a e x_n, tal que

$$0 = f(a) = f(x_n) + f'(x_n)(a - x_n) + \frac{f''(d)}{2}(a - x_n)^2.$$

Então

$$f'(x_n)x_n - f(x_n) - f'(x_n)a = \frac{f''(d)}{2}(x_n - a)^2.$$

Dividindo por $f'(x_n)$ obtemos:

$$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - a = \frac{f''(d)}{2f'(x_n)}(x_n - a)^2$$

isto é,

$$x_{n+1} - a = \frac{f''(d)}{2f'(x_n)}(x_n - a)^2.$$

Daí vem imediatamente $|x_{n+1} - a| \leq \frac{A}{2B}|x_n - a|^2$. Quando $|x_n - a| < 1$, o quadrado $|x_n - a|^2$ é muito menor, o que exibe a rapidez de convergência no método de Newton. Por exemplo, se $f(x) = x^n - c$ temos

$$\frac{f''(d)}{2f'(x_k)} = (n-1)\frac{d^{n-2}}{2x_k^{n-1}} \leq \frac{n-1}{2x_k}.$$

Portanto, para calcular $\sqrt[n]{c}$, onde $c > 1$, podemos começar com $x_0 > 1$ e teremos sempre $|x_{k+1} - \sqrt[n]{c}| \leq \frac{n-1}{2}|x_k - \sqrt[n]{c}|^2$. Para $n \leq 3$ vem $|x_{k+1} - \sqrt[n]{c}| \leq |x_k - \sqrt[n]{c}|^2$. Logo, se x_k tem p algarismos decimais exatos, x_{k+1} tem $2p$.

4. Exercícios

Seção 1: Fórmula de Taylor

1. Use a igualdade $1/(1-x) = 1 + x + \cdots + x^n + x^{n+1}/(1-x)$ e a fórmula de Taylor infinitesimal para calcular as derivadas sucessivas, no ponto $x = 0$, da função $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 1/(1-x)$.
2. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^5/(1+x^6)$. Calcule as derivadas de ordem 2001 e 2003 de f no ponto $x = 0$.
3. Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ no intervalo I. Suponha que exista $K > 0$ tal que $|f^{(n)}(x)| \leq K$ para todo $x \in I$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que, para $x_0, x \in I$ quaisquer vale $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$.
4. Dê uma demonstração de que $f'' \geq 0 \Rightarrow f$ convexa usando a fórmula de Taylor com resto de Lagrange.
5. Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ de classe C^2 no intervalo I. Dado $a \in I$, defina a função $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ pondo $\varphi(x) = [f(x) - f(a)]/(x - a)$ se $x \neq a$ e $\varphi(a) = f'(a)$. Prove que φ é de classe C^1. Mostre que $f \in C^3 \Rightarrow \varphi \in C^2$.
6. Seja $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinômio de grau n. Prove que para $a, x \in \mathbb{R}$ quaisquer tem-se
$$p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$
7. Sejam $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ duas vezes deriváveis no ponto $a \in \operatorname{int} I$. Se $f(a) = g(a)$, $f'(a) = g'(a)$ e $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in I$, prove que $f''(a) \geq g''(a)$.

Seção 2: Funções côncavas e convexas

1. Sejam $f\colon I \to \mathbb{R}$ e $g\colon J \to \mathbb{R}$ funções convexas, com $f(I) \subset J$, e g monótona não-decrescente. Prove que $g \circ f\colon I \to \mathbb{R}$ é convexa. Dê outra demonstração supondo f e g duas vezes deriváveis. Por meio de um exemplo, mostre que se g não é monótona não-decrescente o resultado pode não ser válido.
2. Se $f\colon I \to \mathbb{R}$ possui um ponto crítico não degenerado $c \in \operatorname{int} I$ no qual f'' é contínua, prove que existe $\delta > 0$ tal que f é convexa ou côncava no intervalo $(c - \delta, c + \delta)$.
3. Examine a convexidade da soma e do produto de duas funções convexas.
4. Uma função $f\colon I \to \mathbb{R}$, definida no intervalo I, chama-se *quase-convexa* (respectivamente, *quase-côncava*) quando, para todo $c \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in I; f(x) \leq c\}$ (respectivamente, $\{x \in I; f(x) \geq c\}$) é vazio ou é um intervalo. Prove que toda função convexa (respectivamente, côncava) é quase-convexa(respectivamente, quase-côncava) e que toda função monótona é ao mesmo tempo quase-convexa e quase-côncava.
5. Prove que $f\colon I \to \mathbb{R}$ é quase-convexa se, e somente se, para $x, y \in I$ e $t \in [0,1]$ quaisquer, vale $f((1-t)x + ty) \leq \max\{f(x), f(y)\}$. Enuncie o resultado análogo para f quase-côncava.
6. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua quase-convexa, cujo valor mínimo é atingido no ponto $c \in [a,b]$. Prove que se $c = a$ então f é monótona não-decrescente, se $c = b$, f é monótona não-crescente e, finalmente, se $a < c < b$ então f é monótona não-crescente em $[a,c]$ e não-decrescente em $[c,b]$. Enuncie resultado análogo para f quase-côncava. Conclua daí que a função contínua $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é quase-convexa se, e somente se, existe

$c \in [a, b]$ tal que f é monótona não-crescente no intervalo $[a, c]$ e monótona não-decrescente em $[c, b]$.

7. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n: I \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Suponha que, para todo $x \in I$, a seqüência de números $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ convirja. Prove que a função $f: I \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ é convexa. Prove resultado análogo para funções quase-convexas, côncavas e, quase-côncavas.

8. Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua convexa tal que $f(a) < 0 < f(b)$. Prove que existe um único ponto $c \in (a, b)$ com $f(c) = 0$.

Seção 3: Aproximações sucessivas e método de Newton

1. Sejam $I = [a - \delta, a + \delta]$ e $f: I \to \mathbb{R}$ tal que $|f(y) - f(x)| \le k|y - x|$, onde $0 \le k < 1$. Se $|f(a) - a| \le (1 - k)\delta$, prove que existe um único $x \in I$ com $f(x) = x$.

2. Defina $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ pondo $f(x) = 2^{-x/2}$. Mostre que f é uma contração e que, se a é seu ponto fixo, $-a$ é a raiz negativa da equação $x^2 = 2^x$. Use o método das aproximações sucessivas e uma calculadora para obter o valor de a com 8 algarismos decimais exatos.

3. Seja $I = [a - \delta, a + \delta]$. Se a função $f: I \to \mathbb{R}$ é de classe C^2, com $f'(x) \neq 0$, $|f(x)f''(x)/f'(x)^2| \le k < 1$ para todo $x \in I$ e $|f(a)/f'(a)| < (1 - k)\delta$, prove que, seja qual for o valor inicial $x_0 \in I$, o método de Newton converge para a única raiz $x \in I$ da equação $f(x) = 0$.

4. Dado $a > 1$, considere a função $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 1/(a+x)$. Fixado qualquer $x_0 > 0$, prove que a seqüência definida indutivamente por $x_1 = f(x_0), \ldots, x_{n+1} = f(x_n)$, converge para a raiz positiva c da equação $x^2 + ax - 1 = 0$. (Cfr. Exercício 3.6, Capítulo 3.)

5. Prove que $1,0754$ é um valor aproximado, com 4 algarismos decimais exatos, da raiz positiva da equação $x^6 + 6x - 8 = 0$.

6. Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ convexa, duas vezes derivável. Se $f(a) < 0 < f(b)$ prove que, começando com um ponto $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) > 0$, o método de Newton converge sempre para a única raiz $x \in [a, b]$ da equação $f(x) = 0$.

7. Prove que as aproximações de $\sqrt[p]{c}$ dadas pelo método de Newton formam, a partir do segundo termo, uma seqüência descrescente.

A Integral de Riemann

As noções de derivada e integral constituem o par de conceitos mais importantes da Análise. Enquanto a derivada corresponde à noção geométrica de tangente e à idéia física de velocidade, a integral está associada à noção geométrica de área e à idéia física de trabalho. É um fato notável e de suma importância que essas duas noções, aparentemente tão diversas, estejam intimamente ligadas.

1. Revisão sobre sup e inf

Demonstraremos aqui alguns resultados elementares sobre supremos e ínfimos de conjuntos de números reais, para uso imediato.

Dada uma função limitada $f: X \to \mathbb{R}$, lembremos que $\sup f = \sup f(X) = \sup\{f(x); x \in X\}$ e $\inf f = \inf f(X) = \inf\{f(x); x \in X\}$. Todos os conjuntos a seguir mencionados são não-vazios.

Lema 1. *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ tais que, para todo $x \in A$ e todo $y \in B$ se tenha $x \le y$. Então $\sup A \le \inf B$. A fim de ser $\sup A = \inf B$ é necessário e suficiente que, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existam $x \in A$ e $y \in B$ com $y - x < \varepsilon$.*

Demonstração: Todo $y \in B$ é cota superior de A, logo $\sup A \le y$. Isto mostra que $\sup A$ é cota inferior de B, portanto $\sup A \le \inf B$. Se valer a desigualdade estrita $\sup A < \inf B$ então $\varepsilon = \inf B - \sup A > 0$ e $y - x \ge \varepsilon$ para quaisquer $x \in A$, $y \in B$. Reciprocamente, se $\sup A = \inf B$ então, para todo $\varepsilon > 0$ dado, $\sup A - \varepsilon/2$ não é cota superior de A e $\inf B + \varepsilon/2$ não é cota inferior de B, logo existem $x \in A$ e $y \in B$ tais que $\sup A - \varepsilon/2 < x \le \sup A = \inf B \le y < \inf B + \varepsilon/2$. Segue-se que $y - x < \varepsilon$. □

Lema 2. *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos limitados e $c \in \mathbb{R}$. São também limitados os conjuntos $A + B = \{x + y; x \in A, y \in B\}$ e $c.A = \{cx; x \in A\}$. Além disso, tem-se $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$ e $\sup(c.A) = c.\sup A$, $\inf(c.A) = c.\inf A$, caso seja $c \geq 0$. Se $c < 0$ então $\sup(c.A) = c.\inf A$ e $\inf(c.A) = c.\sup A$.*

Demonstração: Pondo $a = \sup A$ e $b = \sup B$, para todo $x \in A$ e todo $y \in B$ tem-se $x \leq a$, $y \leq b$, logo $x + y \leq a + b$. Portanto, $a + b$ é cota superior de $A + B$. Além disso, dado $\varepsilon > 0$, existem $x \in A$ e $y \in B$ tais que $a - \varepsilon/2 < x$ e $b - \varepsilon/2 < y$, donde $a + b - \varepsilon < x + y$. Isto mostra que $a + b$ é a menor cota superior de $A + B$, ou seja, que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$. A igualdade $\sup(c.A) = c.\sup A$ é óbvia se $c = 0$. Se $c > 0$, dado qualquer $x \in A$ tem-se $x \leq a$, logo $cx \leq ca$. Portanto ca é cota superior do conjunto $c.A$. Além disso, dado qualquer número d menor do que ca, temos $d/c < a$, logo existe $x \in A$ tal que $d/c < x$. Segue-se que $d < cx$. Isto mostra que $c.a$ é a menor cota superior de $c.A$, ou seja, que $\sup(c.A) = c.\sup A$. Os casos restantes enunciados no lema são provados de modo análogo. □

Corolário. *Sejam $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ funções limitadas. Para todo $c \in \mathbb{R}$ são limitadas as funções $f + g$, $cf \colon X \to \mathbb{R}$. Tem-se além disso, $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$, $\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$, $\sup(cf) = c.\sup f$, e $\inf(cf) = c.\inf f$ quando $c \geq 0$. Caso $c < 0$, tem-se $\sup(cf) = c.\inf f$ e $\inf(cf) = c.\sup f$.*

Com efeito, sejam $A = f(X)$, $B = g(X)$, $C = (f + g)(X) = \{f(x) + g(x); x \in X\}$. Evidentemente $C \subset A + B$, logo $\sup(f + g) = \sup C \leq \sup(A + B) = \sup A + \sup B = \sup f + \sup g$. Além disso, $\sup(cf) = \sup\{c.f(x); x \in X\} = \sup(cA) = c.\sup A$, quando $c \geq 0$. Os demais casos enunciados no corolário se provam de modo análogo. □

Observação. Pode-se ter efetivamente $\sup(f + g) < \sup f + \sup g$ e $\inf(f + g) > \inf f + \inf g$. Basta tomar $f, g \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ e $g(x) = -x$.

Lema 3. *Dada $f \colon X \to \mathbb{R}$ limitada, sejam $m = \inf f$, $M = \sup f$ e $\omega = M - m$. Então $\omega = \sup\{|f(x) - f(y)|; x, y \in X\}$.*

Demonstração: Dados $x, y \in X$ arbitrários, para fixar idéias seja $f(x) \geq f(y)$. Então $m \leq f(y) \leq f(x) \leq M$, donde $|f(x) - f(y)| \leq M - m = \omega$. Por outro lado, para todo $\varepsilon > 0$ dado podemos achar $x, y \in X$ tais que $f(x) > M - \varepsilon/2$ e $f(y) < m + \varepsilon/2$. Então

$$|f(x) - f(y)| \geq f(x) - f(y) > M - m - \varepsilon = \omega - \varepsilon.$$

Assim, ω é a menor das cotas superiores do conjunto $\{|f(x) - f(y)|; x, y \in X\}$, o que prova o lema. □

Lema 4. *Sejam $A' \subset A$ e $B' \subset B$ conjuntos limitados de números reais. Se, para cada $a \in A$ e cada $b \in B$ existem $a' \in A'$ e $b' \in B'$ tais que $a \leq a'$ e $b' \leq b$, então $\sup A' = \sup A$ e $\inf B' = \inf B$.*

Demonstração: Evidentemente, $\sup A$ é uma cota superior de A'. Além disso, se $c < \sup A$ existe $a \in A$ com $c < a$, logo existe $a' \in A'$ com $c < a \leq a'$, portanto c não é cota superior de A'. Assim, $\sup A$ é a menor cota superior de A', isto é, $\sup A = \sup A'$. Um raciocínio análogo demonstra o resultado para $\inf B$ e $\inf B'$. □

2. Integral de Riemann

Uma *partição* do intervalo $[a, b]$ é um subconjunto finito de pontos $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \subset [a, b]$ tal que $a \in P$ e $b \in P$. A notação será sempre usada de modo que $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. O intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, de *comprimento* $t_i - t_{i-1}$, será chamado o *i-ésimo intervalo* da partição P. Evidentemente, $\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = b - a$.

Sejam P e Q partições do intervalo $[a, b]$. Diz-se que Q *refina* P quando $P \subset Q$. A maneira mais simples de refinar uma partição é acrescentar-lhe um único ponto.

Dada uma função limitada $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, usaremos as notações

$$m = \inf\{f(x); x \in [a, b]\}$$

e

$$M = \sup\{f(x); x \in [a, b]\}.$$

Em particular, temos $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Se $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ é uma partição de $[a, b]$, as notações $m_i = \inf\{f(x); t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$, $M_i = \sup\{f(x); t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$ e $\omega_i = M_i - m_i$ indicarão o ínfimo, o supremo e a *oscilação* de $f(x)$ no i-ésimo intervalo de P. Quando f é contínua, m_i e M_i são valores efetivamente assumidos por f em $[t_{i-1}, t_i]$. Em particular, neste caso existem $x_i, y_i \in [t_{i-1}, t_i]$ tais que $\omega_i = |f(y_i) - f(x_i)|$.

A *soma inferior* de f relativamente à partição P é o número

$$s(f;P) = m_1(t_1 - t_0) + \cdots + m_n(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}).$$

A *soma superior* de f relativamente à partição P é, por definição,

$$S(f;P) = M_1(t_1 - t_0) + \cdots + M_n(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Evidentemente, $m(b-a) \le s(f;P) \le S(f;P) \le M(b-a)$ seja qual for a partição P. Além disso, $S(f;P) - s(f;P) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(t_i - t_{i-1})$.

Quando f estiver clara no contexto, pode-se escrever simplesmente $s(P)$ e $S(P)$ em vez de $s(f;P)$ e $S(f;P)$ respectivamente.

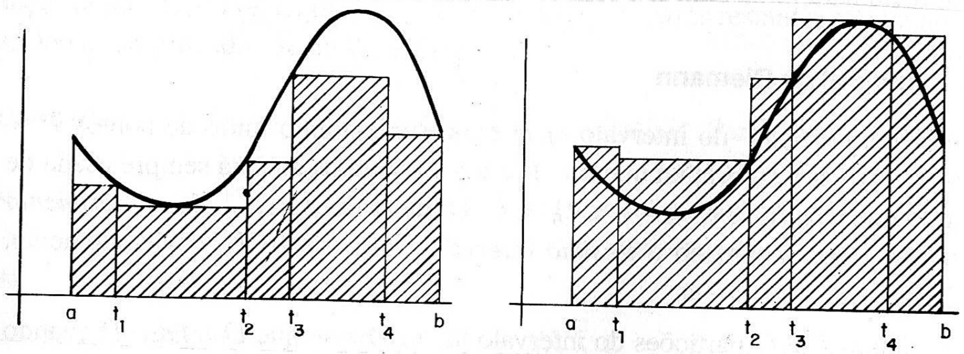

Fig. 9 – A soma inferior e a soma superior.

No caso em que $f(x) \ge 0$ para todo $x \in [a,b]$, os números $s(f;P)$ e $S(f;P)$ são valores aproximados, respectivamente por falta e por excesso, da área da região limitada pelo gráfico de f, pelo intervalo $[a,b]$ do eixo das abscissas e pelas verticais levantadas nos pontos a e b desse eixo. Quando $f(x) \le 0$ para todo $x \in [a,b]$, essas somas são valores aproximados de tal área, com o sinal trocado.

A *integral inferior* e a *integral superior* da função limitada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ são definidas, respectivamente, por

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_P s(f;P), \quad \overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_P S(f;P),$$

o sup e o inf sendo tomados relativamente a todas as partições P do intervalo $[a,b]$.

Teorema 1. *Quando se refina uma partição, a soma inferior não diminui e a soma superior não aumenta. Ou seja:* $P \subset Q \Rightarrow s(f;P) \le s(f;Q)$ e $S(f;Q) \le S(f;P)$.

Demonstração: Suponhamos inicialmente que a partição $Q = P \cup \{r\}$ resulte de P pelo acréscimo de um único ponto r, digamos com $t_{j-1} < r < t_j$. Sejam m' e m'' respectivamente os ínfimos de f nos intervalos $[t_{j-1}, r]$ e $[r, t_j]$. Evidentemente, $m_j \le m'$, $m_j \le m''$ e $t_j - t_{j-1} = (t_j - r) + (r - t_{j-1})$. Portanto

$$\begin{aligned} s(f;Q) - s(f,P) &= m''(t_j - r) + m'(r - t_{j-1}) - m_j(t_j - t_{j-1}) \\ &= (m'' - m_j)(t_j - r) + (m' - m_j)(r - t_{j-1}) \ge 0. \end{aligned}$$

Para obter o resultado geral, onde Q resulta de P pelo acréscimo de k pontos, usa-se k vezes o que acabamos de provar. Analogamente, $P \subset Q \Rightarrow S(f;Q) \le S(f;P)$. □

Corolário 1. *Para quaisquer partições P, Q do intervalo $[a,b]$ e qualquer função limitada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tem-se $s(f;P) \le S(f;Q)$.*

Com efeito, a partição $P \cup Q$ refina simultaneamente P e Q, logo $s(f;P) \le s(f;P \cup Q) \le S(f;P \cup Q) \le S(f;Q)$. □

Corolário 2. *Dada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, se $m \le f(x) \le M$ para todo $x \in [a,b]$ então*

$$m(b-a) \le \underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx \le M(b-a).$$

Com efeito, as desigualdades externas são óbvias e a do meio resulta do Corolário 1 e do Lema 1. □

Corolário 3. *Seja P_0 uma partição de $[a,b]$. Se considerarmos as somas $s(f;P)$ e $S(f;P)$ apenas relativas às partições P que refinam P_0, obteremos os mesmos valores para $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ e $\overline{\int_a^b} f(x)dx$.*

Com efeito, basta combinar o Teorema 1 e o Lema 4. □

Uma função limitada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ diz-se *integrável* quando sua integral inferior e sua integral superior são iguais. Esse valor comum chama-se a *integral* (de Riemann) de f e é indicado por $\int_a^b f(x)dx$.

No símbolo $\int_a^b f(x)dx$, x é o que se chama uma "variável muda", isto é, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt$ etc.

Às vezes prefere-se a notação mais simples $\int_a^b f$. A justificativa para a notação mais complicada será vista no Teorema 2, Capítulo 11.

Quando f é integrável, sua integral $\int_a^b f(x)dx$ é o número real cujas aproximações por falta são as somas inferiores $s(f;P)$ e cujas aproximações por excesso são as somas superiores $S(f;P)$. O Teorema 1 diz que essas aproximações melhoram quando se refina a partição P. Geometricamente, quando $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, a existência de $\int_a^b f(x)dx$ significa que a região limitada pelo gráfico de f, pelo segmento $[a,b]$ do eixo das abcissas e pelas verticais levantadas pelos pontos a e b é mensurável (isto é, possui área) e o valor da integral é, por definição, a área dessa região. No caso geral, tem-se a área externa $\overline{\int_a^b} f(x)dx$ e a área interna $\underline{\int_a^b} f(x)dx$, que podem ser diferentes, como veremos agora.

Exemplo 1. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ se x é racional e $f(x) = 1$ quando x é irracional. Dada uma partição arbitrária P, como cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ contém números racionais e irracionais, temos $m_i = 0$ e $M_i = 1$, logo $s(f;P) = 0$ e $S(f;P) = b-a$. Assim, f não é integrável, pois $\underline{\int_a^b} f(x)dx = 0$ e $\overline{\int_a^b} f(x)dx = b-a$.

Exemplo 2. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ constante, $f(x) = c$ para todo $x \in [a,b]$. Então, seja qual for a partição P, temos $m_i = M_i = c$ em todos os intervalos, logo $s(f;P) = S(f;P) = c(b-a)$. Assim f é integrável, com $\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = c(b-a)$.

Teorema 2. **(Condição imediata de integrabilidade.)** *Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *f é integrável.*

(2) *Para todo $\varepsilon > 0$, existem partições P, Q de $[a,b]$ tais que $S(f;Q) - s(f;P) < \varepsilon$.*

(3) *Para todo $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a,b]$ tal que $S(f;P) - s(f;P) = \sum_{i=1}^n \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$.*

Demonstração: Sejam A o conjunto das somas inferiores e B o conjunto das somas superiores de f. Pelo Corolário 1 do Teorema 1, tem-se $s \leq S$ para toda $s \in A$ e toda $S \in B$. Supondo (1), vale $\sup A = \inf B$. Logo, pelo Lema 1, podemos concluir que (1) $\Rightarrow$ (2). Para provar que (2) $\Rightarrow$ (3) basta observar que se $S(f;Q) - s(f;P) < \varepsilon$ então, como a partição $P_0 = P \cup Q$ refina ambas P e Q, segue-se do Teorema 1 que $s(f;P) \leq s(f;P_0) \leq S(f;P_0) \leq S(f;Q)$, donde se conclui que $S(f;P_0) - s(f;P_\circ) < \varepsilon$. Finalmente, (3) $\Rightarrow$ (1) pelo Lema 1. □

Exemplo 3. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = c$ quando $a < x \leq b$ e $f(a) = A$. Afirmamos que f é integrável, com $\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$. Para fixar idéias, suponhamos $c < A$. Então, dada uma partição qualquer $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ temos $m_1 = c$, $M_1 = A$ e $m_i = M_i = c$ para $1 < i \leq n$. Portanto $S(f;P) - s(f;P) = (A-c)(t_1 - t_0)$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, tomamos uma partição P com $t_1 - t_0 < \varepsilon/(A-c)$ e obtemos $S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon$. Logo f é integrável. Além disso, como $s(f;P) = c(b-a)$ para toda partição P, temos

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = c(b-a).$$

Mas, sendo f integrável, resulta que

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = c(b-a).$$

Evidentemente, um resultado análogo vale quando $f(x) = c$ para $x \in [a,b)$, ou quando $f(x) = c$ para todo $x \in (a,b)$.

3. Propriedades da integral

Teorema 3. *Seja $a < c < b$. A função limitada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável se, e somente se, suas restrições $f|[a,c]$ e $f|[c,b]$ são integráveis. No caso afirmativo, tem-se $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.*

Demonstração: Sejam A e B respectivamente os conjuntos das somas inferiores de $f|[a,c]$ e $f|[c,b]$. Vê-se facilmente que $A + B$ é o conjunto das somas inferiores de f relativamente às partições de $[a,b]$ que contêm o ponto c. Pelo Corolário 3 do Teorema 1, ao calcular a integral inferior de f, basta considerar as partições desse tipo, pois elas são as que refinam $P_0 = \{a, c, b\}$.

Pelo Lema 2,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup(A+B) = \sup A + \sup B = \underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx.$$

Analogamente se mostra que

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx.$$

Logo

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f = (\overline{\int_a^c} f - \underline{\int_a^c} f) + (\overline{\int_c^b} f - \underline{\int_c^b} f).$$

Como as duas parcelas dentro dos parênteses são ≥ 0, sua soma é zero se, e somente se, elas são ambas nulas. Assim, f é integrável se, e somente se, suas restrições $f|[a,c]$ e $f|[c,b]$ o são. No caso afirmativo, vale a igualdade $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. □

Exemplo 4. Diz-se que $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma *função-escada* quando existem uma partição $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a,b]$ e números reais $c_1, \ldots, c_n$ tais que $f(x) = c_i$ quando $t_{i-1} < x < t_i$. (Note-se que nada se diz sobre os valores $f(t_i)$.) Segue-se do Teorema 3 e do Exemplo 3 que toda função escada é integrável e $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i(t_i - t_{i-1})$.

Convenção. A igualdade $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ faz sentido apenas quando $a < c < b$. A fim de torná-la verdadeira sejam quais forem $a, b, c \in \mathbb{R}$, faremos duas convenções, que serão adotadas doravante. Primeira: $\int_a^a f(x)dx = 0$. Segunda: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. Aceitas estas convenções, vale para toda função integrável f a igualdade acima. Para verificá-la, há seis possibilidades a considerar: $a \leq b \leq c$, $a \leq c \leq b$, $b \leq a \leq c$, $b \leq c \leq a$, $c \leq a \leq b$ e $c \leq b \leq a$. Em cada caso, basta admitir a integrabilidade de f no intervalo maior.

Teorema 4. *Sejam $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integráveis. Então:*

(1) *A soma $f+g$ é integrável e*

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

(2) *O produto $f.g$ é integrável. Se $c \in \mathbb{R}$, $\int_a^b c.f(x)dx = c.\int_a^b f(x)dx$.*

(3) *Se $0 < k \leq |g(x)|$ para todo $x \in [a,b]$ então o quociente f/g é integrável.*

(4) *Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$ então $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.*

(5) *$|f|$ é integrável e $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.*

Demonstração: Dada uma partição arbitrária P de $[a,b]$, se indicarmos com m_i', m_i'' e m_i respectivamente os ínfimos de f, g e $f+g$ no i-ésimo intervalo de P, teremos $m_i' + m_i'' \leq m_i$, pelo Corolário do Lema 2, logo $s(f;P) + s(g;P) \leq s(f+g;P) \leq \underline{\int_a^b}(f+g)$ para toda partição P. Se tomarmos duas partições P e Q teremos ainda

$$s(f;P) + s(g;Q) \leq s(f;P\cup Q) + s(g;P\cup Q) \leq \underline{\int_a^b}(f+g).$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned}\underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g &= \sup_P s(f;P) + \sup_Q s(g;Q)\\ &= \sup_{P,Q}[s(f;P) + s(g;Q)] \leq \underline{\int_a^b}(f+g).\end{aligned}$$

Isto prova a primeira das desigualdades abaixo. A terceira se demonstra de modo análogo e a segunda é óbvia:

$$\underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g \leq \underline{\int_a^b}(f+g) \leq \overline{\int_a^b}(f+g) \leq \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g.$$

Quando f e g são integráveis, as três desigualdades se reduzem a igualdades, o que prova (1).

(2) Seja K tal que $|f(x)| \leq K$ e $|g(x)| \leq K$ para todo $x \in [a,b]$. Dada uma partição P, sejam ω_i', ω_i'' e ω_i respectivamente as oscilações de f, g e $f.g$ no i-ésimo intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Para quaisquer $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$ temos:

$$\begin{aligned}|f(y).g(y) - f(x).g(x)| &= |(f(y) - f(x))g(y) + f(x)(g(y) - g(x))|\\ &\leq |f(y) - f(x)||g(y)| + |f(x)||g(y) - g(x)|\\ &\leq K(\omega_i' + \omega_i'').\end{aligned}$$

Daí $\sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) \le K.[\sum \omega_i'(t_i - t_{i-1}) + \sum \omega_i''(t_i - t_{i-1})]$. A integrabilidade de $f.g$ segue-se então da integrabilidade de f e g, pelo Teorema 2. Quanto a cf, sua integrabilidade resulta do que acabamos de provar. Além disso, se $c \ge 0$, temos $s(cf; P) = c.s(f; P)$ para toda partição P, donde, pelo Lema 2,

$$\int_a^b cf = \underline{\int_a^b} cf = c.\underline{\int_a^b} f = c.\int_a^b f.$$

Caso $c < 0$, temos $s(cf; P) = c.S(f; P)$, logo $\int_a^b cf = \underline{\int_a^b} cf = c.\overline{\int_a^b} f = c.\int_a^b f$.

(3) Como $f/g = f.(1/g)$, basta provar que $1/g$ é integrável se g é integrável e $0 < k \le |g(x)|$ para todo $x \in [a, b]$. Indiquemos com ω_i e ω_i' respectivamente as oscilações de g e $1/g$ no i-ésimo intervalo de uma partição P. Dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar P de modo que $\sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon.k^2$. Para quaisquer x, y no i-ésimo intervalo de P tem-se

$$\left|\frac{1}{g(y)} - \frac{1}{g(x)}\right| = \frac{|g(x) - g(y)|}{|g(y)g(x)|} \le \frac{\omega_i}{k^2},$$

portanto $\omega_i' \le \omega_i/k^2$. Segue-se que $\sum \omega_i'(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$ logo $1/g$ é integrável.

(4) Se $f(x) \le g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ então $s(f; P) \le s(g; P)$ e $S(f; P) \le S(g; P)$ para toda partição P, donde $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

(5) A desigualdade evidente $||f(y)| - |f(x)|| \le |f(y) - f(x)|$ mostra que a oscilação de $|f|$ em qualquer conjunto não supera a de f. Logo, f integrável $\Rightarrow |f|$ integrável. Além disso, como $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ para todo $x \in [a, b]$, resulta de (4) que

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx,$$

ou seja, $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$. □

Corolário. *Se $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável e $|f(x)| \le K$ para todo $x \in [a, b]$ então $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le K(b - a)$.*

Observação. Se uma função integrável $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ é tal que $f(x) \ge 0$ para todo $x \in [a, b]$ então $\int_a^b f(x)dx \ge 0$. Isto resulta de (4) acima. Mas é possível ter $f(x) \ge 0$ para todo $x \in [a, b]$, com $\int_a^b f(x)dx = 0$ sem que f seja identicamente nula. Basta tomar $f(x) = 1$ num conjunto finito de pontos em $[a, b]$ e $f(x) = 0$ nos pontos de $[a, b]$ fora desse conjunto finito. Pelo Exemplo 4, f é integrável e sua integral é zero. Entretanto, se f é contínua e $f(x) \ge 0$ para todo $x \in [a, b]$ então $\int_a^b f(x)dx = 0$ implica f identicamente nula. Com efeito, se existisse algum ponto $x_0 \in [a, b]$ onde $f(x_0) = c > 0$, existiria um intervalo $[\alpha, \beta]$, com $x_0 \in [\alpha, \beta] \subset [a, b]$ tal que $f(x) > c/2$ para todo $x \in [\alpha, \beta]$. Então, como $f(x) \ge 0$, teríamos $\int_a^b f(x)dx \ge \int_\alpha^\beta f(x)dx > \frac{c}{2}(\beta - \alpha) > 0$, uma contradição.

4. Condições suficientes de integrabilidade

Teorema 5. *Toda função contínua $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável.*

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, pela continuidade uniforme de f no compacto $[a, b]$, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in [a, b]$, $|y - x| < \delta$ implicam $|f(y) - f(x)| < \varepsilon/(b - a)$. Seja P uma partição de $[a, b]$ cujos intervalos têm todos comprimento $< \delta$. Em todo intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de P existem x_i, y_i tais que $m_i = f(x_i)$ e $M_i = f(y_i)$, donde $\omega_i = f(y_i) - f(x_i) < \varepsilon/(b - a)$. Conseqüentemente $\sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$. Pelo Teorema 2, f é integrável. □

Teorema 6. *Toda função monótona $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável.*

Demonstração: Para fixar idéias, seja f não-decrescente. Dado $\varepsilon > 0$, seja $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ uma partição de $[a, b]$ cujos intervalos têm todos comprimento $< \varepsilon/[f(b) - f(a)]$. Para cada $i = 1, \ldots, n$ temos $\omega_i = f(t_i) - f(t_{i-1})$ portanto $\sum \omega_i = f(b) - f(a)$ e

$$\sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot \sum \omega_i$$
$$= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot \sum [f(t_i) - f(t_{i-1}] = \varepsilon.$$

Logo f é integrável. □

As considerações a seguir são um preparativo para o Teorema 7, que engloba os Teoremas 5 e 6 como casos particulares.

Se $a < b$, indicaremos com $|I| = b - a$ o *comprimento* do intervalo (fechado, aberto ou semi-aberto) I cujos extremos são a e b. Diz-se que o conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem *medida nula* quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe uma cobertura finita ou infinita enumerável $X \subset \bigcup I_k$ de X por intervalos abertos I_k cujo soma dos comprimentos é $\sum |I_k| < \varepsilon$.

Exemplo 5. Todo conjunto enumerável $X = \{x_1, \ldots, x_k, \ldots\}$ tem medida nula. Com efeito, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, seja I_k o intervalo aberto de centro x_k e comprimento $\varepsilon/2^{k+1}$. Então $X \subset \bigcup I_k$ e $\sum |I_k| = \varepsilon/2 < \varepsilon$. Em particular, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais tem medida nula.

Teorema 7. *Se o conjunto D dos pontos de descontinuidade de uma função limitada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tem medida nula então f é integrável.*

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, existem intervalos abertos $I_1, \ldots, I_k, \ldots$ tais que $D \subset \bigcup I_k$ e $\sum |I_k| < \varepsilon/2K$, onde $K = M - m$ é a oscilação de f em $[a,b]$. Para cada $x \in [a,b] - D$, seja J_x um intervalo aberto de centro x no qual a oscilação de f é menor do que $\varepsilon/2(b-a)$. Pelo Teorema de Borel-Lebesgue, a cobertura aberta $[a,b] \subset (\bigcup_k I_k) \cup (\bigcup_x J_x)$ possui uma subcobertura finita $[a,b] \subset I_1 \cup \cdots \cup I_m \cup J_{x_1} \cup \cdots J_{x_n}$. Seja P a partição de $[a,b]$ formada pelos pontos a, b e os extremos desses $m+n$ intervalos que pertençam a $[a,b]$. Indiquemos com $[t_{\alpha-1}, t_\alpha]$ os intervalos de P que estão contidos em algum $\overline{I}_k$ e com $[t_{\beta-1}, t_\beta]$ os demais intervalos de P. Então $\sum (t_\alpha - t_{\alpha-1}) < \varepsilon/2K$ e a oscilação de f em cada intervalo $[t_{\beta-1}, t_\beta]$ é $\omega_\beta < \varepsilon/2(b-a)$. Logo

$$\begin{aligned} S(f;P) - s(f;P) &= \sum \omega_\alpha (t_\alpha - t_{\alpha-1}) + \sum \omega_\beta (t_\beta - t_{\beta-1}) \\ &< \sum K(t_\alpha - t_{\alpha-1}) + \sum \frac{\varepsilon(t_\beta - t_{\beta-1})}{2(b-a)} \\ &< \frac{K\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon.(b-a)}{2(b-a)} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo f é integrável. □

Observação. Pode-se demonstrar (cfr. "Curso de Análise", vol. 1, pag. 273) que vale a recíproca do Teorema 7, ou seja, que o conjunto de pontos de descontinuidade de toda função integrável tem medida nula.

Exemplo 6. O conjunto de Cantor K (seção 5 do Capítulo 5), embora não-enumerável, tem medida nula. Com efeito, se pararmos na n-ésima etapa de sua construção, veremos que o conjunto de Cantor está contido na reunião de 2^n intervalos, cada um tendo comprimento $1/3^n$. Dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $n \in \mathbb{N}$ tal que $(2/3)^n < \varepsilon$, e concluiremos que a medida de K é zero. Podemos considerar a função $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, definida pondo-se $f(x) = 0$ se $x \in K$ e $f(x) = 1$ se $x \notin K$. Como $[0,1] - K$ é aberto, a função f é localmente constante, e portanto contínua, nos pontos $x \notin K$. Como K não possui pontos interiores, f é descontínua em todos os pontos de K. Pelo Teorema 7, f é integrável. Dada qualquer partição P de $[0,1]$ todos os intervalos de P contêm pontos que não pertencem a K, pois $\operatorname{int} K = \varnothing$. Assim, $M_i = 1$ e $S(f;P) = 1$ para toda partição P. Segue-se que $\int_0^1 f(x)dx = \overline{\int_0^1} f(x)dx = 1$.

Exemplo 7. Se $a < b$, o intervalo $[a,b]$ não tem medida nula. Para provar isto, lembremos que a *função característica* de um conjunto $X \subset [c,d]$ é a função $\xi_X\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ tal que $\xi_X(x) = 1$ se $x \in X$ e $\xi_X(x) = 0$ se $x \notin X$. É fácil provar que se $X \subset X_1 \cup \cdots \cup X_k \subset [c,d]$ então $\xi_X \leq \sum_{i=1}^k \xi_{X_i}$. Suponhamos, em seguida que $[a,b] \subset I_1 \cup \cdots \cup I_k \subset [c,d]$, onde c é o menor e d o maior dos extremos dos intervalos I_j. Por simplicidade, escrevamos $\xi = \xi_{[a,b]}$ e $\xi_j = \xi_{I_j}$. Então $\xi \leq \sum_{j=1}^k \xi_j\colon [c,d] \to \mathbb{R}$. Logo $b - a = \int_c^d \xi(x)dx \leq \sum_{j=1}^k \int_c^d \xi_j(x)dx = \sum_{j=1}^k \left|I_j\right|$. Assim, a soma dos comprimentos de qualquer coleção finita de intervalos abertos cuja reunião contém $[a,b]$ é, pelo menos, igual a $b-a$. Daí resulta que $[a,b]$ não tem medida nula. Com efeito, pelo Teorema de Borel-Lebesgue, de $[a,b] \subset \bigcup_{j=1}^\infty I_j$ resulta $[a,b] \subset I_1 \cup \cdots \cup I_k$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

5. Exercícios

Seção 2: Integral de Riemann

1. Defina $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ pondo $f(0) = 0$ e $f(x) = 1/2^n$ se $1/2^{n+1} < x \leq 1/2^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Prove que f é integrável e calcule $\int_0^1 f(x)dx$.
2. Seja $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ integrável. Se f é uma função ímpar, prove que $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$. Se, porém, f é par, prove que $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.
3. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida pondo $f(x) = 0$ se x é irracional e $f(x) = 1/q$ se $x = p/q$ é uma fração irredutível e $q > 0$. (Ponha $f(0) = 1$ caso $0 \in [a,b]$.) Prove que f é contínua apenas nos pontos irracionais de $[a,b]$, que é integrável e que $\int_a^b f(x)dx = 0$.
4. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável, com $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Se f é contínua no ponto $c \in [a,b]$ e $f(c) > 0$, prove que $\int_a^b f(x)dx > 0$.
5. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida pondo $f(x) = x$ quando x é racional e $f(x) =$

$x+1$ quando x é irracional. Calcule as integrais (inferior e superior) de f. Usando uma função integrável $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ em vez de x, defina agora $\varphi(x) = g(x)$ se x é racional e $\varphi(x) = g(x)+1$ para x irracional. Calcule as integrais (inferior e superior) de φ em termos da integral de g.

Seção 3: Propriedades da integral

1. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável. Prove que a função $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, é lipschitziana.

2. Prove que se $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ são integráveis então são também integráveis as funções $\varphi, \psi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, definidas por $\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ e $\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$. Conclua daí que são integráveis as funções $f_+,\ f_-\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dadas por $f_+(x) = 0$ se $f(x) \le 0$, $f_+(x) = f(x)$ se $f(x) > 0$; $f_-(x) = 0$ se $f(x) \ge 0$ e $f_-(x) = -f(x)$ se $f(x) < 0$ (supondo ainda f integrável).

3. Prove que se $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ são contínuas então

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f(x)^2dx \int_a^b g(x)^2dx.$$

(Desigualdade de Schwarz.)

Seção 4: Condições suficientes de integrabilidade

1. Prove que a função f do Exercício 2.3 é integrável.

2. Prove que o conjunto dos pontos de descontinuidade de uma função monótona é enumerável e conclua daí que o Teorema 6 decorre do Teorema 7.

3. Seja D o conjunto dos pontos de descontinuidade de uma função limitada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Se D' (conjunto dos pontos de acumulação de D) é enumerável, prove que f é integrável.

4. Uma função limitada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, que se anula fora de um conjunto de medida nula, pode não ser integrável. Nestas condições, supondo f integrável, prove que sua integral é igual a zero.

5. Diz-se que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem *conteúdo nulo* quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe uma cobertura $X \subset I_1 \cup \cdots \cup I_k$, por meio de um número *finito* de intervalos abertos, com $\sum_{j=1}^{k} \left|I_j\right| < \varepsilon$. Prove:

   (a) Se X tem conteúdo nulo, o mesmo ocorre com seu fecho $\overline{X}$.

   (b) Existem conjuntos de medida nula que não têm conteúdo nulo.

   (c) Um conjunto compacto tem medida nula se, e somente se, tem conteúdo nulo.

   (d) Se uma função limitada $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ coincide com uma função integrável $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ exceto num conjunto de conteúdo nulo, prove que g é integrável e sua integral é igual à de f.

6. Se um conjunto $X \subset [a,b]$ não tem medida nula então existe $\varepsilon > 0$ tal que, para toda partição P de $[a,b]$, a soma dos comprimentos dos intervalos de P que contêm pontos de X em seu interior é maior do que ε.

7. Seja $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função positiva (isto é, $\varphi(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$). Existe $\alpha > 0$ tal que o conjunto $X = \{x \in [a,b]; \varphi(x) \ge \alpha\}$ não tem medida nula.

8. Se a função $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é positiva e integrável, então $\int_a^b \varphi(x)dx > 0$. Conclua que se $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ são integráveis e $f(x) < g(x)$ para todo $x \in [a,b]$ então $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$. (Use os exercícios 6. e 7.)

9. Seja $p\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável, com $p(x) \ge 0$ para todo $x \in [a,b]$. Prove que se $\int_a^b p(x)dx = 0$ então o conjunto dos pontos $x \in [a,b]$ tais que $p(x) = 0$ é denso em $[a,b]$. Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é qualquer função integrável que se anula num conjunto denso de pontos em $[a,b]$, prove que $\int_a^b f(x)dx = 0$.

11

Cálculo com Integrais

Este capítulo é a continuação do anterior. Naquele, foi definida a integral e foram estabelecidas condições gerais que asseguram a integrabilidade de uma função. Neste, serão provadas as regras para o manuseio eficiente das integrais, entre elas o chamado Teorema Fundamental do Cálculo, uma movimentada via de mão dupla que liga derivadas a integrais. Em seguida, usaremos a integral para dar uma definição adequada do logarítmo e da exponencial. O capítulo termina com uma breve discussão das integrais impróprias.

1. Os teoremas clássicos do Cálculo Integral

Para começar, estabeleceremos a conexão entre derivada e integral.

Teorema 1. **(Teorema Fundamental do Cálculo.)** *Seja $f: I \to \mathbb{R}$ contínua no intervalo I. As seguintes afirmações a respeito de uma função $F: I \to \mathbb{R}$ são equivalentes:*

(1) *F é uma integral indefinida de f, isto é, existe $a \in I$ tal que $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$, para todo $x \in I$.*

(2) *F é uma primitiva de f, isto é, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.*

Demonstração: (1)⇒(2). Se x_0, $x_0 + h \in I$ então $F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$ e $h.f(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt$, portanto

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]dt.$$

Dado $\varepsilon > 0$, pela continuidade de f no ponto x_0, existe $\delta > 0$ tal que $t \in I$, $|t - x_0| < \delta$ implicam $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Então $0 < |h| < \delta$, $x_0 + h \in I$ implicam

$$\left|\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{|h|}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|dt\right| < \frac{1}{|h|}.|h|.\varepsilon = \varepsilon.$$

Isto mostra que $F'(x_0) = f(x_0)$.

(2)⇒(1). Seja $F' = f$. Como acabamos de ver, se fixarmos $a \in I$ e definirmos $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$, teremos $\varphi' = f$. As duas funções $F, \varphi: I \to \mathbb{R}$, tendo a mesma derivada, diferem por uma constante. Como $\varphi(a) = 0$, essa constante é $F(a)$. Portanto $F(x) = F(a) + \varphi(x)$, isto é, $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$ para todo $x \in I$. □

Comentários. (1). Foi provado acima que toda função contínua possui uma primitiva. Mais precisamente: se $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável então $F: [a, b] \to \mathbb{R}$, definida por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, é derivável em todo ponto $x_0 \in [a, b]$ no qual f seja contínua, e tem-se $F'(x_0) = f(x_0)$. Nesse ponto também é derivável a função $G: [a, b] \to \mathbb{R}$, dada por $G(x) = \int_x^b f(t)dt$. Tem-se $G'(x_0) = -f(x_0)$. Com efeito, $F(x) + G(x) = \int_a^b f(t)dt$ =constante, logo $F'(x_0) + G'(x_0) = 0$.

(2). Ficou também provado que se $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 (isto é, tem derivada contínua) então $F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt$. Em particular, $F(b) = F(a) + \int_a^b F'(t)dt$. Isto reduz o cálculo da integral $\int_a^b f(x)dx$ à procura de uma primitiva de f. Se $F' = f$ então $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Teorema 2. **(Mudança de variável.)** *Sejam $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, $g: [c, d] \to \mathbb{R}$ com derivada contínua e $g([c, d]) \subset [a, b]$. Então*

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(t)).g'(t)dt.$$

Demonstração: Pelo Teorema 1, f possui uma primitiva $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ e vale $\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = F(g(d)) - F(g(c))$. Por outro lado, a Regra da Cadeia nos dá $(F \circ g)'(t) = F'(g(t)).g'(t) = f(g(t)).g'(t)$ para todo $t \in [c, d]$. Logo $F \circ g: [c, d] \to \mathbb{R}$ é uma primitiva da função contínua $t \mapsto f(g(t)).g'(t)$. Portanto $\int_c^d f(g(t)).g'(t)dt = F(g(d)) - F(g(c))$. Isto prova o teorema. □

Observação. O Teorema 2 é uma boa justificativa para a notação $\int_a^b f(x)dx$, em vez de $\int_a^b f$. Para mudar a variável em $\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx$, faz-se

$x = g(t)$. A diferencial de x será $dx = g'(t)dt$. Estas substituições dão

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(t)).g'(t)dt.$$

A troca nos limites de integração é natural: quando t varia de c a d, $x = g(t)$ varia de $g(c)$ a $g(d)$.

É tradicional no Cálculo a notação $F]_a^b = F(b) - F(a)$.

Teorema 3. **(Integração por partes.)** *Se $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ têm derivadas contínuas então*

$$\int_a^b f(x).g'(x)dx = f.g]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Demonstração: Basta notar que $f.g$ é primitiva de $f.g' + f'.g$ e integrar esta soma usando o Teorema Fundamental do Cálculo. □

Teorema 4. **(Fórmula do Valor Médio para integrais.)** *Sejam $f, p: [a,b] \to \mathbb{R}$, f contínua, p integrável, com $p(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Existe um número $c \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)p(x)dx = f(c).\int_a^b p(x)dx$.*

Demonstração: Para todo $x \in [a,b]$, temos $m \leq f(x) \leq M$, onde m é o ínfimo e M o supremo de f em $[a,b]$. Como $p(x) \geq 0$, segue-se que $m.p(x) \leq f(x).p(x) \leq M.p(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Seja $A = \int_a^b p(x)dx$. Das últimas desigualdades resulta $m.A \leq \int_a^b f(x)p(x)dx \leq M.A$. Logo existe $d \in [m,M]$ tal que $\int_a^b f(x)p(x)dx = d.A$. Como f é contínua, temos $d = f(c)$ para algum $c \in [a,b]$, o que prova o teorema. □

Corolário. *Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Existe $c \in [a,b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c).(b-a).$$

Lema. *Se $\varphi: [0,1] \to \mathbb{R}$ possui derivada de ordem n contínua então*

$$\varphi(1) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n)}(t)dt.$$

Demonstração: Para $n = 1$, esta fórmula reduz-se a $\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t)dt$, válida pelo Teorema Fundamental do Cálculo. Para $n = 2$, integração por partes fornece

$$\int_0^1 (1-t)\varphi''(t)dt = (1-t)\varphi'(t)]_0^1 + \int_0^1 \varphi'(t)dt$$
$$= -\varphi'(0) + \varphi(1) - \varphi(0),$$

logo

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)dt.$$

Para $n = 3$, novamente a integração por partes nos dá

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2}\varphi'''(t)dt = \frac{(1-t)^2}{2}.\varphi''(t)\Big]_0^1 + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)dt$$
$$= -\frac{\varphi''(0)}{2} + \varphi(1) - \varphi(0) - \varphi'(0),$$

logo

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2} + \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2}\varphi'''(t)dt.$$

O padrão indutivo está claro. O lema vale para todo n. □

Teorema 5. **(Fórmula de Taylor com resto integral.)** *Se $f: I \to \mathbb{R}$ possui derivada n-ésima contínua no intervalo cujos extremos são a, $a+h \in I$ então*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1} + \left[\int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+th)dt\right] h^n$$

Demonstração: Definindo $\varphi: [0,1] \to \mathbb{R}$ por $\varphi(t) = f(a+th)$, tem-se $\varphi^{(i)}(0) = f^{(i)}(a)h^i$. O Teorema 5 resulta do lema acima. □

Corolário. **(Fórmula de Taylor com resto de Lagrange.)** *Se $f: I \to \mathbb{R}$ é de classe C^n no intervalo cujos extremos são a, $a+h \in I$ então existe $\theta \in [0,1]$ tal que*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}.h^n.$$

Com efeito, chamando de A a integral do enunciado do Teorema 5, resulta do Teorema 4 que existe $\theta \in [0,1]$ tal que

$$A = f^{(n)}(a+\theta h)\int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt = \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}.$$ □

Observação. Esta demonstração é mais natural do que a dada no Teorema 2, Capítulo 9, porém exige mais de f.

2. A integral como limite de somas de Riemann

A *norma* de uma partição $P = \{t_0, \dots, t_n\} \subset [a,b]$ é o número $|P|$ =maior comprimento $t_i - t_{i-1}$ dos intervalos de P.

Teorema 6. *Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $|P| < \delta \Rightarrow S(f;P) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon$.*

Demonstração: Suponhamos inicialmente $f(x) \geq 0$ em $[a,b]$. Dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P_0 = \{t_0, \dots, t_n\}$ de $[a,b]$ tal que

$$S(f;P_0) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon/2.$$

Seja $M = \sup f$. Tomemos δ com $0 < \delta < \varepsilon/2Mn$. Se P é qualquer partição de $[a,b]$ com $|P| < \delta$, indiquemos com $[r_{\alpha-1}, r_\alpha]$ os intervalos de P que estão contidos em algum $[t_{i-1}, t_i]$ de P_0 e com $[r_{\beta-1}, r_\beta]$ os restantes intervalos de P. Cada um destes contém pelo menos um ponto t_i em seu interior, logo há, no máximo, n intervalos do tipo $[r_{\beta-1}, r_\beta]$. Escrevamos $\alpha \subset i$ para significar $[t_{\alpha-1}, t_\alpha] \subset [t_{i-1}, t_i]$. Quando $\alpha \subset i$ valem $M_\alpha \leq M_i$ e $\sum_{\alpha \subset i}(r_\alpha - r_{\alpha-1}) \leq t_i - t_{i-1}$. Estes números são todos ≥ 0, logo $\sum_{\alpha\subset i} M_\alpha.(r_\alpha - r_{\alpha-1}) \leq M_i.(t_i - t_{i-1})$ e $M_\beta.(r_\beta - r_{\beta-1}) \leq M.\delta$. Portanto:

$$\begin{aligned} S(f;P) &= \sum_\alpha M_\alpha(r_\alpha - r_{\alpha-1}) + \sum_\beta M_\beta(r_\beta - r_{\beta-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}) + M.n.\delta \\ &< S(f;P_0) + \varepsilon/2 \\ &< \overline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon. \end{aligned}$$

No caso geral, como f é limitada, existe uma constante c tal que $f(x) + c \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Tomando $g(x) = f(x) + c$ temos $S(g;P) = S(f;P) + c.(b-a)$ e

$$\overline{\int_a^b} g(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx + c(b-a),$$

logo recaímos no caso anterior. □

Dizer que $S(f;P) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon$ equivale a $\left|\overline{\int_a^b} f(x)dx - S(f;P)\right| < \varepsilon$. Logo o Teorema 6 significa que $\lim_{|P|\to 0} S(f;P) = \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

De modo inteiramente análogo se prova que $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \lim\limits_{|P|\to 0} s(f;P)$.

Uma *partição pontilhada* do intervalo $[a,b]$ é um par $P^* = (P, \xi)$, onde $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ é uma partição de $[a,b]$ e $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ é uma lista de n números escolhidos de forma que $t_{i-1} \leq \xi_i \leq t_i$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

Dada uma função limitada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e uma partição pontilhada P^* de $[a,b]$, tem-se a *soma de Riemann*

$$\sum(f;P^*) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Evidentemente, seja qual for o modo de pontilhar a partição P, tem-se

$$s(f;P) \leq \sum(f;P^*) \leq S(f;P).$$

Diz-se que o número real I é o *limite* de $\sum(f;P^*)$ quando $|P| \to 0$, e escreve-se $I = \lim_{|P|\to 0} \sum(f;P^*)$, quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $|\sum(f;P^*) - I| < \varepsilon$ seja qual for a partição pontilhada P^* com $|P| < \delta$.

Teorema 7. *Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável então $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{|P|\to 0} \sum(f;P^*)$.*

Demonstração: Segue-se do Teorema 6 que se f é integrável então

$$\lim_{|P|\to 0} s(f;P) = \lim_{|P|\to 0} S(f;P) = \int_a^b f(x)dx.$$

Como se tem $s(f;P) \leq \sum(f;P^*) \leq S(f;P)$, resulta imediatamente que $\lim\limits_{|P|\to 0} \sum(f;P^*) = \int_a^b f(x)dx$. □

Observação. Vale a recíproca do Teorema 7, mas é menos interessante. (Veja "Curso de Análise", vol.1, pag. 265.)

3. Logaritmos e exponenciais

Seja a um número real maior que 1. Costuma-se definir o logaritmo de um número real x na base a como o expoente $y = \log_a x$ tal que $a^y = x$. Ou seja, a