15. Verifique, por meio do diagrama de Venn, que:
   a) $(A \cap B) \subset A$
   b) $A \subset (A \cup B)$
   c) $(A - B) \subset A$
   d) $(A - B) \subset B^c$

16. Verifique, usando o diagrama de Venn, que:
   a) Se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$
   b) $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$
   c) $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$
   d) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap B \cap C)$

17. Verifique, por meio do diagrama de Venn, que se $A \subset B$, então:
   a) $A \cap B = A$
   b) $A \cup B = B$

18. Usando as propriedades das operações, simplifique:
   a) $A \cap (A \cap B)$
   b) $(A \cup B) \cap (A \cup B^c)$
   c) $A \cap (A \cup B)$
   d) $(A \cap B^c) \cap (A^c \cap B)$

19. Se A e B são dois conjuntos finitos disjuntos, e se $n(A)$, $n(B)$ e $n(A \cup B)$ indicam respectivamente o número de elementos de A, B e $A \cup B$, então $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$. O que acontecerá se A e B não forem disjuntos?

1.4 Conjunto das Partes de um Conjunto

Consideremos o conjunto $A = \{1, 2\}$. Os possíveis subconjuntos de A são:

$$\{1\}, \{2\}, \{1, 2\} \text{ e } \phi.$$

Esses conjuntos constituem um novo conjunto chamado conjunto das partes de A e indicado por $P(A)$. Assim:

$$P(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \phi\}.$$

De um modo geral, o conjunto formado pelos subconjuntos de um conjunto A é chamado conjunto das partes de A e é indicado por $P(A)$.

Exemplo 1.11

a) Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, o conjunto das partes de A é

$$P(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \phi\}.$$

b) Dado o conjunto $B = \{a, b, c, d\}$, o conjunto das partes de B é

$$P(B) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \phi\}.$$

c) Se $A = \{1\}$, então $P(A) = \{\{1\}, \phi\}$.

d) Se $A = \phi$, então $P(A) = \{\phi\}$ que não é vazio.

Notemos que no exemplo (a) o número de elementos de A é 3 e o de $P(A)$ é $2^3 = 8$.

A justificativa é que o número de subconjuntos de A é o número de combinações de 3 elementos tomados 0 a 0 (igual a 1, pois tal combinação é o conjunto vazio) mais o número de combinações de 3 elementos tomados um a um, mais o número de combinações de 3 elementos tomados 2 a 2, mais o número de combinações de 3 elementos tomados 3 a 3.

Assim, o número de elementos de $P(A)$ é:

$\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}$ em que $\binom{3}{i}$ representa o número de combinações de 3 elementos tomados i a i. Ora, a análise combinatória nos ensina que essa soma vale $2^3 = 8$.

Com raciocínio análogo, verificamos que:

- no caso (b), o número de elementos de $P(A)$ é $2^4 = 16$;
- no caso (c), o número de elementos de $P(A)$ é $2^1 = 2$;
- no caso (d), o número de elementos de $P(A)$ é $2^0 = 1$.

De um modo geral, se um conjunto tem n elementos, então seu conjunto das partes terá 2^n elementos.

1.5 Produto Cartesiano

Já vimos que os conjuntos {a, b} e {b, a} são iguais porque a ordem dos elementos não importa. Todavia, às vezes essa ordem é essencial; assim, na geometria analítica, o par de números (3, 4) define o ponto de abscissa 3 e ordenada 4, ao passo que o par (4, 3) define o ponto de abscissa 4 e ordenada 3. Quando interessa a ordem dos elementos considerados, os elementos são indicados entre parênteses. Quando houver dois elementos (a, b), o par é chamado de par ordenado; quando tivermos três elementos (a, b, c), cuja ordem importa, teremos uma tripla ordenada e assim por diante.

Exemplo 1.12. Sejam os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Podemos formar um novo conjunto de pares ordenados, cujos primeiros elementos pertencem a A e cujos segundos elementos pertencem a B, isto é:

$$\{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}.$$

Esse conjunto é chamado produto cartesiano de A por B e é indicado por $A \times B$.

De um modo geral, dados dois conjuntos A e B, chama-se produto cartesiano de A por B o conjunto dos pares ordenados cujos primeiros elementos pertencem a A e os segundos elementos pertencem a B, isto é:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

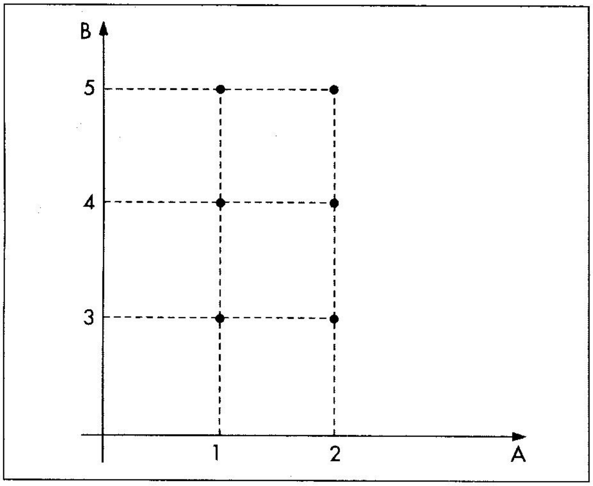
Notemos que em geral $A \times B$ é diferente de $B \times A$. No Exemplo 1.12 temos:

$$B \times A = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\}.$$

Assim, nenhum elemento de $A \times B$ pertence a $B \times A$ (note que $(1, 3) \neq (3, 1)$).

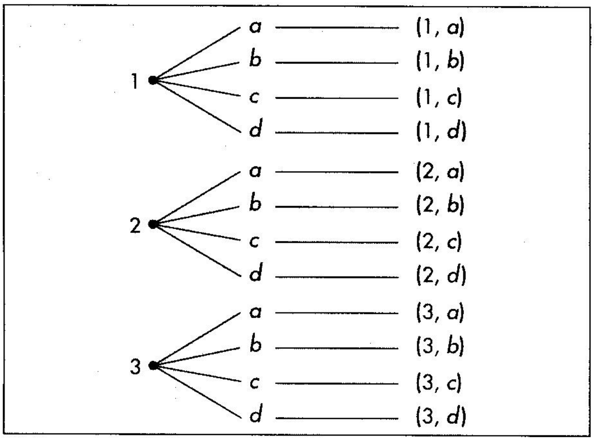
Podemos representar graficamente o produto cartesiano. A Figura 1.10 mostra o gráfico de $A \times B$ do Exemplo 1.12.

Figura 1.10: Produto cartesiano $A \times B$ do Exemplo 1.12.



Exemplo 1.13. Uma maneira de obter todos os elementos de um produto cartesiano de dois conjuntos é por meio do diagrama de árvore. A Figura 1.11 ilustra os elementos de $A \times B$ em que $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$.

Figura 1.11: Diagrama de árvore do produto cartesiano $A \times B$ do Exemplo 1.13.



É fácil verificar que o número de elementos de um produto cartesiano $A \times B$ é igual ao produto do número de elementos de A pelo número de elementos de B. Isto é:

$$n(A \times B) = \mathrm{n}(A) \cdot n(B),$$

em que $n(A \times B)$, $n(A)$ e $n(B)$ representam o número de elementos de $A \times B$, A e B respectivamente.

Exemplo 1.14. Uma moeda e um dado são lançados. Um espaço amostral desse experimento pode ser obtido pelo produto cartesiano $A \times B$, em que A é o conjunto dos resultados do lançamento de uma moeda e B o dos resultados do lançamento de um dado, ou seja, $A = \{K, C\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, em que K representa cara e C representa coroa. Os elementos do produto cartesiano são os pares ordenados

$$\begin{array}{ll} (K, 1) & (C, 1) \\ (K, 2) & (C, 2) \\ (K, 3) & (C, 3) \\ (K, 4) & (C, 4) \\ (K, 5) & (C, 5) \\ (K, 6) & (C, 6). \end{array}$$

Exercícios

20. Outra maneira de obter os elementos de um produto cartesiano de dois conjuntos (além dos diagramas de árvore) é por meio da construção de *tabelas de dupla entrada*. Por exemplo, os elementos de $A \times B$, em que $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$ são obtidos pela tabela a seguir:

A \ B	a	b	c	d
1	$(1, a)$	$(1, b)$	$(1, c)$	$(1, d)$
2	$(2, a)$	$(2, b)$	$(2, c)$	$(2, d)$
3	$(3, a)$	$(3, b)$	$(3, c)$	$(3, d)$

Use esse tipo de tabela para obter $A \times B$ nos casos:
a) $A = \{0, 1\}$ e $B\ \{2, 3\}$
b) $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{x, y, z\}$
c) $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = A$

21. Uma pessoa vai viajar da cidade A para a cidade C, passando pela cidade B. Existem três estradas ligando A e B e cinco estradas ligando B e C. De quantas maneiras poderá a pessoa fazer o seu percurso?

22. Dado o conjunto $A = \{1, 2, 5, 7, 8\}$, determine:
a) o conjunto $A^2 = A \times A$ e sua representação gráfica
b) o subconjunto $W = \{(x, y) \in A^2 \mid x < y\}$
c) o subconjunto $Z = \{(x, y) \in A^2 \mid y = 2x + 3\}$
d) o subconjunto $T = \{(x, y) \in A^2 \mid x - y = 4\}$

23. Use o conceito de produto cartesiano para representar o conjunto dos resultados possíveis no lançamento simultâneo de dois dados.

24. Use o conceito de produto cartesiano para representar o conjunto dos resultados possíveis para o lançamento de duas moedas.

25. Define-se como diferença simétrica de dois conjuntos A e B, contidos num universo E, ao conjunto dado por:

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

Por exemplo, se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 5, 7\}$, então:

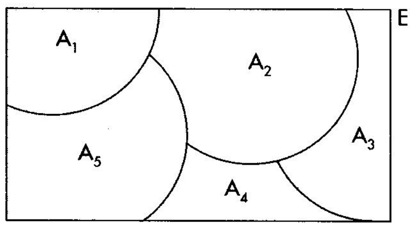
$$A \Delta B = \{1, 5, 7\}$$

a) Verifique que $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$
b) Obtenha $A \Delta E$
c) Obtenha $A \Delta A^c$
d) Obtenha $A \Delta \phi$

26. Um conjunto de n elementos possui um total de 1.024 subconjuntos. Qual o valor de n?

27. Dizemos que os conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, todos não vazios, formam uma partição do conjunto universo E se são dois a dois disjuntos e sua união é igual a E. Isto é:
i) $A_i \neq \phi$ para todo $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots n$
ii) $A_i \cap A_j = \phi$ para todo $i \neq j$
iii) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \cup A_n = E$

O diagrama abaixo representa uma partição do conjunto E:

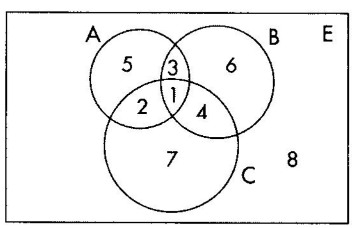


Dê duas possíveis partições de $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

28. Em uma pesquisa com 100 estudantes verificou-se que aqueles que gostam de uma só ciência são: Matemática, 18; Física, 20; Química, 22. Gostam de duas ciências: Matemática e Química, 15; Química e Física, 17; Matemática e Física, 9. Gostam das três ciências 6 alunos.
a) Faça o diagrama de Venn para a situação.
b) Quantos estudantes gostam de pelo menos duas ciências?
c) Determine $n(M)$, $n(F)$ e $n(Q)$, em que $n(M)$, $n(F)$ e $n(Q)$ indicam respectivamente o número de alunos que gostam de Matemática, Física e Química.
d) Determine $n(M^c)$ e $n(M \cup F \cup Q)$.

29. Faça um diagrama de árvore para $\{1, 2, 5\} \times \{a, b, c, d\}$.

30. Na figura, escreva uma expressão para cada região numerada. Por exemplo, 8 é $(A \cup B \cup C)^c$.



31. Se A, B e C são conjuntos quaisquer, determine uma fórmula para o número de elementos de $A \cup B \cup C$.

32. Foi realizada uma pesquisa na indústria X, tendo sido feitas a seus operários apenas duas perguntas. Dos operários, 92 responderam sim à primeira, 80 responderam sim à segunda, 35 responderam sim a ambas e 33 responderam não a ambas as perguntas feitas. Qual o número de operários da indústria?

33. Em uma pesquisa foram encontrados os seguintes resultados: 60% das pessoas entrevistadas fumam a marca A de cigarro; 50% fumam a marca B; 45% fumam a marca C; 20% fumam A e B; 30% fumam A e C; 15% fumam B e C, e 8% fumam as 3 marcas.
   a) Que porcentagem não fuma nenhuma das 3 marcas?
   b) Que porcentagem fuma exatamente duas marcas?

34. Num levantamento constatou-se que 80% dos entrevistados são casados, 44% são homens casados, 12% são mulheres casadas sem filhos e 30% são mulheres casadas com filhos. Verifique se essas porcentagens são compatíveis.

Capítulo 2

Conjuntos Numéricos

2.1 Números Inteiros

Já conhecemos o conjunto dos números inteiros positivos

$$N^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

e o conjunto dos números naturais

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}.$$

Da impossibilidade de efetuarmos a subtração $a - b$ para todos os valores a e b de N, introduzimos os números inteiros negativos, colocando, por definição:

$$a - b = -(b - a), \text{ se } a < b.$$

Por exemplo:

$$3 - 7 = -(7 - 3) = -4,$$
$$8 - 10 = -(10 - 8) = -2.$$

Obtemos assim o conjunto dos números inteiros, que indicaremos por:

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Nesse conjunto efetuamos, sem restrições, adições, multiplicações e subtrações. Persiste ainda uma impossibilidade: o quociente entre dois números inteiros pode não ser inteiro, isto é, a divisão de um inteiro a por um inteiro b só dará um número inteiro se a for múltiplo de b.

2.2 Números Racionais

Consideremos a equação $b \cdot x = a$, com $b \neq 0$. Tal equação admitirá como raiz $x = \frac{a}{b}$, e esse quociente só dará um número inteiro se a for múltiplo de b. A fim de que tal equação sempre admita solução, definimos como número racional a toda fração $\frac{a}{b}$ em que a e b são inteiros, e b é diferente de zero (a é chamado de numerador e b, de denominador da fração). Indicamos o conjunto dos números racionais por Q. Assim:

$$Q = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in Z, b \in Z, b \neq 0\right\}.$$

Por exemplo, $\frac{2}{5} \in Q$, $\frac{-3}{4} \in Q$, $\frac{7}{2} \in Q$ e $\frac{6}{2} \in Q$.

Observemos que qualquer inteiro a também é racional, pois $a = \frac{a}{1} \in Q$. Dessa forma temos as seguintes relações de inclusão:

$$N^* \subset N \subset Z \subset Q.$$

Todo número racional $\frac{a}{b}$ pode ser representado sob a forma decimal, bastando para isso dividirmos a por b. Podem ocorrer dois casos:

- A representação decimal é finita.

  Por exemplo, $\frac{3}{4} = 0{,}75$; $\frac{1}{2} = 0{,}5$; $\frac{-3}{5} = -0{,}6$.

- A representação decimal é infinita e periódica (dízima periódica).

  Por exemplo $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$; $\frac{47}{90} = 0{,}5222\ldots$

De um modo geral, é possível dizer que os números representados por decimais infinitas periódicas são racionais; isso porque $\frac{3}{4}$, digamos, pode ser representado por 0,750000..., $\frac{1}{2}$ por 0,500000..., ou seja, acrescentamos zeros à direita da representação finita.

Notemos ainda que 0,9999... = 1,0000..., isto é, podemos ter um número racional com duas representações decimais.

Para transformarmos uma decimal exata, ou dízima periódica em fração, podemos proceder como nos exemplos a seguir:

Exemplo 2.1. Escrever sob forma de fração as decimais exatas:

a) 0,75; b) 1,27; c) 0,043.

Um dos modos de resolvermos essa questão consiste em escrevermos no numerador os algarismos do número decimal, sem a vírgula, eliminando os zeros antes do 1º algarismo diferente de zero. No denominador escrevemos 1 e tantos zeros quantos forem os algarismos depois da vírgula. Assim, temos:

a) $0{,}75 = \frac{75}{100}$; b) $1{,}27 = \frac{127}{100}$; c) $0{,}043 = \frac{43}{1.000}$.

É claro que a fração obtida pode ser simplificada. Por exemplo, a primeira pode ser simplificada da seguinte forma: $\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$.

Exemplo 2.2. Escrever sob forma de fração as dízimas periódicas:

a) 0,6666... b) 0,52222...

Resolução

a) Façamos $x = 0{,}6666\ldots$ e multipliquemos ambos os membros por 10. Teremos:

$$\begin{cases} x = 0{,}6666\ldots \\ 10x = 6{,}6666\ldots \end{cases}$$

Subtraindo membro a membro a 2ª relação menos a 1ª, obtemos:

$9x = 6$ e conseqüentemente $x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

b) Façamos $x = 0{,}5222\ldots$ e multipliquemos ambos os membros por 10 e depois novamente por 10. Teremos:

$$\begin{cases} 10x = 5{,}2222\ldots \\ 100x = 52{,}2222\ldots \end{cases}$$

Subtraindo membro a membro a 2ª relação menos a 1ª, obtemos:

$90x = 47$ e conseqüentemente $x = \frac{47}{90}$.

Observação

Caso queiramos arredondar uma decimal exata ou dízima periódica, devemos lembrar que, se um determinado algarismo for maior ou igual a 5, o anterior deve ser arredondado para ele mais 1; caso o algarismo considerado seja menor que 5, o anterior deve permanecer como está. Por exemplo, os números abaixo foram arredondados para duas casas decimais:

a) 9,637 para 9,64;
b) 0,054 para 0,05;
c) 0,3333... para 0,33.

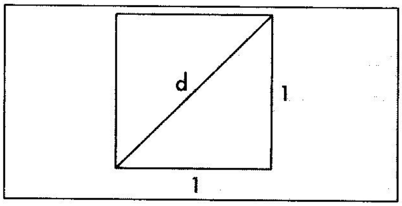
2.3 Números Reais

Consideremos dois números racionais p e q, com $p < q$. Entre eles haverá sempre um outro número racional, por exemplo a média deles $(p + q)/2$. Entre p e $(p + q)/2$ haverá também outro número racional como a média deles $(p + (p + q)/2)/2$. Com raciocínio análogo, podemos concluir que entre p e q há sempre infinitos números racionais. Quando isso acontece com elementos de um conjunto dizemos que ele é denso. Assim, o conjunto Q é denso.

No início, pensou-se que o conjunto dos racionais englobasse todos os números, pelo que foi exposto. Todavia, um simples fato atribuído a Aristóteles (384–322a.C.) mostrou a existência de novos números chamados irracionais. O fato foi a determinação da medida da diagonal d de um quadrado de lado de medida igual a 1.

Pela Figura 2.1, se aplicarmos o teorema de Pitágoras, teremos $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ e conseqüentemente $d = \sqrt{2}$.

Figura 2.1: Ilustração do número $\sqrt{2}$.



O fato é que se constatou que o número $\sqrt{2}$ não era racional. Para provar essa propriedade, costuma-se utilizar o método da redução ao absurdo: tal método consiste em admitir como verdade a negação do que se quer provar; se após um encadeamento lógico de raciocínio chegarmos a uma situação absurda, concluímos que o que levou a esse absurdo foi admitir como verdade a afirmação inicial (negação do que se quer provar). Dessa forma, concluímos que sendo falsa a negação de que queríamos provar, é verdadeira a afirmação inicialmente proposta.

Provemos então que $\sqrt{2}$ não é racional. Admitamos, por absurdo, que $\sqrt{2}$ seja racional. Assim sendo, $\sqrt{2}$ pode ser expressa por uma fração simplificada a/b, em que a e b são inteiros e primos entre si (pois a fração foi totalmente simplificada). Assim,

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2. \tag{2.1}$$

Como a^2 é múltiplo de 2, a^2 é par. Conseqüentemente a também é par. Assim, a pode ser escrito sob a forma $a = 2k$ (k inteiro). Substituindo tal resultado em (2.1) teremos:

$$(2k)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2. \tag{2.2}$$

Pela relação (2.2), b^2 também é múltiplo de 2, logo é par; conseqüentemente b é par. Ora, concluir que a e b são números pares é um absurdo, pois são primos entre si. Logo só pode ser falso o que foi admitido inicialmente por absurdo (que $\sqrt{2}$ era racional). Conclusão: $\sqrt{2}$ não é racional. Tal número foi chamado de irracional.

Se usarmos uma calculadora veremos que $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$$

Verificamos que esse número pode ser expresso por uma decimal infinita, mas não periódica; aliás todo número irracional pode ser escrito sob a forma de decimal infinita, mas não periódica. Pode-se provar que toda raiz quadrada de número inteiro cujo resultado não seja inteiro é um número irracional. Assim, por exemplo, são irracionais os números (verifique com uma calculadora):

$$\sqrt{3} = 1{,}73205080\ldots$$
$$\sqrt{5} = 2{,}23606797\ldots$$
$$\sqrt{7} = 2{,}64575131\ldots$$

Um outro número irracional usado em várias áreas da Matemática é o número *pi* (π) dado por 3,141592...

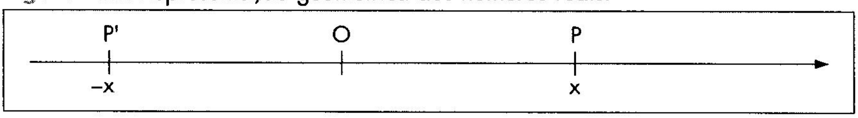
Designemos por I o conjunto de todos os números irracionais. A união do conjunto dos racionais com o dos irracionais dá origem a um conjunto chamado de conjunto dos números reais, indicado por R. Assim:

$$R = Q \cup I.$$

Pelo que foi visto, podemos dizer que o conjunto de todos os números representados por decimais infinitas constitui o conjunto dos números reais. De fato, se $x \in Q$, ele tem representação decimal infinita e periódica e, se $x \in I$, ele tem representação infinita e não periódica.

A representação geométrica (Figura 2.2) de um número real pode ser feita utilizando-se um eixo, orientado geralmente para a direita. Seja O a origem desse eixo; um número real $x > 0$ é representado pelo ponto P à direita de O, de modo que a medida do segmento OP seja igual a x; o número negativo $-x$ é representado pelo ponto P', simétrico de P em relação a O. O número 0 é representado por O.

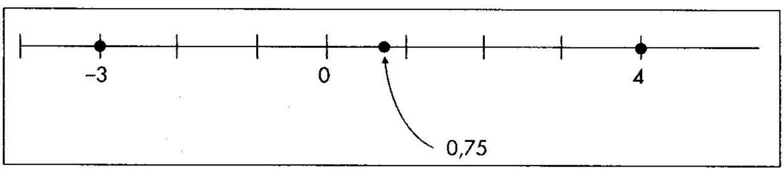
Figura 2.2: Representação geométrica dos números reais.



É claro que, se $x_2 > x_1$, então x_2 é representado à direita de x_1.

Exemplo 2.3. Represente geometricamente os números: 4; –3 e 0,75.

Temos:



Exercícios

1. Diga se cada uma das sentenças é verdadeira ou falsa.

a) $\pi \in Q$ c) $\frac{2}{3} \in Z$ e) $-3 \in Z$ g) $\pi \in I$ i) $2\pi \in Q$

b) $\sqrt{5} \in N$ d) $\sqrt{-1} \in R$ f) $\sqrt{2} \in Q$ h) $0{,}43 \in Q$ j) $2{,}44444\ldots \in I$

2. Escreva na forma decimal (exata ou dízima periódica) os seguintes números racionais:

a) $\frac{2}{5}$ *b)* $\frac{5}{3}$ *c)* $\frac{7}{5}$ *d)* $\frac{16}{50}$ *e)* $\frac{25}{99}$ *f)* $\frac{42}{90}$

3. Escreva os seguintes números na forma decimal, arredondando o resultado para duas casas decimais (se possível use uma calculadora):

a) $\frac{32}{25}$ *b)* $\frac{5}{18}$ *c)* $\frac{125}{200}$ *d)* $\frac{31}{29}$ *e)* $\frac{150}{99}$ *f)* $\frac{150}{990}$

4. Escreva os seguintes números racionais sob a forma de fração:

a) 0,43 *b)* 0,07 *c)* 2,454 *d)* 12,12 *e)* −0,72 *f)* 3,1415

5. Escreva as seguintes dízimas periódicas sob a forma de fração:

a) 0,8888... *b)* 0,2424... *c)* 2,555... *d)* 0,7222... *e)* 0,6555... *f)* 0,62555...

6. Quais os valores reais de x e y de modo que $x^2 + y^2 = 0$?

7. Usando uma calculadora, obtenha as seguintes raízes, com aproximação de 4 casas decimais:

a) $\sqrt{12}$ *b)* $\sqrt{30}$ *c)* $\sqrt{78}$ *d)* $\sqrt{500}$

2.4 Equações do Primeiro Grau

Chamamos de equação do primeiro grau na incógnita x, no universo real, toda equação redutível à forma

$$a \cdot x = b,$$

em que a e b são números reais quaisquer com $a \neq 0$.

Para resolvermos esse tipo de equação, basta dividirmos ambos os membros por a:

$$\frac{a \cdot x}{a} = \frac{b}{a} \Rightarrow x = \frac{b}{a}.$$

O valor encontrado $\frac{b}{a}$ é chamado de raiz da equação.

Exemplo 2.4. Resolva a equação: $4x - 12 = 8 - 6x$.

Resolução

- Transpondo os termos com x para o 1º membro, e os números para o 2º membro, obtemos

$$4x + 6x = 8 + 12.$$

- Agrupando os termos semelhantes,

$$10x = 20.$$

- Dividindo ambos os membros por 10,

$$x = \frac{20}{10} = 2.$$

- Conjunto solução: $S = \{2\}$.

Exemplo 2.5. Resolva a equação $\frac{x-2}{3} + \frac{x-3}{2} = \frac{1}{6}$.

Resolução

- Multiplicando todos os termos da equação por 6 (em que 6 é o mínimo múltiplo comum dos denominadores):

$$6 \cdot \frac{(x-2)}{3} + 6 \cdot \frac{(x-3)}{2} = 6 \cdot \frac{1}{6}.$$

- Efetuando as operações indicadas:

$$2(x-2) + 3(x-3) = 1,$$
$$2x - 4 + 3x - 9 = 1.$$

- Transpondo os termos com x para o 1º membro, e os números para o 2º membro:

$$2x + 3x = 1 + 4 + 9.$$

- Agrupando os termos semelhantes:

$$5x = 14.$$

- Dividindo ambos os membros por 5:

$$x = \frac{14}{5}.$$

- Conjunto solução: $S = \left\{\frac{14}{5}\right\}$.

Exercícios

8. Resolva as equações do 1º grau:

a) $5(x-2) = 4x + 6$

b) $-4(4-x) = 2(x-1)$

c) $-2x = -6$

d) $-3x + 1 = -8$

e) $3(x-5) = 2$

f) $2(x+1) = 2$

g) $-3(x+2) = -6$

h) $0{,}1(x-2) + 0{,}5x = 0{,}7$

i) $0{,}4(x+3) - 0{,}2x = 4$

j) $0{,}3(y-1) + 0{,}4(y-2) = 7$

9. Resolva as seguintes equações do 1º grau:

a) $\frac{x-1}{4} + \frac{x}{3} = \frac{1}{6}$

b) $\frac{x+1}{5} + \frac{x-2}{3} = 4$

c) $\frac{3x+2}{4} - \frac{x+2}{3} = 1$

d) $\frac{2x+1}{6} + \frac{x}{3} = \frac{x-1}{4}$

e) $\frac{10x}{3} + 5x = \frac{12-x}{2}$

f) $\frac{x-4}{4} + \frac{3x-1}{3} = 1$

g) $\frac{2x-1}{9} - \frac{x-4}{5} = x$

h) $\frac{2x+5}{x-3} = \frac{1}{3} + \frac{4}{x-3}$

i) $\frac{3x}{x+1} = 4 + \frac{2x}{2x+2}$

j) $\frac{2y}{5} - \frac{5+2y}{3} = 1$

k) $\frac{4t}{3} - \frac{2t+1}{5} = 2$

l) $M = 100 + 100i$ (incógnita i)

m) $\frac{2k-3}{2} = \frac{2}{3} + \frac{m-5}{9}$ (incógnita m)

n) $y = \frac{2x+1}{x-3}$ (incógnita x)

10. O lucro mensal de uma empresa é dado por $L = 50x - 2.000$, em que x é a quantidade mensal vendida de seu produto. Qual a quantidade que deve ser vendida mensalmente para que o lucro mensal seja igual a \$ 5.000,00?

11. O custo mensal de produção de x camisas de uma fábrica é $C = 5.000 + 15x$. Qual a quantidade mensal produzida sabendo-se que o custo mensal é \$ 8.000,00?

12. O saldo de uma aplicação financeira após t meses de aplicação é dado por: $S = 2.000 + 40t$. Após quanto tempo da aplicação o saldo dobra?

2.5 Inequações do Primeiro Grau

Inequações do primeiro grau na incógnita x são aquelas redutíveis a uma das formas:

$$a \cdot x < b \quad \text{ou} \quad a \cdot x \leq b \quad \text{ou} \quad a \cdot x > b \quad \text{ou} \quad a \cdot x \geq b,$$

em que a e b são números reais quaisquer com $a \neq 0$.

A resolução é feita de modo análogo ao das equações do 1º grau, porém lembrando que, quando multiplicamos ou dividimos ambos os membros da inequação por um número negativo, o sentido da desigualdade muda. No caso de multiplicarmos ou dividirmos os membros por um número positivo, o sentido da desigualdade não se altera.

Exemplo 2.6. Resolva a inequação $3(x - 4) > x + 2$.

Resolução

Temos sucessivamente:

$$3(x-4) > x + 2,$$
$$3x - 12 > x + 2,$$
$$3x - x > 2 + 12,$$
$$2x > 14,$$
$$x > 7.$$

Portanto, o conjunto solução é $S = \{x \in R \mid x > 7\}$.

Exemplo 2.7. Resolva a inequação $2(x-1) < 5x+3$.

Resolução

Como no exemplo anterior,

$$2(x-1) < 5x+3,$$
$$2x-2 < 5x+3,$$
$$2x-5x < 3+2,$$
$$-3x < 5,$$
$$x > -\frac{5}{3}.$$

Portanto, o conjunto solução é $S = \left\{x \in R \mid x > -\frac{5}{3}\right\}$.

Exercícios

13. Resolva em R as inequações:

a) $2x > 10$

b) $-3x < 12$

c) $2x + 1 \geqslant x - 5$

d) $3(x-4) \leqslant 2(x-6)$

e) $4(2x-3) > 2(x-1)$

f) $\frac{x-1}{2} + \frac{x}{3} \geqslant 4$

g) $\frac{x+2}{5} - \frac{x+3}{2} \geqslant 1$

h) $\frac{3y-5}{2} + \frac{y-2}{3} \geqslant 4$

i) $\frac{2m-4}{2} + \frac{m-1}{3} \leqslant 1$

14. O lucro mensal de uma empresa é dado por $L = 30x - 4.000$, em que x é a quantidade mensal vendida. Acima de qual quantidade mensal vendida o lucro é superior a \$ 11.000?

15. O custo diário de produção de um artigo é $C = 200 + 10x$. Sabendo-se que em determinado mês o custo diário oscilou entre um máximo de \$ 4.000 e um mínimo de \$ 2.000, em que intervalo variou a produção diária nesse mês?

2.6 Equações do Segundo Grau

Uma equação do segundo grau, na incógnita x, é toda equação redutível à forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são constantes reais quaisquer com $a \neq 0$. As raízes desse tipo de equação podem ser obtidas por meio da seguinte fórmula resolutiva:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

na qual o valor $b^2 - 4ac$, indicado usualmente por Δ (delta), é chamado de discriminante da equação. É fácil notar que:

- Se $\Delta > 0$, a equação terá duas raízes reais distintas.
- Se $\Delta = 0$, a equação terá uma única raiz real.
- Se $\Delta < 0$, a equação não terá raízes reais.

A dedução da fórmula acima é feita da seguinte forma:

$$ax^2 + bx + c = 0;$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a};$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \left(\text{adicionamos } \frac{b^2}{4a^2} \text{ a ambos os membros}\right);$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2};$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Exemplo 2.8. Resolva a equação $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Resolução

Como $a = 1$, $b = -4$, $c = 3$ então:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1},$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2},$$

$$x = \frac{4 \pm 2}{2},$$

$$x = \frac{4 + 2}{2} = 3, \text{ ou } x = \frac{4 - 2}{2} = 1.$$

Portanto, o conjunto solução é $S = \{1, 3\}$.

Exemplo 2.9. Resolva as equações incompletas do segundo grau:

a) $x^2 - 3x = 0$; b) $x^2 - 9 = 0$.

Resolução

As equações do 2º grau com $b = 0$ ou $c = 0$ são chamadas incompletas. Sua resolução pode ser feita pela fórmula resolutiva, ou ainda como veremos a seguir:

a) de $x^2 - 3x = 0$ temos

$x(x - 3) = 0$.

O produto será 0 se um ou outro fator for 0. Assim:

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3.$$

Portanto, o conjunto solução é $S = \{0, 3\}$;

b) de $x^2 - 9 = 0$ temos

$x^2 = 9$.

Se x elevado ao quadrado dá 9, então $x = \sqrt{9} = 3$ ou $x = -\sqrt{9} = -3$.

Portanto, o conjunto solução é $S = \{3, -3\}$.

Exercícios

16. Resolva as seguintes equações:

a) $x^2 - 5x + 4 = 0$
b) $x^2 - 7x + 12 = 0$
c) $t^2 - 6t + 8 = 0$
d) $x^2 - 4x + 4 = 0$
e) $x^2 - x + 3 = 0$
f) $-x^2 + 3x - 2 = 0$
g) $-m^2 + 5m = 0$
h) $y^2 - 6y - 3 = 0$
i) $t^2 - 2t - 5 = 0$
j) $1 + \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{3}{x}$
k) $\dfrac{5}{3+m} + 2 = \dfrac{3}{3-m}$
l) $\dfrac{2}{p} = \dfrac{5}{p^2} + 1$

17. Resolva as seguintes equações:

a) $x^2 - 5x = 0$
b) $-2x^2 + 6x = 0$
c) $x^2 - 25 = 0$
d) $-m^2 + 16 = 0$
e) $2k^2 - 8 = 0$
f) $3x^2 = 0$

18. Quanto vale a soma das raízes da equação $(3x - 2)(x + 5) = (2 + x)^2$?

19. Para que valores de k a equação na incógnita x, $x^2 - 2kx = 1 - 3k$, tem raízes iguais?

20. O lucro mensal de uma empresa é dado por $L = -x^2 + 10x - 16$, em que x é a quantidade vendida. Para que valores de x o lucro é nulo?

21. Em relação ao exercício anterior, para que valores de x o lucro é igual a 9?

22. A receita diária de um estacionamento para automóveis é $R = 100p - 5p^2$, em que p é o preço cobrado por dia de estacionamento por carro. Qual o preço que deve ser cobrado para dar uma receita diária de \$ 375?

2.7 Intervalos

Os intervalos são particulares e importantes subconjuntos de R. Sejam os números reais a e b tais que $a < b$. Definimos:

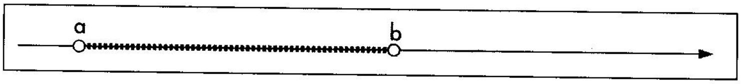
• Intervalo aberto

É o conjunto de valores reais entre a e b (excluídos os extremos a e b), indicado por $]a, b[$, isto é:

$$]a, b[= \{x \in R \mid a < x < b\}.$$

A representação geométrica é dada pela Figura 2.3.

Figura 2.3: Representação do intervalo $]a, b[$.



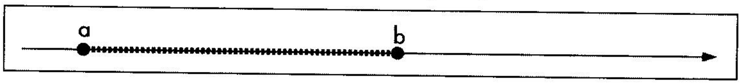
• Intervalo fechado

É o conjunto de valores reais entre a e b (incluídos os extremos a e b), indicado por $[a, b]$, isto é:

$$[a, b] = \{x \in R \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

A representação geométrica é dada pela Figura 2.4.

Figura 2.4: Representação do intervalo $[a, b]$.



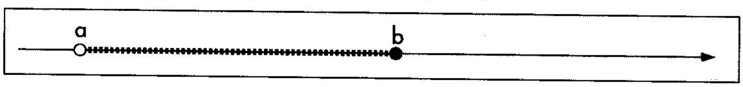
• Intervalo semi-aberto à esquerda

É o conjunto de valores reais entre a e b, excluindo a e incluindo b, indicado por $]a, b]$, isto é:

$$]a, b] = \{x \in R \mid a < x \leqslant b\}.$$

A representação geométrica é dada pela Figura 2.5.

Figura 2.5: Representação do intervalo $]a, b]$.



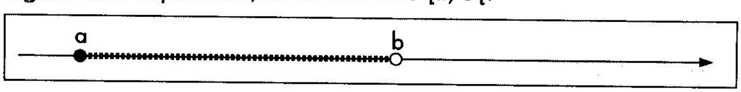
• Intervalo semi-aberto à direita

É o conjunto de valores reais entre a e b, incluindo a e excluindo b, indicado por $[a, b[$, isto é:

$$[a, b[= \{x \in R \mid a \leqslant x < b\}.$$

A representação geométrica é dada pela Figura 2.6.

Figura 2.6: Representação do intervalo $[a, b[$.



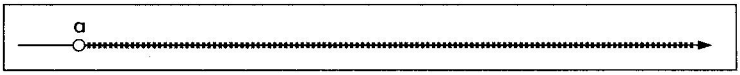
• Intervalo aberto de *a* até infinito

É o conjunto de valores reais maiores do que a, indicado por $]a, \infty[$, isto é:

$$]a, \infty[= \{x \in R \mid x > a\}.$$

A representação geométrica é dada pela Figura 2.7.

Figura 2.7: Representação do intervalo $]a, \infty[$.



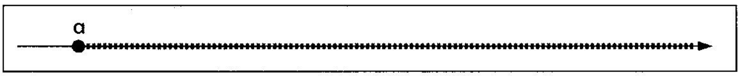
- **Intervalo fechado de *a* até infinito**

É o conjunto de valores reais maiores ou iguais a a, indicado por $[a, \infty[$, isto é:

$$[a, \infty[= \{x \in R \mid x \geqslant a\}.$$

A representação geométrica é dada pela Figura 2.8.

Figura 2.8: Representação do intervalo $[a, \infty[$.



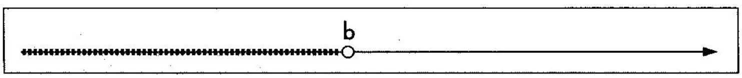
- **Intervalo aberto de menos infinito até *b***

É o conjunto de valores reais menores de que b, indicado por $]-\infty, b[$, isto é:

$$]-\infty, b[= \{x \in R \mid x < b\}.$$

A representação geométrica é dada pela Figura 2.9.

Figura 2.9: Representação do intervalo $]-\infty, b[$.



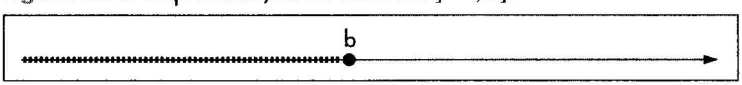
- **Intervalo fechado de menos infinito até *b***

É o conjunto de valores reais menores ou iguais a b, indicado por $]-\infty, b]$, isto é:

$$]-\infty, b] = \{x \in R \mid x \leqslant b\}.$$

A representação geométrica é dada pela Figura 2.10.

Figura 2.10: Representação do intervalo $]-\infty, b]$.



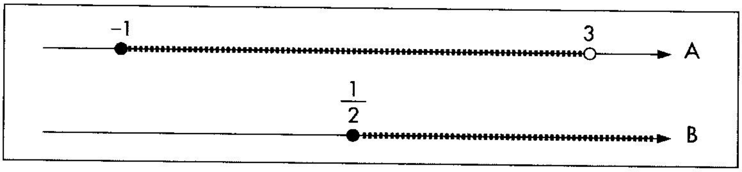
Finalmente, todo o conjunto R dos reais pode ser identificado pelo intervalo $]-\infty, -\infty[$.
Como os intervalos são particulares subconjuntos de R, podemos operar com eles da mesma maneira que outros conjuntos, lembrando apenas que o conjunto universo é R.

Exemplo 2.10. Se $A = [-1, 3[$ e $B = \left[\frac{1}{2}, \infty\right[$, determine:

a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) A^c.

Resolução

Temos:



Logo:

a) $A \cup B = [-1, \infty[$;

b) $A \cap B = \left[\frac{1}{2}, 3\right[$;

c) $A^c =]-\infty, 1[\cup [3, \infty[$.

2.8 Módulo ou Valor Absoluto

Dado um número real x, chamamos de valor absoluto, ou módulo de x, ao número indicado pelo símbolo $|x|$ e dado por

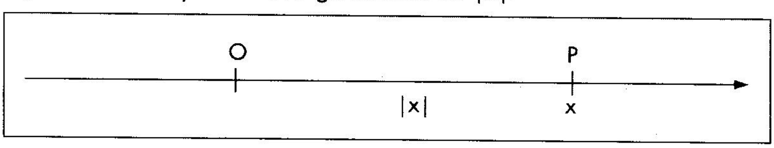
$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x > 0, \\ -x, \text{ se } x < 0, \\ 0, \text{ se } x = 0. \end{cases}$$

Assim, por exemplo:

$$|7| = 7,$$
$$|-4| = -(-4) = 4,$$
$$\left|-\frac{2}{3}\right| = -\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

Se P é a representação geométrica do número x, então a distância de P até a origem é dada pelo módulo de x (Figura 2.11).

Figura 2.11: Representação geométrica de $|x|$.



Propriedades do Módulo

1) Se $|x| = k$, então $x = k$ ou $x = -k$ em que k é um número positivo.
2) Se $|x| < k$, então $-k < x < k$ em que k é uma constante positiva.
3) Se $|x| > k$, então $x > k$ ou $x < -k$ em que k é uma constante positiva.

Exemplo 2.11

a) $|x| = 3 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -3$;

b) $|x| < 5 \Rightarrow -5 < x < 5$;

c) $|x| > 7 \Rightarrow x > 7$ ou $x < -7$.

Exemplo 2.12

Resolva a inequação $|2x - 3| < 7$.

Resolução

Temos sucessivamente

$$|2x - 3| < 7,$$
$$-7 < 2x - 3 < 7,$$
$$-7 + 3 < 2x < 7 + 3,$$
$$-4 < 2x < 10,$$
$$-2 < x < 5.$$

Portanto, o conjunto solução é o intervalo $]-2, 5[$.

Exercícios

23. Dados os intervalos $A = [2, 8]$ e $B = [7, 20]$, obtenha:
a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A - B$ d) A^c em que o universo é o conjunto R

24. Se $A = [1, \infty[$ e $B = [0, 5[$, obtenha:
a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $A - B$

25. Represente geometricamente os conjuntos:
a) $A = \{x \in R \mid x - 1 > 3\}$
b) $B = \{x \in R \mid 4 - x < 1\}$
c) $C = \{x \in R \mid x^2 - 6x + 5 = 0\}$
d) $D = \{x \in R \mid |x| = 5\}$
e) $E = \{y \in R \mid |y| = 2\}$
f) $F = \{t \in R \mid |t| \leq 2\}$
g) $G = \{t \in R \mid |t| > 1\}$
h) $H = \{m \in R \mid |m - 2| < 3\}$

26. Obtenha os valores de x que satisfazem cada uma das inequações:
a) $|x| < 12$
b) $|x - 6| < 3$
c) $|1 - 2x| < 7$
d) $|x| > 8$
e) $|x - 7| > 2$
f) $|2 - 3x| > 5$