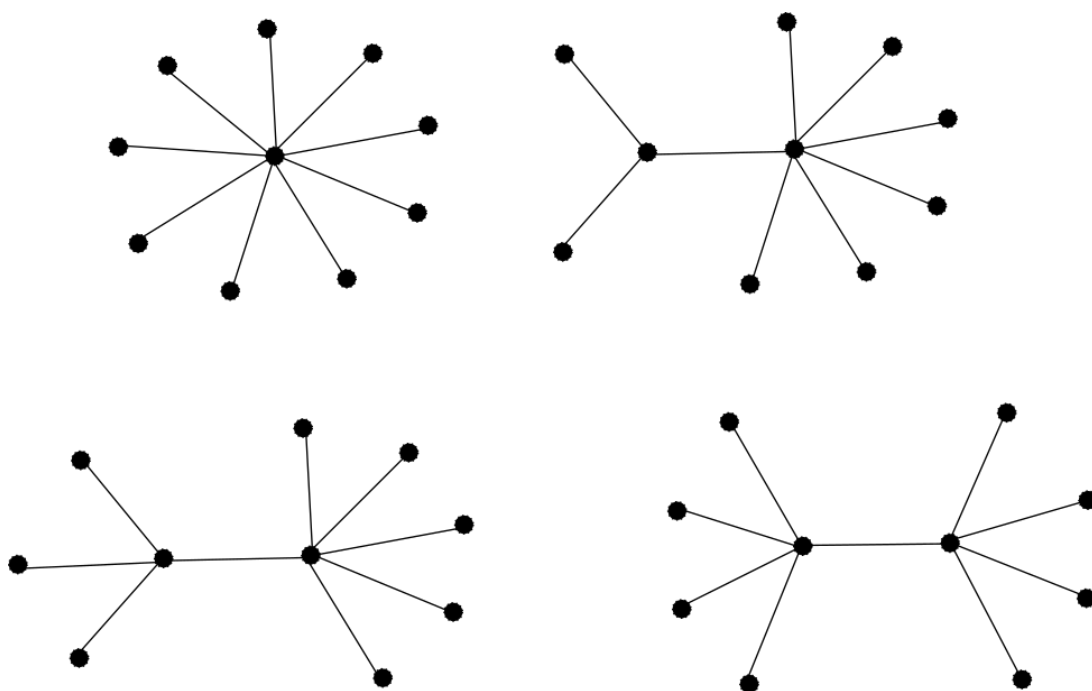
Dizemos que T é homeomorficamente irredutível se não admite redução de série, ou seja, se não possui vértice de grau 2.



O objetivo consiste em listar as instâncias não isomorfas de árvores homeomorficamente irreduzíveis.



Assim, ficando o número de vértices em 10, temos algumas das árvores:



Teorema de Kuratowski

Um grafo G é planar se e somente se G não tiver um subgrafo homeomorfo a K_5 ou $K_{3,3}$

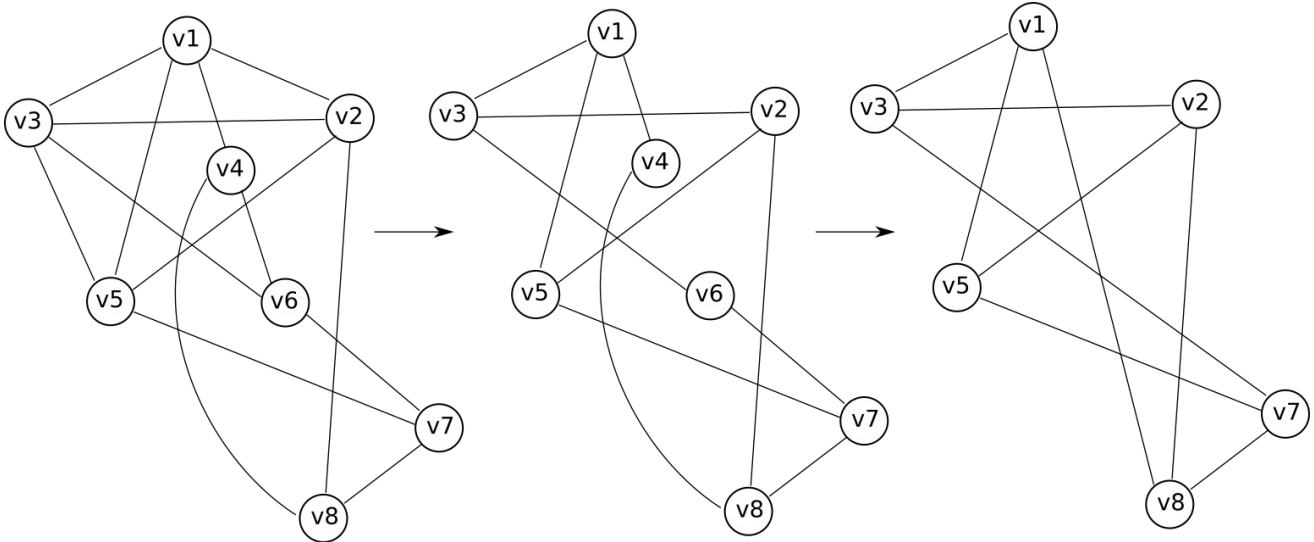
Critério objetivo, porém de difícil aplicação prática (algoritmos).

Em resumo esse resultado descreve como determinar se G é planar ou não através de 3 operações

básicas

- i) remoção de arestas
- ii) remoção de vértices
- iii) redução de séries

Veremos a seguir um exemplo ilustrativo.

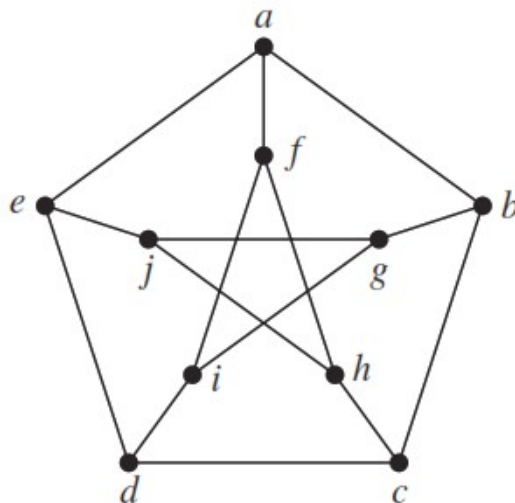


1. Remoção de arestas: $(v1, v2)$, $(v3, v5)$ e $(v4, v6)$

2. Redução de séries: $v1 - v4 - v8$ e $v3 - v6 - v7$

O grafo resultante claramente é o $K_{3,3}$, portanto G não é planar.

Ex: Mostre que o grafo de Petersen não é planar, utilizando o teorema de Kuratowski.



Planarity testing - testar a planaridade de grafos: atualmente existem algoritmos polinomiais
- Poioneiro: Path addition method (Hopcroft, Tarjan, 1974)

Planarity, o jogo

<http://planarity.net/>

Puzzles são resolvidos em $O(n)$ pelo computador mas para humanos leva-se muito mais tempo

Coloração de vértices

Área com diversas aplicações práticas.

Ideia: particionar o conjunto de vértices V em conjuntos independentes.

Def: Seja $G = (V, E)$ um grafo e P_1, P_2, \dots, P_n uma partição de V . Dizemos de P_i é um subconjunto independente se quaisquer 2 vértices de P_i não compartilham arestas (não são vizinhos).

Objetivo: Particionar o conjunto V no menor número possível de subconjuntos independentes

Def: Uma k -coloração de G atribui uma de K cores a cada vértice de G , de modo que a vértices adjacentes sempre são atribuídas cores/rótulos diferentes

P_1 : subconjunto dos vértices de cor 1

P_2 : subconjunto dos vértices de cor 2

...

P_k : subconjunto dos vértices de cor k

Pergunta: Dado um grafo $G = (V, E)$, \exists uma k -coloração para G (com $k > 2$)? NP-Completo

Em outras palavras queremos responder se dado G é possível encontrar 2, 3, 4, etc. conjuntos independentes. Que tipos de grafos admitem uma 2-coloração?

Def: O número mínimo k para o qual existe uma coloração de G é o número cromático de G , denotado por $\chi(G)$ (é um atributo do grafo).

Propriedades: (nos ajudam a limitar os valores de $\chi(G)$ em problemas reais: limites inferiores e superiores)

a) Se $|V| = n$, então $\chi(G) \leq n$

i) Se G é o K_n , então $\chi(G) = n$

ii) Se G contém K_m como subgrafo, então $\chi(G) \geq m$

Teorema: G é bipartido $\Leftrightarrow \chi(G) = 2$

Quanto vale $\chi(K_{3791, 7583})$?

Teorema: Seja $G = (V, E)$ e $\Delta(G) = \max\{d(v) : v \in V\}$ (grau máximo). Então, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Prova:

1. Inicie colorindo os vértices em uma sequência arbitrária.

2. Um vértice deve sempre receber uma cor livre, ou seja, diferente da cor dos vizinhos.

3. Seja o grau máximo de um vértice v em G , $\Delta(G)$.

4. Pelo princípio da casa dos pombos, sempre irá existir uma cor livre no conjunto $\{1, 2, 3, \dots, \Delta(G) + 1\}$.

Teorema: Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo com $\Delta(G) \geq 3$. Se G não é completo, $\chi(G) \leq \Delta(G)$

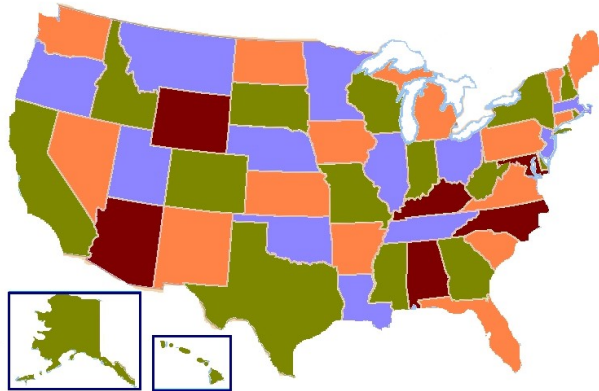
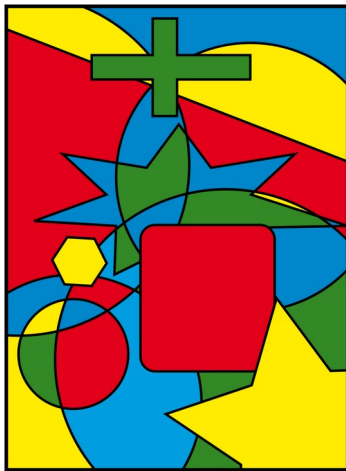
Teorema das 4 cores: Todo mapa pode ser colorido com apenas 4 cores, de modo que duas regiões vizinhas não recebam a mesma cor.

Em termos de grafos: O dual de um grafo básico simples planar possui $\chi(G) \leq 4$

- Problema que permaneceu em aberto por cerca de 125 anos

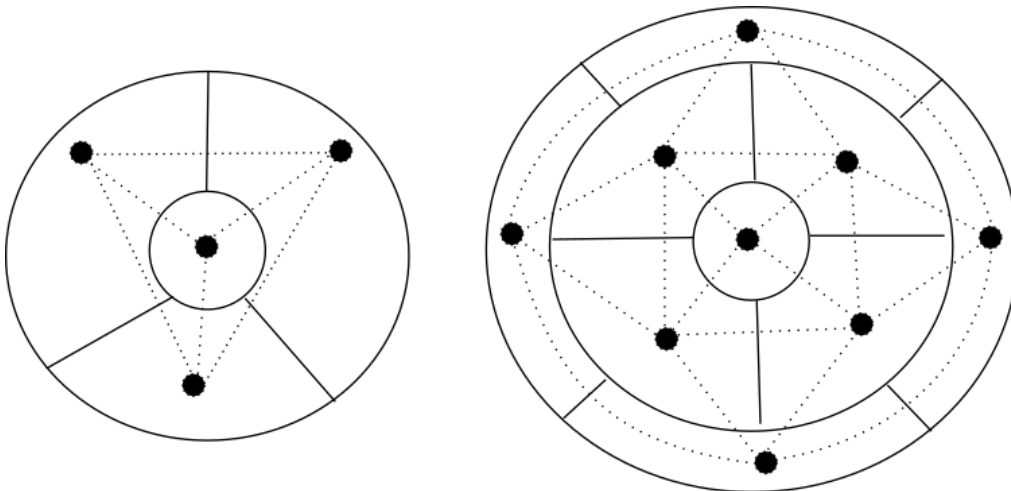
- Prova do teorema na década de 70: primeiro resultado teórico que contou com a assistência de um computador para enumerar um conjunto de possibilidades.

Desafio: produzir um mapa que necessite de mais do que 4 cores (invalidaria o teorema)



Def: Grafo dual

Seja $G = (V, E)$ um grafo básico simples planar. Um grafo dual G' de G é um grafo que tem um vértice para cada região (face) de G , e uma aresta para cada aresta em G que une duas regiões adjacentes (teve haver uma aresta entre as fronteiras de G).



O centro de cada face do mapa torna-se um vértice e se 2 faces compartilham uma fronteira, há uma aresta entre elas. Todo mapa se transforma num grafo planar, pois mapas são estruturas planares. Um vídeo muito bom sobre o assunto pode ser assistido em no canal Numberphile do Youtube: <https://www.youtube.com/watch?v=NgbK43jB4rQ>

Do ponto de vista da classificação dos problemas em computação, encontrar o número cromático $\chi(G)$ de grafos arbitrários é um problema NP-Hard. Alguns fatos relevantes:

1. Não se conhece algoritmo polinomial que colore um grafo arbitrário com exatamente $\chi(G)$ cores.
2. Existe um algoritmo polinomial para coloração de grafos que colore qualquer grafo G com no máximo $O\left(\frac{n}{\log n}\right)\chi(G)$

Algoritmos para coloração de vértices

Objetivo: Dado G , obter $\chi(G)$

Problema NP-completo: não há garantias de que sempre retornem o verdadeiro $\chi(G)$

Abordagem gulosa para coloração de vértices

Suponha que os vértices estejam ordenados em ordem decrescente dos graus, ou seja, temos v_1, v_2, \dots, v_n e seus respectivos graus $\Delta = d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$

Teorema: $\chi(G) = \max_{1 < i < n} \min\{d_i + 1, i\}$

Prova:

1. No instante em que colorimos v_i (i -ésimo vértice da sequência), note que:

- No máximo $i - 1$ cores foram utilizadas em seus vizinhos, pois antes dele foram exatamente $i - 1$ vértices.
- Mas também, no máximo d_i cores são utilizadas pelos vizinhos, uma vez que o grau de v_i é justamente d_i

Esse resultado fundamenta o algoritmo que será apresentado a seguir.

Algoritmo Welsh & Powell (aproximação para $\chi(G)$ real)

- Organizar os vértices de G em ordem decrescente de grau (ordem de acesso)
- Para cada vértice v_i seja $C_i = \{1, 2, 3, \dots, i\}$ sua lista de cores (quanto antes o vértice, ou seja, maior o grau, menor sua lista de cores)
- Faça $i = 1$
- Seja c_i a 1ª cor em C_i . Atribua c_i a v_i
- Para cada vizinho v_j de v_i ($j > i$)
 - Faça $C_j = C_j - \{c_i\}$
 - Faça $i = i + 1$ e se $i \leq n$ volte para 4

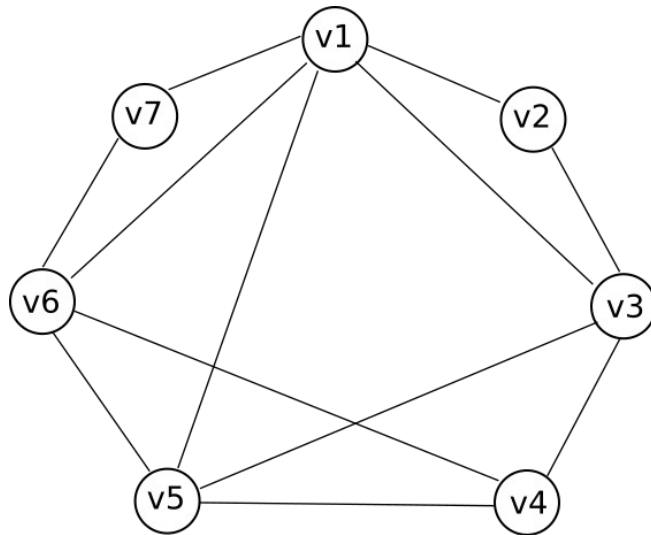
Ex: O Problema da Alocação de Frequências

Considere $N=7$ antenas de transmissão de sinais de telefonia. Sabe-se que devido a fatores como localização geográfica e tipo de serviço oferecido, as antenas possuem regiões de influência de modo que tem-se a seguinte matriz de interferências:

	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7
v1		x	x		x	x	x
v2	x		x				
v3	x	x		x	x		
v4			x		x	x	
v5	x		x	x		x	
v6	x			x	x		x
v7	x					x	

Essa matriz indica quando duas antenas interferem uma na outra com um x. Pergunta-se:

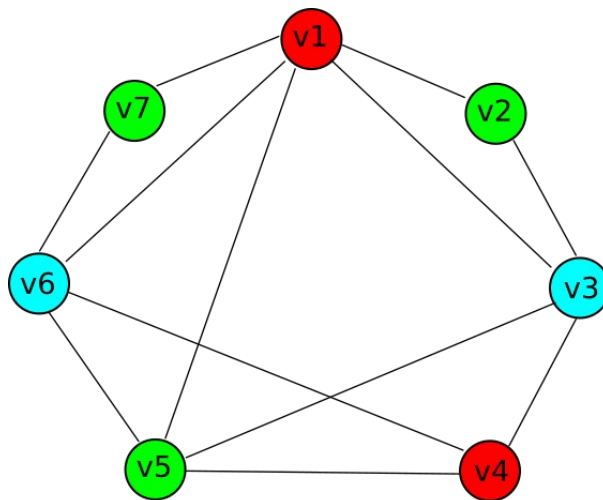
- Qual o menor número de frequências necessárias para que a comunicação se dê de forma correta?
- As antenas devem operar em qual configuração de frequência?



Grafo de Incompatibilidade

Ordenação dos vértices: v1, v3, v5, v6, v4, v2, v7

	C1={1}	C3={1,2}	C5={1,2,3}	C6={1,2,3,4}	C4={1,2,3,4,5}	C2={1,2,3,4,5}	C7={1,2,3,4,5}
v1 ← 1	x	C3={2}	C5={2,3}	C6={2,3,4}	C4={1,2,3,4,5}	C2={2,3,4,5}	C7={2,3,4,5}
v3 ← 2		x	C5={3}	C6={2,3,4}	C4={1,3,4,5}	C2={3,4,5}	C7={2,3,4,5}
v5 ← 3			x	C6={2,4}	C4={1,4,5}	C2={3,4,5}	C7={2,3,4,5}
v6 ← 2				x	C4={1,4,5}	C2={3,4,5}	C7={3,4,5}
v4 ← 1					x	C2={3,4,5}	C7={3,4,5}
v2 ← 3						x	C7={3,4,5}
v7 ← 3							x

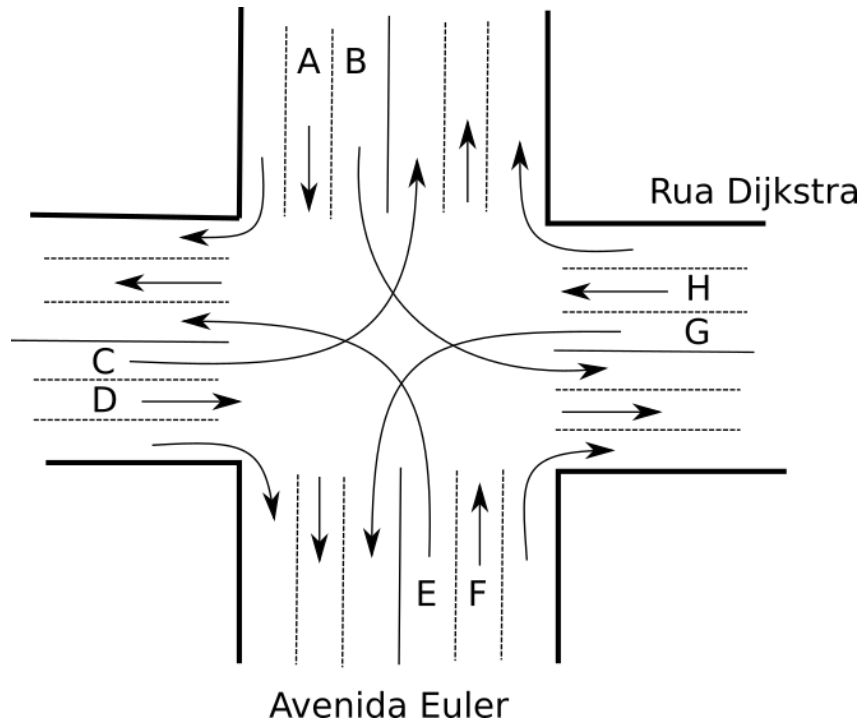


$$X(G) = 3$$

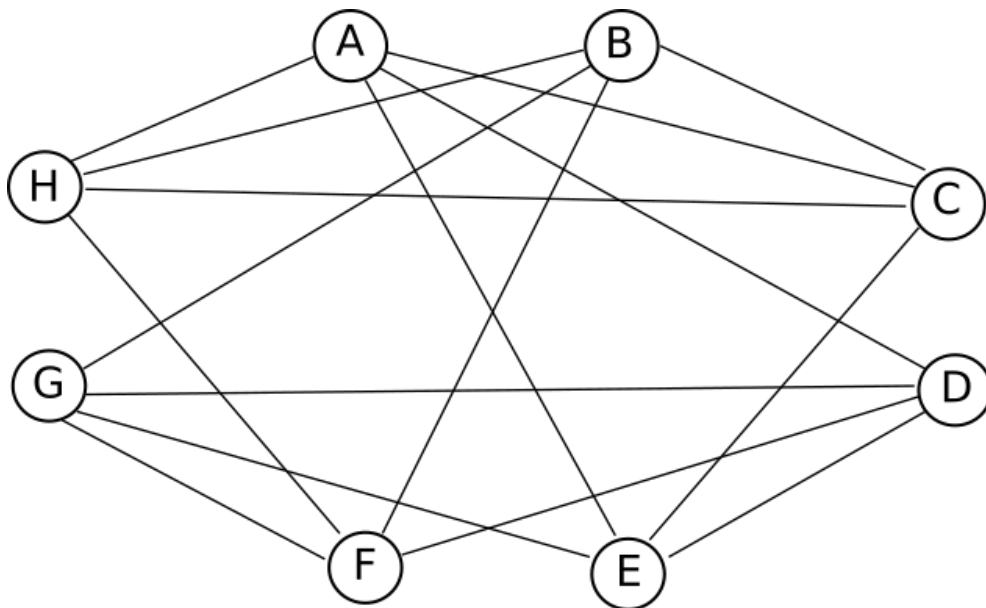
As partições obtidas são: $P1 = \{v1, v4\}$, $P2 = \{v3, v6\}$ e $P3 = \{v2, v5, v7\}$

Ex: O problema do semáforo

Dado o cruzamento de ruas a seguir, desenvolver um semáforo com o menor número de tempos possíveis. Qual deve ser o modo de funcionamento do mesmo.



O primeiro passo consiste em gerar o grafo de incompatibilidade. Para isso cada uma das faixas de A a H deve ser um vértice e a cada possível cruzamento de faixas deve existir uma aresta. O grafo resultante é ilustrado pela figura a seguir.



O segundo passo consiste na aplicação do algoritmo Welsh & Powell para colorir o grafo acima utilizando o menor número de cores possíveis. Como o grau máximo é 4 e o grafo não é completo, temos garantia de que o número cromático é menor ou igual a 4. A execução desse passo é deixada como exercício para o leitor.

Ex: Uma nova empresa aérea irá começar a operar com 7 aeronaves seguindo a programação de vôos (de A a G) definida pela tabela abaixo, sendo que todos os vôos partem de São Paulo e visitam cada uma das cidades listadas nas rotas na sequência em que elas aparecem:

Vôo	Rota
A	Florianópolis – Rio de Janeiro – Natal – Fortaleza
B	Curitiba - Campinas – Ribeirão Preto – Fortaleza
C	Belo Horizonte – Natal – Fortaleza – Manaus
D	Belo Horizonte – São José do Rio Preto – Rio de Janeiro
E	Belo Horizonte – Recife – Natal
F	Brasília – Ribeirão Preto – Fortaleza
G	Brasília - Presidente Prudente – Campinas

Devido ao número limitado de aeronaves, o diretor da companhia não quer mais de um vôo por dia visitando uma determinada cidade, ou seja, se dois vôos passam pela cidade X eles devem obrigatoriamente não estar alocados para o mesmo dia. Sendo assim, modelando o problema com um grafo, e utilizando coloração de vértices, determine o número mínimo de dias necessários para que a empresa opere de acordo com a sua política de funcionamento.

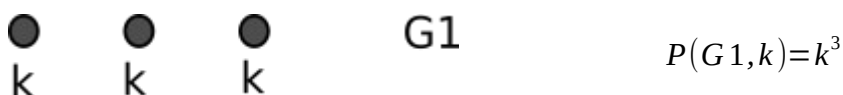
Uma pergunta natural que surge nesse momento é: de quantas maneiras podemos colorir um grafo G utilizando para isso exatamente k cores?

O polinômio cromático é uma ferramenta matemática da teoria dos grafos algébrica que nos permite contar o número de k-colorações válidas de um grafo arbitrário G.

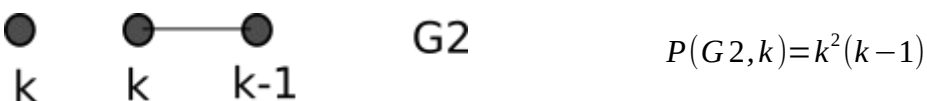
Polinômio cromático

Def: Para um grafo $G = (V, E)$, seja $P(G, k)$ o número de k-colorações válidas de G. Pode-se mostrar que $P(G, k)$ é um polinômio para todo grafo G.

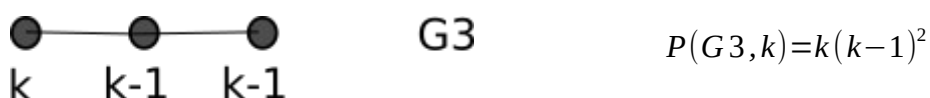
Iremos iniciar com grafos simples e calcular os polinômios cromáticos fundamentais. Primeiro, iremos iniciar com um grafo nulo de 3 vértices. Note que nesse caso, podemos utilizar k cores em cada vértice, pois como não há arestas, nenhum vértice é vizinho de outro.



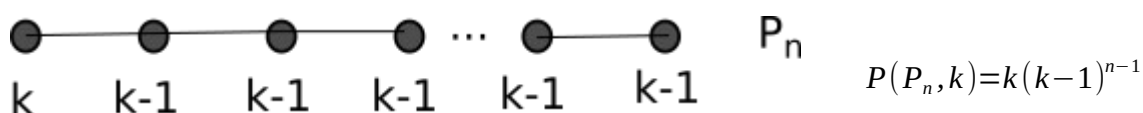
Note que ao adicionarmos uma aresta no grafo anterior, temos:



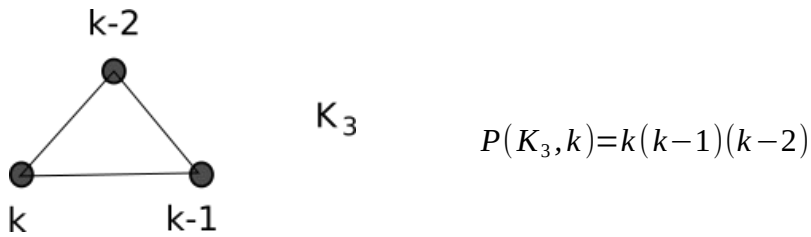
pois a cor do segundo vértice não pode ser utilizada para colorir o terceiro. Ao adicionarmos mais uma aresta, o polinômio cromático fica:



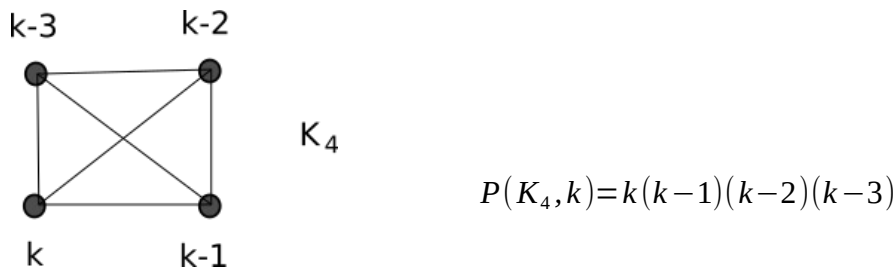
É fácil notar que o grafo caminho de n vértices, conhecido como P_n (path), possui o seguinte polinômio cromático:



O grafo completo K_3 (triângulo) possui outro polinômio fundamental:



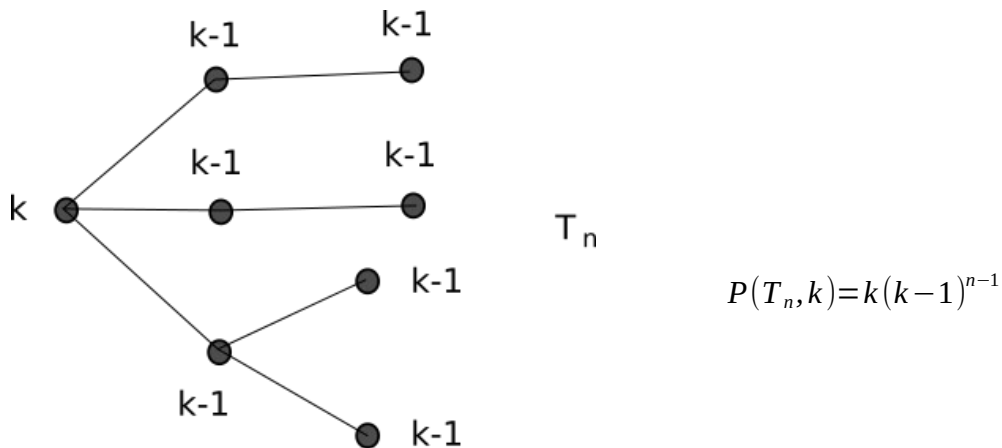
No caso do grafo completo de 4 vértices, K_4 , possui o seguinte polinômio cromático:



Generalizando para o grafo completo de n vértices:

$$K_n \quad P(K_n, k) = k(k-1)(k-2)\dots(k-(n-1))$$

No caso de árvores, note que o polinômio cromático é idêntico ao do grafo caminho. Aliás, isso já era esperado, uma vez que o grafo caminho é uma árvore.



Porém, uma pergunta que surge é: como calcular o polinômio cromático para um grafo arbitrário? O resultado a seguir é fundamental para responder a essa pergunta.

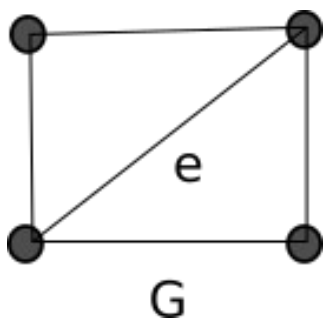
Teorema fundamental da redução

Seja $G = (V, E)$ um grafo básico simples e e uma aresta do conjunto E . Então:

$$P(G, k) = P(G - e, k) - P(G / e, k)$$

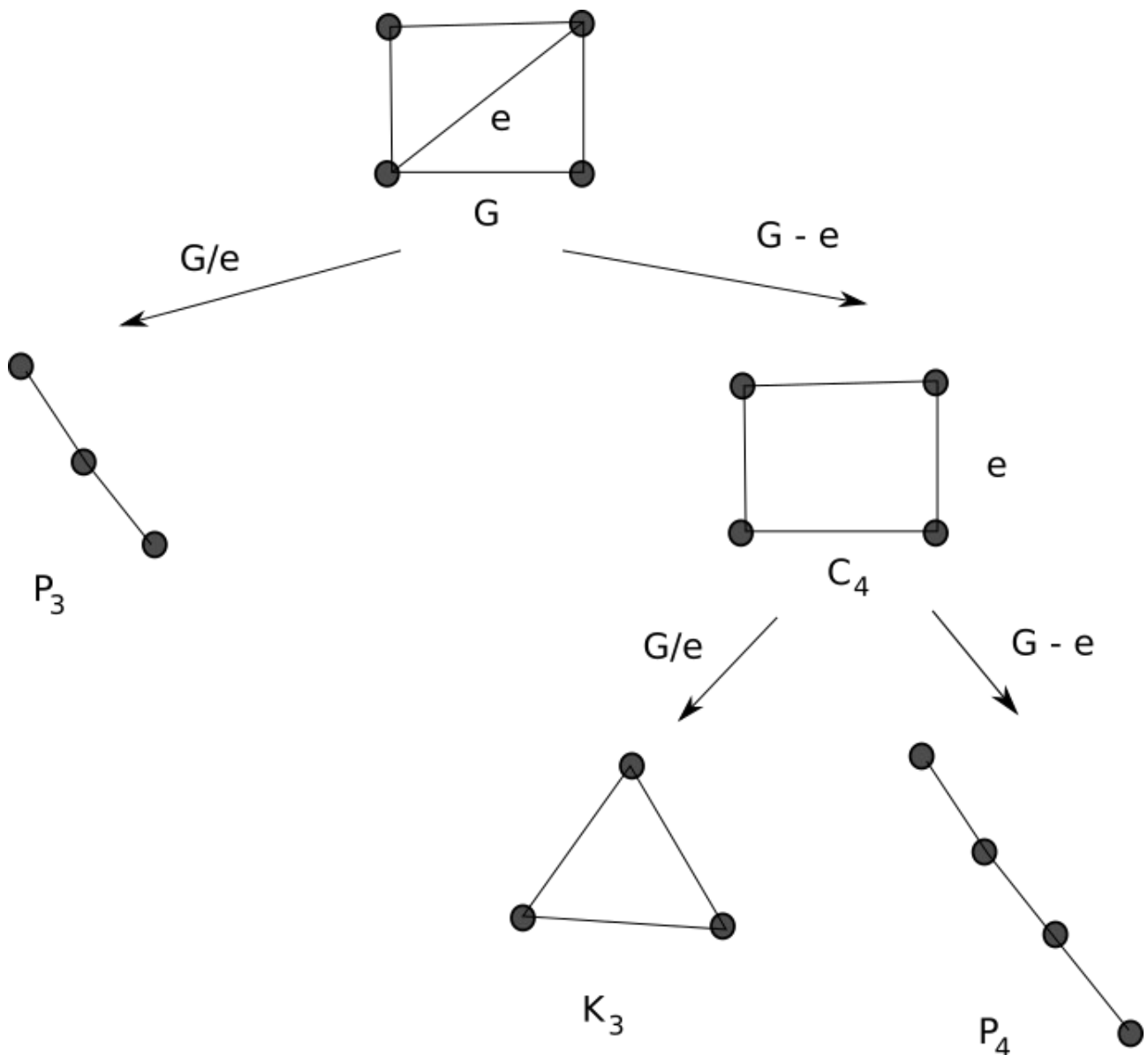
onde G/e denota o grafo obtido a partir da contração da aresta G . Devido a complexidade matemática, iremos omitir a prova desse resultado, mas a seguir iremos aplicá-lo em um exemplo prático.

Ex: Determine o polinômio cromático de G a seguir:



Iremos aplicar o teorema fundamental da redução para gerar a árvore de decomposição do grafo. No primeiro estágio, devemos decompor os níveis da árvore até chegar em um polinômio fundamental e em seguida, voltar na árvore calculando os polinômios cromáticos.

A árvore de decomposição fica:



Iniciamos pela aplicação do teorema fundamental da redução em G :

$$P(G, k) = P(G - e, k) - P(G/e, k) = P(C_4, k) - P(P_3, k)$$

Como P_3 tem um polinômio fundamental, é folha da árvore de decomposição. Assim, temos:

$$P(P_3, k) = k(k-1)^2$$

Esta folha está encerrada. Vamos agora aplicar o teorema da redução em C_4 :

$$P(C_4, k) = P(C_4 - e, k) - P(C_4/e, k) = P(P_4, k) - P(K_3, k)$$

Note que ambos P_4 e K_3 possuem polinômios fundamentais, o que nos leva a:

$$P(P_4, k) = k(k-1)^3$$

$$P(K_3, k) = k(k-1)(k-2)$$

Como ambos são folhas, podemos voltar na árvore e computar o polinômio de C_4 como:

$$P(C_4, k) = k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2) = k(k-1)[(k-1)^2 - (k-2)]$$

Expandindo o quadrado, temos:

$$P(C_4, k) = k(k-1)[k^2 - 2k + 1 - k + 2] = k(k-1)(k^2 - 3k + 3)$$

Agora que temos o polinômio de C_4 , podemos voltar e calcular o polinômio final de G como:

$$P(G, k) = k(k-1)(k^2 - 3k + 3) - k(k-1)^2$$

Colocando o termo $k(k-1)$ em evidência:

$$P(G, k) = k(k-1)[(k^2 - 3k + 3) - (k-1)] = k(k-1)(k^2 - 4k + 4)$$

Fatorando o polinômio quadrático, finalmente chegamos em:

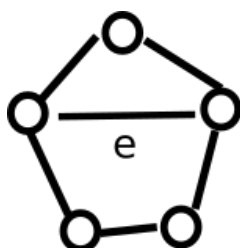
$$P(G, k) = k(k-1)(k-2)^2$$

Pergunta: quantas 5 colorações válidas existem para o grafo G em questão?

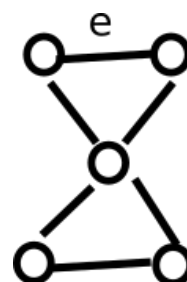
$$P(G, 5) = 5 \times 4 \times 3^2 = 20 \times 9 = 180$$

Exercício: Utilizando o teorema fundamental da redução, encontre o polinômio cromático dos grafos a seguir. Mostre a árvore de decomposição.

a)



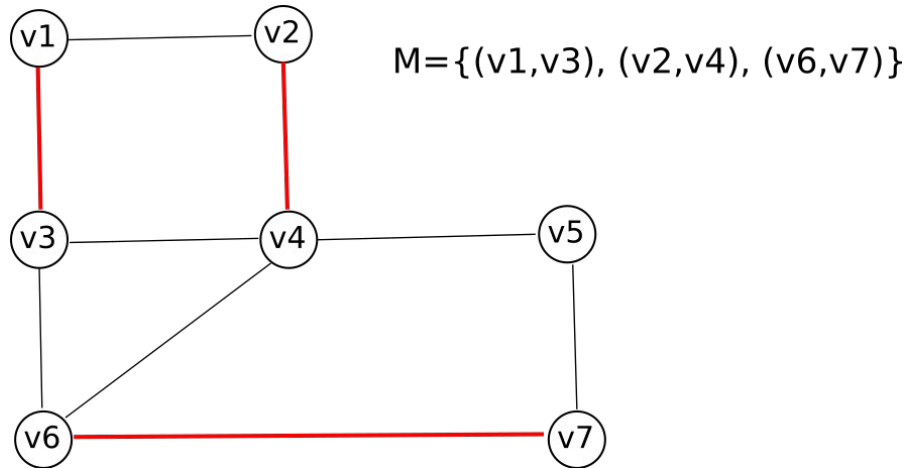
b)



Emparelhamentos (Matchings)

Def: Seja $G = (V, E)$ um grafo. Um emparelhamento $M \subseteq E$ é um subconjunto de arestas não adjacentes (não compartilham vértices)

Em outras palavras, um emparelhamento é um conjunto independente de arestas



Def: Vértice M-saturado

É todo $v \in V$ que é extremidade de alguma aresta de M

Ex: $v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7$

Def: Vértice M-não-saturado

É todo vértice $v \in V$ que não é extremidade de aresta de M

Ex: v_5

Def: Emparelhamento perfeito

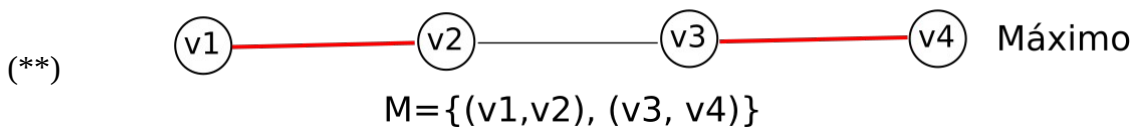
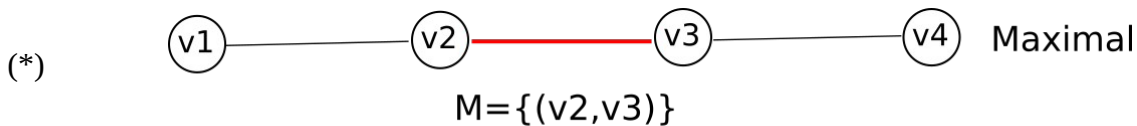
$\exists M \subseteq E$ tal que $\forall v \in V$ v é M-saturado \rightarrow M é perfeito
(possível apenas se G tem um número par de vértices)

Def: Emparelhamento maximal

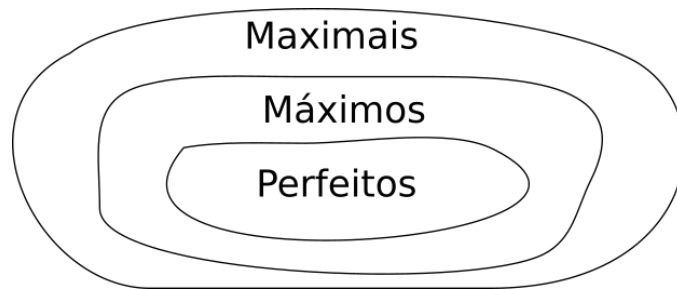
Se M não pode ser aumentado com o acréscimo de uma aresta então M é maximal

Def: Emparelhamento máximo

Se M é um emparelhamento de tamanho máximo dentre todos os possíveis, M é máximo



A figura a seguir ilustra a relação ente emparelhamentos perfeitos, máximos e maximais.



Def: Caminho M-alternado (**)

Todo caminho P em que arestas estão alternadamente em M e $E - M$ é um caminho M-alternado

Def: Caminho M-aumentado (*)

Todo caminho M-alternado em que tanto a origem quanto o destino são M-não-saturados

Teorema: Sejam M_1 e M_2 dois emparelhamentos distintos em G. Seja H o subgrafo definido pela diferença simétrica entre M_1 e M_2 :

$$M_1 \Delta M_2 = (M_1 - M_2) \cup (M_2 - M_1) \quad (\text{arestas que estão ou em } M_1 \text{ ou em } M_2 \text{ mas não em ambos})$$

Então, cada componente conexo de H é de um de dois tipos:

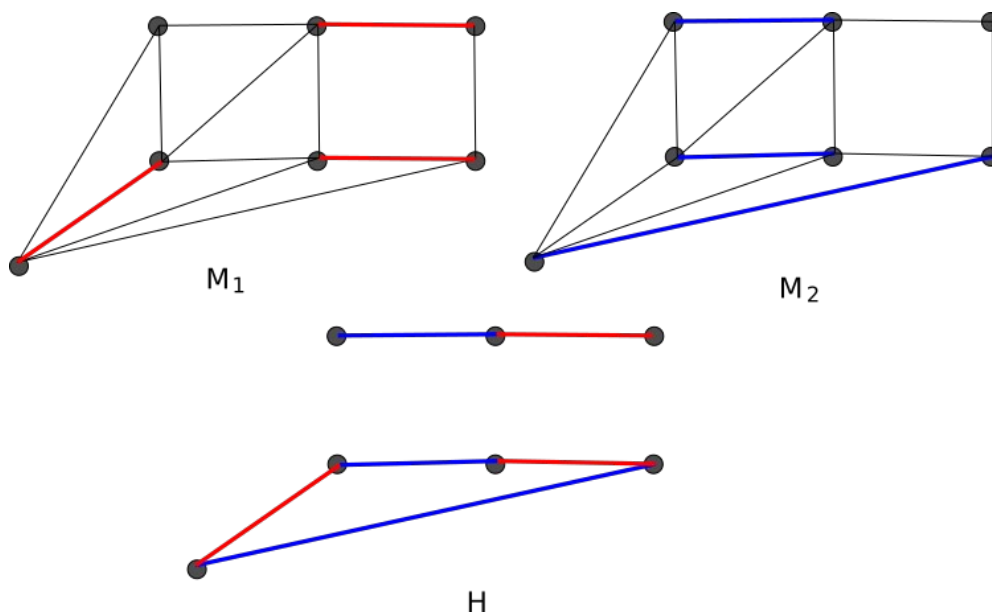
- a) um ciclo de comprimento par cujas arestas estão alternadamente em M_1 e M_2 ;
- b) um caminho cujas arestas estão alternadamente em M_1 e M_2 e cujos vértices extremidades são insaturados em um dos dois emparelhamentos;

Prova:

Seja v um vértice arbitrário de H. Então, temos:

- i) v é um vértice extremidade de uma aresta em $M_1 - M_2$ e também de uma aresta em $M_2 - M_1$;
- ii) v é um vértice extremidade de uma aresta de $M_1 - M_2$ ou de $M_2 - M_1$, mas não de ambos;

Em ambos os casos i) e ii), como M_1 é um emparelhamento, existe no máximo uma aresta em M_1 com o vértice v como sua extremidade. De modo similar, existe no máximo uma aresta em M_2 com o vértice v como extremidade. Assim, no caso i) v tem grau dois em H enquanto que no caso ii) v tem grau um em H. A figura a seguir ilustra o resultado desse teorema.



Seja M' um emparelhamento máximo arbitrário em G . Deseja-se mostrar que $|M| = |M'|$, de modo que se M tiver o mesmo número de arestas que um emparelhamento máximo, ele também será máximo.

Seja H o subgrafo definido pelo conjunto de arestas dado pela diferença simétrica entre M e M' :

$$M \Delta M' = (M - M') \cup (M' - M)$$

Pelo teorema anterior, sabemos que os componentes conexos de H são:

- a) ciclos de comprimento par com arestas alternadamente em M e M' ; ou
- b) caminhos alternados com arestas de M e M' cujas extremidades são não saturadas em M ou M' ;

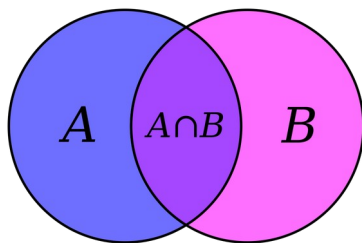
Se existe um caminho como o descrito em b) de comprimento ímpar, então tanto a origem quanto o destino são ambos não saturados em M ou ambos não saturados em M' , o que caracteriza um caminho M -aumentado (ou M' -aumentado).

Mas isso não pode ocorrer, pois de acordo com a hipótese inicial, não existe caminho M -aumentado e M' é máximo e portanto não admite caminho M' -aumentado.

Assim, os componentes de H são caminhos ou ciclos de comprimento par, de modo que contém o mesmo número de arestas de M e de M' . Matematicamente, isso implica em:

$$|M - M'| = |M' - M|$$

Da Teoria dos conjuntos, sabe-se que



$$|A| = |A - B| + |A \cap B|$$

de modo que podemos escrever:

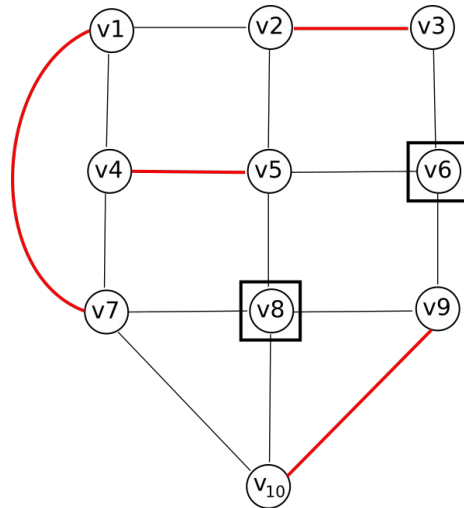
$$|M| = |M - M'| + |M \cap M'|$$

$$|M'| = |M' - M| + |M' \cap M|$$

Como $|M - M'| = |M' - M|$ segue que $|M| = |M'|$.

Portanto, o emparelhamento M é máximo, o que conclui a prova.

Ex:

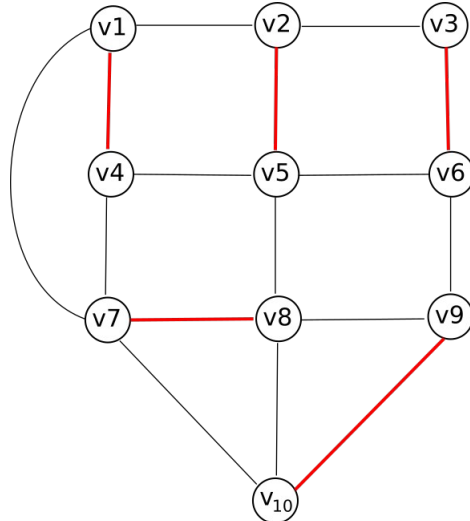


$M = \{(v1, v7), (v2, v3), (v4, v5), (v9, v10)\}$. M é máximo? Porque? Justifique

Note que existe o caminho M -aumentado $P = v6 v3 v2 v5 v4 v1 v7 v8$, portanto M não é máximo. Aplicando a transferência ao longo do caminho M -aumentado P , iremos manter $(v9, v10)$ (pois não pertence ao caminho P , e inverter as arestas do caminho P , gerando:

$M' = T(P) = T(v6 v3 v2 v5 v4 v1 v7 v8) = \{(v3, v6), (v2, v5), (v4, v1), (v7, v8), (v9, v10)\}$

Note que o número de arestas em M' é uma unidade maior do que o número de arestas em M . E o novo emparelhamento M' , o que podemos dizer sobre ele?



Agora, sabemos como melhorar um emparelhamento M a partir de caminhos M -aumentados. Porém, ainda não vimos um método automatizado para buscar por caminhos M -aumentados em grafos. Esse é na verdade um problema bastante complexo para grafos arbitrários. Por motivos de simplificação, iremos adotar a hipótese de que estamos lidando com grafos bipartidos. Isso, apesar de uma limitação, não representa um problema, dado que a grande maioria dos problemas práticos envolvendo emparelhamentos são definidos em grafos bipartidos (problema do casamento, alocação, atribuição de recursos, ...). Diante do exposto, precisamos saber sob que condições um grafo bipartido admite um emparelhamento máximo, ou seja, um *matching* que sature todos os vértices da partição escolhida, por exemplo X . Para isso, iremos apresentar o teorema do casamento, que nos fornece um critério objetivo para a existência de emparelhamentos máximos em grafos bipartidos.

O Teorema do Casamento (Hall, 1935)

Seja $G = (V, E)$ um grafo bipartido com $V = X \cup Y$, $X \cap Y = \emptyset$ e $n = |X| \leq |Y|$. G contém um emparelhamento M que satura $\forall v \in X$, se e somente se, para todo subconjunto S de X tivermos:

$$|N_G(S)| \geq |S| \quad \text{onde } N_G(S) \text{ denota o conjunto vizinhança de } S \text{ no grafo } G \text{ (todos elementos de } G \text{ alcançáveis a partir dos elementos de } S)$$

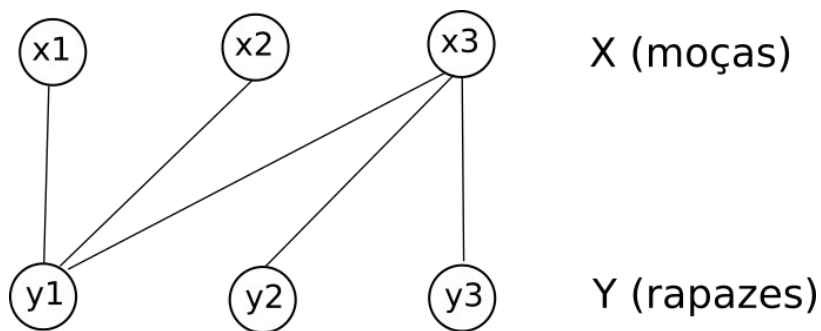
Prova:

(ida) $p \rightarrow q$ (parte fácil) (contrapositiva) = $\neg q \rightarrow \neg p$

$$\exists M \text{ que satura todo } x \text{ em } X \rightarrow \forall S \in X \quad |S| \leq |N_G(S)|$$

$$\exists S \in X \quad |S| > |N_G(S)| \rightarrow \nexists M \text{ que satura todo } x \text{ em } X$$

1. Vamos supor que X é o conjunto de garotas. Se existe um subconjunto de k garotas que coletivamente conhece um conjunto de $m < k$ garotos, então é impossível casar todas elas, ou seja, não existe emparelhamento que satura todo x em X .



O número de subconjuntos de um conjunto X é o número de elementos do conjunto potência denotado por $2^{|X|}$, que nesse caso é igual a 8. Esse é um dos problemas com esse resultado: enumerar todos os possíveis subconjuntos é computacionalmente inviável para n grande (complexidade $O(2^n)$)

$$S_1 = \{x_1\}, N(S_1) = \{y_1\}$$

$$S_2 = \{x_2\}, N(S_2) = \{y_1\}$$

$$S_3 = \{x_3\}, N(S_3) = \{y_1, y_2, y_3\}$$

$$S_4 = \{x_1, x_2\}, N(S_4) = \{y_1\} \text{ (Falhou)}$$

Como há duas garotas que conjuntamente só conhecem um único garoto, nesse grafo não será possível encontrar um emparelhamento M que sature todos os vértices de X (impossível).

(volta) $q \rightarrow p$ (prova por indução em X , mais complicada)

$$\forall S \in X \quad |S| \leq |N_G(S)| \rightarrow \text{Existe } M \text{ que satura todo } x \text{ em } X$$

Caso base: $P(1)$: X contém um único elemento x , ou seja, $|X| = 1$.

Nesse caso, é trivial notar que, pela hipótese inicial, x tem pelo menos um vizinho em Y , digamos y .

Então, $(x, y) \in E$ uma aresta do emparelhamento M que satura todo x (x é único)

Portanto, $P(1)$ é verdade.

Passo de indução: $P(k-1) \rightarrow P(k)$ para k arbitrário.

Supor que para X arbitrário com $|X| < k$, existe M que satura todo x em X . Queremos mostrar que isso implica que para X com $|X| = k > 1$, existe M' que satura todo x em X .

Seja $x \in X$ arbitrário. Então, pela hipótese inicial (q), existe $y \in Y$, tal que $(x, y) \in E$. Seja H o subgrafo induzido pelo conjunto de vértices $(X - x) \cup (Y - y)$, ou seja:

$$H = G[(X - x) \cup (Y - y)] \quad (H \text{ tem esses vértices e todas as arestas de } G \text{ com extremidades neles)}$$

Note que $|X - x| < |X| = k$.

Caso 1: Neste caso, supomos que existe um emparelhamento M' que satura todo vértice de $X - x$. Assim, fazendo

$$M = M' + (x, y)$$

temos um emparelhamento que satura todo vértice de X . Provamos que $P(k-1) \rightarrow P(k)$.

Caso 2: Neste caso não é possível saturar todos os vértices de $X - x$ pois

$$\exists S' \in X - x \quad |S'| > |N_H(S')|$$

Defina um outro grafo induzido pelo conjunto de vértices $S' \cup N_G(S')$, chamado F_1 :

$$F_1 = G[S' \cup N_G(S')]$$

Note que S' é um subconjunto de $X - x$ e portanto também é um subconjunto de X .

Pela hipótese de indução, a cardinalidade de S' deve ser menor ou igual a cardinalidade da vizinhança de S' em G , ou seja: $|S'| \leq |N_G(S')|$.

Precisamos garantir que S' tem menos elementos que X , ou seja, $|S'| < |X| = k$. Isso é trivial, pois S' é subconjunto de $X - x$ (tem um elemento a menos), ou seja, no máximo $|S'| = k - 1$.

A última pergunta antes de aplicarmos a hipótese de indução é: será que o grafo F_1 satisfaz a condição de Hall? A resposta é SIM. Porque? S' é um subconjunto de X e o grafo G satisfaz a condição de Hall, ou seja, para todo subconjunto S' de X , $|S'| \leq |N_G(S')|$.

Podemos invocar a hipótese de indução e concluir que $\exists M'$ que satura todo x em S' no grafo F_1 .

Agora, note que:

1. $|S'| \leq |N_G(S')|$
2. $|S'| > |N_H(S')|$

A cardinalidade de S' passa de menor ou igual que a cardinalidade de seus vizinhos em G para maior que a cardinalidade de seus vizinhos em H . O que muda de $N_G(S')$ para $N_H(S')$ é apenas o vértice y que foi deletado de G , o que implica dizer que em G , $|S'| = |N_G(S')|$ (ao reduzir em uma unidade passou a ser estritamente maior). Se fosse menor, não poderíamos inverter a desigualdade com apenas um vértice.

Seja F_2 o grafo induzido pelo conjunto de vértices $(X - S') \cup (Y - N_G(S'))$, ou seja:

$$F_2 = G[(X - S') \cup (Y - N_G(S'))]$$

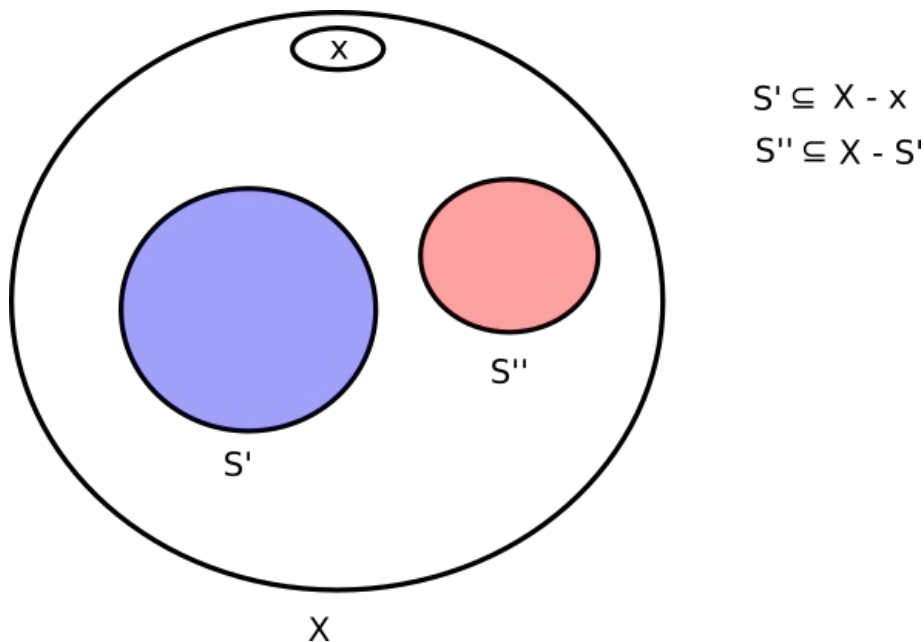
Repare que esse grafo contém tudo o que ainda resta ser emparelhado, uma vez que encontramos um emparelhamento M' que satura todo x em S' no grafo F_1 .

Note que para criar F_2 , reduzimos o número de elementos em S' e o número de elementos de $N_G(S')$ do mesmo valor, uma vez que $|S'| = |N_G(S')|$. Neste ponto, deve ser óbvio que $|X - S'| < |X| = k$ (pois S' é não vazio) e $|X - S'| = |Y - N_G(S')|$. O que nos resta agora é mostrar que o grafo F_2 satisfaz a condição de Hall. Para isso, seja $S'' \subseteq X - S'$ um subconjunto arbitrário. Desejamos mostrar que a cardinalidade de S'' é menor ou igual a cardinalidade de $N_{F_2}(S'')$ (isso significa que a condição de Hall é válida).

Note que o conjunto $S' \cup S''$ é um subconjunto de X . Pela hipótese inicial, sabemos que:

$$|S' \cup S''| \leq |N_G(S' \cup S'')| \quad (\text{pois } q \text{ é verdade em } q \rightarrow p) (*)$$

Como $S' \subseteq X - x$ e $S'' \subseteq X - S'$, temos que S' e S'' são subconjuntos disjuntos.



Isso implica que

$$|S' \cup S''| = |S'| + |S''|$$

Note ainda que o lado direito de (*) pode ser expresso como:

$$|N_G(S' \cup S'')| = |N_G(S')| + |N_{F_2}(S'')|$$

pois dessa forma estamos contando todos os vizinhos de S' em G , bem como todos os vizinhos de S'' que não são vizinhos de S' . Podemos garantir que não estamos contando duas vezes vizinhos em comum de S' e S'' (que estariam na intersecção) pois por construção subtraímos os vizinhos de S' do grafo F_2 , ou seja, $|N_G(S')|$ e $N_{F_2}(S'')$ são conjuntos disjuntos. Isso nos leva a:

$$|S'| + |S''| \leq |N_G(S')| + |N_{F_2}(S'')|$$

Mas como $|S'| = |N_G(S')|$ (verificamos isso anteriormente), temos:

$$|S''| \leq |N_{F_2}(S'')|$$

mostrando que o grafo F_2 satisfaz a condição de Hall. Aplicando a hipótese inicial (q), podemos concluir que existe um emparelhamento M'' que satura todo x em $X - S'$ no grafo F_2 .

Portanto, o emparelhamento $M = M' \cup M''$ satura todo vértice x de X no grafo G . A prova está concluída.

Em palavras, se um conjunto de n garotas conhece um conjunto de n rapazes a pergunta é: quando é possível que todas se casem. A condição nos diz que é possível que todas se casem se todo subconjunto de k garotas conhece coletivamente pelo menos k rapazes.

Dado um grafo G bipartido, sabemos decidir se existe um emparelhamento máximo M ou não. Agora, iremos responder a pergunta: como buscar caminhos M -aumentados?

Árvore M -alternada

- Estrutura utilizada para buscar caminhos M -aumentados. Uma árvore T é M -alternada se satisfaz:
 - a raiz x_0 é M -não-saturada
 - $\forall v \in T$ o único caminho de x_0 a v é M -alternado

Veremos a seguir um método que combina o teorema de Berge, o teorema do casamento e árvores M -alternadas para a obtenção de emparelhamentos máximos em grafos bipartidos em tempo polinomial: trata-se do algoritmo Húngaro

O Método Húngaro

O padrão de crescimento de uma árvore M -alternada com raiz x_0 é tal que em qualquer estágio temos uma árvore de um de 2 possíveis tipos:

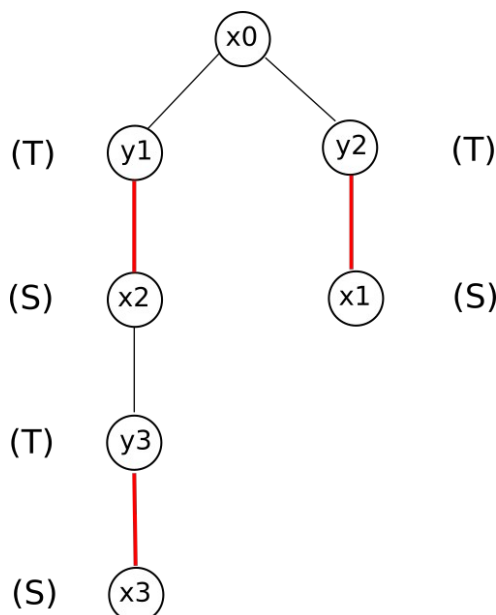
- Árvore do tipo-I: todos os vértices de T são M -saturados (com exceção da raiz x_0)
- Árvore do tipo-II: T possui um vértice folha M -não-saturado

Veremos a seguir como as árvores do tipo-I estão relacionadas com o teorema do casamento

Análise das árvores do tipo-I

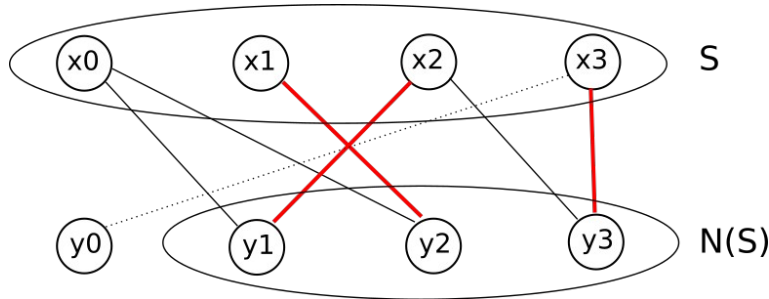
Sejam

- S' : conjunto dos vértices a uma distância par de x_0 (raiz)
- T : conjunto dos vértices a uma distância ímpar de x_0 (raiz)



Então, $|S'| = |T|$ (pois se todos os vértices são saturados, para cada elemento de Y tem que haver um de X correspondente – outro lado da aresta do emparelhamento). (Todo vértice a uma distância par de x_0 coloco no S e todo vértice a distância ímpar de x_0 coloco no T)

Define-se $S = S' \cup \{x_0\}$. Assim, $T \subseteq N(S)$ (olhando em G). Isso significa que pode ou não haver mais arestas para “pendurar” na árvore T , pois $N(S)$ engloba todos os y que estão na árvore e mais alguns que ainda podem não ter sido “pendurados”.



Desse modo podemos dividir as árvores do tipo-I em 2 subcasos:

- a) $T = N(S)$ (não tem mais o que adicionar a árvore, impossível crescer T)
- b) $T \subset N(S)$ (posso continuar crescendo a árvore pois há arestas para adicionar)

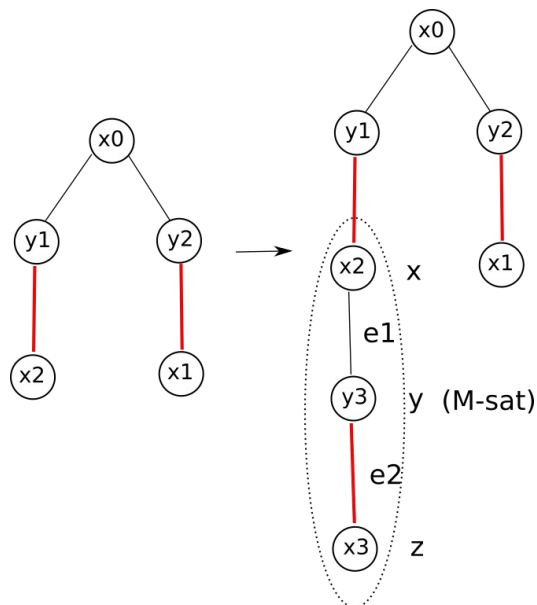
Subcaso a): condição de parada

Se $T = N(S)$, então $|N(S)| = |T| = |S'| = |S| - 1$ (menos 1 por causa da raiz). Portanto, temos que $|N(S)| < |S|$, o que fere o teorema do casamento, pois para que exista um emparelhamento M que sature $\forall v \in X$, temos que ter $|N(S)| \geq |S|$. Em outras palavras, não há como melhorar o emparelhamento M atual. Devemos parar.

Subcaso b): existe caminho M -aumentado, continuar buscando

$$T \subset N(S) \Rightarrow |N(S)| > |T| \Rightarrow |N(S)| > |S'| \Rightarrow |N(S)| > |S| - 1 \Rightarrow |N(S)| \geq |S| \quad (\text{T. C.})$$

É possível melhorar emparelhamento M buscando caminho M -aumentado (há o que adicionar na árvore T). Nesse caso, $\exists y \in G$ que não está na árvore e é adjacente a algum $x \in S$. Porém, y pode ser de 2 tipos: M -saturado ou M -não-saturado. Se y é M -saturado então \exists aresta $yz \in M$. Assim, crescemos a árvore adicionando 2 arestas: (x, y) e (y, z) , gerando uma nova árvore do tipo-I.



Caso contrário, se y é M -não-saturado, então encontramos um caminho M -aumentado P da raiz x_0 até y ($M' = T(P)$) - árvore do tipo-II

Em resumo, a ideia do algoritmo Húngaro consiste em observar repetidamente as seguintes condições:

Tipo-I $\left\{ \begin{array}{l} T=N(S) \rightarrow \nexists M \text{ que satura } \forall v \in X \text{ (fere T. C.)} \\ T \subset N(S) \rightarrow \text{continue buscando caminho M-aumentado P} \end{array} \right.$

Tipo-II Encontramos caminho M -aumentado P : $M' = T(P)$

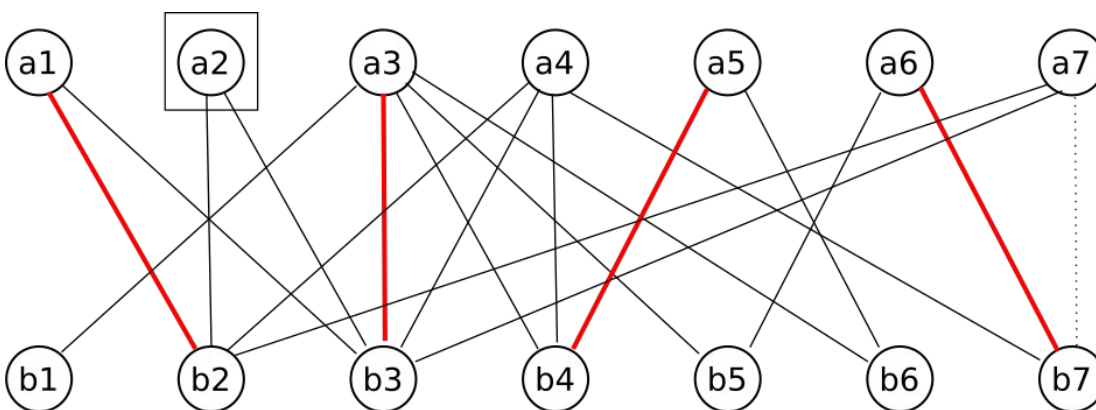
Algoritmo Húngaro

Entrada: $G = (V, E)$ bipartido + M inicial

Saída: M que satura $\forall v \in X$ (sucesso) ou S que fere T. C. (fracasso)

1. Se M satura $\forall v \in X$, pare e retorne M
 Caso contrário, seja x_0 o 1º vértice M -não-saturado de X ainda não escolhido
 Faça $S = \{x_0\}$ e $T = \emptyset$
2. Se $N(S) = T$, então sabemos que $|N(S)| < |S|$. Pare, pois S fere T. C. Retorne S
 Caso contrário, escolha y como o 1º vértice da lista $N(S)$ tal que $y \notin T$ (não pertence a T)
3. Se y é M -saturado, seja $yz \in M$ a aresta que emparelha y a z .
 Faça $S = S \cup \{z\}$, $T = T \cup \{y\}$ e volte para 2.
 Se y é M -não-saturado, temos uma árvore do tipo-II e P de x_0 a y é um caminho M -aumentado. Faça $M' = T(P)$ (transf. ao longo do caminho P) e retorne para 1.

Ex: Um novo projeto a ser desenvolvido na empresa *Boogle* consiste num conjunto de 7 tarefas (a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7). A empresa possui na equipe de desenvolvimento apenas 7 profissionais (b1, b2, b3, b4, b5, b6, b7). A partir de uma mapa de competências o gerente do projeto elaborou um modelo baseado em grafo para visualizar quais profissionais estão aptos a realizar quais tarefas. Sabendo que um profissional deve se associar a uma única tarefa, é possível alocar tarefas a pessoas de modo a completar todas as tarefas simultaneamente? Em caso positivo, forneça a alocação resultante. Em caso negativo, explique porque não é possível. (considere o *matching* inicial dado a seguir). Resolva o problema usando o algoritmo Húngaro.



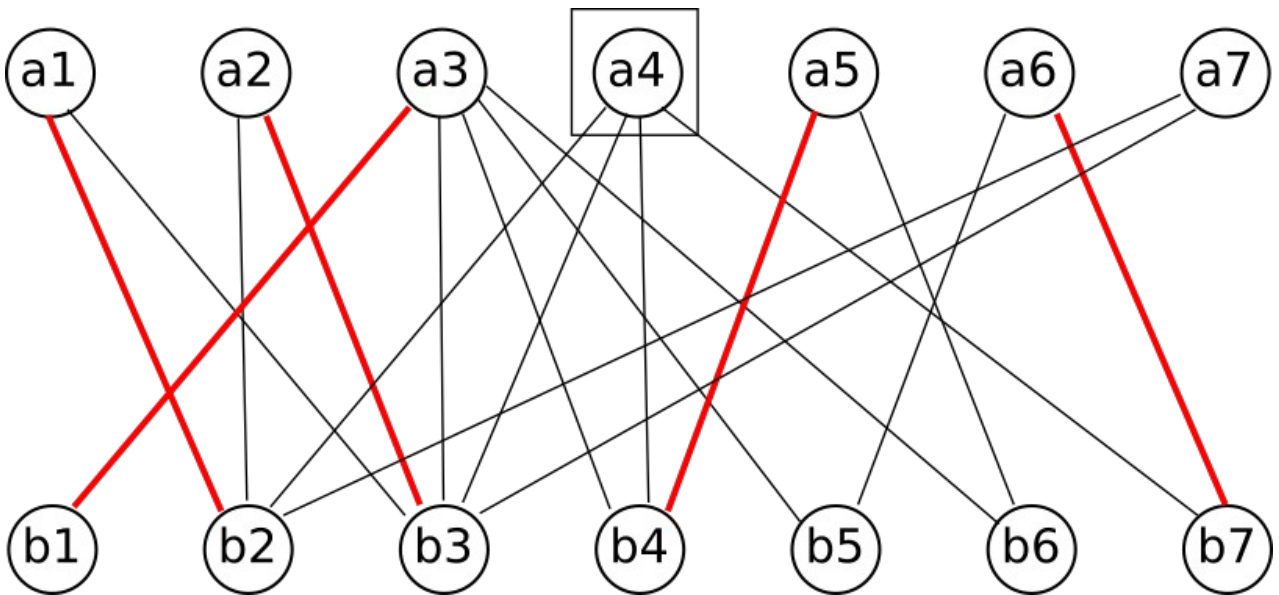
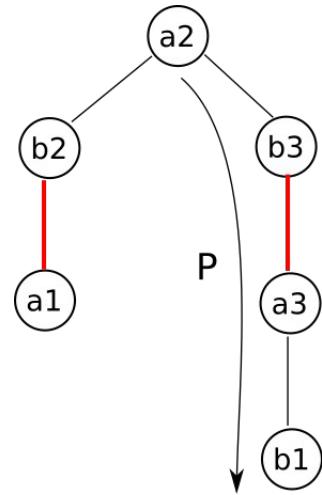
$M^{(0)} = \{a_1b_2, a_2b_3, a_3b_4, a_4b_5, a_5b_6, a_6b_7\}$

i	S	T	N(S)	$y \in N(s) \wedge y \notin T$	$c_y \in M(z)$
1	[a2]	\emptyset	[b2, b3]	b2 (M-sat)	(b2, a1)
	[a1, a2]	[b2]	[b2, b3]	b3 (M-sat)	(b3, a3)
	[a1, a2, a3]	[b2, b3]	[b1, b2, b3, b4, b5, b6]	b1	---

b1 (quem fez com que ele surgisse?) a3 - b3 (quem fez com que ele surgisse?) a2

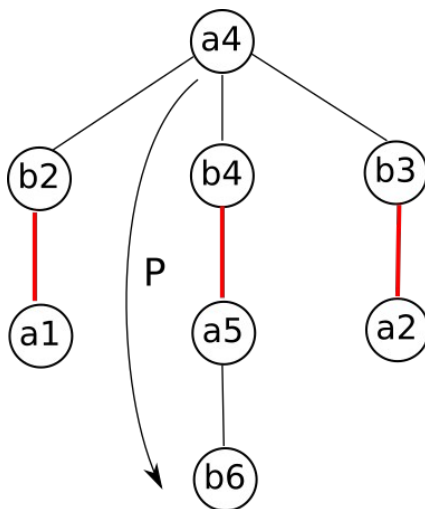
$P' = b1\ a3\ b3\ a2 \rightarrow P = \text{inv}(P') = a2\ b3\ a3\ b1$
 $M^{(1)} = T(P)$ (percorrer P ligando as arestas que não estão em $M^{(0)}$ e desligando as que estão)
a2 b3 = OK
b3 a3 = x
a3 b1 = OK

$M^{(1)} = \{a1b2, a2b3, a3b1, a5b4, a6b7\}$

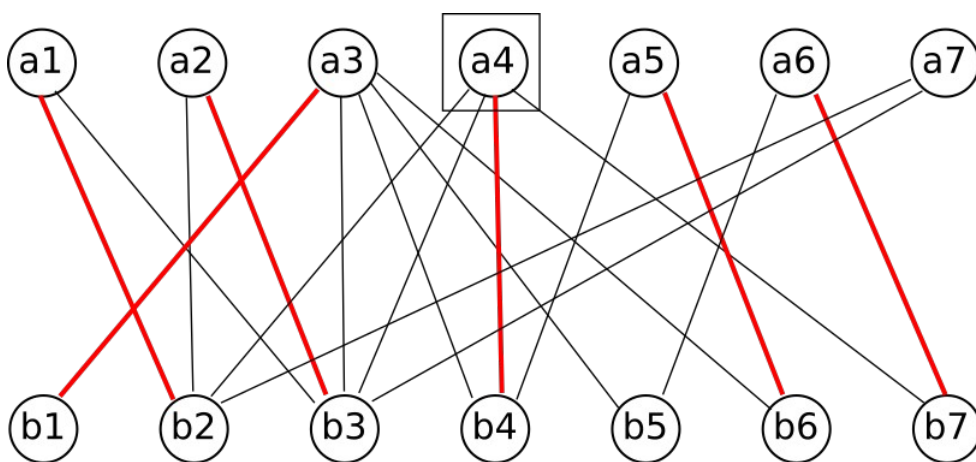


i	S	T	N(S)	$y \in N(s) \wedge y \notin T$	$c_y \in M(z)$
2	[a4]	\emptyset	[b2, b3, b4, b7]	b2 (M-sat)	(b2, a1)
	[a1, a4]	[b2]	[b2, b3, b4, b7]	b3 (M-sat)	(b3, a2)
	[a1, a2, a4]	[b2, b3]	[b2, b3, b4, b7]	b4 (M-sat)	(b4, a5)
	[a1, a2, a4, a5]	[b2, b3, b4]	[b2, b3, b4, b6, b7]	b6	---

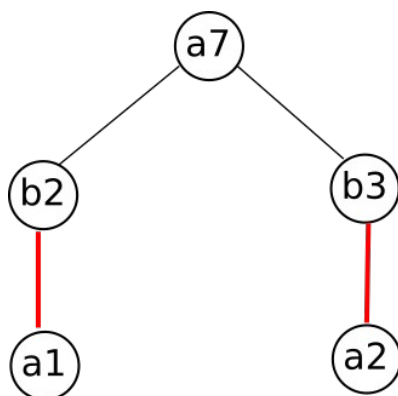
$P' = b6\ a5\ b4\ a4 \rightarrow P = \text{inv}(P') = a4\ b4\ a5\ b6$
 $M^{(2)} = T(P)$ (percorrer P ligando as arestas que não estão em $M^{(1)}$ e desligando as que estão)
 $a4\ b4 = \text{OK}$
 $b4\ a5 = x$
 $a5\ b6 = \text{OK}$



$M^{(2)} = \{a1b2, a2b3, a3b1, a4b4, a5b6, a6b7\}$

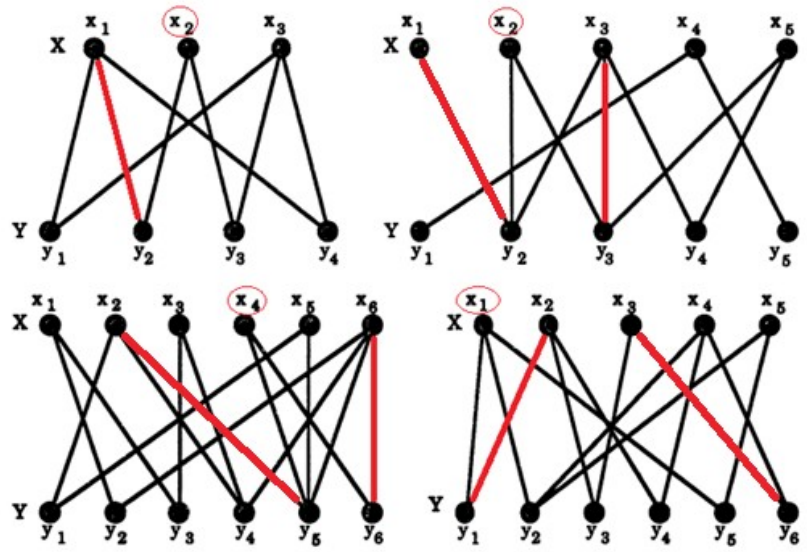


i	S	T	N(S)	$y \in N(s) \wedge y \notin T$	$c_y \in M(z)$
3	[a7]	\emptyset	[b2, b3]	b2 (M-sat)	(b2, a1)
	[a1, a7]	[b2]	[b2, b3]	b3 (M-sat)	(b3, a2)
	[a1, a2, a7]	[b2, b3]	[b2, b3]	---	---



Como $N(S) = T$, temos que $S = \{a1, a2, a3\}$ fere o T. C. pois $N(S) = \{b2, b3\}$. Portanto, não há emparelhamento M que sature todo vértice de X . (se houvesse aresta $a7b7$, OK)

Ex: Utilizando o algoritmo Húngaro, encontre emparelhamentos máximos para os grafos bipartidos a seguir, ou mostre que ele não existe, indicando um subconjunto S de X que viola o Teorema do Casamento.



Emparelhamentos Estáveis

Área de interface entre Teoria dos Grafos e Teoria dos Jogos.

Objetivo: Dado um grafo bipartido completo, e um conjunto de listas de preferências/rankings, encontrar dentre todos os emparelhamentos possíveis, o mais estável (noção relacionada com a ideia de evitar futuros rompimentos)

Aplicações reais em diversas áreas:

- Sistemas de recomendação (candidatos/vagas)
- Alocação de alunos a universidades
- Alocação de residentes a hospitais
- Sistema para doação de órgãos

Prêmio Nobel em 2012 na área de ciências econômicas (Lloyd Shapley) por contribuições e profundo impacto no estudo, caracterização e regulamentação de sistemas econômicos (mercados) não controlados pelo capital. (a ideia básica é que nas situações em que o algoritmo Gale-Shapley se aplica não é possível barganhar para obtenção de privilégios e vantagens impostas por escolher primeiro que os outros).

O problema do emparelhamento estável

Entrada:

$G = (V, E)$ bipartido completo $|X| = |Y| = n$ + $2n$ listas de preferência/rankings

Saída:

Emparelhamento perfeito S (quando $|X| = |Y|$, sempre é perfeito)

O conceito de estabilidade

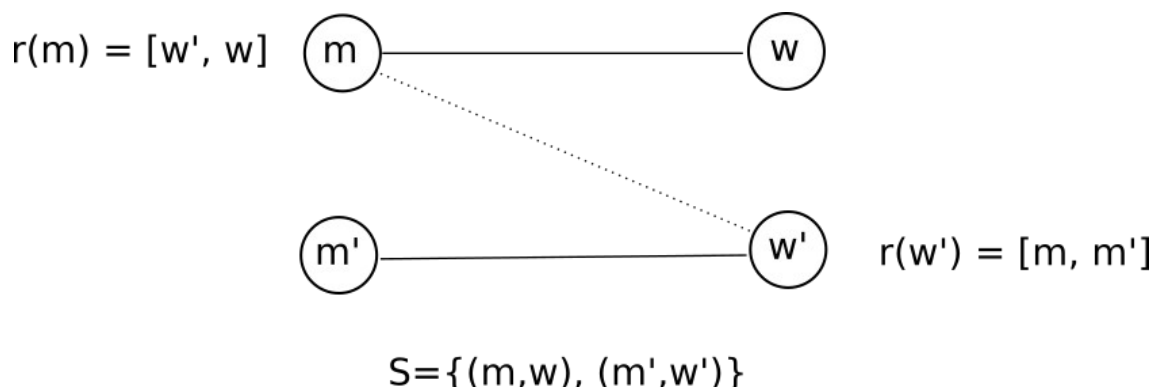
- Rankings / Listas de preferências: cada objeto de um lado deve ter uma lista em que rankeia todos os elementos do outro lado

$$\begin{aligned} \forall m \in M & \quad \exists r(m) = [w_1, w_2, \dots, w_n] \\ \forall w \in W & \quad \exists r(w) = [m_1, m_2, \dots, m_n] \end{aligned}$$

Definiremos um predicado ternário $P(m, w, w')$ para denotar que m prefere w a w' , ou seja, w vem antes de w' na lista $r(m)$

Def (Estabilidade):

Seja S o emparelhamento a seguir:



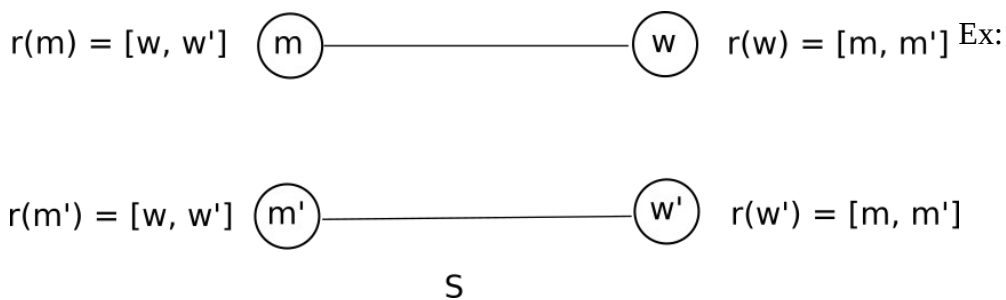
S é estável?

$\exists(m, w) \in S \wedge \exists(m', w') \in S$ tal que $P(m, w', w) \wedge P(w', m, m')$, portanto o par (m, w') define uma instabilidade em S pois ele não existe em S mas nada impede que venha existir. Ambos se desejam mas não estão juntos. Portanto, S não é estável.

Nada impede que m ou w' rompa o relacionamento atual de maneira unilateral na tentativa de melhorar seu ganho, ou seja, nada impede que ocorra uma ruptura e após isso o par (m, w') espontaneamente surja. Na teoria dos jogos dizemos que tanto m quanto w' podem romper unilateralmente na expectativa de maximizar o ganho e portanto a configuração atual não satisfaz o equilíbrio de Nash.

Obs: Note que $(m, w') \notin S$ (uma instabilidade nunca é um par que existe, mas sim um par que nada impede que ele possa aparecer no futuro)

Def: S é estável se S é perfeito e $\nexists(m, w)$ que provoque instabilidade

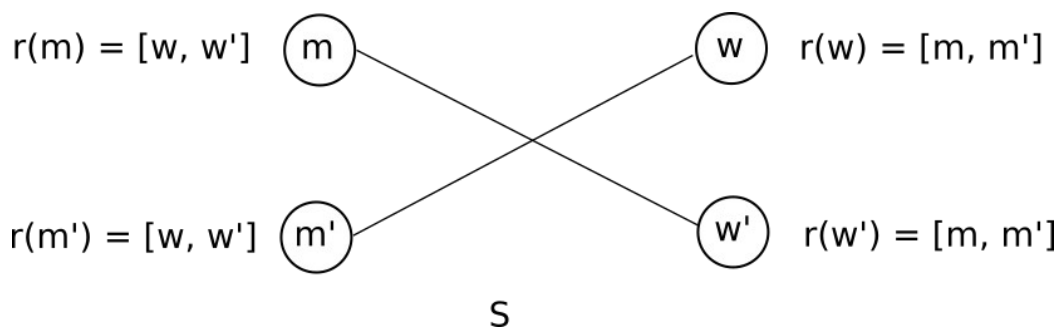


S é estável?

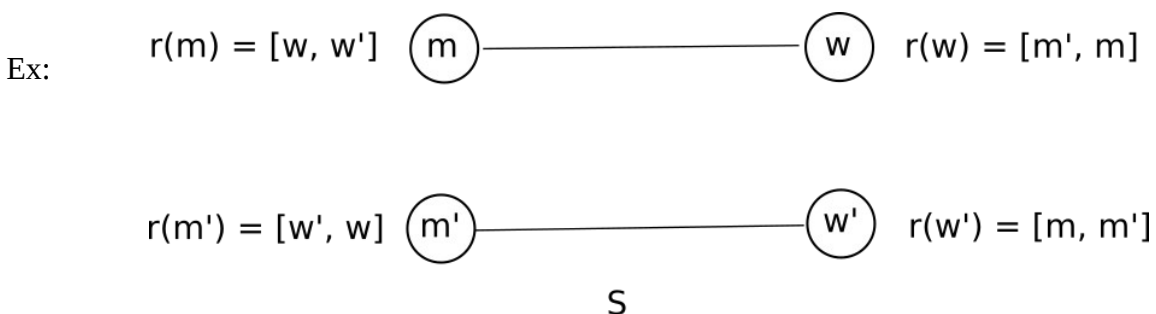
Sabemos que $P(m, w, w')$ e $P(w, m, m')$ e como o par (m, w) existe em S, eles não podem tentar nada melhor. Suponha que m' rompa unilateralmente com w'. Nesse caso, w vendo que m' está livre não irá largar de m para ficar com ele, pois m é o primeiro da lista. Da mesma forma, suponha que w' rompa unilateralmente com m'. O homem m não vai romper com w para ficar com w' pois prefere a parceira atual. Dessa forma, não há instabilidade que possa surgir e portanto S é estável.

Obs: Estabilidade não é agradar a todos com primeira opção!

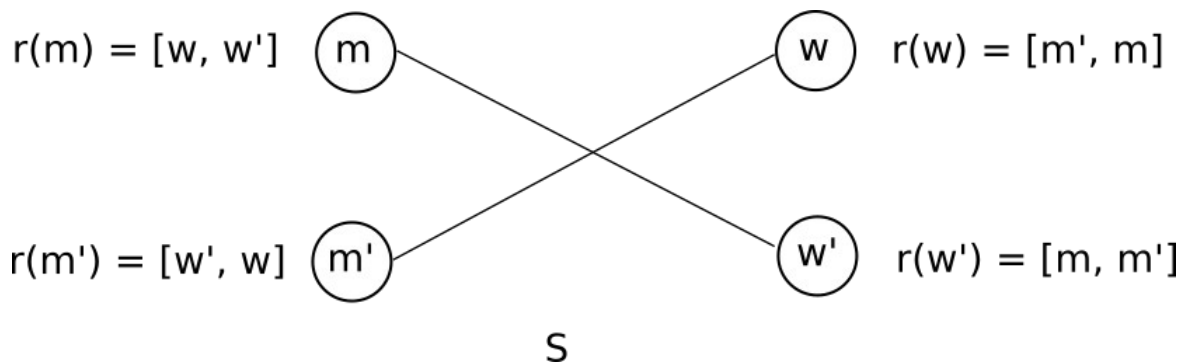
E se S for assim?



S é instável (tende a voltar para a configuração de cima). O que impede m e w de ficarem juntos no futuro? Instabilidade



Note que para os homens está OK (perfeito), mas para mulheres está trocado. Isso significa instabilidade? Não, pois S é estável. Veja que a mulher w' deseja melhorar e pode romper unilateralmente com m' . Porém, m não se interessa por w' e a resta (m, w') nunca irá se formar. O mesmo vale para o caso de w romper unilateralmente com m . A aresta (m', w) nunca irá se formar pois m' não quer w . E o que dizer desse outro S ?



S também é estável. Porém agora satisfaz plenamente as mulheres. Da mesma forma que o caso anterior, não há como as arestas (m, w) ou (m', w') aparecerem e portanto não há instabilidade.

Conceito: conjunto dominante – é o conjunto que propõe a ligação (casamento), quem toma a iniciativa

Questionamentos:

- 1) $\exists S$ estável para $\forall r(m_i)$ e $\forall r(w_i)$? Ou seja, é garantido que vai haver um S estável, independente de quais forem as listas de preferências? Pode-se mostrar que sim (teoria dos jogos)
- 2) Dados $r(m_i)$ e $r(w_i) \forall i$, como construir S estável? Algoritmo de Gale-Shapley
- 3) S é único dado $r(m_i)$ e $r(w_i) \forall i$ e um conjunto dominante? SIM

Essa é a grande propriedade do algoritmo de Gale-Shapley. O algoritmo GS não fornece vantagem para qual nó será o primeiro a escolher, não se pode barganhar). Independe da ordem que o conjunto dominante faz as escolhas, sempre resulta no mesmo emparelhamento. Do ponto de vista da economia, é o que proporciona a regulação de mercados.

Algoritmo de Gale-Shapley (conj. M dominante)

Enquanto $\exists m_i$ livre (que ainda não tentou $\forall w_i \in W$)

Seja m_i esse homem

Seja w_i a mulher mais bem rankeada em $r(m_i)$ (para a qual m_i ainda não propôs)

Se w_i está livre

(m_i, w_i) “engaged” (adiciona em S temporariamente)

Senão

// significa que $\exists (\bar{m}, w_i) \in S$

Se $P(w_i, \bar{m}, m_i)$

m_i continua livre (vai continuar tentando)

Senão

// significa que $P(w_i, m_i, \bar{m})$

(m_i, w_i) “engaged”

\bar{m} fica livre (vai tentar outras parceiras)

Propriedades do algoritmo:

i) Ponto de vista de $m_i \in M$: a cada troca, sequencia de parceiras piora

Para que está no conjunto dominante, sempre que houver uma troca será para pior

ii) Ponto de vista de $w_i \in W$: a cada troca, sequencia de parceiros melhora
 Para quem está conjunto passivo, sempre que houver uma troca será para melhorar

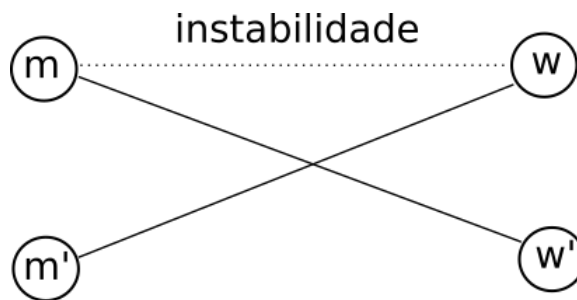
iii) Complexidade

No pior caso, cada m_i propõe no máximo para n mulheres. Como existe um total de n homens, a complexidade do algoritmo é $O(n^2)$

Teorema: O emparelhamento S retornado pelo algoritmo de Gale-Shapley é estável.

Prova: por contradição

1. Suponha que S retornado pelo algoritmo GS não é estável. Então, existe uma instabilidade (m, w)



2. Isso implica que $P(m, w, w') \wedge P(w, m, m')$

3. Mas se m finalizou o algoritmo com w' , significa que a última proposta de m foi para w'

4. Então, m propôs a w antes de w'

Isso implica que na lista de w , m' deve vir antes de m , ou seja, $P(w, m', m)$

Caso contrário, w teria ficado com m'

5. Assim, chegamos em $P(w, m, m') \wedge P(w, m', m)$, que é falso sempre pois se um dos termos é verdade o outro não pode ser verdade também. Em outras palavras, não é possível para uma mulher w preferir m a m' e m' a m simultaneamente.

6. Portanto, a suposição inicial não é válida e a instabilidade não pode existir em S .

Dessa forma, não existe S instável gerado pelo algoritmo GS.

Def: valid partner (vp)

Dizemos que w é $vp(m)$ se existe S estável tal que $(m, w) \in S$

Def: best valid partner (bvp)

Dizemos que w é $bvp(m)$ se w é $vp(m)$ e $\nexists w' \neq w$ que seja $vp(m)$ tal que $P(m, w', w)$

Teorema: Toda execução do algoritmo Gale-Shapley (com M dominante) resulta no conjunto

$$S^* = \{(m, bvp(m)), \forall m \in M\}$$

Esse resultado é de fundamental importância pois garante que não importa a ordem de escolha dos homens, o resultado final será sempre o mesmo. Esse fato do ponto de vista da teoria dos jogos significa que nesses tipos de sistemas não existe barganha, ou seja, não é possível barganhar e comprar o direito de escolher primeiro, pois o resultado será sempre o mesmo.

Prova: por contradição

1. Suponha que S é um emparelhamento estável gerado pelo algoritmo GS em que m está emparelhado com alguém que não é sua $bvp(m) = w$

2. Então, m deve ter sido rejeitado por $w = bvp(m)$, uma vez que ele começa a propor em ordem decrescente de preferência

3. Seja m o primeiro homem para o qual isso ocorre (ser rejeitado). Ele pode ter sido rejeitado por:

a) m propôs a w , mas foi negado pois ela preferiu ficar com o atual m'

b) w rompeu com m por uma proposta melhor de um homem m'

Em qualquer caso, é certo que w está emparelhada a m' , o qual ela prefere, ou seja:

$$P(w, m', m)$$

4. Pela definição de $bvp(m)$ existe um emparelhamento estável S' que contém o par (m, w) .

5. A pergunta é: Com quem m' estaria emparelhado em S' ?

Com uma mulher $w' \neq w = bvp(m)$

6. Note que m' não pode ter sido rejeitado por ninguém quando se engajou com w , pois m foi o primeiro a ser rejeitado (de acordo com o passo 3). Como m' propõe em ordem decrescente de preferência, então m' prefere w a w' (senão em S ele teria escolhido w' e não w). Logo:

$$P(m', w, w')$$

7. Assim, como temos $P(w, m', m) \wedge P(m', w, w')$ e o par $(m', w) \notin S'$, temos que (m', w) define uma instabilidade em S' (contradição pois S' era suposto estável)

Portanto, S deve obrigatoriamente associar todo homem m a sua $bvp(m)$.

Ex: Suponha que num site de relacionamentos existam as seguintes listas de preferências entre um grupo de rapazes e garotas.

Man	1	2	3	4	5
A1	B2	A2	D2	E2	C2
B1	D2	B2	A2	C2	E2
C1	B2	E2	C2	D2	A2
D1	A2	D2	C2	B2	E2
E1	B2	D2	A2	E2	C2

Woman	1	2	3	4	5
A2	E1	A1	B1	D1	C1
B2	C1	B1	D1	A1	E1
C2	B1	C1	D1	E1	A1
D2	A1	E1	D1	C1	B1
E2	D1	B1	E1	C1	A1

Utilizando o algoritmo de Gale-Shapley encontre:

a) um emparelhamento estável M sendo os rapazes o conjunto dominante. Mostre a sequencia de propostas até o emparelhamento estável.

b) um emparelhamento estável M' sendo as garotas o conjunto dominante. Mostre a sequencia de propostas até o emparelhamento estável.

i	m	w	engaged
1	A1	B2	yes
2	B1	D2	yes
3	C1	B2	yes
4	A1	A2	yes
5	D1	A2	no
6	D1	D2	yes
7	B1	B2	no
8	B1	A2	no
9	B1	C2	yes
10	E1	B2	no
11	E1	D2	yes
12	D1	C2	no
13	D1	B2	no
14	D1	E2	yes

$$S^{(0)} = \emptyset$$

$$S^{(1)} = \{A1, B2\}$$

$$S^{(2)} = \{A1, B2, (B1, D2)\}$$

$$S^{(3)} = \{C1, B2, (B1, D2)\}$$

$$S^{(4)} = \{C1, B2, (B1, D2), (A1, A2)\}$$

$$S^{(5)} = \{C1, B2, (B1, D2), (A1, A2)\}$$

$$S^{(6)} = \{C1, B2, (D1, D2), (A1, A2)\}$$

$$S^{(7)} = \{C1, B2, (D1, D2), (A1, A2)\}$$

$$S^{(8)} = \{C1, B2, (D1, D2), (A1, A2)\}$$

$$S^{(9)} = \{C1, B2, (D1, D2), (A1, A2), (B1, C2)\}$$

$$S^{(10)} = \{C1, B2, (D1, D2), (A1, A2), (B1, C2)\}$$

$$S^{(11)} = \{C1, B2, (E1, D2), (A1, A2), (B1, C2)\}$$

$$S^{(12)} = \{C1, B2, (E1, D2), (A1, A2), (B1, C2)\}$$

$$S^{(13)} = \{C1, B2, (E1, D2), (A1, A2), (B1, C2)\}$$

$$S^{(14)} = \{C1, B2, (E1, D2), (A1, A2), (B1, C2), (D1, E2)\}$$

b) Solução

i	w	m	engaged
1	A2	E1	yes
2	B2	C1	yes
3	C2	B1	yes

4	D2	A1	yes
5	E2	D1	yes

$$S^{(0)} = \emptyset$$

$$S^{(1)} = \{A2, E1\}$$

$$S^{(2)} = \{A2, E1, (B2, C1)\}$$

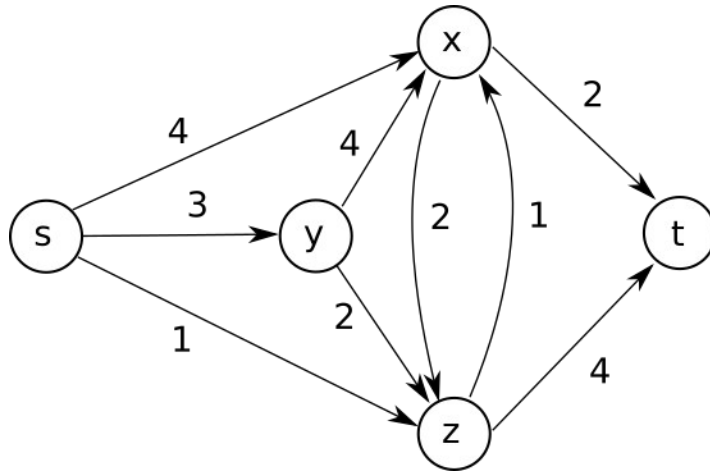
$$S^{(3)} = \{A2, E1, (B2, C1), (C2, B1)\}$$

$$S^{(4)} = \{A2, E1, (B2, C1), (C2, B1), (D2, A1)\}$$

$$S^{(5)} = \{A2, E1, (B2, C1), (C2, B1), (D2, A1), (E2, D1)\}$$

Fluxo em redes

Motivação: maximizar o fluxo que pode ser produzido pela fonte e consumido pelo terminal



Consideraremos grafos direcionados $G = (V, E, c)$ onde $c: E \rightarrow \mathbb{N}^+$ é a capacidade de uma aresta. Capacidade é a quantidade máxima de informação que pode ser transmitida por uma aresta. Iremos classificar os vértices de G como:

- $s \in V$: source (gerador de fluxo: não entra nada, apenas sai)
- $t \in V$: terminal ou sink (absorve fluxo: não sai nada, apenas entra)
- $\forall v \in V - \{s, t\}$: nós internos (intermediários)

Em nossos exemplos iremos considerar apenas um único source e um único terminal

Def: Um fluxo s - t é uma função $f: E \rightarrow \mathbb{N}^+$ (associa um inteiro a cada aresta) que satisfaz:

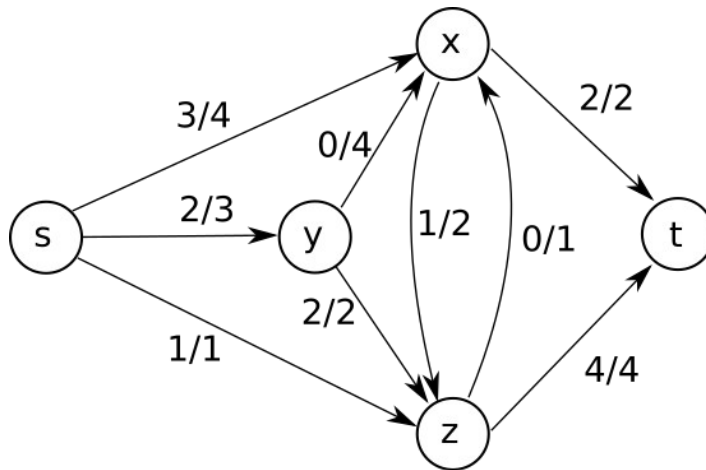
- i) $\forall e \in E, f(e) \leq c(e)$ (restrição de capacidade)
- ii) $v(f) = \sum_{e \in O(s)} f(e) = \sum_{e \in I(t)} f(e)$ (fluxo gerado na fonte é igual ao fluxo consumido no terminal)
- iii) $\forall v \in V - \{s, t\}$ (nó interno)

$$\sum_{e \in I(v)} f(e) = \sum_{e \in O(v)} f(e) \quad (\text{conservação do fluxo})$$

iv) Limite superior: para o valor de fluxo máximo que pode circular em G

$$v(f) = \sum_{e \in O(s)} c(e)$$

Como exemplo, verifique que um fluxo válido para o grafo anterior é representado pela figura a seguir.



Basta verificar as propriedades:

i) OK, pode-se ver facilmente que $\forall e \in E, f(e) \leq c(e)$

ii) $\sum_{e \in O(s)} f(e) = 1 + 2 + 3 = 6 = 2 + 4 = \sum_{e \in I(t)} f(e)$ (OK)

iii) Para $\{x, y, z\}$ temos

$$\sum_{e \in I(x)} f(e) = 3 + 0 + 0 = 1 + 2 = \sum_{e \in O(x)} f(e) \quad (\text{OK})$$

$$\sum_{e \in I(y)} f(e) = 2 = 0 + 2 = \sum_{e \in O(y)} f(e) \quad (\text{OK})$$

$$\sum_{e \in I(z)} f(e) = 1 + 1 + 2 = 0 + 4 = \sum_{e \in O(z)} f(e) \quad (\text{OK})$$

Portanto, temos de fato um fluxo válido.

Notação:

$$f^{\text{in}}(v) = \sum_{e \in I(v)} f(e) \qquad f^{\text{out}}(v) = \sum_{e \in O(v)} f(e)$$

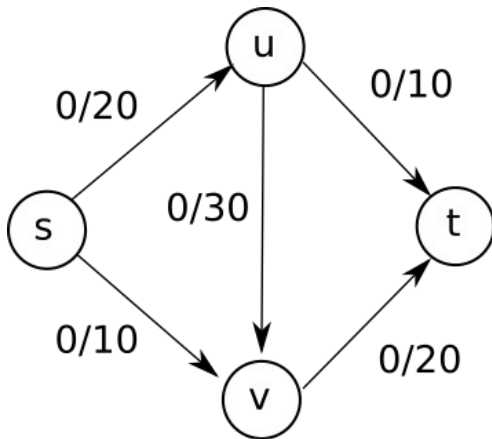
O Problema do Fluxo Máximo

Dado $G = (V, E, c)$ qual o máximo valor de $v(f)$ que pode chegar em t ?

Ideia geral

1. Condição inicial: $f(e) = 0, \forall e \in E$
2. Iteração: encontrar um caminho s - t e transmitir fluxo
3. Condição de parada: Todo caminho s - t encontra-se saturado

Ex:



Caso 1. $P = suvt$, $v(f) = 20$

Caso 2. $P1 = sut$, $v(f) = 10$

$P2 = svt$, $v(f) = 10 + 10 = 20$

$P3 = suvt$, $v(f) = 20 + 10 = 30$

Note que em cada um dos casos, o valor do fluxo obtido é diferente. Não é bom que o valor do fluxo dependa da escolha dos caminhos, pois senão o algoritmo iria chegar a resultados diferentes para um mesmo problema. O ideal é que o fluxo máximo seja obtido independente da escolha dos caminhos. Para isso iremos definir o grafo residual.

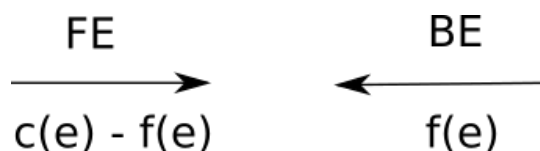
Def: Grafo Residual $G_f = (V_f, E_f)$ gerado a partir de $G = (V, E, c)$

- i) $V_f = V$ (conjunto de vértices é o mesmo)
- ii) $E_f \neq E$ pois $\forall e \in E$ pode gerar até 2 arestas em E_f
 - a) Forward-Edge (FE): na mesma direção da aresta e
 $\forall e \in E$ tal que $f(e) < c(e)$, \exists em E_f uma aresta e' com capacidade residual $c(e') = c(e) - f(e)$ (exatamente o que falta para saturar)
 - b) Backward-Edge (BE): na direção contrária a aresta e
 $\forall e \in E$ tal que $f(e) > 0$, \exists em E_f uma aresta e'' com capacidade residual $c(e'') = f(e)$ (exatamente o que já passa)

OBS: Note que no início não existem Backward-Edges pois os fluxos iniciais são nulos

RESUMO

1. $\forall e \in E$ com $f(e) = 0$ gera apenas Forward-Edge e'
2. $\forall e \in E$ com $f(e) = c(e)$ gera apenas Backward-Edge e''
3. $\forall e \in E$ com $0 < f(e) < c(e)$ gera 2 arestas: e' (FE) e e'' (BE)



Caminhos aumentados

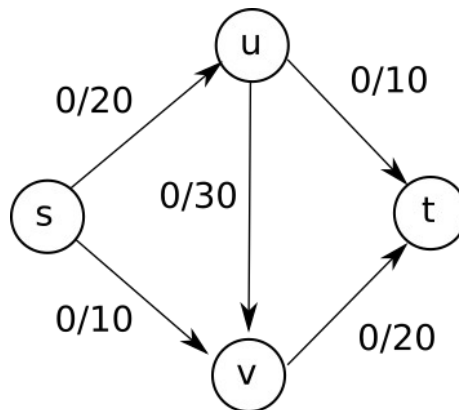
Para melhorar um fluxo inicial com valor f , devemos buscar por caminhos P_{st} no grafo residual $G_f = (V_f, E_f)$. A primitiva Augment que realiza essa operação de melhorar um fluxo f é definida como:

```

Augment(f, P) { (melhora fluxo f utilizando o caminho P em G_f)
  b = gargalo(P)    (aresta de P com menor capacidade residual)
  for each e = (u, v) in P {
    if e está a favor do fluxo s-t em G (F.E.)
      f(e) = f(e) + b
    else (B.E.)
      f(e) = f(e) - b
  }
  return f
}

```

Ex:



Passo 1: Grafo residual é o próprio G

$f = 0$

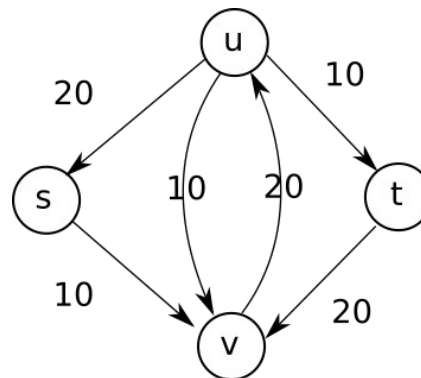
$P = suvt$

$b = 20$

$f(su) = 0 + 20 = 20$

$f(uv) = 0 + 20 = 20$

$f(vt) = 0 + 20 = 20$



Passo 2:

$f = 20$

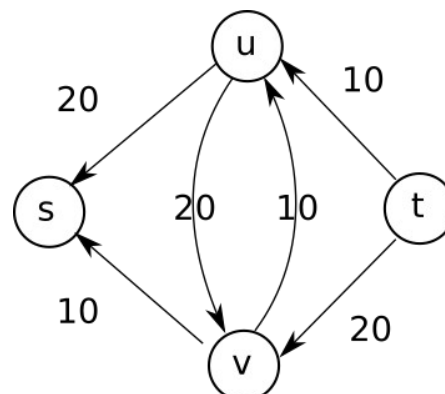
$P = svut$

$b = 10$

$f(sv) = 0 + 10 = 10$

Contrária a aresta (u,v)

$f(vu) = f(uv) - 10 = 20 - 10 = 10$



Passo 3:

$f = 30$

$\nexists P_{st}$ em $G_f \rightarrow$ PARE

O fluxo máximo vale 30

Teorema: O resultado da operação $f' = \text{Augment}(f, P)$ é um fluxo válido.

i) f' não excede a capacidade (no caso de F.E.)

$$f'(e) = f(e) + b \leq f(e) + (c(e) - f(e))$$

pois para qualquer aresta F.E. do caminho $c(e) - f(e)$ será maior ou igual que b

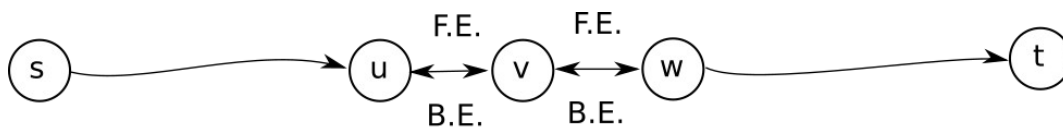
ii) f' nunca é inferior a zero (no caso de B.E.)

$$f(e) \geq f'(e) = f(e) - b \geq f(e) - f(e) = 0$$

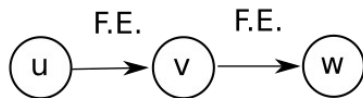
pois para qualquer aresta B.E. do caminho $f(e)$ será maior ou igual que b

iii) conservação (tudo que entra em v sai de v)

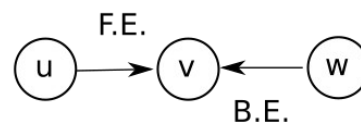
$$f^{\text{in}}(v) = f^{\text{out}}(v) \quad \text{para todo nó interno } v$$



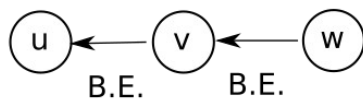
4 possibilidades



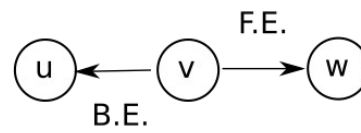
+b na entrada
+b na saída



+b na entrada
~~-b na saída~~
-b na entrada



-b na entrada
-b na saída



-b na ~~entrada~~ saída
+b na saída

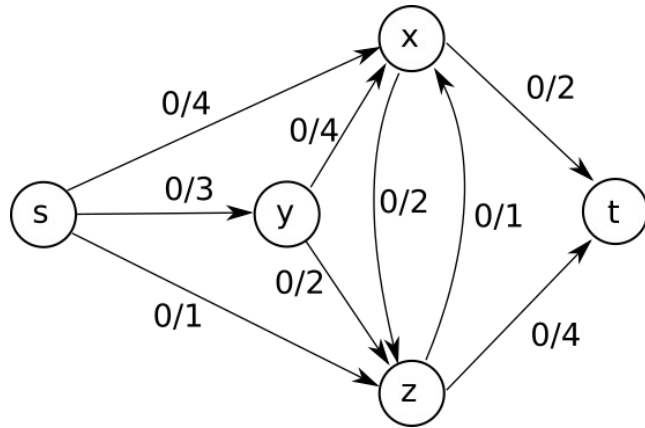
Portanto, a operação $\text{Augment}(f, P)$ preserva fluxos e podemos usá-la para melhorar um dado fluxo. Veremos a seguir uma sequência lógica de passos para obter o fluxo máximo em um grafo: o algoritmo de Ford-Fulkerson

```

Max_Flow(G, s, t, c) {
  f = 0
  for each e ∈ E
    f(e) = 0
  while ∃ Pst in Gf {
    Let Pst be one of these paths
    f' = Augment(f, Pst)
    Update the residual graph Gf
  }
}

```

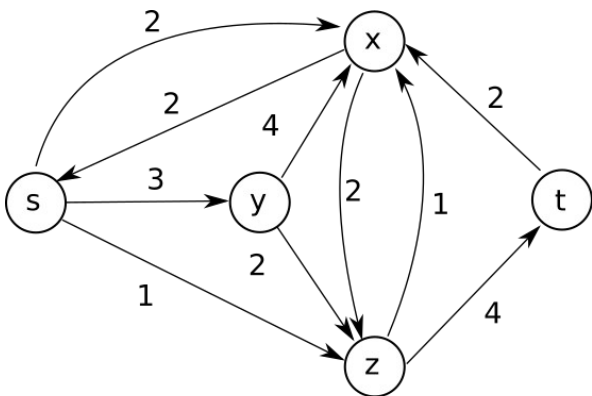
Ex: Utilizando ao algoritmo de Ford-Fulkerson, encontre o fluxo máximo



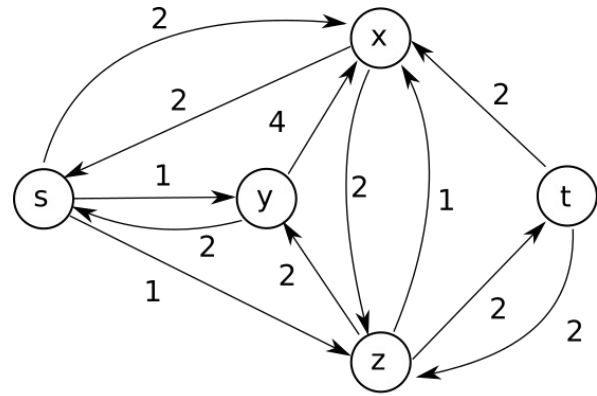
i	P_{st}	b	$f(e), \forall e \in P_{st}$	f
1	sxt	2	$f(sx) = 0 + 2 = 2$ $f(xt) = 0 + 2 = 2$	$0 + 2 = 2$
2	syzt	2	$f(sy) = 0 + 2 = 2$ $f(yz) = 0 + 2 = 2$ $f(zt) = 0 + 2 = 2$	$2 + 2 = 4$
3	szt	1	$f(sz) = 0 + 1 = 1$ $f(zt) = 2 + 1 = 3$	$4 + 1 = 5$
4	syxzt	1	$f(sy) = 2 + 1 = 3$ $f(yx) = 0 + 1 = 1$ $f(xz) = 0 + 1 = 1$ $f(zt) = 3 + 1 = 4$	$5 + 1 = 6$

Portanto, o fluxo máximo vale 6.

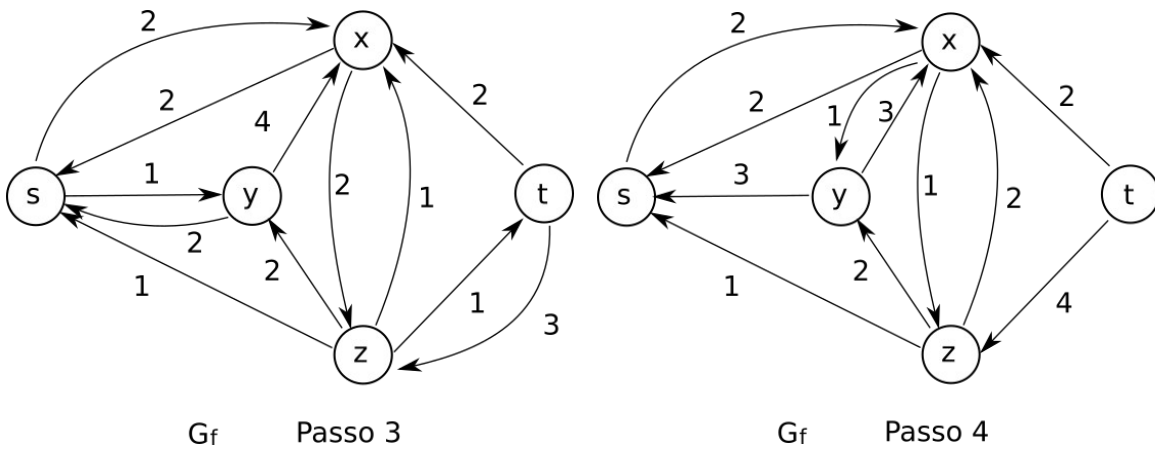
A seguir encontram-se os grafos residuais após cada um dos passos do algoritmo.



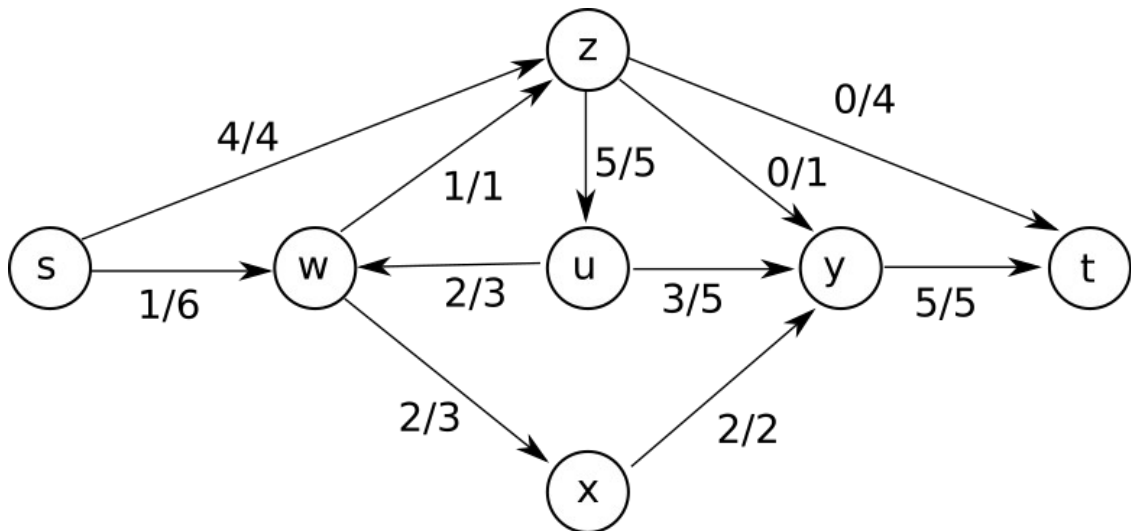
Gf Passo 1



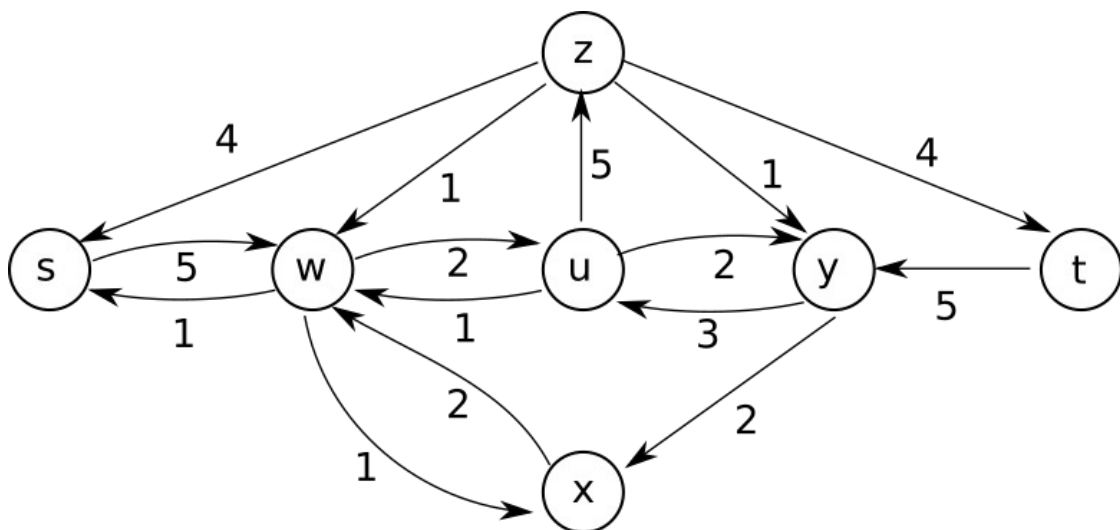
Gf Passo 2



Exercício: Dado o grafo G a seguir, responda: o fluxo dado é máximo? Justifique sua resposta.



Para verificar se o fluxo dado é máximo, devemos observar o grafo residual. Sendo assim, o grafo residual de G fica:



Note que $\exists P_{st} = swuzt$ no grafo residual, portanto o fluxo não pode ser máximo. Como o gargalo do caminho é 2, podemos aumentar o fluxo nessas arestas de duas unidades, ou seja:

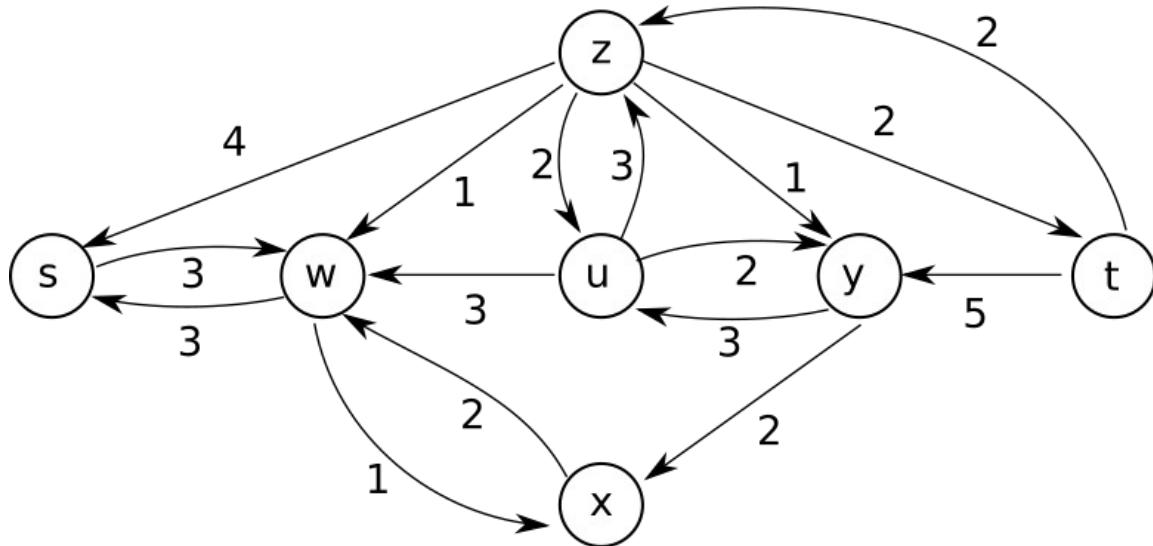
$f(sw) = 1 + 2 = 3$, pois a aresta (s,w) está alinhada ao fluxo em G

$f(wu) = 2 - 2 = 0$, pois a aresta (w,u) está ao contrário do fluxo em G

$f(uz) = 5 - 2 = 3$, pois a aresta (u,z) está ao contrário do fluxo em G

$f(zt) = 0 + 2 = 2$, pois a aresta (z,t) está alinhada ao fluxo em G

De modo que o valor total do fluxo agora é 7. O grafo residual é atualizado para:



Note que $\nexists P_{st}$ no grafo residual. Portanto, podemos concluir agora que o fluxo é máximo.

Fluxos e cortes

Aplicações: segmentação de imagens, classificação supervisionada, emparelhamentos

Motivação: cortes especificam limites superiores para $v(f)$ (valor do fluxo máximo). A relação entre fluxo e cortes nos permite resolver um problema NP-Hard (corte mínimo em grafos) em tempo polinomial.

Ideia: Ao particionar G em 2 componentes A e B , a capacidade das arestas cortadas impõe um limite superior para o fluxo que pode sair de A e chegar em B .

Def: Um corte s - t em G é qualquer partição de V em A e B tal que $s \in A$ e $t \in B$

Def: A capacidade de um corte é definida como:

$$c(A,B) = \sum_{e \in O(A)} c(e) \quad (\text{soma das capacidades das arestas que saem de } A \text{ e chegam em } B)$$

Min-cut/Max-flow: resultado que mostra a equivalência entre 2 problemas duais

Encontrar o fluxo máximo corresponde a encontrar o corte de mínima capacidade (2 problemas que podem ser resolvidos com um único algoritmo)

Para provar o teorema Min-cut/Max-flow, iremos primeiramente demonstrar uma série de resultados preliminares importantes que serão utilizados depois.

Teorema: Seja f um fluxo s - t e (A, B) um corte s - t . Então:

$$v(f) = f^{\text{out}}(A) - f^{\text{in}}(A) \quad (\text{ou seja, o valor do fluxo depende diretamente do corte: tudo que sai de } A \text{ menos tudo que entra em } A)$$

$$v(f) = \sum_{e \in O(s)} f(e) = f^{\text{out}}(s)$$

Sabe-se que $f^{\text{in}}(s) = 0$ então podemos escrever $v(f) = f^{\text{out}}(s) - f^{\text{in}}(s)$

Mas também sabemos que $\forall v \in V - \{s, t\}$ (nó intermediário), pela conservação do fluxo vale:

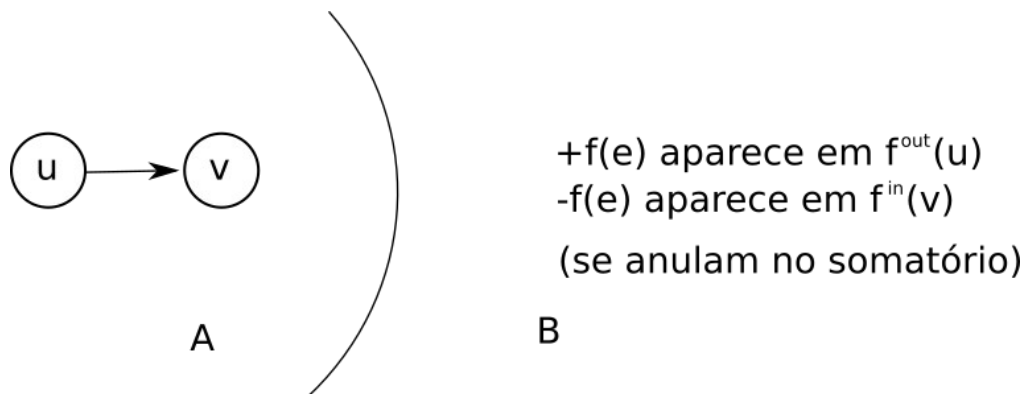
$$f^{\text{in}}(v) = f^{\text{out}}(v) \Leftrightarrow f^{\text{out}}(v) - f^{\text{in}}(v) = 0$$

Desse modo, podemos expressar $v(f)$ como:

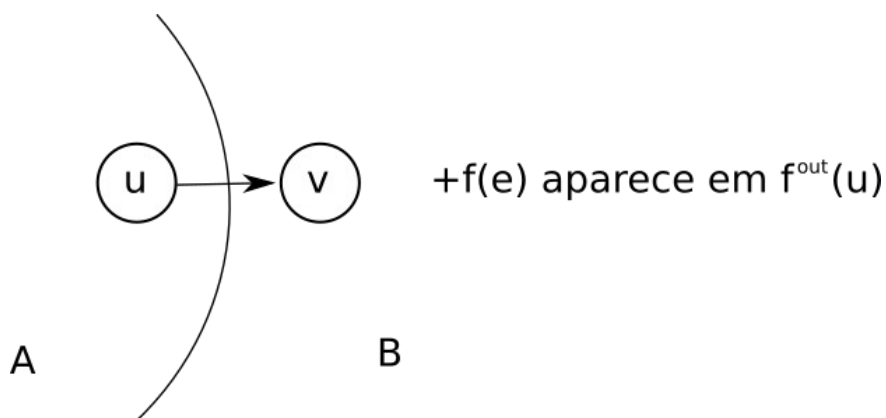
$$v(f) = \sum_{v \in A} (f^{\text{out}}(v) - f^{\text{in}}(v)) \quad (\text{todos os termos desse somatório são nulos, exceto para } s)$$

Porém, existem 4 tipos de arestas em G :

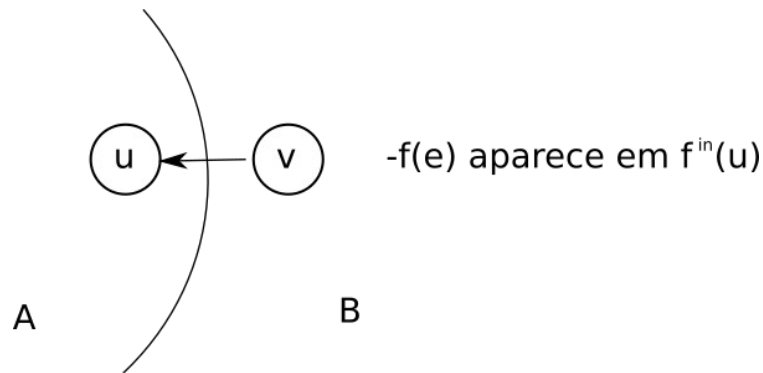
i) $e = \langle u, v \rangle$ com $u, v \in A$



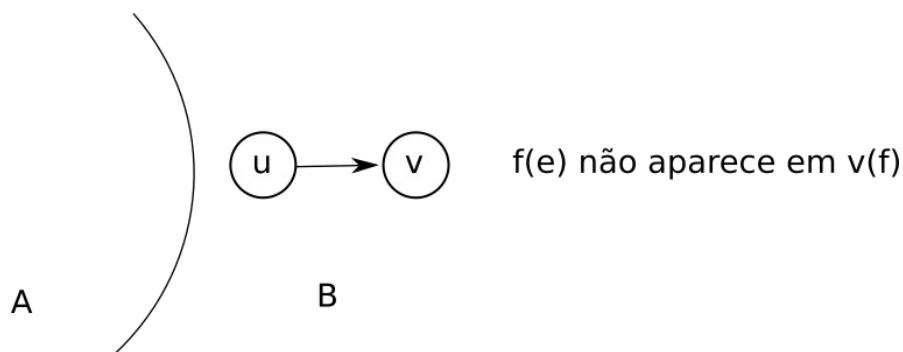
ii) $e = \langle u, v \rangle$ com $u \in A$ e $v \in B$



iii) $e = \langle v, u \rangle$ com $u \in A$ e $v \in B$



iv) $e = \langle u, v \rangle$ com $u, v \in B$



Portanto, $v(f)$ pode ser expresso por:

$$v(f) = \sum_{e \in O(A)} f(e) - \sum_{e \in I(A)} f(e) = f^{\text{out}}(A) - f^{\text{in}}(A)$$

OBS: Note que $f^{\text{out}}(A) - f^{\text{in}}(A) = f^{\text{in}}(B) - f^{\text{out}}(B)$

Teorema: Seja um fluxo s-t qualquer e (A, B) um corte s-t. Então, $v(f) \leq c(A, B)$

$$v(f) = f^{\text{out}}(A) - f^{\text{in}}(A) \leq f^{\text{out}}(A) = \sum_{e \in O(A)} f(e) \leq \sum_{e \in O(A)} c(e) = c(A, B)$$

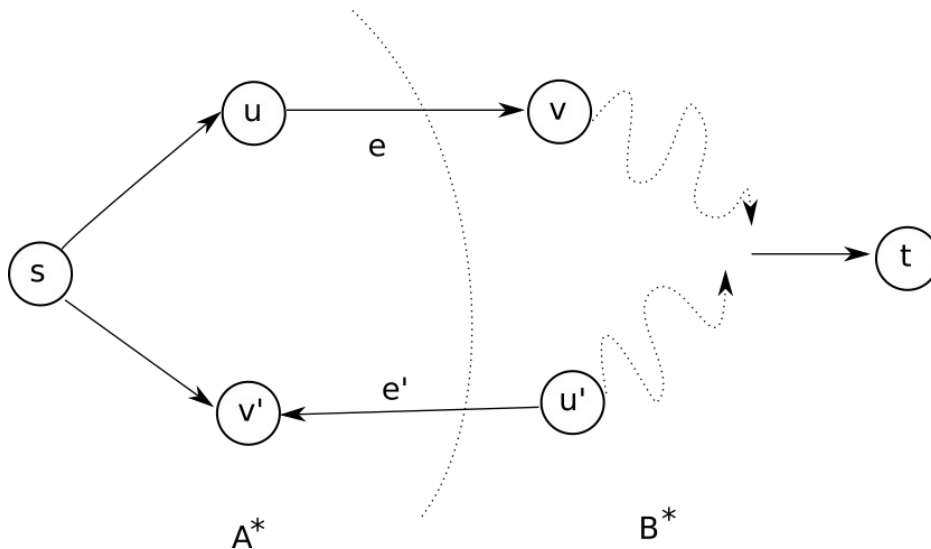
OBS: a) Se encontrarmos um fluxo s-t máximo f^* , não existe corte $c(A, B)$ com capacidade menor que $v(f^*)$. b) Se encontrarmos um corte s-t (A, B) com capacidade mínima c^* , não existe fluxo s-t com valor maior que c^*

Teorema (Min-cut/Max-flow): Seja f^* o fluxo s-t tal que $\nexists P_{st}$ em G_f (fluxo gerado pelo algoritmo Ford-Fulkerson). Então, existe um corte (A^*, B^*) para qual o valor $v(f^*) = c(A^*, B^*)$. Consequentemente, f^* tem máximo valor de fluxo e o corte (A^*, B^*) tem a mínima capacidade dentre todos os possíveis. (encontrar fluxo máximo nos dá corte mínimo, o que era NP-hard).

Prova: Seja $G_f = (V_f, E_f)$ o grafo residual de G no momento em que não existe mais caminho P_{st} . Podemos então dividir o conjunto V em 2 partições:

$$A^* = \{v \in V_f / \exists P_{sv}\} \quad (\text{atingíveis a partir de } s)$$

$$B^* = V_f - A^* \quad (\text{não atingíveis a partir de } s)$$



Note que:

a) $t \in B^*$ pois $\nexists P_{st}$ em G_f

b) Vamos analisar a aresta $e = \langle u, v \rangle$. Essa aresta certamente está saturada, ou seja, $f(e) = c(e)$, pois caso contrário haveria caminho P_{sv} uma vez que a capacidade residual da aresta F.E. correspondente em G_f seria $c(e) - f(e)$. Assim, podemos generalizar essa observação e escrever o seguinte fato:

$\forall e \in O(A^*)$ tem $f(e) = c(e)$ (todas as arestas que saem de A são saturadas)

c) Análise da aresta $e' = \langle u', v' \rangle$. Essa aresta certamente não carrega fluxo algum ($f(e)$ nulo), pois caso contrário seria gerado uma aresta $e'' = \langle v', u' \rangle$ em G_f (B.E.) com capacidade residual $f(e')$, o que resultaria num caminho $P_{su'}$. Assim, podemos generalizar essa observação para:

$\forall e \in I(A^*)$ tem $f(e) = 0$ (todas as arestas que entram em A tem fluxo nulo)

Em resumo, se (A^*, B^*) é um corte, então:

$\forall e \in O(A^*)$, $f(e) = c(e)$

$\forall e \in I(A^*)$, $f(e) = 0$

Calculando o valor do fluxo temos:

$$v(f) = f^{\text{out}}(A^*) - f^{\text{in}}(A^*) = \sum_{e \in O(A^*)} f(e) - \sum_{e \in I(A^*)} f(e) = \sum_{e \in O(A^*)} c(e) = c(A^*, B^*) \quad (\text{min. capac. corte})$$

OBS: A saída do Ford-Fulkerson, $v(f)$, é de fato o valor de $c(A^*, B^*)$. Os conjuntos A^* e B^* são obtidos por uma simples busca em largura a partir de s em G_f .

Introdução as redes complexas

- Modelos de grafos aleatórios
- Grafos dinâmicos
- Teoria dos grafos + Probabilidade + Estatística: grafos como variáveis aleatórias

Motivação: Estudar propriedades e dinâmica de sistemas complexos encontrados na natureza (moléculas, rede de proteínas, internet, redes sociais)

Existem basicamente 3 modelos principais:

- i) Modelo ER (Erdős-Renyi)
- ii) Modelo de pequeno mundo (Watts-Strogatz)
- iii) Modelo livre de escala (Barabasi-Alberts)

O que caracteriza um modelo? Resumidamente 3 aspectos:

- i) Distribuição dos graus
- ii) APL (average path length) – comprimento médio dos caminhos (extensão do grafo)
- iii) Coeficiente de aglomeração (densidade de ligação entre os vizinhos: número de triângulos)

Modelo ER

Primeiro modelo proposto: mais antigo

G é um grafo ER(n, p)

n: número de vértices

p: probabilidade de conexão entre 2 vértices

Algoritmo ER(n, p)

1. Inicie com o grafo nulo de n vértices
2. Escolha aleatoriamente um par de vértices u e v
3. Se a aresta (u,v) não existe
Gere um número aleatório $x \in [0, 1]$
Se $x \leq p$
 $G = G + (u, v)$
4. Repita os passos 2 e 3 até que $|E|=m$ ou o grau médio seja igual a k

Distribuição dos graus

Em muitos casos é necessário computar qual a probabilidade de um vértice ter k vizinhos. Para isso precisamos saber qual é a distribuição dos graus em um grafo do tipo ER. Pode-se mostrar que em grafos ER essa distribuição é uma Binomial com parâmetros n-1 e p.

Binomial(m, p)

$$p(x=k) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \quad \text{onde} \quad \binom{m}{k} = \frac{m!}{(m-k)!k!}$$

(probabilidade de ter k sucessos em m tentativas sabendo que probabilidade de 1 sucesso é p)

A ideia é que para um vertice ter grau k é preciso ter k sucessos em um total de $n-1$ vértices.

$$p(d(v)=k) = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{(n-1)-k} \quad \text{Binomial}(n-1, p)$$

Sabendo que a distribuição dos graus é uma binomial, é possível calcular a média dessa distribuição, que nada mais é que o grau médio ou valor esperado dos graus: $E[k]$ ou $\langle k \rangle$

$$E[k] = \sum_k k p(k)$$

A variância, que mede a dispersão da distribuição, é dada por:

$$\sigma^2 = E[(k - E[k])^2]$$

Problema: determine qual é o valor esperado e a variância da distribuição dos graus do modelo ER

Para facilitar os cálculos, iremos utilizar um conhecido resultado da teoria das probabilidades que diz que uma V.A. Binomial(m, p) é a soma de m V.A.'s de Bernoulli(p), ou seja:

Se $Y = \sum_{i=1}^m X_i$ com $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$, então $Y \sim \text{Binomial}(m, p)$

Nesse caso temos que para $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$:

$$\begin{aligned} p(X_i=0) &= 1-p \quad (\text{fracasso}) \\ p(X_i=1) &= p \quad (\text{sucesso}) \end{aligned}$$

Assim, o valor esperado é:

$$E[X_i] = 0 p(X_i=0) + 1 p(X_i=1) = p$$

A variância é dada por:

$$\sigma^2 = E[(X_i - E[X_i])^2] = E[X_i^2 - 2X_i E[X_i] + E^2[X_i]] = E[X_i^2] - 2E^2[X_i] + E^2[X_i] = E[X_i^2] - E^2[X_i]$$

Sabemos que $E^2[X_i] = p^2$ e

$$E[X_i^2] = \sum_k k^2 p(X_i=k) = 0^2 p(X_i=0) + 1^2 p(X_i=1) = p$$

de modo que

$$\sigma^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

De posse do valor esperado e variância da Bernoulli, voltamos para a Binomial. Usando a linearidade dos operadores $E[\cdot]$ e $\text{Var}[\cdot]$, podemos escrever:

$$E[Y] = \sum_{i=1}^m E[X_i] = \sum_{i=1}^m p = mp$$

$$\text{Var}[Y] = \sum_{i=1}^m \text{Var}[X_i] = \sum_{i=1}^m p(1-p) = mp(1-p)$$

Mas, como no modelo ER temos uma Binomial(n-1, p), temos:

$$E[k] = p(n-1)$$

$$\text{Var}[k] = p(1-p)(n-1)$$

Essas equações nos permitem calcular o grau médio de qualquer grafo do modelo ER(n,p) sem a necessidade de gerar amostras e simular o modelo.

Average Path Length (APL)

Usando um modelo aproximado baseado em árvore pode-se mostrar que o comprimento médio dos caminhos no modelo ER é aproximado por:

$$d \approx \frac{\log n}{\log \langle k \rangle} \quad (n \text{ é o número de vértices e } \langle k \rangle \text{ é o grau médio)}$$

Uma análise gráfica dessa variável mostra que o APL satura quando o número de vértices cresce. Portanto, de modo geral podemos afirmar que o APL em grafos ER é baixo.

Apesar disso, o modelo ER não é adequado para modelar redes sociais reais. O motivo está na baixa densidade de triângulos, ou seja, em um baixo coeficiente de aglomeração.

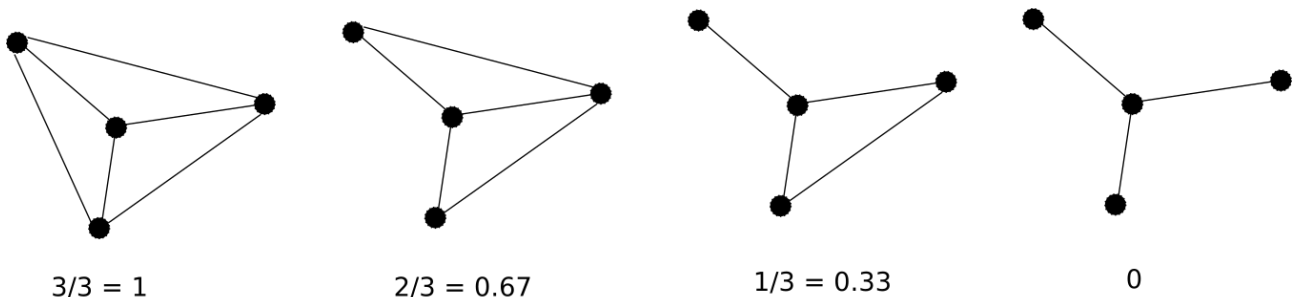
Coeficiente de aglomeração (Clustering coefficient)

Mede o quão conectados os vizinhos de 1 nó estão

$$cc(u) = \frac{m_u}{\binom{n_u}{2}} \quad \text{onde}$$

m_u é o número real de arestas entre os vizinhos de u

$\binom{n_u}{2}$ é o número de arestas máximo entre os vizinhos de u



Coeficiente de aglomeração alto implica em grande número de triângulos

Para grafos ER(n, p), pode-se mostrar que:

$$cc(u) = p$$

Problema:

p é a probabilidade de uma aresta existir, ou seja, é a probabilidade de 2 indivíduos quaisquer no sistema se conhecerem

$cc(u)$ é a probabilidade de 2 indivíduos de uma vizinhança se conhecerem (é a probabilidade dos amigos de alguém se conhecerem)

Nesse modelo, como p é igual a $cc(u)$, temos que a probabilidade de 2 vizinhos se conhecerem é igual a probabilidade de 2 estranhos se conhecerem (não é algo razoável em termos de refletir o comportamento de sistemas sociais por exemplo). Portanto, o modelo ER não serve para simular o comportamento de redes sociais no mundo real.

Redes de Pequeno Mundo (modelo de Watts-Strogatz)

Modelo otimizado para propagação da informação. Embora distribuição dos graus se pareça com ER, possui uma importante propriedade exclusiva: a propriedade de pequeno mundo (modelo ideal para simular redes sociais – teoria dos 6 graus de separação).

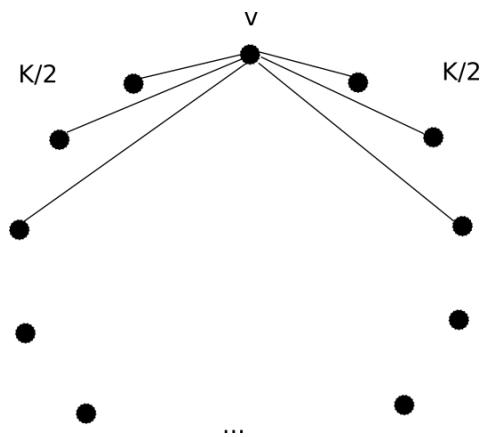
Algoritmo WS(n, k, p)

n : número de vértices

k : número de vizinhos iniciais

p : probabilidade de religação (“rewiring”)

1. Dispor n vértices numa fila circular
2. Ligar cada vértice a seus $k/2$ vizinhos mais próximos a esquerda e a direita



3. Escolher um vértice u aleatoriamente
4. Escolher um vértice v diferente de u aleatoriamente.
5. Se $(u, v) \in E$
 - Escolha um terceiro vértice w diferente de u e v
 - Com probabilidade p desligue a aresta (u, v) e ligue a aresta (u, w) (“rewiring”)
 - (sorteie um número aleatório $x \in [0, 1]$ e se $x < p$ religue)
6. Repetir os passos 3, 4 e 5 até um certo N (max. iterações) ou até atingir um número desejado de ligações.

Obs:

se $p = 0 \rightarrow$ grafo k -regular (grafo inicial não se altera)

se $p = 1 \rightarrow$ ER(n, p) (troca tudo e vira modelo totalmente aleatório)

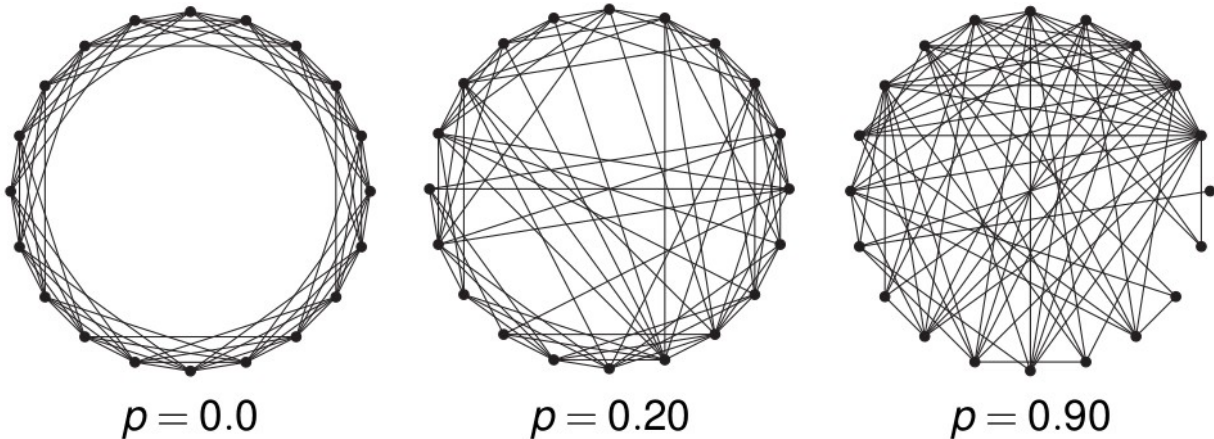
$$W(n, k, 1) = ER(n, p)$$

Propriedade small-world

Os grafos gerados pelo modelo WS(n, k, p) possuem a interessante propriedade de pequeno mundo, que emerge da combinação de duas propriedades fundamentais:

a) APL baixo

b) Coeficiente de aglomeração alto (elevado número de triângulos)



Pode-se mostrar que para grafos WS($n, k, 0$) (iniciais) o coeficiente de aglomeração é

$$cc(G) \approx \frac{3}{4} \frac{(k-2)}{(k-1)}$$

o que para k suficientemente grande implica em aproximadamente 75% de todos os possíveis triângulos (é um valor elevado)

Além disso, o comprimento médio dos caminhos em grafos WS($n, k, 0$) pode ser aproximado analiticamente, sendo dado por:

$$\bar{d}(u) \approx \frac{(n-1)(n+k-1)}{2kn}$$

o que novamente para n e k suficientemente grande, tende a valores muito baixos.

A dedução desses 2 resultados anteriores pode ser encontrada no livro “Graph Theory and Complex Networks”, capítulo 7, páginas 169 a 171.

Presença de weak links em grafos WS(n, k, p)

Resultado do processo de “rewiring”

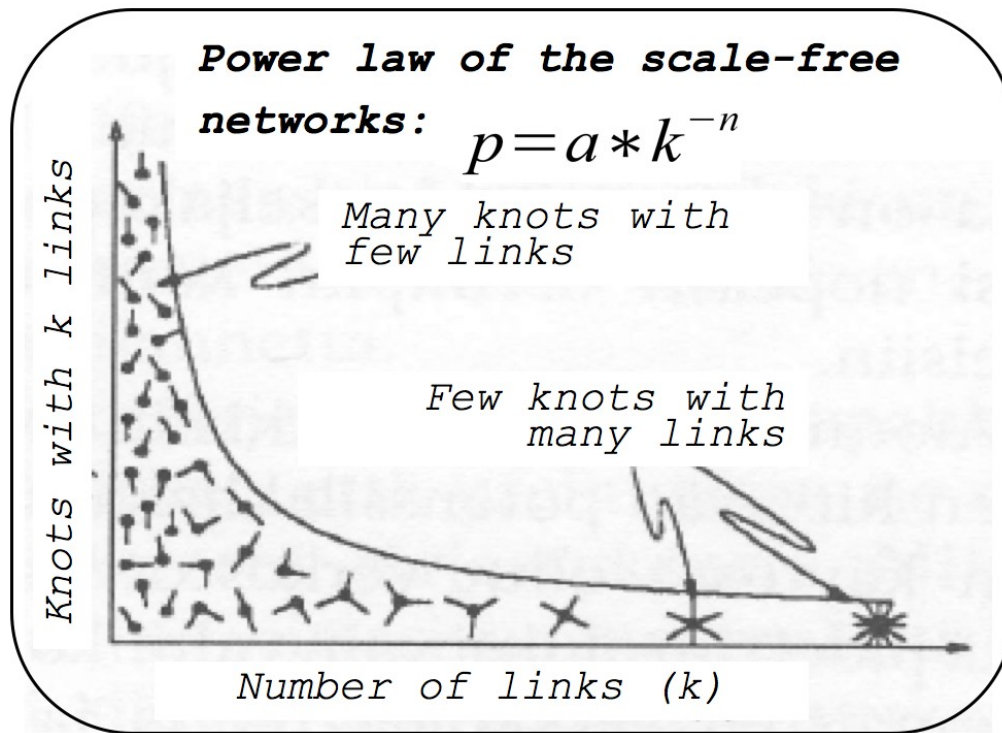
Weak links: arestas de longo alcance (ligam vértices de comunidades distintas)

Papel fundamental na difusão da informação em redes sociais (torna esse modelo muito mais eficiente para propagação de informação que o modelo ER)

Scale-Free Networks (modelo Barabasi-Alberts)

Vimos que o modelo WS é particularmente útil na análise e simulação de redes sociais. Porém, ao se aplicar esse modelo para estudar outros tipos de redes do mundo real, o que se observa é um comportamento que não corresponde a realidade. Um exemplo disso é no estudo da internet.

Várias propriedades como a distribuição dos graus e o padrão de crescimento da internet são muito diferente do que se observa em redes sociais. No modelo BA, a distribuição dos graus segue uma lei de potência (power law), ou seja, há muitos vértices de grau baixo e poucos com grau elevado (são os chamados hubs)



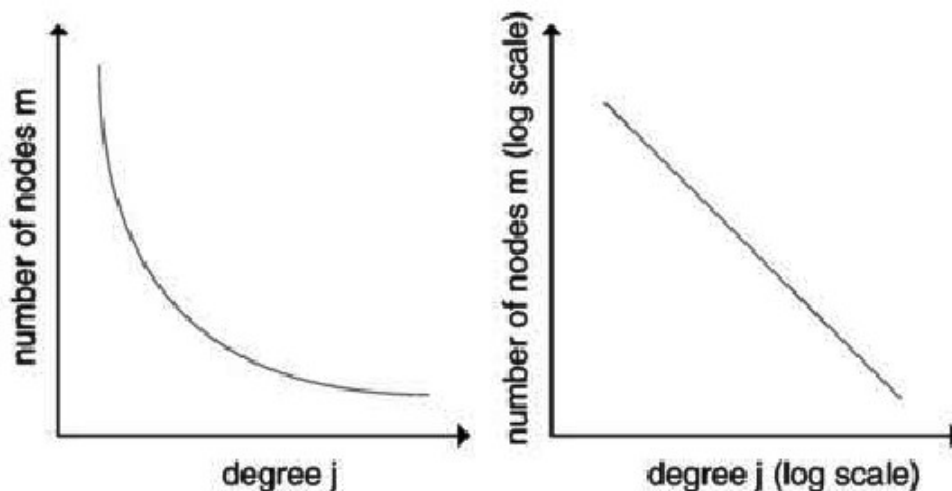
A distribuição dos graus é da forma:

$$p(k) \propto \frac{1}{k^\alpha} \quad \text{com } 2 \leq \alpha \leq 3$$

Aplicando o logaritmo de ambos os lados, temos:

$$\log p(k) = -\alpha \log k$$

o que mostra que um gráfico log-log de uma lei de potência é uma linha reta.



Algoritmo BA(n, n₀, m)

Inicialmente, temos $G_0=(V_0, E_0)$ com $n_0=|V_0|$ e E_0 desprezível, onde G_0 é uma amostra do modelo $ER(n_0, p)$

1. Adicione um novo vértice v_s ao conjunto de vértices atual

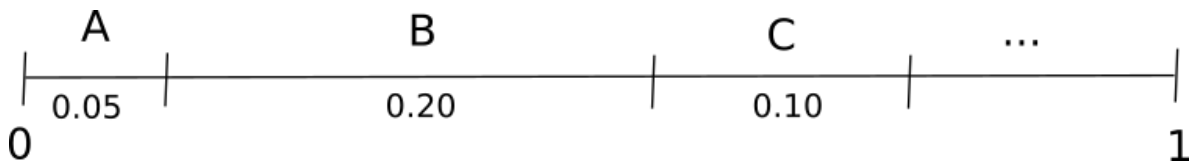
$$V_s = V_{s-1} \cup v_s$$

2. Adicione $M \leq n_0$ arestas (v_s, u) com $u \in V_{s-1}$ com probabilidade:

$$p(u) = \frac{d(u)}{\sum_{w \in V_{s-1}} d(w)} \quad (\text{"preferential attachment": the rich gets richer})$$

(o novo vértice tem grande probabilidade de ligar com quem já tem grau alto)

Faz uma roleta para escolher quem vai ser sorteado com 1 das m arestas:



Quem tem maior probabilidade (hubs), gera um maior intervalo na reta, então sorteia-se um número aleatório $x \in [0,1]$ e verifica-se em qual x caiu.

3. Pare quando $n \gg n_0$ vértices tiverem sido adicionados. Caso contrário, volte para o passo 1.

Obs: após t passos

$$\begin{aligned} |V| &= n_0 + t \\ |E| &= |E_0| + tm \quad (G_0 \text{ pode ser o grafo nulo}) \end{aligned}$$

Teorema: Seja G um grafo gerado pelo algoritmo BA(n, n₀, m). Então:

$$p(k) = \frac{2m(m+1)}{k(k+1)(k+2)} \propto O(k^{-3}) \quad \text{para todo vértice}$$

ou seja, todo grafo gerado pelo algoritmo anterior possui a distribuição de graus como uma lei de potência. (É de fato uma amostra do modelo)

Características:

- i) Distribuição dos graus = lei de potência
- ii) $APL \approx \frac{\log n}{\log(\log \langle k \rangle)}$ (pequeno)
- iii) Coeficiente de aglomeração é baixo
- iv) Modelo mais utilizado para analisar e simular a internet.

Bibliografia

A First Look at Graph Theory. John Clark & Derek Allan Holton, World Scientific, 1998.

Graph Theory and Complex Networks: An Introduction. Maarten van Steen, 2010. Disponível gratuitamente em: <https://www.distributed-systems.net/index.php/books/gtcn/>

Introduction to Algorithms. Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald Rivest and Clifford Stein, 2 ou 3. ed., The MIT Press, 2009.

Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação. Nicoletti, M.C.; Hruschka Jr., E. R., 2 ed., Série Apontamentos, EdUFSCar, 2009.

Introduction to Graph Theory. West, Douglas, 2 ed., Prentice Hall, 2001.

Wilson, Robin. Introduction to Graph Theory, 3 ed., Longman Scientific & Technical, 1985.

Matemática Discreta - Uma Introdução. Edward R. Scheinerman, Thomson Learning, 2003.

Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações. M. Goldbarg e E. Goldbarg, Elsevier, 2012.

Algorithmic Design. Jon Kleinberg and Éva Tardos, Addison Wesley, 2005.

Graphs and Applications: An Introductory Approach. Aldous, J. M. & Wilson, R. J., Springer, 2000.

Networks: An Introduction. Newman, M., Oxford University Press, 2010.

Introduction to Graph Theory. Robin J. Wilson, Prentice Hall, England, 1996.

An Introduction to Discrete Mathematics. Steven Roman, Harcourt College Publishers, 1985.

Introduction to Graph Theory. Douglas B. West, 2nd. ed., Prentice-Hall, 2001.

Sobre o autor

Alexandre L. M. Levada é bacharel em Ciências da Computação pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), mestre em Ciências da Computação pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) e doutor em Física Computacional pela Universidade de São Paulo (USP). Atualmente é professor adjunto no Departamento de Computação da Universidade Federal de São Carlos e seus interesses em pesquisa são: filtragem de ruído em imagens e aprendizado de métricas via redução de dimensionalidade para problemas de classificação de padrões. Para maiores detalhes: <https://sites.google.com/view/alexandre-levada/>

“If you cannot do great things, do small things in a great way.”
(Napoleon Hill)