Universidade Estadual de Londrina
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Relatório Final de Iniciação Científica

Introdução à Teoria dos Conjuntos Fuzzy

Orientando: Osmar do Nascimento Souza
Orientador: Prof. Dr. Marcos Eduardo R. Valle Mesquita

TRABALHO VINCULADO AO PROJETO DE PESQUISA:
Teoria e Aplicações de Memórias Associativas Morfológicas Nebulosas
Cadastro n^{o} 05422 PROPG/UEL

Londrina, 8 de março de 2010.

1 Introdução

A teoria dos conjuntos fuzzy vem se desenvolvendo, ganhando espaço e está sendo usada como ferramenta para a formulação de modelos nos vários campos das ciências. Esta teoria foi introduzida em 1965 pelo matemático Lotfi Asker Zadeh, com a intenção de dar um tratamento matemático a certos termos linguísticos subjetivos como: *"aproximadamente"*, *"em torno de"*, dentre outros. Pode-se dizer que a Teoria dos Conjuntos Fuzzy representa um primeiro passo no sentido de se programar e armazenar conceitos vagos em computadores, tornando possível a produção de cálculos com informações imprecisas, a exemplo do que faz o ser humano.

2 Conjuntos Fuzzy como Modeladores de Incerteza

Para descrever certos fenômenos (relacionados ao mundo sensível), utilizamos graus que representam qualidades ou verdades parciais, ou ainda, padrões do melhor. Esse é o caso, por exemplo, dos conceitos de "alto", "fumante", "infeccioso", "presa", etc.

Como exemplo, fixaremos o conjunto das pessoas altas. Uma proposta para formalizar matematicamente tal conjunto poderia ter pelo menos duas abordagens. A primeira (clássica), distinguindo a partir de que valor da altura um indivíduo é considerado alto. Nesse caso, o conjunto está bem definido. A segunda, menos convencional, é dada de maneira que os indivíduos sejam considerados altos com mais ou menos intensidade, ou seja, existem elementos que pertenceriam mais à classe dos altos que outros. Isso significa que quanto menor for a medida da altura do indivíduo, menor será seu *grau de pertinência* a esta classe. Desse modo, podemos dizer que os indivíduos pertencem à classe das pessoas altas, com mais ou menos intensidade. Pois bem, é essa segunda abordagem que será estudada nesse relatório

Foi a partir de desafios como esse, no qual a propriedade que define o conjunto é incerta, que surgiu a *teoria dos conjuntos fuzzy*, que tem crescido consideravelmente em nossos dias, tanto do ponto de vista teórico como nas aplicações em diversas áreas de estudo.

A palavra "fuzzy", de origem inglesa, significa incerto, vago, impreciso, subjetivo, nebuloso, difuso, etc.

Observação. Embora a *teoria dos conjuntos fuzzy* estude casos de incertezas, vale lembrar que tal teoria é muito bem definida. O que é incerto é a propriedade que define o conjunto em questão.

Para obter a formalização matemática de um conjunto fuzzy, Zadeh baseou-se no fato de que qualquer conjunto clássico pode ser caracterizado por uma função característica, cuja definição é dada a seguir.

Definição 1. *Seja U um universo de discurso e A um subconjunto de U. A função característica de A é dada por*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \textit{se } x \in A \\ 0, & \textit{se } x \notin A \end{cases} \tag{1}$$

Assim, χ_A é uma função cujo domínio é U e a imagem está contida no conjunto $\{0, 1\}$. Aqui, $\chi_A(x) = 1$ indica que o elemento x está em A, enquanto $\chi_A(x) = 0$ indica que x não é elemento de A.

Dessa forma, a função característica descreve completamente o conjunto A, já que tal função indica quais elementos do conjunto universo U são também elementos de A. No entanto, existem casos em que a pertinência entre elementos e conjuntos não é precisa, ou seja, não sabemos dizer se um elemento pertence efetivamente a um conjunto ou não.

O que é admissível é dizer qual elemento do conjunto universo se enquadra "melhor" ao termo que caracteriza o subconjunto. Por exemplo, consideremos o subconjunto dos números reais "próximo de 2".

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ é próximo de } 2\} \tag{2}$$

Poderíamos perguntar se o número 7 e o número 2,001 pertencem a A. A resposta é incerta, pois não sabemos até que ponto podemos dizer objetivamente quando um número está próximo de 2. O que pode afirmar é que 2,001 está mais próximo de 2 do que 7.

Iniciaremos, então, as formalizações dos conceitos da teoria dos conjuntos fuzzy com a noção de subconjunto fuzzy.

Definição 2. *Seja U um universo de discurso. Um subconjunto fuzzy F de U é caracterizado por uma função*

$$\varphi_F : U \longrightarrow [0, 1], \tag{3}$$

pré-fixada, chamada função de pertinência do subconjunto fuzzy F.

A classe de todos os subconjuntos fuzzy de U é denominado por $F(U)$. O valor $\varphi_F(x)$ indica o grau com que o elemento x de U está no conjunto fuzzy F. Em particular, $\varphi_F(x) = 0$ e $\varphi_F(x) = 1$ indicam, respectivamente, a não pertinência e a pertinência *completa* de x ao conjunto fuzzy F.

Do ponto de vista formal, a definição de subconjunto fuzzy foi obtida simplesmente ampliando-se o contra-domínio da função característica, que é o conjunto {0,1}, para o intervalo [0,1]. Nesse sentido, podemos dizer que um conjunto clássico é um caso particular de conjunto fuzzy, cuja função de pertinência φ_F é sua função característica χ_F. Na linguagem fuzzy um subconjunto clássico costuma ser denominado subconjunto *crisp*.

Exemplo 1 (Números próximos de dois)**.** Considere o subconjunto F dos números reais próximos de 2:

$$F = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ é próximo de } 2\} \tag{4}$$

Se definirmos a função $\varphi_F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ que associa cada x real ao valor de proximidade ao ponto 2 pela expressão

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} (1 - |x - 2|), & \text{se } x \in [1, 3] \\ 0, & \text{se } x \notin [1, 3] \end{cases}, \tag{5}$$

então o subconjunto fuzzy F dos pontos próximos de 2, caracterizado por φ_F, é tal que $\varphi_F(2, 001) = 0, 999$ e $\varphi_F(7) = 0$. Nesse caso, dizemos que $x = 2, 001$ é um ponto próximo de 2 com grau de proximidade 0,999 e $x = 7$ não é próximo de 2.

Exemplo 2 (Conjunto fuzzy dos jovens)**.** Um segundo exemplo seria o conjunto fuzzy das pessoas jovens. Consideremos os habitantes de uma determinada cidade. A cada indivíduo desta população podemos associar um número real correspondente à sua idade. Considere o conjunto universo das idades o intervalo U = [0,120], em que $x \in U$ é interpretado como a idade de um indivíduo. Um subconjunto fuzzy J de U, dos jovens desta cidade, poderia ser caracterizado pelas seguintes funções de pertinência:

$$\varphi_J(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq 10 \\ \frac{80-x}{70}, & \text{se } 10 < x \leq 80 \\ 0, & \text{se } x > 80 \end{cases} \tag{6}$$

ou

$$\varphi_J(x) = \begin{cases} (\frac{40-x}{40})^2, & \text{se } 0 \leq x \leq 40 \\ 0, & \text{se } 40 < x \leq 120 \end{cases} \tag{7}$$

A escolha de qual equação adotar para representar o conceito de jovem depende muito do modelador e/ou do contexto analisado.

Paciente	Febre:A	Mialgia:B	$A \cup B$	$A \cap B$	A'	$A \cup A'$	$A \cap A'$
1	0,7	0,6	0,7	0,6	0,3	0,3	0,7
2	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0	1,0
3	0,4	0,2	0,4	0,2	0,6	0,4	0,6
4	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
5	1,0	0,2	1,0	0,2	0,0	0,0	1,0

Tabela 1: Ilustração das operações entre subconjuntos fuzzy

2.1 Operações com Conjuntos Fuzzy

Assim como na teoria clássica dos conjubtos, na teoria dos conjuntos fuzzy existem operações típicas como união, intersecção e complemento. Daremos, a seguir, as definições dessas operações.

Definição 3. *(União, Intersecção e Complemento) Dados conjuntos fuzzy A e B de U, a união $A \cup B$, a intersecção $A \cap B$ e o complemento A' são conjuntos fuzzy com funções de pertinência dadas pelas seguintes equações, respectivamente:*

$$\varphi_{(A \cup B)}(x) = \max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, \forall x \in U \tag{8}$$

$$\varphi_{(A \cap B)}(x) = \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, \forall x \in U \tag{9}$$

$$\varphi_{A'}(x) = 1 - \varphi_A(x), \forall x \in U \tag{10}$$

Exemplo 3 (Conjuntos fuzzy dos febris e/ou com mialgia)**.** Suponha que o conjunto universo U seja composto pelos pacientes de uma clínica, identificados pelos números 1,2,3,4 e 5. Sejam A e B os subconjuntos fuzzy que representam os pacientes com febre e mialgia, respectivamente, como apresentado na tabela 2. Essa tabela também ilustra as operações união, intersecção e complemento. Precisamente, os valores das colunas, exceto os da primeira, indicam os graus com que cada paciente pertence aos conjuntos fuzzy A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, A', $A \cup A'$, $A \cap A'$, respectivamente.

Na coluna $A \cap A'$, o valor 0,3 indica que o paciente 1 está tanto no grupo dos febris como no dos não febris. Notemos que este é um fato inaceitável na teoria clássica de conjuntos na qual tem-se a lei do terceiro excluído, isto é, $A \cup A' = \emptyset$.

Dados dois subconjuntos fuzzy A e B de U, temos que A e B serão iguais se suas funções de pertinência coincidem, ou seja, se $\varphi_A(x) = \varphi_B(x), \forall x \in U$.

Temos, a seguir, as principais propriedades das operações com subconjuntos fuzzy; lembrando que o conjunto vazio ($\emptyset$) tem função de pertinência $\varphi_{\emptyset}(x) = 0$, enquanto que o conjunto (U) tem função de pertinência $\varphi_U(x) = 1$, $\forall x \in U$.

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{e} \quad A \cap B = B \cap A \tag{11}$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad \text{e} \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \tag{12}$$

$$A \cup A = A \quad \text{e} \quad A \cap A = A \tag{13}$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{e} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{14}$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad \text{e} \quad A \cup \emptyset = A \tag{15}$$

$$A \cap U = A \quad \text{e} \quad A \cup U = U \tag{16}$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad \text{e} \quad (A \cap B)' = A' \cup B' \tag{17}$$

2.2 O Conceito de Suporte e α-nível

A seguinte definição tem papel importante na inter-relação entre as teorias de conjuntos clássica e fuzzy, pois oferece uma forma de relacionar um conjunto fuzzy com conjuntos clássicos.

Definição 4. *O subconjunto clássico de U definido por $supp_F = \{x \in U : \varphi_F(x) > 0\}$ é denominado suporte de F.*

Notemos que o suporte de um subconjunto crisp coincide com o próprio conjunto.

Definição 5. *Seja A um subconjunto fuzzy de U e $\alpha \in [0, 1]$. O α-nível de A é o subconjunto clássico de U definido por $[A]^\alpha = \{x \in U : \varphi_A(x) \geq \alpha\}$, se $0 < \alpha \leq 1$. O nível zero de um subconjunto fuzzy de A é definido como sendo o menor subconjunto(clássico) fechado de U que contém o conjunto suporte de A.*

3 Números Fuzzy

Introduziremos o conceito de números fuzzy, o qual faz-se necessário para podermos quantificar predicados qualitativos e fazer contas com os mesmos.

Definição 6. *Um subconjunto fuzzy A é chamado de número fuzzy quando o conjunto universo no qual φ_A está definida, é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e satisfazem às seguintes condições:*

1. *todos os α-níveis de A são não-vazios, com $0 \leq \alpha \leq 1$;*

2. *todos os α-níveis de A são intervalos fechados de $\mathbb{R}$;*

3. *$supp_A = \{x \in \mathbb{R} : \varphi_A(x) > 0\}$ é limitado.*

Os números fuzzy mais comuns são os triangulares, trapezoidais e em forma de sino.

Exemplo 4. (Triangular)
Um número fuzzy é dito tringular se sua função de pertinência é da forma

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a, \\ \frac{x-a}{u-a}, & \text{se } a < x \leq u, \\ \frac{x-b}{u-b}, & \text{se } u \leq x < b, \\ 0, & \text{se } x \geq b. \end{cases} \tag{18}$$

A expressão *"em torno de"* pode ser modelada matematicamente pelo número fuzzy triangular simétrico A.

Exemplo 5. (Trapezoidal)
Um número fuzzy A é dito trapezoidal se sua função de pertinência tem a forma de um trapézio e é dada por

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a \leq x < b, \\ 1, & \text{se } b \leq x \leq c, \\ \frac{d-x}{d-c}, & \text{se } c < x \leq d, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{19}$$

Exemplo 6. (Forma de sino) Um número fuzzy tem a forma de sino se sua função de pertinência for “suave” e simétrica em relação a um número real. A seguinte função de pertinência tem estas propriedades para u,a e δ dados.

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-(x-u)^2}{a}\right), & \text{se } u - \delta \leq x \leq u + \delta, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{20}$$

Temos também as operações aritméticas com números fuzzy. Estas estão estreitamente ligadas às operações aritméticas intervalares.

4 Relações Fuzzy

O conceito de relação em matemática é formalizado a partir de conjuntos. Intuitivamente, pode-se dizer que a relação será fuzzy quando optamos pela teoria fuzzy.

Uma relação clássica indica se há ou não alguma associação entre dois objetos, enquanto que uma relação fuzzy, além de indicar se há ou não tal associação, indica também o grau dessa relação.

Como uma relação (clássica) R é um subconjunto do produto cartesiano, então ela pode ser representada por sua função característica

$$\chi_R : U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n \longrightarrow \{0, 1\},$$

com

$$\chi_R(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x_1, x_2, ..., x_n) \in R \\ 0, & \text{se } (x_1, x_2, ..., x_n) \notin R \end{cases} \tag{21}$$

O conceito matemático de relação fuzzy é formalizado a partir do produto cartesiano usual entre conjuntos, estendendo a função característica de uma relação por uma função de pertinência.

Definição 7 (Relação Fuzzy)**.** *Uma relação fuzzy R sobre $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$ é qualquer subconjunto fuzzy de $U_1 \times U_2 \times, \ldots, \times U_n$. Assim, uma relação fuzzy R é definida por uma função de pertinência $\varphi_R : U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n \longrightarrow [0, 1]$.*

Se a função de pertinência da relação fuzzy R for indicada por φ_R, então o número $\varphi_R(x_1, x_2, ..., x_n)$ indica o grau com que os elementos x_i, que compõem a n-upla $(x_1, x_2, ..., x_n)$, estão relacionados segundo a relação R.

Na teoria dos conjuntos fuzzy, o produto cartesiano é similar à operação de intersecção, vista anteriormente. A grande diferença está nos conjuntos universos envolvidos: enquanto na intersecção os subconjuntos fuzzy são de um mesmo universo, no produto cartesiano eles podem ser diferentes. Definiremos, então, o produto cartesiano fuzzy.

Definição 8. *(Produto Cartesiano)*

O produto cartesiano fuzzy dos subconjuntos $A_1, A_2 \ldots A_n$ de $U_1, U_2, ..., U_n$, respectivamente, é a relação fuzzy $A_1 \times A_2 \times, \ldots, \times A_n$, cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \varphi_{A_1}(x_1) \wedge \varphi_{A_2}(x_2) \wedge \ldots \wedge \varphi_{A_n}(x_n), \tag{22}$$

em que $\wedge$ representa o mínimo.

Observemos que se $A_1, A_2, ..., A_n$ forem conjuntos clássicos, então o produto cartesiano clássico $A_1 \times A_2 \times, \ldots, \times A_n$ pode ser representado pela definição anterior, substituindo as funções de pertinência pelas respectivas funções características dos conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$. O exemplo a seguir ilustra a importância da aplicação do produto cartesiano.

Exemplo 7. Consideremos, novamente, os conjuntos fuzzy dos febris e/ou com mialgia apresentados na tabela 2, o qual relaciona os diagnósticos de 5 pacientes com dois sintomas: febre e mialgia.

Para diagnosticar um paciente, o médico parte de certas avaliações de sintomas (ou sinais) que são características de cada doença. Várias doenças podem apresentar sintomas de febre e mialgia com intensidades e medições diversas. Para a gripe, por exemplo, o paciente apresenta sintomas de "febre" e "mialgia" que, se representados por subconjuntos fuzzy, estes devem ter universos distintos. O universo indicador de febre pode ser dado pelas temperatura possíveis de um indivíduo, enquanto que a mialgia pode ser avaliada pelo número de regiões doloridas.

Para indicar o quanto um indivíduo tem gripe tomamos um grau de pertinência ao conjunto do sintoma febre ao conjunto mialgia. O paciente 1 da tabela acima, por exemplo, tem uma temperatura x, cuja pertinência ao conjunto febre A é $\varphi_A(x) = 0,7$ e tem um valor y de mialgia que faz com que $\varphi_B(y) = 0,6$. O diagnóstico do paciente 1 para a doença gripe é dado então por:

$$\text{Paciente 1 : } \varphi_{gripe}(x,y) = \varphi_A(x) \wedge \varphi_B(y) = 0,7 \wedge 0,6 = 0,6$$

Isso significa que o paciente 1 está no subconjunto fuzzy dos febris com mialgia, tendo grau de pertinência 0,6; que coincide com o grau de seu diagnóstico para gripe.

O produto cartesiano clássico também poderia ser usado nesse exemplo. Nesse caso, apenas seria indicado gripe (grau um) ou não gripe (grau zero), e apenas o paciente 2 seria considerado gripado.

4.1 Composição entre Relações Fuzzy Binárias

A composição entre relações é de grande importância nas aplicações. Apresentaremos apenas a composição chamada de *composição max-min*.

Definição 9. *Considere R e S duas ralações fuzzy binárias em $U \times V$ e $V \times W$, respectivamente. A composição $R \circ S$ é uma relação fuzzy binária em $U \times W$ cuja função de pertinência é dada por*

$$\varphi_{R \circ S}(x,z) = \sup_{y \in V} \Big[\min \big(\varphi_R(x,y), \varphi_S(y,z) \big) \Big], \tag{23}$$

$x \in U$ e $z \in W$.

Quando os counjuntos U, V e W são finitos, então a forma matricial da relação $R \circ S$, dada pela composição max-min é obtida como uma multiplicação de matrizes, substituindo-se o produto pelo mínimo e a soma pelo máximo.

O caso especial da composição max-min é a *regra de composição de inferência*. Essa regra é muito útil, pois fornece a interpretação de R como um funcional de $\mathcal{F}(U)$ em $\mathcal{F}(V)$.

Definição 10. *(Regra de composição de inferência)*

Sejam U e V dois conjuntos; $\mathcal{F}(U)$ e $\mathcal{F}(V)$ as classes dos subconjuntos fuzzy de U e V, respectivamente, e R uma ralação binária sobre $U \times V$.

A relação R define um funcional de $\mathcal{F}(U)$ em $\mathcal{F}(V)$ que, a cada elemento $A \in \mathcal{F}(U)$, faz corresponder o elemento $B \in \mathcal{F}(V)$ cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_B(y) = \varphi_{R \circ A}(y) = \sup_{x \in U} \Big[\min(\big(\varphi_R(x,y), \varphi_A(x) \big)) \Big]. \tag{24}$$

Notação: $B = R \circ A$

5 Raciocínio Aproximado

O principal sucesso da teoria dos conjuntos fuzzy é devido ao seu caráter prático, já que possibilita conclusões a partir de proposições incertas. A área que lida com as formalizações dessas proposições é conhecida como *raciocínio aproximado*.

Exemplo 8. Como exemplo ilustrativo, considere o seguinte raciocínio:

1. Gripe forte provoca febre alta;

2. Febre alta provoca dores de cabeça frequentemente;

   Conclusão: Gripe forte provoca dores de cabeça frequentemente.

A última sentença (conclusão) é uma dedução obtida a partir das premissas. Porém, alguns dos predicados não são termos precisos, tais como: *"forte"*, *"alta"* e *"freqüentemente"*, por esse motivo, a teoria clássica não trata dessas sentenças. Iniciaremos, então, com alguns conceitos da lógica tradicional que servirão de base para o desenvolvimento da teoria lógica fuzzy.

5.1 Conectivos Básicos da Lógica Clássica

Na lógica clássica, sentenças verdadeiras têm valor lógico 1, enquanto sentenças falsas têm valor lógico 0 (por isso a lógica clássica é, às vezes, chamada de "lógica de dois valores"). Pensando na extensão para o caso fuzzy, usaremos a notação $\wedge$ (mínimo) para conjunção *e; $\vee$ (máximo) para* ou; $\neg$ para a *negação e $\Rightarrow$ para a* implicação.

Tais conceitos são tipicamente usados na modelagem matemática em sentenças do tipo:

$$\text{“Se a está em } A \text{ e } b \text{ está em } B\text{, então } c \text{ está em } C \text{ ou } d \text{ não está em } D\text{”;} \tag{25}$$

que pode ser expressa por meio da seguinte proposição:

$$\textbf{SE} \quad \overbrace{\underbrace{a \in A}_{p} \;\; \textbf{E} \;\; \underbrace{b \in B}_{q}}^{P}, \; \textbf{ENTÃO} \;\; \overbrace{\underbrace{c \in C}_{r} \;\; \textbf{OU} \;\; \underbrace{d \notin D}_{s}}^{Q}. \tag{26}$$

Os valores de cada uma das expressões p,q,r e s podem ser apenas 0 ou 1, dependendo se cada elemento pertence ou não ao conjunto indicado. Por exemplo, $p = 1$ se a está em A e $p = 0$ se $a \notin A$. Analogamente, temos os valores para q,r e s.

Avaliaremos a sentença (26) para cada situação: Se $a \in A(p = 1)$; $b \notin B(q = 0)$; $c \in C(r = 1)$ e $d \notin D(s = 1)$. Assim, o valor lógico de (26) é $[(1 \wedge 0) \Rightarrow (1 \vee 1)] = (0 \Rightarrow 1) = 1$.

Pensando no caso fuzzy, observamos que o valor lógico da sentença P("a está em A") coincide com o valor obtido com a função característica do conjunto A avaliado em a, isto é, o valor de P é dado por $\chi_A(a)$. Da mesma forma χ_B dá o valor de q, χ_C de r e o valor de s é dado por $1 - \chi_D$. No caso fuzzy, simplesmente substituímos função característica por uma função de pertinência.

A seguir, faremos uma introdução ao Raciocínio Aproximado e Variáveis Lingüísticas.

5.2 Raciocínio Aproximado e Variáveis Lingüísticas

O raciocínio aproximado refere-se ao processo em que se pode obter conclusões a partir de premissas incertas. Quando esta incerteza é considerada fuzzy, é muito frequente o uso do termo raciocínio fuzzy. É bastante comum na vida diária o seguinte raciocínio:

"Se a banana está amarela, então ela está madura."

De uma forma mais geral:

$$\text{“ Se } x \text{ é } \Omega, \text{ então } y \text{ é } \Psi.'' \tag{27}$$

Esta é uma generalização do conhecido método-dedutivo modus ponens. A diferença para o modus ponens clássico está na subjetividade dos predicados envolvidos. As sentenças gerais (27) são expressas em linguagem "natural" sem o formalismo da linguagem matemática. Nosso interesse é um modelo matemático para a mesma usando lógica fuzzy.

Voltemos à sentença (26), essa tem uma diferença substancial da sentença (27), a saber, nesta última não há qualquer conjunto (clássico ou fuzzy) envolvido, e sim, qualificações a respeito das variáveis x e y.

Para expressar formalmente sentenças com variáveis como em (27) é que se "unem" as teorias dos conjuntos fuzzy e a da lógica fuzzy. Para se obter uma avaliação lógica de (27) a idéia é reescrevê-la na forma da sentença (26) e, para isso, faz-se necessário o conceito de variável lingüística.

Definição 11. *(Variável Lingüística) Uma variável lingüística X no universo U é uma variável cujos valores assumidos por ela são subconjuntos fuzzy de U.*

Intuitivametente, uma variável lingüística é um substantivo, enquanto seus valores são adjetivos, representados por conjuntos fuzzy. Por exemplo, "gripe" é uma variável lingüística que pode assumir os atributos *"forte"* ou *"fraca"*.

Dependendo das circunstâncias devemos ler "X é A" ou "X está em A". Notemos também que X é A (ou está em A) significa "$X = x$ é A" (ou "$X = x$ está em A"). Assim é que a sentença (27) pode ter seu valor lógico, a exemplo da sentença (26). O valor lógico de "$X = x$ é A" é o número $\varphi_A(x)$ que indica o quanto $X = x$ está em concordância com o termo lingüístico modelado pelo conjunto fuzzy A.

Faremos, a seguir, a noção de variáveis lingüísticas para formular os métodos dedutivos *modus ponens* para o caso fuzzy.

5.3 Modus Ponens e Modus Ponens Generalizado

Nosso interesse inicial é modelar matematicamente o modus ponens fuzzy:

$$p \Rightarrow q : \text{“ Se } x \text{ é } A \text{ então } y \text{ é } B'' \tag{28}$$

$$(\text{Fato})p : \text{“}x \text{ é } A'' \tag{29}$$

$$(\text{Conclusão})q : \text{“}y \text{ é } B'' \tag{30}$$

Note que $(p \Rightarrow q)$ é uma proposição fuzzy condicional que é modelada por uma relação fuzzy R de $U \times V$, cuja função de pertinência é

$$\varphi_R(x, y) = [\varphi_A(x) \Rightarrow \varphi_B(y)], \tag{31}$$

em que x e y são valores de variáveis lingüísticas de U e V, respectivamente. Assim, o valor da sentença "Se x é A então y é B" depende da implicação a ser escolhida.

A implicação clássica, isto é, $\varphi_A(x) \in \{0, 1\}$ e $\varphi_B(x) \in \{0, 1\}$, produz a relação fuzzy cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_R(x, y) = \chi_R(x, y) = \big(\chi_B(x) \Rightarrow \chi_B(x)\big) \tag{32}$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{se } (x \notin A \text{ e } y \text{ qualquer ou } (x \in A \text{ e } y \in B) \\ 0, & \text{se } x \in A \text{ e } y \notin B \end{cases} \tag{33}$$

De modo que

$$\chi_B(y) = \sup_{x \in U}[\min(\chi_R(x,y), \chi_A(x))] = \begin{cases} 1, & \text{se } y \in B \\ 0, & \text{se } y \notin B \end{cases} \tag{34}$$

Para o caso clássico, o modus ponens pode ser escrito matematicamente por meio da fórmula:

$$\chi_B(y) = \sup_{x \in U}[\min(\chi_R(x,y), \chi_A(x))] \tag{35}$$

Assim, o modus ponens clássico pode ser dado pela regra e composição de inferência $B = R \circ A$, em que a relação R é obtida por meio de uma implicação fuzzy que modela a sentença condicional: "Se x é A então y é B".

Com o propósito de inferir conjuntos fuzzy, essa fórmula será estendida para situações fuzzy mais gerais tais como o *modus ponens* e o *modus ponens fuzzy generalizado*.

O modus ponens fuzzy modela o seguinte silogismo:

Regra: "Se a banana está amarela, então está madura."
Fato: "A banana está amarela"
Conclusão: "A banana está madura"

A lógica fuzzy revela seu grande potencial na modelagem de cada uma das sentenças acima. Os substantivos e seus atributos são modelados por conjuntos fuzzy(funções de pertinência), enquanto que os conectivos por operadores como mínimo e máximo, implicações e/ou negações. A conclusão, que deve ser um conjunto fuzzy, é obtida pela extensão da regra de composição de inferência

$$\chi_B(y) = \sup_{x \in U}[\min(\chi_R(x,y), \chi_A(x))], \tag{36}$$

Substituindo as funções caracteíticas por funções de pertinência obtemos:

$$\varphi_B(y) = \sup_{x \in U}[\min(\varphi_R(x,y), \varphi_A(x))], \tag{37}$$

Em resumo, essa fórmula é a regra de inferência que modela o *modus ponens fuzzy*

Regra: "Se x é A, então y é B."
Fato: "x é A."
Conclusão: " y é B."

Finalmente, estenderemos essa equação (37) adimitindo uma entrada A' no lugar de A e a flexibilizaremos deixando de exigir que a saída B' seja B para a entrada $A = A'$. Nesse caso, denominaremos o silogismo por *modus ponens fuzzy generalizado*, que tem a forma geral:

Regra: "Se x é A, então y é B." Fato: "x é A'." Conclusão: " y é B'."

A saída do *modus ponens fuzzy generalizado* é conjunto fuzzy B', cuja função de pertinência é

$$\varphi_{B'}(y) = \sup_{x \in U}[\min(\varphi_R(x,y),\ \varphi_{A'}(x))], \tag{38}$$

que, por analogia à regra de composição de inferência vista no capítulo anterior, tem a forma $R(A') = R \circ A' = B'$.

Notemos que, no caso clássico, sempre temos $R(A) = B$. Porém, no caso fuzzy, nem sempre teremos $R(A) = B$. Esse fato não desabona o uso da fórmula (37) e/ou (38) . É bastante comum se obter um funcional teórico, sem que esse funcional reproduza os dados que o originaram.

6 Sistemas e Controladores Fuzzy

Os controladores fuzzy têm a característica de que, para um sistema fuzzy qualquer, cada entrada fuzzy faz-se corresponder uma saída fuzzy. Porém, há casos em que se a entrada for crisp, espera-se que a saída também seja crisp construída de alguma maneira específica. A seguir indicaremos um roteiro para construção dessa função.

6.1 Módulo de Fuzzificação

Módulo de fuzzifiacação é o estágio no qual as entradas do sistema são modeladas por conjuntos fuzzy com seus respectivos domínios. É nesse estágio que se justifica a grande importância de especialistas do fenômeno a ser modelado. Assim, mesmo que a entrada seja crisp, essa será fuzzificada por meio de sua função característica.

6.2 Módulo da Base de Regras

Módulo de base de regras pode ser considerado como um módulo que faz parte do "núcleo" do controlador fuzzy. Ele é composto pelas proposições fuzzy e cada uma destas proposições é descrita na forma linguística:

Se x_1 é A_1 e x_2 é A_2 e . . . e x_n é A_n então u_1 é B_1 e u_2 é B_2 e . . . e u_m é B_m,

de acordo com as informações de um especialistas. É neste ponto que as variáveis e suas classificações linguísticas são catalogadas e, em seguida, modeladas por conjuntos fuzzy, ou ainda, funções de pertinência.

Existem vários métodos para se obter essas funções de pertinência, por exemplo: apelos intuitivos, ajustes de curvas, interpolações e até mesmo rede neurais.

6.3 Módulo de Inferência Fuzzy

Nesse módulo cada proposição fuzzy é traduzida "matematicamente" por meio das técnicas da lógica fuzzy. Esse módulo fornecerá a saída (controle) fuzzy a ser adotada pelo controlador, a partir de cada entrada fuzzy. Já o módulo de defuzificação é um processo que permite representar um conjunto fuzzy por um valor crisp.

Assim, a base de regras é modelada matematicamente por uma relação fuzzy R, a partir dos conjuntos fuzzy que a compõe e da lógica fuzzy adotada. A função de pertinência de R é dada por

$$\varphi_R(x, y) = \max_{1 \leq i \leq r}(\varphi_{R_i}(x, u)), \tag{39}$$

sendo R_i a relação fuzzy obtida da regra i, cuja função de pertinência φ_{R_i} é obtida, por exemplo, por meio de um modus ponens generelazido. Os valores x e u representam, respectivamente, o estado e o controle. A inferência, que representa o controle B para um estado A, é dada por uma regra de composição de inferência $B = R(A)$, cuja função de pertinência é dada pela equação(37).

Atualmente, os controladores fuzzy são largamente utilizados em aparelhos eletrodomésticos. Na próxima seção será ilustrado o *Método de Inferência de Mamdani*

6.3.1 Método de Inferência de Mamdani

Resumidamente, Mamdani propõe uma relação fuzzy binária M entre x e u para modelar matematicamente a base de regras. Esse método tem como base a regra de composição de inferência max-min. Seu procedimento é da seguinte forma:

1. Em cada regra R_j a condicional "*Se x é A_j, Então u é B_j''* é modelada pela aplicação o mínimo,
2. Adota-se a aplicação $\wedge$ (mínimo) para o conceito lógico "e" e o máximo para "ou".

Assim, a relação fuzzy M é o subconjunto fuzzy de $X \times U$ cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_M(x,u) = \max_{1\leq i\leq r}(\varphi_{R_i}(x,u)) = \max_{1\leq i\leq r}[\varphi_{A_j}(x) \wedge \varphi_{B_j}(u)], \tag{40}$$

Sendo r o número de regras que compõem a base de regras e, A_j e B_j são os subconjuntos fuzzy da regra j.

Observação. Os conjuntos fuzzy de regras que aparecem na fórmula de $\varphi_M(x,u)$ acima podem representar o produto cartesiano fuzzy de subconjuntos fuzzy, isto é,

$$\varphi_{A_j}(x) = \varphi_{A_{j_1}}(x_1) \wedge \varphi_{A_{j_2}}(x_2) \quad \text{e} \quad \varphi_{B_j}(u) = \varphi_{B_{j_1}}(u_1) \wedge \varphi_{B_{j_2}}(u_2), \tag{41}$$

O exemplo seguinte ilustra o método de inferência de Mamdani para o caso de um sistema fuzzy com duas entradas e uma saída.

Exemplo 9. Considere o quadro a seguir:

R_1: Se x_1 é A_{11} e x_2 é A_{22} então u é B_1.
R_2: Se x_1 é A_{21} e x_2 é A_{22} então u é B_2.

Dessa forma, para cada terna (x_1, x_2, u), temos

$$\begin{aligned} \varphi_M(x_1,x_2,u) &= \varphi_{A_{11}}(x_1) \wedge \varphi_{A_{22}}(x_2) \wedge \varphi_{B_1}(u) \vee \varphi_{A_{21}}(x_1) \wedge \varphi_{A_{22}}(x_2) \wedge \varphi_{B_2}(u) \\ &= \max \varphi_{A_{11}}(x_1) \wedge \varphi_{A_{12}}(x_2) \wedge \varphi_{B_1}(u), \varphi_{A_{21}}(x_1) \wedge \varphi_{A_{22}}(x_2) \wedge \varphi_{B_2}(u) \quad (42) \end{aligned}$$

que representa a relação fuzzy obtida da fase de regras pelo método de Mamdani.

Agora, para um dado conjunto fuzzy de entrada $A = A_1 \times A_2$, com A_1 e A_2 dois números fuzzy, o conjunto fuzzy de saída, que representa o controle a ser adotado para A é dado por $B = M \circ A$, cuja função de pertinência é

$$\varphi_B(u) = (\varphi_{M\circ A})(u) = \sup_x \varphi_M(x,u) \wedge \varphi_A(x). \tag{43}$$

Como $A = A_1 \times A_2$, então $\varphi_A(x_1,x_2) = \varphi_{A_1}(x_1) \wedge \varphi_{A_2}(x_2)$. Assim,

$$\begin{aligned} \varphi_B(u) &= \max_{(x_1,x_2)} \varphi_M(x_1,x_2,u) \wedge [\varphi_{A_1}(x_1) \wedge \varphi_{A_2}(x_2)] && (44) \\ &= \max_{(x_1,x_2)} [(\varphi_{A_{11}}(x_1) \wedge \varphi_{A_{12}}(x_2) \wedge \varphi_{B_1}(u)) \vee (\varphi_{A_{21}}(x_1) \wedge \varphi_{A_{22}}(x_2) \wedge \varphi_{B_2}(u))] && (45) \\ &\quad \wedge[\varphi_{A_1}(x_1) \wedge \varphi_{A_2}(x_2)] && (46) \\ &= \max_{(x_1,x_2)} [\varphi_{A_{11}}(x_1)] \wedge [\varphi_{A_{12}}(x_2) \wedge \varphi_{A_2}](x_2)] \wedge \varphi_{B_1}(u) && (47) \\ &= \max [\varphi_{21}(x_1) \wedge \varphi_{A_1}(x_1)] \wedge [\varphi_{A_2}(x_2) \wedge \varphi_{A_{22}}(x_2)] \wedge \varphi_{B_2}(u) && (48) \\ &= \varphi_{B_{R_1}}(u) \vee \varphi_{B_{R_2}}(u), && (49) \end{aligned}$$

sendo B_{R_1} e B_{R_2} as saídas parciais devido às regras R_1 e R_2, respectivamente.

No exemplo seguinte, temos um caso particular do anterior no sentido que a entrada A agora é crisp.

Exemplo 10. Considere no exemplo anterior o caso em que o conjunto fuzzy de entrada A é crisp e cuja função de pertinência está concentrada em um ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dessa forma,

$$\varphi_A(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x,y) = (x_0, y_0) \\ 0, & \text{se } x,y) \neq (x_0, y_0), \end{cases} \tag{50}$$

ou seja, $A = A_1 \times A_2$. No qual

$$\varphi_{A_1}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = x_0 \\ 0, & \text{se } x \neq x_0, \end{cases} \tag{51}$$

e

$$\varphi_{A_2}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } y = y_0 \\ 0, & \text{se } y \neq y_0, \end{cases} \tag{52}$$

Por meio do último exemplo, pode ser visto que a saída do controlador fuzzy, dada pelo método de inferência de Mamdani, é um subconjunto fuzzy, mesmo para o caso de uma entrada crisp. Assim, para se obter um resultado real devemos fazer uma defuzzificação do subconjunto fuzzy de saída para se obter um valor crisp que o represente.

A seguir, falaremos sobre métodos de defuzificação que podem ser adotados.

6.4 Métodos de Defuzzificação

No controlador fuzzy, a cada entrada fuzzy, o módulo de inferência produz uma saída fuzzy que indica o controle a ser adotado. Entretanto, se a entrada for um número real, espera-se que a saída correspondente seja também um número real. Porém, isso, em geral, não ocorre em controladores fuzzy, pois, mesmo para uma entrada crisp, a saída é fuzzy. Dessa forma, deve-se indicar um método para defuzzificar a saída e obter um número real que indicará o controle a ser adotado.

Qualquer número real, a princípio, que de alguma maneira possa representar razoavelmente o conjunto fuzzy B (citado anteriormente) pode ser chamado de um defuzzificador de B.

Um exemplo de defuzzificador é o centro de gravidade. O centro de gravidade dá a média das áreas de todas as figuras que representam os graus de pertinência de um subconjunto fuzzy. As equações abaixo referem-se ao domínio discreto e domínio contínuo, respectivamente.

$$G(B) = \frac{\sum_n^{i=0} u_i \varphi_B(u_i)}{\sum_n^{i=0} \varphi_B(u_i)} \tag{53}$$

$$G(B) = \frac{\int_{\mathbb{R}} u \varphi_B(u) du}{\int_{\mathbb{R}} \varphi_B(u) du} \tag{54}$$

Na seção seguinte apresentaremos uma aplicação dos controladores fuzzy em Biomatemática. Destacaremos, entretanto, que a eficiência das aplicações depende fundamentalmente das informações fornecidas pelos especialistas para a construção da base de regras.

7 Previsão de Salinidade no Estuário de Cananéia e Ilha Comprida

Esta aplicação foi desenvolvida por Ranulfo Paiva Sobrinho junto à prefeitura de Ilha Comprida, utilizando controladores fuzzy. Seu objetivo era prever a variação da salinidade superficial em um ponto situado em frente à Ilha de Cananéia, tendo como variáveis de entrada a precipitação pluviométrica e a vazão do Rio Ribeira de Iguape. O modelo proposto estima a variação da salinidade superficial até dois dias e abrange um raio de 80 Km , o que permite informar, com alguma antecedência, aos empreendedores da aquicultura de estuário para que tomem as devidas providências.

7.1 Apresentação do Fenômeno

O ecossistema estuarino lagunar que abrange as cidades de Cananéia, Iguape e Ilha Comprida está localizado no litoral sudeste do estado de São Paulo numa região de relevante importância ecológica devido ao seu bom estado de conservação. Esse estuário tem conexão com o Oceano Atlântico na porção norte através da barra de Icapara e na parte sul pela barra de Cananéia. O aporte de água doce no estuário é fornecido por vários rios, sendo que o de maior volume é o Rio Ribeira. Suas águas entram no estuário pela parte norte, na cidade de Iguape, através de um canal denominado Valo Grande. A contribuição das águas do Rio Ribeira na região foi alterada em 1978 quando construiu-se uma barragem a 2 Km da cidade de Iguape. Como consequência, o padrão de algumas variáveis ambientais, como a salinidade, foi alterado.

7.2 O Modelo

O modelo baseia-se no sistema de controle fuzzy com o método de inferência de Mamdani. As variáveis de entrada consideradas são: precipitação pluviométrica, salinidade inicial e vazão do Rio Ribeira. A variável de saída é a salinidade final.

Para essas variáveis, atribuiu-se termos linguísticos, e cada um deles com funções de pertinência dos tipos triangular e trapezoidal. Por meio da análise do conjunto dos dados envolvendo as variáveis mencionadas, pode-se estabelecer uma base de conhecimento com regras linguísticas, relacionado-as a fim de se estimar o valor da salinidade final, sendo esse estimado pelo processo de defuzzificação do centro de gravidade.

Cada uma das regras tem a forma dos exemplos seguintes:

R_1-**Se** chuva acumulada em Cananéia no intervalo de 1 a 3 dias for baixa **E** a salinidade inicial do período for média baixa **E** a salinidade inicial do periodo for média baixa **E** e a vazão do Rio Ribeira é alta **E** a salinidade final é baixa.

R_{11}-**Se** a chuva aculuIada em Cananéia no intervalo de 1 a 3 dias for média alta **E** a salinidade inicial do período for média baixa **E** a vazão do Rio Ribeira for baixa **Então** a salinidade final é média baixa.

Assim, é construído um quadro que fornece todas as regras atingidas (base de regras com 3 entradas e uma saída).

7.3 Inferência

O processo de inferência propicia o cálculo da variável resposta (saída) a partir dos valores de entrada. Isso ocorre porque os valores dos graus de pertinência das variáveis de entrada são utilizadas para se obter o valor do grau de pertinência da variável resposta. O método de inferência de Mamdani combina os graus de pertinência referente a cada um dos valores de entrada por meio do mínimo.

Finalmente, o valor que representa a salinidade final é obtido usando o método de defuzzificação do centro de gravidade na saída fuzzy e o resultado encontrado por meio do método de Mamdani foi considerado satisfatório na comparação com valores observados. Na tabela seguinte apresentaremos

Precipitação acumulada (mm)	Salinidade inicial (‰)	Vazão do Rio (m^3/s)	Salinidade Observada (‰)	Salinidade Modelada (‰)
13,6	14	2016	6	3,4
115	30	1163	18	17,7
148	24	763	18	17,6
31	18	1515	15	13,2
3	18	2273	8	7,6
320	26	687	5	3,4
110	20	938	13	14,4
180	18	800	16	15,8
102	25	584	25	23,5
123	30	469	26	24,5
23	23	1454	17	15,2

Tabela 2: Relação entre valores de salinidade final observados e os estimados pelo modelo fuzzy

alguns valores das variáveis de entrada, das salinidades observadas e das salinidades resultantes do modelo.

Londrina, ___________ de ________________________ de ___________.

____

Osmar Nascimento

____

Prof. Dr. Marcos Eduardo R. Valle Mesquita