$$\cos^5 x = (\cos^2 x)^2 \cdot \cos x$$

$$= (1 - \sin^2 x)^2 \cos x$$

$$= (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) \cos x$$

$$= \cos x - 2\sin^2 x \cos x + \sin^4 x \cos x.$$

$$\int \cos^5 x \, dx = \int (\cos x - 2 \operatorname{sen}^2 x \, \cos x + \operatorname{sen}^4 x \, \cos x) dx$$

$$= \int \cos x \, dx - 2 \int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx + \int \operatorname{sen}^4 x \cos x \, dx$$

$$= \operatorname{sen} x - \frac{2}{3} \operatorname{sen}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{sen}^5 x + C.$$

(ii)
$$\int \sin^3 2\theta \ d\theta.$$

Usando o mesmo raciocínio do exemplo anterior, temos:

$$sen^{3} 2\theta = sen^{2} 2\theta \cdot sen 2\theta$$
$$= (1 - cos^{2} 2\theta) \cdot sen 2\theta$$
$$= sen 2\theta - cos^{2} 2\theta sen 2\theta.$$

Portanto,

$$\int \sin^3 2\theta \, d\theta = \int (\sin 2\theta - \cos^2 2\theta \sin 2\theta) d\theta$$
$$= \int \sin 2\theta \, d\theta - \int \cos^2 2\theta \sin 2\theta \, d\theta$$
$$= -\frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{6} \cos^3 2\theta + C.$$

(iii)
$$\int \sin^4 x \ dx.$$

Neste exemplo n é um número par. Na preparação do integrando, usamos agora as identidades (2) e (3). Temos:

$$sen4 x = (sen2 x)2$$

$$= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^{2}$$

$$= \frac{1}{4} (1 - 2 \cos 2x + \cos^{2} 2x)$$

$$= \frac{1}{4} \left(1 - 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x.$$

$$\int \sin^4 x \, dx = \int \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\right) dx$$
$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Observamos que o raciocínio usado neste exemplo é válido para as potências pares.

7.2.3 As integrais $\int sen^m u cos^n u du$, onde m e n são inteiros positivos

Nestas integrais, a preparação do integrando dever ser feita visando à aplicação do método da substituição, da mesma forma que foi feito em 7.2.1 e 7.2.2.

Quando pelo menos um dos expoentes é ímpar, usamos a identidade (1) e, quando os dois expoentes são pares, usamos (2) e (3) e, eventualmente, também (1).

7.2.4 Exemplos Calcular as integrais:

(i)
$$\int \sin^5 x \cdot \cos^2 x \ dx.$$

Preparando o integrando, temos:

$$sen5 x cos2 x = (sen2 x)2 · sen x · cos2 x$$

$$= (1 - cos2 x)2 · sen x · cos2 x$$

$$= (1 - 2cos2 x + cos4 x) sen x cos2 x$$

$$= cos2 x sen x - 2cos4 x sen x + cos6 x sen x.$$

Portanto,

$$\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx = \int (\cos^2 x \sin x - 2 \cos^4 x \sin x + \cos^6 x \sin x) dx$$

$$= \int \cos^2 x \sin x \, dx - 2 \int \cos^4 x \sin x \, dx$$

$$+ \int \cos^6 x \sin x \, dx$$

$$= \frac{-1}{3} \cos^3 x + \frac{2}{5} \cos^5 x - \frac{1}{7} \cos^7 x + C.$$

(ii)
$$\int \sin^2 x \cos^4 x \ dx.$$

Preparando o integrando, temos:

$$sen2 x cos4 x = sen2 x \cdot (cos2 x)2$$

$$= \frac{1 - cos 2x}{2} \cdot \left(\frac{1 + cos 2x}{2}\right)^{2}$$

$$= \frac{1}{8} (1 + cos 2x - cos2 2x - cos3 2x)$$

$$= \frac{1}{8} \left[1 + \cos 2x - \frac{1 + \cos 4x}{2} - (1 - \sin^2 2x) \cos 2x \right]$$
$$= \frac{1}{16} - \frac{1}{16} \cos 4x + \frac{1}{8} \sin^2 2x \cos 2x.$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \int \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{16} \cos 4x + \frac{1}{8} \sin^2 2x \cos 2x \right) dx$$
$$= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.$$

(iii)
$$\int \sin^4 x \, \cos^4 x \, dx.$$

Quando m e n são iguais, também podemos usar a identidade

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x. \tag{4}$$

Temos:

$$sen4 x cos4 x = \left(\frac{1}{2} sen 2x\right)^{4}$$

$$= \frac{1}{16} \left(sen2 2x\right)^{2}$$

$$= \frac{1}{16} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right)^{2}$$

$$= \frac{1}{64} \left(1 - 2\cos 4x + \cos^{2} 4x\right)$$

$$= \frac{1}{64} \left(1 - 2\cos 4x + \frac{1 + \cos 8x}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{128} - \frac{1}{32} \cos 4x + \frac{1}{128} \cos 8x.$$

Portanto.

$$\int \sin^4 x \cos^4 x \, dx = \int \left(\frac{3}{128} - \frac{1}{32} \cos 4x + \frac{1}{128} \cos 8x \right) dx$$
$$= \frac{3}{128} x - \frac{1}{128} \sin 4x + \frac{1}{1024} \sin 8x + C.$$

7.2.5 As integrais $\int tg^n u du = \int \cot g^n u du$, onde n é inteiro positivo

Na preparação do integrando, usamos as identidades

$$tg^2 u = \sec^2 u - 1 e \tag{5}$$

$$\cot g^2 u = \csc^2 u - 1. \tag{6}$$

Os artifícios são semelhantes aos usados nas seções anteriores. Temos:

$$tg^{n}u = tg^{n-2}u \cdot tg^{2}u$$

$$= tg^{n-2}u(\sec^{2}u - 1)$$
e
$$\cot g^{n}u = \cot g^{n-2}u \cdot \cot g^{2}u$$

$$= \cot g^{n-2}u(\csc^{2}u - 1).$$

7.2.6 Exemplos Calcular as integrais:

(i)
$$\int tg^3 3\theta \ d\theta.$$

Preparando o integrando, temos:

$$tg^{3}3\theta = tg 3\theta \cdot tg^{2}3\theta$$
$$= tg 3\theta (sec^{2}3\theta - 1)$$
$$= tg 3\theta sec^{2}3\theta - tg 3\theta.$$

Portanto,

$$\int tg^3 3\theta \ d\theta = \int (tg \ 3\theta \sec^2 3\theta - tg \ 3\theta) d\theta$$
$$= \frac{1}{6} tg^2 3\theta + \frac{1}{3} \ln|\cos 3\theta| + C.$$

(ii)
$$\int \cot g^4 2x \ dx.$$

Preparando o integrando, temos:

$$\cot g^4 2x = \cot g^2 2x \cdot \cot g^2 2x$$

$$= \cot g^2 2x (\csc^2 2x - 1)$$

$$= \cot g^2 2x \cdot \csc^2 2x - \cot g^2 2x$$

$$= \cot g^2 2x \cdot \csc^2 2x - (\csc^2 2x - 1)$$

$$= \cot g^2 2x \cdot \csc^2 2x - \csc^2 2x + 1.$$

Portanto,

$$\int \cot^4 2x \ dx = \int (\cot^2 2x \cdot \csc^2 2x - \csc^2 2x + 1) dx$$
$$= -\frac{1}{6} \cot^3 2x + \frac{1}{2} \cot 2x + x + C.$$

7.2.7 As integrais $\int \sec^n u \ du \ e \int \csc^n u \ du$ onde n é inteiro positivo

Estas integrais, para o caso de n ser um número par, são revolvidas utilizando as identidades (5) e (6). Temos:

$$\sec^{n} x = (\sec^{2} x)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \sec^{2} x$$
$$= (tg^{2}x + 1)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \sec^{2} x$$

e

$$\csc^{n} x = (\csc^{2} x)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \csc^{2} x$$
$$= (\cot^{2} x + 1)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \csc^{2} x.$$

Quando n for ímpar, devemos aplicar o método da integração por partes visto na Seção 6.5.

7.2.8 Exemplos Calcular as integrais:

(i)
$$\int \csc^6 x \, dx$$
.

Preparando o integrando, temos:

$$cosec6 x = (cosec2 x)2 \cdot cosec2 x$$

$$= (cotg2 x + 1)2 \cdot cosec2 x$$

$$= (cotg4 x + 2 cotg2 x + 1)cosec2 x$$

$$= cotg4 x cosec2 x + 2 cotg2 x cosec2 x + cosec2 x.$$

Portanto,

$$\int \csc^6 x \, dx = \int (\cot^4 x \csc^2 x + 2 \cot^2 x \csc^2 x + \csc^2 x) \, dx$$
$$= -\frac{1}{5} \cot^5 x - \frac{2}{3} \cot^3 x - \cot x + C.$$

(ii)
$$\int \sec^3 x \, dx$$
.

Nesta integral vamos usar o método de integração por partes. Seja

$$u = \sec x$$
 \Rightarrow $du = \sec x \cdot \operatorname{tg} x dx$
 $dv = \sec^2 x dx$ \Rightarrow $v = \int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x.$

Então,

$$\int \sec^3 x \, dx = \sec x \cdot \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x \cdot \sec x \cdot \operatorname{tg} x \, dx$$

$$= \sec x \cdot \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^2 x \sec x \, dx$$

$$= \sec x \cdot \operatorname{tg} x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x \, dx$$

$$= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx.$$

Adicionando $\int \sec^3 x \, dx$ a cada membro, obtemos:

$$2 \int \sec^3 x \ dx = \sec x \operatorname{tg} x + \int \sec x \ dx$$
$$= \sec x \operatorname{tg} x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|$$

ou

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} \sec x \, \text{tg } x + \frac{1}{2} \ln|\sec x + \text{tg } x| + C.$$

7.2.9 As integrais $\int tg^m u \sec^n u \ du \ e \int \cot g^m u \csc^n u \ du$, onde $m \ e \ n$ são inteiros positivos

Quando m for ímpar ou n for par, podemos preparar o integrando para aplicar o método da substituição.

Quando m for par e n for ímpar, a integral deve ser revolvida por integração por partes. Os exemplos que seguem ilustram os diversos casos.

7.2.10 Exemplos Calcular as integrais:

(i)
$$\int tg^7 x \sec^6 x \, dx.$$

Neste exemplo n é par. Podemos, então, preparar o integrando para aplicar o método da substituição. Temos:

$$tg^{7}x \sec^{6}x = tg^{7}x(\sec^{2}x)^{2} \sec^{2}x$$

$$= tg^{7}x(tg^{2}x + 1)^{2} \sec^{2}x$$

$$= tg^{7}x(tg^{4}x + 2tg^{2}x + 1)\sec^{2}x$$

$$= tg^{11}x \sec^{2}x + 2tg^{9}x \sec^{2}x + tg^{7}x \sec^{2}x.$$

Portanto,

$$\int tg^7 x \sec^6 dx = \int (tg^{11}x \sec^2 x + 2tg^9 x \sec^2 x + tg^7 x \sec^2 x) dx$$
$$= \frac{1}{12} tg^{12} x + \frac{1}{5} tg^{10} x + \frac{1}{8} tg^8 x + C.$$

(ii)
$$\int tg^7 x \sec^5 x \, dx.$$

Neste exemplo m é ímpar. Podemos, então, preparar o integrando como segue

$$tg^7 x \sec^5 x = (tg^2 x)^3 tg \ x \sec^4 x \sec x$$

= $(\sec^2 x - 1)^3 \sec^4 x \sec x tg \ x$
= $(\sec^{10} x - 3 \sec^8 x + 3 \sec^6 x - \sec^4 x) \sec x tg \ x$.

Portanto,

$$\int tg^7 x \sec^5 x \, dx = \int (\sec^{10} x - 3 \sec^8 x + 3 \sec^6 x - \sec^4 x) \sec x \, tg \, x \, dx$$
$$= \frac{1}{11} \sec^{11} x - \frac{1}{3} \sec^9 x + \frac{3}{7} \sec^7 x - \frac{1}{5} \sec^5 x + C.$$

Observamos que, no exemplo (i), poderíamos preparar o integrando de forma idêntica à preparação do exemplo (ii), pois m = 7, isto é, m é ímpar. Os resultados seriam equivalentes.

(iii)
$$\int tg^2 x \sec^3 x \, dx.$$

Reescrevendo o integrando, temos:

$$\int tg^2 x \sec^3 x \, dx = \int (\sec^2 x - 1) \sec^3 x \, dx$$
$$= \int (\sec^5 x - \sec^3 x) \, dx$$
$$= \int \sec^5 x \, dx - \int \sec^3 x \, dx.$$

Recaímos em duas integrais que devem ser resolvidas por partes, como foi feito no Exemplo 7.2.8 9(ii). Temos:

$$\int tg^{2}x \sec^{3}x \, dx = \int \sec^{5}x \, dx - \int \sec^{3}x \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \sec^{3}x \, tg \, x - \frac{1}{8} \sec x \, tg \, x - \frac{1}{8} \ln|\sec x + tg \, x| + C.$$

Observamos que as integrais $\int \sec^5 x dx$ e $\int \sec^3 x dx$ também podem ser calculadas usando a fórmula de recorrência que será dada na seção seguinte.

7.2.11 Fórmulas de Redução ou Recorrência

O método de integração por partes pode ser usado para obtermos fórmulas de redução ou recorrência. A idéia é reduzir uma integral em outra mais simples do mesmo tipo. A aplicação repetida dessas fórmulas nos levará ao cálculo da integral dada.

As mais usadas são

$$\int \sin^n u \ du = \frac{-1}{n} \sin^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} u \ du; \tag{7}$$

$$\int \cos^n u \ du = \frac{1}{n} \cos^{n-1} u \sin u + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u \, du; \tag{8}$$

$$\int \sec^n u \ du = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} u \ \text{tg} \ u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u \ du; \tag{9}$$

$$\int \csc^n u \ du = \frac{-1}{n-1} \csc^{n-2} u \cot u + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} u \ du.$$
 (10)

Prova de (7): Seja

$$u^* = \operatorname{sen}^{n-1} u \implies du^* = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2} u \cos u \, du$$

 $dv = \operatorname{sen} u \, du \implies v = \int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u.$

Integrando por partes, vem:

$$\int \sin^{n} u \, du = \sin^{n-1} u (-\cos u) - \int (-\cos u) \cdot (n-1) \cdot \sin^{n-2} u \cdot \cos u \, du$$

$$= -\sin^{n-1} u \cos u + (n-1) \int \sin^{n-2} u \cos^{2} u \, du$$

$$= -\sin^{n-1} u \cos u + (n-1) \int \sin^{n-2} u (1 - \sin^{2} u) \, du$$

$$= -\sin^{n-1} u \cos u + (n-1) \int (\sin^{n-2} u - \sin^{n} u) \, du$$

$$= -\sin^{n-1} u \cos u - (n-1) \int \sin^{n} u \, du + (n-1) \int \sin^{n-2} u \, du.$$

Somando $(n-1) \int sen^n u \, du$ em ambos os membros, obtemos:

$$n \int \operatorname{sen}^{n} u \ du = -\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + (n-1) \int \operatorname{sen}^{n-2} u \, du$$

ou

$$\int \operatorname{sen}^{n} u \, du = \frac{-1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} u \, du,$$

o que prova (7).

7.2.12 Exemplo Aplicar uma fórmula de recorrência para calcular a integral

$$\int \sin^5 2x \, dx.$$

Fazendo u = 2x, temos du = 2 dx. Então,

$$\int \sin^5 2x \, dx = \frac{1}{2} \int \sin^5 u \, du$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{5} \sin^4 u \cos u + \frac{4}{5} \int \sin^3 u \, du \right]$$

$$= \frac{-1}{10} \sin^4 u \cos u + \frac{2}{5} \left[\frac{-1}{3} \sin^2 u \cos u + \frac{2}{3} \int \sin u \, du \right]$$

$$= \frac{-1}{10} \sin^4 u \cos u - \frac{2}{15} \sin^2 u \cos u - \frac{4}{15} \cos u + C$$

$$= \frac{-1}{10} \sin^4 2x \cos 2x - \frac{2}{15} \sin^2 2x \cos 2x - \frac{4}{15} \cos 2x + C.$$

7.2.13 Integração de funções envolvendo seno e cosseno de arcos diferentes As identidades trigonométricas

$$sen a cos b = \frac{1}{2} [sen (a + b) + sen (a - b)]$$
(11)

$$sen a sen b = \frac{1}{2} [cos (a - b) - cos (a + b)]$$
(12)

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos (a+b) + \cos (a-b)]$$
 (13)

auxiliam na resolução de integrais envolvendo seno e cosseno de arcos diferentes. Os exemplos seguintes ilustram alguns casos.

7.2.14 Exemplos Calcular as integrais

(i) $\int \sin 4x \cos 2x \, dx.$

Usando (11), vamos preparar o integrando. Temos:

$$sen 4x cos 2x = \frac{1}{2} [sen 6x + sen 2x].$$

Logo,

$$\int \sin 4x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \int [\sin 6x + \sin 2x] \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int \sin 6x \, dx + \int \sin 2x \, dx \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} \left(-\cos 6x \right) + \frac{1}{2} \left(-\cos 2x \right) \right] + C$$

$$= -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{3} \cos 6x + \cos 2x \right] + C.$$

(ii)
$$\int \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 2x dx.$$

Usando (12), temos:

$$\int \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 2x \, dx = \frac{1}{2} \int [\cos 3x - \cos 7x] \, dx$$
$$= \frac{1}{2} \left[\int \cos 3x \, dx - \int \cos 7x \, dx \right]$$
$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x - \frac{1}{7} \operatorname{sen} 7x \right] + C.$$

(iii)
$$\int \cos 5x \cos 3x \, dx.$$

Usando (13), temos:

$$\int \cos 5x \cos 3x \, dx = \frac{1}{2} \int [\cos 8x + \cos 2x] \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int \cos 8x \, dx + \int \cos 2x \, dx \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{8} \sin 8x + \frac{1}{2} \sin 2x \right] + C$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4} \sin 8x + \sin 2x \right] + C.$$

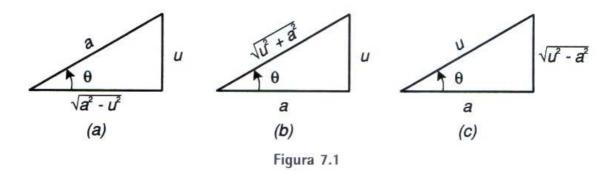
7.3 Integração por Substituição Trigonométrica

Muitas vezes, substituições trigonométricas convenientes nos levam à solução de uma integral. Se o integrando contém funções envolvendo as expressões

$$\sqrt{a^2 - u^2}$$
, $\sqrt{a^2 + u^2}$ ou $\sqrt{u^2 - a^2}$, onde $a > 0$,

é possível fazermos uma substituição trigonométrica adequada.

As figuras 7.1 (a), (b) e (c) nos sugerem tal substituição.



(i) A função integrando envolve $\sqrt{a^2 - u^2}$.

Neste caso, usamos $u = a \operatorname{sen} \theta$. Então, $du = a \cos \theta d\theta$. Supondo que $\frac{-\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, temos:

$$\sqrt{a^2 - u^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}$$
$$= \sqrt{a^2 (1 - \operatorname{sen}^2 \theta)}$$
$$= \sqrt{a^2 \cos^2 \theta}$$
$$= a \cos \theta.$$

(ii) A função integrando envolve $\sqrt{u^2 + a^2}$.

Neste caso, usamos $u = a \operatorname{tg} \theta$. Então, $du = a \sec^2 \theta \, d\theta$. Supondo que $\frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, temos:

$$\sqrt{a^2 + u^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \theta}$$
$$= \sqrt{a^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \theta)}$$
$$= \sqrt{a^2 \sec^2 \theta}$$
$$= a \sec \theta.$$

(ii) A função integrando envolve $\sqrt{u^2 - a^2}$.

Neste caso, usamos $u = a \sec \theta$. Então, $du = a \sec \theta \tan \theta$. Supondo $\theta \tan \theta = 0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \le \theta < \frac{3\pi}{2}$, temos:

$$\sqrt{u^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta - a^2}$$
$$= \sqrt{a^2 (\sec^2 \theta - 1)}$$
$$= \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \theta}$$
$$= a \operatorname{tg} \theta.$$

7.3.1 Exemplos Calcular as integrais:

(i)
$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{2x^2} dx.$$

Neste exemplo, usamos x = 3 sen θ . Então, $dx = 3\cos\theta d\theta$. Assim:

$$\sqrt{9-x^2} = 3\cos\theta$$
, para $\frac{-\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

Logo,

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{2x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{3\cos\theta}{9\sin^2\theta} \cdot 3\cos\theta \, d\theta$$
$$= \frac{1}{2} \int \cot g^2\theta \, d\theta$$
$$= \frac{1}{2} \int (\csc^2\theta - 1) \, d\theta$$
$$= \frac{1}{2} \left(-\cot \theta - \theta \right) + C.$$

Devemos, agora, escrever este resultado em termos da variável original x. Sabemos que, se x=3 sen θ , $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, então $\theta = \arcsin \frac{x}{3}$.

Observando a Figura 7.1(a), vemos que:

$$\cot \theta = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x}.$$

Portanto,

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{2x^2} dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{9 - x^2}}{x} - arc sen \frac{x}{3} \right) + C.$$

(ii)
$$\int \frac{x^2}{3\sqrt{x^2+4}} \, dx.$$

Neste exemplo, usamos $x = 2 \operatorname{tg} \theta$. Então, $dx = 2 \operatorname{sec}^2 \theta \ d\theta$. Assim,

$$\sqrt{x^2+4}=2\sec\theta$$
, para $\frac{-\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$.

Logo,

$$\int \frac{x^2}{3\sqrt{x^2 + 4}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{4 \operatorname{tg}^2 \theta}{2 \sec \theta} \cdot 2 \sec^2 \theta \, d\theta$$
$$= \frac{4}{3} \int \operatorname{tg}^2 \theta \sec \theta \, d\theta$$
$$= \frac{4}{3} \int (\sec^2 \theta - 1) \sec \theta \, d\theta$$
$$= \frac{4}{3} \int (\sec^3 \theta - \sec \theta) \, d\theta.$$

Usando a fórmula de recorrência 7.2.11 (9), vem:

$$\int \frac{x^2}{3\sqrt{x^2 + 4}} dx = \frac{4}{3} \left[\frac{1}{2} \sec \theta \operatorname{tg} \theta + \frac{1}{2} \int \sec \theta d\theta - \int \sec \theta d\theta \right]$$
$$= \frac{2}{3} \sec \theta \operatorname{tg} \theta - \frac{2}{3} \ln|\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C.$$

Vamos, agora, escrever este resultado em termos da variável original x. Observando a Figura 7.1 (b), escrevemos

$$\sec \theta = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{2} \operatorname{etg} \theta = \frac{x}{2}.$$

Portanto.

$$\int \frac{x^2}{3\sqrt{x^2+4}} dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{x^2+4}}{2} \cdot \frac{x}{2} - \frac{2}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+4}}{2} + \frac{x}{2} \right| + C$$
$$= \frac{1}{6} x \sqrt{x^2+4} - \frac{2}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+4}+x}{2} \right| + C.$$

Este resultado poderia ainda ser escrito como

$$\int \frac{x^2}{3\sqrt{x^2+4}} dx = \frac{1}{6} x\sqrt{x^2+4} - \frac{2}{3} \ln(\sqrt{x^2+4} + x) + D,$$
onde $D = C + \frac{2}{3} \ln 2$.

(iii)
$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 16}}$$

Neste exemplo, usamos $x = 4 \sec \theta$. Então, $dx = 4 \sec \theta \tan \theta$. Assim:

$$\sqrt{x^2 - 16} = 4 \operatorname{tg} \theta$$
, para $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \le \theta < \frac{3\pi}{2}$.

Logo,

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 16}} = \int \frac{4 \sec \theta \tan \theta d\theta}{64 \cdot \sec^3 \theta \cdot 4 \cdot \tan \theta}$$

$$= \frac{1}{64} \int \frac{d\theta}{\sec^2 \theta}$$

$$= \frac{1}{64} \int \cos^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{1}{64} \int \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= \frac{1}{128} \int (1 + \cos 2\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{128} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta\right) + C.$$

Vamos, agora, escrever este resultado em termos da variável original x. Observando a Figura 7.1 (c), escrevemos

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x}; \cos \theta = \frac{4}{x}.$$

Da identidade trigonométrica

$$\frac{1}{2}\sin 2\theta = \sin \theta \cos \theta$$

vem que

$$\frac{1}{2}\sin 2\theta = \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x} \cdot \frac{4}{x}.$$

Para substituirmos o valor de θ , devemos tomar algum cuidado. Inicialmente, observamos que a função integrando está definida para valores de x > 4 e x < -4.

Para
$$x > 4$$
, temos que sec $\theta = \frac{x}{4} > 1$ e, portanto, $\theta = arc \sec \frac{x}{4}, 0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$

Para
$$x < -4$$
, temos que sec $\theta = \frac{x}{4} < -1$ e sua inversa $\left(\operatorname{arc sec} \frac{x}{4} \right)$ toma valores entre $\frac{\pi}{2}$ e π (ver Seção 2.15.4).

Como, ao fazermos a substituição $x=4\sec\theta$, assumimos que $\pi \le \theta < \frac{3\pi}{2}$ e, como sec $(2\pi-a)=\sec a$, para x<-4, podemos escrever $\theta=2\pi- \operatorname{arc}\sec\frac{x}{4}, \pi \le \theta < \frac{3\pi}{2}$.

Portanto, para x > 4, temos:

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 16}} = \frac{1}{128} \left(\arcsin \frac{x}{4} + \frac{4\sqrt{x^2 - 16}}{x^2} \right) + C$$

e, para x < -4,

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 16}} = \frac{1}{128} \left(2\pi - \arccos \frac{x}{4} + \frac{4\sqrt{x^2 - 16}}{x^2} \right) + C_1$$
$$= \frac{1}{128} \left(-\arccos \frac{x}{4} + \frac{4\sqrt{x^2 - 16}}{x^2} \right) + C,$$

onde
$$C = \frac{\pi}{64} + C_1$$
.

7.4 Exercícios

Nos exercícios 1 a 35, calcular a integral indefinida.

$$1. \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

3.
$$\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx$$

$$5. \int \frac{\cot g \, (1/x)}{x^2} \, dx$$

7.
$$\int \sin(\omega t + \theta) dt$$

$$2. \quad \int \cos x \cdot \cos (\sin x) dx$$

$$4. \qquad \int x \operatorname{tg}(x^2 + 1) dx$$

$$\mathbf{6.} \quad \int \sec (x+1) dx$$

8.
$$\int x \csc x^2 dx$$

9.
$$\int \cos x \cdot \operatorname{tg} (\sin x) dx$$

$$11. \int \cos^5(3-3x)dx$$

13.
$$\int e^{2x} \cos^2(e^{2x} - 1) dx$$

$$15. \int \operatorname{sen}^3(1-2\theta) \cos^3(1-2\theta) d\theta$$

17.
$$\int_{\theta}^{1} tg^{3}(\ln \theta) d\theta$$

19.
$$\int \cos^4 x \, dx$$

21.
$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$$

$$23. \int 15 \, \mathrm{sen}^2 x \, \mathrm{cos}^3 x \, dx$$

$$25. \int \cos^6 3x \, dx$$

$$27. \int \sin 3x \cos 5x \, dx$$

29.
$$\int \operatorname{sen} \, \omega t \operatorname{sen} \, (\omega t + \theta) \, dt$$

31.
$$\int \sec^4 t \cot g^6 t \sin^8 t \, dt$$

33.
$$\int \sec^3(1-4x)dx$$

35.
$$\int x \cot^2(x^2 - 1) \csc^2(x^2 - 1) dx$$

36. Verificar as fórmulas de recorrência (8), (9) e (10) da Seção 7.2.11.

37. Verificar as fórmulas:

(a)
$$\int tg^n u \, du = \frac{1}{n-1} tg^{n-1} u - \int tg^{n-2} u \, du$$

(b)
$$\int \cot g^n u \, du = \frac{-1}{n-1} \cot g^{n-1} u - \int \cot g^{n-2} u \, du$$

38. Calcular a área limitada pela curva $y = \cos x$, pelas retas $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$ e o eixo dos x.

39. Calcular a área limitada por $y = 2|\sin x|, x = 0, x = 2\pi$ e o eixo dos x.

40. Calcular a área da região limitada por $y = tg^3x$, y = 1 e x = 0.

10.
$$\int \sin^3(2x+1)dx$$

12.
$$\int 2x \, \mathrm{sen}^4 (x^2 - 1) dx$$

14.
$$\int \sin^3 2\theta \cos^4 2\theta \ d\theta$$

16.
$$\int \sin^{19}(t-1)\cos(t-1)dt$$

$$18. \quad \int tg^3x \cos^4x \, dx$$

$$20. \int tg^4 x \ dx$$

22.
$$\int 15 \, \text{sen}^5 x \, dx$$

$$24. \quad \int 48 \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx$$

$$26. \int \frac{-3\cos^2 x}{\sin^4 x} \, dx$$

$$30. \quad \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} \, dx$$

32.
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \, \mathrm{tg}^3 \sqrt{x^2 - 1} \, dx$$

34.
$$\int \csc^4(3-2x)dx$$

- 41. Calcular a área sob o gráfico de $y = \cos^6 x$, de 0 até π .
- **42.** Calcular a área sob o gráfico de $y = \text{sen}^6 x$, de 0 até π .
- **43.** Calcular a área sob o gráfico de $y = \text{sen}^3 x$, de 0 até π .
- 44. Calcular a área entre as curvas $y = \sin^2 x$ e $y = \cos^2 x$, de $\frac{\pi}{4}$ até $\frac{3\pi}{4}$.

Nos exercícios 45 a 67, calcular a integral indefinida:

$$45. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 5}}$$

47.
$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 9}} dx$$

49.
$$\int x^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

51.
$$\int \frac{5x+4}{x^3\sqrt{x^2+1}} dx$$

53.
$$\int \frac{t^5}{\sqrt{t^2 + 16}} dt$$

$$55. \int \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}} \, dx$$

$$57. \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx$$

$$59. \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3} dx$$

61.
$$\int \frac{(6x+5)}{\sqrt{9x^2+1}} \, dx$$

$$63. \int \sqrt{4-x^2} dx$$

$$\mathbf{65.} \ \int \sqrt{4+x^2} dx$$

$$67. \int \left(\sin x + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx$$

Nos exercícios 68 a 72, calcular a integral definida:

68.
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 2}}$$

70.
$$\int_{1}^{2} \frac{dt}{t^{4}\sqrt{4+t^{2}}}$$

72.
$$\int_{6}^{7} \frac{dt}{(t-1)^{2}\sqrt{(t-1)^{2}-9}}$$

$$46. \quad \int \frac{dt}{\sqrt{9-16t^2}}$$

48.
$$\int (1-4t^2)^{3/2} dt$$

$$50. \quad \int x^3 \sqrt{x^2 + 3} \, dx$$

$$52. \quad \int (x+1)^2 \sqrt{x^2+1} \ dx$$

$$54. \quad \int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}} \, dx$$

$$56. \quad \int \frac{e^x}{\sqrt{4 - e^{2x}}} \, dx$$

$$58. \quad \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2} dx$$

$$60. \quad \int \frac{(x+1)}{\sqrt{4-x^2}} \, dx$$

62.
$$\int \frac{(x+3)}{\sqrt{x^2+2x}} \, dx$$

$$64. \quad \int \sqrt{x^2 - 4} dx$$

66.
$$\int (\sqrt{1+x^2} + 2x) \, dx$$

69.
$$\int_0^{a/2b} \sqrt{a^2 - b^2 x^2} \ dx, 0 < a < b$$

71.
$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2 \sqrt{9t^2 + 16}}$$

Nos exercícios 73 a 76, verificar se a integral imprópria converge. Em caso positivo, determinar seu valor.

73.
$$\int_{3}^{10} \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 9}}$$

74.
$$\int_{3}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

75.
$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$$

$$76. \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$$

7.5 Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

No Capítulo 2, vimos que uma função racional f(x) é definida como o quociente de duas funções polinomiais, ou seja,

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

onde p(x) e q(x) são polinômios.

As integrais de algumas funções racionais simples, como, por exemplo,

$$\frac{1}{x^2}$$
, $\frac{1}{x^2+1}$, $\frac{2x}{x^2+1}$, $\frac{1}{x^2+6x+13}$

são imediatas ou podem ser resolvidas por substituição e já foram vistas anteriormente.

Nesta seção, vamos apresentar um procedimento sistemático para calcular a integral de qualquer função racional. A idéia básica é escrever a função racional dada como uma soma de frações mais simples. Para isto, usaremos um resultado importante da Álgebra, que é dado na proposição seguinte.

7.5.1 Proposição Se p(x) é um polinômio com coeficientes reais, p(x) pode ser expresso como um produto de fatores lineares e/ou quadráticos, todos com coeficientes reais.

7.5.2 Exemplos

- (i) O polinômio $q(x) = x^2 3x + 2$ pode ser escrito como o produto dos fatores lineares x 2 e x 1, ou seja, q(x) = (x 2)(x 1).
- (ii) O polinômio $q(x) = x^3 x^2 + x 1$ pode ser expresso como o produto do fator linear x 1 pelo fator quadrático irredutível $x^2 + 1$, isto é,

$$q(x) = (x^2 + 1)(x - 1).$$

(iii)
$$p(x) = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 1)^2(x^2 + 3x + 4)$$
 é uma decomposição do polinômio
$$p(x) = 3x^5 + 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 7x + 4.$$

A decomposição da função racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ em frações mais simples está subordinada ao modo como o denominador q(x) se decompõe nos fatores lineares e/ou quadráticos irredutíveis. Vamos considerar os vários casos separadamente. As formas das respectivas frações parciais são asseguradas por resultados da Álgebra e não serão demonstradas.

Para o desenvolvimento do método, vamos considerar que o coeficiente do termo de mais alto grau do polinômio do denominador q(x) é 1. Se isso não ocorrer, dividimos o numerador e o denominador da função racional f(x) por esse coeficiente.

Vamos supor, também, que o grau de p(x) é menor que o grau de q(x). Caso isso não ocorra, devemos primeiro efetuar a divisão de p(x) por q(x).

As diversas situações serão exploradas nos exemplos.

Caso 1 Os fatores de q(x) são lineares e distintos.

Neste caso, podemos escrever q(x) na forma

$$q(x) = (x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n),$$

onde os a_i , i = 1, ..., n, são distintos dois a dois.

A decomposição da função racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ em frações mais simples é dada por:

$$f(x) = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

onde $A_1, A_2, ..., A_n$ são constantes que devem ser determinadas.

7.5.3 Exemplos

(i) Calcular
$$I = \int \frac{x-2}{x^3 - 3x^2 - x + 3} dx$$
.

Solução: Temos:

$$\frac{x-2}{x^3-3x^2-x+3} = \frac{x-2}{(x-1)(x+1)(x-3)}$$
$$= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{x-3}.$$

Reduzindo novamente ao mesmo denominador, vem:

$$\frac{x-2}{(x-1)(x+1)(x-3)} = \frac{(x+1)(x-3)A_1 + (x-1)(x-3)A_2 + (x-1)(x+1)A_3}{(x-1)(x+1)(x-3)}$$

$$= \frac{(x^2 - 2x - 3)A_1 + (x^2 - 4x + 3)A_2 + (x^2 - 1)A_3}{(x-1)(x+1)(x-3)}$$

$$= \frac{(A_1 + A_2 + A_3)x^2 + (-2A_1 - 4A_2)x + (-3A_1 + 3A_2 - A_3)}{(x-1)(x+1)(x-3)}$$

Eliminando os denominadores, obtemos:

$$x-2=(A_1+A_2+A_3)x^2+(-2A_1-4A_2)x+(-3A_1+3A_2-A_3).$$

Igualando os coeficientes das mesmas potências de x, segue que

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 0 \\ -2A_1 - 4A_2 = 1 \\ -3A_1 + 3A_2 - A_3 = -2. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações, obtemos:

$$A_1 = \frac{1}{4}, A_2 = \frac{-3}{8} e A_3 = \frac{1}{8}.$$

Portanto, a decomposição em frações parciais é dada por:

$$\frac{x-2}{(x-1)(x+1)(x-3)} = \frac{1/4}{x-1} + \frac{-3/8}{x+1} + \frac{1/8}{x-3}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x-3}$$

e, então,

$$I = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x - 1} - \frac{3}{8} \int \frac{dx}{x + 1} + \frac{1}{8} \int \frac{dx}{x - 3}$$
$$= \frac{1}{4} \ln|x - 1| - \frac{3}{8} \ln|x + 1| + \frac{1}{8} \ln|x - 3| + C.$$

Observamos que existe outra maneira prática para determinar os valores das constantes A1, A2, e A3. Eliminando os denominadores na igualdade

$$\frac{x-2}{(x-1)(x+1)(x-3)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{x-3}$$

obtemos

$$x-2=(x+1)(x-3)A_1+(x-1)(x-3)A_2+(x-1)(x+1)A_3$$

Podemos, agora, determinar A_1 , A_2 e A_3 tomando valores de x que anulem os diversos fatores, como segue:

$$x = 1 \to 1 - 2 = (1+1)(1-3)A_1 + (1-1)(1-3)A_2 + (1-1)(1+1)A_3$$

$$-1 = -4A_1$$

$$A_1 = \frac{1}{4};$$

$$x = -1 \to -1 - 2 = (-1+1)(-1-3)A_1 + (-1-1)(-1-3)A_2$$

$$+ (-1-1)(-1+1)A_3$$

$$-3 = 8A_2$$

$$A_2 = \frac{-3}{8};$$

$$x = 3 \to 3 - 2 = (3+1)(3-3)A_1 + (3-1)(3-3)A_2 + (3-1)(3+1)A_3$$

$$1 = 8A_3$$

$$A_3 = \frac{1}{8};$$
(ii) Calcular $I = \begin{cases} \frac{-4x^3}{3} & dx \end{cases}$

(ii) Calcular
$$I = \int \frac{-4x^3}{2x^3 + x^2 - 2x - 1} dx$$
.

Solução: Para resolvermos este exemplo, devemos, inicialmente, preparar o integrando.

Como o grau de p(x) é igual ao grau de q(x), efetuamos a divisão dos polinômios. Temos:

$$\frac{-4x^3}{2x^3 + x^2 - 2x - 1} = -2 + \frac{2x^2 - 4x - 2}{2x^3 + x^2 - 2x - 1}.$$

Portanto.

$$I = \int -2 dx + \int \frac{2x^2 - 4x - 2}{2x^3 + x^2 - 2x - 1} dx$$

= -2x + I₁,

onde
$$I_1 = \int \frac{2x^2 - 4x - 2}{2x^3 + x^2 - 2x - 1} dx$$
.

Para resolver I_1 , ainda necessitamos preparar o integrando. Dividindo o numerador e o denominador da função integrando por 2, vem:

$$I_1 = \int \frac{1/2(2x^2 - 4x - 2)}{1/2(2x^3 + x^2 - 2x - 1)} dx$$
$$= \int \frac{x^2 - 2x - 1}{x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}} dx.$$

Como as raízes de $q(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}$ são x = 1, x = -1/2 e x = -1, temos:

$$\frac{x^2 - 2x - 1}{x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}} = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{x + 1/2} + \frac{A_3}{x + 1}.$$

Eliminando os denominadores, obtemos:

$$x^{2}-2x-1=(x+1/2)(x+1)A_{1}+(x-1)(x+1)A_{2}+(x-1)(x+1/2)A_{3}$$

Substituindo x pelos valores x = 1, x = -1/2 e x = -1, vem:

$$x = 1 \rightarrow -2 = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot A_1$$
$$A_1 = -\frac{2}{3};$$

$$x = -\frac{1}{2} \rightarrow 1/4 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot A_2$$

$$A_2 = -\frac{1}{3};$$

$$x = -1 \rightarrow 2 = -2 \cdot \frac{-1}{2} \cdot A_3$$
$$A_3 = 2.$$

Portanto.

$$\frac{x^2 - 2x - 1}{x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x + 1/2} + 2 \cdot \frac{1}{x + 1},$$

e, então

$$I_{1} = -\frac{2}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1/2} + 2 \int \frac{dx}{x+1}$$
$$= -\frac{2}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+1/2| + 2 \ln|x+1| + C_{1}.$$

Logo,

$$I = -2x - \frac{2}{3} \ln|x - 1| - \frac{1}{3} \ln|x + 1/2| + 2 \ln|x + 1| + C_1$$
$$= -2x - \frac{2}{3} \ln|x - 1| - \frac{1}{3} \ln|2x + 1| + \frac{1}{3} \ln|2 + 2 \ln|x + 1| + C_1$$

$$= -2x - \frac{2}{3} \ln|x - 1| - \frac{1}{3} \ln|2x + 1| + 2 \ln|x + 1| + C,$$

onde
$$C = C_1 + \frac{1}{3} \ln 2$$
.

Caso 2 Os fatores de q(x) são lineares, e alguns deles se repetem.

Se um fator linear $x - a_i$ de q(x) tem multiplicidade r, a esse fator corresponderá uma soma de frações parciais da forma a seguir:

$$\frac{B_1}{(x-a_i)^r} + \frac{B_2}{(x-a_i)^{r-1}} + \dots + \frac{B_r}{(x-a_i)},$$

onde $B_1, B_2, ..., B_r$ são constantes que devem ser determinadas.

7.5.4 Exemplos

(i) Calcular
$$\int \frac{x^3 + 3x - 1}{x^4 - 4x^2} dx.$$

Solução: As raízes q(x) são x = 2, x = -2 e x = 0, sendo que x = 0 tem multiplicidade 2. Assim, o integrando pode ser escrito na forma

$$\frac{x^3 + 3x - 1}{x^4 - 4x^2} = \frac{x^3 + 3x - 1}{(x - 2)(x + 2)x^2}$$
$$= \frac{A_1}{x - 2} + \frac{A_2}{x + 2} + \frac{B_1}{x^2} + \frac{B_2}{x}.$$

Eliminando os denominadores, obtemos:

$$x^3 + 3x - 1 = (x+2)x^2A_1 + (x-2)x^2A_2 + (x-2)(x+2)B_1 + (x-2)(x+2)xB_2.$$

Atribuindo a x os valores x = 2, x = -2 e x = 0, vem:

$$x = 2$$
 $\rightarrow 13$ $= 4 \cdot 4A_1$, $A_1 = \frac{13}{16}$;
 $x = -2$ $\rightarrow -15$ $= -4 \cdot 4A_2$, $A_2 = \frac{15}{16}$;
 $x = 0$ $\rightarrow -1$ $= -2 \cdot 2B_1$, $B_1 = \frac{1}{4}$.

Por esse procedimento não conseguimos determinar o valor B_2 . Para determiná-lo, tomamos uma equação conveniente do sistema obtido igualando os coeficientes das mesmas potências de x. Usando a igualdade dos coeficientes de x^3 , obtemos:

$$1 = A_1 + A_2 + B_2$$
$$1 = \frac{13}{16} + \frac{15}{16} + B_2$$
$$B_2 = -\frac{3}{4}.$$

Portanto,

$$\frac{x^3 + 3x - 1}{x^4 - 4x^2} = \frac{13}{16} \cdot \frac{1}{x - 2} + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{x + 2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x}$$

e, então,

$$\int \frac{x^3 + 3x - 1}{x^4 - 4x^2} dx = \frac{13}{16} \int \frac{dx}{x - 2} + \frac{15}{16} \int \frac{dx}{x + 2} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2} - \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x}$$
$$= \frac{13}{16} \ln|x - 2| + \frac{15}{16} \ln|x + 2| - \frac{1}{4x} - \frac{3}{4} \ln|x| + C.$$

(ii) Calcular
$$\int_{1}^{2} \frac{x}{8x^3 - 12x^2 + 6x - 1} dx$$
.

Vamos, primeiro, encontrar a integral indefinida

$$I = \int \frac{x}{8x^3 - 12x^2 + 6x - 1} dx.$$

Como o coeficiente do termo de mais alto grau do polinômio do denominador é diferente de 1, para resolvermos *I*, necessitamos preparar o integrando. Dividindo o numerador e o denominador da função integrando por 8, vem:

$$I = \int \frac{x/8}{x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}} dx$$
$$= \frac{1}{8} \int \frac{x}{x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}} dx.$$

O polinômio $q(x) = x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{1}{8}$ tem raiz $x = \frac{1}{2}$ com multiplicidade 3. Assim, o integrando pode ser escrito na forma

$$\frac{x}{x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}} = \frac{A_1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^3} + \frac{A_2}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{A_3}{\left(x - \frac{1}{2}\right)}.$$

Eliminando os denominadores, vem:

$$x = A_1 + \left(x - \frac{1}{2}\right)A_2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 A_3$$
$$= A_3 x^2 + (-A_3 + A_2)x + \frac{1}{4}A_3 - \frac{1}{2}A_2 + A_1.$$

Igualando os coeficientes das mesmas potências de x, segue que:

$$\begin{cases} A_3 = 0 \\ A_2 - A_3 = 1 \\ A_1 - \frac{1}{2}A_2 + \frac{1}{4}A_3 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações, obtemos:

$$A_1 = \frac{1}{2}$$
, $A_2 = 1$ e $A_3 = 0$.

Portanto, a decomposição em frações parciais é dada por:

$$\frac{x}{x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}} = \frac{1}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2},$$

e, então,

$$I = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x - 1/2)^3} + \int \frac{dx}{(x - 1/2)^2} \right]$$
$$= \frac{1}{8} \left[-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x - 1/2)^2} - \frac{1}{x - 1/2} \right] + C$$

Logo,

$$\int_{1}^{2} \frac{x}{8x^{3} - 12x^{2} + 6x - 1} dx = \frac{1}{8} \left[\frac{-1}{4(x - 1/2)^{2}} - \frac{1}{x - 1/2} \right]_{1}^{2}$$

$$= \frac{1}{8} \left[\frac{-1}{4(2 - 1/2)^{2}} - \frac{1}{2 - 1/2} + \frac{1}{4(1 - 1/2)^{2}} + \frac{1}{1 - 1/2} \right]$$

$$= \frac{5}{18}.$$

Observamos que o procedimento prático adotado nos exemplos anteriores para calcular as constantes das frações parciais não é eficiente neste exemplo, pois ele fornece apenas o valor de uma das constantes. No entanto, ele pode ser usado como ferramenta auxiliar.

Caso 3 Os fatores de q(x) são lineares e quadráticos irredutíveis, e os fatores quadráticos não se repetem.

A cada fator quadrático $x^2 + bx + c$ de q(x) corresponderá uma fração parcial da forma

$$\frac{Cx+D}{x^2+bx+c}.$$

7.5.5 Exemplos

(i) Calcular
$$I = \int \frac{2x^2 + 5x + 4}{x^3 + x^2 + x - 3} dx$$
.

O polinômio $q(x) = x^3 + x^2 + x - 3$ tem apenas uma raiz real, x = 1. Sua decomposição em fatores lineares e quadráticos é dada por:

$$q(x) = (x-1)(x^2 + 2x + 3).$$

Podemos, então, expressar o integrando na forma

$$\frac{2x^2 + 5x + 4}{x^3 + x^2 + x - 3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 3}.$$

Eliminando os denominadores, vem:

$$2x^{2} + 5x + 4 = A(x^{2} + 2x + 3) + (Cx + D)(x - 1)$$
$$= (A + C)x^{2} + (2A - C + D)x + 3A - D,$$

e, então,

$$\begin{cases} A + C = 2 \\ 2A - C + D = 5 \\ 3A - D = 4. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$A = \frac{11}{6}$$
; $C = \frac{1}{6}$ e $D = \frac{9}{6}$.

Portanto.

$$\frac{2x^2 + 5x + 4}{x^3 + x^2 + x - 3} = \frac{11}{6} \cdot \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{x + 9}{x^2 + 2x + 3}$$

e, dessa forma.

$$I = \frac{11}{6} \int \frac{dx}{x - 1} + \frac{1}{6} \int \frac{x + 9}{x^2 + 2x + 3} dx$$
$$= \frac{11}{6} \ln|x - 1| + \frac{1}{6} I_1 + C,$$

onde,

$$I_1 = \int \frac{x+9}{x^2+2x+3} dx.$$

O integrando de I_1 é uma função racional cujo denominador é um polinômio quadrático irredutível. Integrais dessa forma aparecem freqüentemente na integração das funções racionais e podem ser resolvidas completando o quadrado do denominador e fazendo substituições convenientes.

Temos:

$$x^{2} + 2x + 3 = (x^{2} + 2x + 1) - 1 + 3$$

= $(x + 1)^{2} + 2$,

e, portanto,

$$I_1 = \int \frac{x+9}{(x+1)^2 + 2} dx.$$

Fazendo a substituição u = x + 1, temos x = u - 1 e dx = du. Então,

$$I_{1} = \int \frac{u - 1 + 9}{u^{2} + 2} du = \int \frac{u + 8}{u^{2} + 2} du$$

$$= \int \frac{u du}{u^{2} + 2} + 8 \int \frac{du}{u^{2} + 2}$$

$$= \frac{1}{2} \ln(u^{2} + 2) + \frac{8}{\sqrt{2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{2}} + C.$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^{2} + 2x + 3) + \frac{8}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x + 1}{\sqrt{2}} + C.$$

Logo,

$$I = \frac{11}{6} \ln|x - 1| + \frac{1}{6} \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 3) + \frac{8}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x + 1}{\sqrt{2}} \right) \right] + C.$$

(ii) Calcular
$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 4x + 5)}$$

Vamos, primeiro, calcular a integral indefinida

$$I = \int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 4x + 5)}.$$

O polinômio $q(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 + 4x + 5)$ não possui raízes reais e já se encontra decomposto em fatores quadráticos irredutíveis. Podemos, então, escrever o integrando na forma

$$\frac{1}{(x^2+x+1)(x^2+4x+5)} = \frac{C_1x+D_1}{x^2+x+1} + \frac{C_2x+D_2}{x^2+4x+5}.$$

Eliminando os denominadores, vem:

$$1 = (C_1x + D_1)(x^2 + 4x + 5) + (C_2x + D_2)(x^2 + x + 1)$$

$$= (C_1 + C_2)x^3 + (4C_1 + C_2 + D_1 + D_2)x^2$$

$$+ (5C_1 + C_2 + 4D_1 + D_2)x + 5D_1 + D_2,$$

e, então.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 4C_1 + C_2 + D_1 + D_2 = 0 \\ 5C_1 + C_2 + 4D_1 + D_2 = 0 \\ 5D_1 + D_2 = 1. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$C_1 = -\frac{3}{13}$$
; $C_2 = \frac{3}{13}$; $D_1 = \frac{1}{13}$ e $D_2 = \frac{8}{13}$

Portanto.

$$\frac{1}{(x^2+x+1)(x^2+4x+5)} = \frac{1}{13} \cdot \frac{-3x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{13} \cdot \frac{3x+8}{x^2+4x+5},$$

e, assim,

$$I = \frac{1}{13} \int \frac{-3x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{1}{13} \int \frac{3x+8}{x^2+4x+5} dx.$$

Completando os quadrados dos denominadores, vem:

$$I = \frac{1}{13} \left[\int \frac{-3x+1}{(x+1/2)^2 + 3/4} dx + \int \frac{3x+8}{(x+2)^2 + 1} dx \right].$$

Fazendo a substituição u = x + 1/2 na primeira integral e v = x + 2 na segunda, obtemos:

$$I = \frac{1}{13} \left[\int \frac{-3(u - 1/2) + 1}{u^2 + 3/4} du + \int \frac{3(v - 2) + 8}{v^2 + 1} dv \right]$$

$$= \frac{1}{13} \left[-3 \int \frac{u \, du}{u^2 + 3/4} + \frac{5}{2} \int \frac{du}{u^2 + 3/4} + 3 \int \frac{v \, dv}{v^2 + 1} + 2 \int \frac{dv}{v^2 + 1} \right]$$

$$= \frac{1}{13} \left[-\frac{3}{2} \ln (u^2 + 3/4) + \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} u + \frac{3}{2} \ln (v^2 + 1) + 2 \arctan \left(\frac{v}{v} \right) \right) \right] + C$$

$$= \frac{1}{13} \left[-\frac{3}{2} \ln (x^2 + x + 1) + \frac{5\sqrt{3}}{3} \arctan \left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}} \right) \right]$$

$$+ \frac{3}{2} \ln (x^2 + 4x + 5) + 2 \arctan \left((x + 2) \right) \right] + C.$$

Logo,

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{(x^{2} + x + 1)(x^{2} + 4x + 5)} = \frac{1}{13} \left[-\frac{3}{2} \ln 3 + \frac{5\sqrt{3}}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{3}{2} \ln 10 \right]$$

$$+ 2\operatorname{arc} \operatorname{tg} 3 - \frac{5\sqrt{3}}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2} \ln 5 - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2 \right]$$

$$= \frac{1}{13} \left[\frac{3}{2} \ln \frac{2}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{3} + 2 \operatorname{arctg} 3 - \frac{5\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{6} - 2 \operatorname{arctg} 2 \right]$$

$$= \frac{1}{13} \left[\frac{3}{2} \ln \frac{2}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{18} \pi + 2 \operatorname{arctg} 3 - 2 \operatorname{arctg} 2 \right].$$

Caso 4 Os fatores de q(x) são lineares e quadráticos irredutíveis, e alguns dos fatores quadráticos se repetem.

Se um fator quadrático $x^2 + bx + c$ de q(x) tem multiplicidade s, a esse fator corresponderá uma soma de frações parciais da forma

$$\frac{C_1x + D_1}{(x^2 + bx + c)^s} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2 + bx + c)^{s-1}} + \dots + \frac{C_sx + D_s}{x^2 + bx + c}$$

7.5.6 Exemplos

(i) Calcular
$$I = \int \frac{x+1}{x(x^2+2x+3)^2} dx$$
.

O integrando pode ser escrito na forma

$$\frac{x+1}{x(x^2+2x+3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{C_1x+D_1}{(x^2+2x+3)^2} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+2x+3)^2}$$

Eliminando os denominadores, vem:

$$x + 1 = A(x^{2} + 2x + 3)^{2} + x(C_{1}x + D_{1}) + x(x^{2} + 2x + 3)(C_{2}x + D_{2})$$

$$= (A + C_{2})x^{4} + (4A + 2C_{2} + D_{2})x^{3} + (10A + C_{1} + 3C_{2} + 2D_{2})x^{2}$$

$$+ (12A + D_{1} + 3D_{2})x + 9A,$$

e, então.

$$\begin{cases} A + C_2 = 0 \\ 4A + 2C_2 + D_2 = 0 \\ 10A + C_1 + 3C_2 + 2D_2 = 0 \\ 12A + D_1 + 3D_2 = 1 \\ 9A = 1. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$A = \frac{1}{9}$$
; $C_1 = -\frac{1}{3}$; $D_1 = \frac{1}{3}$; $C_2 = \frac{-1}{9}$; $D_2 = \frac{-2}{9}$,

e, assim,

$$\frac{x+1}{x(x^2+2x+3)^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{-x+1}{(x^2+2x+3)^2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{-x-2}{x^2+2x+3}$$

$$I = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{3} \int \frac{-x+1}{(x^2+2x+3)^2} dx - \frac{1}{9} \int \frac{x+2}{x^2+2x+3} dx$$
$$= \frac{1}{9} \ln|x| + \frac{1}{3} I_1 - \frac{1}{9} I_2,$$

onde
$$I_1 = \int \frac{-x+1}{(x^2+2x+3)^2} dx$$
 e $I_2 = \int \frac{x+2}{x^2+2x+3} dx$.

A integral I_2 é análoga às que foram resolvidas no decorrer dos exemplos do Caso 3. Como naqueles exemplos, para resolvê-la completamos o quadrado do denominador e fazemos uma substituição conveniente. Temos:

$$I_2 = \int \frac{x+2}{x^2+2x+3} dx = \int \frac{x+2}{(x+1)^2+2} dx.$$

Fazendo a substituição u = x + 1; x = u - 1 e dx = du, vem:

$$I_2 = \int \frac{u+1}{u^2+2} du$$

$$= \int \frac{u}{u^2+2} du + \int \frac{du}{u^2+2}$$

$$= \frac{1}{2} \ln (u^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{u}{\sqrt{2}} + C \right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln (x^2+2x+3) + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C \right)$$

Uma integral como I_1 não foi vista anteriormente. Para calculá-la, inicialmente, completamos o quadrado do denominador e fazemos a mesma substituição que fizemos para calcular I_2 . Temos:

$$I_{1} = \int \frac{-x+1}{(x^{2}+2x+3)^{2}} dx$$

$$= \int \frac{-x+1}{[(x+1)^{2}+2]^{2}} dx$$

$$= \int \frac{-u+2}{(u^{2}+2)^{2}} du \qquad (\text{onde } u = x+1)$$

$$= \int \frac{-u}{(u^{2}+2)^{2}} du + 2 \int \frac{du}{(u^{2}+2)^{2}}$$

$$= \frac{1}{2(u^{2}+2)} + 2 \int \frac{du}{(u^{2}+2)^{2}}.$$

Para resolver a integral $\int \frac{du}{(u^2+2)^2}$, podemos recorrer a uma substituição trigonométrica como foi visto em 7.3.

Fazemos $u = \sqrt{2} \operatorname{tg} \theta$. Então, $du = \sqrt{2} \operatorname{sec}^2 \theta d\theta$. Assim:

$$\int \frac{du}{(u^2 + 2)^2} = \int \frac{\sqrt{2}\sec^2\theta \, d\theta}{(2\operatorname{tg}^2\theta + 2)^2}$$
$$= \int \frac{\sqrt{2}\sec^2\theta \, d\theta}{4\sec^4\theta}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{d\theta}{\sec^2 \theta}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \cos^2 \theta \, d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{1}{2} \cos \theta \, \sec \theta + \frac{1}{2} \theta \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\cos \theta \, \sec \theta + \theta \right).$$

Para retornar à variável anterior u, observamos a Figura 7.2. Temos:

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 + u^2}};$$

$$\sin \theta = \frac{u}{\sqrt{2 + u^2}};$$

$$\theta = \arctan \frac{u}{\sqrt{2}}.$$
Figure 7.2

Portanto,

$$\int \frac{du}{(u^2 + 2)^2} = \frac{\sqrt{2}}{8} \left[\frac{\sqrt{2}u}{2 + u^2} + \text{arc tg} \frac{u}{\sqrt{2}} \right] + C$$

e, então,

$$I_1 = \frac{1}{2(u^2 + 2)} + \frac{2\sqrt{2}}{8} \left[\frac{\sqrt{2}u}{2 + u^2} + \text{arc tg} \frac{u}{\sqrt{2}} \right] + C.$$

Retornando à variável original x, vem:

$$I_1 = \frac{1}{2(x^2 + 2x + 3)} + \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\frac{\sqrt{2}(x+1)}{x^2 + 2x + 3} + \arctan \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) \right] + C.$$

Substituindo os resultados obtidos para I_1 e I_2 na integral I, obtemos:

$$I = \frac{1}{9} \ln|x| + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2(x^2 + 2x + 3)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 3} + \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x + 1}{\sqrt{2}} \right]$$
$$- \frac{1}{9} \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 3) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x + 1}{\sqrt{2}} \right] + C$$
$$= \frac{1}{9} \ln|x| + \frac{x + 2}{6(x^2 + 2x + 3)} + \frac{\sqrt{2}}{36} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x + 1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{18} \ln(x^2 + 2x + 3) + C.$$

Na resolução das integrais de funções racionais que se enquadram no Caso 4, normalmente aparecem integrais da forma

$$\int \frac{du}{(u^2 + a^2)^n}, \, n \ge 1.$$

Se n = 1, esta integral nos dá arco tangente. No exemplo a seguir, encontramos uma fórmula de recorrência para esta integral, para n > 1.

(ii) Determinar uma fórmula de recorrência para $I_n = \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^n}, n > 1.$

Inicialmente, vamos escrever a integral dada na seguinte forma conveniente:

$$I_n = \frac{1}{a^2} \int \frac{(a^2 + u^2) - u^2}{(u^2 + a^2)^n} du$$
$$= \frac{1}{a^2} \left[\int \frac{du}{(u^2 + a^2)^{n-1}} - \int \frac{u^2}{(u^2 + a^2)^n} du \right].$$

Agora, vamos usar integração por partes para resolver a segunda integral. Temos:

$$\int \frac{u^2}{(u^2+a^2)^n} du = \int u \cdot \frac{u}{(u^2+a^2)^n} du.$$

Fazendo $u^* = u$ $\Rightarrow du^* = du$

$$dv = \frac{u \, du}{(u^2 + a^2)^n} \implies v = \frac{(u^2 + a^2)^{1-n}}{2(1-n)},$$

vem:

$$\int \frac{u^2}{(u^2 + a^2)^n} du = \frac{u(u^2 + a^2)^{1-n}}{2(1-n)} - \int \frac{(u^2 + a^2)^{1-n}}{2(1-n)} du$$
$$= \frac{u(u^2 + a^2)^{1-n}}{2(1-n)} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^{n-1}}.$$

Substituindo este resultado na expressão geral de I_n , obtemos:

$$I_{n} = \frac{1}{a^{2}} \left[\int \frac{du}{(u^{2} + a^{2})^{n-1}} - \frac{u(u^{2} + a^{2})^{1-n}}{2(1-n)} - \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{du}{(u^{2} + a^{2})^{n-1}} \right]$$

$$= \frac{1}{a^{2}} \left[\frac{u(u^{2} + a^{2})^{1-n}}{2(n-1)} + \frac{2(n-1)-1}{2(n-1)} \int \frac{du}{(u^{2} + a^{2})^{n-1}} \right]$$

$$= \frac{1}{a^{2}} \left[\frac{u(u^{2} + a^{2})^{1-n}}{2(n-1)} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{du}{(u^{2} + a^{2})^{n-1}} \right].$$

Logo,

$$\int \frac{du}{(u^2+a^2)^n} = \frac{u(u^2+a^2)^{1-n}}{2a^2(n-1)} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} \int \frac{du}{(u^2+a^2)^{n-1}}$$

(iii) Calcular
$$I = \int \frac{dx}{(4x^2 + 8x + 13)^3}$$

A integral I pode ser reescrita na forma

$$I = \int \frac{dx}{[4(x^2 + 2x + 1) + 9]^3}$$
$$= \int \frac{dx}{[(2x + 2)^2 + 9]^3}$$

Fazendo a substituição u = 2x + 2; du = 2dx, obtemos:

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{du}{(u^2 + 3^2)^3}$$

Utilizando a fórmula de recorrência do exemplo anterior, vem:

$$I = \frac{1}{2} \left[\frac{u(u^2 + 9)^{-2}}{2 \cdot 9 \cdot 2} + \frac{3}{2 \cdot 9 \cdot 2} \int \frac{du}{(u^2 + 9)^2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{u}{36(u^2 + 9)^2} + \frac{3}{36} \left[\frac{u(u^2 + 9)^{-1}}{2 \cdot 9 \cdot 1} + \frac{1}{2 \cdot 9 \cdot 1} \int \frac{du}{u^2 + 9} \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{u}{36(u^2 + 9)^2} + \frac{3}{36} \left[\frac{u}{18(u^2 + 9)} + \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{u}{3} \right] \right\} + C$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{2x + 2}{36(4x^2 + 8x + 13)^2} + \frac{3}{36} \left[\frac{2x + 2}{18(4x^2 + 8x + 13)} + \frac{1}{54} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x + 2}{3} \right] \right\} + C$$

$$= \frac{x + 1}{36(4x^2 + 8x + 13)^2} + \frac{1}{12} \left[\frac{x + 1}{18(4x^2 + 8x + 13)} + \frac{1}{108} \operatorname{arctg} \frac{2x + 2}{3} \right] + C.$$

7.6 Exercícios

Nos exercícios 1 a 23, calcular a integral indefinida.

$$1. \int \frac{2x^3}{x^2 + x} dx$$

3.
$$\int \frac{x-1}{x^3+x^2-4x-4} dx$$

5.
$$\int \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 2x + 1} \, dx$$

7.
$$\int \frac{(x^2+1)}{x^4-7x^3+18x^2-20x+8} dx$$

9.
$$\int \frac{x^3 + 2x^2 + 4}{2x^2 + 2} \, dx$$

11.
$$\int \frac{3x-1}{x^2-x+1} \, dx$$

13.
$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} \, dx$$

$$15. \int \frac{4x^4}{x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x + 8} \, dx$$

$$17. \int \frac{dx}{x^3 + 9x}$$

$$19. \int \frac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1} \, dx$$

21.
$$\int \frac{dx}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x}$$

$$2. \quad \int \frac{2x+1}{2x^2+3x-2} \, dx$$

$$4. \int \frac{3x^2}{2x^3 - x^2 - 2x + 1} \, dx$$

6.
$$\int \frac{x-1}{(x-2)^2(x-3)^2} dx$$

$$8. \quad \int \frac{dx}{x^3 - 4x^2}$$

$$10. \quad \int \frac{5 dx}{x^3 + 4x}$$

$$12. \quad \int \frac{dx}{x^3 + 8}$$

14.
$$\int \frac{dx}{x(x^2-x+1)^2}$$

$$16. \int \frac{x^2}{3x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}} \, dx$$

18.
$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

20.
$$\int \frac{x^3 dx}{(x^2 + 2)^2}$$

22.
$$\int \frac{x dx}{(x-1)^2 (x+1)^2}$$

23.
$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{(x - 1)^2 (x^2 + 1)} dx$$

24. Verificar a fórmula
$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u + a}{u - a} \right| + C$$

25. Calcular a área da região limitada pelas curvas

$$y = \frac{1}{(x-1)(x-4)}, y = \frac{1}{(1-x)(x-4)}, x = 2 e x = 3.$$

- **26.** Calcular a área da região sob o gráfico de $y = \frac{1}{x^2 + 2x + 5}$, de x = -2 até x = 2.
- 27. Calcular a área da região sob o gráfico de $y = \frac{-1}{x^2(x-5)}$, de x = 1 até x = 4.
- 28. Calcular a área da região sob o gráfico de $y = \frac{1}{(x^2 + 3)^2}$, de x = -2 até x = 2.
- 29. Investigar as integrais impróprias:

(a)
$$I = \int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 (x-5)}$$

(b)
$$I = \int_0^2 \frac{dx}{x^2 (x-5)}$$

(c)
$$I = \int_{5}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 (x-5)}$$

30. Determinar, se possível, a área da região sob o gráfico da função $y = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$, de $-\infty$ a $+\infty$.

7.7 Integração de Funções Racionais de Seno e Cosseno

Quando temos uma integral da forma

$$\int R\left(\cos x, \operatorname{sen} x\right) dx,$$

isto é, o integrando é uma função racional de sen x e cos x, a integral dada pode ser reduzida a uma integral de uma função racional de uma nova variável t. Para isso, fazemos a substituição:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, -\pi < x < \pi. \tag{1}$$

Para exprimir a função integrando em termos da nova variável t, precisamos encontrar cos x sen x e dx em função de t. Temos:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\left(2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right) / \cos^{2} \frac{x}{2}}{\left(\cos^{2} \frac{x}{2} + \operatorname{sen}^{2} \frac{x}{2}\right) / \cos^{2} \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^{2} \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{2t}{1 + t^{2}};$$

$$\cos x = \frac{\cos^{2} \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^{2} \frac{x}{2}}{1}$$

$$= \frac{\left(\cos^{2} \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^{2} \frac{x}{2}\right) / \cos^{2} \frac{x}{2}}{\left(\cos^{2} \frac{x}{2} + \operatorname{sen}^{2} \frac{x}{2}\right) / \cos^{2} \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg}^{2} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^{2} \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1 - t^{2}}{1 + t^{2}}.$$

Além disso, como $t = \lg \frac{x}{2}$, temos x = 2 arc $\lg t$ e, assim, $dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$.

Portanto, quando fazemos a substituição $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, podemos utilizar as fórmulas

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} e \ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$
 (2)

Observamos que a substituição (1) transforma qualquer integral de função racional de seno e cosseno numa integral de função racional de t. Por isso, ela também é conhecida como a "substituição universal" para a integração de expressões trigonométricas.

7.7.1 Exemplos

(i) Calcular
$$I = \int \frac{dx}{3 + 5\cos x}$$
.

Fazendo $x = \operatorname{tg} \frac{t}{2} \operatorname{e} \operatorname{usando} (2), \operatorname{vem}$:

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+5 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$
$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{3+3t^2+5-5t^2}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{2dt}{8 - 2t^2}$$
$$= -\int \frac{dt}{t^2 - 4}.$$

Resolvendo esta integral pelo método das frações parciais, vem:

$$I = -\left[-\frac{1}{4} \int \frac{dt}{t+2} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t-2} \right]$$

$$= \frac{1}{4} \ln|t+2| - \frac{1}{4} \ln|t-2| + C$$

$$= \frac{1}{4} \ln\left| \frac{t+2}{t-2} \right| + C.$$

Finalmente, substituindo $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, obtemos:

$$I = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2} \right| + C.$$

(ii) Calcular
$$I = \int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 2}$$

Usando a substituição $x = tg \frac{t}{2} e$ (2), vem:

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 2}$$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t+1-t^2+2+2t^2}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{2dt}{t^2+2t+3}$$

$$= 2\int \frac{dt}{(t+1)^2+2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$= \sqrt{2} \arctan \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(t+1)\right) + C.$$

Substituindo $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, obtemos:

$$I = \sqrt{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right) \right] + C.$$

7.8 Integrais Envolvendo Expressões da Forma $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ $(a \ne 0)$

Algumas integrais que envolvem a expressão $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ podem ser resolvidas usando-se uma substituição conveniente.

Podemos completar o quadrado do trinômio $ax^2 + bx + c$ para visualizar a substituição.

Os exemplos seguintes apresentam casos em que, após a substituição, a integral recai numa integral tabelada ou numa integral de um dos tipos apresentados anteriormente.

7.8.1 Exemplos

(i) Calcular
$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 8x + 15}}$$
.

Vamos completar o quadrado do trinômio $x^2 + 8x + 15$. Temos:

$$x^2 + 8x + 15 = (x + 4)^2 - 1.$$

Neste caso, a substituição conveniente é

$$u = x + 4; du = dx,$$

que transforma a integral I numa integral tabelada (ver 6.1.10 - (22)).

Temos:

$$I = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}}$$

$$= \arg \cosh u + C$$

$$= \ln|u + \sqrt{u^2 - 1}| + C.$$

Portanto,

$$I = \operatorname{arg cosh} (x + 4) + C \text{ ou}$$
$$I = \ln|x + 4 + \sqrt{x^2 + 8x + 15}| + C.$$

(ii) Calcular
$$I = \int \frac{3x + 2}{\sqrt{9 - 16x - 4x^2}} dx$$
.

Temos:

$$9 - 16x - 4x^2 = 25 - (2x + 4)^2$$

Logo,

$$I = \int \frac{3x+2}{\sqrt{25-(2x+4)^2}} \, dx.$$

Para resolver esta integral, podemos usar uma substituição trigonométrica (ver Seção 7.3). Temos:

$$2x + 4 = 5 \operatorname{sen} \theta, \frac{-\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2};$$

$$dx = \frac{5}{2}\cos\theta \ d\theta \ e$$

$$\sqrt{25 - (2x + 4)^2} = 5\cos\theta.$$

Logo,

$$I = \int \frac{3(5/2 \sin \theta - 2) + 2}{5 \cos \theta} \cdot \frac{5}{2} \cos \theta d\theta$$
$$= \int \left(\frac{15}{4} \sin \theta - 2\right) d\theta$$
$$= -\frac{15}{4} \cos \theta - 2\theta + C.$$

Como $2x + 4 = 5 \text{ sen } \theta$, temos que sen $\theta = \frac{2x + 4}{5}$; $\theta = \arcsin \frac{2x + 4}{5}$ e $\cos \theta = \frac{1}{5}\sqrt{25 - (2x + 4)^2}$. Portanto,

$$I = -\frac{15}{4} \cdot \frac{1}{5} \sqrt{25 - (2x+4)^2} - 2 \arcsin\left(\frac{2x+4}{5}\right) + C$$
$$= -\frac{3}{4} \sqrt{9 - 16x - 4x^2} - 2 \arcsin\left(\frac{2x+4}{5}\right) + C.$$

A seguir, apresentamos outras substituições usadas para a resolução deste tipo de integral.

Temos os seguintes casos:

(a) O trinômio $ax^2 + bx + c$ apresenta a > 0.

Neste caso, podemos usar

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{a} x + t. \tag{1}$$

(b) O trinômio $ax^2 + bx + c$ apresenta c > 0.

Neste caso, podemos usar

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}.$$
 (2)

(c) O trinômio $ax^2 + bx + c$ tem raízes reais.

Usamos, para este caso, a substituição

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - r)t,\tag{3}$$

onde r é qualquer uma das raízes do trinômio $ax^2 + bx + c$.

Os exemplos seguintes mostram esses casos.

7.8.2 Exemplos

(i) Calcular
$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 + x - 3}}$$

Neste caso, o trinômio apresenta a = 4 > 0 e raízes reais. Portanto, podemos escolher entre as substituições dos casos (a) e (c).

Vamos escolher o caso (a), usando o sinal positivo de (1). Temos:

$$\sqrt{4x^2 + x - 3} = 2x + t.$$

331

$$4x^{2} + x - 3 = (2x + t)^{2}$$

$$4x^{2} + x - 3 = 4x^{2} + 4xt + t^{2}$$

$$x - 4xt = t^{2} + 3$$

$$x(1 - 4t) = t^{2} + 3$$

$$x = \frac{t^{2} + 3}{1 - 4t};$$

$$dx = \frac{-4t^{2} + 2t + 12}{(1 - 4t)} dt$$

$$\sqrt{4x^2 + x - 3} = 2 \cdot \frac{t^2 + 3}{1 - 4t} + t$$
$$= \frac{-2t^2 + t + 6}{1 - 4t}.$$

Substituindo essas expressões na integral, vem:

$$I = \int \frac{\frac{-4t^2 + 2t + 12}{(1 - 4t)^2}}{\frac{t^2 + 3}{1 - 4t} \cdot \frac{-2t^2 + t + 6}{1 - 4t}} dt$$

$$= \int \frac{2}{t^2 + 3} dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{t}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\sqrt{4x^2 + x - 3} - 2x}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

(ii) Calcular
$$I = \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+4x+9}}$$
.

O trinômio $x^2 + 4x + 9$ tem a = 1 > 0 e c = 9 > 0. Portanto, podemos escolher entre os casos (a) e (b). Vamos usar (2) com o sinal positivo. Temos:

$$\sqrt{x^2 + 4x + 9} = xt + 3$$

$$x^2 + 4x + 9 = (xt + 3)^2$$

$$x = \frac{6t - 4}{1 - t^2};$$

$$dx = \frac{6t^2 - 8t + 6}{(1 - t^2)^2}$$

e

e

$$\sqrt{x^2 + 4x + 9} = \frac{6t - 4}{1 - t^2}t + 3$$
$$= \frac{3t^2 - 4t + 3}{1 - t^2}.$$

Substituindo esses resultados na integral, vem:

$$I = \int \frac{\frac{6t^2 - 8t + 6}{(1 - t^2)^2}}{\left(\frac{6t - 4}{1 - t^2} + 4\right) \cdot \frac{3t^2 - 4t + 3}{1 - t^2}} dt$$
$$= \int \frac{dt}{-2t^2 + 3t}$$
$$= -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - 3/2t}.$$

Esta integral pode ser resolvida por frações parciais (ver Seção 7.5).

Como as raízes de $q(x) = t^2 - \frac{3}{2}t$ são t = 0 e t = 3/2, vem:

$$\frac{1}{t^2 - \frac{3}{2}t} = \frac{A_1}{t} + \frac{A_2}{t - \frac{3}{2}}$$

Eliminando os denominadores, obtemos:

$$1 = A_1(t - 3/2) + A_2t.$$

Substituindo t pelos valores t = 0 e t = 3/2, vem:

$$t = 0 \rightarrow 1 = -\frac{3}{2}A_1$$

$$A_1 = -\frac{2}{3};$$

$$t = \frac{3}{2} \rightarrow 1 = \frac{3}{2}A_2$$

$$A_2 = \frac{2}{3}.$$

Logo,

$$I = -\frac{1}{2} \left[\int \frac{-2/3}{t} dt + \int \frac{2/3}{t - 3/2} dt \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{3} \ln|t| - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \ln|t - 3/2| + C_1$$

$$= \frac{1}{3} \ln|t| - \frac{1}{3} \ln|2t - 3| + C.$$

Voltando à variável x, temos:

$$I = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 9} - 3}{x} \right| - \frac{1}{3} \ln \left| \frac{2\sqrt{x^2 + 4x + 9} - 3x - 6}{x} \right| + C.$$

(iii) Calcular
$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x - 6}}$$

Neste exemplo, a = 1 > 0 e o trinômio $x^2 + x - 6$ apresenta raízes reais $r_1 = 2$ e $r_2 = -3$. Podemos, então, escolher entre (1) e (3). Escolhemos (3) com r = 2. Temos:

$$\sqrt{x^2 + x - 6} = (x - 2)t$$

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)^2 t^2$$

$$(x - 2)(x + 3) = (x - 2)^2 t^2$$

$$x + 3 = (x - 2)t^2$$

$$x = \frac{2t^2 + 3}{t^2 - 1};$$

$$dx = \frac{-10t}{(t^2 - 1)^2}$$

e

$$\sqrt{x^2 + x - 6} = \left(\frac{2t^2 + 3}{t^2 - 1} - 2\right) \cdot t$$
$$= \frac{5t}{t^2 - 1}.$$

Substituindo em I, obtemos:

$$I = \int \frac{\frac{-10t}{(t^2 - 1)^2}}{\frac{2t^2 + 3}{t^2 - 1} \cdot \frac{5t}{t^2 - 1}} dt$$

$$= \int \frac{-10t}{10t^3 + 15t} dt$$

$$= \int \frac{-dt}{t^2 + \frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{t}{\sqrt{\frac{3}{2}}} + C$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + x - 6}}{x - 2}\right) + C.$$

7.9 Exercícios

Nos exercícios 1 a 14, calcular a integral indefinida.

1.
$$\int \frac{(1 + \sin x)}{\sin x (1 + \cos x)} dx$$

$$2. \quad \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$$

$$3. \int \frac{2\,dx}{\sin\,x + \,\mathrm{tg}\,x}$$

$$5. \int \frac{dx}{3 + \cos x}$$

7.
$$\int \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x} dx$$

9.
$$\int \frac{\cos(2t-1)}{2-\cos(2t-1)}dt$$

11.
$$\int \frac{e^x dx}{4 \operatorname{sen} e^x - 3 \cos e^x}$$

13.
$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$$

13.
$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$$

15. Calcular a área sob a curva
$$y = \frac{1}{2 + \text{sen } x}$$
, de $x = 0$ a $x = \frac{\pi}{2}$.

16. Calcular a área limitada pelas curvas
$$y = \frac{1}{2 + \cos x}$$
 e $y = \frac{1}{2 - \cos x}$, entre $\frac{-\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

Nos exercícios 17 a 33, calcular a integral indefinida:

$$17. \int \frac{dx}{x\sqrt{5x-x^2-6}}$$

19.
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+x-3}}$$

$$21. \int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$$

23.
$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x-3}}$$

$$25. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x + 2}}$$

27.
$$\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{4x^2+4x}}$$

29.
$$\int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{x^2-x+5/4}}$$

$$31. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4x-4}}$$

$$33. \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$$

4.
$$\int \frac{dx}{4 + 5\cos x}$$

$$6. \quad \int \frac{dx}{1 - \cos x}$$

8.
$$\int \frac{dx}{3 + \sin 2x}$$

10.
$$\int \frac{dt}{3 + \sin t + \cos t}$$

12.
$$\int \frac{\cos\theta \, d\theta}{1 + \cos\theta}$$

14.
$$\int \frac{d\theta}{4-\sin\theta+\cos\theta}$$

$$\int 4 - \sin \theta + \cos \theta$$

18.
$$\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+4x+9}}$$

$$20. \int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$$

22.
$$\int \frac{x+1}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}} \, dx$$

24.
$$\int \frac{1 - \sqrt{1 + x + x^2}}{2x^2 \sqrt{1 + x + x^2}} dx$$

$$26. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$$

28.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + 12x + 5}}$$

$$30. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-3}}$$

$$32. \quad \int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x}} \, dx$$

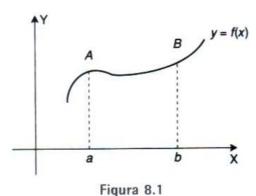
Aplicações da Integral Definida

No Capítulo 6 estudamos a integral definida e analisamos uma importante aplicação que é o cálculo de área de regiões planas. Neste capítulo, outras aplicações da integral definida serão discutidas.

traffice de u = f(x) num lagarado (a b) e u

8.1 Comprimento de Arco de uma Curva Plana Usando a sua Equação Cartesiana

A representação gráfica de uma função y = f(x) num intervalo [a, b] pode ser um segmento de reta ou uma curva qualquer. A porção da curva do ponto A(a, f(a)) ao ponto B(b, f(b)) é chamada arco (ver Figura 8.1).



rigura o.

Queremos encontrar um número s que, intuitivamente, entendemos ser o comprimento de tal arco.

8.1.1 O gráfico de y = f(x) num intervalo [a, b] é um segmento de reta Neste caso, observando a Figura 8.2, vemos que:

$$s = \sqrt{(b-a)^2 + (f(b) - f(a))^2}.$$

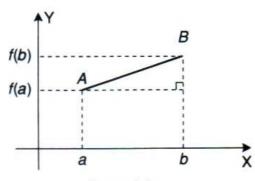


Figura 8.2

8.1.2 O gráfico de y = f(x) num intervalo [a, b] é uma curva qualquer

Sabemos da Geometria, que o perímetro de uma circunferência é definido como o limite dos perímetros dos polígonos regulares nela inscritos. Para outras curvas, podemos proceder de forma análoga.

Seja C uma curva de equação y = f(x), onde f é contínua e derivável em [a, b]. Queremos determinar o comprimento do arco da curva C, de A até B (ver Figura 8.3).

Seja P uma partição de [a, b] dada por:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b.$$

Sejam $Q_0, Q_1, ..., Q_n$ os correspondentes pontos sobre a curva C. Unindo os pontos $Q_0, Q_1, ..., Q_n$, obtemos uma poligonal cujo comprimento nos dá uma aproximação do comprimento do arco da curva C, de A até B. A Figura 8.4 ilustra esta poligonal para n = 7.

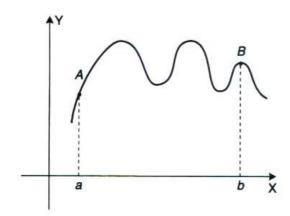


Figura 8.3

O comprimento da poligonal, denotado por I_n , é dado por:

$$I_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$
 (1)

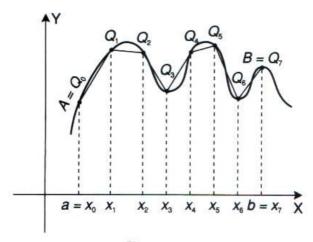


Figura 8.4

Como f é derivável em [a, b], podemos aplicar o Teorema do Valor Médio (ver 5.5.2) em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, i = 1, 2, ..., n, e escrever

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1}),$$

onde c_i é um ponto do intervalo (x_{i-1}, x_i) .

Substituindo este resultado em (1), obtemos:

$$l_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f'(c_i)]^2 (x_i - x_{i-1})^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i,$$
(2)

onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

A soma que aparece em (2) é uma soma de Riemann da função

$$\sqrt{1+[f'(x)]^2}.$$

Podemos observar que à medida que n cresce muito e cada Δx_1 , $i=1,2,\ldots,n$, torna-se muito pequeno, l_n aproxima-se do que, intuitivamente, entendemos como o comprimento do arco da curva C, de A até B.

8.1.3 Definição Seja C uma curva de equação y = f(x), onde f é uma função contínua e derivável em [a, b]. O comprimento do arco da curva C, do ponto A(a, f(a)) ao ponto B(b, f(b)), que denotamos por s, é dado por:

$$s = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \, \Delta x_i \tag{3}$$

se o limite à direita existir.

Pode-se provar que, se f'(x) é contínua em [a, b], o limite em (3) existe. Então, pela definição da integral definida (ver 6.8.1), temos:

$$s = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \tag{4}$$

8.1.4 Exemplos

(i) Calcular o comprimento do arco da curva dada por $y = x^{3/2} - 4$, de A(1, -3) até B(4, 4).

Solução: A Figura 8.5 ilustra este exemplo.

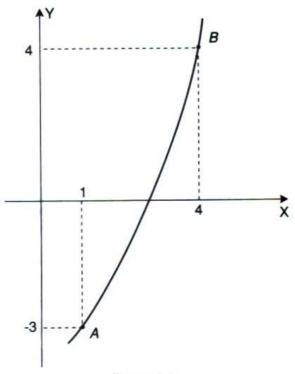


Figura 8.5

Temos:
$$y = x^{3/2} - 4 e y' = \frac{3}{2}x^{1/2}$$
. Aplicando (4), vem:

$$s = \int_{1}^{4} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^{2}} dx$$

$$= \int_{1}^{4} \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}}{3/2} \Big|_{1}^{4}$$

$$= \frac{8}{27} \cdot 10^{3/2} - \frac{8}{27} \left(\frac{13}{4}\right)^{3/2}$$

$$= \frac{80\sqrt{10 - 13\sqrt{13}}}{27} \text{ unidades de comprimento.}$$

Observamos que poucos exemplos apresentam no integrando uma função, tal que a integral possa ser resolvida por um dos métodos apresentados nos capítulos anteriores. Os métodos que dão uma solução aproximada estão além dos objetivos deste livro.

(ii) Obter uma integral definida que nos dá o comprimento da curva $y = \cos 2x$, para $0 \le x \le \pi$.

Temos: $y = \cos 2x e y' = -2 \sin 2x$. Portanto,

$$s = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + 4 \, \text{sen}^2 \, 2x} \, \, dx.$$

Podem ocorrer situações em que a curva C é dada por x = g(y), em vez de y = f(x). Neste caso, o comprimento do arco da curva C de A(g(c), c) até B(g(d), d) (ver Figura 8.6), é dado por:

$$s = \int_{c}^{d} \sqrt{1 + [g'(y)]^2} \, dy. \tag{5}$$

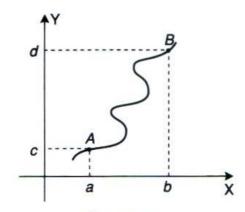


Figura 8.6

(iii) Calcular o comprimento do arco dado por $x = \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{6y} - 1$, $1 \le y \le 3$.

Neste exemplo, vamos usar (5). Temos:

$$g(y) = \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{6y} - 1 \text{ e } g'(y) = \frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{6y^2}$$

Portanto,

$$s = \int_{1}^{3} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}y^{2} - \frac{1}{6y^{2}}\right)^{2}} dy$$

$$= \int_{1}^{3} \sqrt{\frac{(9y^{4} + 1)^{2}}{36y^{4}}} dy$$

$$= \int_{1}^{3} \frac{9y^{4} + 1}{6y^{2}} dy$$

$$= \int_{1}^{3} \left(\frac{3}{2}y^{2} + \frac{1}{6}y^{-2}\right) dy$$

$$= \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{y^{3}}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{y^{-1}}{-1}\right)\Big|_{1}^{3}$$

$$= \frac{118}{9}.$$

8.2 Comprimento de Arco de uma Curva Plana Dada por suas Equações Paramétricas

Vamos, agora, calcular o comprimento de um arco de uma curva C, dada na forma paramétrica, pelas equações:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [t_0, t_1],$$

onde x = x(t) e y = y(t) são contínuas com derivadas contínuas e $x'(t) \neq 0$ para todo $t \in [t_0, t_1]$.

Neste caso, conforme vimos em 4.18, estas equações definem uma função y = f(x), cuja derivada é dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Para calcular o comprimento de arco de C, vamos fazer uma mudança de variáveis em (4). Substituindo x = x(t); dx = x'(t) dt, obtemos

$$s = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + [f'(x)]^{2}} dx$$
$$= \int_{t_{1}}^{t_{1}} \sqrt{1 + \left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]^{2}} x'(t) dt,$$

onde
$$x(t_0) = a e x(t_1) = b$$
.

Portanto,

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

8.2.1 Exemplo Calcular o comprimento da hipociclóide $\begin{cases} x = 2 \operatorname{sen}^3 t \\ y = 2 \cos^3 t \end{cases}$

Solução: A Figura 8.7 ilustra esta curva.

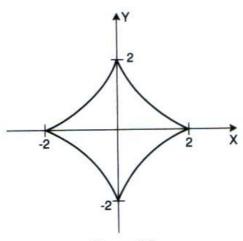


Figura 8.7

Observamos que esta curva é simétrica em relação aos eixos. Vamos, então, calcular o comprimento do arco que está descrito no primeiro quadrante, isto é,

$$\begin{cases} x = 2 \sin^3 t \\ y = 2 \cos^3 t \end{cases}, t \in [0, \pi/2].$$

Temos:

$$x(t) = 2\mathrm{sen}^3 t,$$

$$x'(t) = 6\operatorname{sen}^2 t \cos t;$$

$$y(t) = 2\cos^3 t,$$

$$y'(t) = -6\cos^2 t \, \operatorname{sen} \, t.$$

Portanto,

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(6 \sec^2 t \cos t)^2 + (-6 \cos^2 t \sin t)^2} dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{36 \sec^4 t \cos^2 t + 36 \cos^4 t \sec^2 t} dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{36 \sec^2 t \cos^2 t} dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} 6 \sec t \cos t dt$$

$$= 6 \cdot \frac{\sec^2 t}{2} \Big|_0^{\pi/2}$$

= 3 unidades de comprimento.

Logo, o comprimento total da hipociclóide dada é $4 \cdot 3 = 12$ unidades de comprimento.

8.3 Área de uma Região Plana

Um estudo de área de regiões planas foi feito no Capítulo 6. Nesta seção, vamos calcular a área de uma região plana, quando as curvas que delimitam a região são dadas na forma paramétrica.

Caso 1 Cálculo da área da figura plana S, limitada pelo gráfico de f, pelas retas x = a, x = b e o eixo dos x (ver Figura 8.8), onde y = f(x) é contínua, $f(x) \ge 0 \forall x \in [a, b]$ e é dada por:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [t_0, t_1],$$

 $com x(t_0) = a e x(t_1) = b.$

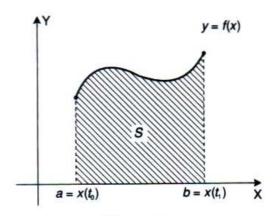


Figura 8.8

Neste caso, conforme vimos em 6.11.1, a área de S é dada por:

$$A = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b y dx.$$

Fazendo a substituição x = x(t); dx = x'(t) dt, obtemos:

$$A = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \cdot x'(t) dt. \tag{1}$$

8.3.1 Exemplo Calcular a área da região limitada pela elipse $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$ A Figura 8.9 ilustra este exemplo.

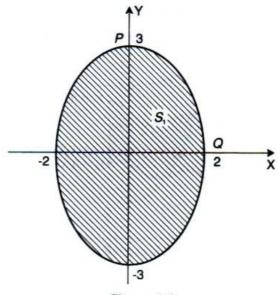


Figura 8.9

Como esta curva apresenta simetria em relação aos eixos, vamos calcular a área da região S_1 , que está no primeiro quadrante.

Para aplicar (1) precisamos determinar os limites de integração t_0 e t_1 . Para isso, usamos as equações paramétricas da curva. Observando a Figura 8.9, vemos que x varia de 0 a 2 e, assim, t_0 corresponde ao ponto P(0, 3) e t_1 corresponde ao ponto Q(2, 0) sobre a elipse.

No ponto P(0, 3), temos:

$$0 = 2\cos t_0,$$

$$3 = 3 \sin t_0;$$

dessa forma,
$$t_0 = \frac{\pi}{2}$$
.

No ponto Q(2, 0), temos:

$$2 = 2 \cos t_1$$

$$0 = 3 \sin t_1;$$

então,
$$t_1 = 0$$
.

Portanto.

$$A_{1} = \int_{\pi/2}^{0} 3 \operatorname{sen} t \cdot (-2 \operatorname{sen} t) dt$$

$$= -\int_{0}^{\pi/2} -6 \operatorname{sen}^{2} t dt$$

$$= 6 \int_{0}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t\right) dt$$

$$= 3 \left(t - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t\right) \Big|_{0}^{\pi/2}$$

$$= \frac{3\pi}{2} \text{ u.a.}$$

Logo, a área da região limitada pela elipse é $4 \cdot \frac{3\pi}{2} = 6\pi$ u.a.

Caso 2 Cálculo da área da figura plana limitada pelos gráficos de f e g, pelas retas x = a e x = b, onde f e g são funções contínuas em [a, b], como $f(x) \ge g(x)$, $\forall x \in [a, b]$, e são dadas na forma paramétrica.

A Figura 8.10 ilustra este caso.

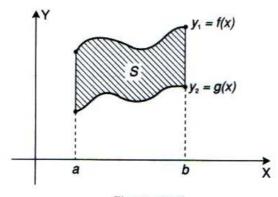


Figura 8.10

Temos que $y_1 = f(x)$ é dada por:

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ y_1 = y_1(t), & t \in [t_0, t_1] \end{cases}$$

e $y_2 = g(x)$ é dada por:

$$\begin{cases} x_2 = x_2(t) \\ y_2 = y_2(t), t \in [t_2, t_3], \end{cases}$$

onde
$$x_1(t_0) = x_2(t_2) = a e x_1(t_1) = x_2(t_3) = b$$
.

Usando o resultado de 6.11.5 e o caso anterior, vem:

$$A = \int_{a}^{b} [f(x) - g(x)] dx$$

$$= \int_{a}^{b} f(x) dx - \int_{a}^{b} g(x) dx$$

$$= \int_{t_{0}}^{t_{1}} y_{1}(t) x'_{1}(t) dt - \int_{t_{0}}^{t_{3}} y_{2}(t) x'_{2}(t) dt.$$
(2)

8.3.2 Exemplo Calcular a área entre as elipses

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases} e \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}.$$

A Figura 8.11 ilustra este exemplo.

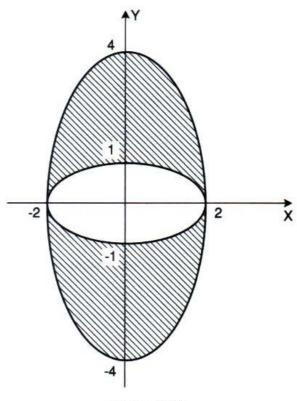


Figura 8.11

Procedendo de forma análoga ao Exemplo 8.3.1 e aplicando (2), obtemos:

$$A = 4 \int_{\pi/2}^{0} [4\operatorname{sen} t \cdot (-2\operatorname{sen} t) - \operatorname{sen} t \cdot (-2\operatorname{sen} t)] dt$$

$$= 4 \int_{\pi/2}^{0} (-8 \sec^2 t + 2 \sec^2 t) dt$$

$$= -4 \int_{0}^{\pi/2} -6 \sec^2 t dt$$

$$= 24 \int_{0}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t\right) dt$$

$$= 12 \left(t - \frac{1}{2} \sec 2t\right) \Big|_{0}^{\pi/2}$$

$$= 12 \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= 6\pi \text{ u.a.}$$

8.4 Exercícios

Nos exercícios 1 a 14, encontrar o comprimento de arco da curva dada.

1.
$$y = 5x - 2, -2 \le x \le 2$$

2.
$$y = x^{2/3} - 1$$
, $1 \le x \le 2$

3.
$$y = \frac{1}{3} (2 + x^2)^{3/2}, \ 0 \le x \le 3$$

4.
$$x^{2/3} + y^{2/3} = 2^{2/3}$$

5.
$$y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8x^2}, 1 \le x \le 2$$

6.
$$x = \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4y}, \ 1 \le y \le 3$$

7.
$$y = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}), de(0, 1) a\left(1, \frac{e + e^{-1}}{2}\right)$$

8.
$$y = \ln x, \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$$

9.
$$y = 1 - \ln(\sin x), \frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{4}$$

10.
$$y = \sqrt{x^3}$$
, de $P_0(0, 0)$ até $P_1(4, 8)$

11.
$$y = 4\sqrt{x^3} + 2$$
, de $P_0(0, 2)$ até $P_1(1, 6)$

12.
$$y = 6(\sqrt[3]{x^2} - 1)$$
, de $P_0(1,0)$ até $P_1(2\sqrt{2}, 6)$

13.
$$(y-1)^2 = (x+4)^3$$
, de $P_0(-3,2)$ até $P_1(0,9)$

14.
$$x^2 = y^3$$
, de $P_0(0, 0)$ até $P_1(8, 4)$

Nos exercícios 15 a 21, estabelecer a integral que dá o comprimento de arco da curva dada.

15.
$$y = x^2, 0 \le x \le 2$$

16.
$$y = \frac{1}{x}$$
, de $P_0\left(\frac{1}{4}, 4\right)$ até $P_1\left(4, \frac{1}{4}\right)$

17.
$$x^2 - y^2 = 1$$
, de $P_0(3, -2\sqrt{2})$ até $P_1(3, 2\sqrt{2})$

18.
$$y = e^x$$
, de $P_0(0, 1)$ até $P_1(2, e^2)$

19.
$$y = x^2 + 2x - 1$$
, $0 \le x \le 1$

20.
$$y = \sqrt{x}, \ 2 \le x \le 4$$

21.
$$y = \sin 3x$$
, $0 \le x \le 2\pi$

Nos exercícios 22 a 29, calcular o comprimento de arco da curva dada na forma paramétrica.

22.
$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2, 1 \le t \le 3 \end{cases}$$

23.
$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}, t \in [0, \pi]$$

24.
$$\begin{cases} x = -\sin t \\ y = \cos t \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi]$$

25.
$$\begin{cases} x = t \text{ sen } t \\ y = t \cos t \end{cases}, \ t \in [0, \pi]$$

26.
$$\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = t - 1 \end{cases}, \quad t \in [0, 2]$$

27.
$$\begin{cases} x = 1/3t^3 \\ y = 1/2t^2, \ 0 \le t \le 2 \end{cases}$$

28.
$$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t, \ 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

29.
$$\begin{cases} x = 2\cos t + 2t \sin t \\ y = 2\sin t - 2t \cos t \end{cases}, \ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

30. Achar o comprimento da hipociclóide
$$\begin{cases} x = 4 \sec^3 t \\ y = 4 \cos^3 t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

31. Achar o comprimento da circunferência
$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

32. Calcular o comprimento da parte da circunferência que está no primeiro quadrante
$$\begin{cases} x = 7\cos t/4 \\ y = 7 \sin t/4 \end{cases}$$

Nos exercícios 33 a 35, calcular a área da região limitada pelas seguintes curvas, dadas na forma paramétrica.

33.
$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} e \begin{cases} x = \cos t \\ y = 1/2 \sin t \end{cases}$$

34.
$$\begin{cases} x = 2 \cos^3 t \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases} e \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$$

35.
$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} e \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$$

36. Calcular a área da parte da circunferência
$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$$
 que está acima da reta $y = 1$.

37. Calcular a área da região delimitada pela elipse
$$\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

38. Calcular a área da região limitada à direita pela elipse
$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$$
 e à esquerda pela reta $x = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

39. Calcular a área da região entre as curvas
$$\begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases} e \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

40. Calcular a área entre o arco da hipociclóide
$$\begin{cases} x = 3 \cos^3 t \\ y = 3 \sin^3 t \end{cases}$$
, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e a reta $x + y = 3$.

41. Calcular a área delimitada pela hipociclóide
$$\begin{cases} x = 4 \sec^3 t \\ y = 4 \cos^3 t \end{cases}$$

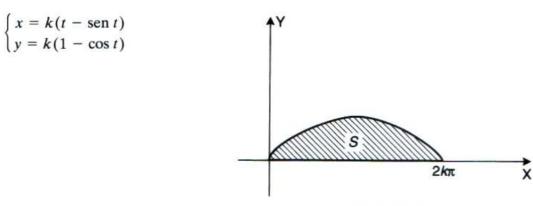


Figura 8.12

8.5 Volume de um Sólido de Revolução

Fazendo uma região plana girar em torno de uma reta no plano, obtemos um sólido, que é chamado sólido de revolução. A reta ao redor da qual a região gira é chamada eixo de revolução.

Por exemplo, fazendo a região limitada pelas curvas y = 0, y = x e x = 4 girar em torno do eixo dos x, o sólido de revolução obtido é um cone (ver Figura 8.13).

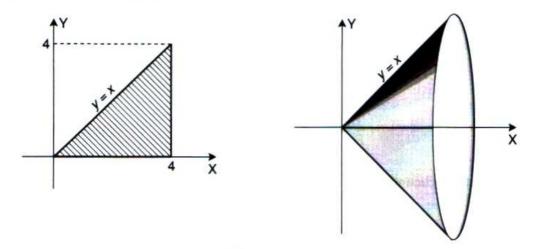


Figura 8.13

Se o retângulo delimitado pelas retas x = 0, x = 1, y = 0 e y = 3 girar em torno do eixo dos y, obtemos um cilindro (ver Figura 8.14).

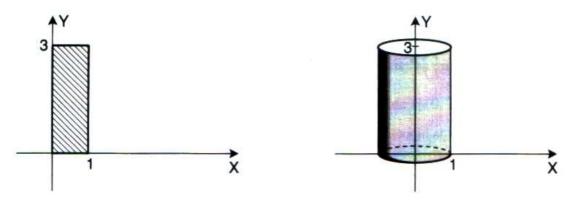
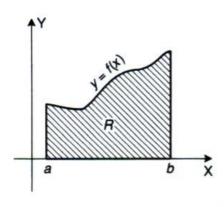


Figura 8.14

Consideremos, agora, o problema de definir o volume do sólido T, gerado pela rotação em torno do eixo dos x, da região plana R vista na Figura 8.15.



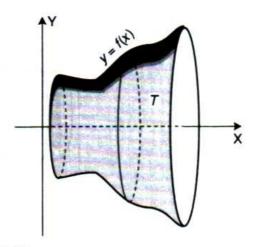


Figura 8.15

Suponhamos que f(x) é contínua e não negativa em [a, b]. Consideremos uma partição P de [a, b], dada por:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b.$$

Seja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ o comprimento do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, escolhemos um ponto qualquer c_i .

Para cada i, i = 1, ..., n, construimos um retângulo R_i , de base Δx_i e altura $f(c_i)$. Fazendo cada retângulo R_i girar em torno do eixo dos x, o sólido de revolução obtido é um cilindro (ver Figura 8.16), cujo volume é dado por:

$$\pi[f(c_i)]^2\Delta x_i$$

A soma dos volumes dos n cilindros, que representamos por V_n , é dada por:

$$V_n = \pi [f(c_1)]^2 \Delta x_1 + \pi [f(c_2)]^2 \Delta x_2 + \dots + \pi [f(c_n)]^2 \Delta x_n$$

= $\pi \sum_{i=1}^n [f(c_i)]^2 \Delta x_i$,

e nos dá uma aproximação do volume do sólido T (ver Figura 8.17).

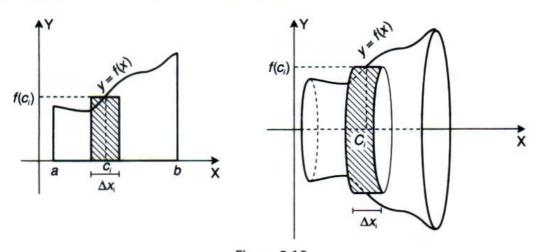


Figura 8.16

Podemos observar que à medida que n cresce muito e cada Δx_i , $i=1,\ldots,n$, torna-se muito pequeno, a soma dos volumes dos n cilindros aproxima-se do que, intuitivamente, entendemos como o volume do sólido T.

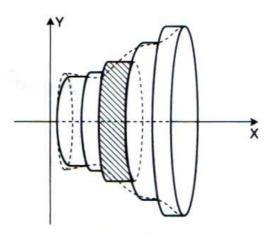


Figura 8.17

8.5.1 Definição Seja y = f(x) uma função contínua não negativa em [a, b]. Seja R a região sob o gráfico de f de a até b. O volume do sólido T, gerado pela revolução de R em torno do eixo dos x, é definido por:

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^n [f(c_i)]^2 \Delta x_i. \tag{1}$$

A soma que aparece em (1) é uma soma de Riemann da função $[f(x)]^2$. Como f é contínua, o limite em (1) existe, e, então, pela definição da integral definida, temos:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx. \tag{2}$$

A fórmula (2) pode ser generalizada para outras situações:

(1) A função f(x) é negativa em alguns pontos de [a, b].

A Figura 8.18 (c) mostra o sólido gerado pela rotação da Figura 8.18 (a), ao redor do eixo dos x, que coincide com o sólido gerado pela rotação, ao redor do eixo dos x, da região sob o gráfico da função |f(x)| de a até b (ver Figura 8.18 (b)). Como $|f(x)|^2 = (f(x))^2$, a fórmula (2) permanece válida neste caso.

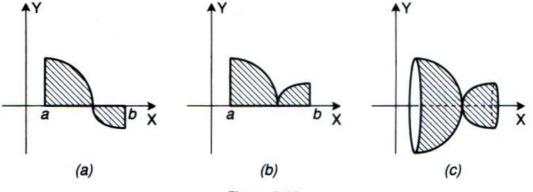


Figura 8.18

(2) A região R está entre os gráficos de duas funções f(x) e g(x) de a até b, como mostra a Figura 8.19.

Supondo $f(x) \ge g(x)$, $\forall x \in [a, b]$, o volume do sólido T, gerado pela rotação de R em torno do eixo dos x, é dado por:

$$V = \pi \int_{a}^{b} ([f(x)]^{2} - [g(x)]^{2}) dx.$$
 (3)

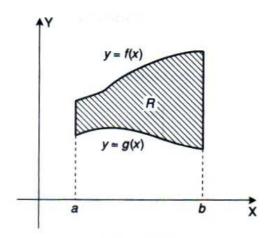
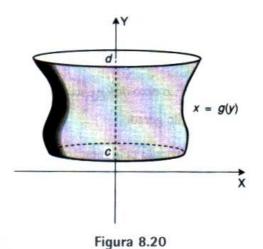


Figura 8.19

(3) Ao invés de girar ao redor do eixo dos x, a região R gira em torno do eixo dos y (ver Figura 8.20).



Neste caso, temos:

$$V = \pi \int_{c}^{d} [g(y)]^{2} dy. \tag{4}$$

(4) A rotação se efetua ao redor de uma reta paralela a um dos eixos coordenados.

Se o eixo de revolução for a reta y = L (ver Figura 8.21), temos:

$$V = \pi \int_{a}^{b} [f(x) - L]^{2} dx.$$
 (5)

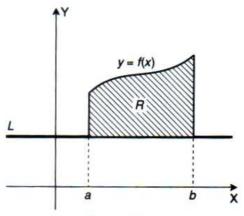
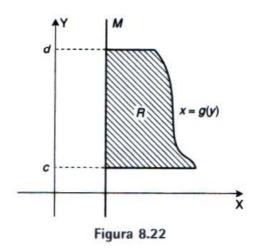


Figura 8.21

Se o eixo de revolução for a reta x = M (ver Figura 8.22), temos:

$$V = \pi \int_{c}^{d} [g(y) - M]^{2} dy. \tag{6}$$



8.5.2 Exemplos

(i) A região R, limitada pela curva $y = \frac{1}{4}x^2$, o eixo dos x e as retas x = 1 e x = 4, gira em torno do eixo dos x. Encontrar o volume do sólido de revolução gerado.

Na Figura 8.23 vemos a região R e o sólido T gerado pela rotação de R em torno do eixo dos x.

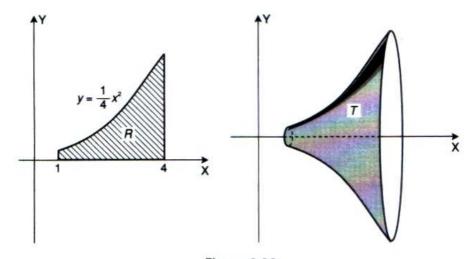


Figura 8.23

Aplicando a fórmula (2), temos:

$$V = \pi \int_{1}^{4} \left(\frac{1}{4}x^{2}\right)^{2} dx$$

$$= \frac{\pi}{16} \cdot \frac{x^{5}}{5} \Big|_{1}^{4}$$

$$= \frac{\pi}{80} [4^{5} - 1^{5}]$$

$$= \frac{1.023}{80} \pi \text{ unidades de volume (u.v.)}.$$

(ii) Calcular o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo dos x, da região limitada pela parábola $y = \frac{1}{4} (13 - x^2)$ e pela reta $y = \frac{1}{2} (x + 5)$.

Na Figura 8.24 podemos ver a região R e o sólido T, gerado pela rotação de R em torno do eixo dos x.

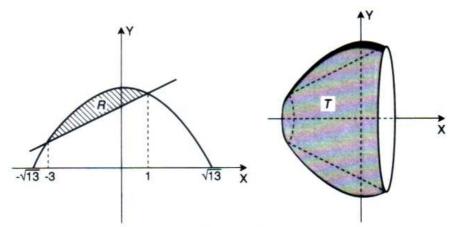


Figura 8.24

Aplicando a fórmula (3), vem

$$V = \pi \int_{-3}^{1} \left\{ \left[\frac{1}{4} (13 - x^2) \right]^2 - \left[\frac{1}{2} (x + 5) \right]^2 \right\} dx$$

$$= \pi \int_{-3}^{1} \left[\frac{1}{16} (169 - 26x^2 + x^4) - \frac{1}{4} (x^2 + 10x + 25) \right] dx$$

$$= \frac{\pi}{16} \int_{-3}^{1} (69 - 40x - 30x^2 + x^4) dx$$

$$= \frac{\pi}{16} \left[69x - 20x^2 - 10x^3 + \frac{x^5}{5} \right]_{-3}^{1}$$

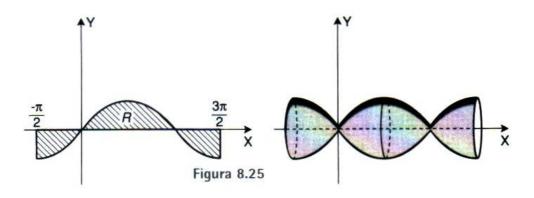
$$= \frac{\pi}{16} \left[69 - 20 - 10 + \frac{1}{5} + 207 - 180 + 270 + \frac{243}{5} \right]$$

$$= \frac{1.924\pi}{80}$$

$$= 24.05 \text{ u.v.}$$

(iii) Calcular o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo dos x, da região entre o gráfico da função $y = \operatorname{sen} x$ e o eixo dos x, de $\frac{-\pi}{2}$ até $\frac{3\pi}{2}$.

A Figura 8.25 mostra a região R e o sólido gerado pela rotação de R em torno do eixo dos x.



Aplicando a fórmula (2), temos:

$$V = \pi \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} (\sin x)^2 dx$$

$$= \pi \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x \right) \Big|_{-\pi/2}^{3\pi/2}$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{4} \sin \left(2 \cdot \frac{3\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \sin \left(2 \cdot \frac{-\pi}{2} \right) \right)$$

$$= \pi \left(\frac{3\pi}{4} - 0 + \frac{\pi}{4} + 0 \right)$$

$$= \pi^2 \text{ u.v.}$$

(iv) A região limitada pela parábola cúbica y = x³, pelo eixo dos y e pela reta y = 8, gira em torno do eixo dos y. Determinar o volume do sólido de revolução obtido.

Podemos ver a região R e o sólido de revolução T, gerado pela rotação de R em torno do eixo dos y, na Figura 8.26.

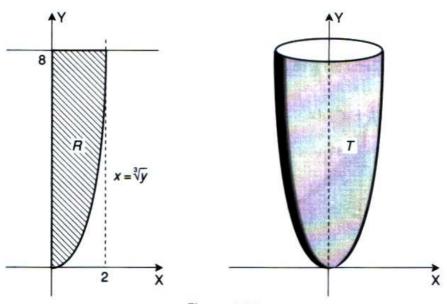


Figura 8.26

Para calcular o volume de T, vamos aplicar a fórmula (4). Temos:

$$V = \pi \int_{c}^{d} [g(y)]^{2} dy$$

$$= \pi \int_{0}^{8} [\sqrt[3]{y}]^{2} dy$$

$$= \pi \cdot \frac{3}{5} y^{5/3} \Big|_{0}^{8}$$

$$= \frac{3\pi}{5} 8^{5/3}$$

$$= \frac{96 \pi}{5} \text{ u.v.}$$

(v) Determinar o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta y = 4, da região limitada por y = 1/x, y = 4 e x = 4.

A região R e o sólido gerado pela rotação de R em torno da reta y = 4 podem ser vistos na Figura 8.27.

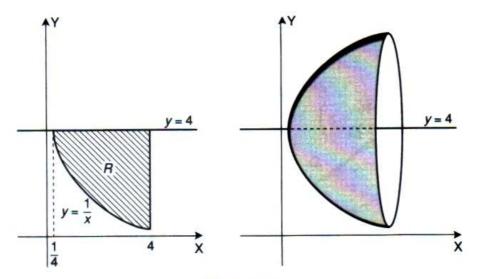


Figura 8.27

Neste exemplo, observamos que o raio da secção transversal do sólido não é f(x) - L, mas sim L - f(x), já que f(x) < L. Porém, como $(f(x) - L)^2 = (L - f(x))^2$, a fórmula (5) continua válida.

$$V = \pi \int_{a}^{b} [f(x) - L]^{2} dx$$

$$= \pi \int_{1/4}^{4} \left[\frac{1}{x} - 4 \right]^{2} dx$$

$$= \pi \int_{1/4}^{4} \left(\frac{1}{x^{2}} - \frac{8}{x} + 16 \right) dx$$

$$= \pi \left[-\frac{1}{x} - 8 \ln x + 16x \right]_{1/4}^{4}$$

$$= \pi \left(-\frac{1}{4} - 8 \ln 4 + 64 + 4 + 8 \ln \frac{1}{4} - 4 \right)$$

$$= \pi \left(\frac{255}{4} - 8 \ln 16 \right) \text{ u.v.}$$

(vi) A região R, delimitada pela parábola $x = \frac{1}{2}y^2 + 1$ e pelas retas x = -1, y = -2 e y = 2 gira em torno da reta x = -1. Determinar o volume do sólido de revolução obtido.

Podemos ver a região R e o sólido gerado pela rotação de R, em torno da reta x=-1, na Figura 8.28. Aplicando a fórmula (6), temos:

$$V = \pi \int_{c}^{d} [g(y) - M]^{2} dy$$
$$= \pi \int_{-2}^{2} \left[\frac{1}{2} y^{2} + 1 - (-1) \right]^{2} dy$$

$$= \pi \int_{-2}^{2} \left(\frac{1}{2}y^{2} + 2\right)^{2} dy$$

$$= \pi \int_{-2}^{2} \left(\frac{1}{4}y^{4} + 2y^{2} + 4\right) dy$$

$$= \pi \left(\frac{y^{5}}{20} + \frac{2y^{3}}{3} + 4y\right)\Big|_{-2}^{2}$$

$$= \pi \left(\frac{32}{20} + \frac{16}{3} + 8 + \frac{32}{20} + \frac{16}{13} + 8\right)$$

$$= \frac{448 \pi}{15} \text{ u.v.}$$

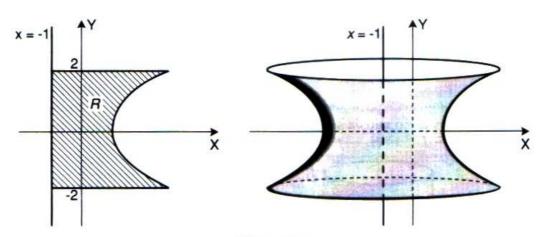


Figura 8.28

8.6 Área de uma Superfície de Revolução

Quando uma curva plana gira em torno de uma reta no plano, obtemos uma superfície de revolução.

Vamos considerar o problema de determinar a área da superfície de revolução S obtida quando uma curva C, de equação y = f(x), $x \in [a, b]$, gira em torno do eixo dos x (ver Figura 8.29).

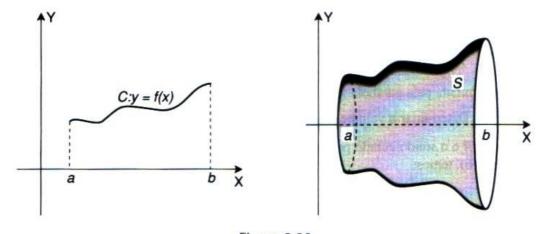


Figura 8.29

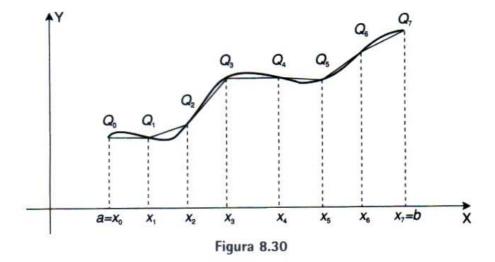
Vamos supor que $f(x) \ge 0$, para todo $x \in [a, b]$, e que f é uma função derivável em [a, b].

Como fizemos para o cálculo do volume de um sólido de revolução, dividimos o intervalo [a, b] em n subintervalos através dos pontos:

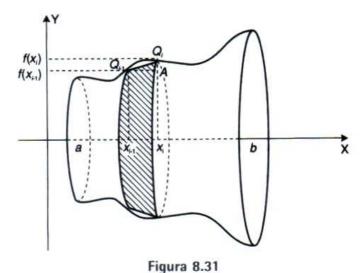
$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b.$$

Sejam $Q_0, Q_1, ..., Q_n$ os correspondentes pontos sobre a curva C. Unindo os pontos $Q_0, Q_1, ..., Q_n$, obtemos uma linha poligonal que aproxima a curva C.

A Figura 8.30 ilustra esta poligonal para n = 7.



Fazendo cada segmento de reta desta linha poligonal girar em torno do eixo dos x, a superfície de revolução obtida é um tronco de cone, como mostra a Figura 8.31.



Da geometria elementar, sabemos que a área lateral do tronco de cone é dada por:

$$A = \pi(r_1 + r_2)L,$$

onde r_1 é o raio da base menor, r_2 é o raio da base maior e L é o comprimento da geratriz do tronco de cone (ver Figura 8.32).

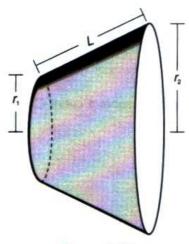


Figura 8.32

Portanto, a área lateral do tronco de cone que visualizamos na Figura 8.31 é dada por:

$$A_{i} = \pi [f(x_{i-1}) + f(x_{i})] \Delta s_{i}$$

$$= 2\pi \left[\frac{f(x_{i-1}) + f(x_{i})}{2} \right] \Delta s_{i}$$

$$= 2\pi f(c_{i}) \Delta s_{i}, \tag{1}$$

onde Δs_i é o comprimento do segmento $\overline{Q_{i-1}Q_i}$ e c_i é um ponto no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$f(c_i) = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}.$$
 (2)

Observamos que podemos garantir a existência de $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ que satisfaz (2), pelo Teorema do Valor Intermediário (Teorema 3.18.9), já que f é contínua em [a, b].

Analisando o triângulo retângulo $Q_{i-1}AQ_i$ da Figura 8.31, vemos que:

$$\Delta s_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$
 (3)

Como f é derivável no intervalo [a, b], podemos aplicar o Teorema do Valor Médio em cada $[x_{i-1}, x_i]$, i = 1, ..., n. Então, para cada i = 1, 2, ..., n, existe um ponto $d_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(d_i)(x_i - x_{i-1})$$

= $f'(d_i)\Delta x_i$,

onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Substituindo em (3), vem:

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + [f'(d_i)]^2 (\Delta x_i)^2}$$
$$= \sqrt{1 + [f'(d_i)]^2} \Delta x_i.$$

Substituindo, agora, este resultado em (1), obtemos:

$$A_i = 2\pi f(c_i) \sqrt{1 + [f'(d_i)]^2} \Delta x_i$$

Esta expressão nos dá a área lateral do tronco de cone gerado pela rotação, em torno do eixo dos x, do segmento de reta $\overline{Q_{i-1}Q_i}$.

Somando as áreas laterais de todos os troncos de cone gerados pela rotação dos segmentos que compõem a linha poligonal, obtemos uma aproximação da área da superfície S, dada por:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \sqrt{1 + [f'(d_i)]^2} \Delta x_i.$$

Podemos observar que, quando n cresce muito e cada Δx_i torna-se muito pequeno, a soma das áreas laterais dos n troncos de cone aproxima-se do que, intuitivamente, entendemos como a área da superfície S.

8.6.1 Definição Seja C uma curva de equação y = f(x), onde $f \in f'$ são funções contínuas em [a, b] e $f(x) \ge 0, \forall x \in [a, b]$. A área da superfície de revolução S, gerada pela rotação da curva C ao redor do eixo dos x, é definida por:

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \sqrt{1 + [f'(d_i)]^2} \Delta x_i.$$
 (4)

A soma que aparece em (4) não é exatamente uma soma de Riemann da função $f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$, pois aparecem dois pontos distintos c_i e d_i . No entanto, é possível mostrar que o limite em (4) é a integral desta função. Temos, então:

$$A = 2\pi \int_{a}^{b} f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^{2}} dx.$$
 (5)

Observamos que, se ao invés de considerarmos uma curva y = f(x) girando em torno do eixo dos x, considerarmos uma curva x = g(y), $y \in [c, d]$ girando em torno do eixo dos y, a área será dada por:

$$A = 2\pi \int_{c}^{d} g(y)\sqrt{1 + [g'(y)]^{2}} dy.$$
 (6)

8.6.2 Exemplos

(i) Calcular a área da superfície de revolução obtida pela rotação, em torno do eixo dos x, da curva dada por $y = 4\sqrt{x}$, $\frac{1}{4} \le x \le 4$.

Temos

$$A = 2\pi \int_{a}^{b} f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^{2}} dx$$

$$= 2\pi \int_{1/4}^{4} 4\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{x}} dx$$

$$= 2\pi \int_{1/4}^{4} 4\sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{x + 4}}{\sqrt{x}} dx$$

$$= 8\pi \int_{1/4}^{4} \sqrt{x + 4} dx$$

$$= 8\pi \frac{(x + 4)^{3/2}}{3/2} \Big|_{1/4}^{4}$$

$$= \frac{16\pi}{3} \left(8^{3/2} - \left(\frac{17}{4} \right)^{3/2} \right)$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left(128\sqrt{2} - 17\sqrt{17} \right) \text{ u. a.}$$

A Figura 8.33 ilustra este exemplo.

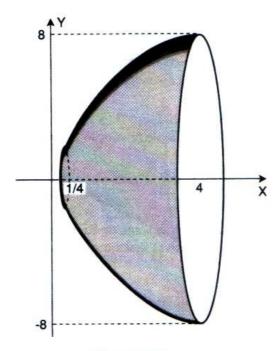


Figura 8.33

(ii) Calcular a área da superfície de revolução obtida pela rotação, em torno do eixo dos y, da curva dada por $x = y^3, 0 \le y \le 1$.

Temos:

$$A = 2\pi \int_{c}^{d} g(y)\sqrt{1 + [g'(y)]^{2}} dy$$
$$= 2\pi \int_{0}^{1} y^{3} \sqrt{1 + (3y^{2})^{2}} dy$$
$$= 2\pi \int_{0}^{1} y^{3} \sqrt{1 + 9y^{4}} dy.$$

Vamos, agora, calcular a integral indefinida $I = \int y^3 \sqrt{1 + 9y^4} dy$. Fazendo a substituição $u = 1 + 9y^4$, temos $du = 36y^3 dy$. Então,

$$I = \frac{1}{36} \int u^{1/2} du$$

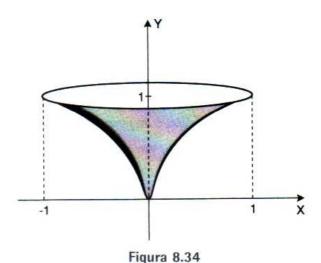
$$= \frac{1}{36} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C$$

$$= \frac{1}{54} (1 + 9y^4)^{3/2} + C.$$

Portanto,

$$A = \frac{2\pi}{54} (1 + 9y^4)^{3/2} \Big|_0^1$$
$$= \frac{\pi}{27} (10\sqrt{10} - 1) \text{ u.a.}$$

A Figura 8.34 ilustra este exemplo.



8.7 Exercícios

Nos exercícios 1 a 5, determinar o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno do eixo dos x, da região R delimitada pelos gráficos das equações dadas.

1.
$$y = x + 1, x = 0, x = 2 e y = 0$$

2.
$$y = x^2 + 1, x = 0, x = 2 e y = 0$$

3.
$$y = x^2 e y = x^3$$

4.
$$y = \cos x, y = \sin x, x = 0 e x = \frac{\pi}{4}$$

5.
$$y = x^3, x = -1, x = 1 e y = 0$$

Nos exercícios 6 a 10, determinar o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno do eixo dos y, da região R delimitada pelos gráficos das equações dadas.

6.
$$y = \ln x, y = -1, y = 2 ex = 0$$

7.
$$y = x^3 e y = x^2$$

8.
$$x = y^2 + 1, x = \frac{1}{2}, y = -2 e y = 2$$

9.
$$y = \frac{1}{x}, x = 0, y = \frac{1}{4} e y = 4$$

10.
$$x = 3 + \sin y, x = 0, y = \frac{-5\pi}{2} e y = \frac{5\pi}{2}$$

Nos exercícios 11 a 16, determinar o volume do sólido de revolução gerado pela rotação das regiões indicadas, ao redor dos eixos dados.

11.
$$y = 2x - 1$$
, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$; ao redor do eixo dos x

12.
$$y^2 = 2x$$
, $x = 0$, $y = 0$ e $y = 2$; ao redor do eixo dos y

13.
$$y = 2x^2$$
, $x = 1$, $x = 2$ e $y = 2$; ao redor do eixo $y = 2$

14.
$$x = y^2 e x = 2 - y^2$$
; ao redor do eixo dos y

15.
$$y = x + x^2$$
, $y = x^2 - 1$ e $x = 0$; ao redor do eixo $y = 1$

16.
$$y = x^{2/3}$$
 e $y = 4$; ao redor dos eixos $x = -9$, $y = 0$ e $x = 0$

17. Encontrar o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo dos x, da região limitada por $y^2 = 16x$ e y = 4x.

- 18. Calcular o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta y = 2, da região limitada por $y = 1 x^2$, x = -2, x = 2 e y = 2.
- 19. Calcular o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta y = 2, da região limitada por $y = 3 + x^2$, x = -2, x = 2 e y = 2.
- **20.** Determinar o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta y=-2, da região limitada por $y=\cos x, y=-2, x=0$ e $x=2\pi$.
- 21. Determinar o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta y=2, da região entre os gráficos de $y=\sin x$, $y=\sin^3 x$ de x=0 até $x=\pi/2$.

Nos exercícios 22 a 27, calcular a área da superfície gerada pela rotação do arco de curva dado, em torno do eixo indicado.

22.
$$y = 2x^3, 0 \le x \le 2$$
; eixo dos x

23.
$$x = \sqrt{y}, 1 \le y \le 4$$
; eixo dos y

24.
$$y = x^2, -2 \le x \le 2$$
; eixo dos x

25.
$$y = \frac{1}{2}x, 0 \le x \le 4$$
; eixo dos x

26.
$$y = \sqrt{4 - x^2}, 0 \le x \le 1$$
; eixo dos x

27.
$$y = \sqrt{16 - x^2}$$
, $-3 \le x \le 3$; eixo dos x

- 28. Calcular a área da superfície obtida pela revolução do arco da parábola $y^2 = 8x$, $1 \le x \le 12$, ao redor do eixo dos x.
- 29. Calcular a área da superfície do cone gerado pela revolução do segmento de reta y = 4x, $0 \le x \le 2$:
 - (a) ao redor do eixo dos x;

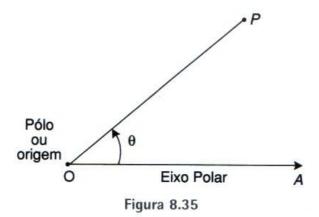
(b) ao redor do eixo dos y.

8.8 Coordenadas Polares

Até o presente momento localizamos um ponto no plano por meio de suas coordenadas cartesianas retangulares. Existem outros sistemas de coordenadas. Um sistema bastante utilizado é o sistema de coordenadas polares.

No sistema de coordenadas polares, as coordenadas consistem de uma distância e da medida de um ângulo em relação a um ponto fixo e a uma semi-reta fixa.

A Figura 8.35 ilustra um ponto P num sistema de coordenadas polares.



O ponto fixo, denotado por O, é chamado pólo ou origem.

A semi-reta fixa \overrightarrow{OA} é chamada eixo polar.

O ponto P fica bem determinado através do par ordenado (r, θ) , onde |r| representa a distância entre a origem e o ponto P, e θ representa a medida, em radianos, do ângulo orientado AÔP.

Usaremos as seguintes convenções:

- (i) Se o ângulo AÔP for descrito no sentindo anti-horário, então $\theta > 0$. Caso contrário, teremos $\theta < 0$.
- (ii) Se r < 0, o ponto P estará localizado na extensão do lado terminal do ângulo AÔP.
- (iii) O par ordenado $(0, \theta)$, θ qualquer, representará o pólo.

Observamos que, muitas vezes, o segmento \overline{OP} é chamado raio.

8.8.1 Exemplos

- (i) Representar num sistema de coordenadas polares os seguintes pontos:
- a) $P_1(2,\pi/4)$

b) $P_2(-2,\pi/4)$

c) $P_3(-2, -\pi/4)$

d) $P_4(2, -\pi/4)$.

A Figura 8.36 (a) e (b) representa os pontos P_1 e P_2 , respectivamente.

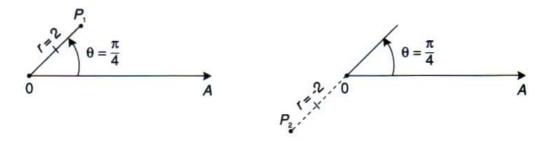


Figura 8.36

A Figura 8.37 (a) e (b) mostra os pontos P_3 e P_4 , respectivamente.

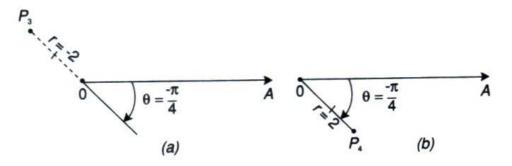


Figura 8.37

(ii) "O ponto P tem um número ilimitado de pares de coordenadas polares."Verificar esta afirmação para o ponto da Figura 8.38.

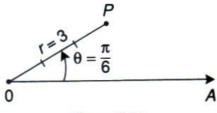


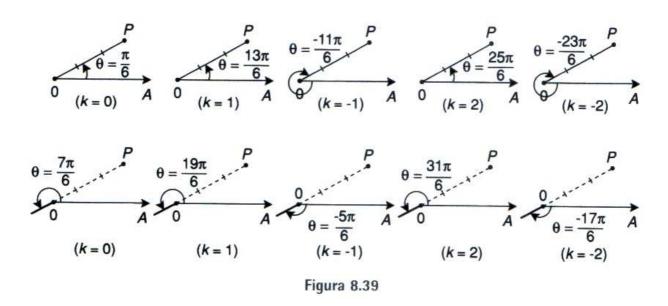
Figura 8.38

A Figura 8.39 mostra diversos pares de coordenadas polares do ponto P. Podemos observar que este ponto pode ser representado por todos os pares ordenados da forma:

$$\left(3, \frac{\pi}{6} + 2 k\pi\right), k \in Z$$

ou

$$\left(-3, \frac{7\pi}{6} + 2 k\pi\right), k \in Z.$$



8.8.2 Relação entre o Sistema de Coordenadas Cartesianas Retangulares e o Sistema de Coordenadas Polares

Em várias situações surge a necessidade de nos referirmos a ambas, coordenadas cartesianas e coordenadas polares de um ponto P. Para viabilizar isto, fazemos a origem do primeiro sistema coincidir com o pólo do segundo sistema, o eixo polar com o eixo positivo dos x e o raio para o qual $\theta = \pi/2$ com o eixo positivo dos y (ver Figura 8.40).

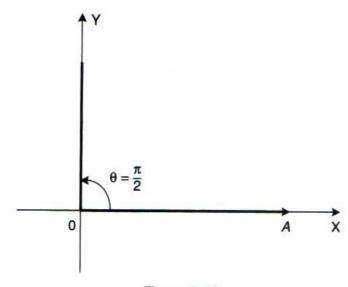


Figura 8.40

Supondo que P seja um ponto com coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares (r, θ) , vamos analisar o caso em que o ponto P está no primeiro quadrante.

A Figura 8.41 (a) e (b) ilustra o caso para r > 0 e r < 0, respectivamente.

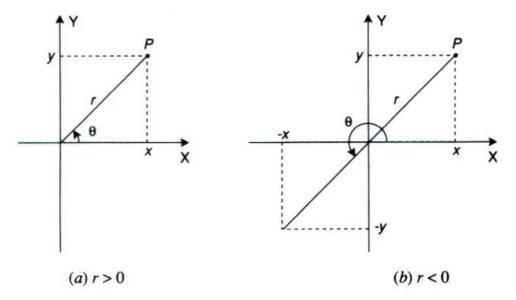


Figura 8.41

Podemos observar que:

(i) Para r > 0, temos

$$\cos \theta = \frac{x}{r} e \sin \theta = \frac{y}{r}$$

(ii) Para r < 0, temos

$$\cos \theta = \frac{-x}{-r} = \frac{x}{r} e \sin \theta = \frac{-y}{-r} = \frac{y}{r}.$$

Portanto,

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta.$$
(1)

Pode-se verificar a validade das relações encontradas, no caso em que o ponto P se encontra sobre um dos eixos ou num outro quadrante.

Usando (1), podemos deduzir outra relação muito usada.

Elevando ambos os membros das equações em (1) ao quadrado, podemos escrever:

$$x^2 = r^2 \cos^2 \theta$$
$$y^2 = r^2 \sin^2 \theta.$$

Adicionando membro a membro, obtemos:

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta$$
 ou $x^2 + y^2 = r^2$.

Portanto,

$$r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}.$$

8.8.3 Exemplos

(i) Encontrar as coordenadas cartesianas do ponto cujas coordenadas polares são $(-4, 7\pi/6)$.

Solução: A Figura 8.42 ilustra este ponto.

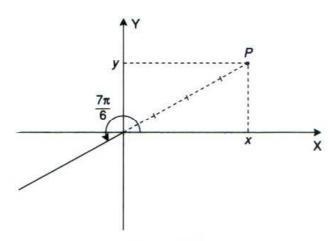


Figura 8.42

Temos:

$$x = r\cos\theta$$

$$= -4\cos\frac{7\pi}{6}$$

$$= -4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 2\sqrt{3}$$
e
$$y = r\sin\theta$$

$$= -4\sin\frac{7\pi}{6}$$

$$= -4\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2.$$

Portanto, $(2\sqrt{3}, 2)$ são as coordenadas cartesianas do ponto dado.

(ii) Encontrar (r,θ) , supondo r < 0 e $0 \le \theta < 2\pi$ para o ponto P, cujas coordenadas cartesianas são $(\sqrt{3},-1)$. Solução: A Figura 8.43 ilustra o ponto P.

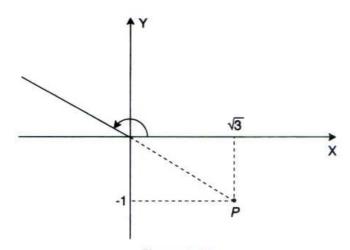


Figura 8.43

Temos:

$$r = -\sqrt{x^2 + y^2}$$
$$= -\sqrt{3 + 1}$$
$$= -2;$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{-2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} e$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

Portanto,
$$\theta = \frac{5\pi}{6}$$
.

8.8.4 Gráficos de Equações em Coordenadas Polares.

O gráfico de $F(r, \theta) = 0$ é formado por todos os pontos cujas coordenadas polares satisfazem a equação. É comum apresentarmos a equação numa forma explícita, isto é:

$$r = f(\theta)$$
.

Na prática, os seguintes procedimentos poderão nos auxiliar no esboço do gráfico:

- (i) calcular os pontos máximos e/ou mínimos;
- (ii) encontrar os valores de θ para os quais a curva passa pelo pólo;
- (iii) verificar simetrias. Se,
 - a equação não se altera quando substituirmos r por −r, existe simetria em relação à origem;
 - a equação não se altera quando substituirmos θ por -θ, existe simetria em relação ao eixo polar (ou eixo dos x);
 - a equação não se altera quando substituirmos θ por $\pi \theta$, existe simetria em relação ao eixo $\theta = \frac{\pi}{2}$ (eixo dos y).

8.8.5 Exemplos

(i) Esboçar a curva $r = 2(1 - \cos \theta)$.

Como a equação não se altera ao substituirmos θ por $-\theta$, isto é,

$$r = 2(1 - \cos \theta) = 2(1 - \cos(-\theta)),$$

concluímos que existe simetria em relação ao eixo polar. Logo, basta analisar valores de θ tais que $0 \le \theta \le \pi$.

Para $0 \le \theta \le \pi$, encontramos um ponto de máximo $(4, \pi)$ e um ponto de mínimo (0, 0). Observamos que, considerando $r = f(\theta)$, os pontos de máximos e mínimos podem ser encontrados de maneira análoga aos da Seção 5.7.

A Tabela 8.1 mostra alguns pontos da curva, cujo esboço é mostrado na Figura 8.44.

Tabela 8.1

r	
0	
1	
2	
3	
4	
	1 2

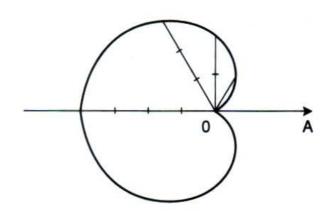


Figura 8.44

(ii) Esboçar a curva $r = 2\cos 2\theta$.

Analisando as simetrias, temos que:

(a) A curva é simétrica em relação ao eixo dos x, pois

$$r = 2\cos(-2\theta) = 2\cos 2\theta.$$

(b) A curva é simétrica em relação ao eixo dos y, pois

$$r = 2\cos[2(\pi - \theta)] = 2\cos(2\pi - 2\theta) = 2\cos 2\theta.$$

Logo, basta fazer uma tabela para $0 \le \theta \le \pi/2$.

Em $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, a curva passa pelo pólo quando $\theta = \frac{\pi}{4}$, pois

$$r = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 2\cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Podemos ainda verificar que, para $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, temos um ponto de máximo (2, 0) e um de mínimo $(-2, \pi/2)$.

Usando a Tabela 8.2 e os resultados anteriores, esboçamos a curva vista na Figura 8.45.

Tabela 8.2

θ	r
0	2
$\frac{\pi}{6}$	1
$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{3}$ $\frac{\pi}{2}$	-1
$\frac{\pi}{2}$	-2

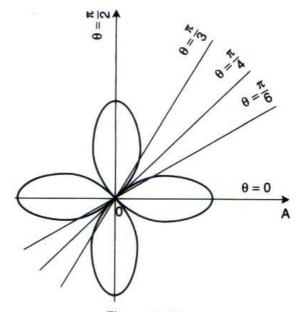
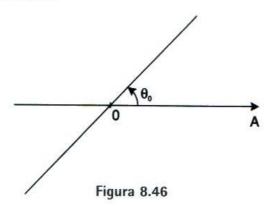


Figura 8.45

8.8.6 Algumas Equações em Coordenadas Polares e Seus Respectivos Gráficos

- (1) Equações de retas.
- (a) $\theta = \theta_0$ ou $\theta = \theta_0 \pm n\pi$, $n \in Z$ é uma reta que passa pelo pólo e faz um ângulo de θ_0 ou $\theta_0 \pm n\pi$ radianos com o eixo polar (ver Figura 8.46).



(b) $r \sec \theta = a \operatorname{e} r \cos \theta = b$, $a, b \in \mathbb{R}$ são retas paralelas aos eixos polar e $\pi/2$, respectivamente (ver Figura 8.47).

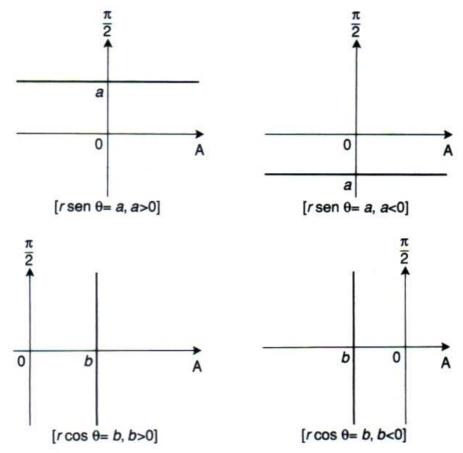


Figura 8.47

- (2) Circunferências.
- (a) $r = c, c \in \mathbb{R}$ é uma circunferência centrada no pólo e raio |c| (ver Figura 8.48).

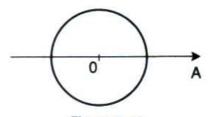


Figura 8.48

- (b) $r = 2a\cos\theta$ é uma circunferência de centro no eixo polar, tangente ao eixo $\theta = \pi/2$:
 - se a > 0, o gráfico está à direita do pólo;
 - se a < 0, o gráfico está à esquerda do pólo (ver Figura 8.49).

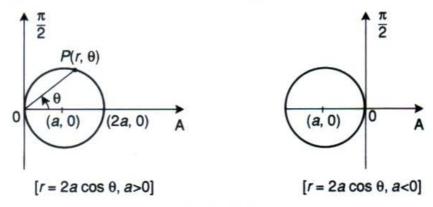


Figura 8.49

- (c) $r = 2b \operatorname{sen} \theta$ é uma circunferência de centro no eixo $\frac{\pi}{2}$ e que tangencia o eixo polar:
 - se b > 0, o gráfico está acima do pólo;
 - se b < 0, o gráfico está abaixo do pólo (ver Figura 8.50).

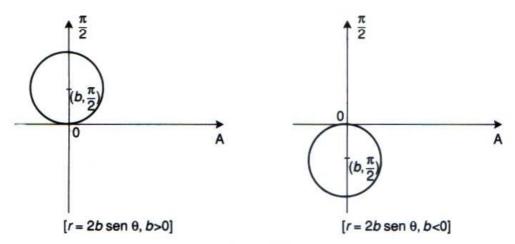


Figura 8.50

(3) Limaçons.

 $r = a \pm b \cos \theta$ ou $r = a \pm b \sin \theta$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ são limaçons.

Temos:

se b > a, então o gráfico tem um laço (ver Figura 8.51);

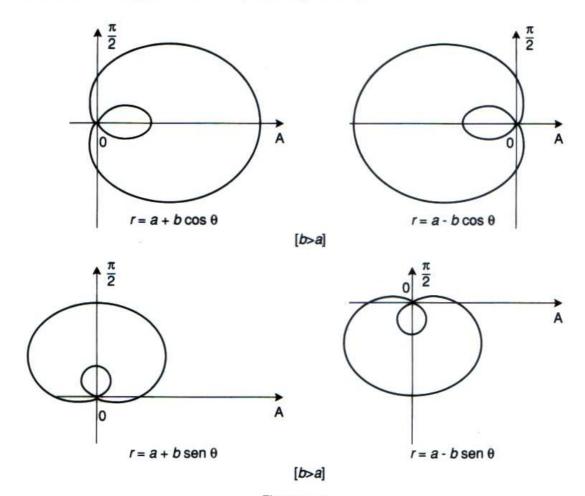


Figura 8.51

- se b = a, então o gráfico tem o formato de um coração, por isso é conhecido como *Cardióide* (ver Figura 8.52);

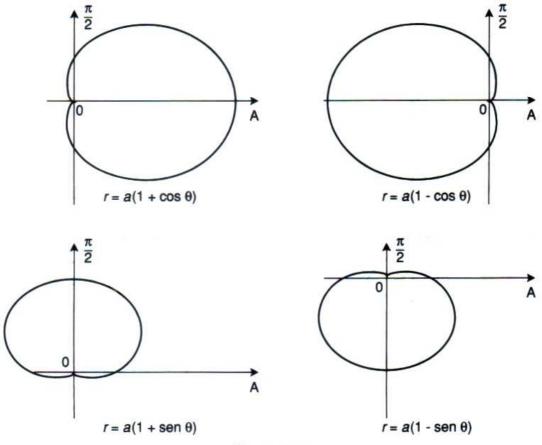


Figura 8.52

se b < a, então o gráfico não tem laço (ver Figura 8.53).

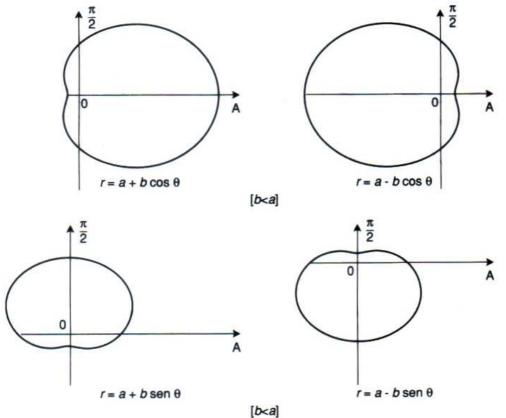


Figura 8.53

Observamos que na Figura 8.51 usamos a=1 e b=2, na Figura 8.52 usamos a=b=1 e na Figura 8.53 usamos a=3 e b=2.

(4) Rosáceas.

 $r = a \cos n \theta$ ou $r = a \sin n \theta$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ são rosáceas:

- se n é par, temos uma rosácea de 2n pétalas (ver Figura 8.54);

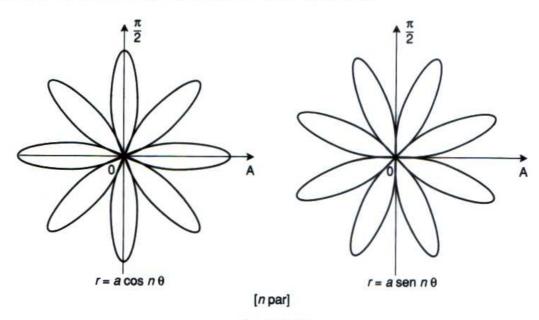


Figura 8.54

se n é impar temos uma rosácea de n pétalas (ver Figura 8.55).

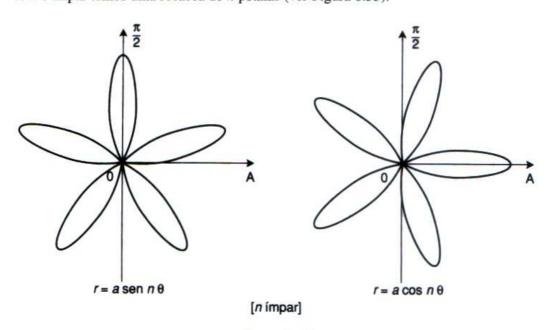


Figura 8.55

Observamos que na Figura 8.54 usamos a = 1 e n = 4, na Figura 8.55 usamos a = 1 e n = 5.

(5) Lemniscatas.

 $r^2 = \pm a^2 \cos 2\theta$ ou $r^2 = \pm a^2 \sin 2\theta$, onde $a \in \mathbb{R}$ são lemniscatas (ver Figura 8.56).

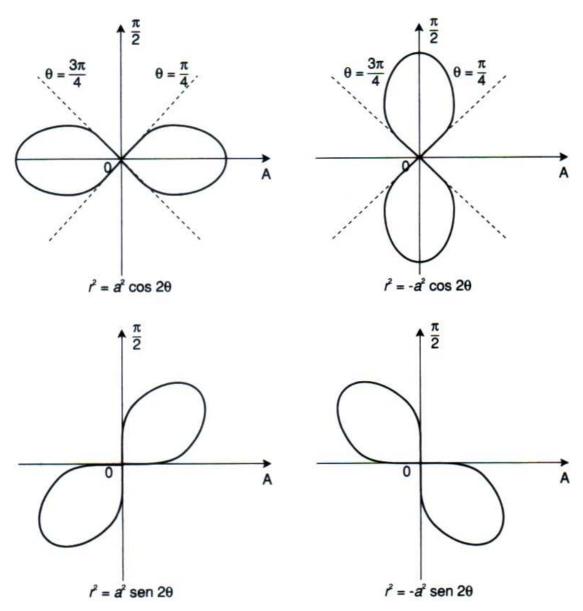


Figura 8.56

Observamos que na Figura 8.56 usamos a = 1.

(6) Espirais.

As equações seguintes representam algumas espirais:

(a)
$$r \theta = a, a > 0$$
 - espiral hiperbólica;

(b)
$$r = a \theta, a > 0$$
 - espiral de Arquimedes;

(c)
$$r = e^{a\theta}$$
 - espiral logarítmica;

(d)
$$r^2 = \theta$$
 - espiral parabólica.

As Figuras 8.57 a 8.60 ilustram estas espirais.

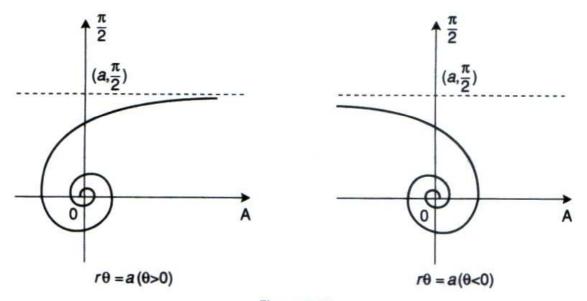


Figura 8.57

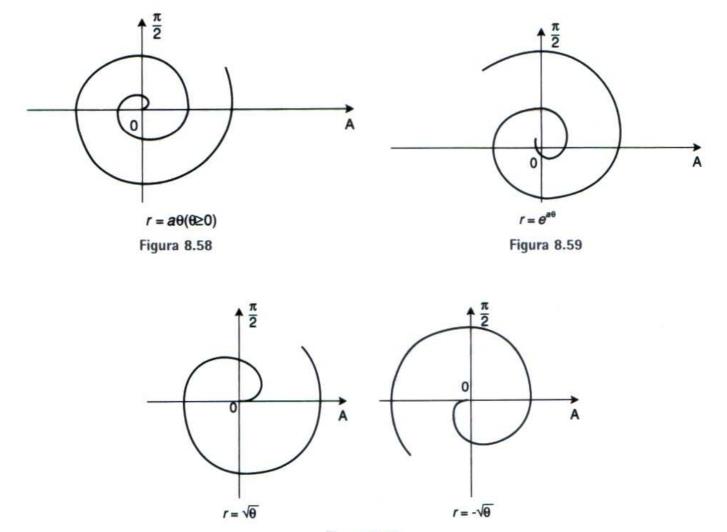


Figura 8.60

8.9 Comprimento de Arco de uma Curva dada em Coordenadas Polares

Seja uma curva C dada pela sua equação polar

$$r = f(\theta). \tag{1}$$

Sabemos da Seção 8.8.2, que

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta. \tag{2}$$

Aplicando (1) em (2), vem:

$$x = f(\theta) \cos \theta$$

$$y = f(\theta) \sin \theta$$
.

Essas equações podem ser consideradas como as equações paramétricas da curva C, para $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$. Então, conforme vimos em 4.18, temos:

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta;$$

$$\frac{dy}{d\theta} = f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta.$$

Portanto,

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^{2} + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^{2} = (f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta)^{2} + (f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta)^{2}$$

$$= f'(\theta)^{2}\cos^{2}\theta - 2f'(\theta)f(\theta)\cos\theta \sin\theta$$

$$+ f(\theta)^{2}\sin^{2}\theta + f'(\theta)^{2}\sin^{2}\theta$$

$$+ 2f'(\theta)f(\theta)\sin\theta\cos\theta + f(\theta)^{2}\cos^{2}\theta$$

$$= f'(\theta)^{2}[\cos^{2}\theta + \sin^{2}\theta] + f(\theta)[\cos^{2}\theta + \sin^{2}\theta]$$

$$= f'(\theta)^{2} + f(\theta)^{2}.$$

Substituindo estes resultados na fórmula obtida na Seção 8.2, obtemos:

$$s = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2} d\theta.$$

8.9.1 Exemplos

(i) Calcular o comprimento da cardióide r = 1 + cos θ.

Solução: Observando a Figura 8.52, verificamos a simetria em relação ao eixo polar. Calculamos, então, o comprimento da curva somente para $\theta \in [0, \pi]$.

Temos,

$$s = \int_0^{\pi} \sqrt{(-\sin\theta)^2 + (1 + \cos\theta)^2} \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta} \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 + \cos\theta)} \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{2} \sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}} \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} 2\cos\frac{\theta}{2} \, d\theta$$

$$= 2 \cdot 2 \sin\frac{\theta}{2} \Big|_0^{\pi}$$

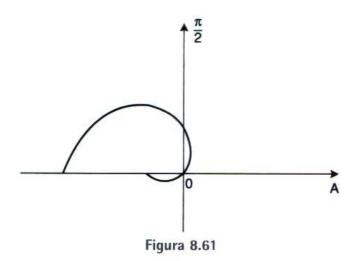
= 4 unidades de comprimento (u.c.).

Portanto, o comprimento total da cardióide $r = 1 + \cos \theta \notin 8$ u.c.

(ii) Encontrar a integral que dá o comprimento da curva $r = 1 - 2 \cos \theta$.

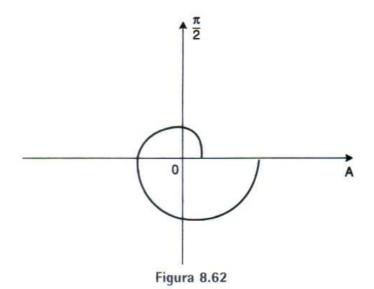
A Figura 8.61 mostra o gráfico para $\theta \in [0, \pi]$. Observamos que esta limaçon apresenta simetria em relação ao eixo polar. Podemos escrever:

$$s = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{(2 \sin \theta)^2 + (1 - 2 \cos \theta)^2} d\theta$$
$$= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{4 \sin^2 \theta + 1 - 4 \cos \theta + 4 \cos^2 \theta} d\theta$$
$$= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{5 - 4 \cos \theta} d\theta.$$



(iii) Determinar o comprimento da espiral $r = e^{\theta}$, para $\theta \in [0, 2\pi]$.

A Figura 8.62 mostra a espiral para $\theta \in [0, 2\pi]$.



Temos:

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(e^{\theta})^2 + (e^{\theta})^2} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2e^{2\theta}} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}e^{\theta} d\theta$$

$$= \sqrt{2}e^{\theta} \Big|_0^{2\pi}$$

$$= \sqrt{2}(e^{2\pi} - e^0)$$

$$= \sqrt{2}(e^{2\pi} - 1) \text{ u.c.}$$

8.10 Área de Figuras Planas em Coordenadas Polares

Queremos encontrar a área A da figura delimitada pelas retas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ e pela curva $r = f(\theta)$ (ver Figura 8.63).

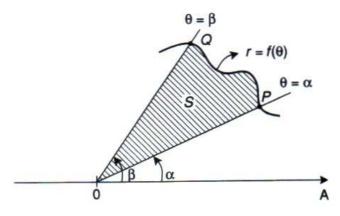
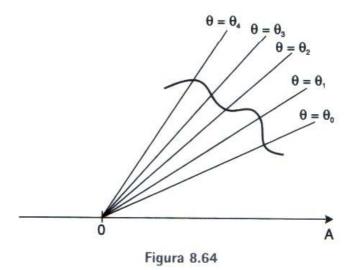


Figura 8.62

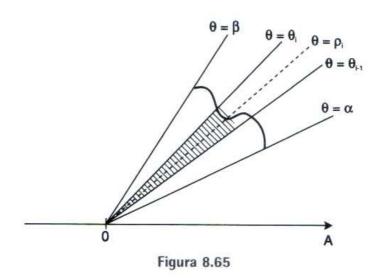
Seja f uma função contínua e não negativa em $[\alpha, \beta]$. Consideremos uma partição P de $[\infty, \beta]$ dada por:

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{i-1} < \theta_i < \dots < \theta_n = \beta.$$

A Figura 8.64 exemplifica esta partição para n = 4.



Para cada $[\theta_{i-1}, \theta_i]$, $i=1,\ldots,n$, vamos considerar um setor circular de raio $f(\rho_i)$, e ângulo central $\Delta\theta_i$, onde $\theta_{i-1} < \rho_i < \theta_i$ e $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ (ver Figura 8.65).



A área de i-ésimo setor circular é dada por:

$$\frac{1}{2}[f(\rho_i)]^2\Delta\theta_i.$$

Logo, a área A é aproximadamente igual a A_n , sendo

$$A_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [f(\rho_i)]^2 \Delta \theta_i$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [f(\rho_i)]^2 \Delta \theta_i.$$

Podemos observar que à medida que n cresce muito e cada $\Delta\theta_i, i=1,...,n$, torna-se muito pequeno, A_n aproxima-se do que, intuitivamente, entendemos como a área da região delimitada por $\theta=\alpha, \theta=\beta$ e $r=f(\theta)$.

Portanto, escrevemos:

$$A = \lim_{\max \Delta \theta_i \to 0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} [f(\rho_i)]^2 \Delta \theta_i$$

ou

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta.$$

8.10.1 Exemplos

(i) Encontrar a área da região S, limitada pelo gráfico de r = 3 + 2 sen θ .

A Figura 8.66 mostra a região S. Observando a simetria em relação ao eixo $\pi/2$, podemos escrever:

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (3 + 2 \sin \theta)^2 d\theta$$

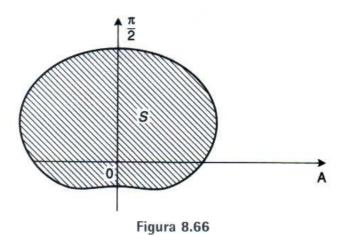
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (9 + 12 \sin \theta + 4 \sin^2 \theta) d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(9 + 12 \sin \theta + 4 \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta$$

$$= 9\theta - 12 \cos \theta + 2 \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= 9 \cdot \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 9 \cdot \frac{-\pi}{2} - 2 \cdot \frac{-\pi}{2}$$

$$= 11\pi \text{ u.a.}$$



(ii) Encontrar a área da região S, interior à circunferência $r=2\cos\theta$ e exterior à cardióide $r=2-2\cos\theta$. Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} r = 2\cos\theta \\ r = 2 - 2\cos\theta, \end{cases}$$

encontramos os pontos de intersecção das duas curvas.

Temos:

$$2\cos\theta = 2 - 2\cos\theta$$

$$4\cos\theta = 2$$

$$\cos = \frac{1}{2}$$

Assim,
$$\theta = \frac{\pi}{3} e \theta = \frac{5\pi}{3}$$
.

A Figura 8.67 mostra a região S.

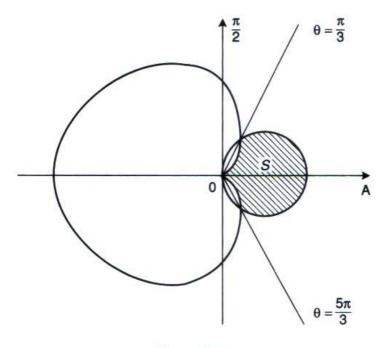


Figura 8.67

Observando a simetria, geometricamente podemos visualizar que a área procurada é dada por:

$$A = 2(A_1 - A_2)$$
, onde

$$A_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} (2\cos\theta)^2 d\theta$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} (2 - 2\cos\theta)^2 d\theta.$$

Portanto,

e

$$A = \int_0^{\pi/3} [(2\cos\theta)^2 - (2 - 2\cos\theta)^2] d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/3} (4\cos^2\theta - 4 + 8\cos\theta - 4\cos^2\theta) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/3} (8\cos\theta - 4) d\theta$$

$$= 8 \sin \theta - 4\theta \Big|_{0}^{\pi/3}$$
$$= 8 \sin \frac{\pi}{3} - 4 \frac{\pi}{3}$$
$$= 4\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3} \text{ u.a.}$$

8.11 Exercícios

1.	Demarcar	os seguintes	pontos no	sistema	de	coordenadas	polares.
----	----------	--------------	-----------	---------	----	-------------	----------

(a) $P_1(4,\pi/4)$

(b) $P_2(4, -\pi/4)$

(c) $P_3(-4,\pi/4)$

(d) $P_4(-4, -\pi/4)$

2. Em cada um dos itens, assinalar o ponto dado em coordenadas polares e depois escrever as coordenadas polares para o mesmo ponto, tais que:

r tenha sinal contrário;

(ii) θ tenha sinal contrário.

(a) $(2, \pi/4)$

(b) $(\sqrt{2}, -\pi/3)$

(c) $(-5,2\pi/3)$

(d) $(4.5\pi/6)$

Demarcar os seguintes pontos no sistema de coordenadas polares e encontrar suas coordenadas cartesianas.

(a) $(3, \pi/3)$

(b) $(-3,\pi/3)$

(c) $(3, -\pi/3)$

(d) $(-3, -\pi/3)$

4. Encontrar as coordenadas cartesianas dos seguintes pontos dados em coordenadas polares.

(a) $(-2, 2\pi/3)$

(b) $(4.5\pi/8)$

(c) $(3,13\pi/4)$

(d) $(-10, \pi/2)$

(e) $(-10, 3\pi/2)$

(f) (1, 0)

5. Encontrar um par de coordenadas polares dos seguintes pontos:

(a) (1, 1)

(b) (-1,1)

(c) (-1, -1)

(d) (1, -1)

6. Usar

(a) r > 0 e $0 \le \theta \le 2\pi$;

(b) $r < 0 \text{ e } 0 \le \theta < 2\pi$;

(c) $r > 0 e - 2\pi < \theta \le 0$;

(d) $r < 0 e - 2\pi < \theta \le 0$.

para escrever os pontos $P_1(\sqrt{3}, -1)$ e $P_2(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, em coordenadas polares.

7. Transformar as seguintes equações para coordenadas polares

(a) $x^2 + y^2 = 4$

(b) x = 4

(c)
$$y = 2$$

$$(d) \quad y + x = 0$$

(e)
$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$

(f)
$$x^2 + y^2 - 6y = 0$$

8. Transformar as seguintes equações para coordenadas cartesianas.

(a)
$$r = \cos \theta$$

(b)
$$r = 2 \operatorname{sen} \theta$$

(c)
$$r = \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}$$

(d)
$$r = a, a > 0.$$

Nos exercícios 9 a 32 esboçar o gráfico das curvas dadas em coordenadas polares.

9.
$$r = 1 + 2\cos\theta$$

10.
$$r = 1 - 2 \sin \theta$$

11.
$$r = a \pm b \cos \theta$$

 $a = 2 e b = 3; a = 3 e b = 2; a = b = 3$

12.
$$r = \cos 3\theta$$

13.
$$r = 2\cos 3\theta$$

14.
$$r = 2 \sin 2\theta$$

15.
$$r = 2 - \cos \theta$$

16.
$$r = 2 - \sin \theta$$

17.
$$r = a \pm b \operatorname{sen} \theta$$

 $a = 2 \operatorname{e} b = 3$; $a = 3 \operatorname{e} b = 2$; $a = b = 2$

18.
$$r\cos\theta = 5$$

19.
$$r = 2 \sin 3\theta$$

20.
$$\theta = \pi/4$$

21.
$$\theta = \pi/9$$

22.
$$5r\cos\theta = -10$$

23.
$$r^2 = 4\cos 2\theta$$

24.
$$r = 3\theta, \theta \ge 0$$

25.
$$r = 4 \operatorname{sen} \theta$$

26.
$$r = e^{-\theta}, \theta \ge 0$$

27.
$$r = \sqrt{2}$$

28.
$$r = 10\cos\theta$$

29.
$$r = 2|\cos\theta|$$

30.
$$r = 12 \sin \theta$$

31.
$$r = e^{\theta/3}$$

32.
$$r = 2\theta$$

Nos exercícios 33 a 37, encontrar o comprimento de arco da curva dada.

33.
$$r = e^{\theta}$$
, entre $\theta = 0$ e $\theta = \pi/3$

34.
$$r = 1 + \cos \theta$$

35.
$$r = 2a \operatorname{sen} \theta$$

36.
$$r = 3\theta^2$$
, de $\theta = 0$ até $\theta = 2\pi/3$

37.
$$r = e^{2\theta}$$
, de $\theta = 0$ até $\theta = 3\pi/2$.

38. Achar o comprimento da cardióide $r = 10(1 - \cos \theta)$.

Nos exercícios 39 a 46, encontrar a integral que dá o comprimento total da curva dada.

39.
$$r^2 = 9\cos 2\theta$$

40.
$$r = 3 sen 3\theta$$

41.
$$r = 4\cos 4\theta$$

42.
$$r^2 = 9 \sin 2\theta$$

43.
$$r = 2 - 3\cos\theta$$

44.
$$r = 4 - 2 \sin \theta$$

45.
$$r = 3 + 2\cos\theta$$

46.
$$r = 4 + 2 \sin \theta$$

Nos exercícios 47 a 56, calcular a área limitada pela curva dada.

47.
$$r^2 = 9 \sin 2\theta$$

48.
$$r = \cos 3\theta$$

49.
$$r = 2 - \cos \theta$$

50.
$$r^2 = 16\cos 2\theta$$

51.
$$r = 3 \sin 2\theta$$

52.
$$r = 3 - 2\cos\theta$$

53.
$$r = 4(1 + \cos \theta)$$

54.
$$r = 4(1 - \cos \theta)$$

55.
$$r = 4(1 + \sin \theta)$$

56.
$$r = 4(1 - \sin \theta)$$

- 57. Encontrar a área da intersecção entre $r = 2a\cos\theta$ e $r = 2a\sin\theta$.
- 58. Encontrar a área interior ao círculo $r = 6\cos\theta$ e exterior a $r = 2(1 + \cos\theta)$.
- **59.** Encontrar a área interior ao círculo r = 4 e exterior à cardióide $r = 4(1 \cos \theta)$.
- 60. Encontrar a área da região do primeiro quadrante delimitada pelo primeiro laço da espiral $r=2\theta, \theta \ge 0$ e pelas retas $\theta = \pi/4$ e $\theta = \pi/3$.
- 61. Encontrar a área da região delimitada pelo laço interno da limaçon $r = 1 + 2 \sin \theta$.
- 62. Encontrar a área da região interior ao círculo r = 10 e à direita da reta $r \cos \theta = 6$.
- 63. Calcular a área da região entre as curvas:

(a)
$$2r = 3 e r = 3 sen \theta$$
;

(b)
$$2r = 3 e r = 1 + \cos \theta$$
.

8.12 Massa e Centro de Massa de uma Barra

Inicialmente, vamos descrever o conceito de centro de massa de um sistema constituído por um número finito de partículas, localizadas sobre um eixo L, de peso e espessura insignificantes.

Vamos supor que o eixo L esteja na posição horizontal e imaginemos que ele possa girar livremente em torno de um ponto P, como se nesse ponto fosse colocado um apoio (ver Figura 8.68).

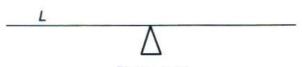


Figura 8.68

Se colocarmos sobre L um objeto de peso w_1 a uma distância d_1 , à direita de P, o peso do objeto fará L girar no sentido horário (ver Figura 8.69 (a)). Colocando um objeto de peso w_2 , a uma distância d_2 à esquerda de P, o peso desse objeto fará L girar no sentido anti-horário (ver Figura 8.69(b)).

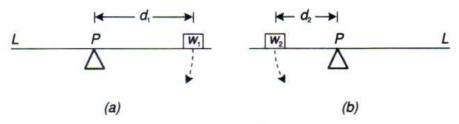


Figura 8.69

Colocando simultaneamente os dois objetos sobre L (ver Figura 8.70), o equilíbrio ocorre quando

$$w_1 d_1 = w_2 d_2. (1)$$

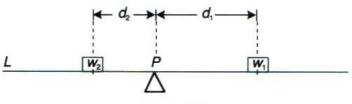
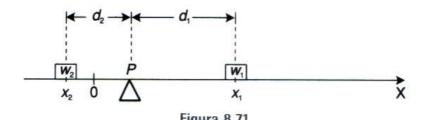


Figura 8.70

Este resultado é conhecido como Lei da Alavanca e foi descoberto por Arquimedes. Na prática, podemos constatála quando duas crianças se balançam numa gangorra.

Vamos, agora, orientar L e fazê-lo coincidir com o eixo dos x do sistema de coordenadas cartesianas. Se duas partículas de peso w_1 e w_2 estão localizadas nos pontos x_1 e x_2 , respectivamente (ver Figura 8.71), podemos reescrever (1) como

$$w_1(x_1-P)=w_2(P-x_2)$$
 ou $w_1(x_1-P)+w_2(x_2-P)=0$.



Supondo que n partículas de pesos w_1, w_2, \dots, w_n estejam colocadas nos pontos x_1, x_2, \dots, x_n , respectivamente, o sistema estará em equilíbrio ao redor de P, quando

$$\sum_{i=1}^{n} w_i(x_i - P) = 0. (2)$$

Como o peso de um corpo é dado por w = mg, onde g é a aceleração da gravidade e m é a massa do corpo, considerando g constante, podemos reescrever (2) como

$$\sum_{i=1}^n m_i g(x_i - P) = 0,$$

ou de forma equivalente,

$$\sum_{i=1}^n m_i(x_i - P) = 0.$$

A soma $\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - P)$ mede a tendência do sistema girar ao redor do ponto P e é chamada momento do sistema em relação a P. Quando o momento é positivo, o giro se dá no sentido horário. Quando o momento é negativo, o giro se dá no sentido anti-horário e, obviamente, quando o momento é nulo o sistema está em equilíbrio.

Se o sistema não está em equilíbrio, movendo o ponto P, podemos encontrar um ponto \overline{x} , de tal forma que ocorra o equilíbrio, isto é, um ponto \overline{x} tal que o momento do sistema em relação a \overline{x} seja nulo. O ponto \overline{x} deve satisfazer

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - \overline{x}) = 0.$$

Resolvendo esta equação para \bar{x} , obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \, \overline{x} = 0$$

ou

$$\overline{x}\sum_{i=1}^{n}m_{i}=\sum_{i=1}^{n}m_{i}x_{i}$$

ou ainda,

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$
(3)

O ponto \bar{x} que satisfaz (3) é chamado *centro de massa* do sistema dado.

Sob a hipótese da aceleração da gravidade ser constante, \bar{x} também é chamado centro de gravidade do sistema.

É interessante observar que, na expressão (3), o numerador do lado direito é o momento do sistema em relação à origem e que o denominador é a massa total do sistema.

Queremos, a seguir, mostrar como a integração pode ser usada para estender essas idéias a um sistema que, ao invés de ser constituído por um número finito de partículas, apresenta uma distribuição contínua de massa.

Consideremos uma barra horizontal rígida, de comprimento l. Se a sua densidade linear ρ , que é definida como massa por unidade de comprimento, é constante, dizemos que a barra é homogênea. Neste caso, intuitivamente, percebemos que a massa total da barra é dada por ρl e que o centro de massa deve estar localizado no ponto médio da barra.

Suponhamos, agora, que temos uma barra não homogênea. Localizamos a barra sobre o eixo dos x, com as extremidades nos pontos a e b, como a Figura 8.72.



Figura 8.72

Seja $\rho(x)$, $x \in [a, b]$ uma função contínua que representa a densidade linear da barra. Para encontrar a massa total da barra, vamos considerar uma partição P de [a, b], dada pelos pontos

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b.$$

Sejam c_i um ponto qualquer do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ e $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Então, uma aproximação da massa da parte da barra entre x_{i-1} e x_i é dada por:

$$\Delta m_i = \rho(c_i) \Delta x_i$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i = \sum_{i=1}^{n} \rho(c_i) \Delta x_i \tag{4}$$

constitui uma aproximação da massa total da barra.

Podemos observar que, à medida que n cresce muito e cada $\Delta x_i \rightarrow 0$, a soma (4) se aproxima do que intuitivamente entendemos como massa total da barra.

Assim, como (4) é uma soma de Riemann da função contínua $\rho(x)$, podemos definir a massa total da barra como

$$m = \int_{a}^{b} \rho(x) \, dx \tag{5}$$

Para encontrarmos o centro de massa da barra, precisamos primeiro encontrar o momento da barra em relação à origem.

Procedendo de acordo com as hipóteses e notações anteriores, obtemos que $c_i \Delta m_i$ é uma aproximação do momento em relação à origem, da parte da barra que está entre x_{i-1} e x_i e que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \Delta m_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \rho(c_i) \Delta x_i$$
 (6)

é uma aproximação do momento da barra em relação à origem.

Como a soma (6) é uma de Riemann da função contínua $x\rho(x)$, podemos definir o momento da barra em relação à origem como

$$M_0 = \int_a^b x \, \rho(x) \, dx. \tag{7}$$

Então, entendendo a expressão (3) para a barra, obtemos o seu centro de massa \bar{x} , que é dado por

$$\overline{x} = \frac{1}{m} \int_{a}^{b} x \rho(x) \, dx. \tag{8}$$

8.12.1 Exemplos

(i) Usando (8), verificar que o centro de massa de uma barra homogênea está no seu ponto médio.

Solução: Seja l o comprimento da barra e ρ a sua densidade linear. Localizando a barra sobre o eixo dos x com extremidades nos pontos a e b, temos:

$$m = \int_{a}^{b} \rho dx$$

$$= \rho \int_{a}^{b} dx$$

$$= \rho (b - a)$$

$$= \rho l \text{ unidades de massa;}$$

$$\overline{x} = \frac{1}{m} \int_{a}^{b} x \rho dx$$

$$= \frac{\rho}{\rho l} \int_{a}^{b} x dx$$

$$= \frac{1}{l} \left[\frac{x^{2}}{2} \right]_{a}^{b}$$

 $=\frac{1}{2I}(b^2-a^2)$

$$=\frac{1}{2I}(b-a)(b+a).$$

Como b-a=l, temos $\overline{x}=\frac{b+a}{2}$, ou seja, \overline{x} está sobre o ponto médio da barra.

Neste exemplo, fica claro que a localização do centro de massa em relação à barra não depende da posição da barra em relação à origem. Na prática, podemos sempre escolher a posição mais conveniente de forma a facilitar os cálculos.

(ii) Uma barra mede 6 m de comprimento. A densidade linear num ponto qualquer da barra é proporcional à distância desse ponto a um ponto q, que está sobre o prolongamento da linha da barra, a uma distância de 3 m da mesma. Sabendo que na extremidade mais próxima a q, a densidade linear é 1 kg/m, determinar a massa e o centro de massa da barra.

Solução: A Figura 8.73 mostra a barra localizada sobre o eixo dos x.

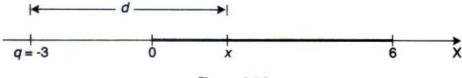


Figura 8.73

A distância de um ponto x da barra até q é dada por:

$$d = x - (-3)$$
$$= x + 3.$$

Como a densidade é proporcional à distância d, temos:

$$\rho(x) = k(x+3),$$

onde k é uma constante de proporcionalidade.

Como $\rho(0) = 1$ kg/m, substituindo na expressão anterior, vem

$$1 = k(0+3) \text{ ou}$$
$$k = \frac{1}{3}$$

Portanto,

$$\rho(x) = \frac{1}{3}(x+3), \forall x \in [0, 6].$$

A massa da barra é dada por

$$m = \int_0^6 \rho(x) dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^6 (x+3) dx$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big|_0^6$$

$$= \frac{1}{3} (18 + 18)$$

$$= 12 \text{ kg.}$$

O centro de massa \bar{x} é dado por

$$\overline{x} = \frac{1}{m} \int_0^6 x \, \rho(x) \, dx$$

$$= \frac{1}{12} \int_0^6 x \cdot \frac{1}{3} (x+3) \, dx$$

$$= \frac{1}{36} \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_0^6$$

$$= \frac{1}{36} [72 + 54]$$

$$= 3.5.$$

Portanto, o centro de massa está localizado sobre a barra, a uma distância de 3,5 m da extremidade mais próxima a q.

(iii) Determinar o centro de massa de uma barra de 5 m de comprimento, sabendo que num ponto q, que dista 1m de uma das extremidades, a densidade é 2 kg/m e que nos demais pontos ela é dada por (2 + d) kg/m, onde d é a distância até o ponto q.

Solução: Localizamos a barra sobre o eixo dos x como mostra a Figura 8.74.



Figura 8.74

Então, podemos expressar a densidade da barra pela função

$$\rho(x) = \begin{cases} 2, & x = 4 \\ 2 + (4 - x) = 6 - x, & 0 \le x < 4 \\ 2 + (x - 4) = x - 2, & 4 < x \le 5. \end{cases}$$

A massa da barra é dada por

$$m = \int_0^5 \rho(x) dx$$

$$= \int_0^4 (6 - x) dx + \int_4^5 (x - 2) dx$$

$$= \left(6x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^4 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_4^5$$

$$= (24 - 8) + \left(\frac{25}{2} - 10 - 8 + 8 \right)$$

$$= \frac{37}{2} \text{ kg.}$$

O centro de massa dado por:

$$\overline{x} = \frac{1}{m} \int_0^5 x \rho(x) \, dx$$

$$= \frac{2}{37} \left[\int_0^4 x(6-x) \, dx + \int_4^5 x(x-2) \, dx \right]$$

$$= \frac{2}{37} \left[\left(3x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4 + \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_4^5 \right]$$

$$= \frac{2}{37} \left[48 - \frac{64}{3} + \frac{125}{3} - 25 - \frac{64}{3} + 16 \right]$$

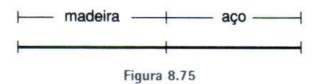
$$= \frac{76}{37}$$

$$\approx 2.05.$$

Portanto, o centro de massa está sobre a barra, a uma distância aproximada de 2,05 m da extremidade mais distante ao ponto q dado.

8.13 Momento de Inércia de uma Barra

Inicialmente, vamos descrever o significado intuitivo do momento de inércia. Para isso, vamos considerar uma barra constituída por partes iguais, de madeira e aço, como mostra a Figura 8.75.



Suponhamos que a barra possa girar livremente em torno de um eixo perpendicular L, que passa por uma de suas extremidades. Se aplicarmos uma força F na outra extremidade da barra, como mostra a Figura 8.76, faremos com que ela gire em torno do eixo L.

Se o eixo passar pela extremidade de madeira, obteremos uma determinada aceleração angular. Se trocarmos as posições, isto é, se o eixo de rotação passar pela extremidade de aço, aplicando a mesma força F na extremidade de madeira, teremos uma aceleração angular muito maior que a anterior.

Além disso, se mudarmos o ponto de aplicação da força para uma posição mais próxima do eixo L, em ambos os casos a aceleração angular diminuirá. Na prática, podemos observar isso quando abrimos ou fechamos uma porta.

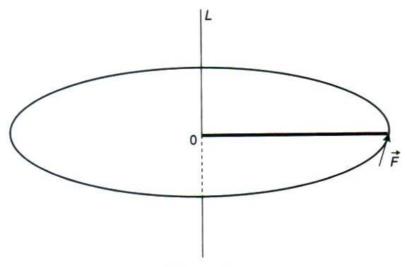


Figura 8.76

Vemos assim que, para uma mesma força, a aceleração angular depende da distância e da distribuição da massa da barra em relação ao eixo de rotação.

Vamos, agora, fazer uma analogia com o movimento de translação. Observando a Segunda Lei de Newton, que pode ser expressa como

$$F = m \cdot a$$
 ou $a = \frac{1}{m}F$,

vemos que a massa pode ser interpretada como uma medida da capacidade do corpo de resistir à aceleração. Se a força é constante, quanto maior a massa, menor será a aceleração.

De acordo com nossas considerações anteriores, no movimento de rotação, a grandeza análoga à massa no movimento de translação é uma grandeza que depende da distância de cada ponto do corpo ao eixo de rotação e da distribuição da massa do corpo, em relação a esse eixo. Essa grandeza é chamada inércia de rotação ou *momento de inércia* e pode ser interpretada como uma medida da capacidade do corpo de resistir à aceleração angular em torno de um eixo L.

8.13.1 Definição O momento de inércia de uma partícula de massa m_i , em relação a um eixo L, é definido como

$$I_L = m_i d_i^2,$$

onde d_i é a distância perpendicular da partícula ao eixo L.

Se temos um sistema de *n* partículas, o momento de inércia do sistema em relação a *L* é definido como a soma dos momentos de inércia, em relação a *L*, de todas as partículas, isto é,

$$I_L = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2.$$

Como fizemos para o centro de massa na seção anterior, vamos agora estender a definição 8.13.1 para a barra horizontal rígida da Figura 8.77.



Suponhamos que a densidade linear da barra é dada por uma função contínua $\rho(x)$, $x \in [a, b]$. Seja P uma partição de [a, b], dada pelos pontos

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b.$$

Sejam c_i um ponto qualquer no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ e $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Então, uma aproximação do momento de inércia em relação a um eixo L, da parte da barra entre x_{i-1} e x_i , é dada por:

$$d^2(c_i)\Delta m_i = d^2(c_i)\rho(c_i)\Delta x_i,$$

onde $d(c_i)$ é a distância do ponto c_i ao eixo L (ver Figura 8.78).

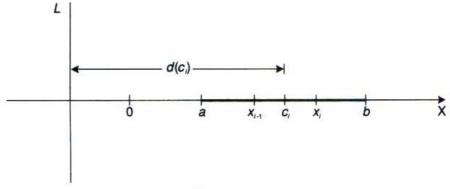


Figura 8.78

A soma

$$\sum_{i=1}^{n} d^{2}(c_{i}) \Delta m_{i} = \sum_{i=1}^{n} d^{2}(c_{i}) \rho(c_{i}) \Delta x_{i}$$
(1)

constitui uma aproximação do momento de inércia da barra em relação ao eixo L.

Como (1) é uma soma de Riemann da função contínua $d^2(x)\rho(x)$, podemos definir o momento de inércia da barra, em relação ao eixo L, por:

$$I_L = \int_a^b d^2(x)\rho(x) dx. \tag{2}$$

8.13.2 Exemplos

(i) Determinar o momento de inércia da barra do Exemplo 8.12.1 (ii), em relação a um eixo perpendicular L, que passa por x = -3 (ver Figura 8.73).

Solução: No Exemplo 8.12.1 (ii), vimos que a densidade linear da barra é dada por:

$$\rho(x) = \frac{1}{3}(x+3), \forall x \in [a,b]$$

e que a distância de um ponto qualquer x da barra até o eixo L, é dada por:

$$d(x) = x + 3.$$

Portanto, usando a fórmula (2), vem

$$I_L = \int_0^6 (x+3)^2 \frac{1}{3} (x+3) dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^6 (x+3)^3 dx$$

$$= \frac{1}{3} \frac{(x+3)^4}{4} \Big|_0^6$$

$$= \frac{1}{12} [9^4 - 3^4]$$

$$= 540 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

(ii) Uma barra de 4 m de comprimento é formada por dois materiais A e B, de densidades constantes, como mostra a Figura 8.79. Supondo que as densidades de A e B são dadas por ρ₁ = 1kg/m e ρ₂ = 2kg/m, respectivamente, determinar:



- (a) O momento de inércia da barra em relação a um eixo perpendicular L₁, que passa na extremidade da barra feita pelo material A.
- (b) O momento de inércia da barra em relação a um eixo perpendicular L₂, que passa na extremidade oposta da barra.

Solução:

(a) A Figura 8.80 mostra a barra localizada sobre o eixo dos x e o eixo de rotação L_1 .

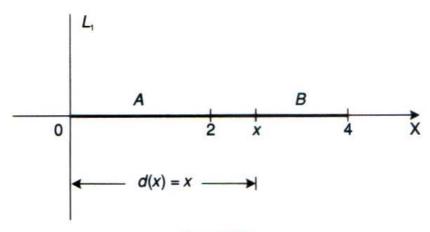


Figura 8.80

Usando a fórmula (2), temos:

$$I_{L_1} = \int_0^2 x^2 \cdot 1 \, dx + \int_2^4 x^2 \cdot 2 \, dx.$$

$$= \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 + 2 \frac{x^3}{3} \Big|_2^4$$

$$= 40 \, \text{kg} \cdot \text{m}^2.$$

(b) A Figura 8.81 mostra a barra localizada sobre o eixo dos x e o eixo de rotação L_2 .

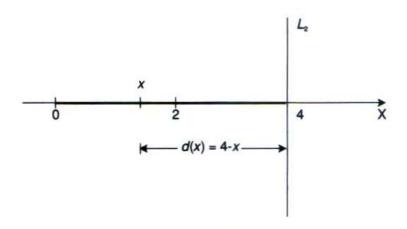


Figura 8.81

Usando a fórmula (2), temos:

$$I_{L_2} = \int_0^2 (4-x)^2 \cdot 1 dx + \int_2^4 (4-x)^2 \cdot 2 dx$$
$$= \frac{-(4-x)^3}{3} \Big|_0^2 - 2 \frac{(4-x)^3}{3} \Big|_2^4$$

$$= -\frac{8}{3} + \frac{64}{3} + \frac{16}{3}$$
$$= 24 \text{kg} \cdot \text{m}^2.$$

Observamos que estes resultados confirmam nossa percepção intuitiva, discutida na parte inicial desta seção. No caso do item (a), a barra possui uma capacidade maior de resistir à rotação em torno de L porque a sua parte mais densa está mais afastada de L. Assim, para obtermos uma mesma aceleração angular, precisamos aplicar uma força maior que no caso do item (b).

Os resultados obtidos também nos mostram como o momento de inércia de um corpo depende do eixo de rotação considerado.

8.14 Trabalho

Na Física, o conceito de força pode ser usado para descrever o ato de empurrar ou puxar um objeto. Por exemplo, necessitamos de uma força para

- levantar um objeto do solo;
- · empurrar um automóvel.

Intuitivamente, sabemos que a força necessária para levantar um objeto do solo é uma *força constante*, isto é, sua intensidade não varia enquanto está aplicada ao objeto. No entanto, para empurrar um automóvel é necessário uma *força variável*, pois no início do movimento aplicamos uma força maior do que aquela aplicada quando o carro está em movimento.

Se aplicamos uma força F a um objeto, fazendo-o deslocar-se a uma determinada distância d, na direção da força, podemos determinar o trabalho W realizado por F sobre o objeto.

Se a força é constante, definimos W por

$$W = F \cdot d$$
.

Se a força é variável, definimos W usando a integral definida.

8.14.1 Trabalho realizado por uma força variável

Suponhamos que um objeto se desloca sobre um eixo L e esteja sujeito a uma força variável F. Sem perda de generalidade, seja L o eixo dos x. Suponhamos que F = F(x) é uma função contínua em [a, b].

Queremos definir o trabalho realizado pela força F sobre o objeto, quando este se desloca de x = a até x = b, com a < b.

Consideremos uma partição P de [a, b], dada por:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b.$$

Sejam c_i um ponto qualquer do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ e $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Então, uma aproximação do trabalho realizado pela força F = F(x) sobre o objeto, quando este se desloca no *i*ésimo intervalo, é dada por:

$$W_i = F(c_i) \Delta x_i$$

Assim, uma aproximação do trabalho realizado pela força F = F(x) sobre o objeto, quando este se desloca de a até b é dada por:

$$\sum_{i=1}^{n} F(c_i) \, \Delta x_i. \tag{1}$$

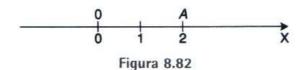
Podemos observar que à medida que n cresce muito e cada $\Delta x_i \rightarrow 0$, a soma (1) se aproxima do que intuitivamente entendemos como o trabalho total W, realizado pela força F(x) sobre o objeto, quando este se desloca de a até b.

Como (1) é uma soma de Riemann da função contínua F(x), podemos definir W por

$$W = \int_{a}^{b} F(x) dx. \tag{2}$$

8.14.2 Exemplo Uma criança rolando uma pedra utiliza uma força de 120 + 25 sen x Newtons sobre ela, quando esta rola x metros. Quanto trabalho deve a criança realizar, para fazer a pedra rolar 2 m?

Solução: A Figura 8.82 ilustra a situação. No ponto O inicia-se o movimento. Queremos calcular o trabalho W realizado pela força $F(x) = 120 + 25 \operatorname{sen} x$, sobre a pedra, quando esta se desloca de 0 até 2.



Usando (2), temos:

$$W = \int_0^2 (120 + 25 \sin x) dx$$

$$= (120x - 25 \cos x) \Big|_0^2$$

$$= 120 \cdot 2 - 25 \cos 2 - 120 \cdot 0 + 25 \cos 0$$

$$= 240 - 25 \cos 2 + 25$$

$$= (265 - 25 \cos 2) \,\text{N} \cdot \text{m (Newtons} \cdot \text{metros} = \text{Joules)}.$$

8.14.3 Trabalho resultante da distensão e compressão de uma mola

A força F(x) necessária para distender uma mola x unidades além de seu comprimento natural é dada por:

$$F(x) = kx, (3)$$

onde k é uma constante, chamada constante da mola (ver Figura 8.83).



Figura 8.83

As molas reais obedecem à equação (3), que é conhecida como *Lei de Hooke*. Colocamos a mola ao longo dos x com a origem no ponto onde começa o esticamento (ver Figura 8.84).

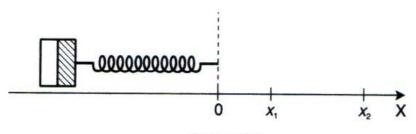


Figura 8.84

O trabalho realizado para que a mola se estenda de x_1 até x_2 é dado por:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} kx \, dx. \tag{4}$$

Observamos que esta fórmula também pode ser usada para a compressão de molas.

8.14.4 Exemplos

(i) Uma mola tem um comprimento de 0,5 m. Uma força de 4N é exigida para conservar a mola esticada 0,6 m. Calcular o trabalho realizado para que a mola se estenda de seu comprimento natural até um comprimento de 1,2 m.

Solução: Colocamos a mola ao longo do eixo dos x como mostra a Figura 8.85. Inicialmente, precisamos encontrar a constante da mola. Pela Lei de Hooke, vem

$$F(x) = kx$$

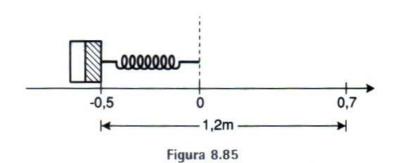
Como F(0, 6) = 4, temos:

$$k \cdot 0.6 = 4$$

$$k = \frac{4}{0.6}$$

$$k=\frac{20}{3}.$$

$$Logo, F(x) = \frac{20}{3}x.$$



Portanto, usando (4) e visualizando os limites de integração na Figura 8.85, temos:

$$W = \int_0^{0.7} \frac{20}{3} x \, dx$$
$$= \frac{20}{3} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0.7}$$
$$= \frac{10}{3} (0.7)^2$$
$$= \frac{49}{30} J \text{ (Joules)}.$$

 (ii) A constante da mola de um batente numa estação de carga é de 26 × 10⁴ N/m. Achar o trabalho efetuado ao se comprimir a mola de 10 cm.

A Figura 8.86 ilustra este exemplo. Temos que $F(x) = 26 \times 10^4 x$.

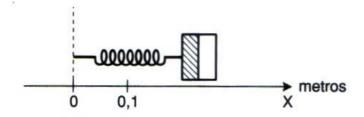


Figura 8.86

Usando (4), vem

$$W = \int_0^{0.1} 26 \times 10^4 x \, dx$$
$$= 26 \times 10^4 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0.1}$$
$$= 13 \cdot 10^4 \cdot (0.1)^2$$
$$= 1.300 \text{ J}.$$

Podemos usar a integral para calcular Trabalho em outras situações práticas. Basta identificar um sistema de coordenadas adequado e definir a força variável para a situação considerada.

Os exemplos seguintes mostram o caso de esvaziamento de tanques pela parte superior.

8.14.5 Exemplos

(i) Um tanque tem a forma de um cilindro circular reto de raio igual a 4 m e altura 8 m. Supondo que esteja cheio de água (o peso da água por m³ é 9.807 Newtons), achar o trabalho efetuado para esvaziar o tanque pela parte superior, considerando que a água seja deslocada por meio de um êmbolo, partindo da base do tanque.

Solução: A Figura 8.87 mostra o tanque com o êmbolo a y metros do fundo.

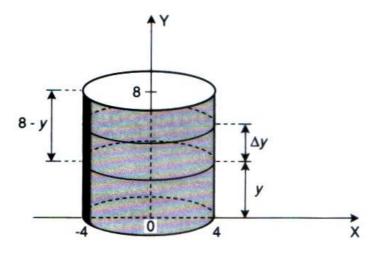


Figura 8.87

A força elevatória é igual ao peso da água sobre o êmbolo. Como volume de água acima do êmbolo é dado por $\pi r^2(8-y)$, temos:

$$F(y) = \pi r^2 (8 - y) \cdot 9.807$$

ou,

$$F(y) = \pi \cdot 4^2 \cdot (8 - y) \cdot 9.807$$

= 156.912\pi(8 - y).

Portanto, o trabalho necessário para esvaziar o tanque é

$$W = \int_0^8 156.912\pi (8 - y) dy$$

$$= 156.912\pi \int_0^8 (8 - y) dy$$

$$= 156.912\pi \left(8y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^8$$

$$= 156.912\pi \left(8 \cdot 8 - \frac{8^2}{2} \right)$$

$$= 5.021.184 \, \pi J.$$

(ii) Um tanque tem a forma do cone circular reto, de altura 10 m e raio da base 5 m. Se o tanque está cheio de água, encontrar o trabalho realizado para bombear a água pelo topo do tanque.

Solução: Seja y a distância, em metros, até o ponto de baixo do tanque (ver Figura 8.88).

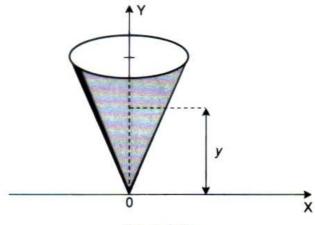


Figura 8.88

Consideremos uma partição de P de [0, 10] dada por

$$0 = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{j-1} < y_j < \dots < y_n = 10.$$

Os planos horizontais nas alturas $y = y_j$, j = 0, 1, ..., n, dividem o tanque em n fatias.

Vamos aproximar a j-ésima fatia por um disco de raio igual ao raio do tanque na altura y_j e espessura igual a $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ (ver Figura 8.89).

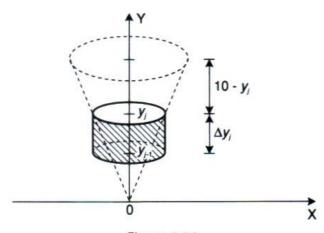


Figura 8.89

Como o cone intercepta o plano xy segunda a reta que passa por (0, 0) e (5, 10) (ver Figura 8.90), temos que o raio do j-ésimo disco é dado por $\frac{1}{2}y_j$.

O j-ésimo disco tem volume

$$\pi \left(\frac{y_j}{2}\right)^2 \Delta y_j m^3$$

e o peso da água correspondente é

$$9.807\pi \left(\frac{y_j}{2}\right)^2 \Delta y_j \text{ kg.}$$

O topo deste disco está a $10-y_j$ metros do topo do tanque. Assim, necessitamos

$$9.807\pi \left(\frac{y_i}{2}\right)^2 \Delta y_i (10 - y_i) \,\mathrm{m} \cdot \mathrm{kg}$$

de trabalho para bombear a água até o topo.

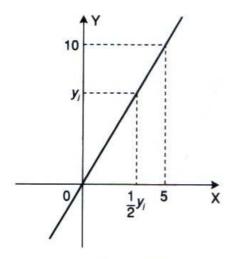


Figura 8.90

A soma

$$\sum_{j=1}^{n} 9.807 \pi \left(\frac{y_j}{2}\right)^2 (10 - y_j) \Delta y_j$$

é uma solução aproximada.

A quantidade exata de trabalho para bombear toda a água até o topo do tanque é

$$W = \int_0^{10} 9.807 \pi \left(\frac{y}{2}\right)^2 (10 - y) \, dy$$
$$= \frac{9.807 \pi}{4} \int_0^{10} y^2 (10 - y) \, dy$$
$$= 2.451,75 \pi \int_0^{10} (10y^2 - y^3) \, dy$$
$$= 2.451,75 \pi \left(10 \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right) \Big|_0^{10}$$

=
$$2.451,75\pi \left(10 \cdot \frac{10^3}{3} - \frac{10^4}{4}\right)$$

= $2.043125\pi J$.

8.15 Pressão de Líquidos

Podemos também aplicar a integral definida para encontrar a força causada pela pressão de um líquido sobre uma chapa submersa no líquido, ou sobre um lado do recipiente que o contém.

Da Física, sabemos que, se um recipiente fechado, como um balão, está cheio de líquido e se forças externas, como a gravidade, não são consideradas, então a força exercida pelo líquido sobre uma chapa plana colocada dentro do recipiente, é independente da posição da chapa. A força tem a direção perpendicular à chapa e é proporcional a sua área.

A constante de proporcionalidade entre a força exercida sobre a chapa e sua área é chamada *pressão do líquido*, e tem como unidade de medida a unidade de força por unidade de área. Por exemplo,

$$P = \frac{F}{A} \text{ Newtons/m}^2.$$

No caso de uma piscina cheia de água a pressão é causada pela gravidade e aumenta com a profundidade da água. Para um líquido qualquer, a pressão *P* exercida pelo líquido num ponto sob a superfície do mesmo, a uma profundidade *h*, é dada por:

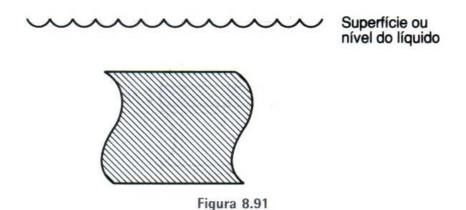
$$P = wh$$
.

onde w é o peso do líquido por unidade de volume.

 $f(y) \ge g(y), \forall y \in [c,d] \text{ (ver Figura 8.92)}$

Como a pressão varia com a profundidade, a força total numa região plana não horizontal, que está submersa numa porção de líquidos, é dada por uma integral.

A seguir, vamos determinar a força total sobre uma chapa plana, submersa em um líquido, verticalmente, como mostra a Figura 8.91.



Escolhendo o sistema de eixos coordenados adequadamente, podemos supor que a chapa tem a forma da região do plano xy limitada por y = c, y = d, x = f(y) e x = g(y), onde f e g são funções contínuas em [c, d] e

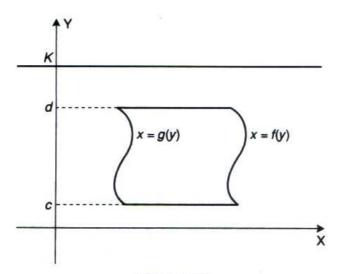


Figura 8.92

Vamos supor que o nível do líquido contenha a reta y = k. Seja P uma partição de [c, d] dada por

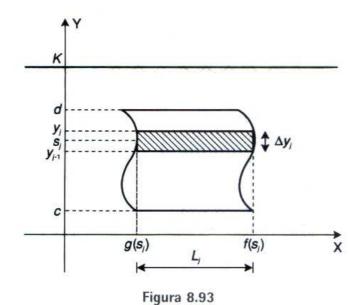
$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{j-1} < y_j < \dots < y_n = d.$$

Seja s_j um ponto qualquer do intervalo $[y_{j-1}, y_j]$ e $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$. A chapa pode ser aproximada por n retângulos de largura

$$L_i = f(s_i) - g(s_i)$$

e altura

 $H_j = \Delta y_j$ (ver Figura 8.93).



A área do j-ésimo retângulo é dada por:

$$A_{j} = L_{j} \cdot H_{j}$$
$$= [f(s_{j}) - g(s_{j})]\Delta y_{j}.$$

Se Δy_j é pequeno, então todos os pontos do retângulo estão aproximadamente à mesma distância, $k - s_j$, do nível do líquido. Logo, a pressão em qualquer ponto do retângulo pode ser aproximada por:

$$w \cdot (k - s_i)$$
.

A força no j-ésimo retângulo é aproximadamente igual a

$$w(k-s_i)[f(s_i)-g(s_i)]\Delta y_i$$

A força total sobre a chapa é aproximadamene igual a

$$\sum_{j=1}^{n} w(k-s_{j})[f(s_{j})-g(s_{j})]\Delta y_{j}. \tag{1}$$

Podemos observar que à medida que n cresce a cada $\Delta y_j \rightarrow 0$, a soma (1) se aproxima do que intuitivamente entendemos como a força total sobre a chapa. Como (1) é uma soma de Riemann da função contínua

$$w(k-y)[f(y)-g(y)],$$

podemos definir a força total sobre a chapa como

$$F = \int_{-\infty}^{d} w(k - y)[f(y) - g(y)] dy.$$
 (2)

8.15.1 Exemplos

(i) Um depósito de água tem extremidades verticais com a forma de um trapézio isósceles de base menor igual a 4 m, base maior 12 m e altura 8 m. Determinar a força total sobre uma extremidade, quando o depósito está cheio de água.

Solução: A Figura 8.94 ilustra o trapézio num sistema de coordenadas cartesianas.

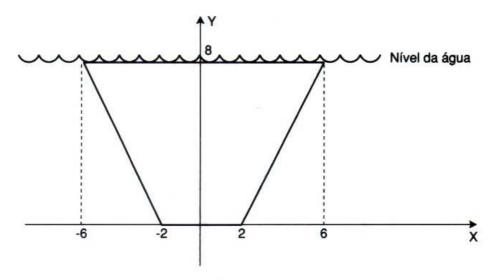


Figura 8.94

Como a figura apresenta simetria em relação ao eixo dos y, vamos analisar só a região do primeiro quadrante. Esta região está delimitada por:

$$y = 0, y = 8, x = 0 e x = \frac{y+4}{2}$$

O nível da água contém a reta y = 8.

O peso da água por metro cúbico é conhecido, da Física, como w = 9.807 Newtons.

Usando (2), temos:

$$F = 2 \int_0^8 9.807(8 - y) \cdot \frac{y + 4}{2} dy$$

$$=9.807\int_{0}^{8}(8-y)(y+4)\,dy$$

$$= 9.807 \int_{0}^{8} (32 + 4y - y^{2}) dy$$

$$= 9.807 \left(32y + 4\frac{y^{2}}{2} - \frac{y^{3}}{3} \right) \Big|_{0}^{8}$$

$$= 9.807 \left(32 \cdot 8 + 2 \cdot 8^{2} - \frac{8^{3}}{3} \right)$$

$$= 2092225,38 \text{ Newtons.}$$

(ii) Uma chapa semicircular de 0,2 m de raio acha-se submersa verticalmente num líquido, como mostra a Figura 8.95. Determinar a força exercida sobre um lado da chapa, sabendo-se que o líquido pesa 10⁴ N por m³.

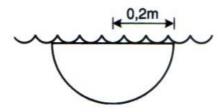
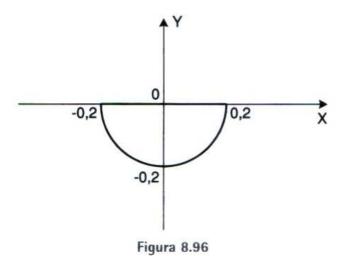


Figura 8.95

Solução: A Figura 8.96 mostra a chapa colocada num sistema de coordenadas cartesianas.

Devido à simetria em relação ao eixo dos y, vamos considerar a região delimitada por y = -0.2, y = 0, x = 0 e $x = \sqrt{0.04 - y^2}$.

O nível da água contém a reta y = 0.



Usando (2), temos

$$F = 2 \int_{-0.2}^{0} 10^{4} (0 - y) \sqrt{0.04 - y^{2}} dy$$
$$= 2 \cdot 10^{4} \int_{-0.2}^{0} -y \sqrt{0.04 - y^{2}} dy$$
$$= 2 \cdot 10^{4} \left(\frac{1}{2} \frac{(0.04 - y^{2})^{3/2}}{3/2} \right) \Big|_{-0.2}^{0}$$

$$=\frac{20000}{3}\cdot 0.04^{3/2}$$

 \approx 53,33 Newtons.

8.16 Excedentes de Consumo e Produção

Em geral as pessoas consideradas aqui como consumidores adquirem mercadorias porque elas lhes proporcionam uma satisfação considerada a melhor. Quão melhor será a satisfação das pessoas, em conjunto, por poderem adquirir um produto do mercado? Esta pergunta pode ser respondida utilizando-se integração, calculando-se o Excedente do consumidor que é a diferença entre o preço que um consumidor estaria disposto a pagar por uma mercadoria e o preço que realmente paga.

Para calcular o excedente do consumidor é necessário conhecer a curva da demanda. Vamos supor que p=f(x) é a função demanda, contínua, que relaciona o preço \overline{p} de um bem de consumo com a quantidade x demandada. Para um preço fixado pelo mercado, denotado por \overline{p} , tem-se a quantidade demanda de \overline{x} unidades. A Figura 8.97 mostra um exemplo de curva da demanda de um produto A.

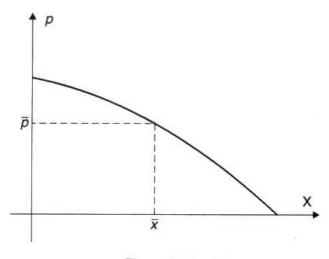


Figura 8.97

Vamos dividir o intervalo $[0, \bar{x}]$ em n subintervalos com comprimentos iguais, Δx , como mostra a Figura 8.98.

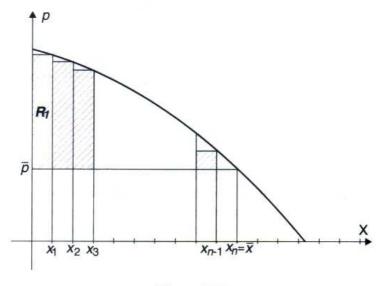


Figura 8.98

Observa-se que existem consumidores que pagariam um preço unitário de pelo menos $p = f(x_1)$ unidades monetárias pelas primeiras Δx unidades em vez do preço de mercado definido como \overline{p} unidades monetárias por unidade. A quantia economizada por esses consumidores é aproximadamente igual a:

$$f(x_1)\Delta x - \overline{p} \Delta x = [f(x_1) - \overline{p}]\Delta x$$

que é a área do retângulo denotado por R_1 .

Continuando esse raciocínio podemos escrever que a quantia total aproximada economizada pelos consumidores ao comprarem \overline{x} unidades da mercadoria é:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x - \overline{p} \, \overline{x}.$$

O primeiro termo dessa expressão é uma soma de Riemann da função demanda no intervalo $[0, \bar{x}]$. Fazendo $n \to \infty$, obtemos a expressão que fornece o cálculo exato para o **excedente de consumo** do produto, denotado por CS:

$$CS = \lim_{n \to \infty} \left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x - \overline{px} \right] = \int_{0}^{\overline{x}} f(x) dx - \overline{px}.$$

Podemos também visualizar a última expressão como

$$CS = \int_0^{\overline{x}} [f(x) - \overline{p}] dx,$$

Geometricamente o excedente de consumo pode ser interpretado como a área da figura limitada superiormente pela curva de demanda p = f(x) e inferiormente pela reta $p = \overline{p}$ no intervalo $[0, \overline{x}]$, como ilustra a Figura 8.99.

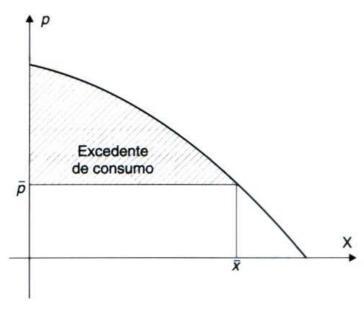


Figura 8.99

Com o mesmo raciocínio podemos considerar a função oferta p = g(x) que relaciona o preço unitário p de um bem e a quantidade x que o fornecedor tornará disponível no mercado àquele preço.

Vamos supor que \overline{p} seja o preço fixo de mercado estabelecido para o específico bem e que com este preço a quantidade a ser colocada no mercado será de \overline{x} unidades. Assim, concebe-se que os fornecedores que colocarem o bem no mercado com um preço mais baixo terão a chance de lucrar mais.

A diferença entre o que os fornecedores realmente recebem e o que eles estariam dispostos a receber é chamada de excedente de produção que denotamos por PS.

De forma análoga ao excedente de consumo podemos concluir que:

$$PS = \overline{p}\,\overline{x} - \int_0^{\overline{x}} g(x) \,dx$$

ou

$$PS = \int_0^{\overline{x}} [\overline{p} - g(x)] dx$$

sendo g(x) a função oferta, \overline{p} o preço unitário de mercado e \overline{x} a quantidade em oferta.

Na Figura 8.100 podemos visualizar o excedente de produção. Geometricamente, temos a área delimitada superiormente por $p = \overline{p}$ e inferiormente por p = g(x) no intervalo $[0, \overline{x}]$.

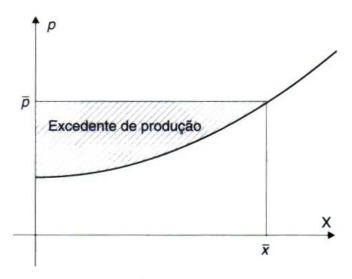


Figura 8.100

É interessante observar graficamente (ver Figura 8.101) o Excedente de Consumo e Produção em um único sistema cartesiano, usualmente utilizado no contexto econômico-financeiro para análises de mercado. Neste caso o preço de mercado é o preço de equilíbrio.

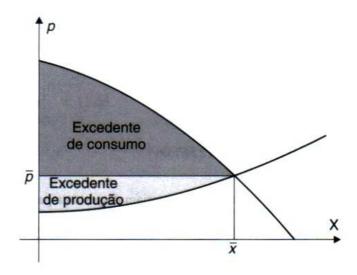


Figura 8.101

8.16.1 Exemplos

(i) Para as bicicletas da marca A de 10 marchas a função demanda é dada por $p = f(x) = -0.00152x^2 + 0.095x + 196.26$ e a função oferta $p = g(x) = 0.000964x^2 + 0.04464x + 53.59$, sendo que p é o preço unitário em reais e x a quantidade de bicicletas demandada (ou ofertada). Determinar os excedentes de consumo e de produção supondo que o preço de mercado é igual ao preço de equilíbrio.

Solução: A Figura 8.102 apresenta o gráfico das duas funções com o ponto de equilíbrio destacado. As regiões que mostram graficamente o excedente de consumo e de produção estão assinaladas.

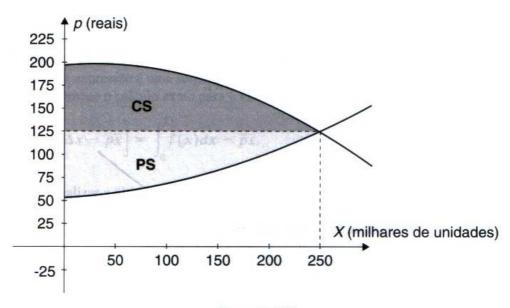


Figura 8.102

Lembramos que o ponto de equilíbrio pode ser encontrado algebricamente resolvendo a equação:

$$-0.00152x^2 + 0.095x + 196.26 = 0.000964x^2 + 0.04464x + 53.59$$

ou

$$0.002484x^2 - 0.05036x - 142.67 = 0$$

que tem como solução positiva aproximadamente o valor x = 250.

O excedente de consumo é encontrado usando-se a integral

$$CS = \int_0^{250} \left[-0,00152x^2 + 0,095x + 196,26 - 125 \right] dx$$

$$= \int_0^{250} \left[-0,00152x^2 + 0,095x + 71,26 \right] dx$$

$$= \frac{-0,00152x^3}{3} + 0,095\frac{x^2}{2} + 71,26x \Big|_0^{250} = 12.867,08$$

Assim, a diferença entre o preço que os consumidores estariam dispostos a pagar por uma bicicleta e o preço que realmente pagam é de R\$ 12.867,08.

O excedente de produção é encontrado usando-se a integral

$$PS = \int_0^{250} [125 - (0,000964x^2 + 0,04464x + 53,59)] dx$$

$$= \int_0^{250} \left[-0,000964x^2 - 0,04464x + 71,41 \right] dx$$
$$= -0,000964 \frac{x^3}{3} - 0,04464 \frac{x^2}{2} + 71,41x \Big|_0^{250} \approx 11.436,66.$$

Assim, a diferença entre o que os fornecedores realmente recebem e o que eles estariam dispostos a receber é igual a R\$11.436,66.

(ii) A função demanda para uma certa peça de reposição de motores de barco é dada por $p = -0.01x^2 - 0.1x + 4$, sendo p o preço unitário em reais e x a quantidade demandada, medida em unidades. Determine o excedente de consumo se o preço de mercado é estabelecido a R\$ 2,00 cada peça.

Solução: A Figura 8.103 mostra o gráfico da função demanda e a área que representa o excedente de consumo.

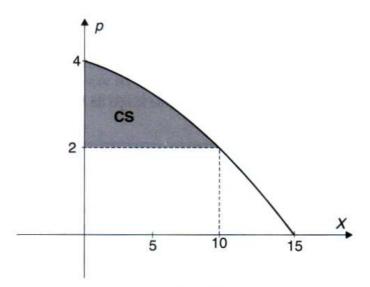


Figura 8.103

Observamos que para o preço de mercado estabelecido, a quantidade demandada é x = 10 unidades. Temos:

$$CS = \int_0^{10} \left[-0.01x^2 - 0.1x + 4 - 2 \right] dx$$
$$= \int_0^{10} \left[-0.01x^2 - 0.1x + 2 \right] dx$$
$$= -1.01 \frac{x^3}{3} - 0.1 \frac{x^2}{2} + 2x \Big|_0^{10} \approx 11.66$$

Assim, a diferença entre o preço que os consumidores estariam dispostos a pagar por uma peça e o preço que realmente pagam é de R\$ 11,66.

8.17 Valores Futuro e Presente de um Fluxo de Renda

Podemos medir o valor de um fluxo de renda de duas maneiras: valor futuro e valor presente.

Para entender o significado, podemos supor que uma rede de supermercados gera um fluxo de renda por um certo período de tempo, por exemplo, por 5 anos. À medida que a renda é realizada, ela é reinvestida e rende juros a uma taxa

fixa. O fluxo de renda futura, acumulado durante os 5 anos, é a quantia de dinheiro que a rede de supermercados possui ao final desse período.

O valor presente de um fluxo de renda também pode ser obtido utilizando-se integrais.

8.17.1 Definição O valor futuro acumulado, ou total, após T anos de um fluxo de renda de R(t) unidades monetárias por ano, rendendo juros compostos continuamente à taxa de r por ano é dado pela integral definida

$$VF = e^{rT} \int_0^T R(t) e^{-rt} dt$$

Para entender o surgimento desta integral basta acompanhar os passos que seguem:

 Dividir o intervalo de tempo [0, T] em n subintervalos de mesmo comprimento, denotados por Δt. A Figura 8.104 mostra essa partição.



Figura 8.104

- (2) Observar que a renda gerada durante cada intervalo de tempo de comprimento Δt é dada aproximadamente por $R(t_i) \Delta t$, para i = 1, 2, 3, ..., n.
- (3) O valor futuro desta quantia, daqui a T anos, calculado como se fosse ganho no instante t_i , é igual a $[R(t_i)\Delta t]e^{r(T-t_i)}$ unidades monetárias. Observamos que está sendo usada a fórmula de juros compostos continuamente.
- (4) A soma dos valores futuros do fluxo de renda gerado ao longo de cada subintervalo de tempo é aproximadamente igual ao valor futuro acumulado no decorrer de T anos ou

$$VF_{aproximado} = R(t_1)e^{r(T-t_1)} + R(t_2)e^{r(T-t_2)}\Delta t + ... + R(t_n)e^{r(T-t_n)}\Delta t$$

$$= e^{rT} \sum_{i=1}^{n} R(t_i)e^{-rt_i}\Delta t$$

(5) A soma apresentada em (4) é uma soma de Riemann da função e^{rT} R(t)e^{-rt} o que nos leva à definição dada em 8.7.1.

Em alguns momentos o interesse está no valor presente do fluxo de renda, denotado por VP. Neste caso tem-se:

$$VP = \int_0^T R(t)e^{-rt}dt.$$

8.17.2 Exemplo

(1) Qual é o valor presente acumulado de um fluxo contínuo de receitas que dura 2 anos à taxa constante de R\$ 3.000,00 por ano e é descontado à taxa nominal de 6% por ano?

Neste caso estamos diante do cálculo simples de valor presente do fluxo de renda, ou seja,

$$VP = \int_0^T R(t)e^{-rt}dt$$

$$= \int_0^2 3.000 \times e^{-0.06t}dt$$

$$= 3.000 \times \frac{-1}{0.06} e^{-0.06t} \Big|_0^2$$

$$= -50.000(e^{-0.06 \times 2} - 1)$$

\approx 5.653,98.

- (2) Os dados dessa discussão auxiliam na análise de investimentos. Vamos supor que a reforma de uma grande loja pode ser desenvolvida a partir de dois diferentes planos de obra:
- Plano A desembolso de R\$ 230.000,00;
- Plano B desembolso de R\$ 150.000,00.

No estudo realizado estimou-se que o plano A vai propiciar um fluxo de renda líquida gerado à taxa de R\$ 620.000,00 por ano e o plano B a taxa de R\$ 520.000,00 por ano no decorrer dos próximos dois anos. Se a taxa de juros pelos próximos cinco anos for de 10% ao ano, qual dos dois planos gerará maior renda líquida ao final dos dois anos?

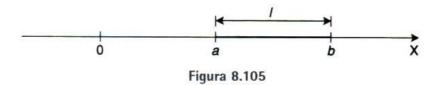
O valor presente acumulado de cada plano é calculado como segue:

$$VP_{\text{Plano }A} = \int_0^2 620000 \times e^{-0.1t} dt$$
 e $VP_{\text{Plano }B} = \int_0^2 520000 \times e^{-0.1t} dt$
$$\approx 1.123.869.33$$
 e
$$\approx 942.600.08$$

Para dar a resposta ao problema vai ser necessário subtrair o desembolso inicial. Assim, para o Plano A tem o valor de R\$ 893.869,33 e para o Plano B o valor de R\$ 792.600,08. Portanto, a melhor opção sob esta análise é o Plano A, pois poderá gerar uma renda líquida maior no período de dois anos.

8.18 Exercícios

- 1. Encontrar a massa total e o centro de massa de uma barra de 12 cm de comprimento, se a densidade linear da barra num ponto P, que dista x cm da extremidade esquerda, $\epsilon (5x + 7)$ kg/cm.
- 2. Encontrar a massa total e o centro de massa de uma barra de comprimento 3m, se a densidade linear da barra num ponto situado a x m do extremo é $(5x^2 + 3)$ kg/m.
- 3. Calcular a massa total e o centro de massa de uma barra de 5m de comprimento, sabendo que a densidade linear num ponto é uma função do 1° grau da distância total deste ponto ao extremo direito da barra. A densidade linear no extremo direito é 5kg/m e no meio da barra é 2 kg/m.
- 4. Uma barra horizontal está localizada sobre os eixos dos x, como mostra a Figura 8.105.



Se a densidade linear num ponto qualquer da barra é proporcional à distância deste ponto até a origem, determinar o valor da constante de proporcionalidade, de modo que a massa da barra seja $m = \frac{b+a}{2}$ u.m.

- 5. O comprimento de uma barra é 2 m e a densidade linear no extremo direito é 1kg/m. A densidade linear num ponto varia diretamente com a segunda potência da distância do ponto ao extremo esquerdo. Calcular a massa total e o centro de massa da barra.
- 6. Determinar o momento de inércia de uma barra homogênea de 3 m de comprimento, em relação a um eixo perpendicular, que:
 - (a) passa no ponto médio da barra; (b) passa por uma das extremidades da barra.

Considerar a densidade linear da barra igual a 0,8 kg/m.