

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

As seções precedentes abordaram dois casos particulares de equilíbrio de um corpo rígido.

1. Um corpo sujeito à ação de duas forças é um corpo sujeito à ação de forças em apenas dois pontos. As resultantes das forças aplicadas em cada um desses pontos devem ter *igual intensidade, igual linha de ação e sentidos opostos*. Essa propriedade vai permitir a você simplificar as soluções de alguns problemas substituindo os dois componentes desconhecidos da reação por uma única força de intensidade desconhecida, mas de *direção conhecida*.

2. Um corpo sujeito à ação de três forças é um corpo sujeito à ação de forças em apenas três pontos. As resultantes das forças aplicadas em cada um desses pontos devem ser *concorrentes ou paralelas*. Para resolver um problema envolvendo um corpo sujeito à ação de três forças com forças concorrentes, desenhe seu diagrama de corpo livre mostrando que as linhas de ação dessas três forças passam pelo mesmo ponto. O uso da geometria vai então possibilitar que você complete a solução usando um triângulo de forças [Problema Resolvido 4.6].

Embora o princípio indicado anteriormente para a solução de problemas que envolvam corpos sujeitos à ação de três forças seja facilmente entendido, pode ser difícil determinar os esquemas geométricos necessários. Se você encontrar dificuldade, primeiro desenhe um diagrama de corpo livre razoavelmente grande e então procure uma relação entre comprimentos conhecidos, ou facilmente calculáveis, e uma dimensão que envolva uma incógnita. Isso foi feito no Problema Resolvido 4.6, cujas dimensões *AE* e *CE*, facilmente calculáveis, foram utilizadas para determinar o ângulo α .

PROBLEMAS

4.63 Duas hastes de conexão, uma horizontal e outra vertical, são articuladas a uma roda, e forças são aplicadas às hastes tal como mostra a figura. Sabendo que $a = 7,5$ cm, determine o valor de P e da reação em A .

4.64 Duas hastes de conexão, uma horizontal e outra vertical, são articuladas a uma roda, e forças são aplicadas às hastes tal como mostra a figura. Determine o intervalo de valores da distância a para os quais a intensidade da reação em A não excede a 189 N.

4.65 Adotando o método da Seção 4.7, resolva o Problema 4.21.

4.66 Adotando o método da Seção 4.7, resolva o Problema 4.22.

4.67 Para remover um prego, coloca-se um pequeno bloco de madeira sob um pé-de-cabra e aplica-se uma força horizontal P tal como mostra a figura. Sabendo que $l = 8,75$ cm e $P = 135$ N, determine a força vertical exercida sobre o prego e a reação em B .

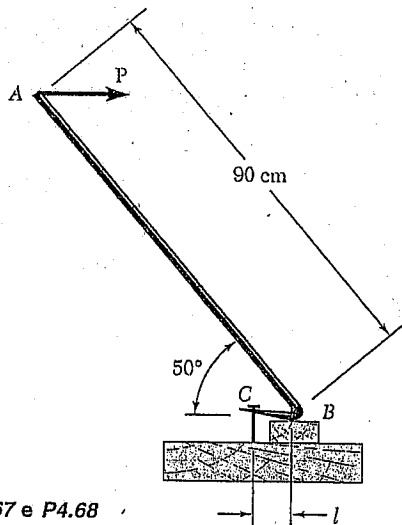


Fig. P4.67 e P4.68

4.68 Para remover um prego, coloca-se um pequeno bloco de madeira sob um pé-de-cabra e aplica-se uma força horizontal P tal como mostra a figura. Sabendo que a máxima força vertical necessária para se extrair o prego é de 2.700 N e que a força horizontal P não deve exceder 292,5 N, determine o maior valor aceitável para a distância l .

4.69 Para a estrutura e o carregamento mostrados na figura, determine as reações em C e D .

4.70 Para a estrutura e o carregamento mostrados na figura, determine as reações em A e C .

4.71 Para retirar a tampa de um balde de 5 galões (aproximadamente 19 litros), utiliza-se a ferramenta mostrada na figura para aplicar

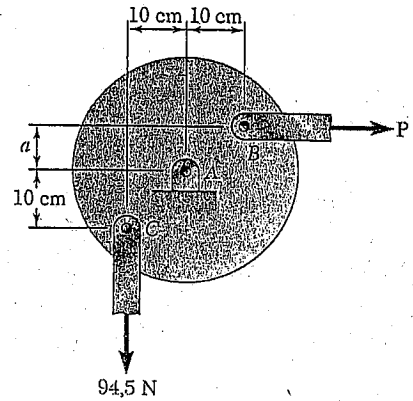


Fig. P4.63 e P4.64

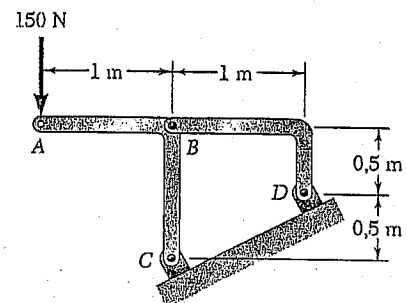


Fig. P4.69

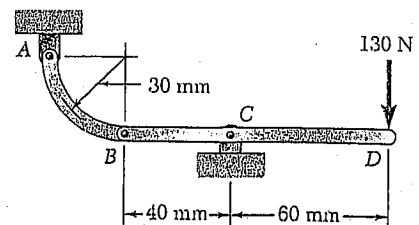


Fig. P4.70

uma força para cima e radialmente para fora na parte inferior do aro interno da tampa. Considerando que o aro está apoiado na ferramenta em A e que uma força de 100 N é aplicada ao cabo tal como indica a figura, determine a força que atua no aro.

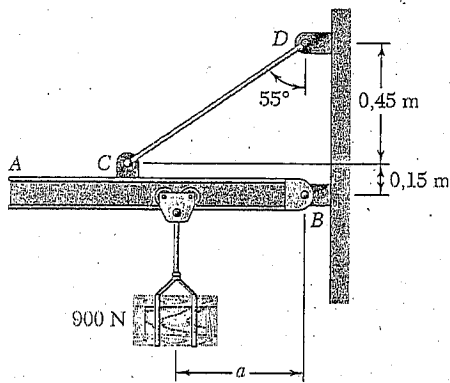


Fig. P4.73

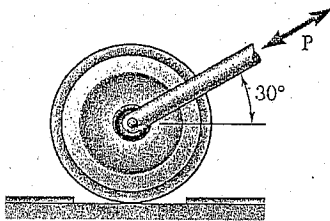


Fig. P4.75 e P4.76

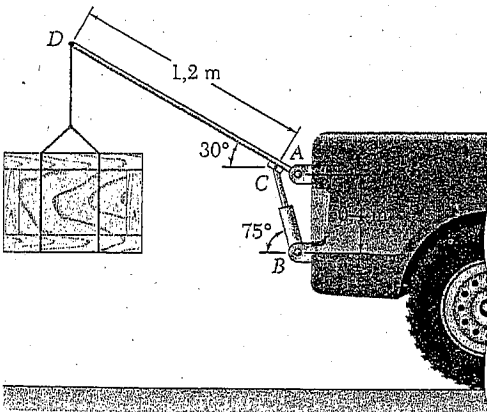


Fig. P4.77

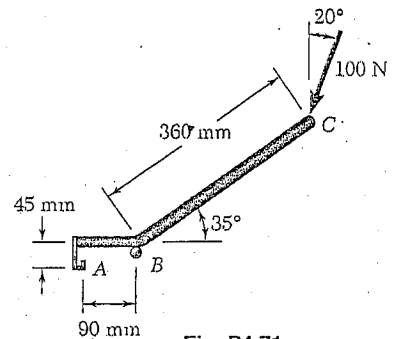
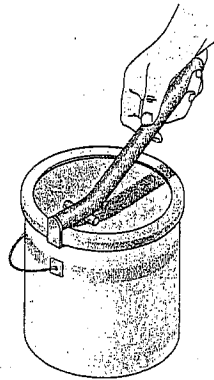


Fig. P4.71

4.72 Para retirar a tampa de um balde de 5 galões (aproximadamente 19 litros), utiliza-se a ferramenta mostrada na figura para aplicar uma força para cima e radialmente para fora na parte inferior do aro interno da tampa. Considerando que a parte de cima e o aro da tampa estão apoiados na ferramenta em A e B, respectivamente, e que uma força de 60 N é aplicada ao cabo tal como indica a figura, determine a força que atua no aro.

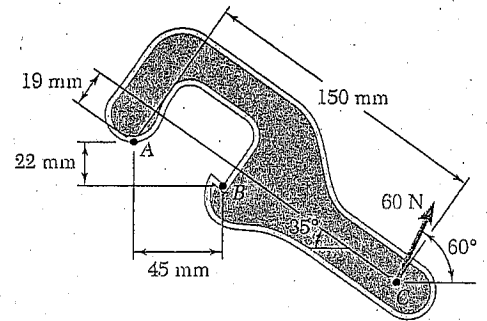
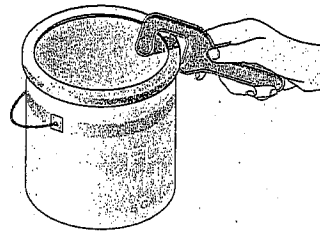


Fig. P4.72

4.73 Um caixote de 900 N é preso a uma viga de rolamento mostrado na figura. Sabendo que $a = 0,45$ m, determine (a) a tração no cabo CD, (b) a reação em B.

4.74 Resolva o Problema 4.73 considerando que $a = 0,9$ m.

4.75 Um rolete de 20 kg e 200 mm de diâmetro, que é para ser usado em um piso de ladrilhos de cerâmica, está apoiado diretamente sobre a base abaixo do piso, tal como mostra a figura. Sabendo que a espessura de cada ladrilho é 8 mm, determine a força P necessária para se mover o rolete sobre os ladrilhos, sabendo-se que o rolete é empurrado para a esquerda.

4.76 Um rolete de 20 kg e 200 mm de diâmetro, que é para ser usado em um piso de ladrilhos de cerâmica, está apoiado diretamente sobre a base abaixo do piso, tal como mostra a figura. Sabendo que a espessura de cada ladrilho é 8 mm, determine a força P necessária para mover o rolete sobre os ladrilhos, sabendo que o rolete é empurrado para a direita.

4.77 Um pequeno guincho é montado na traseira de uma caminhonete e é usado para levantar um caixote de 120 kg. Determine (a) a força exercida no guincho pelo cilindro hidráulico BC e (b) a reação em A.

4.78 O dispositivo de fixação mostrado na figura é usado para prender a peça bruta C. Sabendo que a força de compressão máxima admissível na peça é 200 N e desprezando o efeito do atrito em A, determine as correspondentes (a) reação em B, (b) reação em A e (c) tração no parafuso.

4.79 Uma alavanca modificada (*peavey*) é utilizada para levantar um toro de 0,2 m de diâmetro e massa de 36 kg. Sabendo que $\theta = 45^\circ$ e que a força exercida em C pelo operador é perpendicular à haste da alavanca, determine (a) a força exercida em C e (b) a reação em A.

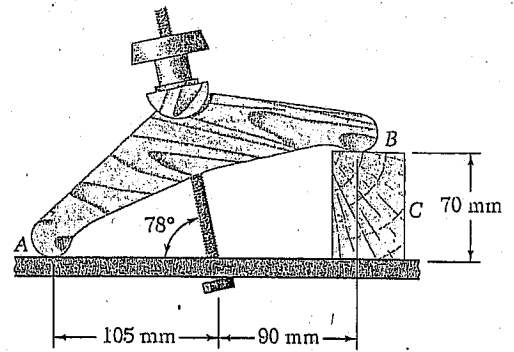


Fig. P4.78

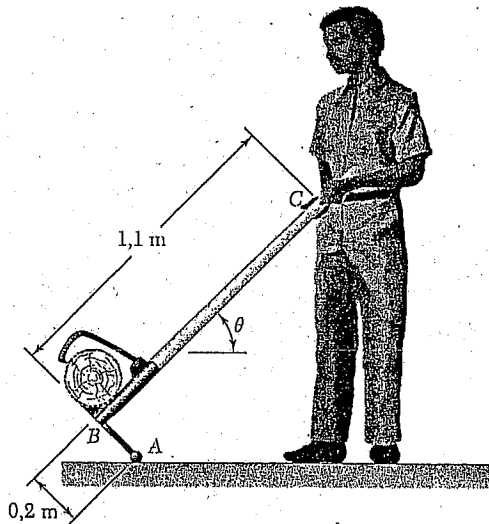


Fig. P4.79 e P4.80

*4.80 Uma alavanca modificada (*peavey*) é utilizada para levantar um toro de 0,2 m de diâmetro e 36 kg de massa. Sabendo que $\theta = 60^\circ$ e que a força exercida em C pelo operador é perpendicular à haste da alavanca, determine (a) a força exercida em C e (b) a reação em A.

4.81 O elemento ABC é sustentado por um pino e suporte em B e por uma corda inextensível presa em A e C, passando por uma polia sem atrito em D. Pode-se supor que a tração seja a mesma na porção AD e CD da corda. Para o carregamento mostrado e desprezando o tamanho da polia, determine a tração na corda e a reação em B.

4.82 O elemento ABCD é sustentado por um pino e suporte em C e por uma corda inextensível presa em A e D, passando por polias sem atrito em B e E. Desprezando o tamanho das polias, determine a tração na corda e a reação em C.

4.83 Adotando o método da Seção 4.7, resolva o Problema 4.18.

4.84 Adotando o método da Seção 4.7, resolva o Problema 4.28.

4.85 Sabendo que $\theta = 35^\circ$, determine a reação (a) em B e (b) em C.

4.86 Sabendo que $\theta = 50^\circ$, determine a reação (a) em B e (b) em C.

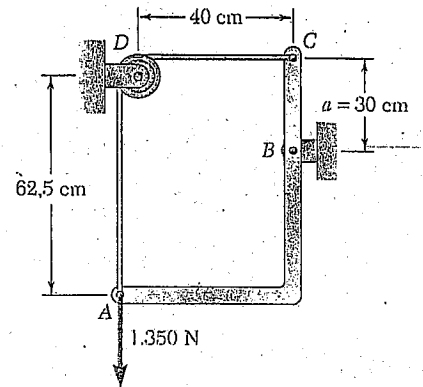


Fig. P4.81

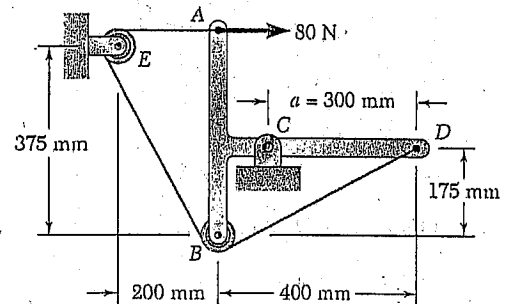


Fig. P4.82

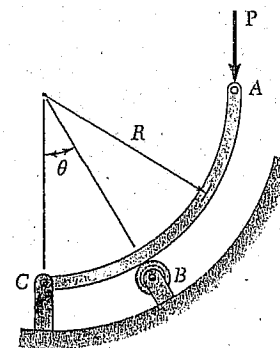


Fig. P4.85 e P4.86

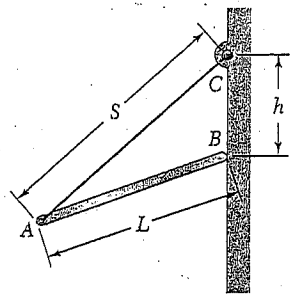


Fig. P4.87 e P4.88

4.87 Uma haste delgada de comprimento L e peso W é mantida em equilíbrio tal como mostra a figura, com uma extremidade apoiada sobre uma parede sem atrito e a outra extremidade presa a uma corda de comprimento S . Deduza uma expressão para a distância h em termos de L e S . Mostre que essa posição de equilíbrio não existe se $S > 2L$.

4.88 Uma haste delgada de comprimento $L = 200$ mm é mantida em equilíbrio tal como mostra a figura, com uma extremidade contra uma parede sem atrito e a outra extremidade presa a uma corda de comprimento $S = 300$ mm. Sabendo que a massa da haste é $1,5$ kg, determine (a) a distância h , (b) a tração na corda e (c) a reação em B .

4.89 Uma haste delgada de comprimento L e peso W é presa a cursores que podem deslizar livremente ao longo das guias mostradas na figura. Sabendo que a haste está em equilíbrio, deduza uma expressão para o ângulo θ em termos do ângulo β .

4.90 Uma haste delgada de 10 kg e de comprimento L é presa a cursores que podem deslizar livremente ao longo das guias mostradas nas figuras. Sabendo que a haste está em equilíbrio e que $\beta = 25^\circ$, determine (a) o ângulo θ que a haste forma com a vertical e (b) as reações em A e B .

4.91 Uma haste delgada uniforme de 5 g de massa e 250 mm de comprimento está em equilíbrio sobre um copo de 70 mm de diâmetro interno. Desprezando o atrito, determine o ângulo θ correspondente à posição de equilíbrio.

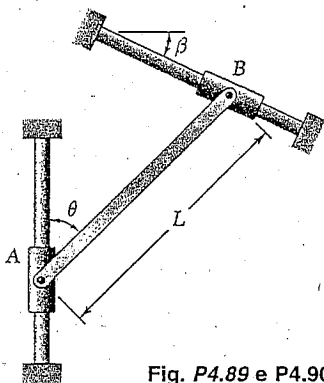


Fig. P4.89 e P4.90

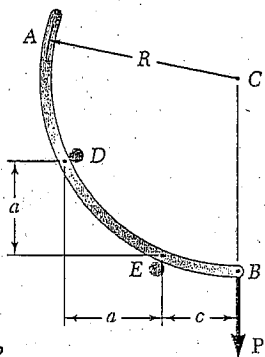


Fig. P4.92

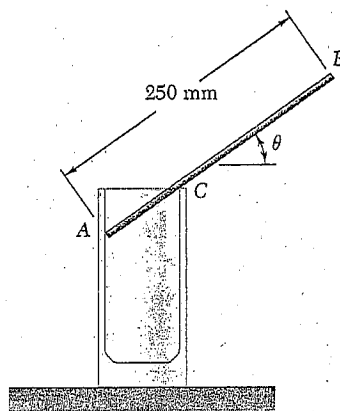


Fig. P4.91

4.92 A haste AB está curvada no formato de um arco de círculo e está alojada entre dois pinos D e E . A haste sustenta uma carga P na extremidade de B . Desprezando o atrito e o peso da haste, determine a distância c correspondente à condição de equilíbrio quando $a = 2,5$ cm e $R = 12,5$ cm.

4.93 Uma haste uniforme AB de peso W e comprimento $2R$ está apoiada dentro de um recipiente semi-esférico de raio R tal como mostra a figura. Desprezando o atrito, determine o ângulo θ correspondente à condição de equilíbrio.

4.94 Uma haste delgada uniforme de massa m e comprimento $4r$ está apoiada sobre uma superfície tal como mostra a figura e é mantida na posição de equilíbrio dada pela força P . Desprezando o efeito do atri-

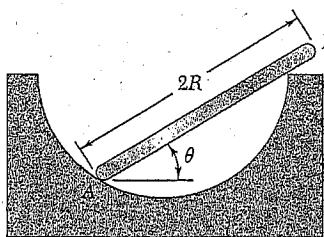


Fig. P4.93

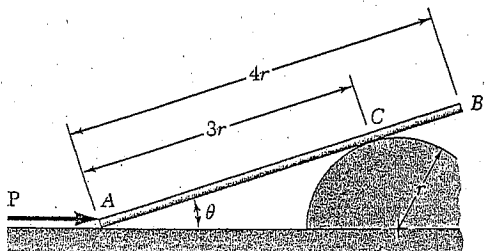


Fig. P4.94

to em A e C, (a) determine o ângulo θ e (b) deduza uma expressão para P em termos de m.

4.95 Uma haste delgada uniforme de comprimento $2L$ e de massa m está apoiada sobre um rolete em D e é mantida na posição de equilíbrio mostrada na figura por uma corda de comprimento a . Sabendo que $L = 200$ mm, determine (a) o ângulo θ e (b) o comprimento a .

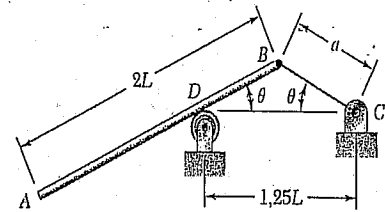


Fig. P4.95

EQUILÍBRIO EM TRÊS DIMENSÕES

4.8 EQUILÍBRIO DE UM CORPO RÍGIDO EM TRÊS DIMENSÕES

Vimos na Seção 4.1 que são necessárias seis equações escalares para expressar as condições para o equilíbrio de um corpo rígido no caso geral tridimensional:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \quad (4.2)$$

$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0 \quad (4.3)$$

Essas equações podem ser resolvidas para no máximo seis incógnitas, que, geralmente, representam reações em apoios ou conexões.

Na maior parte dos problemas, as equações escalares (4.2) e (4.3) serão obtidas de modo mais conveniente se expressarmos, inicialmente, as condições para o equilíbrio do corpo rígido na forma vetorial. Escrevemos

$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad \sum \mathbf{M}_O = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \quad (4.1)$$

e expressamos as forças \mathbf{F} e os vetores posição \mathbf{r} em termos de componentes escalares e vetores unitários. Em seguida, calculamos todos os produtos vetoriais, seja por cálculo direto, seja por meio de determinantes (ver Seção 3.8). Observamos que até três componentes da reação desconhecidos podem ser eliminados desses cálculos por uma escolha criteriosa do ponto O. Igualando a zero os coeficientes dos vetores unitários em cada uma das duas relações (4.1), obtemos as equações escalares desejadas.⁴

4.9 REAÇÕES EM APOIOS E CONEXÕES PARA UMA ESTRUTURA TRIDIMENSIONAL

As reações em uma estrutura tridimensional variam da força única de direção conhecida, exercida por uma superfície sem atrito, ao sistema força-binário, exercido por um engaste. Conseqüentemente, em problemas que envolvam o equilíbrio de uma estrutura tridimensional, pode haver uma a seis incógnitas associadas às reações em cada apoio ou co-

⁴ Em alguns problemas, poderemos achar conveniente eliminar as reações em dois pontos A e B da solução escrevendo a equação de equilíbrio $\sum M_{AB} = 0$, que envolve a determinação dos momentos das forças em relação ao eixo AB que une os pontos A e B (ver o Problema Resolvido 4.10).

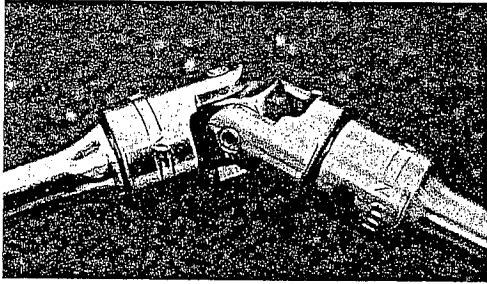


Foto 4.6 Juntas universais, comumente encontradas nos eixos de direção de carros e caminhões de tração traseira, possibilitam que movimento de rotação seja transferido entre dois eixos não-colineares.

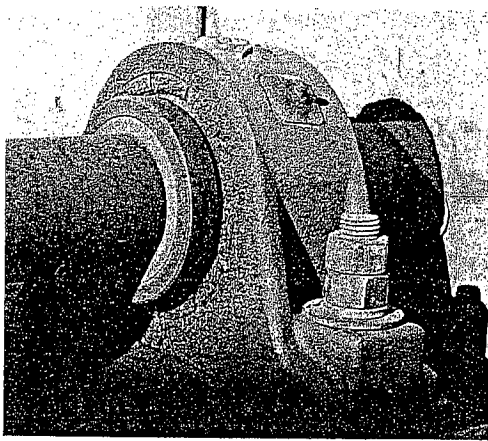


Foto 4.7 O mancal de assento sem lubrificação serve de apoio ao eixo de um ventilador usado em uma fundição.

nexão. Vários tipos de apoios e conexões são mostrados na Fig. 4.10 com suas reações correspondentes. Uma maneira simples de se determinar o tipo de reação correspondente a um dado apoio ou conexão e o número de incógnitas envolvidas é achar quais dos seis movimentos fundamentais (translação nas direções x , y e z , rotação em torno dos eixos x , y e z) são permitidos e quais movimentos são impedidos.

Apoios de esferas, superfícies sem atrito e cabos, por exemplo, impedem translação em uma direção apenas e, portanto, exercem uma força única cuja linha de ação é conhecida; cada um desses apoios envolve uma incógnita, a saber, a intensidade da reação. Roletes sobre superfícies rugosas e rodas sobre trilhos impedem a translação em duas direções; as reações correspondentes consistem em dois componentes de força desconhecidos. Superfícies rugosas em contato direto e apoios do tipo rótula impedem a translação em três direções; esses apoios envolvem três componentes de força desconhecidos.

Alguns apoios e conexões podem impedir tanto a rotação quanto a translação; as reações correspondentes incluem tanto binários quanto forças. Por exemplo, a reação em um engaste, que impede qualquer movimento (tanto rotação quanto translação), consiste em três forças desconhecidas e três binários desconhecidos. Uma junta universal, que é projetada para possibilitar rotação em torno de dois eixos, exercerá uma reação constituída de três componentes de força desconhecidos e um binário desconhecido.

Outros apoios e conexões são projetados principalmente para impedir a translação; seu projeto, no entanto, é tal que eles também impedem algumas rotações. As reações correspondentes consistem essencialmente em componentes de força, mas *podem* também incluir binários. Um grupo de apoios desse tipo inclui articulações e mancais projetados para sustentar somente cargas radiais (por exemplo, mancais de deslizamentos, mancais de rolamento). As reações correspondentes consistem em dois componentes de força, mas também podem incluir dois binários. Outro grupo inclui apoios do tipo pino e suporte, articulações e mancais, projetados para sustentar tanto um empuxo axial quanto uma carga radial (por exemplo, mancais de esferas). As reações correspondentes consistem em três componentes de força, mas também podem incluir dois binários. Entretanto, esses apoios não exercerão quaisquer binários apreciáveis em condições normais de uso. Portanto, *somente* componentes de força devem ser incluídos em suas análises, *exceto* se se verificar que são necessários binários para se manter o equilíbrio do corpo rígido, ou exceto se o apoio tiver sido projetado especificamente para exercer um binário (ver Problemas 4.128 a 4.131).

Se as reações envolvem mais de seis incógnitas, há mais incógnitas do que equações, e algumas das reações são *estaticamente indeterminadas*. Se as reações envolvem menos de seis incógnitas, há mais equações do que incógnitas, e algumas das equações de equilíbrio não podem ser satisfeitas em condições gerais de carregamento; o corpo rígido só está *parcialmente vinculado*. Entretanto, nas condições de carregamento particulares que correspondem a um dado problema, as equações extras frequentemente se reduzem a identidades triviais, como $0 = 0$, e podem ser desconsideradas; embora só esteja parcialmente vinculado, o corpo rígido permanece em equilíbrio (ver Problemas Resolvidos 4.7 e 4.8). Mesmo com seis ou mais incógnitas, é possível que algumas equações

de equilíbrio não sejam satisfeitas. Isso pode ocorrer quando as reações associadas aos apoios ou são paralelas ou interceptam a mesma linha; o corpo rígido está então *impropriamente vinculado*.

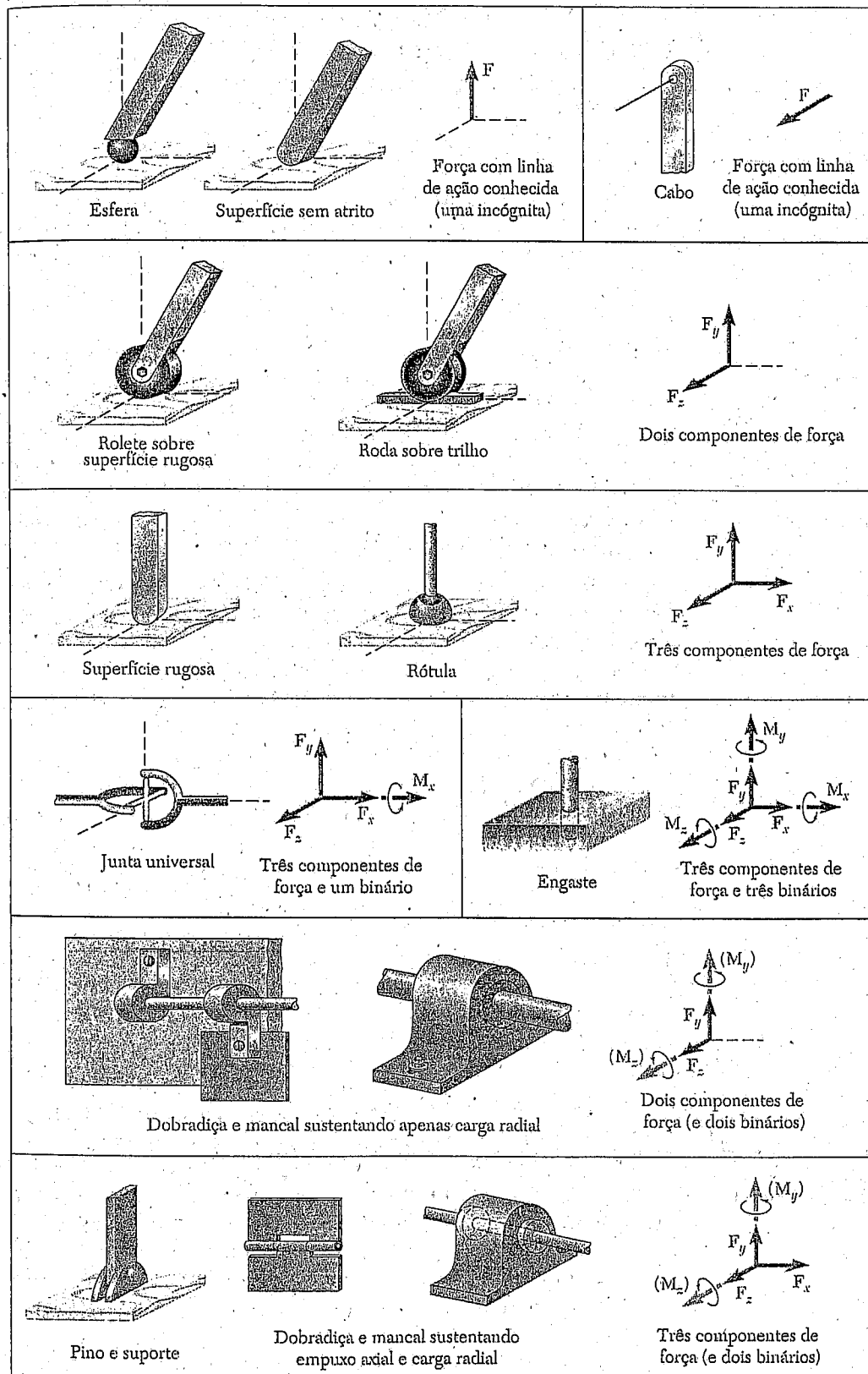
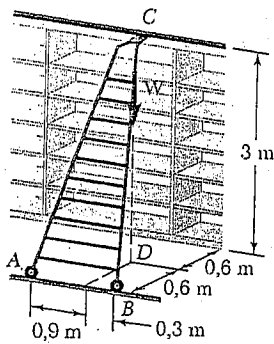


Fig. 4.10 Reações em apoios e conexões.

PROBLEMA RESOLVIDO 4.7

Uma escada de 20 kg usada para alcançar prateleiras altas em um depósito está apoiada por duas rodas flangeadas⁵ A e B montadas sobre um trilho e por uma roda C sem flange apoiada sobre um trilho fixado à parede. Um homem de 80 kg está em pé sobre a escada e inclina-se para a direita. A linha de ação do peso combinado **W** do homem e da escada intercepta o piso no ponto D. Determine as reações em A, B e C.



SOLUÇÃO

Diagrama de corpo livre. Traça-se um diagrama de corpo livre da escada. As forças envolvidas são o peso combinado do homem e da escada,

$$W = -mg\mathbf{j} = -(80 \text{ kg} + 20 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} = -(981 \text{ N})\mathbf{j}$$

e cinco componentes de reações desconhecidos, dois em cada roda com flange e um na roda sem flange. A escada está então apenas parcialmente vinculada; ela está livre para rolar ao longo dos trilhos. No entanto, a escada está em equilíbrio sob o carregamento dado, pois a equação $\Sigma F_x = 0$ está satisfeita.

Equações de equilíbrio. Expressamos que as forças que atuam na escada formam um sistema equivalente a zero:

$$\Sigma \mathbf{F} = 0: \quad A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k} - (981 \text{ N})\mathbf{j} + C\mathbf{k} = 0$$

$$(A_y + B_y - 981 \text{ N})\mathbf{j} + (A_z + B_z + C)\mathbf{k} = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma \mathbf{M}_A = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0: \quad 1,2\mathbf{i} \times (B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) + (0,9\mathbf{i} - 0,6\mathbf{k}) \times (-981\mathbf{j})$$

$$+ (0,6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 1,2\mathbf{k}) \times C\mathbf{k} = 0$$

Calculando o produto vetorial, temos⁶

$$1,2B_y \mathbf{k} - 1,2B_z \mathbf{j} - 882,9\mathbf{k} - 588,6\mathbf{i} - 0,6C\mathbf{j} + 3C\mathbf{i} = 0$$

$$(3C - 588,6)\mathbf{i} - (1,2B_z + 0,6C)\mathbf{j} + (1,2B_y - 882,9)\mathbf{k} = 0 \quad (2)$$

Estabelecendo os coeficientes de **i**, **j**, **k** iguais a zero na Eq. (2), obtemos as três equações escalares a seguir, que expressam que a soma dos momentos em relação a cada eixo coordenado deve ser zero:

$$3C - 588,6 = 0 \quad C = +196,2 \text{ N}$$

$$1,2B_z + 0,6C = 0 \quad B_z = -98,1 \text{ N}$$

$$1,2B_y - 882,9 = 0 \quad B_y = +736 \text{ N}$$

As reações em B e C são, portanto,

$$\mathbf{B} = +(736 \text{ N})\mathbf{j} - (98,1 \text{ N})\mathbf{k} \quad \mathbf{C} = +(196,2 \text{ N})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

Tornando os coeficientes de **j** e **k** iguais a zero na Eq. (1), obtemos duas equações escalares expressando que as somas dos componentes nas direções **y** e **z** são iguais a zero. Substituindo B_y , B_z e C pelos valores obtidos acima, escrevemos

$$A_y + B_y - 981 = 0 \quad A_y + 736 - 981 = 0 \quad A_y = +245 \text{ N}$$

$$A_z + B_z + C = 0 \quad A_z - 98,1 + 196,2 = 0 \quad A_z = -98,1 \text{ N}$$

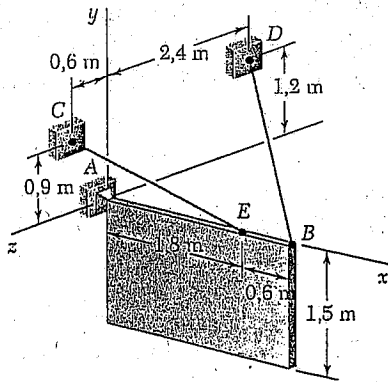
Concluimos que a reação em A é $\mathbf{A} = +(245 \text{ N})\mathbf{j} - (98,1 \text{ N})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$

⁵ N.T.: *flange*: aro ou colar exterior que se projeta para fora de uma roda, para mantê-la em posição, por exemplo, em relação a um trilho.

⁶ Os momentos neste Problema Resolvido e nos Problemas Resolvidos 4.8 e 4.9 podem também ser expressos em forma de determinantes (ver Problema Resolvido 3.10).

PROBLEMA RESOLVIDO 4.8

Uma placa de $1,5 \times 2,4$ m de massa específica uniforme pesa 1.215 N e é sustentada por uma rótula em A e por dois cabos. Determine a tração em cada cabo e a reação em A.



SOLUÇÃO

Diagrama de corpo livre. Traça-se um diagrama de corpo livre da placa. As forças que atuam no corpo livre são o peso $\mathbf{W} = -(1.215 \text{ N})\mathbf{j}$ e as reações em A, B e E. A reação em A é uma força de direção desconhecida e é representada por três componentes desconhecidas. Como as direções das forças exercidas pelos cabos são conhecidas, essas forças envolvem apenas uma incógnita cada, a saber: as intensidades T_{BD} e T_{EC} . Como há apenas cinco incógnitas, a placa está parcialmente vinculada. A placa pode girar livremente em torno do eixo x; ela está, no entanto, em equilíbrio sob o carregamento dado, pois a equação $\Sigma M_x = 0$ está satisfeita.

Os componentes das forças \mathbf{T}_{BD} e \mathbf{T}_{EC} podem ser expressos em termos das intensidades desconhecidas T_{BD} e T_{EC} escrevendo-se

$$\overline{BD} = -(2,4 \text{ m})\mathbf{i} + (1,2 \text{ m})\mathbf{j} - (2,4 \text{ m})\mathbf{k} \quad BD = 3,6 \text{ m}$$

$$\overline{EC} = -(1,8 \text{ m})\mathbf{i} + (0,9 \text{ m})\mathbf{j} + (0,6 \text{ m})\mathbf{k} \quad EC = 2,1 \text{ m}$$

$$\mathbf{T}_{BD} = T_{BD} \left(\frac{\overline{BD}}{BD} \right) = T_{BD} \left(-\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k} \right)$$

$$\mathbf{T}_{EC} = T_{EC} \left(\frac{\overline{EC}}{EC} \right) = T_{EC} \left(-\frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{2}{7}\mathbf{k} \right)$$

Equações de equilíbrio. Expressamos que as forças que atuam sobre a placa formam um sistema equivalente a zero:

$$\Sigma \mathbf{F} = 0: \quad A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} + \mathbf{T}_{BD} + \mathbf{T}_{EC} - (1.215 \text{ N})\mathbf{j} = 0$$

$$\left(A_x - \frac{2}{3}T_{BD} - \frac{6}{7}T_{EC} \right)\mathbf{i} + \left(A_y + \frac{1}{3}T_{BD} + \frac{3}{7}T_{EC} - 1.215 \text{ N} \right)\mathbf{j} + \left(A_z - \frac{2}{3}T_{BD} + \frac{2}{7}T_{EC} \right)\mathbf{k} = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma \mathbf{M}_A = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0:$$

$$(2,4 \text{ m})\mathbf{i} \times T_{BD} \left(-\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k} \right) + (1,8 \text{ m})\mathbf{i} \times T_{EC} \left(-\frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{2}{7}\mathbf{k} \right) + (1,2 \text{ m})\mathbf{i} \times (-1.215 \text{ N})\mathbf{j} = 0$$

$$(0,8T_{BD} + 0,771T_{EC} - 1.458 \text{ N})\mathbf{k} + (1,6T_{BD} - 0,514T_{EC})\mathbf{j} = 0 \quad (2)$$

Tornando os coeficientes de \mathbf{j} e \mathbf{k} iguais a zero na Eq. (2), obtemos duas equações escalares que podem ser resolvidas para T_{BD} e T_{EC} :

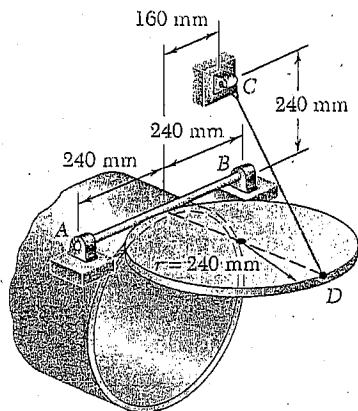
$$T_{BD} = 455,9 \text{ N} \quad T_{EC} = 1.417,5 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

Estabelecendo os coeficientes de \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} iguais a zero na Eq. (1), obtemos mais três equações, que nos possibilitam calcular os componentes de A. Temos

$$\mathbf{A} = +(1.521 \text{ N})\mathbf{i} + (455,4 \text{ N})\mathbf{j} - (101,25 \text{ N})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 4.9

Uma tampa de tubulação de raio $r = 240$ mm e 30 kg de massa é mantida na posição horizontal pelo cabo CD . Considerando que o mancal em B não exerce qualquer empuxo axial, determine a tração no cabo e as reações em A e B .



SOLUÇÃO

Diagrama de corpo livre. Um diagrama de corpo livre é desenhado com os eixos coordenados mostrados na figura. As forças que atuam no corpo livre são o peso da tampa

$$W = -mg\mathbf{j} = -(30 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} = -(294 \text{ N})\mathbf{j}$$

e as reações que envolvem seis incógnitas, a saber, a intensidade da força \mathbf{T} exercida pelo cabo, três componentes de força na articulação A e dois na articulação B . Os componentes de \mathbf{T} são expressos em termos da intensidade desconhecida T decompondo-se o vetor \overline{DC} em componentes retangulares e escrevendo-se

$$\overline{DC} = -(480 \text{ mm})\mathbf{i} + (240 \text{ mm})\mathbf{j} - (160 \text{ mm})\mathbf{k} \quad DC = 560 \text{ mm}$$

$$\mathbf{T} = T \frac{\overline{DC}}{DC} = -\frac{6}{7}T\mathbf{i} + \frac{3}{7}T\mathbf{j} - \frac{2}{7}T\mathbf{k}$$

Equações de equilíbrio. Expressamos que as forças que atuam na tampa de tubulação formam um sistema equivalente a zero:

$$\sum \mathbf{F} = 0: \quad A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} + B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + \mathbf{T} - (294 \text{ N})\mathbf{j} = 0$$

$$\left(A_x + B_x - \frac{6}{7}T \right)\mathbf{i} + \left(A_y + B_y + \frac{3}{7}T - 294 \text{ N} \right)\mathbf{j} + \left(A_z - \frac{2}{7}T \right)\mathbf{k} = 0 \quad (1)$$

$$\sum \mathbf{M}_B = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0:$$

$$2r\mathbf{k} \times (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k})$$

$$+ (2r\mathbf{i} + r\mathbf{k}) \times \left(-\frac{6}{7}T\mathbf{i} + \frac{3}{7}T\mathbf{j} - \frac{2}{7}T\mathbf{k} \right) \\ + (r\mathbf{i} + r\mathbf{k}) \times (-294 \text{ N})\mathbf{j} = 0$$

$$\left(-2A_y - \frac{3}{7}T + 294 \text{ N} \right)r\mathbf{i} + \left(2A_x - \frac{2}{7}T \right)r\mathbf{j} + \left(\frac{6}{7}T - 294 \text{ N} \right)r\mathbf{k} = 0 \quad (2)$$

Tornando os coeficientes dos vetores unitários iguais a zero na Eq. (2), obtemos três equações escalares, que resultam em

$$A_x = +49,0 \text{ N} \quad A_y = +73,5 \text{ N} \quad T = 343 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

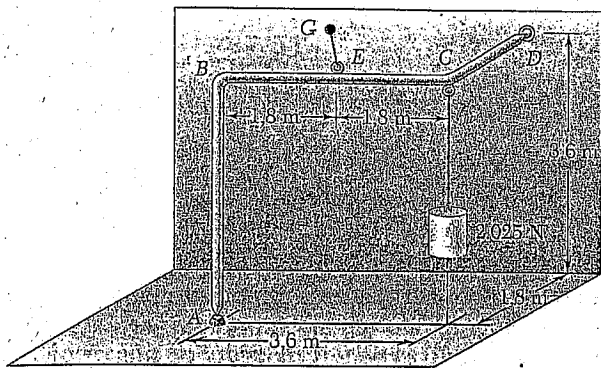
Estabelecendo os coeficientes dos vetores unitários iguais a zero na Eq. (1), obtemos mais três equações escalares. Depois de substituir os valores de T , A_x e A_y nessas equações, obtemos

$$A_z = +98,0 \text{ N} \quad B_x = +245 \text{ N} \quad B_y = +73,5 \text{ N}$$

As reações em A e B são, portanto,

$$\mathbf{A} = +(49,0 \text{ N})\mathbf{i} + (73,5 \text{ N})\mathbf{j} + (98,0 \text{ N})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

$$\mathbf{B} = +(245 \text{ N})\mathbf{i} + (73,5 \text{ N})\mathbf{j} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 4.10

Uma carga de 2.025 N está suspensa no canto C de uma tubulação rígida ABCD que foi dobrada tal como mostra a figura. A tubulação é sustentada pelas rótulas A e D, que estão presas, respectivamente, no solo e em uma parede vertical, e por um cabo que liga o ponto médio E da porção BC da tubulação e o ponto G na parede. Determine (a) onde G deverá estar localizado se a tração no cabo tiver de ser mínima, (b) o valor mínimo correspondente dessa tração.

SOLUÇÃO

Diagrama de corpo livre. O diagrama de corpo livre da tubulação inclui a carga $\mathbf{W} = (-2.025 \text{ N})\mathbf{j}$, as reações em A e D e a força \mathbf{T} exercida pelo cabo. Para eliminar as reações em A e D dos cálculos, escrevemos que a soma dos momentos das forças em relação a AD é zero. Representando por λ o vetor unitário ao longo de AD, escrevemos

$$\sum M_{AD} = 0: \quad \lambda \cdot (\overline{AE} \times \mathbf{T}) + \lambda \cdot (\overline{AC} \times \mathbf{W}) = 0 \quad (1)$$

O segundo termo da Eq. (1) pode ser calculado como se segue:

$$\overline{AC} \times \mathbf{W} = (3,6\mathbf{i} + 3,6\mathbf{j}) \times (-2,025\mathbf{j}) = -7,290\mathbf{k}$$

$$\lambda = \frac{\overline{AD}}{AD} = \frac{3,6\mathbf{i} + 3,6\mathbf{j} - 1,8\mathbf{k}}{5,4} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}$$

$$\lambda \cdot (\overline{AC} \times \mathbf{W}) = \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k} \right) \cdot (-7,290\mathbf{k}) = +2,430$$

Substituindo o valor obtido na Eq. (1), escrevemos

$$\lambda \cdot (\overline{AE} \times \mathbf{T}) = -2,430 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (2)$$

Valor mínimo da tração. Recordando a propriedade comutativa para produtos triplos mistos, reescrevemos a Eq. (2) na forma

$$\mathbf{T} \cdot (\lambda \times \overline{AE}) = -2,430 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (3)$$

que mostra que a projeção de \mathbf{T} sobre o vetor $\lambda \times \overline{AE}$ é uma constante. Segue-se que \mathbf{T} é mínimo quando for paralelo ao vetor

$$\lambda \times \overline{AE} = \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k} \right) \times (1,8\mathbf{i} + 3,6\mathbf{j}) = 1,2\mathbf{i} - 0,6\mathbf{j} + 1,2\mathbf{k}$$

Como o correspondente vetor unitário é $\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$, escrevemos

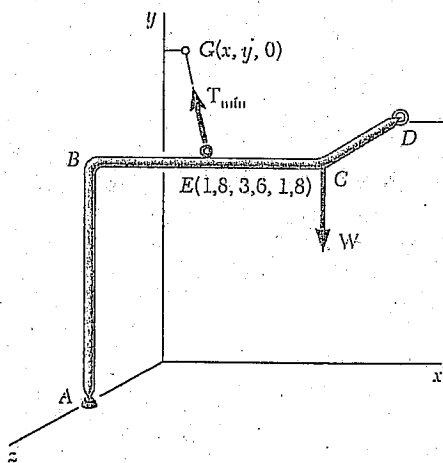
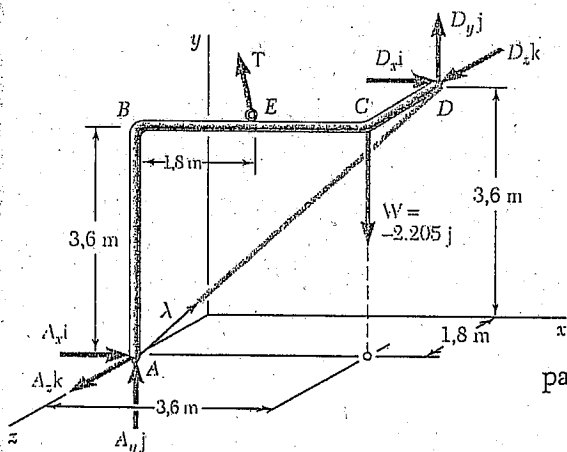
$$\mathbf{T}_{\min} = T \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k} \right) \quad (4)$$

Substituindo \mathbf{T} e $\lambda \times \overline{AE}$ na Eq. (3) e calculando os produtos escalares, obtemos $1,8T = -2,430$ e, portanto, $T = -1,350$. Transportando esse valor para (4), obtemos

$$\mathbf{T}_{\min} = -900\mathbf{i} + 450\mathbf{j} - 900\mathbf{k} \quad T_{\min} = 1,350 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

Localização de G. Como o vetor \overline{EG} e a força \mathbf{T}_{\min} têm a mesma direção, seus componentes devem ser proporcionais. Representando as coordenadas de G por $x, y, 0$, escrevemos

$$\frac{x-1,8}{-900} = \frac{y-3,6}{+450} = \frac{0-1,8}{-900} \quad x=0 \quad y=4,5 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$



METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

O equilíbrio de um *corpo tridimensional* foi tratado nas seções que você acabou de ler. Novamente é mais importante que, como primeiro passo da sua solução, você trace um *diagrama de corpo livre* completo.

1. À medida que desenhar o diagrama de corpo livre, dê atenção especial às reações nos apoios. O número de incógnitas em um apoio pode variar de uma a seis (Fig. 4.10). Para decidir se uma reação desconhecida ou um componente de reação existe no apoio, pergunte a você mesmo se o apoio impede o movimento do corpo em uma certa direção ou em torno de um certo eixo.

a. Se o movimento é impedido em uma certa direção, inclua no seu diagrama de corpo livre uma reação desconhecida ou um componente de reação que atue na mesma direção.

b. Se o apoio impede rotação em torno de um certo eixo, inclua no seu diagrama de corpo livre um binário de intensidade desconhecida que atue sobre o mesmo eixo.

2. As forças externas que atuam em um corpo tridimensional formam um sistema equivalente a zero. Escrevendo $\Sigma F = 0$ e $\Sigma M_A = 0$ sobre um ponto apropriado A , e igualando os coeficientes de i , j , k em ambas as equações a zero, obtêm-se seis equações escalares. Em geral, essas equações vão conter seis incógnitas e podem ser resolvidas para essas incógnitas.

3. Após completar o seu diagrama de corpo livre, é conveniente procurar equações que envolvam o menor número possível de incógnitas. Estas estratégias podem lhe ser úteis:

a. Somando os momentos em relação a uma rótula ou uma articulação, você vai obter equações nas quais três componentes de reações desconhecidas foram eliminados [Problemas Resolvidos 4.8 e 4.9].

b. Se for possível traçar um eixo que passe pelos pontos de aplicação de todas as reações desconhecidas exceto uma, ao se somarem os momentos em relação a esse eixo obtém-se uma equação com uma única incógnita [Problema Resolvido 4.10].

4. Após traçar o seu diagrama de corpo livre, sugerimos que você compare o número de incógnitas ao número de equações escalares não-triviais de equilíbrio para o problema dado. Ao fazer isso, você saberá se o corpo está propriamente ou parcialmente vinculado e se o problema é estaticamente determinado ou indeterminado. Além disso, à medida que considerarmos problemas mais complexos nos capítulos posteriores, ter em mente os números de incógnitas e de equações ajudará você a desenvolver soluções corretas.

PROBLEMAS

4.96 As engrenagens *A* e *B* estão presas a um eixo apoiado por mancais em *C* e *D*. Os diâmetros das engrenagens *A* e *B* são 150 mm e 75 mm, respectivamente, e as forças tangencial e radial que atuam nas engrenagens estão representadas na figura. Sabendo que o sistema gira a uma velocidade constante, determine as reações em *C* e *D*. Considere que o mancal em *C* não exerce qualquer força axial e despreze os pesos das engrenagens e do eixo.

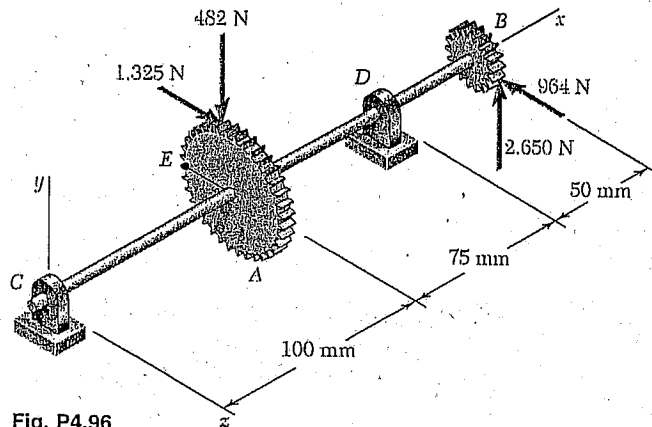


Fig. P4.96

4.97 Resolva o Problema 4.96 considerando que para a engrenagem *A* as forças tangencial e radial estão atuando em *E*, de tal modo que $\mathbf{F}_A = (1.325 \text{ N})\mathbf{j} + (482 \text{ N})\mathbf{k}$.

4.98 Duas correias de transmissão passam por duas roldanas soldadas a um eixo apoiado por mancais em *B* e *D*. A roldana em *A* tem um raio de 50 mm, e a roldana em *C* tem um raio de 40 mm. Sabendo que o sistema roda a uma velocidade constante, determine (a) a tração *T* e (b) as reações em *B* e *D*. Considere que o mancal em *D* não exerce qualquer empuxo axial e despreze os pesos das roldanas e do eixo.

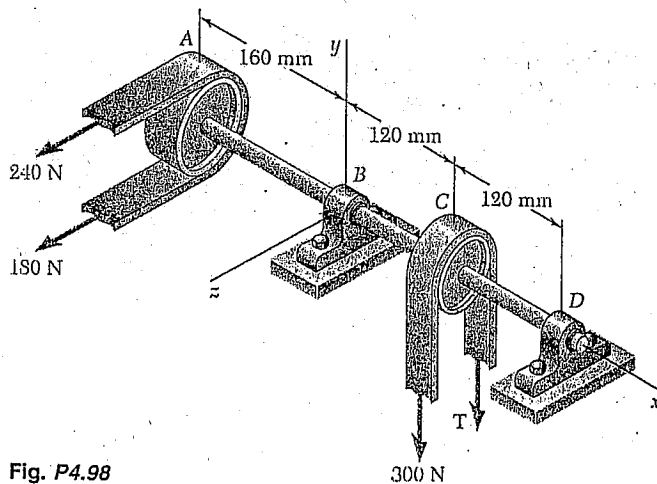


Fig. P4.98

4.99 Para a parte de uma máquina mostrada na figura, a polia *A* de 10 cm de diâmetro e a roda *B* estão fixadas a um eixo sustentado por mancais em *C* e *D*. A mola de constante 3,6 N/cm está indeformada quando $\theta = 0$, e o mancal em *C* não exerce qualquer força axial. Sabendo que $\theta = 180^\circ$ e que a máquina está em repouso e em equilíbrio, determine (a) a tração *T* e (b) as reações em *C* e *D*. Despreze os pesos do eixo, da polia e da roda.

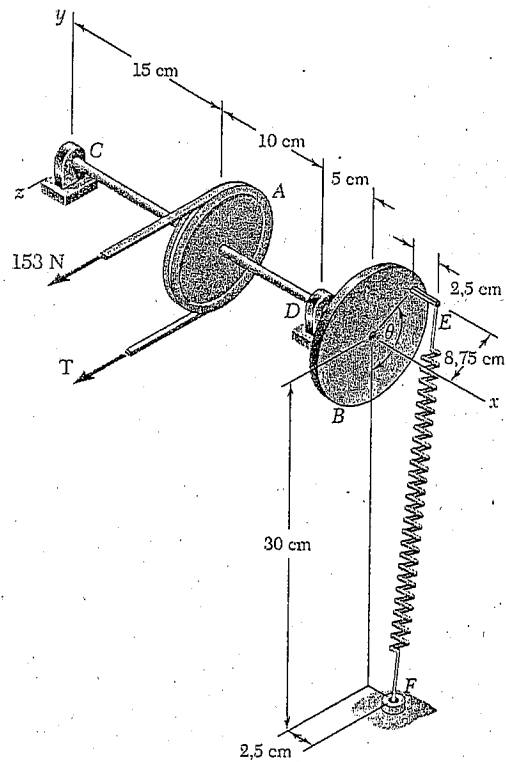


Fig. P4.99

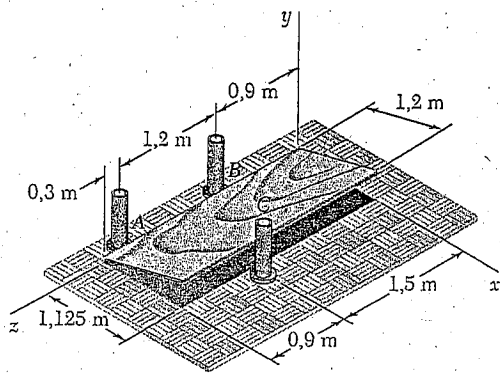


Fig. P4.101

4.100 Resolva o Problema 4.99 para $\theta = 90^\circ$.

4.101 Uma folha de madeira compensada de $1,2 \times 2,4$ m, com uma massa de 17 kg, foi temporariamente colocada entre três apoios tubulares. A aresta inferior da folha repousa sobre dois pequenos colares *A* e *B* e sua aresta superior está inclinada, encostada no tubo *C*. Desprezando o atrito em todas as superfícies, determine as reações em *A*, *B* e *C*.

4.102 A placa quadrada mostrada na figura, de 200×200 mm, tem uma massa de 25 kg e é sustentada por três arames verticais. Determine a tração em cada arame.

4.103 A placa quadrada mostrada na figura, de 200×200 mm, tem uma massa de 25 kg e é sustentada por três arames verticais. Determine a massa e a localização do bloco mais leve que deve ser colocado sobre a placa para que as trações nos três cabos sejam iguais.

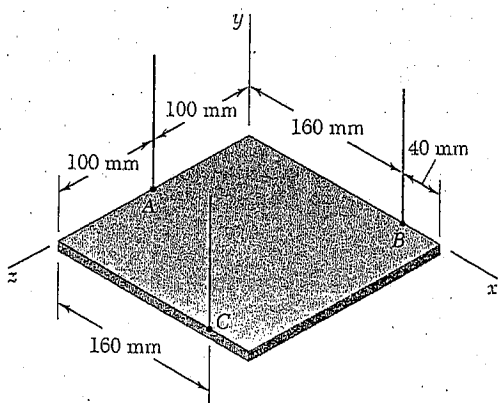


Fig. P4.102 e P4.103

4.104 Uma câmera de 240 g de massa está montada em um pequeno tripé de 200 g de massa. Considerando que a massa da câmera está uniformemente distribuída e que a linha de ação do peso do tripé passa por D , determine (a) os componentes verticais das reações em A , B e C quando $\theta = 0$ e (b) o valor máximo de θ para o tripé não tombar.

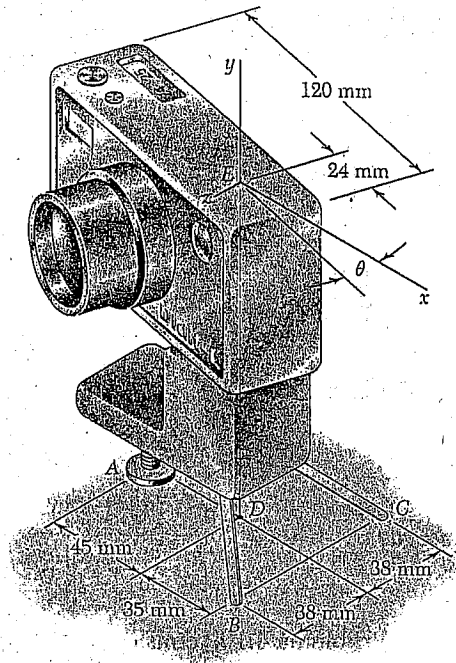


Fig. P4.104

4.105 Dois tubos de aço AB e BC , cada qual com um peso por unidade de comprimento de 75 N/m , são soldados juntos em B e estão sustentados por três arames. Sabendo que $a = 0,375 \text{ m}$, determine a tração em cada arame.

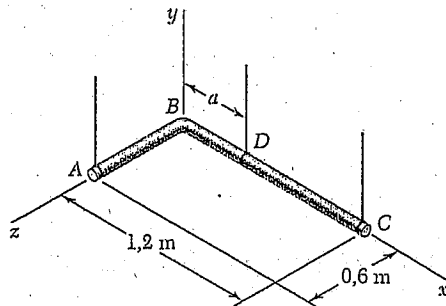


Fig. P4.105

4.106 Para a montagem de tubos do Problema 4.105, determine (a) o maior valor admissível de a para o conjunto não virar e (b) a correspondente tração em cada arame.

4.107 Uma haste de alumínio uniforme de peso W é curvada formando um anel circular de raio R e é sustentada por três arames tal como mostra a figura. Determine a tração em cada arame.

4.108 Uma haste de alumínio uniforme de peso W é curvada, formando um anel circular de raio R , e sustentada por três arames tal como mostra a figura. Um pequeno colar de peso W' é colocado sobre o anel e posicionado de modo que as trações nos três arames sejam iguais. Determine (a) a posição do colar, (b) o valor de W' e (c) a tração nos arames.

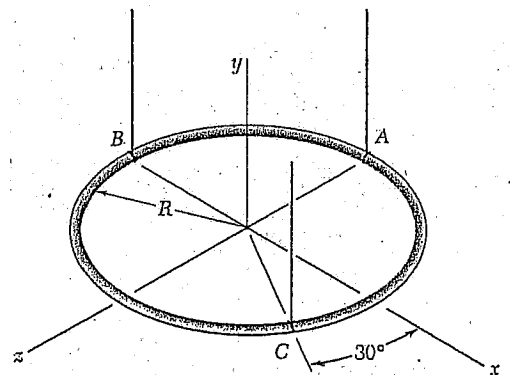


Fig. P4.107 e P4.108

4.109 Uma abertura no piso é coberta por uma folha de madeira compensada de $0,9 \times 1,2$ m, pesando 54 N. A folha é articulada em A e B e é mantida em uma posição ligeiramente acima do solo por um pequeno bloco C. Determine o componente vertical da reação (a) em A, (b) em B e (c) em C.

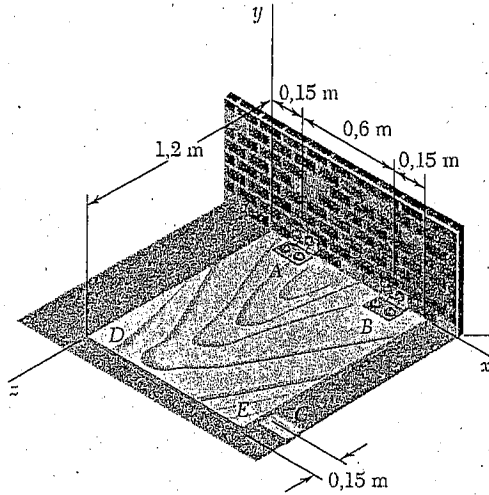


Fig. P4.109

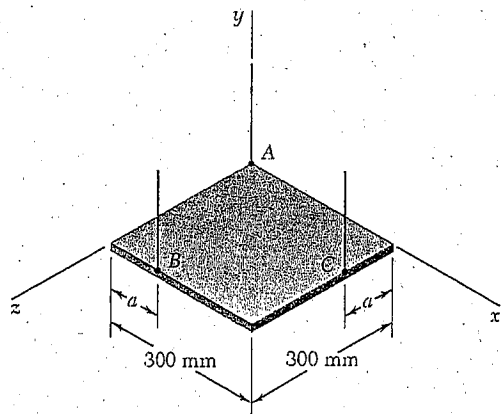


Fig. P4.111

4.110 Resolva o Problema 4.109 considerando que o pequeno bloco C é deslocado e colocado abaixo da aresta DE em um ponto a uma distância de 0,15 m do canto E.

4.111 A placa quadrada de 10 kg mostrada é sustentada por três arames verticais. Determine (a) a tração em cada arame quando $a = 100$ mm e (b) o valor de a para o qual as trações nos três arames são iguais.

4.112 O mastro de bandeira, AC, de 3 m, forma um ângulo de 30° com o eixo z. Ele é seguro por uma rótula em C e por dois apoios fins BD e BE. Sabendo que a distância BC é 0,9 m, determine a tração em cada apoio e a reação em C.

4.113 A força de 4 kN mostrada na figura atua em uma lança de 3 m. Determine a tração em cada cabo e a reação na rótula em A.

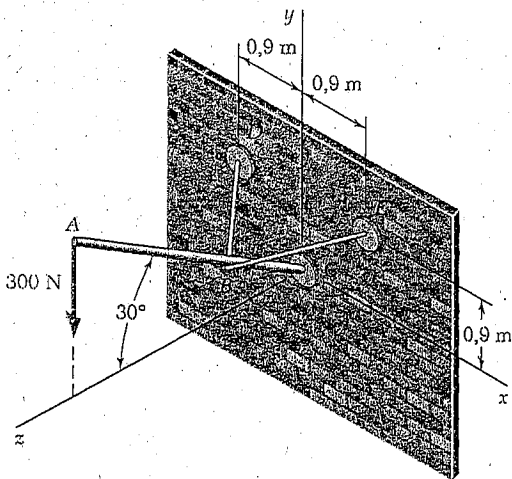


Fig. P4.112

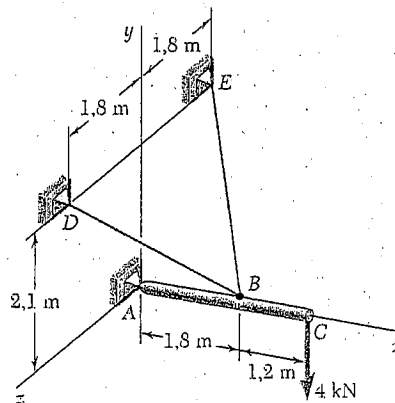


Fig. P4.113

4.114 Uma lança de 2,4 m de comprimento é segura por uma rótula em C e por dois cabos AD e BE. Determine a tração em cada cabo e a reação em C.

4.115 Resolva o Problema 4.114 considerando que a carga dada de 891 N é substituída por duas cargas de 445,5 N aplicadas em A e B.

4.116 No poste ABC, de 5,4 m, atua uma força de 945 N, tal como mostra a figura. O poste é sustentado por uma rótula em A e por dois cabos BD e BE. Para $a = 2,7$ m, determine a tração em cada cabo e a reação em A.

4.117 Resolva o Problema 4.116 para $a = 1,35$ m.

4.118 Dois tubos de aço ABCD e EBF são soldados juntos em B para formar a lança mostrada na figura. A lança é sustentada por uma rótula em D e por dois cabos EG e ICFH; o cabo ICFH passa por polias sem atrito em C e F. Para o carregamento mostrado na figura, determine a tração em cada cabo e a reação em D.

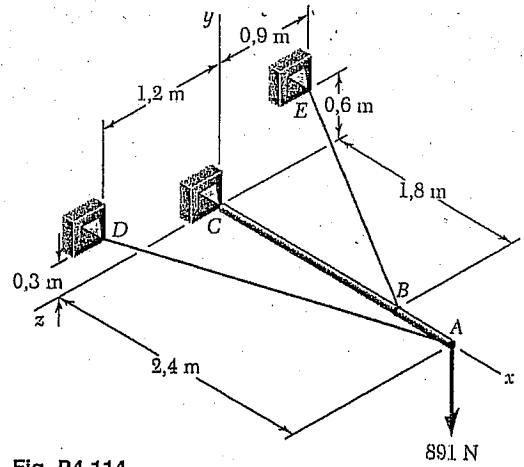


Fig. P4.114

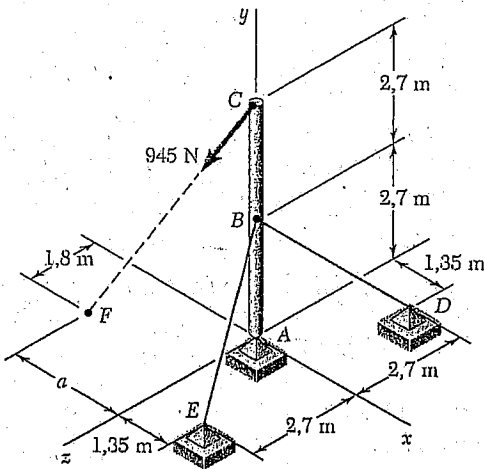


Fig. P4.116

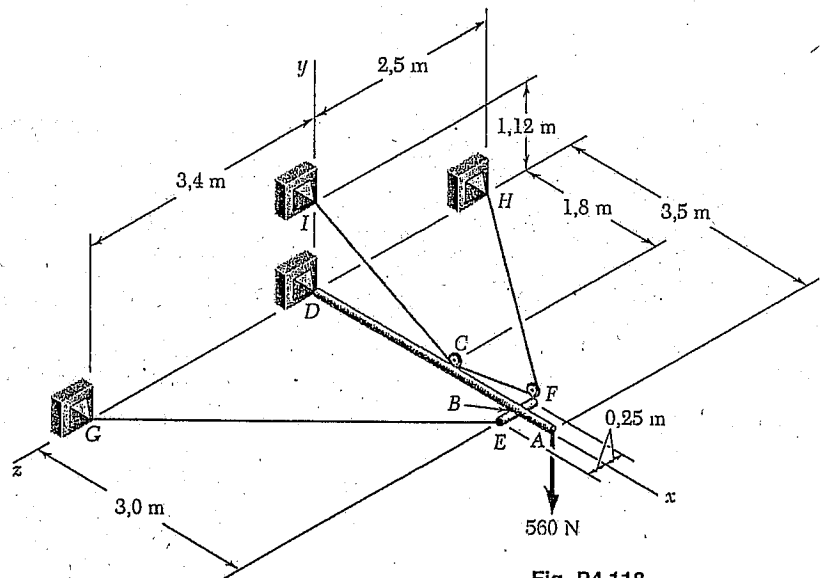


Fig. P4.118

4.119 Resolva o Problema 4.118 considerando que a carga de 560 N está aplicada em B.

4.120 A alavanca AB está soldada à haste dobrada BCD que é sustentada por mancais em E e F e por um cabo DG. Sabendo que o mancal em E não exerce qualquer empuxo axial, determine (a) a tração no cabo DG e (b) as reações em E e F.

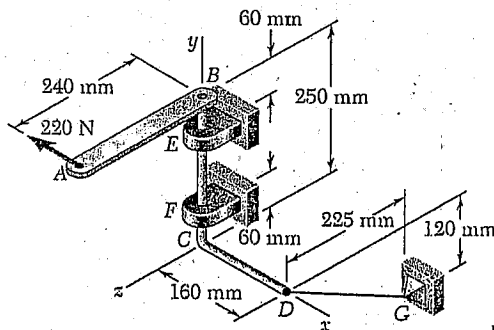


Fig. P4.120

4.121 Uma cobertura de 30 kg para uma abertura de um telhado é articulada nos cantos A e B . O telhado forma um ângulo de 30° com a horizontal, e a cobertura é mantida em uma posição horizontal pelo apoio CE . Determine (a) a intensidade da força exercida pelo apoio e (b) as reações nas articulações. Suponha que a articulação em A não exerce qualquer empuxo axial.

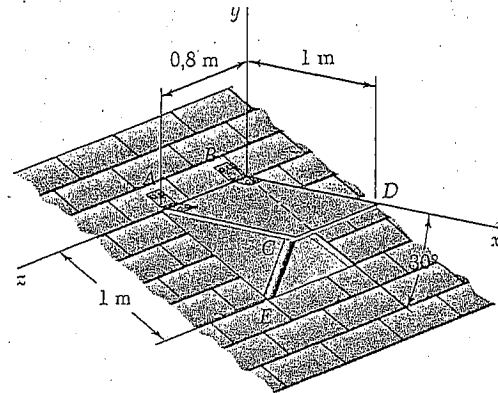


Fig. P4.121

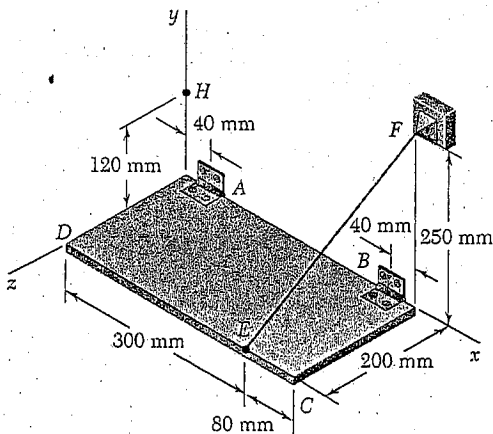


Fig. P4.122

4.122 A placa retangular mostrada na figura tem uma massa de 15 kg e é mantida na posição mostrada pelas dobradiças A e B e pelo cabo EF . Considerando que a dobradiça em B não exerce qualquer empuxo axial, determine (a) a tração no cabo e (b) as reações em A e B .

4.123 Resolva o Problema 4.122 supondo que o cabo EF é substituído por um cabo preso nos pontos E e H .

4.124 Uma pequena porta pesando 72 N é presa pelas dobradiças A e B a uma parede e é mantida na posição horizontal mostrada na figura pela corda EFH . A corda passa por uma polia pequena sem atrito em F e é amarrada a uma trava fixa em H . Considerando que a dobradiça em A não exerce qualquer empuxo axial, determine (a) a tração na corda e (b) as reações em A e B .

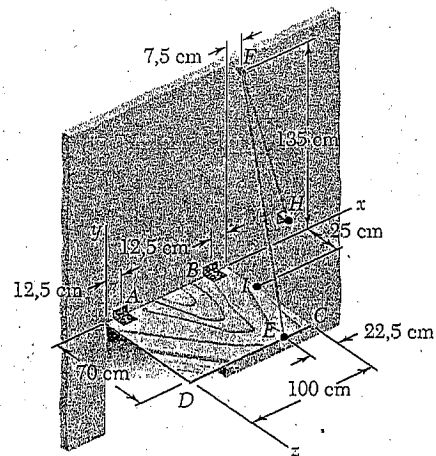


Fig. P4.124

4.125 Resolva o Problema 4.124 considerando que a corda é amarrada à porta em I .

4.126 Uma placa retangular uniforme de 1.282,5 N é sustentada na posição mostrada na figura pelas dobradiças A e B e pelo cabo DCE , que passa por um gancho sem atrito em C . Considerando que a tração é a mesma em ambas as partes do cabo, determine (a) a tração no cabo e (b) as reações em A e B . Considere que a dobradiça em B não exerce qualquer empuxo axial.

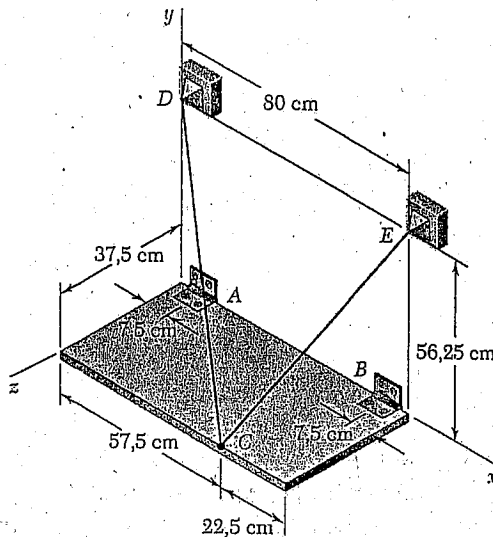


Fig. P4.126

4.127 Resolva o Problema 4.126 supondo que o cabo DCE é substituído por um cabo preso ao ponto E e ao gancho C .

4.128 O mecanismo de tracionamento de uma transmissão por correia é constituído por uma polia sem atrito A , uma placa de apoio B e uma mola C . Preso abaixo da placa de apoio está o bloco deslizando D que é livre para se movimentar na fenda sem atrito do apoio E . Sabendo que a polia e a correia estão em um plano horizontal, com a porção F da correia paralela ao eixo x e a porção G formando um ângulo de 30° com o eixo x , determine (a) a força na mola e (b) a reação em D .

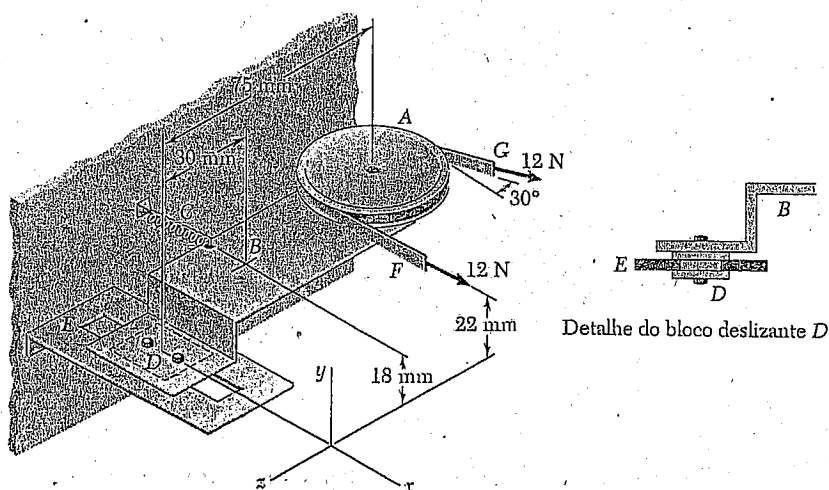


Fig. P4.128

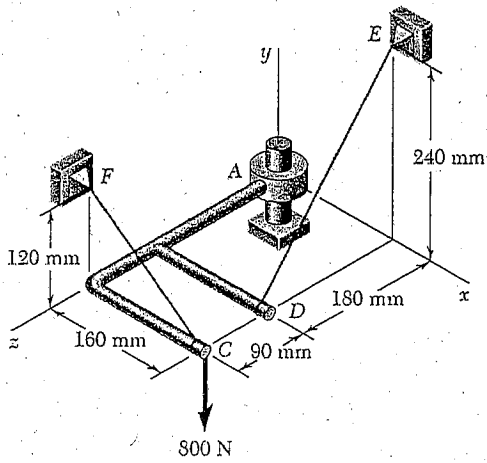


Fig. P4.129

4.129 O conjunto mostrado é soldado ao colar A, que se encaixa no pino vertical mostrado na figura. O pino pode exercer binários em torno dos eixos x e z , mas não impede movimento em torno ou ao longo do eixo y . Para o carregamento mostrado, determine a tração em cada cabo e a reação em A.

4.130 A alavanca AB está soldada à haste dobrada BCD, que é sustentada por um mancal em E e por um cabo DG. Sabendo que o mancal pode exercer um empuxo axial e binários em torno de eixos paralelos aos eixos x e z , determine (a) a tração no cabo DG e (b) a reação em E.

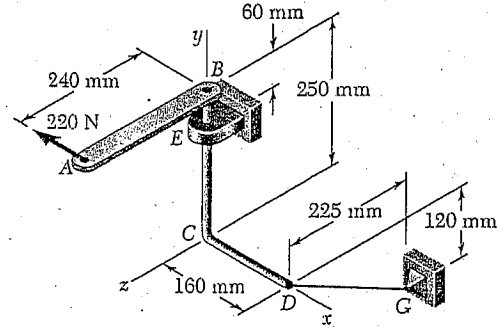


Fig. P4.130

4.131 Resolva o Problema 4.124 considerando que a dobradiça em A é removida e que a dobradiça em B pode exercer binários em torno dos eixos y e z .

4.132 A estrutura mostrada está sustentada por três cabos e uma rótula em A. Para $P = 0$, determine a tração em cada cabo e a reação em A.

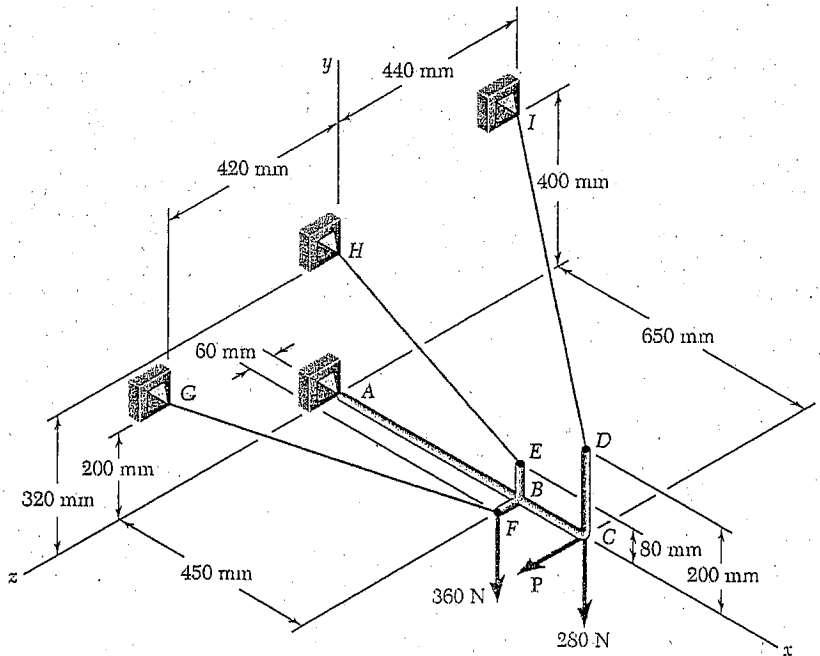


Fig. P4.132 e P4.133

4.133 A estrutura mostrada está sustentada por três cabos e uma rótula em A. Para $P = 50$ N, determine a tração em cada cabo e a reação em A.

4.134 O elemento rígido ABF , em formato de L, é sustentado por uma rótula em A e por três cabos. Para o carregamento mostrado, determine a tração em cada cabo e a reação em A .

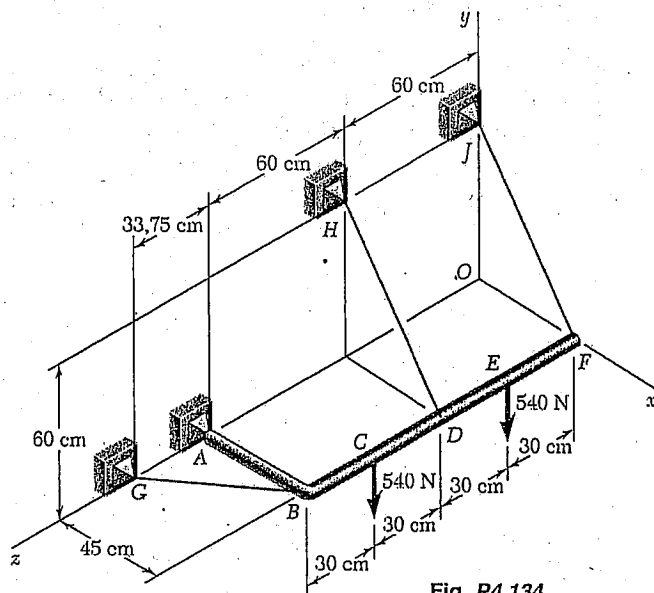


Fig. P4.134

4.135 Resolva o Problema 4.134 supondo que a carga em C foi removida.

4.136 Para limpar a tubulação de esgoto entupida AE , um encanador desconectou ambas as extremidades da tubulação e inseriu um desentupidor motorizado através da abertura em A . A cabeça cortante do desentupidor está conectada por um cabo pesado a um motor elétrico que gira a uma velocidade constante à medida que o encanador força o cabo para dentro da tubulação. As forças exercidas pelo encanador e pelo motor na extremidade do cabo podem ser representadas pelo torsor $F = -(60 \text{ N})\mathbf{k}$, $M = -(108 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$. Determine as reações adicionais em B , C e D causadas pela operação de limpeza. Considere que a reação em cada apoio consiste em dois componentes de força perpendiculares à tubulação.

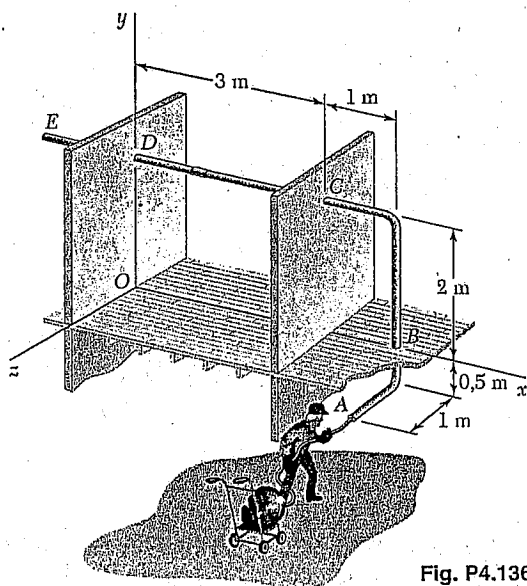


Fig. P4.136

4.137 Resolva o Problema 4.136 considerando que o encanador exerce uma força $F = -(60 \text{ N})\mathbf{k}$ e que o motor está desligado ($M = 0$).

4.138 Três hastes estão soldadas juntas para formar uma cantoneira que é sustentada por três parafusos de olhal. Desprezando o atrito, determine as reações em A, B e C quando $P = 240 \text{ N}$, $a = 120 \text{ mm}$, $b = 80 \text{ mm}$ e $c = 100 \text{ mm}$.

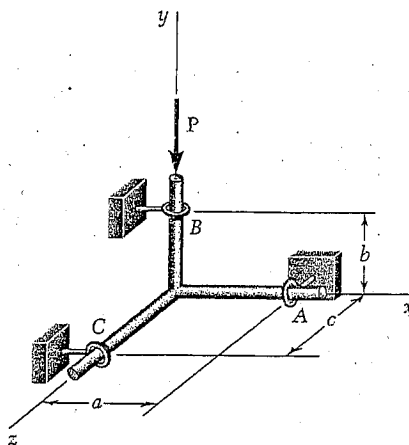


Fig. P4.138

4.139 Resolva o Problema 4.138 considerando que a força P é removida e substituída por um binário $M = +(6 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j}$ atuando em B.

4.140 A haste uniforme AB de 45 N é sustentada por uma rótula em A e está apoiada tanto na haste CD quanto na parede vertical. Desprezando os efeitos do atrito, determine (a) a força que a haste CD exerce sobre AB e (b) as reações em A e B. (Dica: a força exercida por CD em AB deve ser perpendicular a ambas as hastes.)

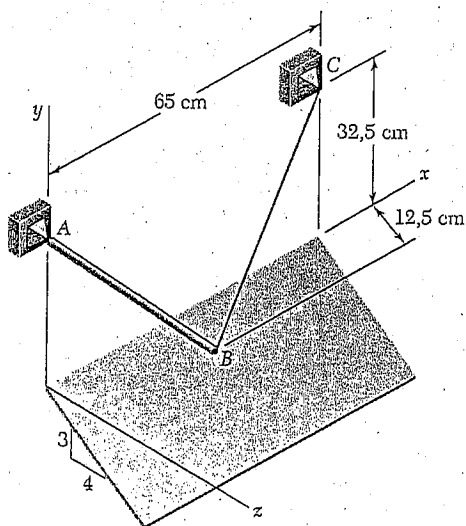


Fig. P4.141

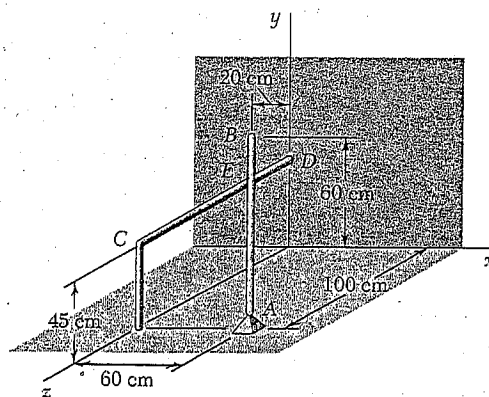


Fig. P4.140

4.141 A haste uniforme AB , de $52,5 \text{ cm}$ de comprimento, pesa $28,8 \text{ N}$ e é presa a uma rótula em A. A haste está apoiada sobre uma superfície sem atrito inclinada e é mantida na posição mostrada na figura pela corda BC . Sabendo que a corda tem $52,5 \text{ cm}$ de comprimento, determine (a) a tração na corda e (b) as reações em A e B.

4.142 Enquanto está sendo instalada, a rampa $ABCD$ de 252 N é presa a uma parede por meio dos apoios E e F e é sustentada por escoras GH e IJ . Considerando que o peso da rampa é uniformemente distribuído, determine a intensidade da força exercida na rampa pela escora GH se a escora IJ for removida.

4.143 Enquanto está sendo instalada, a rampa $ABCD$, de 252 N; é presa a uma parede por meio dos apoios E e F e é sustentada por escoras GH e IJ . Considerando que o peso da rampa é uniformemente distribuído, determine a intensidade da força exercida na rampa pela escora IJ se a escora GH for removida.

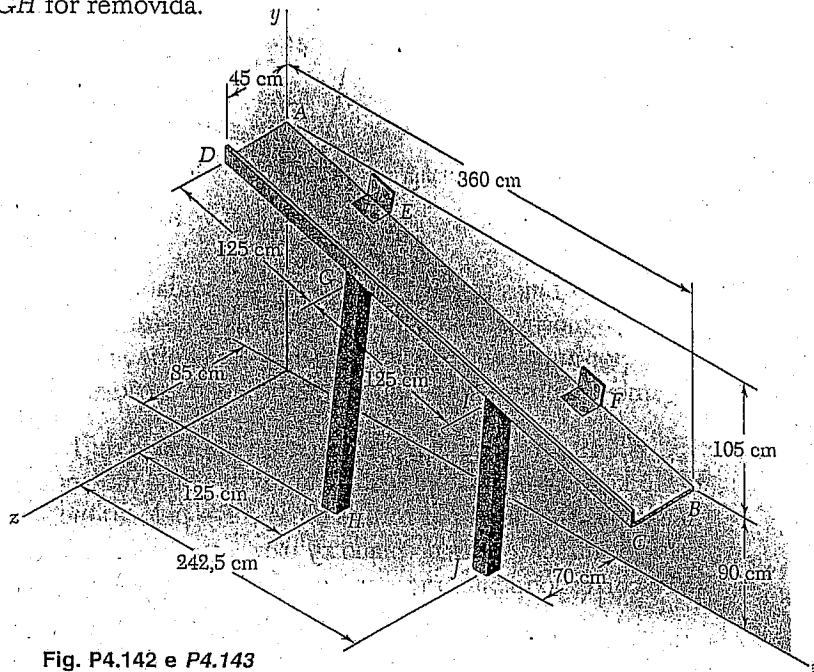


Fig. P4.142 e P4.143

4.144 Para regar mudas de plantas, um jardineiro une três pedaços de tubo, AB , BC e CD , equipados com bocais pulverizadores, e suspende o conjunto usando suportes articulados em A e D e o cabo EF . Sabendo que os tubos pesam 12,75 N/m, determine a tração no cabo.

4.145 Resolva o Problema 4.144 considerando que o cabo EF é substituído por um cabo unindo E e C .

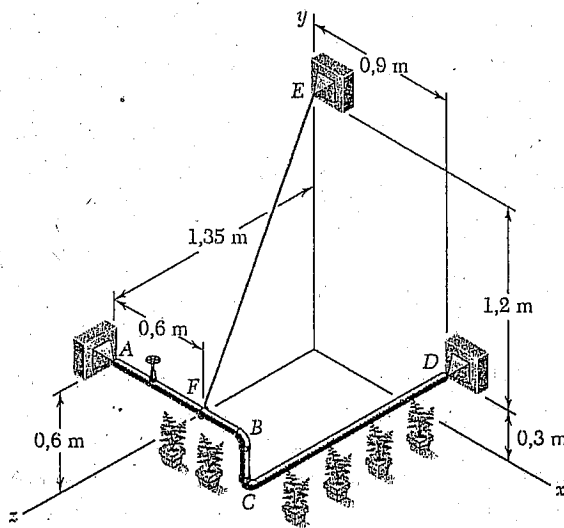


Fig. P4.144

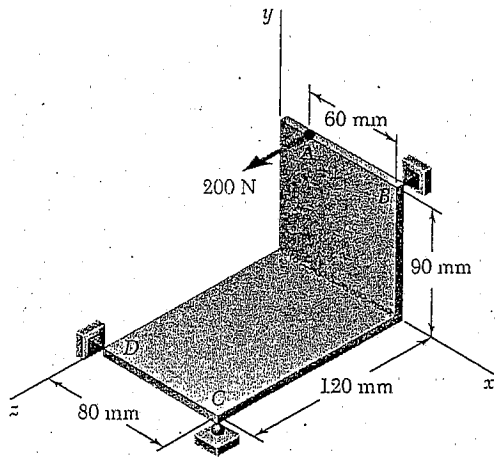


Fig. P4.146

4.146 A haste dobrada $ABDE$ é sustentada por rótulas em A e E e pelo cabo DF . Se uma carga de 600 N é aplicada em C , tal como mostra a figura, determine a tração no cabo.

4.147 Resolva o Problema 4.146 considerando que o cabo DF é substituído por um cabo que une B e F .

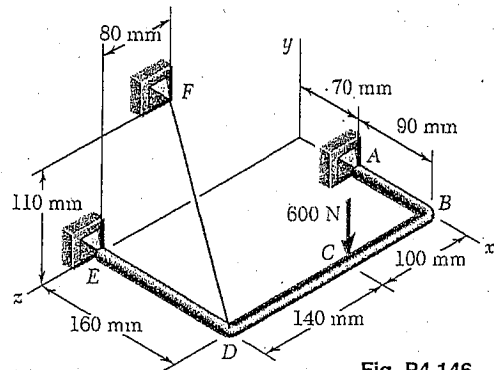


Fig. P4.146

4.148 Duas placas retangulares são soldadas juntas para formar o conjunto mostrado na figura. O conjunto é sustentado por rótulas em B e D e por uma esfera sobre uma superfície horizontal em C . Para o carregamento mostrado na figura, determine a reação em C .

4.149 Dois painéis de madeira compensada de $1 \times 2\text{ m}$, cada qual de 15 kg de massa, são pregados juntos tal como mostra a figura. Os painéis são sustentados por rótulas em A e F e pelo arame BH . Determine (a) a localização de H no plano xy para a tração no arame ser mínima e (b) a correspondente tração mínima.

4.150 Resolva o Problema 4.149 sujeito à restrição de que H deve estar sobre o eixo y .

4.151 Uma placa de aço uniforme $ABCD$ de $50 \times 75\text{ cm}$ pesa $382,5\text{ N}$ e está presa a rótulas em A e B . Sabendo que a placa se apoia sobre uma parede vertical sem atrito em D , determine (a) a localização de D e (b) a reação em D .

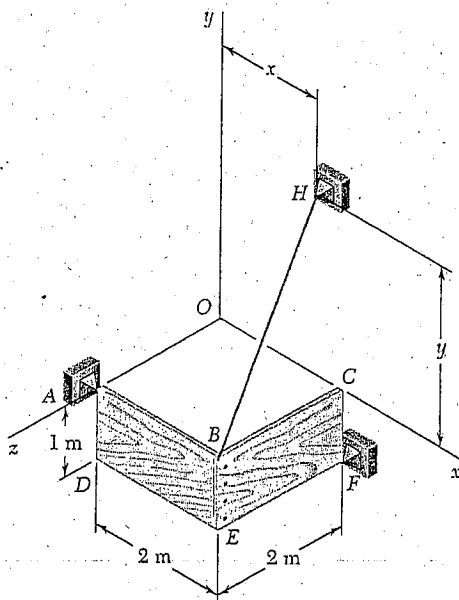


Fig. P4.149

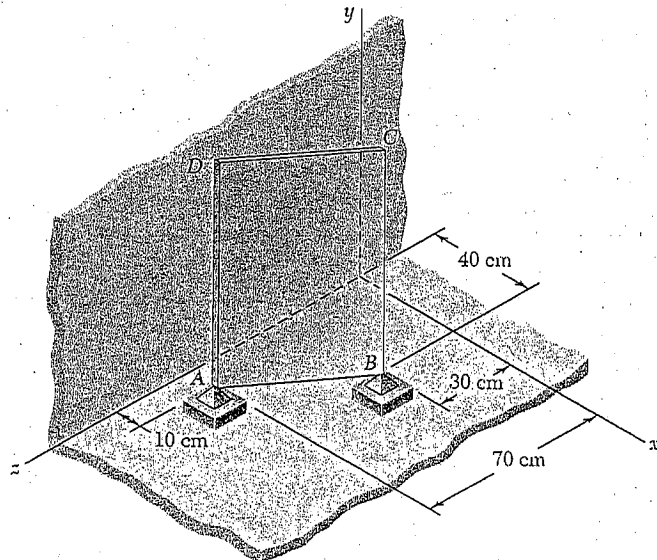


Fig. P4.151

REVISÃO E RESUMO DO CAPÍTULO 4

Este capítulo foi dedicado ao estudo do *equilíbrio de corpos rígidos*, isto é, da situação em que forças externas que atuam sobre um corpo rígido *formam um sistema equivalente a zero* [Seção 4.1]. Temos então

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \quad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \quad (4.1)$$

Decompondo cada força e cada momento em seus componentes retangulares, podemos expressar as condições necessárias e suficientes para o equilíbrio de um corpo rígido com estas seis equações escalares:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \quad (4.2)$$

$$\Sigma M_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0 \quad (4.3)$$

Estas equações podem ser usadas para se determinarem forças desconhecidas aplicadas ao corpo rígido ou reações desconhecidas exercidas pelos seus apoios.

Quando estiver resolvendo um problema que envolva o equilíbrio de um corpo rígido, é essencial considerar *todas* as forças que atuam sobre o corpo. Assim, o primeiro passo na solução do problema deve ser traçar um *diagrama de corpo livre* mostrando o corpo que está em consideração e todas as incógnitas, assim como as forças conhecidas que atuam sobre ele [Seção 4.2].

Na primeira parte do capítulo, consideramos o *equilíbrio de uma estrutura bidimensional*; isto é, consideramos que a estrutura considerada e as forças aplicadas nela estavam contidas no mesmo plano. Vimos que cada uma das reações exercidas sobre a estrutura pelos seus apoios pode envolver uma, duas ou três incógnitas, dependendo do tipo de apoio [Seção 4.3].

No caso de uma estrutura bidimensional, as Eqs. (4.1), ou as Eqs. (4.2) e (4.3), se reduzem a *três equações de equilíbrio*, a saber

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_A = 0 \quad (4.5)$$

onde A é um ponto arbitrário no plano da estrutura [Seção 4.4]. Essas equações podem ser usadas para se obter a solução para as três incógnitas. Embora as três equações de equilíbrio (4.5) não possam ser *aumentadas* com outras equações, qualquer uma delas pode ser *substituída* por outra equação. Portanto, podemos escrever outros conjuntos de equações de equilíbrio, tais como

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_B = 0 \quad (4.6)$$

na qual o ponto B é escolhido de modo que a linha AB não seja paralela ao eixo y , ou

$$\Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_B = 0 \quad \Sigma M_C = 0 \quad (4.7)$$

em que os pontos A , B e C não estão em uma linha reta.

Equações de equilíbrio

Diagrama de corpo livre

Equilíbrio de uma estrutura bidimensional

Indeterminação estática

Vinculações parciais

Vinculações impróprias

Corpo sujeito à ação de duas forças

Corpo sujeito à ação de três forças

Equilíbrio de um corpo tridimensional

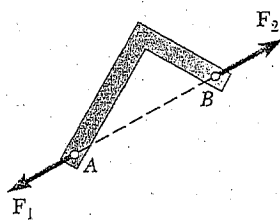


Fig. 4.11

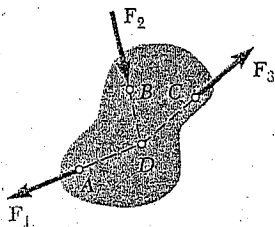


Fig. 4.12

Já que qualquer conjunto de equações de equilíbrio pode ser resolvido para somente três incógnitas, as reações nos apoios de uma estrutura rígida bidimensional não podem ser completamente determinadas se envolverem *mais do que três incógnitas*; diz-se que elas são *estaticamente indeterminadas* [Seção 4.5]. Por outro lado, se as reações envolverem *menos do que três incógnitas*, o equilíbrio não poderá ser mantido para condições gerais de carregamento; diz-se que a estrutura é *parcialmente vinculada*. O fato de as reações envolverem exatamente três incógnitas não é garantia de que o equilíbrio das equações possa ser resolvido para todas as três incógnitas. Se os suportes são arranjados de tal maneira que as reações são *ou concorrentes ou paralelas*, as reações são estaticamente indeterminadas, e diz-se que a estrutura está *impropriamente vinculada*.

Foi dada especial atenção a dois casos específicos de equilíbrio de um corpo rígido. Na Seção 4.6, um *corpo sujeito à ação de duas forças* foi definido como um corpo rígido sujeito à ação de forças em apenas dois pontos, e foi mostrado que as resultantes F_1 e F_2 dessas forças devem ter *igual intensidade, igual linha de ação e sentidos opostos* (Fig. 4.11), uma propriedade que vai simplificar a solução de certos problemas em capítulos futuros. Na Seção 4.7, um *corpo sujeito à ação de três forças* foi definido como um corpo rígido sujeito à ação de forças em apenas três pontos, e foi mostrado que as resultantes F_1 , F_2 e F_3 dessas forças podem ser *tanto concorrentes* (Fig. 4.12) *como paralelas*. Essa propriedade nos concede uma técnica alternativa para a solução de problemas que envolvam um corpo sujeito à ação de três forças [Problema Resolvido 4.6].

Na segunda parte do capítulo, consideramos o *equilíbrio de um corpo tridimensional* e vimos que cada uma das reações exercidas sobre o corpo por seus apoios pode envolver uma a seis incógnitas, dependendo do tipo de apoio [Seção 4.8].

No caso geral do equilíbrio de um corpo tridimensional, todas as seis equações escalares de equilíbrio (4.2) e (4.3) listadas no início desta revisão devem ser usadas e resolvidas para *seis incógnitas* [Seção 4.9]. Na maioria dos problemas, entretanto, essas equações serão mais convenientemente obtidas se primeiro escrevermos

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \quad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \quad (4.1)$$

e expressarmos as forças \mathbf{F} e os vetores posição \mathbf{r} em termos dos componentes escalares e dos vetores unitários. Os produtos vetoriais podem então ser calculados diretamente ou por meio de determinantes, e as equações escalares desejadas podem ser obtidas igualando-se a zero os coeficientes dos vetores unitários [Problemas Resolvidos 4.7 a 4.9].

Observamos que no máximo três componentes de reação desconhecidos podem ser eliminados dos cálculos de $\Sigma \mathbf{M}_O$ na segunda das relações (4.1) por meio de uma escolha criteriosa do ponto O . Além disso, é possível eliminar as reações em dois pontos A e B da solução de alguns problemas escrevendo-se a equação $\Sigma M_{AB} = 0$, que envolve o cálculo dos momentos das forças em relação ao eixo AB , que une os pontos A e B [Problema Resolvido 4.10].

Se as reações envolverem mais do que seis incógnitas, algumas das reações são *estaticamente indeterminadas*; se envolverem menos do que seis incógnitas, o corpo rígido é apenas *parcialmente vinculado*. Mesmo com seis ou mais incógnitas, o corpo rígido vai estar *impropriamente vinculado* se as reações associadas aos apoios dados forem paralelas ou interceptarem a mesma linha.

PROBLEMAS PARA REVISÃO DO TEMA

4.152 A viga AD sustenta as duas cargas de 180 N mostradas na figura. A viga é mantida em posição por um engaste em D e por um cabo BE que está preso ao contrapeso W . Determine a reação em D quando (a) $W = 450$ N e (b) $W = 405$ N.

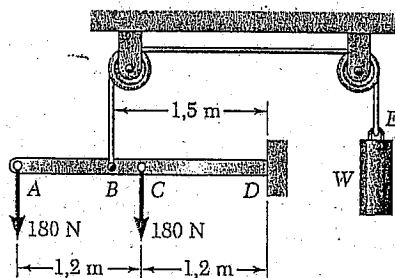


Fig. P4.152 e P4.153.

4.153 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine o intervalo de valores de W para os quais a intensidade do binário em D não excede a 54 N · m.

4.154 Determine as reações em A e D quando $\beta = 30^\circ$.

4.155 Determine as reações em A e D quando $\beta = 60^\circ$.

4.156 Um trator de 9.450 N é usado para erguer 4.050 N de cascalho. Determine a reação em cada uma das duas (a) rodas traseiras A e (b) rodas dianteiras B .

4.157 Uma força de tração de 22,5 N é mantida em uma fita à medida que esta passa pelo sistema de suportes mostrado na figura. Sabendo que o raio de cada polia é 1 cm, determine a reação em C .

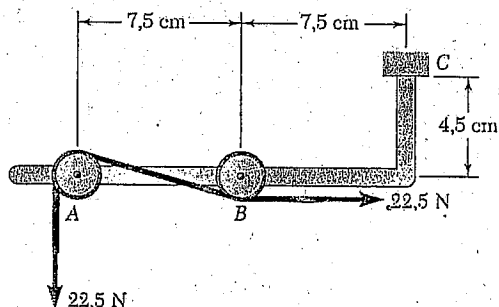


Fig. P4.157

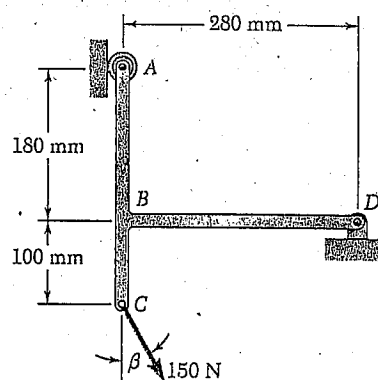


Fig. P4.154 e P4.155

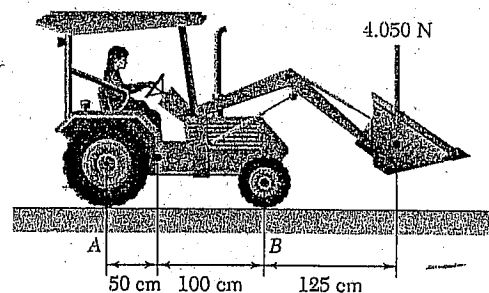


Fig. P4.156

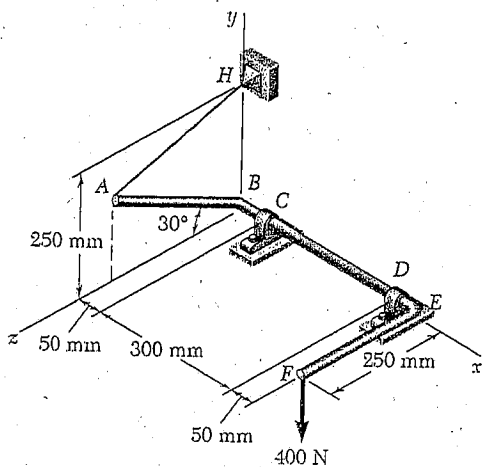


Fig. P4.159

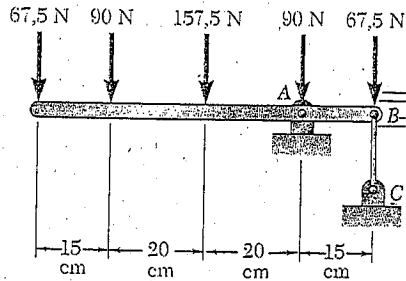


Fig. P4.160

4.158 Resolva o Problema 4.157 considerando que são usadas polias de 1,5 cm de raio.

4.159 A haste dobrada $ABEF$ é sustentada por mancais em C e D e pelo arame AH . Sabendo que a porção AB da haste tem 250 mm de comprimento, determine (a) a tração no arame AH e (b) as reações em C e D . Considere que o mancal em D não exerce qualquer empuxo axial.

4.160 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine (a) a reação em A e (b) a tração no cabo BC .

4.161 A estrutura $ABCD$ é sustentada por uma rótula em A e por três cabos. Para $a = 150$ mm, determine a tração em cada cabo e a reação em A .

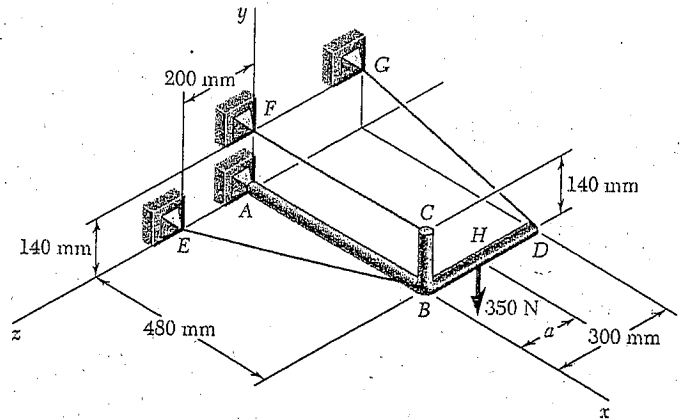


Fig. P4.161 e P4.162

4.162 A estrutura $ABCD$ é sustentada por uma rótula em A e por três cabos. Sabendo que a carga de 350 N é aplicada em D ($a = 300$ mm), determine a tração em cada cabo e a reação em A .

*4.163 Nos problemas listados a seguir, os corpos rígidos considerados foram completamente vinculados e as reações foram estaticamente determinadas. Para cada um desses corpos rígidos é possível criar um conjunto impróprio de vinculações mudando uma dimensão do corpo. Em cada um dos problemas a seguir determine o valor de a que resulta em vinculações impróprias: (a) Problema 4.81 e (b) Problema 4.82.

PROBLEMAS PARA UTILIZAÇÃO DO COMPUTADOR

4.C1 Uma haste delgada AB de peso W é presa aos blocos em A e B , os quais podem se movimentar livremente nas guias mostradas na figura. A constante de mola é k , e a mola mostra-se indeformada quando a haste está na horizontal. Desprezando o peso dos blocos, deduza uma equação em termos de θ , W , l e k que deve ser satisfeita quando a haste está em equilíbrio: Sabendo que $W = 45 \text{ N}$ e $l = 100 \text{ cm}$, (a) calcule e plote em um gráfico o valor da constante de mola k como uma função do ângulo θ para $15^\circ \leq \theta \leq 40^\circ$ e (b) determine os dois valores do ângulo θ correspondentes à condição de equilíbrio quando $k = 1,26 \text{ N/cm}$.

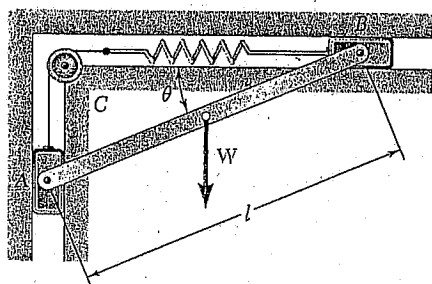


Fig. P4.C1

4.C2 A posição da haste em forma de L mostrada na figura é controlada por um cabo preso ao ponto B . Sabendo que a haste sustenta uma carga de intensidade $P = 200 \text{ N}$, utilize um aplicativo computacional para calcular e plotar em um gráfico a tração T no cabo como uma função de θ para valores de θ de 0 a 120° . Determine a tração máxima $T_{\text{máx}}$ e o valor correspondente de θ .

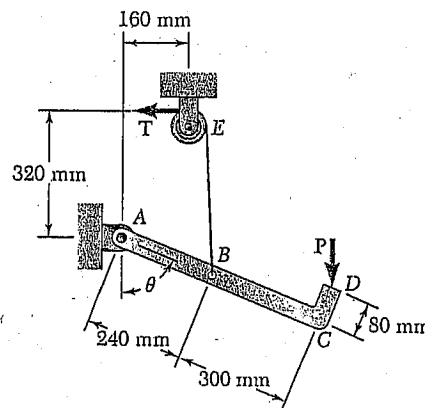


Fig. P4.C2

4.C3 A posição da haste AB de 90 N é controlada pelo bloco mostrado na figura, que é lentamente movimentado para a esquerda pela força P . Desprezando o efeito do atrito, utilize um aplicativo computacional para calcular e plotar em um gráfico a intensidade P da força como uma função de x para valores de x decrescendo de 75 cm a 0 . Determine o valor máximo de P e o valor correspondente de x .

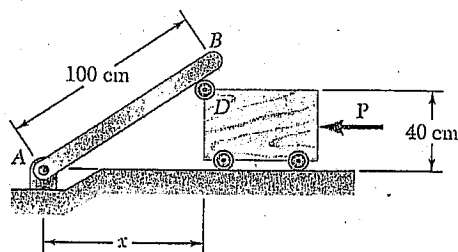


Fig. P4.C3

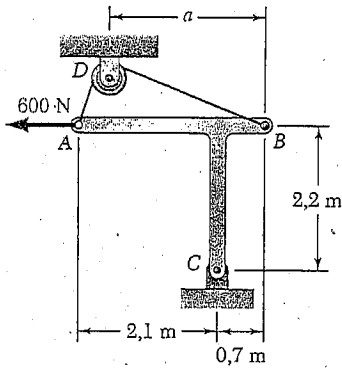


Fig. P4.C4

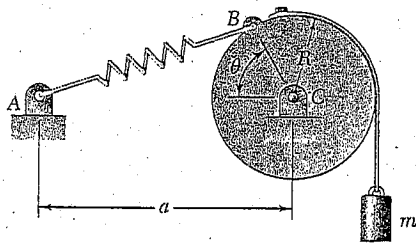


Fig. P4.C5

*4.C4 O elemento ABC é sustentado por um pino e suporte em C e por um cabo inextensível de 3,5 m de comprimento que é preso em A e B e passa por uma polia sem atrito em D. Desprezando a massa de ABC e o raio da polia, (a) plote em um gráfico a tração no cabo como uma função de a para $0 \leq a \leq 2,4$ m e (b) determine o maior valor de a para o qual a condição de equilíbrio possa ser mantida.

4.C5 e 4.C6 A constante da mola AB é k , e a mola mostra-se indeformada quando $\theta = 0$. Sabendo que $R = 200$ mm, $a = 400$ mm e $k = 1$ kN/m, utilize um aplicativo computacional para calcular e plotar em um gráfico a massa m correspondente à condição de equilíbrio como uma função de θ para valores de θ de 0 a 90° . Determine o valor de θ correspondente à condição de equilíbrio quando $m = 2$ kg.

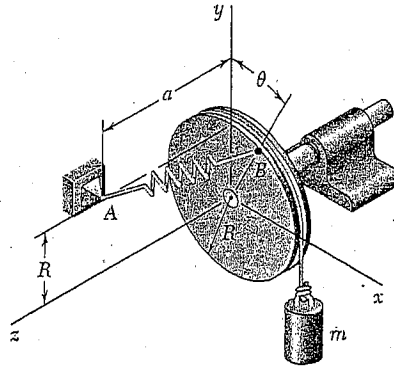


Fig. P4.C6

4.C7 Um painel de 20×25 cm e peso $W = 180$ N é sustentado por dobradiças ao longo da aresta AB. O cabo CDE é preso ao painel no ponto C, passa por uma pequena polia em D e sustenta um cilindro de peso W . Desprezando o efeito do atrito, utilize um aplicativo computacional para calcular e plotar em um gráfico o peso do cilindro correspondente à condição de equilíbrio como uma função de θ para valores de θ de 0 a 90° . Determine o valor de θ correspondente à condição de equilíbrio quando $W = 90$ N.

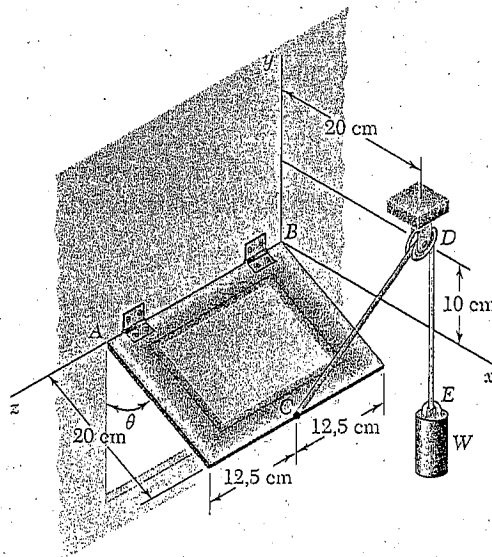


Fig. P4.C7

4.C8 Uma placa circular uniforme de 300 mm de raio e 26 kg de massa é sustentada por três arames verticais que estão igualmente espaçados ao redor de seu contorno. Um pequeno bloco *E* de 3 kg é colocado sobre a placa no ponto *D* e é então lentamente movimentado ao longo do diâmetro *CD* até atingir o ponto *C*. (a) Plote em um gráfico a tração nos arames *A* e *C* como funções de *a*, no qual *a* é a distância do bloco até o ponto *D*. (b) Determine o valor de *a* para o qual a tração nos arames *A* e *C* seja mínima.

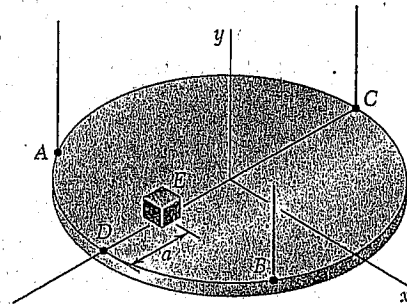


Fig. P4.C8

4.C9 O guindaste mostrado na figura sustenta um caixote de 18.000 N. O guindaste é sustentado por uma rótula em *A* e por dois cabos presos aos pontos *D* e *E*. Sabendo que o guindaste está em um plano vertical formando um ângulo ϕ com o plano *xy*, utilize um aplicativo computacional para calcular e plotar em um gráfico a tração em cada cabo como uma função de ϕ para valores de ϕ de 0 a 40°. Determine o valor de ϕ para o qual a tração no cabo *BE* seja máxima.

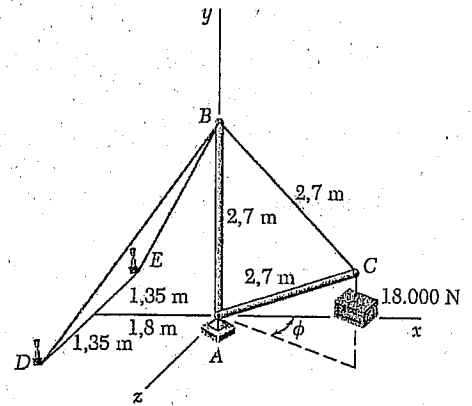


Fig. P4.C9

4.C10 A placa uniforme de aço *ABCD*, de 630 N, está soldada ao eixo *EF* e é mantida na posição mostrada na figura por um binário *M*. Sabendo que colares impedem o eixo de deslizar nos mancais e que o eixo está no plano *yz*, plote em um gráfico a intensidade *M* do binário como uma função de θ para $0 \leq \theta \leq 90^\circ$.

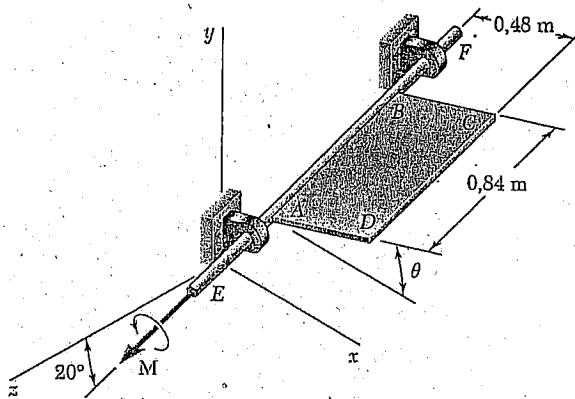
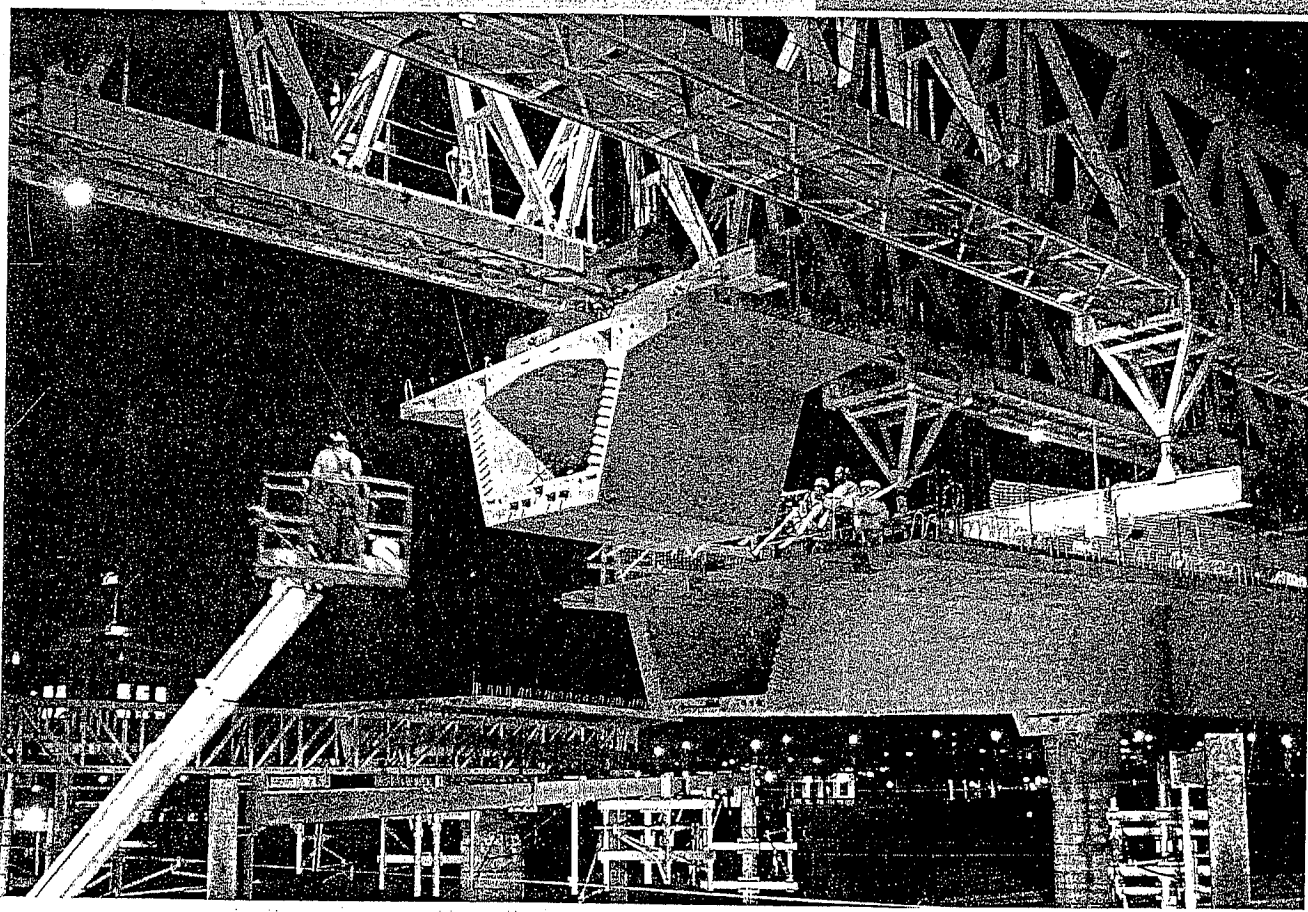


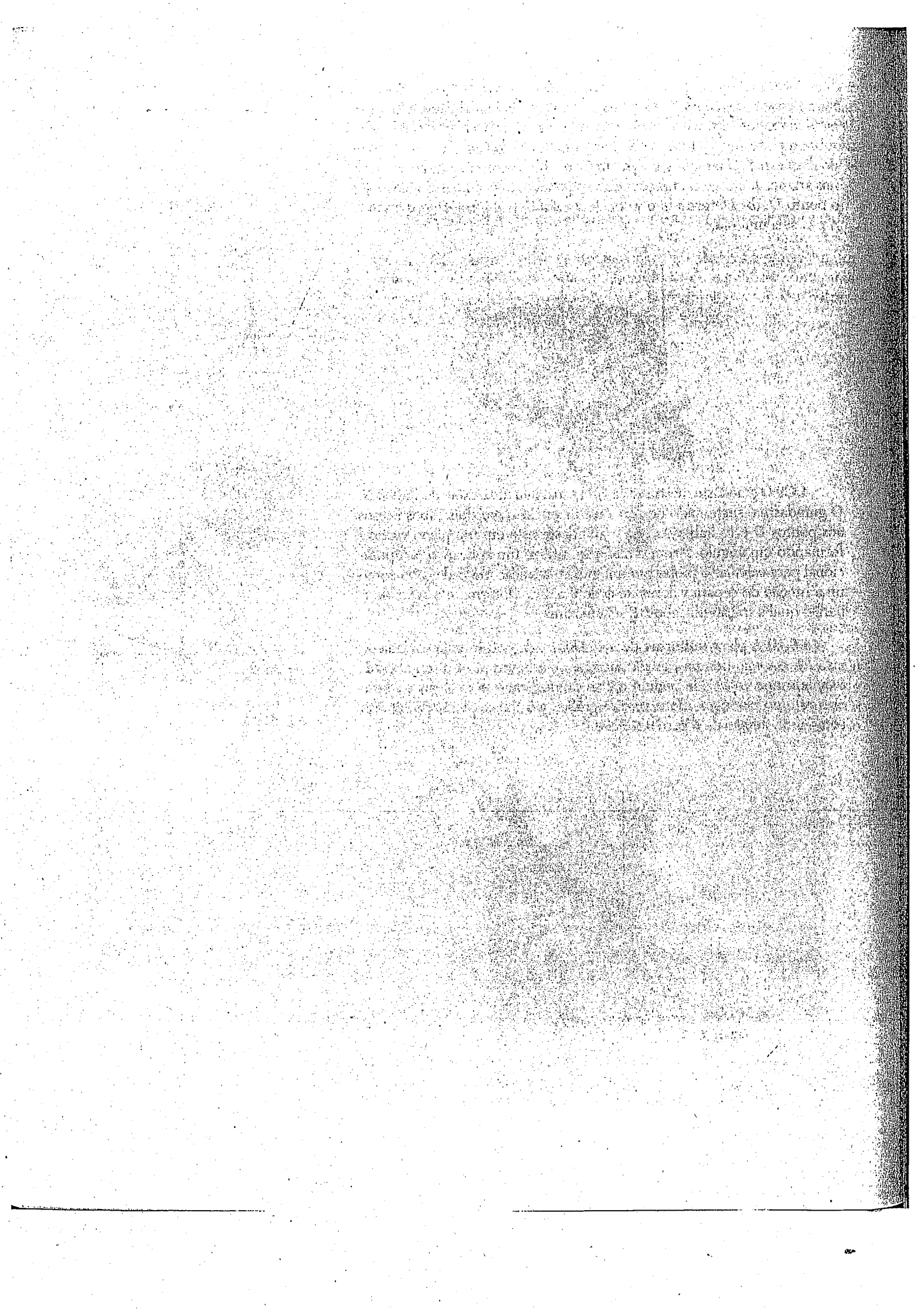
Fig. P4.C10

Forças Distribuídas: Centróides e Centros de Gravidade

5



A foto mostra uma seção premoldada da pista de um novo trevo da rodovia interestadual 93, nos EUA, sendo posicionada por um guindaste de pórtico. Neste capítulo, apresentaremos o conceito de centróide de uma superfície; a relação entre a localização do centróide e o comportamento da pista sob ação de carregamentos serão estabelecidos em cursos subsequentes.



FORÇAS DISTRIBUÍDAS: CENTRÓIDES E CENTROS DE GRAVIDADE

- 5.1 Introdução
- Superfícies e Curvas**
- 5.2 Centro de Gravidade de um Corpo Bidimensional
- 5.3 Centróides de Superfícies e Curvas
- 5.4 Momentos de Primeira Ordem de Superfícies e Curvas
- 5.5 Placas e Fios Compostos
- 5.6 Determinação de Centróides por Integração
- 5.7 Teoremas de Pappus-Guldinus
- 5.8 Cargas Distribuídas sobre Vigas
- 5.9 Forças sobre Superfícies Submersas
- Sólidos**
- 5.10 Centro de Gravidade de um Corpo Tridimensional. Centróide de um Sólido
- 5.11 Corpos Compostos
- 5.12 Determinação de Centróides de Sólidos por Integração

5.1. INTRODUÇÃO

Até aqui, temos considerado que a atração exercida pela Terra sobre um corpo rígido pode ser representada por uma força única W . Essa força, denominada força de gravidade ou peso do corpo, deve ser aplicada no *centro de gravidade* do corpo (Seção 3.2). Na verdade, a Terra exerce uma força sobre cada uma das partículas que constituem o corpo. Logo, a ação da Terra sobre um corpo rígido deve ser representada por um grande número de pequenas forças distribuídas sobre todo o corpo. Todavia, você aprenderá neste capítulo que todas essas pequenas forças podem ser substituídas por uma força única equivalente W . Você também aprenderá a determinar o centro de gravidade, ou seja, o ponto de aplicação da resultante W , para corpos de formas diversas.

Na primeira parte deste capítulo serão considerados os corpos bidimensionais, tais como placas planas e fios contidos em um dado plano. Serão apresentados dois conceitos estreitamente associados à determinação do centro de gravidade de uma placa ou fio: o conceito de *centróide* de uma superfície ou curva e o conceito de *momento de primeira ordem* de uma superfície ou curva em relação a um dado eixo.

Você também aprenderá que o cálculo da área de uma superfície de revolução ou do volume de um sólido de revolução está diretamente relacionado com a determinação do centróide da curva ou da superfície usada para gerar tal superfície ou sólido de revolução (Teoremas de Pappus-Guldinus). E, conforme mostram as Seções 5.8 e 5.9, a determinação do centróide de uma superfície simplifica a análise de vigas sujeitas a cargas distribuídas e o cálculo das forças exercidas sobre superfícies retangulares submersas, tais como comportas hidráulicas e partes de barragens.

Na parte final do capítulo, você aprenderá a determinar o centro de gravidade de um corpo tridimensional assim como o centróide de um sólido e os momentos de primeira ordem desse sólido em relação aos planos coordenados.

SUPERFÍCIES E CURVAS

5.2 CENTRO DE GRAVIDADE DE UM CORPO BIDIMENSIONAL

Vamos considerar inicialmente uma placa plana horizontal (Fig. 5.1). Podemos dividir a placa em n pequenos elementos. As coordena-

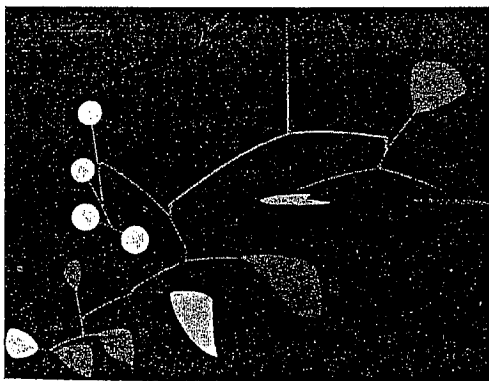
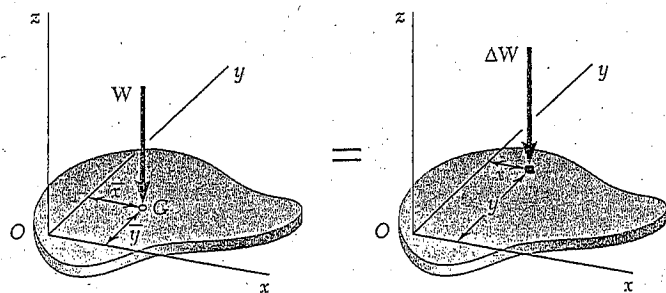


Foto 5.1 O balanceamento preciso dos componentes de um móvel requer certa compreensão sobre centros de gravidade e centróides, os principais tópicos deste capítulo.



$$\Sigma M_y: \bar{x} W = \Sigma x \Delta W$$

$$\Sigma M_x: \bar{y} W = \Sigma y \Delta W$$

Fig. 5.1 Centro de gravidade de uma placa.

das do primeiro elemento são representadas por x_1 e y_1 , as do segundo elemento por x_2 e y_2 etc. As forças exercidas pela Terra sobre os elementos de placa serão representadas por $\Delta W_1, \Delta W_2, \dots, \Delta W_n$, respectivamente. Essas forças, ou pesos, estão dirigidas para o centro da Terra; para fins práticos, porém, elas podem ser tomadas como paralelas. Logo, sua resultante é uma força única com a mesma direção e sentido. A intensidade W dessa força é obtida pela adição das intensidades dos pesos elementares:

$$\Sigma F_z: \quad W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \dots + \Delta W_n$$

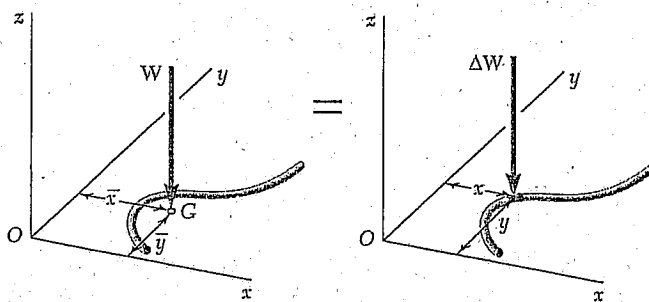
Para obter as coordenadas \bar{x} e \bar{y} do ponto G no qual a resultante W deve ser aplicada, escrevemos que os momentos de W em relação aos eixos x e y são iguais às somas dos momentos correspondentes dos pesos elementares,

$$\begin{aligned} \Sigma M_y: \quad \bar{x}W &= x_1 \Delta W_1 + x_2 \Delta W_2 + \dots + x_n \Delta W_n \\ \Sigma M_x: \quad \bar{y}W &= y_1 \Delta W_1 + y_2 \Delta W_2 + \dots + y_n \Delta W_n \end{aligned} \quad (5.1)$$

Agora, se aumentarmos o número de elementos em que se divide a placa e diminuirmos simultaneamente o tamanho de cada elemento, obtemos no limite as seguintes expressões:

$$W = \int dW \quad \bar{x}W = \int x dW \quad \bar{y}W = \int y dW \quad (5.2)$$

Essas equações definem o peso W e as coordenadas \bar{x} e \bar{y} do centro de gravidade G de uma placa plana. As mesmas equações podem ser deduzidas para um fio contido no plano xy (Fig. 5.2). Observamos que, em geral, o centro de gravidade G de um fio não está localizado sobre o fio.



$$\begin{aligned} \Sigma M_y: \quad \bar{x}W &= \Sigma x \Delta W \\ \Sigma M_x: \quad \bar{y}W &= \Sigma y \Delta W \end{aligned}$$

Fig. 5.2 Centro de gravidade de um fio.

5.3 CENTRÓIDES DE SUPERFÍCIES E CURVAS

No caso de uma placa plana homogênea de espessura uniforme, a intensidade ΔW do peso de um elemento da placa pode ser expressa como

$$\Delta W = \gamma t \Delta A$$

sendo γ = peso específico (peso por unidade de volume) do material

t = espessura da placa

ΔA = área do elemento

Analogamente, podemos exprimir a intensidade W do peso de toda a placa como

$$W = \gamma t A$$

sendo A é a área total da placa.

Nas unidades do SI, γ deve ser expresso em N/m^3 , t em metros e as áreas ΔA e A em metros quadrados; desse modo, os pesos ΔW e W ficarão expressos em newtons.¹

Substituindo ΔW e W nas equações de momentos (5.1) e dividindo todos os termos por γt , obtemos

$$\begin{aligned} \sum M_y : \bar{x}A &= x_1 \Delta A_1 + x_2 \Delta A_2 + \dots + x_n \Delta A_n \\ \sum M_x : \bar{y}A &= y_1 \Delta A_1 + y_2 \Delta A_2 + \dots + y_n \Delta A_n \end{aligned}$$

Se aumentarmos o número de elementos em que se divide a superfície de área A e diminuirmos simultaneamente o tamanho de cada elemento, obteremos no limite

$$\bar{x}A = \int x dA \quad \bar{y}A = \int y dA \quad (5.3)$$

Essas equações definem as coordenadas \bar{x} e \bar{y} do centro de gravidade de uma placa homogênea. O ponto de coordenadas \bar{x} e \bar{y} também é conhecido como o *centróide C da superfície A* da placa (Fig. 5.3). Se a placa não é homogênea, essas equações não podem ser usadas para se determinar o centro de gravidade da placa; todavia, elas ainda definem o centróide da superfície.

No caso de um fio homogêneo de seção transversal uniforme, a intensidade ΔW do peso de um elemento do fio pode ser expressa por

$$\Delta W = \gamma a \Delta L$$

sendo γ = peso específico do material

a = área da seção transversal do fio

ΔL = comprimento do elemento

¹ Deve-se observar que, no Sistema Internacional (SI) de unidades, geralmente se caracteriza um material pela sua massa específica ρ (massa por unidade de volume) em vez do peso específico γ . O peso específico do material pode então ser obtido da relação

$$\gamma = \rho g$$

na qual $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Uma vez que ρ é expresso em kg/m^3 , observamos que γ ficará expresso em $(\text{kg/m}^3)(\text{m/s}^2)$, ou seja, em N/m^3 .

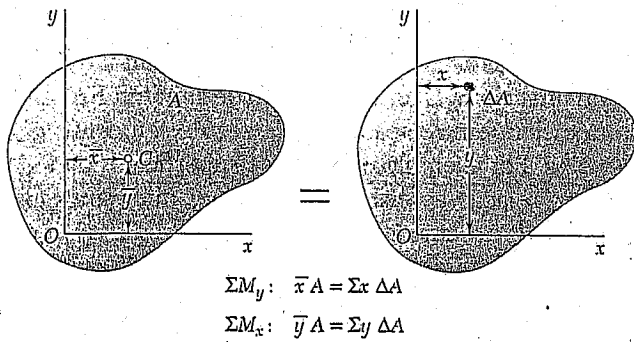


Fig. 5.3 Centróide de uma superfície.

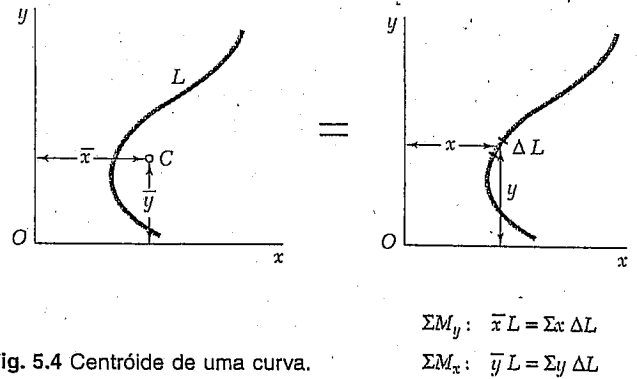


Fig. 5.4 Centróide de uma curva.

O centro de gravidade do fio coincide então com o *centróide C da curva L* que define o formato do fio (Fig. 5.4). As coordenadas \bar{x} e \bar{y} do centróide da curva L são obtidas das equações

$$\bar{x}L = \int x dL \quad \bar{y}L = \int y dL \quad (5.4)$$

5.4 MOMENTOS DE PRIMEIRA ORDEM DE SUPERFÍCIES E CURVAS

A integral $\int x dA$ nas Eqs. (5.3) da seção precedente é conhecida como o *momento de primeira ordem da superfície A em relação ao eixo y*, sendo representada por Q_y . Analogamente, a integral $\int y dA$ define o *momento de primeira ordem da superfície A em relação ao eixo x*, sendo representada por Q_x . Escrevemos

$$Q_y = \int x dA \quad Q_x = \int y dA \quad (5.5)$$

Comparando as Eqs. (5.3) com as Eqs. (5.5), notamos que os momentos de primeira ordem da superfície A podem ser expressos pelos produtos da área da superfície pelas coordenadas de seu centróide:

$$Q_y = \bar{x}A \quad Q_x = \bar{y}A \quad (5.6)$$

Resulta das Eqs. (5.6) que as coordenadas do centróide de uma superfície podem ser obtidas dividindo-se os momentos de primeira ordem pela própria área da superfície. Os momentos de primeira ordem da superfície também são úteis em mecânica dos materiais na determinação de tensões de cisalhamento em vigas sob ação de carregamentos transversais. Finalmente, observamos nas Eqs. (5.6) que, se o centróide de uma superfície estiver localizado sobre um eixo de coordenadas, o momento de primeira ordem da superfície em relação a esse eixo será nulo. Inversamente, se o momento de primeira ordem de uma superfície em relação a um eixo de coordenadas for nulo, o centróide da superfície estará localizado sobre esse eixo.

Relações semelhantes às Eqs. (5.5) e (5.6) podem ser usadas para se definirem os momentos de primeira ordem de uma curva em relação aos eixos de coordenadas e para se expressarem esses momentos como produtos do comprimento L da curva e das coordenadas \bar{x} e \bar{y} de seu centróide.

Diz-se que uma superfície A é *simétrica em relação a um eixo BB'* se para cada ponto P da superfície existir um ponto P' da mesma superfície tal que a linha PP' seja perpendicular a BB' e fique dividida em duas partes iguais por esse eixo (Fig. 5.5a). Diz-se que uma curva L é simétrica em relação a um eixo BB' se satisfizer condições semelhantes. Quando uma superfície A ou uma curva L possui um eixo de simetria BB' , seu momento de primeira ordem em relação a BB' é zero e seu centróide localiza-se sobre esse eixo. Por exemplo, no caso da superfície A da Fig. 5.5b, que é simétrica em relação ao eixo y , observamos que para cada elemento de superfície dA de abscissa x existe um elemento dA' de igual área e com abscissa $-x$. Resulta que a integral na primeira das Eqs. (5.5) é zero e, portanto, que $Q_y = 0$. Da primeira das relações (5.3) resulta também que $\bar{x} = 0$. Logo, se uma superfície A ou uma curva L tiver um eixo de simetria, seu centróide C fica localizado sobre esse eixo.

Observemos ainda que, se uma superfície ou curva tiver dois eixos de simetria, seu centróide C deverá se localizar na interseção dos dois eixos (Fig. 5.6). Essa propriedade permite-nos determinar imediatamente o centróide de superfícies tais como círculos, elipses, quadrados, retângulos, triângulos equiláteros ou outras figuras simétricas, bem como o centróide de curvas com a forma da circunferência de um círculo, do perímetro de um quadrado etc.

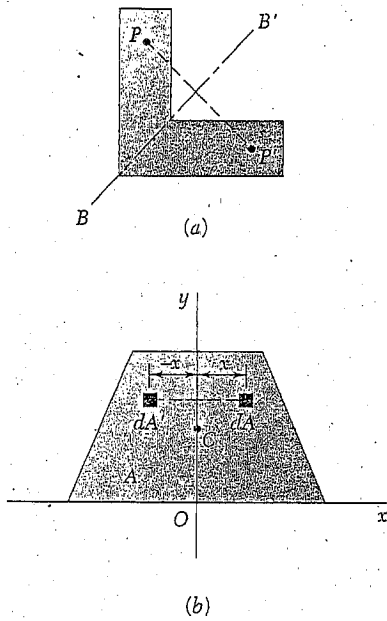


Fig. 5.5

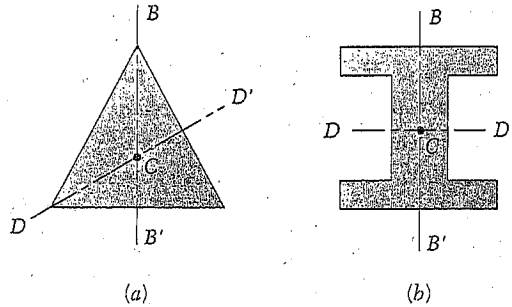


Fig. 5.6

Diz-se que uma superfície é *simétrica em relação a um centro O* se, para cada elemento de superfície dA de coordenadas x e y , existir um elemento dA' de igual área com coordenadas $-x$ e $-y$ (Fig. 5.7). Resulta então que as integrais nas Eqs. (5.5) são ambas nulas e que $Q_x = Q_y = 0$. Das Eqs. (5.3), resulta também que $\bar{x} = \bar{y} = 0$, ou seja, o centróide da superfície coincide com seu centro de simetria O . Analogamente, se uma curva tem um centro de simetria O , o centróide da curva coincide com o centro O .

Deve-se observar que uma figura que apresente um centro de simetria não necessariamente apresenta um eixo de simetria (Fig. 5.7), ao passo que uma figura que apresenta dois eixos de simetria não necessariamente apresenta um centro de simetria (Fig. 5.6a). Porém, se uma figura apresenta dois eixos de simetria formando ângulo reto entre si, o ponto de intersecção desses eixos é um centro de simetria (Fig. 5.6b).

A determinação de centróides de superfícies e curvas assimétricas ou com um único eixo de simetria será discutida nas Seções 5.6 e 5.7. Nas Figs. 5.8A e B, estão mostrados centróides de superfícies e curvas de formas usuais.

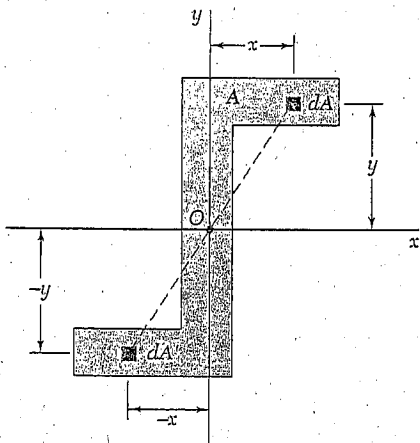


Fig. 5.7

Formato		\bar{x}	\bar{y}	Superfície
Superfície triangular			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Superfície de um quarto de círculo		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Superfície semicircular		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Superfície de um quarto de elipse		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Superfície semi-elíptica		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Superfície semiparabólica		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Superfície parabólica		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Superfície sob um arco parabólico		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Superfície sob um arco exponencial qualquer		$\frac{n+1}{n+2} a$	$\frac{n+1}{4n+2} h$	$\frac{ah}{n+1}$
Setor circular		$\frac{2r \text{ sen } \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

Fig. 5.8A Centróides de superfícies planas de formatos usuais.

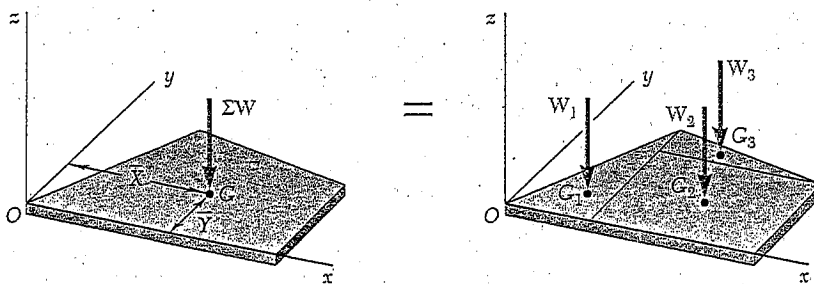
Formato		\bar{x}	\bar{y}	Comprimento
Arco de um quarto de círculo		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Arco semicircular		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arco de círculo		$\frac{r \text{ sen } \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

Fig. 5.8B Centrôides de curvas planas de formatos usuais.

5.5 PLACAS E FIOS COMPOSTOS

Em muitas situações, uma placa plana pode ser dividida em retângulos, triângulos ou outras formas usuais mostradas na Fig. 5.8A. Pode-se determinar a abscissa \bar{X} do seu centro de gravidade G a partir das abscissas $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ dos centros de gravidade das diversas partes, escrevendo-se que o momento do peso de toda placa em relação ao eixo y é igual à soma dos momentos dos pesos das diversas partes em relação ao mesmo eixo (Fig. 5.9). A ordenada \bar{Y} do centro de gravidade da placa é determinada de modo semelhante, igualando-se momentos em relação ao eixo x . Escrevemos

$$\begin{aligned} \sum M_y &= \bar{X} (W_1 + W_2 + \dots + W_n) = \bar{x}_1 W_1 + \bar{x}_2 W_2 + \dots + \bar{x}_n W_n \\ \sum M_x &= \bar{Y} (W_1 + W_2 + \dots + W_n) = \bar{y}_1 W_1 + \bar{y}_2 W_2 + \dots + \bar{y}_n W_n \end{aligned}$$



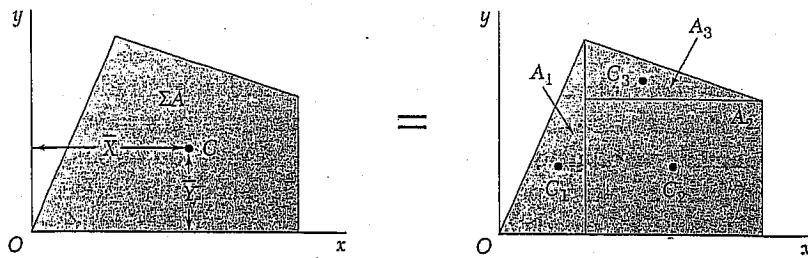
$$\begin{aligned} \sum M_y: \quad \bar{X} \Sigma W &= \Sigma \bar{x} W \\ \sum M_x: \quad \bar{Y} \Sigma W &= \Sigma \bar{y} W \end{aligned}$$

Fig. 5.9 Centro de gravidade de uma placa composta.

ou então, de maneira compacta,

$$\bar{X} \Sigma W = \Sigma \bar{x} W \quad \bar{Y} \Sigma W = \Sigma \bar{y} W \quad (5.7)$$

Essas equações podem ser resolvidas para as coordenadas \bar{X} e \bar{Y} do centro de gravidade da placa.



$$Q_y = \bar{X} \Sigma A = \Sigma \bar{x} A$$

$$Q_x = \bar{Y} \Sigma A = \Sigma \bar{y} A$$

Fig. 5.10 Centróide de uma superfície composta.

Se a placa é homogênea e de espessura uniforme, o centro de gravidade coincide com o centróide C da sua superfície. A abscissa \bar{X} do centróide da superfície pode ser determinada observando-se que o momento de primeira ordem Q_y da superfície composta com relação ao eixo y pode ser expresso tanto como o produto de \bar{X} pela área total quanto como a soma dos momentos de primeira ordem das superfícies elementares em relação ao eixo y (Fig. 5.10). A ordenada \bar{Y} do centróide é determinada de modo semelhante, considerando-se o momento de primeira ordem Q_x da superfície composta. Temos

$$Q_y = \bar{X} (A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2 + \dots + \bar{x}_n A_n$$

$$Q_x = \bar{Y} (A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 + \dots + \bar{y}_n A_n$$

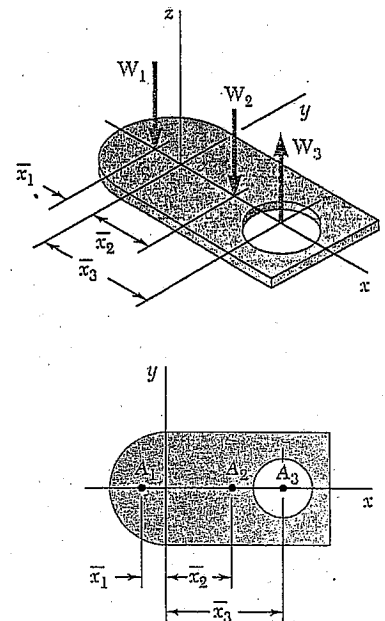
ou então, de maneira compacta,

$$Q_y = \bar{X} \Sigma A = \Sigma \bar{x} A \quad Q_x = \bar{Y} \Sigma A = \Sigma \bar{y} A \quad (5.8)$$

Essas equações fornecem os momentos de primeira ordem da superfície composta ou podem ser usadas para se obterem as coordenadas \bar{X} e \bar{Y} do seu centróide.

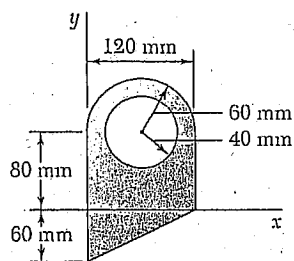
É preciso ter cuidado para se atribuir o sinal correto ao momento de cada superfície. Os momentos de primeira ordem de superfícies, assim como os momentos de forças, podem ser positivos ou negativos. Por exemplo, uma superfície cujo centróide localiza-se à esquerda do eixo y terá um momento de primeira ordem negativo em relação a esse eixo. Além disso, deve-se atribuir um sinal negativo à área de uma superfície vazia (buraco) (Fig. 5.11).

De modo análogo, em muitos casos é possível determinar o centro de gravidade de um fio composto ou o centróide de uma curva composta dividindo-se o fio ou a curva em elementos mais simples (ver o Problema Resolvido 5.2).



	\bar{x}	A	$\bar{x}A$
A ₁ Semicírculo	-	+	-
A ₂ Retângulo cheio	+	+	+
A ₃ Buraco circular	+	-	-

Fig. 5.11

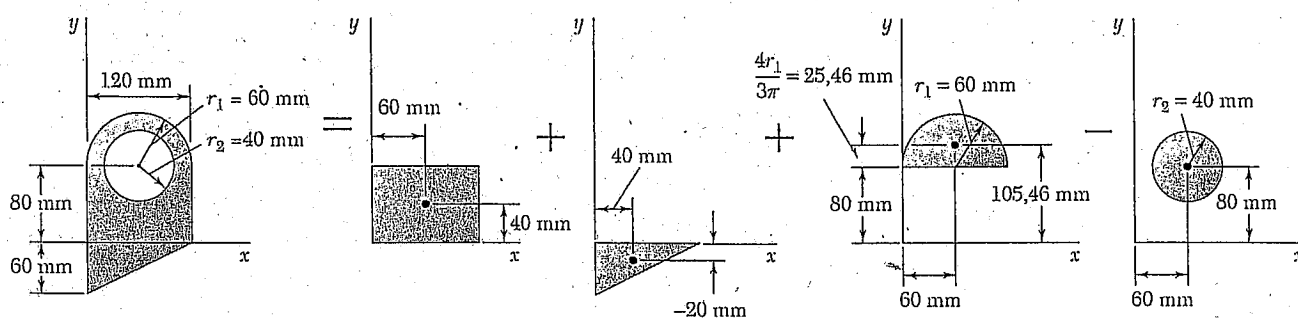


PROBLEMA RESOLVIDO 5.1

Para a superfície plana mostrada, determine (a) os momentos de primeira ordem em relação aos eixos x e y e (b) a localização do centróide.

SOLUÇÃO

Componentes de superfície. A superfície é formada pela adição de um retângulo, um triângulo e um semicírculo e pela subtração de um círculo. Utilizando-se os eixos de coordenadas mostrados, a área e as coordenadas do centróide de cada componente da superfície são determinadas e tabuladas na tabela adiante. A área do círculo é indicada como negativa, pois deve ser subtraída das demais áreas. Notemos que a coordenada \bar{y} do centróide do triângulo é negativa para os eixos mostrados. Os momentos de primeira ordem das superfícies componentes em relação aos eixos de coordenadas estão calculados e tabulados na tabela.



Componente	A, mm^2	\bar{x}, mm	\bar{y}, mm	$\bar{x}A, \text{mm}^3$	$\bar{y}A, \text{mm}^3$
Retângulo	$(120)(80) = 9,6 \times 10^3$	60	40	$+576 \times 10^3$	$+384 \times 10^3$
Triângulo	$\frac{1}{2}(120)(80) = 3,6 \times 10^3$	40	-20	$+144 \times 10^3$	-72×10^3
Semicírculo	$\frac{1}{2}\pi(60)^2 = 5,655 \times 10^3$	60	105,46	$+339,3 \times 10^3$	$+596,4 \times 10^3$
Círculo	$-\pi(40)^2 = -5,027 \times 10^3$	60	80	$-301,6 \times 10^3$	$-402,2 \times 10^3$
	$\Sigma A = 13,828 \times 10^3$			$\Sigma \bar{x}A = +757,7 \times 10^3$	$\Sigma \bar{y}A = +506,2 \times 10^3$

a. Momentos de primeira ordem da superfície. Usando as Eqs. (5.8), escrevemos

$$Q_x = \Sigma \bar{y}A = 506,2 \times 10^3 \text{ mm}^3 \quad Q_x = 506 \times 10^3 \text{ mm}^3 \leftarrow$$

$$Q_y = \Sigma \bar{x}A = 757,7 \times 10^3 \text{ mm}^3 \quad Q_y = 758 \times 10^3 \text{ mm}^3 \leftarrow$$

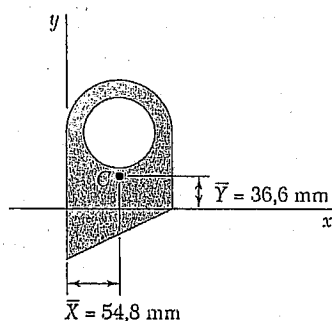
b. Localização do centróide. Substituindo os valores dados na tabela nas equações de definição do centróide de uma superfície composta, obtemos

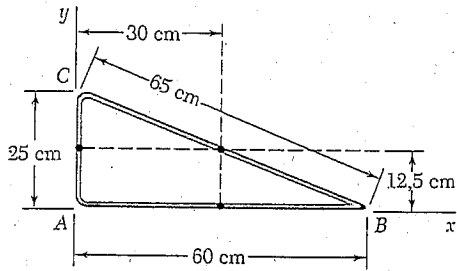
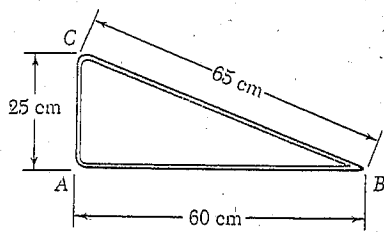
$$\bar{X} \Sigma A = \Sigma \bar{x}A: \quad \bar{X} (13,828 \times 10^3 \text{ mm}^2) = 757,7 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\bar{X} = 54,8 \text{ mm} \leftarrow$$

$$\bar{Y} \Sigma A = \Sigma \bar{y}A: \quad \bar{Y} (13,828 \times 10^3 \text{ mm}^2) = 506,2 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\bar{Y} = 36,6 \text{ mm} \leftarrow$$





PROBLEMA RESOLVIDO 5.2

A figura mostrada é feita de um pedaço de arame fino e homogêneo. Determine a localização do centro de gravidade.

SOLUÇÃO

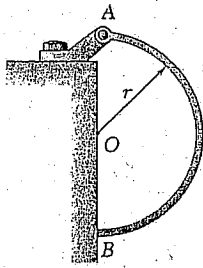
Como a figura é formada por um arame homogêneo, seu centro de gravidade coincide com o centróide da curva correspondente. Logo, esse centróide será determinado. Escolhendo os eixos de coordenadas mostrados, com origem em A, determinamos as coordenadas do centróide de cada segmento de reta e calculamos os momentos de primeira ordem em relação aos eixos de coordenadas.

Segmento	L, cm	\bar{x} , cm	\bar{y} , cm	$\bar{x}L$, cm ²	$\bar{y}L$, cm ²
AB	60	30	0	1.800	0
BC	65	30	12,5	1.950	812,5
CA	25	0	12,5	0	312,5
	$\Sigma L = 150$			$\Sigma \bar{x}L = 3.750$	$\Sigma \bar{y}L = 1.125$

Substituindo os valores obtidos da tabela nas equações de definição do centróide de uma curva composta, obtemos

$$\bar{X} \Sigma L = \Sigma \bar{x}L: \quad \bar{X} (150 \text{ cm}) = 3.750 \text{ cm}^2 \quad \bar{X} = 25 \text{ cm} \quad \blacktriangleleft$$

$$\bar{Y} \Sigma L = \Sigma \bar{y}L: \quad \bar{Y} (150 \text{ cm}) = 1.125 \text{ cm}^2 \quad \bar{Y} = 7,5 \text{ cm} \quad \blacktriangleleft$$



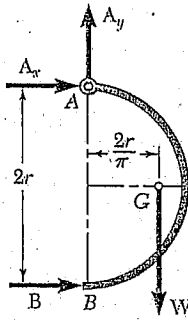
PROBLEMA RESOLVIDO 5.3

Uma barra semicircular uniforme de peso W e raio r é ligada a um pino em A e repousa sobre uma superfície sem atrito em B . Determine as reações em A e B .

SOLUÇÃO

Diagrama de corpo livre. Um diagrama de corpo livre da barra é mostrado na figura. As forças que atuam sobre a barra são o peso próprio W , aplicado no centro de gravidade G (cuja posição é obtida da Fig. 5.8B); uma reação em A , representada pelos seus componentes A_x e A_y ; e uma reação horizontal em B .

Equações de equilíbrio



$$+\curvearrowright \sum M_A = 0: \quad B(2r) - W \left(\frac{2r}{\pi} \right) = 0$$

$$B = + \frac{W}{\pi}$$

$$B = \frac{W}{\pi} \rightarrow \blacktriangleleft$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0: \quad A_x + B = 0$$

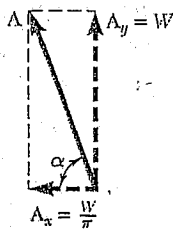
$$A_x = -B = -\frac{W}{\pi}$$

$$A_x = \frac{W}{\pi} \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0: \quad A_y - W = 0$$

$$A_y = W \uparrow$$

Calculando a resultante dos dois componentes da reação em A :



$$A = \left[W^2 + \left(\frac{W}{\pi} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$A = W \left(1 + \frac{1}{\pi^2} \right)^{1/2} \blacktriangleleft$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{W}{W/\pi} = \pi$$

$$\alpha = \operatorname{tg}^{-1} \pi \blacktriangleleft$$

As respostas também podem ser escritas da seguinte maneira:

$$A = 1,049 W \searrow 72,3^\circ \quad B = 0,318 W \rightarrow \blacktriangleleft$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, desenvolvemos as equações gerais para a determinação dos centros de gravidade de corpos e fios bidimensionais [Eqs. (5.2)] e dos centróides de superfícies planas [Eqs. (5.3)] e curvas planas [Eqs. (5.4)]. Nos problemas a seguir, você deverá determinar os centróides de superfícies e curvas compostas e determinar os momentos de primeira ordem da superfície de placas compostas [Eqs. (5.8)].

1. Determinação dos centróides de superfícies e curvas compostas. Os Problemas Resolvidos 5.1 e 5.2 ilustram o procedimento que você deve seguir para resolver problemas desse tipo. Todavia, há vários pontos que devem ser ressaltados.

a. O primeiro passo em sua solução deve ser decidir como construir a superfície ou curva dada a partir das formas usuais da Fig. 5.8. Você deve considerar que, para superfícies planas, frequentemente é possível construir uma determinada forma de mais de um modo. Além disso, a indicação dos vários componentes (como foi feito no Problema Resolvido 5.1) irá auxiliá-lo a estabelecer corretamente seus centróides e áreas ou comprimentos. Não se esqueça de que você pode tanto adicionar quanto subtrair superfícies para obter a forma desejada.

b. Recomendamos enfaticamente que, para cada problema, você construa uma tabela contendo as áreas ou comprimentos e as respectivas coordenadas dos centróides. É essencial que você se lembre de que as áreas das superfícies "removidas" (por exemplo, buracos) sejam tratadas como negativas. Além disso, é necessário incluir o sinal das coordenadas negativas. Portanto, você deve sempre indicar cuidadosamente o local de origem do sistema de coordenadas.

c. Sempre que possível, use propriedades de simetria [Seção 5.4] para ajudá-lo na determinação de um centróide.

d. Nas fórmulas para um setor circular e para o arco de um círculo na Fig. 5.8, o ângulo α deve sempre ser expresso em radianos.

2. Cálculo dos momentos de primeira ordem de uma superfície. Os procedimentos para se determinar o centróide de uma superfície e para se determinarem os momentos de primeira ordem de uma superfície são semelhantes; para o último, porém, não é necessário calcular a área total. Além disso, conforme observamos na Seção 5.4, você deve considerar que o momento de primeira ordem de uma superfície em relação a um eixo que passa pelo centróide é nulo.

3. Resolução de problemas que envolvam o centro de gravidade. Os corpos considerados nos problemas a seguir são homogêneos; logo, seus centros de gravidade e seus centróides coincidem. Além disso, quando um corpo suspenso por um único pino está em equilíbrio, o pino e o centro de gravidade do corpo devem situar-se sobre a mesma linha vertical.

Pode parecer que muitos dos problemas desta seção têm pouco a ver com o estudo de mecânica. No entanto, a capacidade de determinar o centróide de formas compostas será essencial em vários tópicos que você encontrará mais adiante.

PROBLEMAS

5.1 a 5.8 Determine o centróide das superfícies planas mostradas.

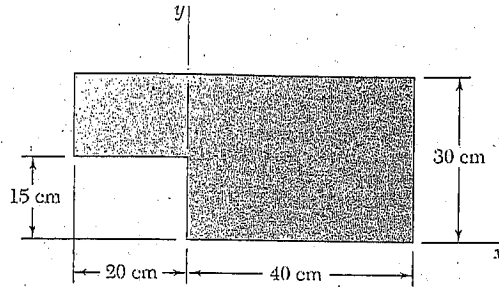


Fig. P5.1

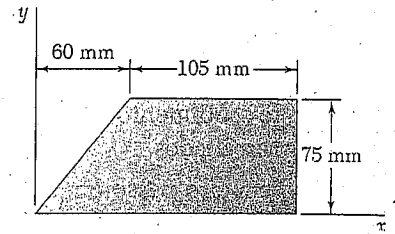


Fig. P5.2

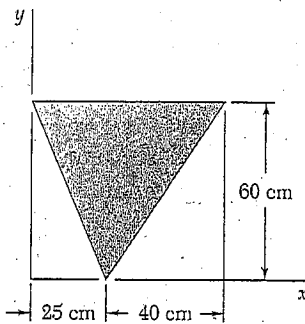


Fig. P5.3

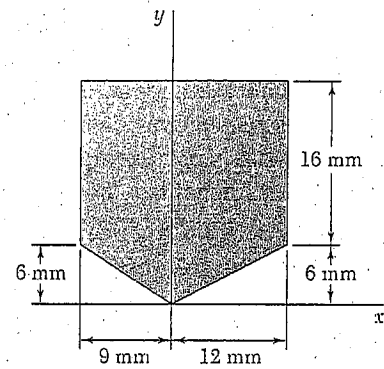


Fig. P5.4

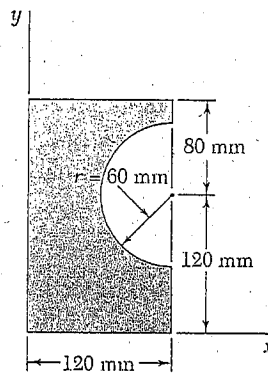


Fig. P5.5

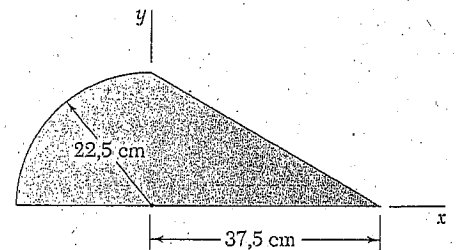


Fig. P5.6

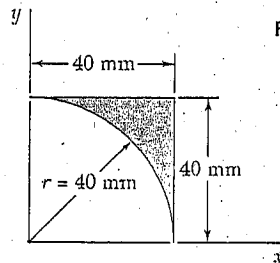


Fig. P5.7

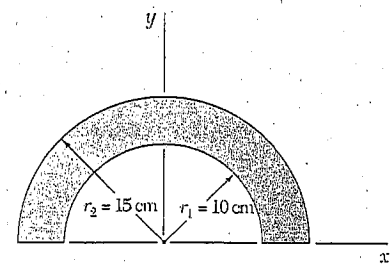


Fig. P5.8

5.9 Para a superfície do Problema 5.8, determine a razão r_2/r_1 tal que $\bar{y} = 3r_1/4$.

5.10 Mostre que, à medida que r_1 se aproxima de r_2 , a localização do centróide aproxima-se da localização do centróide de um arco circular de raio $(r_1 + r_2)/2$.

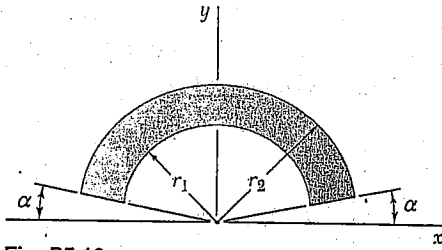


Fig. P5.10

5.11 a 5.16 Determine o centróide das superfícies planas mostradas.

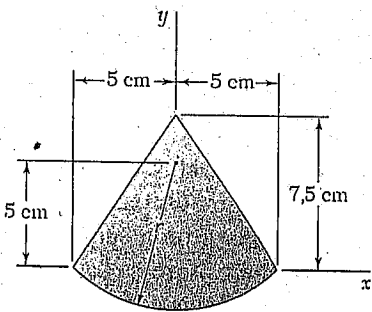


Fig. P5.11

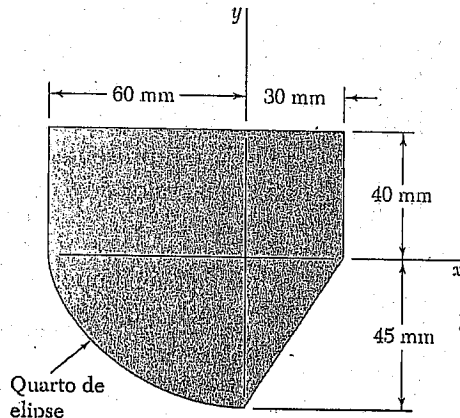


Fig. P5.12

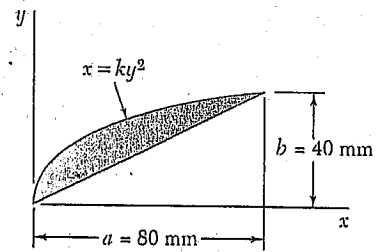


Fig. P5.13

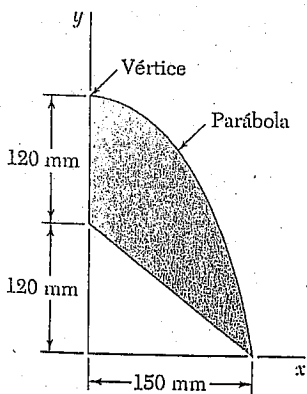


Fig. P5.14

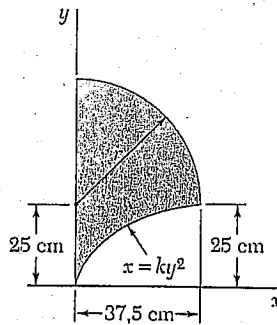


Fig. P5.15

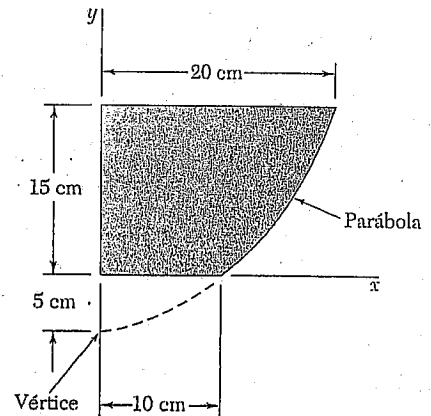


Fig. P5.16

5.17 e 5.18 O eixo x horizontal passa pelo centróide C da superfície mostrada na figura e divide a superfície em dois componentes A_1 e A_2 . Determine o momento de primeira ordem de cada componente de superfície em relação ao eixo x e explique os resultados obtidos.

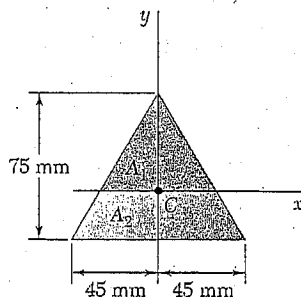


Fig. P5.17

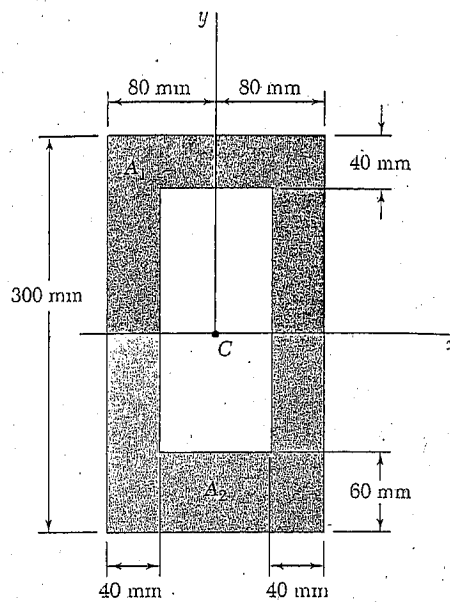


Fig. P5.18

5.19 O momento de primeira ordem da superfície sombreada em relação ao eixo x é representado por Q_x . (a) Expresse Q_x em termos de r e θ . (b) Para qual valor de θ o valor de Q_x é máximo e qual é esse valor máximo?

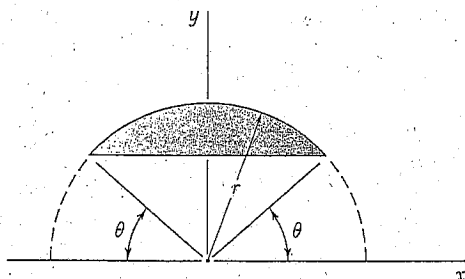


Fig. P5.19

5.20 Uma viga é composta de quatro placas aparafusadas a quatro cantoneiras de $5 \times 5 \times 0,938$ cm, como mostra a figura. Os parafusos são igualmente espaçados ao longo da viga, que sustenta uma carga vertical. Em mecânica dos materiais, demonstra-se que as forças cisalhantes exercidas sobre os parafusos em A e B são proporcionais aos momentos de primeira ordem em relação ao eixo centroidal x das partes hachuradas mostradas nas partes a e b da figura, respectivamente. Sabendo que a força exercida sobre o parafuso em A é de 315 N, determine a força exercida sobre o parafuso em B .

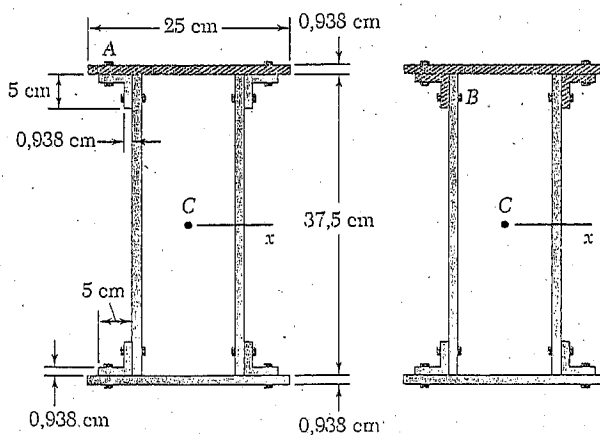


Fig. P5.20

(a)

(b)

5.21 a 5.24 Um arame homogêneo e fino é dobrado de modo a formar o perímetro da figura indicada. Determine o centro de gravidade da figura de arame assim formada.

5.21 Fig. P5.1.

5.22 Fig. P5.2.

5.23 Fig. P5.4.

5.24 Fig. P5.8.

5.25 Uma barra de aço uniforme de 750 g é dobrada em forma de um arco de círculo de 500 mm de raio, tal como mostra a figura. A barra é apoiada por um pino em A e pela corda BC. Determine (a) a tração na corda e (b) a reação em A.

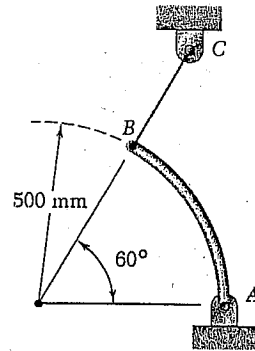


Fig. P5.25

5.26 O arame homogêneo ABCD é dobrado do modo mostrado na figura e é apoiado por um pino em B. Sabendo-se que $l = 20$ cm, determine o ângulo θ para o qual a porção BC do arame fica na horizontal.

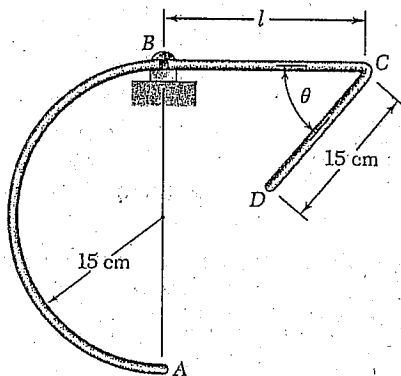


Fig. P5.26 e P5.27

5.27 O arame homogêneo ABCD é dobrado do modo mostrado na figura e é apoiado por um pino em B. Sabendo que $\theta = 30^\circ$, determine o comprimento l para o qual a porção CD do arame fica na horizontal.

5.28 O arame homogêneo ABCD é dobrado do modo mostrado na figura e é ligado a uma articulação em C. Determine o comprimento L para o qual a porção BCD do arame fica na horizontal.

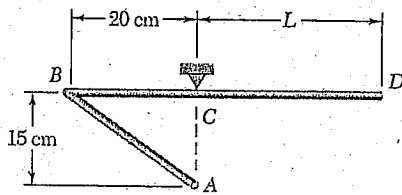


Fig. P5.28

5.29 Determine a distância h de modo que o centróide da superfície sombreada fique o mais próximo possível da linha BB' quando (a) $k = 0,2$ e (b) $k = 0,6$.

5.30 Mostre que, quando a distância h é escolhida para reduzir a distância \bar{y} que vai da linha BB' ao centróide da superfície sombreada, então $\bar{y} = h$.

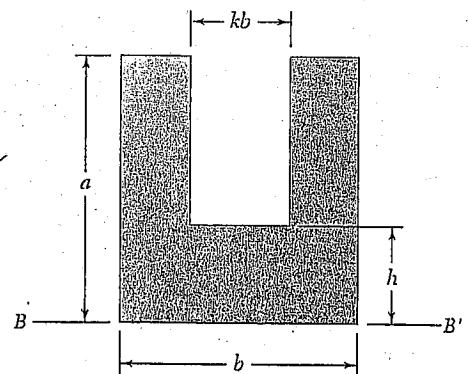


Fig. P5.29 e P5.30

5.6 DETERMINAÇÃO DE CENTRÓIDES POR INTEGRAÇÃO

Geralmente, o centróide de uma superfície limitada por curvas analíticas (isto é, curvas definidas por equações algébricas) é determinado pelo cálculo das integrais nas Eqs. (5.3) da Seção 5.3:

$$\bar{x}A = \int x \, dA \quad \bar{y}A = \int y \, dA \quad (5.3)$$

Se o elemento de área dA é um pequeno retângulo de lados dx e dy , o cálculo de cada uma dessas integrais requer uma *integração dupla* em relação a x e y . Também será necessária uma integração dupla ao se usarem coordenadas polares nas quais dA é um pequeno elemento de lados dr e $r \, d\theta$.

Entretanto, em muitos casos é possível determinar as coordenadas do centróide de uma superfície efetuando uma integração simples. Consegue-se isso escolhendo dA como sendo um retângulo estreito (uma tira) ou um setor estreito (elemento em forma de fatia de bolo) (Fig. 5.12A); o centróide do retângulo estreito é localizado em seu centro e o centróide do setor estreito é localizado a uma distância $\frac{2}{3}r$ do vértice (como se fosse um triângulo). As coordenadas do centróide da superfície sob consideração são obtidas escrevendo-se que o momento de primeira ordem de toda superfície em relação a cada um dos eixos de coordenadas é igual à soma (ou integral) dos correspondentes momentos dos elementos de superfície. Representando por \bar{x}_{el} e \bar{y}_{el} as coordenadas do centróide do elemento dA , escrevemos

$$\begin{aligned} Q_y &= \bar{x}A = \int \bar{x}_{el} \, dA \\ Q_x &= \bar{y}A = \int \bar{y}_{el} \, dA \end{aligned} \quad (5.9)$$

Se a área A não for ainda conhecida, também poderá ser calculada com esses elementos.

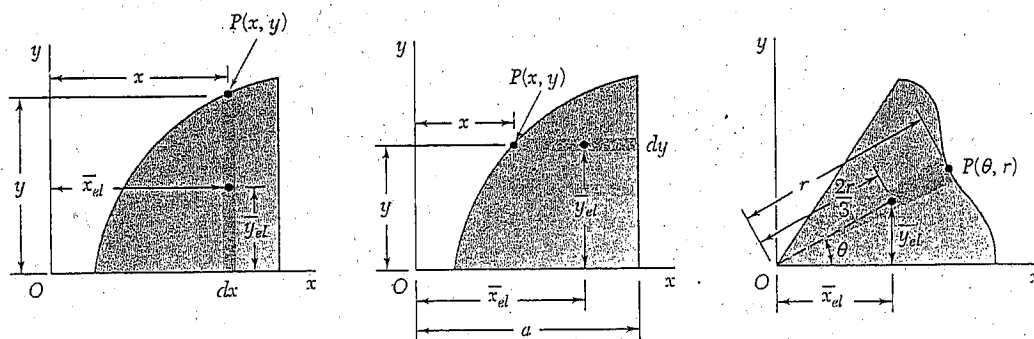


Fig. 5.12A Centróides e áreas de elementos diferenciais.

As coordenadas \bar{x}_{el} e \bar{y}_{el} do centróide do elemento de área dA devem ser expressas em termos das coordenadas de um ponto localizado sobre a curva que limita a superfície sob consideração. Além disso, a área dA do elemento deve ser expressa em termos das coordenadas desse ponto e dos diferenciais apropriados. Isto foi feito na Fig. 5.12B para três tipos usuais de elementos; o elemento de setor da parte c deve ser usado quando a equação da curva que limita a superfície é dada em coordenadas

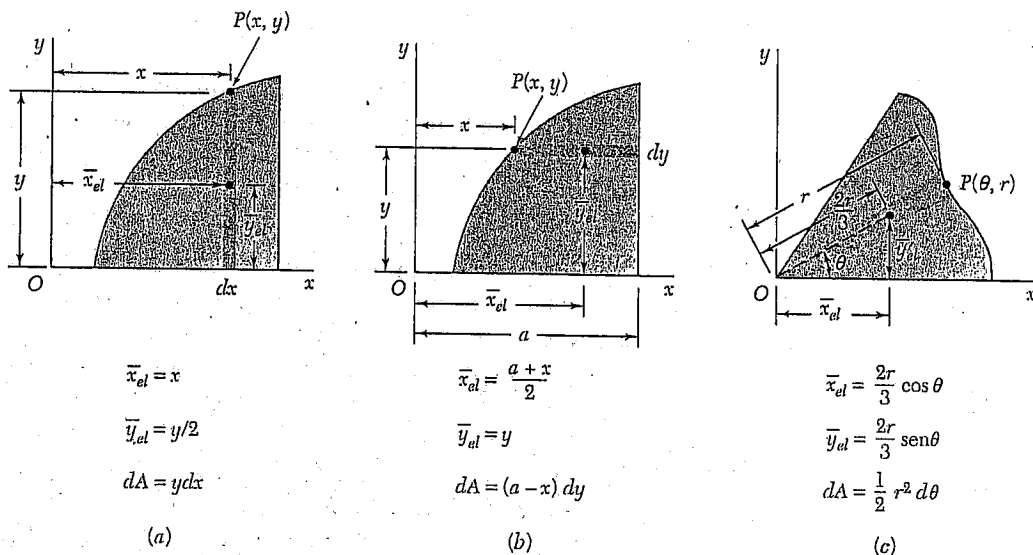


Fig. 5.12B Centróides e áreas de elementos diferenciais.

polares. As expressões apropriadas devem ser substituídas nas fórmulas (5.9) e a equação da curva-limite deve ser usada para expressar uma das coordenadas em termos da outra. Assim, a integração dupla fica reduzida a uma integração simples. Uma vez determinada a área e calculadas as integrais nas Eqs. (5.9), essas equações podem ser resolvidas para as coordenadas \bar{x} e \bar{y} do centróide da superfície.

Quando uma curva é definida por uma equação algébrica, seu centróide pode ser determinado pelo cálculo das integrais nas Eqs. (5.4) da Seção 5.3.

$$\bar{x}L = \int x dL \quad \bar{y}L = \int y dL \quad (5.4)$$

O diferencial de comprimento dL deve ser substituído por uma das expressões a seguir, dependendo de qual coordenada, x , y ou θ , tenha sido escolhida como variável independente na equação usada para definir essa curva (pode-se deduzir essas expressões aplicando o teorema de Pitágoras):

$$dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

$$dL = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

Após usar a equação da curva para expressar uma das coordenadas em termos da outra, pode-se efetuar a integração e resolver as Eqs. (5.4) para as coordenadas \bar{x} e \bar{y} do centróide da curva.

5.7 TEOREMAS DE PAPPUS-GULDINUS

Esses teoremas tratam de superfícies e sólidos de revolução, tendo sido formulados inicialmente pelo geômetra grego Pappus no século III d.C. e restabelecidos posteriormente pelo matemático suíço Guldinus, ou Guldin (1577–1643).

Uma *superfície de revolução* é uma superfície que pode ser gerada pela rotação de uma curva no plano (curva geratriz) em torno de um eixo fixo. Por exemplo (Fig. 5.13), a superfície de uma esfera pode ser obtida pela rotação de um arco semicircular ABC em torno do diâmetro AC , a superfície de um cone pode ser produzida pela rotação de uma linha reta AB em torno do eixo AC e a superfície de um toro ou anel pode ser gerada pela rotação de uma circunferência de um círculo em torno de um eixo que não o intercepte. Um *sólido de revolução* é um sólido que pode ser gerado pela rotação de uma superfície plana em torno de um eixo fixo. Conforme mostra a Fig. 5.14, uma esfera, um cone e um toro podem ser gerados pela rotação da superfície apropriada em torno do eixo indicado.

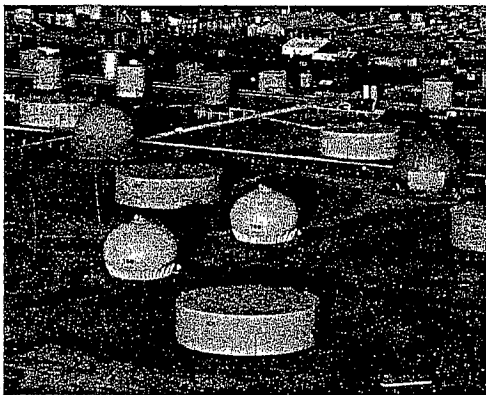


Foto 5.2 Os tanques de armazenagem mostrados são todos corpos em forma de sólidos de revolução. Logo, é possível determinar as áreas de suas superfícies e seus volumes aplicando-se os teoremas de Pappus-Guldinus.

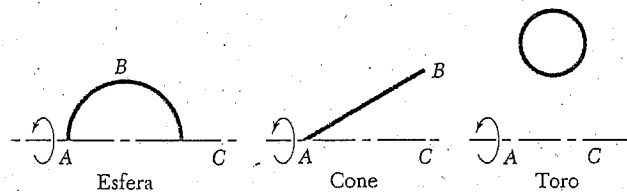


Fig. 5.13

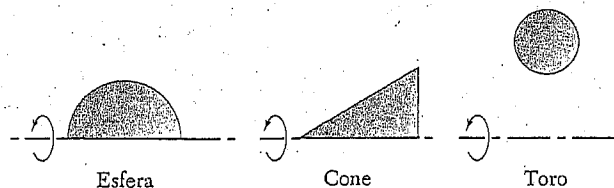


Fig. 5.14

TEOREMA I. A área de uma superfície de revolução é igual ao produto do comprimento da curva geratriz pela distância percorrida pelo centróide da curva durante a geração da superfície.

Demonstração. Considere um elemento dL da curva L (Fig. 5.15) girado em torno do eixo x . A área dA gerada pelo elemento dL é igual a

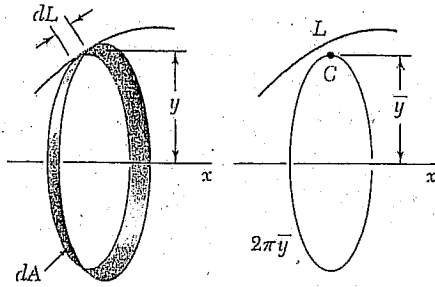


Fig. 5.15

$2\pi y dL$. Logo, a área total gerada por L é $A = \int 2\pi y dL$. Voltando à Seção 5.3, onde determinamos que a integral $\int y dL$ é igual a $\bar{y}L$, temos então

$$A = 2\pi\bar{y}L \quad (5.10)$$

onde $2\pi\bar{y}$ é a distância percorrida pelo centróide de L (Fig. 5.15). Importa observar que a curva geratriz não deve cruzar o eixo em torno do qual está sendo girada; nesse caso, as duas seções de curva em cada lado do eixo gerariam áreas de sinais opostos e o teorema não se aplicaria.

TEOREMA II. O volume de um sólido de revolução é igual ao produto da área da superfície geratriz pela distância percorrida pelo centróide da superfície durante a geração do sólido.

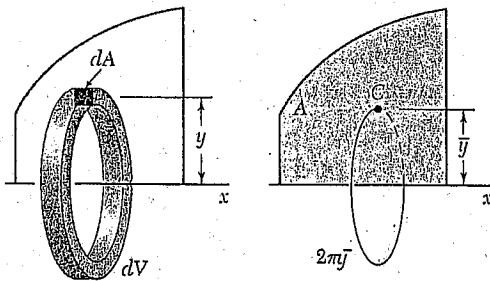


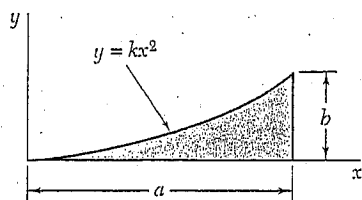
Fig. 5.16

Demonstração. Considere um elemento dA da superfície A girado em torno do eixo x (Fig. 5.16). O volume dV gerado pelo elemento dA é igual a $2\pi y dA$. Logo, o volume total gerado por A é $V = \int 2\pi y dA$ e, uma vez que a integral $\int y dA$ é igual a $\bar{y}A$ (Seção 5.3), temos

$$V = 2\pi\bar{y}A \quad (5.11)$$

onde $2\pi\bar{y}$ é a distância percorrida pelo centróide de A . Novamente, é importante observar que o teorema não se aplica caso o eixo de rotação intercepte a superfície geratriz.

Os teoremas de Pappus-Guldinus proporcionam um modo simples de se calcularem as áreas de superfícies de revolução e os volumes de sólidos de revolução. Inversamente, podem ser usados para se determinar o centróide de uma curva plana quando a área da superfície gerada pela curva for conhecida ou para se determinar o centróide de uma superfície plana quando o volume do sólido gerado for conhecido (ver o Problema Resolvido 5.8).



PROBLEMA RESOLVIDO 5.4

Determine por integração direta a localização do centróide da superfície sob um arco parabólico.

SOLUÇÃO

Determinação da constante k . O valor de k é determinado por substituição de $x = a$ e $y = b$ na equação dada. Temos $b = ka^2$ ou $k = b/a^2$. Logo, a equação da curva fica

$$y = \frac{b}{a^2} x^2 \quad \text{ou} \quad x = \frac{a}{b^{1/2}} y^{1/2}$$

Elemento diferencial vertical. Escolhemos o elemento diferencial mostrado na figura e encontramos a área total da figura.

$$A = \int dA = \int y \, dx = \int_0^a \frac{b}{a^2} x^2 \, dx = \left[\frac{b}{a^2} \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{ab}{3}$$

O momento de primeira ordem do elemento diferencial em relação ao eixo y é $\bar{x}_{el} \, dA$; assim, o momento de primeira ordem de toda a superfície em relação ao eixo y é

$$Q_y = \int \bar{x}_{el} \, dA = \int xy \, dx = \int_0^a x \left(\frac{b}{a^2} x^2 \right) dx = \left[\frac{b}{a^2} \frac{x^4}{4} \right]_0^a = \frac{a^2 b}{4}$$

Uma vez que $Q_y = \bar{x}A$, temos

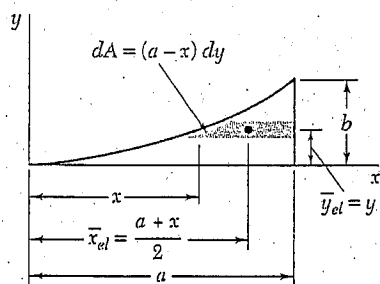
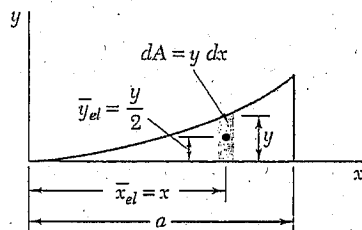
$$\bar{x}A = \int \bar{x}_{el} \, dA \quad \bar{x} \frac{ab}{3} = \frac{a^2 b}{4} \quad \bar{x} = \frac{3}{4} a \quad \blacktriangleleft$$

De modo análogo, o momento de primeira ordem do elemento diferencial em relação ao eixo x é $\bar{y}_{el} \, dA$ e o momento de primeira ordem de toda a superfície é

$$Q_x = \int \bar{y}_{el} \, dA = \int \frac{y}{2} y \, dx = \int_0^a \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a^2} x^2 \right)^2 dx = \left[\frac{b^2}{2a^4} \frac{x^5}{5} \right]_0^a = \frac{ab^2}{10}$$

Uma vez que $Q_x = \bar{y}A$, temos

$$\bar{y}A = \int \bar{y}_{el} \, dA \quad \bar{y} \frac{ab}{3} = \frac{ab^2}{10} \quad \bar{y} = \frac{3}{10} b \quad \blacktriangleleft$$



Elemento diferencial horizontal. Podem-se obter os mesmos resultados considerando-se um elemento horizontal. Os momentos de primeira ordem da superfície são

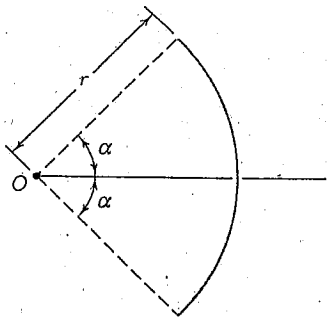
$$\begin{aligned} Q_y &= \int \bar{x}_{el} \, dA = \int \frac{a+x}{2} (a-x) \, dy = \int_0^b \frac{a^2 - x^2}{2} \, dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^b \left(a^2 - \frac{a^2}{b} y \right) dy = \frac{a^2 b}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_x &= \int \bar{y}_{el} \, dA = \int y (a-x) \, dy = \int y \left(a - \frac{a}{b^{1/2}} y^{1/2} \right) dy \\ &= \int_0^b \left(ay - \frac{a}{b^{1/2}} y^{3/2} \right) dy = \frac{ab^2}{10} \end{aligned}$$

Para determinar \bar{x} e \bar{y} , substitua novamente as expressões obtidas nas equações de definição do centróide da superfície.

PROBLEMA RESOLVIDO 5.5

Determine a localização do centróide do arco circular mostrado.



SOLUÇÃO

Como o arco é simétrico em relação ao eixo x , $\bar{y} = 0$. Escolhe-se um elemento diferencial do modo mostrado e determina-se o comprimento do arco por integração.

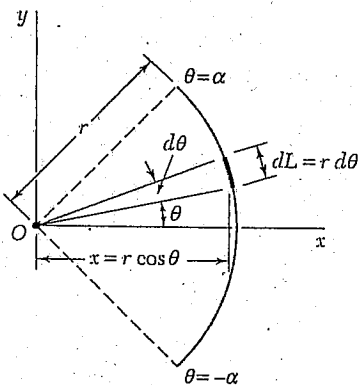
$$L = \int dL = \int_{-\alpha}^{\alpha} r d\theta = r \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta = 2r\alpha$$

O momento de primeira ordem em relação ao eixo y é

$$\begin{aligned} Q_y &= \int x dL = \int_{-\alpha}^{\alpha} (r \cos \theta) (r d\theta) = r^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta d\theta \\ &= r^2 [\sin \theta]_{-\alpha}^{\alpha} = 2r^2 \sin \alpha \end{aligned}$$

Uma vez que $Q_y = \bar{x}L$, escrevemos

$$\bar{x} (2r\alpha) = 2r^2 \sin \alpha \quad \bar{x} = \frac{r \sin \alpha}{\alpha} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 5.6

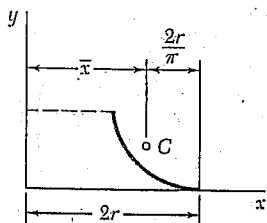
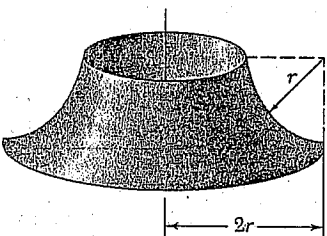
Determine a área da superfície de revolução mostrada, gerada pela rotação do arco de um quarto de círculo em torno de um eixo vertical.

SOLUÇÃO

De acordo com o Teorema I de Pappus-Guldinus, a área gerada é igual ao produto do comprimento do arco pela distância percorrida pelo seu centróide. Voltando à Fig. 5.8B, temos

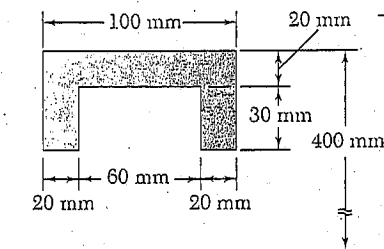
$$\begin{aligned} \bar{x} &= 2r - \frac{2r}{\pi} = 2r \left(1 - \frac{1}{\pi} \right) \\ A &= 2\pi \bar{x}L = 2\pi \left[2r \left(1 - \frac{1}{\pi} \right) \right] \left(\frac{\pi r}{2} \right) \end{aligned}$$

$$A = 2\pi r^2 (\pi - 1) \quad \blacktriangleleft$$



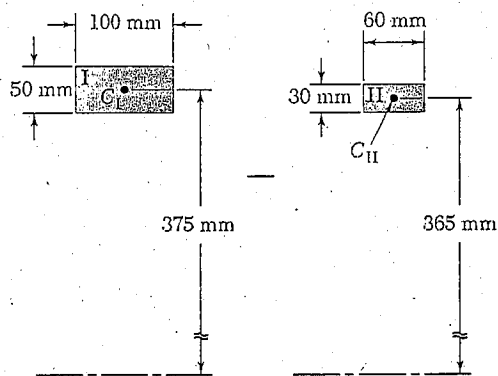
PROBLEMA RESOLVIDO 5.7

O diâmetro externo de uma polia é de 0,8 m e a seção transversal do seu contorno externo está mostrada na figura. Sabendo que a polia é feita de aço e que a massa específica do aço é $\rho = 7,85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, determine a massa e o peso do contorno externo.



SOLUÇÃO

Pode-se determinar o volume do contorno externo pela aplicação do Teorema II de Pappus-Guldinus, que estabelece que o volume é igual ao produto da área da seção transversal pela distância percorrida pelo seu centróide em uma revolução completa. Entretanto, pode-se determinar o volume de modo mais fácil se observarmos que a seção transversal pode ser formada pelo retângulo I, cuja área é positiva, e pelo retângulo II, cuja área é negativa.



	Área, mm ²	\bar{y} , mm	Distância percorrida por C, mm	Volume, mm ³
I	+5.000	375	$2\pi(375) = 2.356$	$(5.000)(2.356) = 11,78 \times 10^6$
II	-1.800	365	$2\pi(365) = 2.293$	$(-1.800)(2.293) = -4,13 \times 10^6$
				Volume do contorno externo = $7,65 \times 10^6$

Como $1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$, temos $1 \text{ mm}^3 = (10^{-3} \text{ m})^3 = 10^{-9} \text{ m}^3$, e obtemos $V = 7,65 \times 10^6 \text{ mm}^3 = (7,65 \times 10^6) (10^{-9} \text{ m}^3) = 7,65 \times 10^{-3} \text{ m}^3$.

$$m = \rho V = (7,85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3) (7,65 \times 10^{-3} \text{ m}^3) \quad m = 60,0 \text{ kg} \quad \blacktriangleleft$$

$$W = mg = (60,0 \text{ kg}) (9,81 \text{ m/s}^2) = 589 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 \quad W = 589 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 5.8

Aplicando os teoremas de Pappus-Guldinus, determine (a) o centróide de uma superfície semicircular e (b) o centróide de um arco semicircular. Lembre-se de que o volume e a área da superfície de uma esfera são $\frac{4}{3}\pi r^3$ e $4\pi r^2$, respectivamente.

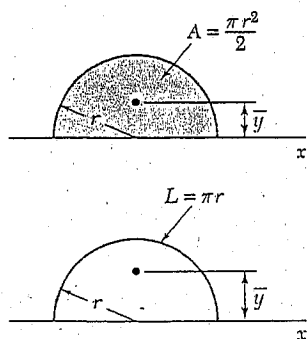
SOLUÇÃO

O volume de uma esfera é igual ao produto da área de um semicírculo pela distância percorrida pelo centróide do semicírculo em uma revolução em torno do eixo x.

$$V = 2\pi \bar{y} A \quad \frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi \bar{y} \left(\frac{1}{2}\pi r^2 \right) \quad \bar{y} = \frac{4r}{3\pi} \quad \blacktriangleleft$$

De modo análogo, a área de uma esfera é igual ao produto do comprimento do semicírculo geratriz pela distância percorrida pelo seu centróide em uma revolução.

$$A = 2\pi \bar{y} L \quad 4\pi r^2 = 2\pi \bar{y} (\pi r) \quad \bar{y} = \frac{2r}{\pi} \quad \blacktriangleleft$$



METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nos problemas propostos para esta seção você aplicará as equações

$$\bar{x}A = \int x \, dA \quad \bar{y}A = \int y \, dA \quad (5.3)$$

$$\bar{x}L = \int x \, dL \quad \bar{y}L = \int y \, dL \quad (5.4)$$

para determinar os centróides de superfícies e curvas planas, respectivamente. Você também aplicará os teoremas de Pappus-Guldinus (Seção 5.7) para determinar as áreas de superfícies de revolução e os volumes de sólidos de revolução.

1. Determinação dos centróides de superfícies e curvas por integração direta. Ao resolver problemas desse tipo, você deve seguir o método de resolução adotado nos Problemas Resolvidos 5.4 e 5.5: calcule A ou L , determine os momentos de primeira ordem da superfície ou curva e resolva as Eqs. (5.3) ou (5.4) para as coordenadas do centróide. Além disso, você deve dar atenção especial aos seguintes pontos:

a. Inicie sua solução definindo ou determinando cuidadosamente cada termo nas fórmulas integrais aplicáveis. Recomendamos enfaticamente que você mostre em um esboço da dada superfície ou curva sua escolha para dA ou dL e as distâncias do seu centróide.

b. Conforme explicamos na Seção 5.6, os símbolos x e y nas equações acima representam as coordenadas do centróide dos elementos diferenciais dA e dL . É importante reconhecer que as coordenadas do centróide de dA não são iguais às coordenadas de um ponto localizado sobre a curva que limita a superfície que está sob consideração. Você deve estudar a Fig. 5.12 criteriosamente até compreender por completo esse ponto importante.

c. Buscando talvez simplificar ou reduzir seus cálculos, examine sempre a forma da superfície ou curva dada antes de definir o elemento diferencial que você usará. Por exemplo, às vezes é preferível usar elementos retangulares horizontais em vez de verticais. Além disso, em geral é vantajoso usar coordenadas polares quando uma curva ou superfície apresenta simetria circular.

d. Embora a maioria das integrações desta seção sejam diretas, às vezes pode ser necessário empregar técnicas mais avançadas, tais como substituições trigonométricas ou integração por partes. Obviamente, o método mais rápido para se determinarem integrais difíceis é usar a uma tabela de integrais.

2. Aplicação dos teoremas de Pappus-Guldinus. Conforme mostramos nos Problemas Resolvidos 5.6 a 5.8, esses teoremas simples mas bastante úteis possibilitam que você aplique seu conhecimento sobre centróides no cálculo de áreas e volumes. Embora os teoremas façam referência à distância percorrida pelo centróide e ao comprimento da curva geratriz ou à área da superfície geratriz, as equações resultantes (5.10) e (5.11) contêm os produtos dessas grandezas, que nada mais são que os momentos de primeira ordem de uma curva ($\bar{y}L$) ou de uma superfície ($\bar{y}A$). Logo, para problemas em que a curva ou superfície geratriz é composta de várias formas usuais, você só precisa determinar $\bar{y}L$ ou $\bar{y}A$; você não precisa calcular o comprimento da curva geratriz nem a área da superfície geratriz.

PROBLEMAS

5.31 a 5.33 Determine por integração direta o centróide da superfície mostrada na figura. Expresse sua resposta em termos de a e h .

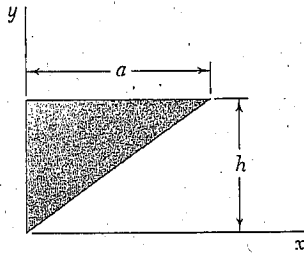


Fig. P5.31

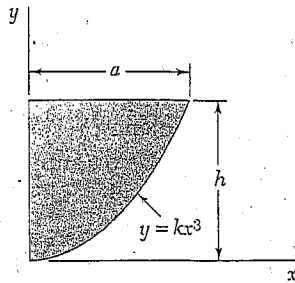


Fig. P5.32

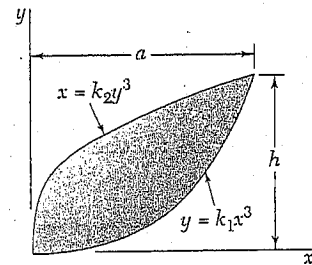


Fig. P5.33

5.34 a 5.36 Determine por integração direta o centróide da superfície mostrada na figura.

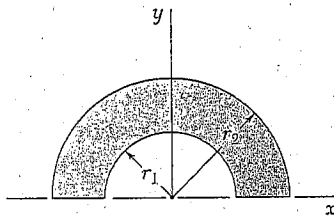


Fig. P5.34

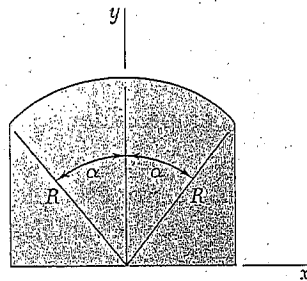


Fig. P5.35

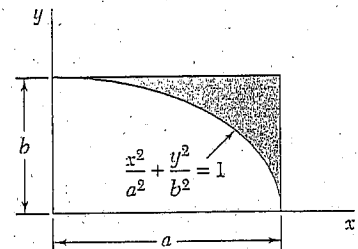


Fig. P5.36

5.37 e 5.38 Determine por integração direta o centróide da superfície mostrada na figura. Expresse sua resposta em termos de a e b .

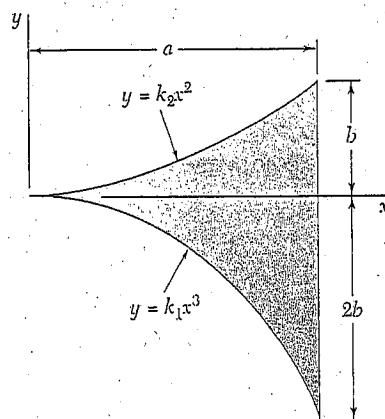


Fig. P5.37

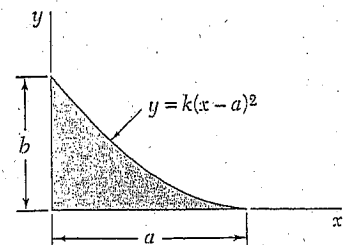


Fig. P5.38

5.39 Determine por integração direta o centróide da superfície mostrada na figura.

5.40 e 5.41 Determine por integração direta o centróide da superfície mostrada na figura. Expresse sua resposta em termos de a e b .

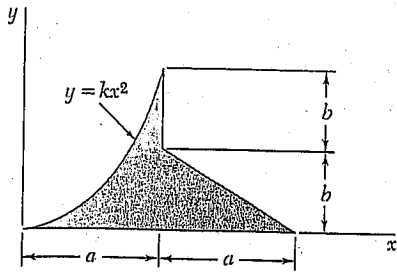


Fig. P5.40

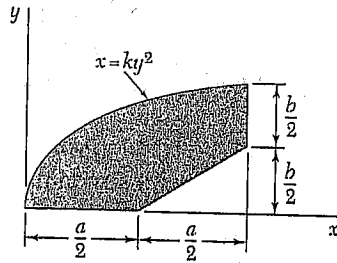


Fig. P5.41

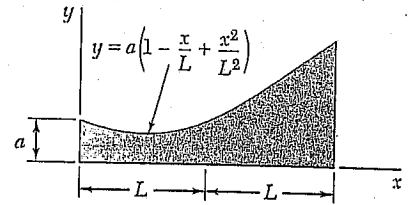


Fig. P5.39

*5.42 Um arame homogêneo é dobrado na forma mostrada na figura. Determine por integração direta a coordenada x de seu centróide. Expresse sua resposta em termos de a .

5.43 e 5.44 Um arame homogêneo é dobrado na forma mostrada na figura. Determine por integração direta a coordenada x de seu centróide.

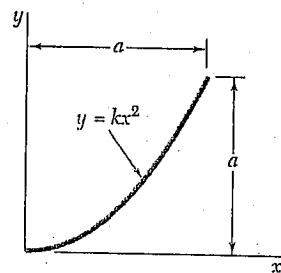


Fig. P5.42

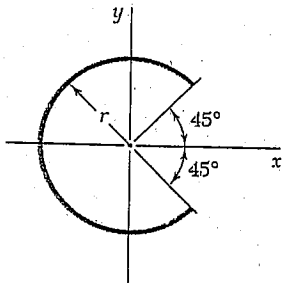


Fig. P5.43

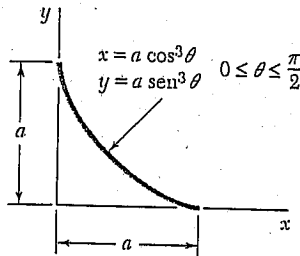


Fig. P5.44

*5.45 e *5.46 Determine por integração direta o centróide da superfície mostrada na figura.

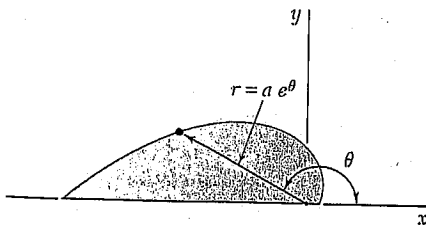


Fig. P5.45

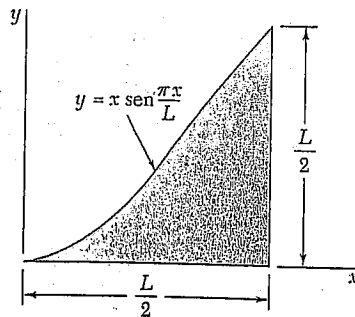


Fig. P5.46

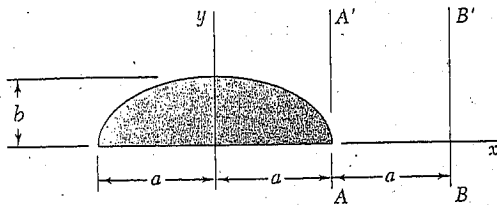


Fig. P5.50

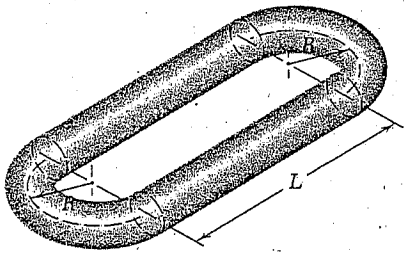


Fig. P5.51

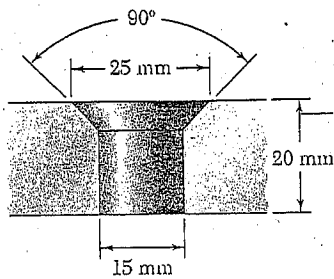


Fig. P5.53

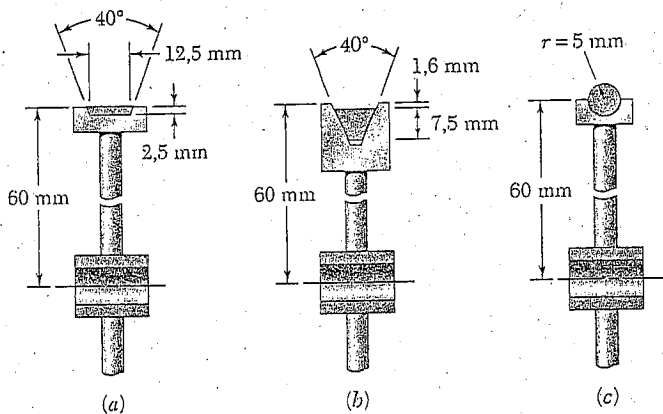


Fig. P5.54

5.47 Determine o volume e a área da superfície do sólido obtido pela rotação da superfície do Problema 5.2 em torno (a) do eixo x e (b) da linha $x = 165$ mm.

5.48 Determine o volume e a área da superfície do sólido obtido pela rotação da superfície do Problema 5.4 em torno (a) da linha $y = 22$ mm e (b) da linha $x = 12$ mm.

5.49 Determine o volume e a área da superfície do sólido obtido pela rotação da superfície do Problema 5.1 em torno (a) do eixo x e (b) da linha $x = 40$ cm.

5.50 Determine o volume do sólido gerado pela rotação da superfície semi-elíptica mostrada na figura em torno (a) do eixo AA' , (b) do eixo BB' e (c) do eixo y .

5.51 Determine o volume e a área da superfície do elo de corrente mostrado, feito de uma barra de 5 cm de diâmetro, se $R = 7,5$ cm e $L = 25$ cm.

5.52 Verifique que as expressões para os volumes das quatro primeiras formas na Fig. 5.21 estão corretas.

5.53 Um furo de 15 mm de diâmetro é feito em uma peça de aço de 20 mm de espessura; em seguida, o furo é escareado na forma mostrada na figura. Determine o volume de aço retirado durante o processo de escareamento.

5.54 Três diferentes perfis de correia de acionamento devem ser estudados. Se em todas as situações cada correia fizer contato com metade da circunferência de sua polia, determine a área de contato entre correia e polia para cada projeto.

5.55 Determine a capacidade da poncheira mostrada, em litros, se $R = 30$ cm.

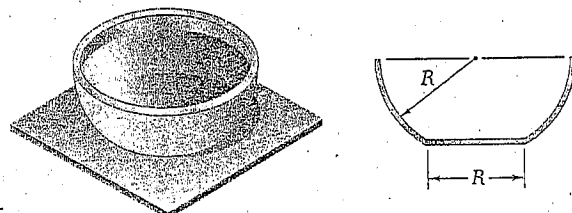


Fig. P5.55

5.56 O quebra-luz de alumínio de uma pequena luminária de alta intensidade tem espessura uniforme de 0,234 cm. Sabendo que o peso específico do alumínio é de $0,029 \text{ N/cm}^3$, determine o peso do quebra-luz.

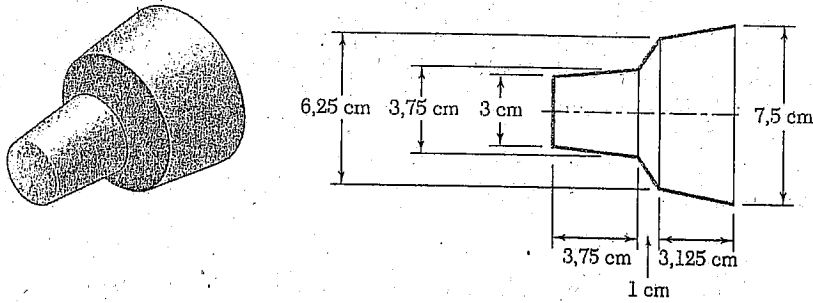


Fig. P5.56

5.57 O tampo de uma mesa redonda de madeira apresenta o perfil lateral mostrado na figura. Sabendo que o diâmetro do tampo é de 1.100 mm antes do perfilamento e que a massa específica da madeira é de 690 kg/m^3 , determine o peso dos resíduos de madeira resultantes da produção de 5.000 tampos.

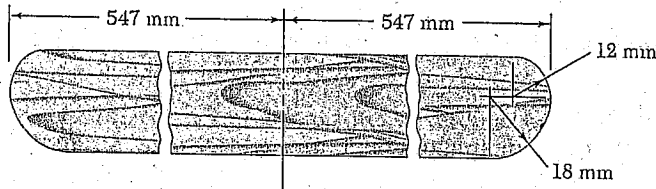


Fig. P5.57 e P5.58

5.58 O tampo de uma mesa redonda de madeira tem o perfil lateral mostrado na figura. Calcule quantos litros de verniz são necessários para o acabamento de 5.000 tampos, sabendo que cada tampo recebe três demãos de verniz e que 1 litro de verniz cobre 12 m^2 .

5.59 A figura mostra um escudo (no caso, uma peça decorativa colocada em um tubo que sai de uma parede) fundido em latão. Sabendo que o peso específico do latão é de $0,088 \text{ N/cm}^3$, determine o peso do escudo.

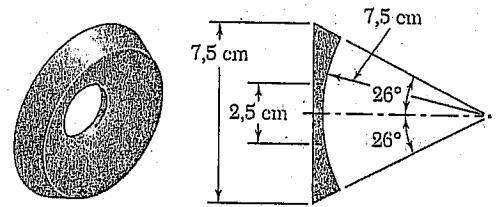


Fig. P5.59

*5.60 O refletor de um pequeno holofote tem o formato parabólico mostrado na figura. Determine a área da superfície interna do refletor.

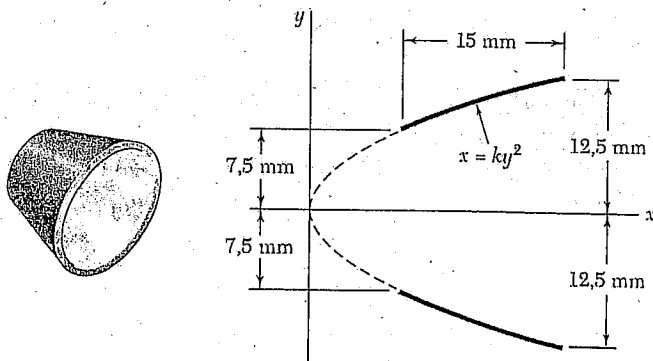


Fig. P5.60

O conceito de centróide de uma superfície pode ser usado na resolução de outros problemas além daqueles que envolvem pesos de placas planas. Por exemplo, considere uma viga que sustenta uma *carga distribuída*; essa carga pode advir do peso de materiais sustentados direta ou indiretamente pela viga ou pode ser causada pelo vento ou por pressões hidrostáticas. A carga distribuída pode ser caracterizada por uma curva representando a carga w sustentada por unidade de comprimento (Fig. 5.17); essa carga é expressa em N/m. A intensidade da força exercida sobre um elemento de viga de comprimento dx é $dW = w dx$, e a carga total sustentada pela viga é

$$W = \int_0^L w dx$$

Observamos que o produto $w dx$ é igual em intensidade ao elemento de área dA mostrado na Fig. 5.17a. Logo, a carga W equivale em intensidade à área total A da superfície sob a curva de carga:

$$W = \int dA = A$$

Vamos determinar agora onde uma *carga concentrada única* W , de intensidade W igual à da carga total distribuída, deve ser aplicada sobre a viga para produzir as mesmas reações de apoio (Fig. 5.17b). Todavia, essa carga concentrada W , que representa a resultante do carregamento distribuído dado, é equivalente ao carregamento apenas quando se considera o diagrama de corpo livre de toda a viga. O ponto de aplicação P de uma carga concentrada equivalente W é obtido escrevendo-se que o momento de W em relação ao ponto O é igual à soma dos momentos das cargas elementares dW em relação ao ponto O :

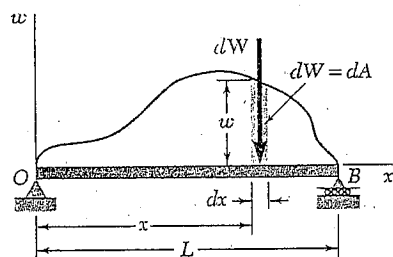
$$(OP)W = \int x dW$$

ou, uma vez que $dW = w dx = dA$ e $W = A$,

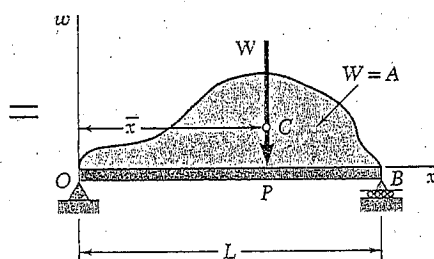
$$(OP)A = \int_0^L x dA \quad (5.12)$$

Por representar o momento de primeira ordem, em relação ao eixo w , da superfície sob a curva de carga, a integral pode ser substituída pelo produto $\bar{x}A$. Logo, temos que $OP = \bar{x}$, sendo \bar{x} a distância do eixo w ao centróide C da superfície A (não se trata do centróide da viga).

Logo, uma carga distribuída sobre uma viga pode ser substituída por uma carga concentrada; a intensidade dessa carga única é igual à área da superfície sob a curva de carga e sua linha de ação passa pelo centróide dessa superfície. Deve-se notar, porém, que a carga concentrada só é equivalente ao carregamento dado quando se consideram forças externas. Essa carga pode ser usada para se determinarem reações, mas não deve ser usada no cálculo de forças internas e deformações.



(a)



(b)

Fig. 5.17



Foto 5.3 Os telhados das construções mostradas devem ter capacidade de suportar não apenas o peso total da neve, mas também as cargas distribuídas assimétricas resultantes da camada depositada de neve.

A abordagem que adotamos na seção precedente pode ser adotada para se determinar a resultante das forças de pressão hidrostática exercidas sobre uma *superfície retangular* submersa em um líquido. Considere a placa retangular mostrada na Fig. 5.18, cujo comprimento é L e cuja largura é b , sendo b medida perpendicularmente ao plano da figura. Como observamos na Seção 5.8, uma carga exercida sobre um elemento da placa de comprimento dx é $w dx$, sendo w a carga por unidade de comprimento. Todavia, essa carga também pode ser expressa como $p dA = pb dx$, sendo p a pressão manométrica do líquido² e b a largura da placa; logo, $w = bp$. Uma vez que a pressão manométrica em um líquido é $p = \gamma h$, sendo γ o peso específico do líquido e h a distância vertical da superfície livre, resulta que

$$w = bp = b\gamma h \quad (5.13)$$

que mostra que a carga por unidade de comprimento w é proporcional a h e, portanto, varia linearmente com x .

Recordando os resultados da Seção 5.8, observamos que a resultante R das forças hidrostáticas exercidas em um lado da placa é igual em intensidade à área da superfície trapezoidal sob a curva de carga e que sua linha de ação passa pelo centróide C dessa superfície. O ponto P da placa no qual R é aplicada é conhecido como *centro de pressões*.³

Em seguida, consideramos as forças exercidas por um líquido sobre uma superfície curva de largura constante (Fig. 5.19a). Uma vez que a determinação da resultante R dessas forças por integração direta não seria fácil, consideramos o corpo livre obtido pela separação do volume de líquido ABD limitado pela superfície curva AB e pelas duas superfícies planas AD e DB mostradas na Fig. 5.19b. As forças que atuam sobre o corpo livre ABD são o peso W do volume de líquido destacado, a resultante R_1 das forças exercidas sobre AD , a resultante R_2 das forças exercidas sobre BD e a resultante $-R$ das forças exercidas pela superfície curva sobre o líquido. A resultante $-R$ tem igual intensidade, sentido oposto e a mesma linha de ação da resultante R das forças exercidas pelo líquido sobre a superfície curva. As forças W , R_1 e R_2 podem ser determinadas por métodos padrões; encontrados seus valores, a força $-R$ é obtida pela solução das equações de equilíbrio para o corpo livre da Fig. 5.19b. A resultante R das forças hidrostáticas exercidas sobre a superfície curva é então obtida revertendo-se o sentido de $-R$.

Os métodos delineados nesta seção podem ser adotados para se determinar a resultante das forças hidrostáticas exercidas sobre superfícies de barragens e comportas retangulares. As resultantes das forças sobre superfícies submersas de largura variável serão determinadas no Cap. 9.

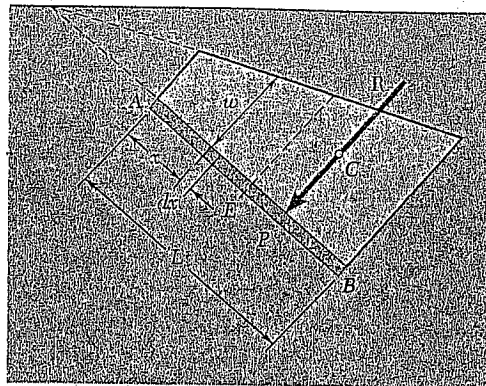
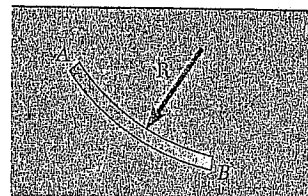
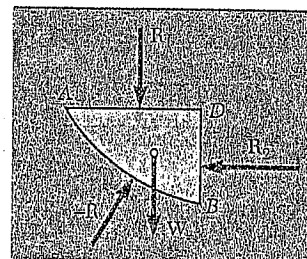


Fig. 5.18



(a)



(b)

Fig. 5.19

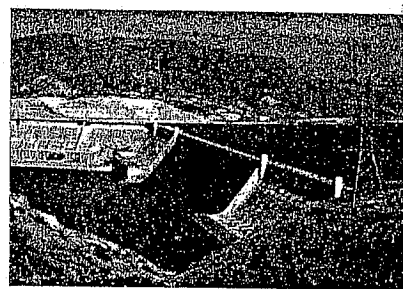


Foto 5.4 Conforme discutimos nesta seção, a barragem de Grand Coulee (EUA) suporta três tipos diferentes de forças distribuídas: os pesos de seus elementos constitutivos, as forças de pressão exercidas pela água sobre sua face submersa e as forças de pressão exercidas pelo solo sobre sua base.

² A pressão p , que representa uma carga por unidade de área, é expressa em N/m^2 . A unidade derivada do SI N/m^2 é chamada *pascal* (Pa).

³ Observe-se que a área sob a curva de carga é igual a $w_E L$, sendo w_E a carga por unidade e de comprimento no centro E da placa e, retomando a Eq. (5.13), podemos escrever

$$R = w_E L = (bp_E) L = p_E (bL) = p_E A$$

sendo que A representa a área da placa. Logo, a intensidade de R pode ser obtida pelo produto da área da placa pela pressão em seu centro E . A resultante R , porém, deve ser aplicada em P , não em E .