François Viète:
o despontar da álgebra simbólica

Paulo Duarte Bastos Gil

Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Janeiro de 2001

François Viète:
o despontar da álgebra simbólica

Paulo Duarte Bastos Gil

Dissertação de Mestrado em
Matemática – Fundamentos e Aplicações
orientada pelo Professor Doutor Carlos Correia de Sá

Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Janeiro de 2001

Para a minha mãe.

Agradecimentos

Agradeço ao Professor Doutor Carlos Correia de Sá a disponibilidade, o incentivo, as sugestões, a colaboração crítica e a orientação científica na elaboração da presente dissertação.

Agradeço à Professora Doutora Rosário Pinto pela amizade, pelo interesse que pôs em que me candidatasse a este mestrado e pela ajuda na procura de bibliografia.

Agradeço à minha mãe pela permanente presença, encorajamento e compreensão.

Agradeço ao Jacinto pela dedicação, estímulo e pelas horas passadas ao computador.

Agradeço ao Rui pelos conhecimentos informáticos disponibilizados na finalização da dissertação.

Agradeço à Berta a colaboração e auxílio profissionais.

Agradeço também à Luísa, à Fátima e à D. Balbina as facilidades concedidas.

Índice

Introdução

A divisão do Império Romano nos finais do século IV, além da subsequente separação política do Ocidente e Oriente, repercutiu-se também a nível económico e cultural, em particular no Ocidente. A base económica da Europa Ocidental era a agricultura, embora existissem algumas cidades prósperas de comércio baseado numa economia monetária. Com a expansão muçulmana, as relações comerciais entre o Próximo Oriente e o Ocidente tornaram-se difíceis, o que originou a decadência das cidades e o desaparecimento de uma economia a grande escala, surgindo assim uma economia de troca de géneros através de mercados locais. Com o aparecimento do feudalismo, o grande comércio perdeu ainda mais importância, na medida em que os senhores feudais, na posse de grandes porções de terra, se tornaram auto-suficientes e com pequenas necessidades comerciais. Neste modelo de sociedade as exigências matemáticas eram escassas e elementares[1].

Entretanto, nos séculos XII-XIV, as cidades da Europa Ocidental cresceram e desenvolveram-se, incompatibilizando-se com o sistema feudal (cf. Struik 1997, 137). Ressurgiu a necessidade da expansão do comércio e consequentes transacções monetárias, recuperando-se gradualmente as relações comerciais com o Oriente. Estas trocas comerciais possibilitaram uma gradual tomada de contacto com a tradição clássica baseada em traduções a partir do árabe (cf. Struik 1997, 138). Houve um incremento deste contacto a partir de 1453 com a queda de Constantinopla e, por conseguinte, com o fim do Império Bizantino, que levaram ao deslocamento para o Ocidente de inúmeros sábios orientais. Estes transportaram consigo textos gregos originais, o que possibilitou aos sábios latinos um contacto mais directo com os clássicos gregos.

Com a crescente actividade comercial nas cidades de Florença, Génova, Milão, Pisa e Veneza, os algebristas italianos da Renascença sentiram

---

[1] A complexidade da aritmética de então não ia além do cálculo do calendário da Páscoa. Boécio, do século VI, era a maior autoridade no domínio da aritmética desta época. Cf Struik 1997, 135

necessidade não de uma matemática baseada no *quadrivium*[2], mas de novas ferramentas para o cálculo e resolução dos problemas emergentes da actividade económica. Sendo estas necessidades matemáticas de interesse essencialmente prático, a aritmética e a álgebra passaram a ser ensinadas por «mestres de cálculo»[3] fora das Universidades. Uma parte do desenvolvimento matemático surgiu assim do florescer do comércio e respectivas consequências: navegação e astronomia. No entanto, o acesso aos trabalhos clássicos proporcionou aos algebristas italianos a ultrapassagem dos limites estabelecidos nessas mesmas obras. Exemplo desta determinação em ir mais além do que os antigos foi a procura da solução geral de equações do terceiro grau. Os gregos e os orientais já se tinham debruçado sobre este problema, tendo-o resolvido apenas para alguns casos numéricos, mas a descoberta da solução da equação cúbica surgiu na Itália apenas em 1515 através de Scipio del Ferro (1465-1526)[4]. Os algebristas italianos da Renascença levaram, portanto, o desenvolvimento da sua ciência tão longe quanto foi possível com a simbologia de que dispunham.

Apesar de a actividade comercial proporcionar o desenvolvimento de novas formas do pensamento matemático, nomeadamente da álgebra, o século XVI e o princípio do século XVII caracterizaram-se também pela tentativa de recuperação dos escritos matemáticos gregos. Este interesse pelos clássicos cedo levou à questão de saber como os antigos descobriam os seus resultados. Um dos motivos que levaram os matemáticos seiscentistas e setecentistas à tentativa de recuperação do método analítico antigo foi o facto de se sentirem intrigados e muitas vezes frustrados com o estilo sintético grego que os privava do método que primeiramente teria sido utilizado na descoberta dos resultados. Prova desse sentimento de frustração é a afirmação de Descartes em 1629 na regra IV da obra *Regras para a Direcção do Espírito*:

---

[2] Conjunto de quatro disciplinas – aritmética, geometria, astronomia e música – que os pitagóricos estudavam a fim de entenderem as leis do Universo (cf. Struik 1997, 78). Nas Universidades medievais europeias esta era ainda a base do estudo científico.

[3] Na Itália ficaram conhecidos por *Maestri d'abbaco* (abacistas), pelo uso do antigo ábaco. Cf. Katz 1993, 314

[4] A publicação de tal descoberta efectuou-se mais tarde, originando a conhecida controvérsia entre Tartaglia e Cardano.

Mas quando eu depois reflecti como poderia ser que os primeiros pioneiros da Filosofia das eras passadas recusassem admitir no estudo da ciência quem não fosse versado nas matemáticas, evidentemente acreditando que era este o mais indispensável exercício mental e de preparação para entender as outras ciências mais importantes, tive a confirmação da minha suspeita de que eles tinham um conhecimento de uma espécie de matemáticas bastante diferentes das utilizadas correntemente no nosso tempo (...). Na verdade parece-me reconhecer certos traços desta verdadeira matemática em Papo e Diofanto, que não se consideravam como pertencentes ao período mais antigo, embora tivessem vivido muitos séculos antes do nosso tempo. Mas, na minha opinião esses autores tiveram uma espécie de baixa astúcia, deplorável de facto, suprimindo este conhecimento. (Mahoney 1973, 31)

Os algebristas dos finais do século XVI estavam, portanto, familiarizados com alguns trabalhos gregos (já recuperados), com certas manipulações algébricas e conheciam as soluções das equações algébricas de terceiro e até mesmo de quarto grau (cf. Katz 1993, 337). Mas os enunciados dos problemas e os processos de resolução eram apresentados na linguagem corrente (*álgebra retórica*) e, por consequência, as manipulações algébricas tornavam-se de difícil acompanhamento e pouco práticas. Salienta-se o facto de existirem já no final do século XV alguns autores que usavam símbolos para quantidades desconhecidas e potências (cf. Boyer 1956, 54), destacando-se o francês Nicolas Chuquet (ca.1445-ca.1500), com o *Triparty en la science des nombres* de 1484, e o italiano Luca Pacioli (1445-1517), com a *Summa de arithmetica* de 1494. Em ambos os trabalhos existe um crescente uso de abreviaturas (*álgebra sincopada*[5]). No século seguinte, os algebristas italianos – entre os quais se destacaram Nicolò Tartaglia (1506-1557), Hieronimo Cardano (1501-1576) com a *Ars Magna* e Rafael Bombelli (1526-1572) com *L'Algebra* – continuaram com o uso de letras e abreviaturas para operações e relações (cf. Boyer 1956, 57). Mas, apesar do uso de algumas abreviaturas, os algebristas

---

[5] Segundo Struik (1997, 106), encontra-se em Diofanto a primeira utilização sistemática de símbolos algébricos. Apesar de serem ainda do tipo abreviaturas e, portanto, *álgebra sincopada*, Diofanto possuía sinais especiais para a incógnita e suas potências de expoente não superior a seis, os respectivos recíprocos, a subtracção e a igualdade.

do século XVI não usavam ainda símbolos para coeficientes, o que obrigava a ilustrar os processos de resolução de um determinado problema com exemplos concretos. Isto é, os algoritmos nunca eram apresentados de uma forma geral, mas sim através de exemplos numéricos (cf. Katz 1993, 337). Não existiam portanto fórmulas redigidas de maneira a poderem generalizar os problemas. Para tal ser possível, necessitava-se de uma nova álgebra: a *álgebra simbólica*. Um dos primeiros matemáticos que tentaram fazer uma introdução a esta nova álgebra foi François Viète.

Seguindo a tendência da época de recuperar o método de pesquisa dos antigos, a análise dos geómetras clássicos, Viète esforçou-se por identificar a análise grega com a nova álgebra, pretendendo expor esta última com clareza e simplicidade (cf. Katz 1993, 339). Deste modo, utilizou os termos *zetética* e *porística* da análise clássica tendo reformulado os respectivos métodos. Além disso, introduziu um terceiro método de análise, a *exegética*.

Com esta identificação análise/álgebra Viète criou uma nova arte de cálculo simbólico, a *logística especiosa*, que se destacou por estabelecer uma rígida distinção entre quantidades dadas e desconhecidas. Esta nova forma de distinção permitiu-lhe abordar um amplo conjunto de problemas de uma forma sistemática.

O presente trabalho visa estudar o modo como Viète introduz, utiliza e aplica a sua logística especiosa. Nesse sentido, analisar-se-ão algumas das obras de Viète: a *Introdução à Arte Analítica*, onde se caracteriza a *zetética*, a *porística* e a *exegética*, se descreve a notação utilizada e se introduzem as regras da *logística especiosa*; as *Notas Preliminares*, preâmbulo da restante obra; e os *Cinco Livros das Zetéticas*, onde Viète apresenta aplicações do seu cálculo simbólico a questões que se inserem na tradição diofantina de problemas aritméticos.

Breve referência biográfica a François Viète[6]

François Viète[7] (1540-1603) nasceu em França, em Fontenay-le-Comte[8], na província de Poitou a cerca de 50Km de La Rochelle. Filho de Étienne Viète, um advogado em Fontenay-le-Comte, e de Marguerite Dupont, Viète iniciou os seus primeiros estudos no convento franciscano de Fontenay e, mais tarde, com 18 anos, foi admitido na Universidade de Poitier, onde concluiu o curso de direito em 1560. Depois da obtenção da graduação, Viète regressou a Fontenay onde exerceu a sua profissão de advogado, tendo representado interesses como os de Maria Stuart[9] (1542-1587).

Em 1564 ocupou-se dos assuntos legais da família Soubise, onde se tornou o secretário particular de Antoinette d'Aubeterre. Outro dos cargos que desempenhou foi o de responsável na educação da filha de Antoinette, Catherine de Parthenay[10] de quem, durante toda a vida, Viète permaneceu um fiel amigo e conselheiro (cf. Busard 1991, 2512). Dado o interesse desta por

---

[6] Segundo Witmer (1983, 1), não existe nenhuma biografia completa sobre Viète. Witmer refere ainda, baseado numa nota dada por Frederic Ritter em *François Viète, Invention de l'Algebra Moderne* (Paris, 1895), que Ritter «(...) preparou uma biografia destinada a acompanhar uma tradução francesa dos trabalhos completos de Viète que rondaria as 350 páginas.» (Witmer 1983, 1). Contudo, Witmer observa que «O paradeiro deste manuscrito é desconhecido.» (Witmer 1983, 1). Assim, as fontes a que se recorreu para esboçar esta biografia foram: a introdução de Witmer em *Analytic Art*, o artigo sobre Viète elaborado por Busard no Dicionário Científico (pp. 2512-2519), a introdução de Hofmann na edição facsimilada da *Opera Mathematica* de Viète, o artigo de Dedron em *Mathématiques et Mathématiciens* (pp. 173-185) e os diversos livros de história da matemática referidos na bibliografia.

[7] Em latim Franciscus Vieta.

[8] Actual Vendèe.

[9] Filha de Jaime V, rei da Escócia.

[10] «Na edição de 1591, na *Introdução à Arte Analítica*, esta inicia-se com uma dedicatória dirigida à mesma.» (Witmer 1983, 2). Nesta dedicatória, Viète agradeceu à sua pupila os numerosos benefícios que recebeu dela, em particular, o facto de ter feito nascer nele o gosto pelas matemáticas. Cf. Hoefer 1874, 355

astrologia, Viète, interessado em dar-lhe um fundamento científico, estudou astronomia exaustivamente, o que terá vindo a desempenhar um papel importante no seu interesse pela matemática (cf. Witmer 1983, 2).

Com a morte do marido de Antoinette em 1566, Viète acompanhou-a para La Rochelle de onde, em 1570, seguiu para Paris onde se tornou conselheiro do Parlamento.

Este era um período de grande instabilidade política e religiosa em França. Carlos IX tinha sido coroado em 1560 e, pouco depois, em 1562, a guerra religiosa francesa começou. Em 23 de Agosto de 1572, altura em que Viète estava em Paris, Carlos IX autorizou o massacre dos Huguenotes. Estes deverão ter sido tempos difíceis para Viète pois, apesar de não ser activo na causa protestante, ele próprio era um Huguenote. Todavia, em 1574 foi nomeado conselheiro do Parlamento da Bretanha em Rennes e, seis anos mais tarde, em 1580, já no reinado de Henrique III, Viète tornou-se *maître de requêtes*[11] em Paris e membro do Conselho Privado do Rei até ser demitido, por questões religiosas, em 1584. Viète abandonou Paris instalando-se em Beauvoir-sur-Mer, na costa, a cerca de 130Km a noroeste da sua terra natal. Durante os cinco anos que permaneceu em Beauvoir-sur-Mer, Viète teve a oportunidade de se dedicar inteiramente aos seus estudos matemáticos. Era capaz de permanecer três dias consecutivos na sua mesa de trabalho sem a abandonar para comer ou deitar-se a dormir, restaurando as suas forças, em alguns momentos de sono, apoiando a cabeça sobre as mãos (cf. Dedron 1959, 181). De facto, foi durante este período, isento de tarefas oficiais, que os trabalhos matemáticos mais importantes de Viète foram realizados.

Com a mudança do governo de Henrique III de Paris para Tours[12], Viète foi chamado de novo à corte. Em 1594, já no reinado de Henrique IV, acompanhou o regresso desta a Paris e tomou novamente o lugar de Conselheiro Real. Viète continuou ao serviço de Henrique IV, em Paris, até

---

[11] Mestre de requerimentos.

[12] Provavelmente foi em Tours que Viète se casou (cf. Witmer 1983, 3) com Juliette Leclère, tendo uma filha que não deixou descendentes (cf. Dedron 1959, 179). Contudo, Busard (1991, 2512) refere que Viète casou duas vezes sendo a sua primeira esposa Barbe Cothereau, da qual teve três filhos (cf. Witmer 1983, 3), e que só após a morte desta casou com Juliette Leclère (cf. Busard 1991, 2512).

1597, altura em que voltou a Fontenay. Dois anos depois, em 1599, regressou a Paris ao serviço de Henrique IV, que o dispensou apenas em finais de 1602. Viète faleceu pouco tempo depois, em 23 de Fevereiro de 1603.

Apesar de ao longo da sua vida se ter encontrado extremamente absorvido por trabalhos oficiais, Viète sempre cultivou o seu interesse pela matemática nos tempos livres. Conseguiu importantes descobertas em diversos ramos desta ciência como, por exemplo, na aritmética, na álgebra, na trigonometria e na geometria.

Para vários autores[13], Viète teve dois períodos de grande produtividade matemática, nos quais elaborou e escreveu vários tratados. O primeiro período provavelmente iniciou-se pouco tempo depois de ter entrado ao serviço da família Soubise em 1564 e terminou em 1568; o segundo verificou-se entre 1584 e 1589 (cf. Dedron 1959, 179).

Os seus primeiros trabalhos científicos foram *Harmonicon Cœleste* (*Harmonia Celeste*) e *Canon Mathematicus* (*Regras Matemáticas*), embora Busard (1991, 2513) refira também os cadernos das lições redigidos por Viète a Catherine de Parthenay[14]. O *Harmonicon Cœleste* era um tratado[15] sobre astronomia, constituído por cinco livros, onde Viète abordava a geometria das teorias planetárias quer de Ptolomeu quer de Copérnico[16]. O *Canon Mathematicus* era um tratado composto por quatro partes[17], nas quais Viète se ocupou do desenvolvimento de resultados dos campos da trigonometria, aritmética e astronomia. As duas primeiras partes continham, por exemplo, tabelas de funções trigonométricas, estudos sobre a construção de triângulos planos e esféricos e fracções decimais (cf. Witmer 1983, 3-4). De facto, Viète

---

[13] Por exemplo Witmer (1983, 3), Busard (1991, 2513) e Dedron (1959, 179).

[14] Segundo Busard (1991, 2513), do conjunto dessas lições apenas sobreviveu *Principes de Cosmographie* (*Princípios de Cosmografia*). Este trabalho continha ensaios sobre a esfera e sobre elementos de geografia e astronomia (cf. Busard 1991, 2513), tendo sido editado em 1637 e reeditado em 1643, 47 e 61 (cf. Dedron 1959, 179).

[15] Existente apenas sob a forma de manuscrito nas bibliotecas de Florença e Paris. Cf. Busard 1991, 2513

[16] Segundo Busard (1991, 2513), Viète acreditava que a hipótese de Copérnico não era geometricamente válida.

[17] Segundo Busard (1991, 2513), apenas as duas primeiras partes foram publicadas. Publicações essas realizadas em Paris em 1579 por Jean Mettayer, tipógrafo real. Cf. Witmer 1983, 3

apelou ao uso das fracções decimais em lugar das fracções sexagesimais, escrevendo

(...) sexagesimais e múltiplos de sessenta devem ser pouco, ou nunca, usados, e milésimas e milhares, centésimas e centenas, décimas e dezenas e progressões semelhantes, ascendentes e descendentes, usadas frequentemente ou exclusivamente. (Marques 1991, 24)

As outras duas partes eram dedicadas à astronomia.

Mas foi no segundo período referido anteriormente que Viète estruturou as linhas da sua *Arte Analítica* (cf. Dedron 1959, 180), compondo diversos tratados sobre álgebra e geometria.

Começou por compor *In Artem Analyticem Isagoge*[18] (*Introdução à Arte Analítica*), editada em Tours em 1591, por Jean Mettayer (cf. Witmer 1983, 4) e reeditado em Paris, em 1624 e 1631. Esta última edição foi anotada por Jean de Beaugrand (cf. Witmer 1983, 9). Viète elaborou ainda os seguintes tratados que, segundo Witmer (1983, 9), viria a incluir na *Arte Analítica*:

– *Ad Logisticem Speciosam Notæ Priores* (*Notas Preliminares em Logística Especiosa*), Paris 1631, editada e também anotada por Jean de Beaugrand (cf. Witmer 1983, 9). Segundo Busard (1991, 2518), Viète não publicou este tratado por acreditar que o mesmo não estava suficientemente elaborado para publicação. Este trabalho continha fórmulas algébricas, elementares mas gerais[19], e algumas proposições que combinavam álgebra com geometria (cf. Busard 1991, 2519);

– *Zeteticorum Libri Quinque* (*Cinco Livros das Zetéticas*), Tours 1593. Neste trabalho Viète apresentou, através de várias proposições, a aplicabilidade da sua *logística especiosa*, contrastando-a com a *logística*

---

[18] Nesta obra, Viète traçou o seu programa analítico, explicando o que pretendia realizar no campo da álgebra. Em especial, exemplificou como a álgebra podia ser aplicada na resolução de problemas geométricos. Neste tratado, Viète também introduziu uma nova forma simbólica, distinguindo grandezas dadas de desconhecidas, com a qual definiu a sua *logística especiosa*.

[19] Correspondendo a proposições dos Livros II e IX dos *Elementos* de Euclides. Cf. Busard 1991, 2518

numérica de Diofanto patente na *Aritmética* deste último (cf. Busard 1991, 2515);

– *De Æquationum Recognitione et Emendatione Tractatus Duo* (*Dois Tratados sobre o Entendimento e Correcção de Equações*), Paris 1615, com uma introdução do editor Alexander Anderson (1582-1621) (cf. Witmer 1983, 9). Este trabalho tratava principalmente da teoria das equações, apresentando quer os métodos gerais para resolver equações do terceiro e quarto grau, como informações sobre certas relações entre coeficientes e raízes de uma equação (cf. Busard 1991, 2518);

– *De Numerosa Potestatum ad Exegesin Resolutione* (*Sobre a Resolução Numérica de Potências por Exegética*), Paris 1600, editado por Marino Ghetaldi (1566-1627) (cf. Dedron 1959, 180). Neste trabalho Viète ocupou-se da resolução de numerosas equações numéricas, apresentando também um método para determinar os valores aproximados das raízes positivas destas equações (cf. Rouse Ball 1906,241);

– *Effectionum Geometricarum Canonica Recensione* (*Uma Perspectiva Canónica de Construções Geométricas*), Tours 1593. Neste tratado Viète forneceu um método para resolver problemas geométricos, traduzidos sob a forma de uma equação, através do uso dos coeficientes da equação em questão (cf. Busard 1991, 2515);

– *Supplementum Geometriae* (*Um Suplemento à Geometria*), Tours 1593, editado por Jean Mettayer (cf. Busard 1991, 2515). Nesta obra Viète resolveu vários problemas de geometria, entre os quais como construir um heptágono regular inscrito numa circunferência, e demonstrou que os problemas da trissecção do ângulo e duplicação do cubo dependiam da resolução duma equação cúbica (cf. Rouse Ball 1906, 241);

– *Theoremata ad Sectiones Angulares* (*Teoremas sobre Secções Angulares*), Paris 1615, com provas suplementares fornecidas pelo editor Alexander Anderson (cf. Witmer 1983, 9). Entre outros assuntos, Viète considerou o problema da trissecção de um ângulo, que usou para obter a solução trigonométrica de uma equação cúbica na forma irredutível (cf. Waerden 1985, 67).

A actividade matemática de Viète não se limitou apenas aos tratados supra-referidos, uma vez que ele acompanhou interessadamente o movimento matemático da época. Esta postura granjeou-lhe uma grande reputação como matemático, a ponto de lhe serem confiadas importantes tarefas pelo rei Henrique IV.

Durante a guerra religiosa eclodida em França, que começou no reinado de Carlos IX e se prolongou até ao reinado de Henrique IV, o rei Filipe II de Espanha apoiou financeira e militarmente a facção católica francesa: Nesta época os espanhóis possuíam uma cifra[20], contendo aproximadamente 600 caracteres, que periodicamente eram alterados. Segundo eles era impossível decifrá-la (cf. Rouse Ball 1906, 238). Uma vez que Viète era um apoiante da causa protestante, no reinado de Henrique IV[21], o rei encarregou-o da descodificação de mensagens e cartas cifradas criptograficamente. Viète levou algum tempo a quebrar o complicado código de tais mensagens tendo inicialmente decifrado parte das mesmas, mas a 15 de Março de 1590 Viète enviou a Henrique IV a decifração completa de uma carta do oficial Juan de Moreo a Filipe II de Espanha datada de 28 de Outubro de 1589 (cf. Busard 1991, 2512). Assim, durante dois anos (cf. Rouse Ball 1906, 238), os franceses gozaram de forte vantagem na guerra com os espanhóis. Todavia, Filipe II estava de tal modo convencido que a cifra não podia ser quebrada que, quando constatou que os seus planos eram conhecidos, recorreu ao Papa, afirmando que os franceses tinham recorrido ao uso da bruxaria e feitiçaria (cf. Hoefer 1874, 355) «(...) contrariamente à prática da fé cristã.» (cf. Rouse Ball 1906, 238).

Uma outra circunstância que permitiu Viète manifestar-se duma forma brilhante foi a resolução de um problema proposto pelo matemático holandês Adrian Romanus (1561-1625).

---

[20] Sinais convencionais de um segredo ou escrita.

[21] É de referir que Henrique IV era protestante tendo-se convertido ao Catolicismo Romano em Julho de 1593, possivelmente mais por razões políticas do que religiosas.

Certo dia o embaixador da Holanda comentou com Henrique IV que a França não possuía nenhum geómetra capaz de resolver um problema proposto em 1593, por um matemático seu compatriota, Adrian Romanus, a todos os matemáticos do mundo[22], problema em que se exigia a resolução de uma equação do quadragésimo quinto grau. O rei francês convocou Viète[23] e informou-o do desafio. Viète, que tinha descoberto como formar *sen* $n\theta$ por meio de *sen* θ e *cos* θ (cf. Rouse Ball 1906, 237), observou que o comprimento da corda de uma circunferência (de raio um) que subtendia um ângulo ao centro de amplitude igual a $\frac{2\pi}{45}$ satisfazia à solução do problema em questão. Em poucos minutos Viète forneceu a Henrique IV uma solução do problema escrita a lápis e no dia seguinte, mais vinte e duas soluções[24]. Viète publicou a sua resposta no seu tratado *Responsum ad Problema, quod omnibus Mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus* (*Resposta ao Problema que Adriano Romano propôs a todos os construtores de Matemática de todo o Mundo*) em 1595, onde na introdução expressava o seu carácter diletante no estudo da matemática.

> Eu, não sendo matemático, mas que sempre que haja lazer, delicio-me em estudos matemáticos (...) (Busard 1991, 2517)

No final deste trabalho Viète propôs a Romanus um outro problema: construir uma circunferência tangente a três circunferências dadas.

Este problema já tinha sido abordado por Apolónio no seu trabalho *De Tactionibus* (*Das Tangentes*) (cf. Busard 1991, 2517) que Viète reconstituiu um pouco mais tarde. Romanus resolveu a questão por meio de secções cónicas, mas não conseguiu obter uma solução através do recurso à geometria euclidiana (cf. Rouse Ball 1906,237), isto é, usando apenas régua e compasso. Viète, por seu turno, apresentou uma solução de carácter euclidiano, o que

---

[22] *Problema omnibus totius orbis mathematicis construendum* (*Problema a todos os construtores de Matemática de todo o Mundo*). Cf. Hoefer 1874,355

[23] Nesta altura a reputação de Viète como matemático já era considerável. Cf. Rouse Ball 1906, 237

[24] É de referir que Viète não encontrou as quarenta e cinco soluções, pois não considerava os números negativos. Cf. Busard 1991, 2516-2517

criou em Romanus uma forte admiração, a ponto de o fazer viajar de propósito a França para poder conhecer Viète (cf. Busard 1991, 2517). Este primeiro encontro entre ambos foi o início de uma prolongada amizade (cf. Rouse Ball 1906, 237).

Embora Viète não se considerasse um matemático, não deixou de reagir como tal, mantendo com alguns homens de ciência, seus contemporâneos, discussões calorosas sobre diversos assuntos que envolviam matemática (cf. Hoefer 1874, 356).

Em 1592 Viète iniciou uma vivaz disputa com J. J. Scaliger

> (...) quando o último publicou uma proposta de solução para a quadratura do círculo, a trissecção do ângulo e a construção de dois meios proporcionais entre dois segmentos de recta dados por meio de régua e compasso. (Busard 1991, 2516)

Nesse mesmo ano Viète publicou alguns artigos em Tours onde mostrou que as afirmações feitas por Scaliger eram incorrectas. Mais tarde, em 1593, publicou o tratado *Variorum de rebus Mathematicis Responsorum Liber VIII* (*Livro VIII de respostas de vários sobre coisas da Matemática*) onde refuta as afirmações de Scaliger (cf. Busard 1991, 2516). Não convencido com as críticas de Viète, Scaliger publicou, em 1594, já na Holanda, os tratados *Cyclometria elementa* e *Mesolabium*, aos quais Viète respondeu com *Munimem adversus cyclometrica nova* (1594) e *Pseudomesolabium* (1595).

Viète também se interessou pelo melhoramento do Calendário Juliano, embora não tivesse sido bem sucedido nas suas intenções.

Com o desenvolvimento e progresso da astronomia o Papa Gregório XIII convocou um largo número de matemáticos, astrónomos e prelados que decidiram adoptar o calendário, proposto por Clávio (1538-1612), que ficou conhecido por Calendário Gregoriano. Assim, para rectificar os erros provenientes do Calendário Juliano, ficou acordado que ao dia 4 de Outubro de 1582 sucederia o dia 15 de Outubro do mesmo ano. É de referir que o Calendário Gregoriano encontrou diversos opositores entre os matemáticos da época, incluindo Viète e Tobias Müller.

Viète, depois de analisar os estudos que envolviam a reforma do calendário, iniciou uma polémica com Clávio que resultou na publicação de *Ratio Kalendarij Gregoriani* e *Kalendarium Gregorianum Perpetuum* em 1600, edição de Jean Mettayer (cf. Busard 1991, 2518). Clávio, tendo obtido conhecimento destes tratados através do cardeal Cinzio Aldobrandini (cf. Busard 1991, 2518), rejeitou as correcções propostas por Viète. Este último, mais tarde, em 1602 publicou *Adversus Christophorum Clavium Expostulatio* (*Queixa contra Cristóvão Clávio*) editado por Pierre Mettayer, filho de Jean Mettayer (cf. Busard 1991, 2518)

> (...) uma difamação contra Clávio que era tão violenta como injusta. (Busard 1991, 2518)

Tal como muitos dos seus contemporâneos, Viète dedicou-se à recuperação dos trabalhos de clássicos gregos, sendo uma prova do seu esforço a reconstituição de um livro perdido de Apolónio, *De Tactionibus*. Esta reconstituição apareceu impressa em 1600 no tratado designado por *Apollonius Gallus*. Esta obra continha, entre outros assuntos, a resolução dada por Viète do problema proposto a Adrian Romanus: "construir uma circunferência tangente a três circunferências dadas".

Segundo Dedron (1959, 180), existiram algumas dificuldades na recolha dos trabalhos de Viète, uma vez que este apenas os distribuía por aqueles que partilhavam os seus conhecimentos[25] e pela maioria desses trabalhos terem sido publicados postumamente. Para este autor deve-se ao Padre Mersenne e a Frans van Schooten a possibilidade de actualmente serem conhecidos muitos dos tratados escritos por Viète. De facto, Schooten recolheu e publicou diversos trabalhos de Viète numa obra que intitulou *Opera Mathematica* (Leyden, 1646) (cf. Hoefer 1874, 357), onde se podem encontrar os tratados referidos nesta biografia, com a excepção de *Canon Mathematicus*, *Harmonicon Cœleste* e *Principes de Cosmographie*.

[25] Como foi o caso dos seus alunos Alexander Anderson e Marino Ghetaldi. Cf. Dedron 1959, 181

A arte analítica de Viète

Zetética, porística e exegética

Apesar de ter começado por elaborar trabalhos de astronomia e trigonometria[26], escrevendo *Harmonicon cœleste* e *Canon mathematicus* entre 1564 e 1568, foi entre 1584-1589 (cf. Itard 1977, 245) que Viète compôs o primeiro de uma série de tratados sobre álgebra: *In Artem Analyticem Isagoge* (*Introdução à Arte Analítica*[27]), publicado em Tours em 1591. Nesta sua *Introdução*, e tendo como ponto de partida a combinação do método de análise apresentado na *Colecção* de Papo com os processos da *Aritmética* de Diofanto[28] (cf. Waerden 1985, 63), Viète expôs o que pretendia realizar no campo da álgebra, iniciando o trabalho com uma discussão sobre a análise:

> Há um certo modo de procurar a verdade em matemática que se diz descoberto primeiramente por Platão. A esse modo de procura Teão chamou análise, definindo-a como o processo em que se supõe aceite o que é procurado e, trabalhando através de consequências lógicas dessa suposição, se chega à verdade. Isto é contrário à síntese, em que se supõe o que já é conhecido e, trabalhando através das consequências dessa suposição, se chega ao entendimento do que é procurado.
>
> Embora os antigos propusessem dois tipos de análise, *zetética* e *porística*, às quais a definição de Teão se aplica, eu junto-lhe uma terceira, que pode ser chamada *rética* ou *exegética*. *Zetética* é um método [de análise] em que a partir de grandezas dadas se obtêm equações ou proporções entre as grandezas; *porística* é um método [de análise] através do qual a verdade de um teorema estabelecido é testada por meio

---

[26] O motivo que levou Viète a enveredar por este tipo de trabalhos prende-se ao facto de se encontrar nesta altura como preceptor de Catherine de Parthenay. Cf. Busard 1991, 2513

[27] De acordo com Boyer (1989, 342) e Itard (1977, 14), o nome "arte analítica" dado por Viète ao seu trabalho ficou a dever-se não só ao tipo de raciocínio usado na sua álgebra (cf. Boyer 1989, 342), mas também pelo facto do nome árabe álgebra «(...) lhe ter parecido um pouco bárbaro.» (Itard 1977, 14).

[28] Segundo Busard (1991, 2514), o livro VII da *Colecção Matemática* de Papo e a *Aritmética* de Diofanto foram as duas principais fontes gregas nas quais Viète se baseou para identificar a análise grega com a nova álgebra.

de uma equação ou proporção; *exegética* é um método [de análise] através do qual se obtém um termo desconhecido a partir de uma equação ou proporção dada. Por esta razão toda a arte analítica reivindica para si estas três funções e pode ser chamada a ciência da correcta descoberta nas matemáticas. (Witmer 1983, 11-12)

Segundo Mahoney (1973, 34), o que é de surpreender nesta passagem não é tanto a semelhança com a apresentação clássica da análise de Papo[29], mas sim o encontrar-se num tratado de álgebra sendo, portanto, Viète um dos primeiros a tentar identificar a análise grega com a álgebra. Ainda para este mesmo autor, a ideia desta identificação por parte de Viète pode ter sido retirada dos vários trabalhos do pedagogo francês Petrus Ramus (1505-1572).

De facto, apesar de ter adoptado os termos *zetética*[30] e *porística* a partir do *Campo da Análise* de Papo, em que este dividia a análise em teorética e problemática[31], Viète alterou o significado desses dois termos e ainda introduziu um outro – *exegética*[32]. De acordo com Viète, os três são métodos de análise, sendo que *zetética* é um método pelo qual se transforma um problema numa equação ou proporção, ligando grandezas desconhecidas com grandezas conhecidas; *porística* é um processo de verificação de um teorema estabelecido; *exegética* é um método a partir do qual a grandeza procurada é determinada a partir de uma equação ou proporção estabelecida por *zetética* (cf. Busard 1991, 2514). Deste modo este terceiro tipo de análise, mais do que os dois primeiros, permitia encontrar o valor desconhecido (a *cosa*) de uma dada equação (cf. Katz 1993, 339). Portanto, «(...) não era inteiramente

---

[29] Esta apresentação está contida na passagem que abre o livro VII da *Colecção Matemática* de Papo. Cf. Mahoney 1973, 34

[30] Proveniente da palavra grega *ζητέιν*, significando procura (pesquisa). Cf. Cooke 1997, 314

[31] Para Papo, teorética é a análise que se aplica na descoberta de teoremas, isto é, «(...) cujo objectivo é procurar a verdade [*ζητητικὸν*].» (Witmer 1983, 11); problemática é a análise que se aplica na construção de problemas, isto é, «(...) cujo objectivo é construir alguma coisa que se pretende encontrar [*ποριστικὸν*].» (Witmer 1983, 11).

[32] Proveniente da palavra grega *ἐξηγέομαι*, significando indicar ou mostrar o caminho (cf. Waerden 1985, 63). Segundo Busard (1991, 2514), por vezes Viète usava também a palavra *rética*. Para este autor, o uso dos termos *rética* ou *exegética* estava relacionado com as grandezas que se estariam a utilizar; se grandezas numéricas usar-se-ía o termo *rética*, se grandezas geométricas então o termo usado seria *exegética*.

surpresa que Viète tentasse identificar a análise grega com a álgebra.» (Katz 1993, 339). Assim, com a divisão da análise em *zetética*, *porística* e *exegética*, e a subsequente identificação análise/álgebra, Viète proveu a sua arte analítica com as ferramentas que lhe permitiam a correcta descoberta em matemática: o seu objectivo (cf. Peyroux 1990, 17). Viète voltou a realçar esta sua intenção no final da *Introdução*:

> Finalmente, a arte analítica, dotada com as três formas de análise: a *zetética*, a *porística* e a *exegética*, reclama para si o maior problema de todos, que é resolver todos os problemas. (Peyroux 1990, 33)

Torna-se claro que o objectivo de Viète é, através da sua arte analítica, não deixar nenhum problema insolúvel. Contudo, Viète necessitava de uma simbologia que facilitasse a abordagem a todo o tipo de problemas. Desta forma, na *Introdução à Arte Analítica*, apresentou uma das suas mais importantes contribuições para a álgebra: uma nova forma de simbolismo (cf. Katz 1993, 340).

Grandezas conhecidas e desconhecidas

Desde os primórdios do seu uso na Mesopotâmia que a álgebra constituía uma forma sofisticada de resolução de problemas aritméticos. Ela baseava-se nas quatro operações aritméticas – adição, subtracção, multiplicação e divisão – no cálculo de potências e na extracção de raízes, e dirigia-se apenas à resolução de problemas envolvendo quantidades numéricas, sem qualquer tentativa de generalização (cf. Mahoney 1973, 34).

Com a descoberta das soluções gerais das equações cúbicas e quárticas, obtidas por meio de cálculos algébricos em vez de intersecção de cónicas, surgiu uma certa confiança no uso das operações algébricas para a resolução de problemas, independentemente do seu significado geométrico, o que originou o consequente desenvolvimento de uma teoria elementar das equações (cf. Boyer 1956, 57). Certas relações simples entre as raízes de uma equação e os seus coeficientes eram já conhecidas, mas a sua generalização requeria a formalização das quantidades algébricas e das operações executadas (cf. Boyer 1956, 57). Assim, uma generalização pressupunha a libertação do tratamento dos casos especiais de equações, o que só foi possível com o desenvolvimento de símbolos e abreviaturas para quantidades desconhecidas (incógnitas e potências de incógnitas) como para operações e relações (cf. Boyer 1989, 341). A ideia de representar quantidades por letras não era inteiramente nova, já que se encontrava presente entre hindus e gregos, e mesmo entre alguns algebristas do século XVI, nomeadamente Bombelli e Bonasoni (cf. Boyer 1956, 57-58). Mas «(...) não existia um modo de distinguir grandezas assumidas como conhecidas das quantidades que se pretendiam encontrar.» (Boyer 1989, 341). Este é um dos pontos em que Viète é inovador[33], ao introduzir uma «(...) convenção tão simples como proveitosa.» (Boyer 1989, 341) na sua *Introdução*:

> De modo a assistir este trabalho, ajudar a uma certa arte, termos dados são distinguíveis dos termos desconhecidos por constantes gerais e símbolos reconhecíveis, como por exemplo, designando grandezas desconhecidas pelas letras *A* e as outras vogais *E*, *I*, *O*, *U* e *Y* e termos dados pelas letras *B*, *G*, *D* e as outras consoantes. (Witmer 1983, 24)

Este novo sistema de notação[34] (simbolismo literal) tornou possível divorciar a álgebra de um estilo de exposição enraizado em exemplos e algoritmos verbais, permitindo assim tratar um dado problema de uma forma geral (cf. Mahoney 1973, 35).

É no entanto de referir que, nos seus exemplos numéricos, Viète não utilizava as vogais para denotar as quantidades desconhecidas. Em seu lugar encontra-se tanto a letra N, a primeira letra da palavra latina *numerus* (número), como as consoantes iniciais das palavras que designavam as potências de

---

[33] Boyer refere que «Bonasoni também usou letras para representar tanto quantidades conhecidas como desconhecidas, o que representa uma importante antecipação à notação inovadora de Viète. Mas o seu trabalho nunca foi publicado e por essa razão a sua influência é questionável.» (Boyer 1956, 58-59).

[34] Esta convenção difere da que viria a ser proposta por Descartes, em que as últimas letras do alfabeto (*x*, *y*, *z*, ...) são usadas para representar grandezas desconhecidas enquanto as primeiras letras do alfabeto (*a*, *b*, *c*, ...) representam grandezas conhecidas.

grandezas desconhecidas (cf. Scott 1958, 101). Assim, como exemplo, as expressões $x^2 + 8x$ e $84x - x^3$ eram representadas por Viète, respectivamente, do seguinte modo: $1Q + 8N$ e $84N - 1C$ (cf. Viète 1970, 103).

Segundo Boyer (1989, 341), encontra-se pela primeira vez, nesta convenção dada por Viète, uma clara distinção entre o conceito de parâmetro e a ideia de uma quantidade desconhecida (incógnita). Na verdade, ao representar quantidades conhecidas ou dadas por consoantes e quantidades desconhecidas por vogais, Viète preparou o caminho para a distinção de três tipos de grandezas na álgebra: números dados, parâmetros e variáveis (cf. Boyer 1956, 59). Contudo, Viète não falou de parâmetros ou variáveis e a sua notação vogal/consoante tinha como objectivo a distinção entre o que era tomado como desconhecido e o que era dado como conhecido, e não a distinção entre grandezas variáveis e fixas (cf. Boyer 1956, 59-60).

A interpretação das vogais como variáveis surgiu só mais tarde, segundo Boyer (1956, 60), quando essas foram aplicadas a representações gráficas de equações indeterminadas. Para este autor, em Viète as vogais eram interpretadas como grandezas desconhecidas fixas e não como variáveis no sentido de símbolos representando qualquer valor de uma classe de quantidades, embora esta interpretação das vogais como variáveis tenha sido uma natural consequência da notação literal de Viète.

A logística especiosa de Viète

Como se referiu, Viète não foi o primeiro a representar quantidades por letras e, de igual modo, não foi o primeiro a usar símbolos em equações[35]. Parece, no entanto, que Viète criou a prática do uso de letras como coeficientes de termos numa equação (cf. Boyer 1956, 60), libertando assim a álgebra da necessidade de lidar com exemplos particulares que envolviam coeficientes numéricos específicos. Esta «(...) libertação da álgebra (...)» (Mahoney 1973, 35) teve consequências de longo alcance, que tornaram

[35] Vestígios de álgebra literal são encontrados nos trabalhos de Bombelli. Cf. Boyer 1956, 59-60

possível a construção de uma teoria geral das equações (cf. Boyer 1956, 60). Assim, a eliminação de coeficientes numéricos específicos numa equação permitiu que na resolução da mesma se tomasse atenção, não só à solução, mas também aos métodos de resolução e à estrutura da própria equação (cf. Mahoney 1973, 35).

A tomada em consideração dos métodos de resolução possibilitou examinar o modo como esses processos podiam ser aplicados a outras quantidades (não só numéricas), alargando, deste modo, a resolução de equações a outro tipo de problemas, por exemplo, problemas envolvendo segmentos de recta, ângulos, etc. (cf. Mahoney 1973, 36). Para isso era necessário que as operações fossem definidas de uma forma apropriada. De facto,

> (...) através do seu simbolismo literal, a arte analítica de Viète sugeriu a sua aplicabilidade a problemas envolvendo qualquer tipo de objectos nos quais se poderia definir a soma, a diferença, o produto, o quociente, a potência e a raiz. (Mahoney 1973, 36)

A arte analítica de Viète contrastava, assim, com a vulgar *logistice numerosa* (*logística numérica*), constituindo, portanto, uma nova logística que Viète designou por *logistice speciosa* (*logística especiosa*). Enquanto que a primeira[36] utilizava números, a *logística especiosa* utilizava símbolos ou sinais para coisas (espécies), como, por exemplo, letras do alfabeto (cf. Peyroux 1990, 21). É de notar que estes símbolos representavam tanto grandezas geométricas como numéricas (cf. Itard 1977, 245), o que levou Viète a considerar que

> (...) a *logística especiosa*, recentemente descoberta, é de longe mais frutífera e poderosa que a *logística numérica*. (Witmer 1983, 13)

---

[36] Segundo Struik (1997, 108), a *logística numérica* era a arte de cálculo, distinta da aritmética. Para este autor, os matemáticos gregos faziam esta distinção, ao considerar a aritmética como a ciência dos números e a logística como um cálculo matemático.

Assim, no capítulo IV da sua *Introdução*, Viète definiu as regras da *logística especiosa*, isto é, o modo de calcular com espécies. Explicou, portanto, como somar duas coisas, subtrair uma à outra, multiplicar ambas e dividir uma pela outra. Para a adição e subtracção, Viète adoptou os símbolos $+$ e $-$ [37], respectivamente. Na multiplicação usou, geralmente, a palavra *in*, embora para a divisão usasse o traço de fracção (cf. Boyer 1989, 341). Já as raízes quadradas eram escritas usando tanto o símbolo L[38] (o que acontece na proposição 47 das *Notas Preliminares*) como o próprio símbolo $\surd$. As raízes de índice superior eram representadas por L ou $\surd$ seguido, respectivamente, das consoantes iniciais dos índices. Mediante esta notação, $\sqrt{64}$ na escrita de Viète seria $L\ 64$ ou $\surd 64$ e $\sqrt[3]{64}$ seria $LC\ 64$ (cf. Katz 1993, 341) ou $\surd C.\ 64$ (cf. Viète 1970, 56).

Apesar de existir algum simbolismo no seu trabalho, para representar a igualdade Viète não usou um símbolo mas uma palavra resultante da conjugação na voz passiva do verbo latino *æquo, -as, -are, -avi, atum*[39].

Por outro lado, a ausência de coeficientes numéricos específicos numa equação permite a percepção da estrutura da própria equação. De facto, ao resolver equações simbolicamente, a estrutura de uma equação tornou-se mais evidente, pois, em vez de, por exemplo, substituir $5 + 3$ por 8, pode trabalhar-se com a expressão $B + D$ até ao final da resolução da equação dada, permitindo observar as relações entre as soluções e as constantes iniciais (cf. Boyer 1956, 54), isto é, entre as raízes de uma equação e os seus coeficientes (cf. Mahoney 1973, 36). Na verdade, Viète descobriu algumas relações entre raízes e coeficientes de uma equação, embora não se sentisse à vontade com as raízes e coeficientes negativos[40] (cf. Boyer 1989, 342).

Deste modo, a arte analítica de Viète não só deu importância ao processo de encontrar a solução (método de resolução), mas também

---

[37] A introdução dos símbolos + e – parece ter origem germânica. A aritmética alemã, *Rechnung uff allen Kauffmanschafften*, de Johann Widmann, publicada em 1489 em Leipzig, é o primeiro livro impresso conhecido no qual estes símbolos foram encontrados. Cf. Boyer 1989, 314 e Cajori 1991, 139

[38] Proveniente da palavra latina *latus* (lado). Cf. Katz 1993, 341

[39] Ao longo deste trabalho, será substituído pela conjugação da expressão "ser igual a".

[40] É de notar que Viète não trabalhava com números negativos.

proporcionou e incentivou a investigação da estrutura da própria equação a ser resolvida (cf. Mahoney 1973, 36). Para Mahoney (1973, 36), a arte analítica foi a maior contribuição de Viète no desenvolvimento da álgebra, já que se tornou a primeira teoria conscientemente articulada das equações. Segundo este mesmo autor, este novo interesse pela teoria das equações reflectiu-se no percurso da álgebra dos séculos XVI e XVII.

Princípio da homogeneidade

Os séculos XVI e XVII são marcados pelo interesse e recuperação dos problemas clássicos e pelo avanço notável da álgebra, quer a nível da simplificação dos processos aritméticos quer a nível da simbologia (cf. Boyer 1956, 62). Um dos motores deste desenvolvimento da álgebra foi a procura de uma «estrada real» para a geometria através do uso de técnicas algébricas, ou seja, a tentativa de resolução de problemas geométricos através da aplicação da álgebra – algebrização da geometria (cf. Boyer 1956, 62).

Viète aplicou sistematicamente a álgebra na resolução de problemas geométricos (cf. Boyer 1956, 61). Esta associação da geometria à álgebra levou Viète a manter-se fiel ao princípio grego da homogeneidade (cf. Struik 1997, 151). Ao adoptar a interpretação clássica grega sobre as quatro operações básicas no universo da geometria, Viète confrontou-se com um elemento estranho à álgebra numérica: a dimensão (cf. Mahoney 1973, 41).

A geometria grega operava com grandezas de diferentes dimensões. Para os gregos um ponto não tinha dimensão, uma linha tinha dimensão um, uma figura plana tinha dimensão dois e um sólido dimensão três. As operações de adição e subtracção tinham significado desde que entre grandezas com a mesma dimensão (grandezas homogéneas), sendo o resultado homogéneo com os operandos. Eram possíveis, por exemplo, a adição (e subtracção) de segmentos de recta com segmentos de recta, de áreas com áreas e de volumes com volumes (cf. Struik 1997, 151). Já a multiplicação era possível com grandezas de diferentes dimensões, sendo o resultado produzido uma grandeza de dimensão diferente. Por exemplo, o produto de dois segmentos de recta era uma figura plana e o produto de um segmento de recta por uma figura plana era um sólido.

Viète reconheceu assim o aspecto dimensional das operações quando interpretadas geometricamente (cf. Mahoney 1973, 41), considerando a lei dos termos homogéneos como

> A primeira e perpétua lei das equações ou proporções [em que] (...) termos homogéneos têm de ser comparados com termos homogéneos. (Peyroux 1990, 19)

Pelo princípio da homogeneidade, o resultado da adição e subtracção de grandezas homogéneas ainda era, para Viète, uma grandeza homogénea às primeiras, o produto de duas quaisquer grandezas era heterogéneo a ambas e o quociente de grandezas era heterogéneo ao dividendo[41].

De acordo com os dados de certo problema, grandezas dadas ou procuradas eram combinadas numa equação, através da adição, subtracção, multiplicação e divisão, obedecendo sempre à lei dos termos homogéneos (cf. Peyroux 1990, 27). Para Viète, toda a equação tinha de ser homogénea em termos de variáveis e coeficientes, uma vez que as grandezas conhecidas e desconhecidas, numa dada expressão, possuíam dimensão geométrica (cf. Boyer 1956, 61). Consequentemente, todas as equações da arte analítica de Viète possuíam dimensão, que estava relacionada com o grau da equação. Por exemplo, a resolução de uma equação cúbica correspondia à construção de um sólido no espaço de três dimensões (cf. Mahoney 1973, 42).

Segundo Boyer (1956, 42), na própria terminologia de Viète para quantidades conhecidas e desconhecidas se vê a ligação entre as operações algébricas e a visualização geométrica. De facto, no capítulo III da *Introdução à Arte Analítica*, Viète designou as potências de grandezas desconhecidas[42] (para Viète termos escalares[43]) por *latus* ou *radix*[44], *quadratum*[45], *cubus*,

---

[41] Segundo Viète, muita da obscuridade até aí verificada ter-se-ia ficado a dever ao facto de não se terem seguido estas regras. Cf. Peyroux 1990, 19

[42] Como se verá à frente, Viète usou palavras para representar os expoentes, não seguindo, portanto, a notação de Chuquet e Bombelli. Cf. Katz 1993, 340

[43] «Grandezas que sobem e descem proporcionalmente de acordo com a sua natureza de um género para outro (...)» (Witmer 1983, 16), isto é, grandezas proporcionais contínuas.

quadrato-quadratum[46], *quadrato-cubus*, *cubo-cubus*, *quadrato-quadrato-cubus*, *quadrato-cubo-cubus*, *cubo-cubo-cubus*, etc.[47] (cf. Viète 1970, 3). Seguidamente, e de modo a poder aplicar o princípio da homogeneidade, Viète definiu os géneros das grandezas conhecidas (para Viète grandezas de comparação[48]) enunciando-os pela mesma ordem dos termos escalares: *longitudo* ou *latitudo*[49], *planum*, *solidum*, *plano-planum*, *plano-solidum*, *solido-solidum*, *plano-plano-solidum*, *plano-solido-solidum*, *solido-solido-solidum*, etc. (cf. Viète 1970, 3). Assim, através destas definições, a equação

$$x^2 + bx = c$$

na escrita de Viète seria da forma

A quad. + *A in B* é igual a *C planum.*

Contudo, Viète nem sempre seguiu coerentemente esta terminologia. Por exemplo, em *Zetéticas* II, 11 *A planum* designa uma incógnita bidimensional e em *Zetéticas* II, 17 há uma grandeza conhecida denotada por *B cubus*.

---

44 *Lado* ou *raiz*, sendo consideradas por Viète as primeiras das grandezas escalares (cf. Peyroux 1990, 19). Viète usou mais o termo *lado* do que *raiz*. Segundo Witmer (1983, 30), embora Viète tenha definido o termo *raiz* como sinónimo de *lado*, por vezes usava o termo *raiz* para denotar a menor potência de uma sequência de potências. Por exemplo, na sequência x^3, x^6, x^9, etc., x^3 seria a *raiz*.

45 Viète usou frequentemente *quad.* e mesmo *q.* em vez de *quadratum*.

46 Viète usou frequentemente *quad.-quad.* e mesmo *qq.* em vez de *quadrato-quadratum*.

47 Em notação actual, respectivamente x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, x^8, x^9, etc., sendo x uma incógnita. De facto, são grandezas proporcionais contínuas.

48 Do latim *magnitudinum comparatorum*, embora muitas vezes referido por Viète como *homogeneum comparationis* (*homogéneos de comparação*). Segundo Witmer (1983, 16), em ambos os casos significava os termos com os quais a variável (valor desconhecido) era equacionada ou comparada. É de referir, de acordo com Klein (1968, 325-326), que estas grandezas de comparação não eram simplesmente grandezas do tipo *B*, *C planum*, *D solidum*, etc., mas poderiam ser também produto de uma grandeza conhecida por uma desconhecida. Por exemplo, o produto de *B* por *A quad.* era um *sólido* e, portanto, podia ser equacionado ou comparado com *A cubus*.

49 *Comprimento* ou *largura*, sendo consideradas por Viète as primeiras das grandezas de comparação. Cf. Peyroux 1990, 19

Regras da logística especiosa

Observando a sequência dos termos escalares e das grandezas de comparação e o princípio da homogeneidade, Viète pôde definir as regras básicas para a sua *logística especiosa*, o que fez, como já foi referido, no capítulo IV da *Introdução.*

Assim, dadas duas grandezas homogéneas A e B, Viète representou a sua soma por $A + B$ se A e B fossem comprimentos ou larguras. Mas a soma de termos homogéneos mais elevados nas sequências expostas anteriormente era representada na forma A *quadratum* $+ B$ *planum*, ou A *cubus* $+ B$ *solidum*, e assim sucessivamente. Por outro lado, se A era um comprimento ou largura maior que B, a diferença entre a maior e a menor era representada por $A - B$. A diferença de termos mais elevados nas sequências expostas anteriormente seria representada por A *quadratum* $- B$ *planum*, ou A *cubus* $- B$ *solidum*, e assim sucessivamente. Viète considerou ainda que, se o subtractivo fosse afectado[50], esta operação não seria diferente

> (...) visto que o todo e a parte não devem ser pensados como submetidos a diferentes regras. (Peyroux 1990, 23)

Deste modo, se $B + D$ fosse subtraído a A, $A - B - D$ seria a parte restante, em que B e D eram subtraídos individualmente a A. Mas, se $B - D$ fosse subtraído a A, a parte restante seria $A - B + D$

> (...) visto que subtraindo a grandeza B a A, retira-se a grandeza D, que se compensa somando D a A. (Peyroux 1990, 23)

Viète terminou a exposição das regras da subtracção, introduzindo o símbolo $=$, que era utilizado quando não se sabia qual era a maior das grandezas dadas. Portanto, dadas as grandezas A *quadratum* e B *planum*, em que não se sabia qual era a maior, a diferença entre ambas seria representada indiferentemente por A *quadratum* $= B$ *planum*, ou por B *planum* $= A$ *quadratum*. Viète possuía assim dois símbolos para a operação subtracção: usava o

[50] Isto é, se o subtractivo fosse a soma ou a diferença de termos homogéneos.

símbolo – quando não havia dúvida de qual era a maior das grandezas e o sinal = quando ignorava qual das grandezas era a maior.

O produto dos comprimentos A e B era representado por A *in* B, enquanto que para termos mais elevados na escala Viète considerava a designação própria dos termos *escalares* ou da sua natureza correspondente; por exemplo:

A quadratum in B, ou *A quadratum in B planum*, ou *A quadratum in B solidum*, etc..

Viète referiu ainda que a multiplicação não era diferente se as grandezas a serem multiplicadas tivessem dois ou mais termos

> (...) visto que o todo é igual à soma das suas partes e, portanto, o produto das partes de qualquer grandeza é igual ao produto do todo. (Peyroux 1990, 24)

Com efeito, na notação actual, Viète considerava as seguintes propriedades da multiplicação:

$$a \times (b+c) = a \times b + a \times c \text{ e } (a+b) \times (c+d) = a \times c + b \times c + a \times d + b \times d \, .$$

Viète também observou que se um termo positivo de uma quantidade fosse multiplicado por um termo positivo de outra quantidade, o produto era positivo. Caso fosse multiplicado por um termo negativo, o resultado seria negativo, porque se multiplicasse A por $B - D$ e se tivesse o produto A por $-D$ positivo então a soma do produto de A por B com o produto de A por $-D$ seria maior que o produto de A por $B - D$ (pois $B - D$ é uma quantidade menor que B) o que era absurdo pelo modo como se definiu o produto da grandeza A pela grandeza $B - D$. Como consequência desta regra, a multiplicação de uma quantidade negativa por uma quantidade negativa seria positiva. A prova dada por Viète para este facto baseou-se no produto de $A - B$ por $D - G$, visto que

> O produto de A por $-G$ é negativo mas isto subtrai demasiado [ao produto A por D], porque A não é a grandeza exacta a ser multiplicada. Igualmente o produto de $-B$ por D é negativo o que subtrai demasiado [ao produto A por D] porque D não é a grandeza exacta a ser multiplicada. O produto $-B$ por $-G$ em falta tem de ser, portanto, positivo. (Witmer 1983, 20)

Viète terminou as regras para esta operação, definindo as denominações dos produtos entre grandezas escalares[51]:

Latus in se facit quadratum[52];
Latus in quadratum facit cubum;
Latus in cubum facit quadrato-quadratum;
Latus in quadrato-quadratum facit quadrato-cubum;
Latus in quadrato-cubum facit cubo-cubum;
etc..

E comutativamente:

Quadratum in latus facit cubum;
Cubus in latus facit quadrato-quadratum;
etc..

Também:

Quadratum in se facit quadrato-quadratum;
Quadratum in cubum facit quadrato-cubum;
Quadratum in quadrato-quadratum facit cubo-cubum;
etc., e comutativamente.

Analogamente para as ordens seguintes.

As denominações para o produto entre grandezas de comparação eram:

Latitudo in longitudinem facit planum[53];
Latitudo in planum facit solidum;
Latitudo in solidum facit plano-planum;
Latitudo in plano-planum facit plano-solidum;

---

[51] Cf. Viète 1970, 6

[52] Isto é, o *lado* por si [próprio] faz o *quadrado*.

[53] Isto é, a *largura* pelo *comprimento* faz o *plano*.

Latitudo in plano-solidum facit solido-solidum;
etc., e comutativamente.

Também:

Planum in planum facit plano-planum;
Planum in solidum facit plano-solidum;
Planum in plano-planum facit solido-solidum;
etc., e comutativamente.

Analogamente para as ordens seguintes.

Viète considerava a divisão de termos mais elevados por termos mais baixos, isto é, a divisão de grandezas de géneros diferentes; portanto, as grandezas dividendo e divisora eram heterogéneas (cf. Peyroux 1990, 25). Considerando A um comprimento e B um plano, Viète representou a divisão de $B\ planum$ por A como $\frac{B\ planum}{A}$ denotando este símbolo um comprimento. A divisão de $B\ cubus$ por $A\ planum$, $\frac{B\ cubus}{A\ planum}$, representaria também um comprimento. No entanto, a divisão de $B\ cubus$ por A, $\frac{B\ cubus}{A}$, representaria um plano.

Viète referiu ainda que a divisão não era diferente se as grandezas fossem binomiais ou polinomiais. Na notação actual, Viète referia-se a $\frac{a+c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b}$ ou, por exemplo, $\frac{a+c+d}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b} + \frac{d}{b}$.

Viète terminou as regras para esta operação definindo as denominações dos quocientes entre grandezas escalares[54]:

Quadratum adplicatum lateri restituit latus[55];
Cubus adplicatus lateri restituit quadratum;

---

[54] Cf. Viète 1970, 7

[55] Isto é, o *quadrado* aplicado ao *lado* restitui o *lado*.

Quadrato-quadratum adplicatum lateri restituit cubum;
Quadrato-cubus adplicatus lateri restituit quadrato-quadratum;
Cubo-cubus adplicatus lateri restituit quadrato-cubum;
etc..

Reciprocamente,

Cubus adplicatus quadrato restituit latus;
Quadrato-quadratum adplicatum cubo restituit latus;
etc..

Também:
Quadrato-quadratum adplicatum quadrato restituit quadratum;
Quadrato-cubus adplicatus quadrato restituit cubum;
Cubo-cubus adplicatus quadrato restituit quadrato-quadratum;
etc., e reciprocamente.

Analogamente para as ordens seguintes.

As denominações para quocientes entre as grandezas de comparação eram:

Planum adplicatum latitudini restituit longitudinem[56];
Solidum adplicatum latitudini restituit planum;
Plano-planum adplicatum latitudini restituit solidum;
Plano-solidum adplicatum latitudini restituit plano-planum;
Solido-solidum adplicatum latitudini restituit plano-solidum;
etc., e reciprocamente.

Também definiu,
Plano-planum adplicatum plano restituit planum;
Plano-solidum adplicatum plano restituit solidum;
Solido-solidum adplicatum plano restituit plano-planum;

---

[56] Isto é, o *plano* aplicado à *largura* restitui o *comprimento*.

etc., e reciprocamente.

Analogamente para as ordens seguintes.

É de notar que Viète colocou a questão da divisão em termos de aplicações de áreas e volumes.

Viète findou a explicação das regras da *logística especiosa*, observando que o quociente se mantém inalterado quando o dividendo e o divisor são multiplicados pela mesma grandeza. De facto,

> (...) a divisão inverte o resultado da multiplicação, assim, [por exemplo], $\frac{B\ in\ A}{B}$ é igual a A e $\frac{B\,in\,A\,planum}{B}$ é igual a $A\,planum$. (Peyroux 1990,26)

Deste modo Viète considerou que, no caso da adição, pretendendo-se adicionar Z a $\frac{A\ planum}{B}$, a soma seria $\frac{A\ planum + Z\ in\ B}{B}$, porque, pelo que se viu anteriormente,

$$Z \text{ era igual a } \frac{Z\ in\ B}{B}$$

e

$$\frac{A\ planum}{B} + \frac{Z\ in\ B}{B} \text{ era igual a } \frac{A\,planum + Z\,in\,B}{B}.$$

Pelo mesmo processo, a soma de $\frac{A\ planum}{B}$ com $\frac{Z\ quadratum}{G}$ seria $\frac{G\ in\ A\ planum + B\ in\ Z\ quadratum}{B\ in\ G}$.

Na subtracção, ter-se-ia de igual modo que

$$\frac{A\ planum}{B} - Z \text{ era igual a } \frac{A\,planum - Z\,in\,B}{B}$$

e que

$$\frac{A\ planum}{B} - \frac{Z\ quadratum}{G} \text{ era igual a } \frac{A\ planum\ in\ G - Z\ quadratum\ in\ B}{B\ in\ G}.$$

No caso da multiplicação, o produto de $\frac{A\ planum}{B}$ por Z seria $\frac{A\ planum\ in\ Z}{B}$, visto que $\frac{A\ planum}{B}\ in\ Z$ é o mesmo que $\frac{A\ planum}{B} + \frac{A\ planum}{B} + \ldots + \frac{A\ planum}{B}$ (Z vezes) que é igual a $\frac{A\ planum + A\ planum + \ldots + A\ planum}{B}$, ou seja, $\frac{A\ planum\ in\ Z}{B}$. Viète observou também que o produto de $\frac{A\ planum}{B}$ por $\frac{Z\ quadratum}{G}$ seria $\frac{A\ planum\ in\ Z\ quadratum}{B\ in\ G}$.

No caso da divisão, o quociente de $\frac{A\ cubus}{B}$ por D seria igual a $\frac{A\ cubus}{B\ in\ D}$. Viète mostrou isso multiplicando as grandezas $\frac{A\ cubus}{B}$ e D por B o que, como se viu, não alterava o quociente. Assim, o quociente pretendido resultaria da divisão de $A\ cubus$ por $B\ in\ D$, isto é, $\frac{A\ cubus}{B\ in\ D}$. Por igual processo, Viète concluiu que o quociente de $B\ in\ G$ por $\frac{A\ planum}{D}$ seria igual a $\frac{B\ in\ G\ in\ D}{A\ planum}$ e o quociente de $\frac{B\ cubus}{Z}$ por $\frac{A\ cubus}{D\ planum}$ seria $\frac{B\ cubus\ in\ D\ planum}{Z\ in\ A\ cubus}$.

Potências puras e afectadas

Ainda no capítulo III da *Introdução à Arte Analítica*, Viète definiu potência como sendo o maior termo escalar, numa sequência de termos escalares, a contar a partir da raiz. Deste modo, os outros termos escalares eram indicados como termos de menor ordem[57]. Considerou ainda que uma potência era pura quando não estava afectada, estando afectada quando estava associada por adição ou subtracção com termos homogéneos que eram produto de um termo de menor ordem por um coeficiente[58]. Assim, para Viète, uma potência era pura se era uma *radix*, um *quadratum*, um *cubus*, um *quadrato-quadratum*, um *quadrato-cubus*, um *cubo-cubus, etc.*; e era verdadeiramente afectada

no segundo grau, se era

a soma de um quadrado com um plano obtido do produto do lado por um comprimento ou largura[59];

no terceiro grau, se era

a soma de um cubo com um sólido obtido do produto do quadrado por um comprimento ou largura[60];

a soma de um cubo com um sólido obtido do produto do lado por um plano[61];

a soma de um cubo com um duplo sólido, um obtido do produto do quadrado por um comprimento ou largura, o outro obtido do produto do lado por um plano[62].

no quarto grau, se era

a soma de um quadrado-quadrado com um plano-plano obtido do produto do cubo por um comprimento ou largura[63];

---

[57] Em latim, *gradus parodici ad potestatem.* Cf. Witmer 1983,17

[58] Viète definiu coeficiente (em latim *subgraduales*) como um termo suplementar cujo produto por um termo de menor ordem (termo escalar) era homogéneo com a potência que afectava (cf. Witmer 1983, 17). É ainda de referir que Viète usava a mesma terminologia das grandezas de comparação para os coeficientes (cf. Witmer 1983, 16). Por exemplo, em $x^4 + cx^2$, c é um coeficiente pois x^2 na expressão é um termo de menor grau que x^4 e, de acordo com Viète c é uma grandeza plana: "*C planum*".

[59] Em notação actual, $x^2 + ax$.

[60] Em notação actual, $x^3 + ax^2$.

[61] Em notação actual, $x^3 + bx$, em que b corresponde na terminologia de Viète a uma grandeza plana.

[62] Em notação actual, $x^3 + ax^2 + bx$, em que b corresponde na terminologia de Viète a uma grandeza plana.

[63] Em notação actual, $x^4 + ax^3$.

a soma de um quadrado-quadrado com um plano-plano obtido do produto de um quadrado por um plano[64];

a soma de um quadrado-quadrado com um plano-plano obtido do produto do lado por um sólido[65];

a soma de um quadrado-quadrado com um duplo plano-plano, um obtido do produto do cubo por um comprimento ou largura, o outro obtido do produto do quadrado por um plano[66];

a soma de um quadrado-quadrado com um duplo plano-plano, um obtido do produto do cubo por um comprimento ou largura, o outro obtido do produto do lado por um sólido[67];

a soma de um quadrado-quadrado com um duplo plano-plano, um obtido do produto do quadrado por um plano, o outro obtido do produto do lado por um sólido[68];

a soma de um quadrado-quadrado com um triplo plano-plano, o primeiro obtido do produto do cubo por um comprimento ou largura, o segundo obtido do produto do quadrado por um plano e o terceiro obtido do produto do lado por um sólido[69].

Através do mesmo método, Viète conseguia encontrar as potências afectadas nos restantes graus (cf. Peyroux 1990, 20).

É de notar que o termo independente não aparece nestas expressões algébricas definidas por Viète. Por exemplo, no quarto grau, Viète considera expressões do tipo $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$, onde a, b, c podem ser zero e não do tipo $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $d \neq 0$. Isto prende-se com o facto do termo independente não ser produto de um termo de menor ordem por um coeficiente.

[64] Em notação actual, $x^4 + bx^2$, em que b corresponde na terminologia de Viète a uma grandeza plana.

[65] Em notação actual, $x^4 + cx$, em que c corresponde na terminologia de Viète a uma grandeza sólida.

[66] Em notação actual, $x^4 + ax^3 + bx^2$, em que b corresponde na terminologia de Viète a uma grandeza plana.

[67] Em notação actual, $x^4 + ax^3 + cx$, em que c corresponde na terminologia de Viète a uma grandeza sólida.

[68] Em notação actual, $x^4 + bx^2 + cx$, em que, respectivamente, b corresponde na terminologia de Viète a uma grandeza plana e c a uma grandeza sólida.

[69] Em notação actual, $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$, em que b corresponde na terminologia de Viète a uma grandeza plana e c a uma grandeza sólida.

Com este tipo de terminologia, Viète não hesitou em ir além da terceira dimensão (cf. Boyer 1956, 61). De facto, para ele, a arte analítica era aplicável a problemas que envolvessem equações de grau superior a três:

> Na verdade, pelo menos aos olhos de Viète, uma das belezas da arte analítica residia na capacidade de descrever tais mecanismos de modo abstracto e de revelar a sua ligação a problemas de grau superior. (Mahoney 1973, 42)

De modo a justificar a aplicabilidade da sua arte analítica a problemas de grau superior, Viète introduziu certos processos mecânicos utilizando, segundo Boyer (1956, 64), instrumentos semelhantes ao antigo *mesolábio*[70] de Eratóstenes (276-196 a.C.). Estes instrumentos eram usados para construir dois, três, quatro, etc. meios proporcionais entre dois segmentos de recta dados. Segundo Mahoney (1973, 42), é natural que Viète tenha considerado estes processos uma vez que Papo na sua *Colecção* tinha fornecido as correspondentes construções "mecânicas".

Contudo, a arte analítica apresentava algumas limitações, nomeadamente o respeito pelo princípio de homogeneidade, o que não permitiu resolver problemas que envolvessem operações entre grandezas de diferente dimensão.

Por outro lado, o interesse em resolver equações numa só incógnita e, consequentemente, reduzir problemas a equações desse tipo inibiu o estudo de certas questões, como se verificava nas que envolviam lugares geométricos. É de notar que problemas envolvendo, por exemplo, lugares geométricos no plano, além de sugerirem o uso de eixos referenciais quando expressos em simbolismos algébricos apresentam-se sob a forma de uma equação em duas incógnitas, em que uma é representada em função da outra (cf. Boyer 1959, 65). Acontece que este tipo de relações funcionais não era considerado na altura de Viète; e como, no estudo das equações, Viète se restringiu àquelas que envolviam uma única grandeza desconhecida (incógnita), compreende-se porque é que na sua aplicação da álgebra à

---

[70] Instrumento mecânico que permitia a construção dos dois meios proporcionais e que resolvia o problema da duplicação do cubo.

geometria não terá incluído problemas de lugares geométricos (cf. Boyer 1959, 64). Naturalmente que a exclusão do estudo destes problemas contribuiu, de certa forma, para que Viète não necessitasse de usar um sistema de coordenadas, sendo considerada, por Boyer (1959, 64), uma das razões pelas quais Viète não inventou a geometria analítica, embora desempenhasse um papel preparatório preponderante nessa direcção e no desenvolvimento de ideias algébricas.

De novo zetética, porística e exegética

Apesar de não ter criado nenhuma antecipação da geometria cartesiana, Viète aplicou a problemas geométricos simbolismos literais acompanhados por métodos de cálculo, transferindo portanto problemas do campo da geometria para o campo da álgebra (cf. Boyer 1956, 62). Como resultado dessas aplicações, Viète traduziu esses problemas geométricos através de equações numa incógnita, sendo as raízes destas os segmentos procurados[71]. Deste modo, os elementos da análise – *zetética*, *porística* e *exegética* – introduzidos por Viète na sua álgebra e explicitados na sua *Introdução* tomaram um papel importante na construção e resolução dessas mesmas equações.

A *zetética* constituía o guia principal da aplicação da álgebra a problemas matemáticos, ao possibilitar a tradução sob a forma de equações das afirmações verbais sobre relações aritméticas, geométricas ou trigonométricas existentes nos diversos problemas propostos (cf. Mahoney 1973, 37). De facto, através das regras sobre *zetética*, Viète construiu as equações que pretendia estudar.

Para Viète, de acordo com a natureza do que se pretendia encontrar (incógnita), isto é, tendo em atenção se o objectivo era encontrar um lado, um plano, um sólido, etc. e mediante as afirmações do problema, grandezas procuradas eram combinadas e comparadas com as grandezas dadas através das operações aritméticas atrás descritas e respeitando sempre o princípio da

---

[71] Usando a sua notação, Viète designou os segmentos geométricos desconhecidos por vogais e os segmentos conhecidos por consoantes. Cf. Boyer 1956, 62

homogeneidade (cf. Peyroux 1990, 27); uma equação era, portanto, uma comparação de grandezas desconhecidas e conhecidas (cf. Peyroux 1990, 30).

Na *Introdução*, Viète apresentou algumas regras elementares relativas a equações. Estas regras ficaram estabelecidas no capítulo V com o nome de: *Antithesis*, *Hypobibasmus* e *Parabolismus*.

Antithesis (transposição) era uma mudança de membro de termos que afectam ou são afectados, sendo a mudança efectuada com o sinal contrário da afecção. A *antithesis* correspondia ao que os algebristas árabes chamavam *al-jabr* (cf. Waerden 1985, 64). Viète afirmou que esta operação mantém uma equação inalterada, o que certamente significa que se passa a uma equação equivalente, ou seja, a uma equação que traduz o mesmo problema. Como "demonstração" desta invariância, apresentou o seguinte exemplo:

Seja $A\ quadratum - D\ planum$ igual a $G\ quadratum - B\ in\ A$.

Eu digo que

$A\ quadratum + B\ in\ A$ é igual a $G\ quadratum + D\ planum$

e a equação não se altera por esta transposição com os sinais de afectação contrários. Com efeito, uma vez que

$A\ quadratum - D\ planum$ é igual a $G\ quadratum - B\ in\ A$,

Somemos $D\ planum + B\ in\ A$ a ambos os lados da equação. Então,

$$A\ quadratum - D\ planum + D\ planum + B\ in\ A$$

é igual a

$$G\ quadratum - B\ in\ A + D\ planum + B\ in\ A.$$

A afectação negativa em cada lado da equação cancela uma positiva: de um lado [da equação] desaparece a afectação $D\ planum$, do outro [desaparece] a afectação $B\ in\ A$. Deste modo, obtém-se

$A\ quadratum + B\ in\ A$ igual a $G\ quadratum + D\ planum$. (Witmer 1983, 25)

Hypobibasmus (abaixamento de grau) era um abaixamento da potência e dos termos de menor ordem (observando a ordem da sequência dos termos escalares) até o termo de menor grau entre os termos de menor ordem se tornar um homogéneo dado ao qual os outros termos se podiam comparar. Uma equação não sofria alterações por abaixamento de grau, tendo-o Viète "demonstrado" da seguinte forma:

Seja

$$A\ cubus + B\ in\ A\ quadratum \text{ igual a } Z\ planum\ in\ A.$$

Eu digo que por abaixamento de grau

$$A\ quadratum + B\ in\ A \text{ é igual a } Z\ planum,$$

pois todos aqueles sólidos [na equação dada] foram divididos por um divisor comum [neste caso A], um processo, já estabelecido, que não altera uma equação. (Witmer 1983, 26)

O processo referido foi estabelecido por Viète no capítulo II da *Introdução*, em que ele aceitou como provadas algumas regras fundamentais das equações e proporções que eram definidas nos *Elementos* de Euclides. Entre essas regras estava a referida por Viète:

Uma equação ou proporção não é alterada quando é multiplicada ou dividida pelos mesmos factores. (Witmer 1983, 14)

Parabolismus (redução) era a divisão de todos os termos de uma equação pela grandeza que multiplicava o termo escalar de maior grau, isto é, a divisão de uma equação pelo coeficiente do termo de maior grau, correspondendo ao que os algebristas árabes chamavam *al-radd* (cf. Sesiano 1990, 103). Assim, uma equação não era alterada por redução, o que Viète "demonstrou" do seguinte modo:

Seja

$$B\ in\ A\ quadratum + D\ planum\ in\ A \text{ igual a } Z\ solidum.$$

Eu digo que, por redução,

$$A\ quadratum + \frac{D\ planum\ in\ A}{B} \text{ é igual a } \frac{Z\ solidum}{B},$$

pois todos aqueles sólidos [na equação dada] foram divididos por um divisor comum, um processo já referido que não altera uma equação. (Witmer 1983, 26-27)

Do modo como Viète definiu estas operações, observa-se que a diferença entre o emprego de *Hypobibasmus* e *Parabolismus* reside simplesmente na grandeza que divide ambos os membros de uma equação.

Enquanto que por *Hypobibasmus* esse divisor é a incógnita, por *Parabolismus* o divisor é uma grandeza dada conhecida.

Viète considerou ainda que uma equação se podia escrever sob a forma de uma proporção[72], tendo em conta o seguinte:

> (...) o produto dos extremos [da proporção] correspondia à potência mais os termos homogéneos de afecção [produto dos termos de menor ordem por coeficientes] e o produto dos meios correspondia à constante [grandeza de comparação].
> Assim a construção conveniente de uma proporção devia ser definida como uma série de três ou quatro grandezas expressas em termos, tanto puros como afectados, tais que todos fossem dados excepto aquele que era procurado, ou a sua potência e termos de menor ordem. (Witmer 1990, 27)

Para Viète, a *zetética* completava a sua tarefa quando uma equação ou proporção eram construídas.

Viète terminou o capítulo V, salientando mais uma vez a importância e a simplicidade da sua *logística especiosa*, desta vez na aplicação à *zetética*. Fê-lo notando que Diofanto terá usado *zetética* «(...) do modo mais subtil (...)» (Viète 1970, 10) na sua *Aritmética*. Uma vez que Diofanto trabalhava com a *logística numérica*, a aplicação deste método de análise à resolução de problemas tornava-se pouco evidente. Viète concluiu observando que isto contrastava com o uso da *logística especiosa*, em que a aplicação da *zetética* à resolução de problemas os tornava «(...) familiares e imediatamente óbvios.» (Viète 1970, 10).

A *porística*, como já foi referido, constituía uma forma de análise que permitia a verificação da verdade dos resultados estabelecidos por *zetética*. Assim, para Viète, devia utilizar-se o caminho da *porística* de modo a ponderar e investigar-se a verdade em questão antes de se sujeitar estes resultados às regras da síntese, que era considerado o método de demonstração por excelência (cf. Witmer 1983, 28). Viète reforçou ainda a facilidade de execução deste método de análise por se poder utilizar a sua *logística especiosa* (cf.

---

[72] É de referir o papel essencial desempenhado pela teoria das proporções na matemática até Descartes; tanto na aritmética como na geometria, tudo se exprimia na linguagem das proporções.

Peyroux 1990, 29). Deste modo, e segundo Katz (1993, 339), a *porística* era um método de exploração da verdade conjecturada através do uso de manipulações simbólicas.

A *exegética* era o novo método introduzido por Viète na sua nova definição do termo "análise". Enquanto que as duas formas de análise anteriores se concentravam mais nos processos de construção do que nas regras de resolução de uma equação, a *exegética* executava as funções de resolução de uma equação (cf. Waerden 1985, 63). Dependendo do problema em questão (numérico ou geométrico), a *exegética* operava com números ou com grandezas geométricas, por exemplo, segmentos de recta, figuras planas ou sólidos (cf. Peyroux 1990, 30).

A partir desta divisão da análise em *zetética*, *porística* e *exegética*, segundo Boyer (1956, 65), vê-se uma nova aplicação do termo "análise". Para Platão e Papo, a análise correspondia à ordem das ideias numa demonstração; indicava o caminho da investigação, sendo a síntese a própria exposição. Viète, por outro lado, ao considerar a análise dividida em *zetética*, *porística* e *exegética*, tentou identificá-las com a álgebra, já que para ele a álgebra parecia ser o instrumento apropriado para o caminho analítico da geometria (cf. Boyer 1959, 65).

Notas Preliminares

Uma parte do trabalho de Viète sobre a aplicação da álgebra à geometria encontra-se desaparecida, é o caso de *Ad Logisticem Speciosam Notæ Posteriores* (cf. Busard 1991, 2518). No entanto, o seu tratado *Ad Logisticem Speciosam Notæ Priores* (*Notas Preliminares em Logística Especiosa*) chegou até nós, tendo sido publicado postumamente em Paris por Jean de Beaugrand em 1631. Segundo Busard (1991, 2518), Viète não publicou este tratado durante a sua vida por acreditar que o manuscrito ainda não estava suficientemente preparado para a publicação.

O tratado *Notas Preliminares*, como o nome indica, é constituído por um conjunto de resultados preparatórios ao desenvolvimento do programa analítico de Viète. Isto é, contém uma série de resultados, utilizando a *logística especiosa*, que são ferramentas algébricas necessárias na elaboração dos diversos trabalhos de Viète. Talvez seja este o motivo de Viète considerar que as *Notas Preliminares* não estariam suficientemente preparadas para publicação, uma vez que poderiam existir ainda outros resultados, por si ainda não abordados, que seriam pertinentes neste tratado.

As *Notas Preliminares* são, portanto, constituídas por uma colecção de fórmulas algébricas, elementares mas gerais, que correspondem a proposições dos Livros II e IX dos *Elementos* de Euclides (cf. Busard 1991, 2518) e também por algumas proposições que combinam álgebra com geometria (cf. Busard 1991, 2519). Na verdade, estas últimas proposições, apesar de serem apresentadas sob um cariz geométrico devido à evocação de triângulos rectângulos, permitem tanto a determinação de ternos pitagóricos como a dedução de certos resultados trigonométricos, por exemplo, as fórmulas para o seno e o co-seno do ângulo duplo.

Viète iniciou este tratado construindo algebricamente o quarto proporcional entre três grandezas dadas, na proposição 1, e o terceiro, quarto, quinto, etc. proporcionais contínuos entre duas grandezas dadas, na proposição 2. Mas é na proposição 11 que se encontra um dos exemplos do esforço de generalização que só mais tarde foi alcançado. Nessa proposição, Viète aproximou-se da fórmula binomial, ao construir uma potência pura a partir de uma raiz binomial. Considerando $A + B$ a raiz binomial, o quadrado seria obtido pelo produto da raiz por si própria. Deste modo, multiplicando $A + B$ por $A + B$ e reunindo os planos individuais resultantes, obtinha-se

$$A \ quadratum + A \ in \ 2B + B \ quadratum.$$

De igual modo, o cubo de $A + B$ seria obtido pelo produto de $A + B$ pelo quadrado de $A + B$ e correspondia, depois de reunidos os sólidos individuais resultantes, a

$$A \ cubus + A \ quadratum \ in \ 3B + A \ in \ 3B \ quadratum + B \ cubus.$$

A construção de qualquer potência mais elevada seria obtida pelo mesmo processo. Viète estabeleceu os teoremas correspondentes até ao *cubo-cubus*. Facilmente se constata que Viète se encontrava perto de obter a fórmula binomial geral, o que, segundo Witmer (1983, 39-40), não aconteceu devido à notação demasiado pesada no que concerne a expoentes.

Viète ainda referiu que, se uma potência fosse construída a partir da diferença entre as raízes, todos os termos homogéneos individuais da composição do binómio seriam os mesmos, apesar de serem alternadamente positivos e negativos, começando pela potência da maior raiz quando existisse um número par de termos homogéneos, como no caso do cubo, quinta potência e todas as outras potências de ordem ímpar. No caso da ordem da potência ser par, os termos homogéneos do binómio também seriam alternadamente positivos e negativos, começando quer com a potência da maior raiz como pela potência da menor, não existindo diferença na ordem da escolha (cf. Witmer 1983, 42).

Viète observou que os termos homogéneos individuais que compunham a potência construída a partir de uma raiz binomial, tomados cada um pela sua ordem, eram proporcionais contínuos.

> Assim, são proporcionais [contínuos] a partir das duas raízes dadas *A* e *B*,
> – os três planos construídos: *A quadratum*, *A in B*, *B quadratum*;
> – os quatro sólidos construídos: *A cubus*, *A quadratum in B*, *A in B quadratum*, *B cubus*;
> – (...)
> e assim por diante. (Peyroux 1990, 43-44)

Baseado nestes resultados, Viète continuou a sua obra com o seguinte género de proposições: adicionar o quadrado da diferença entre duas raízes ao quadrado da sua soma – proposição 12; subtrair o quadrado da diferença entre duas raízes ao quadrado da sua soma – proposição 13; multiplicar a diferença entre duas raízes pela sua soma – proposição 14; estendendo-se para o caso do cubo, quarta potência, etc.. De acordo com isto, Viète estabeleceu os teoremas e corolários correspondentes, a partir dos quais se deduziam dois «(...) Teoremas universais.» (Peyroux 1990, 50) e respectivos corolários:

Teorema 1:

O produto da diferença entre duas raízes e os termos individuais homogéneos, tomados uma vez cada, que são obtidos de uma potência da soma das raízes, é igual à diferença entre a próxima potência superior [destas raízes] pelo que:

Corolário:

A diferença entre estas potências dividida pela diferença das raízes é cada um dos termos homogéneos da primeira potência inferior da soma das raízes. E reciprocamente, a diferença entre estas potências dividida pelos termos homogéneos individuais, tomados uma vez cada, obtidos da próxima potência inferior da soma destas raízes é igual à diferença entre as raízes. (Witmer 1983, 49)

Sendo a e b raízes, o teorema 1 corresponde, na notação actual, a

$$(a-b).(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n) = a^{n+1} - b^{n+1}$$

e o corolário, respectivamente, a

$$\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} = a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n \text{ e } \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n} = a-b\,.$$

Teorema 2:

O produto entre a soma de duas raízes e os termos individuais homogéneos, tomados uma vez cada, que são obtidos de uma potência da diferença entre estas raízes é igual à soma da próxima potência superior [destas raízes] se o número de termos homogéneos individuais for ímpar, ou é igual à diferença da próxima potência superior [destas raízes] se o número de termos homogéneos individuais for par, pelo que:

Corolário:

A soma ou a diferença entre as potências de duas raízes divididas pela soma das mesmas raízes é cada um dos termos homogéneos individuais da próxima potência inferior da diferença entre as raízes. (Witmer 1983, 50)

Sendo a e b raízes, o teorema 2 correspondia, na notação actual, a

$$(a+b).(a^n - a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 - \ldots + b^n) = a^{n+1} + b^{n+1}$$, se $n + 1$ é ímpar;

$$(a+b).(a^n - a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 - \ldots - b^n) = a^{n+1} - b^{n+1}$$, se $n + 1$ é par.

Corolário:

Se o número dos termos homogéneos individuais obtidos de uma potência da soma ou da diferença entre raízes for par, temos que a diferença entre as raízes está para a sua soma assim como os termos homogéneos individuais, tomados uma vez cada, que se obtêm da potência da diferença entre as raízes está para os termos individuais homogéneos, tomados uma vez cada, que se obtêm da [mesma] potência da soma dessas raízes. (Witmer 1983, 50)

Sendo a e b raízes e n ímpar, tem-se, na notação actual, que

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{a^n - a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 - \ldots - b^n}{a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n},$$

o que facilmente se prova multiplicando os extremos e os meios da proporção e obtendo, em ambos os casos, $a^{n+1} - b^{n+1}$.

Os capítulos seguintes das *Notas Preliminares* são dedicados à construção de potências afectadas positiva ou negativamente. Por exemplo, à construção, a partir de uma raiz binomial: de um quadrado afectado pela adição de um plano baseado na primeira potência da raiz binomial e propriamente acrescentada por um coeficiente linear[73] – proposição 25; de um quadrado afectado pela subtracção de um plano baseado na primeira potência da raiz binomial e propriamente acrescentada por um coeficiente linear[74] – proposição 34; e de uma quarta potência afectada tanto por adição de um plano-plano baseado na primeira potência da raiz binomial, como por subtracção de um plano-plano baseado no cubo da raiz binomial, ambas respectivamente acrescentadas por um coeficiente sólido e um coeficiente linear[75] – proposição 37.

É no último capítulo das *Notas Preliminares*, denominado "Génese dos Triângulos", que segundo Busard (1991, 2519) se pode encontrar um conjunto de proposições em que Viète aplica e combina álgebra com geometria. São proposições apresentadas sob uma forma geométrica, com recurso à terminologia da geometria dos triângulos. Embora Viète não explicite, estas proposições permitem a abordagem de problemas dos campos da aritmética e da trigonometria.

Viète iniciou este capítulo começando pela seguinte proposição (proposição 45):

Construir um triângulo rectângulo a partir de duas raízes. (Witmer 1983, 67)

Viète pretendia construir, de uma forma algébrica, um triângulo rectângulo a partir de duas raízes A e B. De acordo com o teorema de Pitágoras bastava, portanto, construir três quadrados em que um deles fosse igual à soma dos outros dois. Chamando hipotenusa ao lado oposto ao ângulo

[73] Em notação actual, pretendia-se determinar $(a + b)^2 + d.(a + b)$, com $a + b$ a raiz binomial e d o coeficiente linear.

[74] Em notação actual, pretendia-se determinar $(a + b)^2 - d.(a + b)$, com $a + b$ a raiz binomial e d o coeficiente linear.

[75] Em notação actual, pretendia-se determinar $(a + b)^4 + c.(a + b). - d.(a + b)^3$, com $a + b$ a raiz binomial e, c e d, respectivamente, o coeficiente sólido e coeficiente linear.

recto e perpendicular e base aos catetos[76], havia portanto que identificar a raiz do maior desses quadrados à hipotenusa e as raízes dos restantes quadrados à perpendicular e à base.

De modo a obter tais quadrados, Viète recorreu à proposição 13, que diz que o quadrado da soma de duas raízes menos o quadrado da sua diferença é igual ao quádruplo do produto das raízes, donde se conclui que o quadrado da soma das duas raízes é igual à soma do quadrado da diferença entre as raízes com o quádruplo do seu produto[77].

De igual modo, Viète recorreu à proposição 2 ao considerar $\frac{B\,quad.}{A}$ o terceiro proporcional das duas raízes A e B. Observe-se que B *quad.* significa $B\,in\,B$, ou seja, um quadrado cujo lado é designado por B, e não um quadrado B.

Viète conseguia assim, a partir destas duas proposições, o pretendido, pois bastava-lhe tomar a hipotenusa igual a A + $\frac{B\,quadratum}{A}$, a base a $A = \frac{B\,quadratum}{A}$ e a perpendicular a $2B$. Isto porque, usando a notação actual,

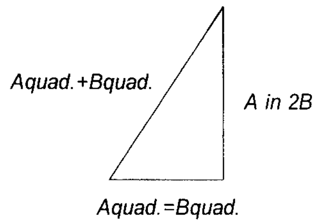
$$\left(A+\frac{B^2}{A}\right)^2=\left(A-\frac{B^2}{A}\right)^2+4A\frac{B^2}{A}=\left(A-\frac{B^2}{A}\right)^2+(2B)^2.$$

«De modo a reduzir todos os lados [do triângulo] ao mesmo tipo (...)» (Witmer 1983, 67-68), isto é, procurando a ausência de denominadores, Viète multiplicou todos os termos por A, sendo portanto A *quad.* + B *quad.* a hipotenusa, A *quad.* = B *quad.* a base e A *in* $2B$ a perpendicular. Concluiu, assim, que podia construir-se um triângulo rectângulo, a partir de duas raízes, considerando a hipotenusa *proporcional* à soma dos seus quadrados, a base

[76] Viète não utilizava o termo *cateto*. Designava os dois *catetos* de um triângulo rectângulo por *base* e *perpendicular* ou, genericamente, por *lados adjacentes ao ângulo recto*. Neste trabalho, por uma questão de simplificação de escrita, utilizar-se-á o termo *cateto*.

[77] Em notação actual, sendo a e b as raízes, $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$.

proporcional à diferença dos seus quadrados e a perpendicular *proporcional* ao dobro do produto entre as raízes[78].



É de notar que Viète, apesar de ser sempre descrito como extremamente respeitador do princípio da homogeneidade, nesta proposição constrói um triângulo em que os lados são "semelhantes" a planos. Embora "salve a face" através do termo "semelhante", não deixa de ser interessante o facto de Viète passar dos lados $A+\frac{B^2}{A}$, $A-\frac{B^2}{A}$, $2B$ para os "lados" A^2+B^2, A^2-B^2, $2AB$, sacrificando a homogeneidade à ausência de denominadores.

Viète observou ainda que, de igual modo, um triângulo rectângulo podia ser construído a partir de três proporcionais, com a hipotenusa proporcional à soma dos extremos, a base proporcional à sua diferença e a perpendicular proporcional ao dobro do meio. E, como consequência deste teorema referiu que a perpendicular de um triângulo rectângulo era o meio proporcional entre a soma da base e da hipotenusa, e a sua diferença (cf. Witmer 1983, 68).

Não deixa de ser estranho que este último resultado apareça como consequência da proposição 45, uma vez que se consegue demonstrar sem recorrer a ela. De facto, considerando h, p e b, respectivamente, a hipotenusa, perpendicular e base de um triângulo rectângulo, de $h^2 = p^2 + b^2$ tem-se $p^2 = h^2 - b^2 = (h+b).(h-b)$, donde $\frac{h+b}{p} = \frac{p}{h-b}$.

Antes de prosseguir com a análise das proposições seguintes é de notar que nesta, tal como ocorrerá nas próximas, está subjacente a procura de ternos pitagóricos.

---

[78] Viète usa frequentemente o termo *semelhante* em vez do termo *proporcional*. Por uma questão de actualidade da linguagem, neste trabalho, utilizar-se-á com este sentido o termo *proporcional*.

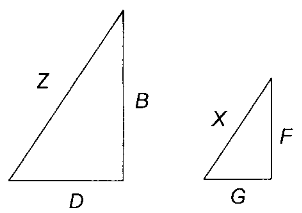
O estudo de ternos pitagóricos era um tema nobre da matemática, sobretudo desde a "redescoberta" da obra de Diofanto. Viète aborda aqui este assunto, como mais tarde o fará em vários problemas do tratado *Cinco Livros das Zetéticas*, onde efectivamente se dedica à procura de ternos pitagóricos, muito embora siga a tradição diofantina e trabalhe com números racionais positivos. Contudo, observe-se que de um ou de vários "ternos pitagóricos" de racionais passa-se a outros tantos ternos pitagóricos genuínos (de naturais) por multiplicação pelo menor múltiplo comum dos denominadores.

É ainda de notar que este processo de construção de um triângulo rectângulo já era do conhecimento de Diofanto. Segundo Eecke (1959, 235), dados dois números arbitrários racionais positivos, a e b, Diofanto construía um triângulo rectângulo em que a hipotenusa era a^2+b^2 e os catetos a^2-b^2 e $2ab$.

Ao colocar esta proposição no início da "Génese dos Triângulos", Viète mostrava que a sua *logística especiosa* permitia abordar assuntos já tratados pela *logística numérica* e assim justificar a aplicabilidade do seu cálculo simbólico.

Viète tinha, portanto, um processo algébrico para a construção de um triângulo rectângulo. A proposição seguinte, 46, refere-se à construção, a partir de dois triângulos rectângulos dados, de um terceiro triângulo rectângulo (cf. Witmer 1983, 68).

De modo a proceder a essa construção, Viète tomou dois triângulos rectângulos.



Considerando a hipotenusa do terceiro triângulo a construir proporcional ao produto das hipotenusas dos dois triângulos dados, Z *in* X, a soma dos quadrados dos catetos seria proporcional a Z *quad. in* X *quad.*, ou seja, ao produto de B *quad.* + D *quad.* por G *quad.* + F *quad.*. Este produto consistia de quatro plano-planos

B *quad. in* G *quad.* + D *quad. in* F *quad.* + B *quad. in* F *quad.* + D *quad. in* G *quad.*.

Acrescentando aos dois primeiros o dobro do plano-plano que é obtido do produto contínuo de B, D, F e G, ou seja, $2B$ *in* D *in* F *in* G, e subtraindo-o aos dois últimos (primeiro caso), Viète notou que

> Nada se perdeu ou se acrescentou no que se fez, para que os plano-planos resultantes não sejam iguais ao plano-plano de Z *quadrado* por X *quadrado*; (...) (Peyroux 1990, 60)

De igual modo, Viète subtraiu aos dois primeiros e somou aos dois últimos $2B$ *in* D *in* F *in* G (segundo caso).

Adicionado e subtraindo $2B$ *in* D *in* F *in* G a

B *quad. in* G *quad.* + D *quad. in* F *quad.* + B *quad. in* F *quad.* + D *quad. in* G *quad.*,

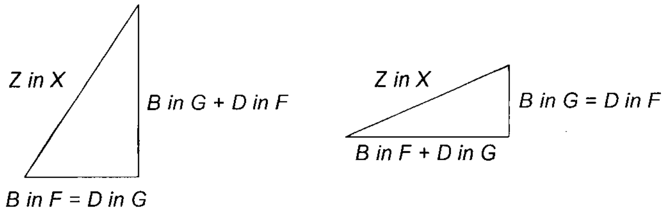
Viète observou que se podiam obter as raízes planas procuradas, proporcionais aos catetos do terceiro triângulo. Assim, no primeiro caso uma das raízes seria B *in* $G + D$ *in* F e a outra seria B *in* $F = D$ *in* G, enquanto no segundo caso uma das raízes seria B *in* $G = D$ *in* F a outra seria B *in* $F + D$ *in* G. Em ambos os casos, Viète considerou a primeira raiz proporcional à perpendicular e a segunda proporcional à base do terceiro triângulo.

Deste modo, a partir destes dois métodos e dados dois triângulos rectângulos, Viète construiu um terceiro triângulo rectângulo cuja hipotenusa era proporcional ao produto das hipotenusas do primeiro e do segundo triângulos.

A distinção entre base e perpendicular levou Viète a considerar dois casos. No primeiro caso, a perpendicular era proporcional à soma do produto da base do primeiro pela perpendicular do segundo triângulo com o produto da base do segundo pela perpendicular do primeiro triângulo e a base proporcional à diferença entre o produto das bases e o produto das perpendiculares dos respectivos triângulos; no segundo caso, a perpendicular era proporcional à diferença entre os produtos recíprocos da base de um e a perpendicular do outro triângulo[79] e a base proporcional à soma do produto das bases com o produto das perpendiculares dos respectivos triângulos.

---

[79] Entenda-se por produtos recíprocos da base de um e a perpendicular do outro triângulo, o produto das perpendiculares e o produto das bases dos dois triângulos.



Para Viète, um triângulo construído a partir de outros dois triângulos rectângulos pelo primeiro método chamava-se *triângulo sinerésico*, enquanto que um triângulo construído pelo segundo método era chamado *triângulo dierésico*[80]. Por essa razão Viète estabeleceu o seguinte teorema:

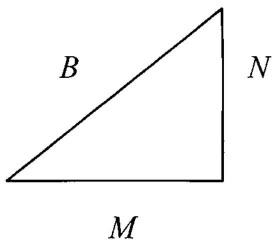
> Se existem dois triângulos rectângulos, o quadrado do plano produzido pelas suas hipotenusas é igual ao quadrado da soma do produto recíproco entre as bases e as perpendiculares mais o quadrado da diferença entre o produto das bases e o produto das perpendiculares; ou é igual ao quadrado da diferença entre os produtos recíprocos das bases e perpendiculares mais o quadrado da soma do produto das bases com o produto das perpendiculares. (Peyroux 1990, 67)

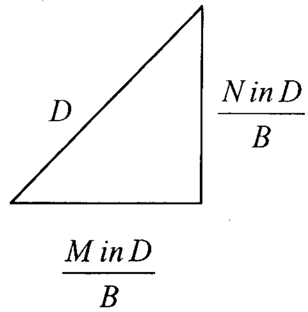
A distinção entre os triângulos sinerésico e dierésico permite aplicar estas definições à trigonometria, assunto que Viète desenvolve no tratado *Teoremas sobre Secções Angulares*. De facto, como se observará na análise das proposições 48-51, o modo como Viète define um triângulo sinerésico e um triângulo dierésico possibilita a dedução de certas fórmulas trigonométricas.

Na proposição 47, Viète propôs a partir de dois triângulos rectângulos semelhantes a construção de um terceiro tal que o quadrado da sua hipotenusa fosse igual à soma dos quadrados das hipotenusas dos outros dois.

De modo a proceder a essa construção, Viète considerou dois triângulos semelhantes, o primeiro com hipotenusa B, perpendicular N e base M; o segundo com hipotenusa D e, consequentemente, perpendicular $\frac{N \, in \, D}{B}$ e base $\frac{M \, in \, D}{B}$.

[80] Segundo Witmer (1983, 69-70), Viète adoptou estes dois termos a partir da linguagem da gramática, onde *sinérese* diz respeito à contracção de duas vogais de sílabas diferentes num ditongo e *diérese* correspondendo à separação de um ditongo em duas vogais.





Viète pretendia então construir um terceiro triângulo rectângulo a partir destes dois, de tal modo que o quadrado da sua hipotenusa fosse igual a $B\,quad. + D\,quad.$. Portanto, $B\ quad. + D\ quad.$ seria igual à soma do quadrado da perpendicular com o quadrado da base deste terceiro triângulo a ser construído.

Viète observou que se $B\ quad.\ +\ D\ quad.$ fosse multiplicado por $M\,quad. + N\,quad.$ e dividido por $B\ quad.$, não se alterava nada ao quadrado da hipotenusa do terceiro triângulo, pois por hipótese

$M\ quad. + N\ quad.$ era igual a $B\ quad.$.

Assim, executando a multiplicação atrás mencionada, Viète obteve quatro plano-planos

$B\ quad.\ in\ M\ quad. + D\ quad.\ in\ N\ quad. + B\ quad.\ in\ N\ quad. + D\ quad.\ in\ M\ quad.$.

Acrescentando aos dois primeiros o dobro do plano-plano que é obtido do produto contínuo de B, D, M e N e subtraindo-o aos dois últimos (primeiro caso), Viète notou que

> Nada se perdeu ou se acrescentou no que se fez, para que os plano-planos resultantes não sejam iguais ao plano-plano de B quadrado mais D quadrado por B quadrado, (...). (Peyroux 1990, 68)

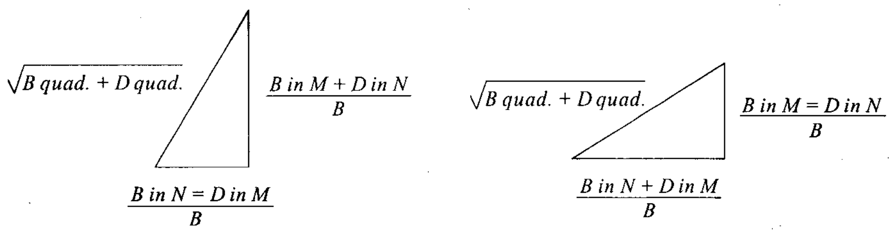
De igual modo, Viète também subtraiu aos dois primeiros e somou aos dois últimos $2B\ in\ D\ in\ M\ in\ N$ (segundo caso).

Adicionando e subtraindo $2B\ in\ D\ in\ M\ in\ N$ a

$B\ quad.\ in\ M\ quad. + D\ quad.\ in\ N\ quad. + B\ quad.\ in\ N\ quad. + D\ quad.\ in\ M\ quad.$,

Viète observou que se podiam obter as raízes planas procuradas, isto é, os catetos do terceiro triângulo rectângulo a construir.

Assim, no primeiro caso *B in M* + *D in N* seria uma das raízes e a outra seria *B in N* = *D in M*, no segundo caso *B in M* = *D in N* seria uma das raízes e a outra *B in N* + *D in M*. Dividindo todas as raízes planas por *B*, o triângulo procurado era semelhante a um dos seguintes[81].



Viète terminou referindo o seguinte teorema:

> Se existem dois triângulos rectângulos semelhantes, a soma dos quadrados a partir das hipotenusas é igual ao quadrado da soma oriunda da base do primeiro e da perpendicular do segundo, mais o quadrado da diferença entre a perpendicular do primeiro e a base do segundo, ou ainda é igual ao quadrado da soma oriunda da perpendicular do primeiro e da base do segundo mais o quadrado da diferença entre a base do primeiro e a perpendicular do segundo. (Peyroux 1990, 69)

Com estas proposições demonstradas, de acordo com Busard (1991, 2519), Viète elaborou as proposições 48-51 que permitem deduzir as fórmulas do seno/co-seno de ângulo duplo, triplo, quádruplo e quíntuplo.

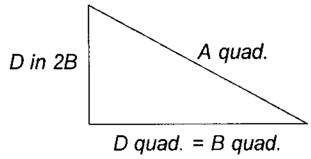
Na proposição 48, Viète executou a construção de um triângulo rectângulo a partir de dois triângulos rectângulos congruentes entre si.

Considerando os dois triângulos rectângulos dados com os lados comuns – *A* a hipotenusa, *B* a perpendicular e *D* a base – Viète pretendia construir um terceiro triângulo rectângulo. Efectuando a construção deste triângulo por via de sinérese[82], usada na proposição 46, Viète verificou que a hipotenusa seria proporcional a *A quad.*, a base a *D quad.* = *B quad.* e a perpendicular a *D in* 2*B*.

---

[81] Em ambos os casos, Viète considerou a primeira raiz proporcional à perpendicular e a segunda proporcional à base do triângulo procurado (cf. Witmer 1983, 71). É de notar que nesta proposição Viète representou $\sqrt{B\,quad. + D\,quad.}$ por $L\left\{\begin{array}{l} B\,quad. \\ +D\,quad.\end{array}\right.$ (cf. Viète 1970, 35).

[82] A diérese não era aplicável, pois a perpendicular do triângulo a ser construído por esse processo seria $B\,in\,D = B\,in\,D$, o que não tinha significado.



Viète terminou esta proposição introduzindo as noções de *triângulo de ângulo simples* e de *triângulo de ângulo duplo*. Para Viète,

(...) o terceiro triângulo é chamado um triângulo de ângulo duplo, enquanto por contraste o primeiro e o segundo triângulo seriam triângulos de ângulos simples (...) (Peyroux 1990, 69)

A razão desta denominação aparece numa nota do próprio texto, segundo Witmer (1983, 72) presumivelmente escrita por Beaugrand, em que se lê o seguinte:

(...) o ângulo agudo de um triângulo rectângulo deduzido a partir de dois triângulos rectângulos por sinérese é igual à soma dos ângulos agudos desses triângulos. (Witmer 1983, 72)

Seguidamente, a nota refere que Anderson tinha demonstrado o recíproco no segundo teorema do tratado *Teoremas sobre Secções Angulares*. A prova deste teorema, tal como as restantes demonstrações dessa obra, foram dadas por Anderson, discípulo de Viète (cf. Boyer 1989, 359), sendo ele próprio o editor deste tratado.

Esta nota de Beaugrand, supra-citada, pode ser demonstrada através da aplicação do segundo teorema do tratado *Secções Angulares*, uma vez que se trata de um teorema que implica o seu próprio recíproco.

Antes e se analisar essa prova e consequentemente a veracidade da nota, é de referir que, para Viète, o *ângulo agudo* de um triângulo rectângulo era o ângulo oposto à perpendicular (cf. Witmer 1983, 72).

Observe-se então o segundo teorema das *Secções Angulares*:

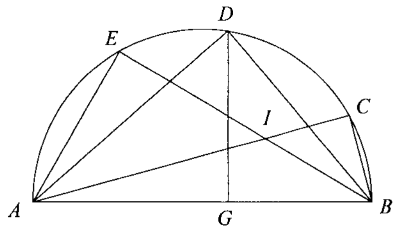
Se existem três triângulos rectângulos e o ângulo agudo do primeiro destes mais o ângulo agudo do segundo é igual ao ângulo agudo do terceiro, os lados do terceiro são tais que:

A hipotenusa é proporcional ao produto das hipotenusas do primeiro e segundo [triângulos].

A perpendicular é proporcional ao produto da perpendicular do primeiro e a base do segundo mais o produto da perpendicular do segundo e a base do primeiro.

A base [é proporcional] ao produto das bases do primeiro e do segundo [triângulos] menos o produto das suas perpendiculares. (Witmer 1983, 421)

Considerando ACB, ADB e AEB os três triângulos rectângulos em que as bases eram, respectivamente, AC, AD e AE e as perpendiculares eram CB, DB e EB, Anderson desenhou o seguinte diagrama em que designou por I o ponto de intersecção dos segmentos EB e AC, e por G o pé da perpendicular traçada a partir de D sobre o segmento AB.



Sendo AB a hipotenusa dos três triângulos rectângulos tem-se, de facto, que a hipotenusa do terceiro triângulo é proporcional ao produto das hipotenusas do primeiro e segundo triângulos, visto que $AB = \frac{AB^2}{AB}$.

Em relação à perpendicular e à base deste terceiro triângulo, os resultados sobre os mesmos são obtidos à custa de triângulos semelhantes.

Uma vez que os triângulos AGD e ICB são semelhantes, porque os ângulos em G e C são rectos e os ângulos em D e I são iguais pois os triângulos AGD e AEI são semelhantes, tem-se

$$\frac{AG}{AD} = \frac{CB}{IB}, \text{ donde } AD.CB = AG.IB.$$

De igual modo, os triângulos ADB e AEI são semelhantes, porque os ângulos em D e E são rectos e os ângulos em A são iguais pois, por hipótese, $E\hat{A}D = C\hat{A}B$ e, portanto, $E\hat{A}D + D\hat{A}C = D\hat{A}C + C\hat{A}B$. Assim, tem-se

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AI}{IE}, \text{ donde } AB.IE = DB.AI.$$

Também, os triângulos DGB e ICB são semelhantes, porque os ângulos em G e C são rectos e os ângulos em D e B são iguais, uma vez que são complementares, respectivamente, dos ângulos ADG e CIB que são iguais. Portanto,

$$\frac{GB}{DB} = \frac{IC}{IB}, \text{ donde } GB.IB = DB.IC.$$

Logo, destas igualdades obtém-se

$$\begin{aligned} AB.EB &= AB.(EI + IB) \\ &= AB.EI + AB.IB \\ &= AB.EI + (AG + GB).IB \\ &= AB.EI + AG.IB + GB.IB \\ &= DB.AI + AD.CB + DB.IC \\ &= AD.CB + DB.(AI + IC) \\ &= AD.CB + DB.AC, \end{aligned}$$

donde,

$$EB = \frac{AD.CB + DB.AC}{AB},$$

ou seja, a perpendicular do terceiro triângulo rectângulo é proporcional à soma do produto da perpendicular do primeiro e a base do segundo triângulo com o produto do segundo e a base do primeiro.

Observe-se ainda que os triângulos ADB e AEI são semelhantes, porque os ângulos em D e E são rectos e os ângulos em A são iguais. Assim,

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AI}{AE} = \frac{AC - IC}{AE}, \text{ donde } AB.AE = AD.AC - AD.IC.$$

Mas, como os triângulos ADB e ICB são semelhantes, pois o triângulo ICB é semelhante ao triângulo AGD que é semelhante ao triângulo AEI e este é semelhante ao triângulo ADB, tem-se

$$\frac{AD}{DB} = \frac{CB}{IC}, \text{ donde } AD.IC = CB.DB.$$

Logo,

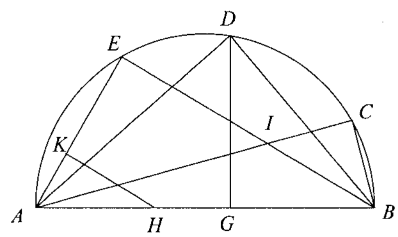
$$AB.AE = AD.AC - CB.DB,$$

donde,

$$AE = \frac{AD.AC - CB.DB}{AB},$$

ou seja, a base do terceiro triângulo rectângulo é proporcional à diferença entre o produto das bases do primeiro e do segundo triângulos e o produto das suas perpendiculares.

Anderson terminou referindo que o resultado ainda era válido se as hipotenusas dos triângulos rectângulos fossem diferentes. Assim, se no diagrama considerasse o triângulo rectângulo AKH, de ângulo recto em K e K sobre o segmente de recta AE, a prova seria análoga à anterior uma vez que os triângulos AEB e AKH são semelhantes.



Deste teorema deduzem-se facilmente certas fórmulas trigonométricas como, por exemplo, a de $sen\ (\alpha + \beta)$ e $cos\ (\alpha + \beta)$.

De facto, considerando $B\hat{A}C = \alpha$ e $B\hat{A}D = \beta$ então $B\hat{A}C = D\hat{A}E = \alpha$, uma vez que por hipótese $B\hat{A}E = B\hat{A}C + B\hat{A}D$. Assim,

$$\begin{aligned} sen\ (\alpha + \beta) &= \frac{BE}{AB} = \frac{AD.CB + DB.AC}{AB^2} \\ &= \frac{AD}{AB}\frac{CB}{AB} + \frac{DB}{AB}\frac{AC}{AB} \\ &= cos\ \beta\,.\, sen\ \alpha + sen\ \beta\,.\, cos\ \alpha. \end{aligned}$$

De forma análoga se conclui que

$$cos\ (\alpha + \beta) = cos\ \alpha\,.\, cos\ \beta - sen\ \alpha\,.\, sen\ \beta,$$

uma vez que

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AD.AC-CB.DB}{AB^2}.$$

É de notar que quer Viète quer Anderson não se referem directamente a essas fórmulas, apesar deste último na demonstração deste teorema apresentar, respectivamente, a perpendicular e a base do terceiro triângulo através das seguintes proporções:

$$\frac{BE}{AB}=\frac{AD.CB+DB.AC}{AB^2} \text{ e } \frac{AE}{AB}=\frac{AD.AC-CB.DB}{AB^2}$$

o que deixa transparecer que estava implícita a obtenção desses resultados.

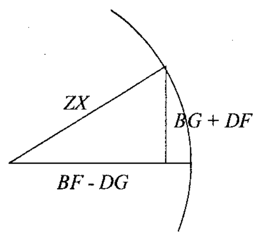
É ainda de referir que o primeiro teorema deste tratado das *Secções Angulares* permite a dedução das fórmulas $sen\ (\alpha-\beta)$ e $cos\ (\alpha-\beta)$ com $\alpha>\beta$.

Observe-se agora a prova de que o ângulo "agudo" de um triângulo rectângulo deduzido a partir de dois triângulos rectângulos por sinérese é igual à soma dos ângulos "agudos" desses triângulos.

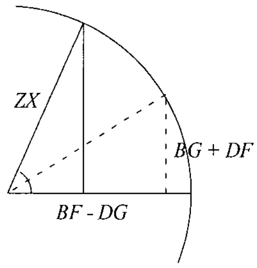
Considerando dois triângulos rectângulos, respectivamente, de hipotenusas Z e X, bases D e G, perpendiculares B e F e ângulos agudos α e β obtém-se o triângulo sinerésico de hipotenusa ZX, base $BF-DG$ (com $BF>DG$) e perpendicular $BG+DF$.

Com vista a provar que o ângulo "agudo" deste terceiro triângulo é igual a $\alpha+\beta$, suponha-se, por redução ao absurdo, que esse ângulo não é igual a essa soma. Assim, o ângulo "agudo" do triângulo sinerésico ou é maior ou é menor que $\alpha+\beta$.

Suponha-se que o ângulo "agudo" é menor que $\alpha+\beta$ (o caso de ser maior é análogo). Então trace-se uma circunferência de centro no vértice do ângulo "agudo" deste terceiro triângulo e raio igual à sua hipotenusa.



Construa-se então um triângulo rectângulo de hipotenusa ZX e ângulo agudo igual a $\alpha+\beta$.

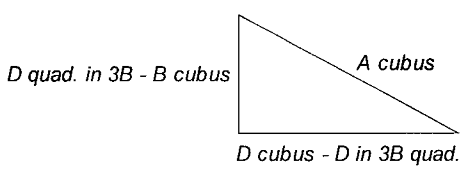


Pela análise da figura observa-se que a base/perpendicular deste novo triângulo rectângulo é menor/maior que a base/perpendicular do anterior, ou seja, menor/maior, respectivamente, que $BF - DG$ e $BG + DF$. Mas isto é absurdo, porque pelo segundo teorema das *Secções Angulares* e uma vez que as hipotenusas destes dois triângulos são iguais a ZX, os triângulos teriam que ser iguais.

Logo, o ângulo "agudo" do terceiro triângulo, o triângulo sinerésico, é igual a $\alpha + \beta$, a soma dos ângulos "agudos" dos dois primeiros triângulos rectângulos dados.

Na proposição 49, Viète propôs a construção de um triângulo rectângulo, a que chamou *triângulo de ângulo triplo*, a partir de dois triângulos rectângulos, respectivamente de ângulo simples e de ângulo duplo.

Considerando dois triângulos rectângulos o de ângulo simples tendo A como hipotenusa, B como perpendicular e D como base; o de ângulo duplo tendo hipotenusa proporcional a A *quad.*, perpendicular proporcional a D *in* $2B$ e base proporcional a D *quad.* $-$ B *quad.*, Viète efectuou a construção do terceiro triângulo rectângulo por via de sinérese. Usando a proposição 46, Viète verificou que a hipotenusa deste terceiro triângulo rectângulo seria proporcional a A *cubus*, a base proporcional a D *cubus* $-$ D *in* $3B$ *quad.* e a perpendicular proporcional a D *quad. in* $3B - B$ *cubus*.



Viète referiu ainda que apenas se conseguia construir este terceiro triângulo rectângulo de ângulo triplo por via de sinérese (cf. Witmer 1983, 73). De facto, se se considerasse que o terceiro triângulo rectângulo era obtido por via de diérese, então o ângulo "agudo" deste triângulo seria igual à diferença entre os ângulos "agudos" dos triângulos rectângulos a partir dos quais este terceiro triângulo era deduzido. Uma vez que os ângulos "agudos" dos dois primeiros triângulos eram de ângulo simples e de ângulo duplo, em notação actual respectivamente, α e 2α, o ângulo "agudo" do terceiro triângulo era $2\alpha-\alpha$, ou seja α. Assim, o ângulo "agudo" deste terceiro triângulo não seria triplo, logo não era possível construir o triângulo rectângulo pedido na proposição.

Tal como na proposição anterior, nesta facilmente se deduzem as fórmulas de $sen\ 3\alpha$ e $cos\ 3\alpha$. De facto, usando a notação actual,

$$sen 3\alpha = \frac{3D^2B-B^3}{A^3} = \frac{3D^2B}{A^3} - \frac{B^3}{A^3} = 3\frac{D^2}{A^2}\frac{B}{A} - \frac{B^3}{A^3} = 3\cos^2\alpha . sen\,\alpha - sen^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = \frac{D^3-3DB^2}{A^3} = \frac{D^3}{A^3} - \frac{3DB^2}{A^3} = \frac{D^3}{A^3} - 3\frac{D}{A}\frac{B^2}{A^2} = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha . sen^2\alpha .$$

Usando processos análogos, nas proposições 50 e 51, Viète mostrou como obter a partir de um triângulo de ângulo simples e de outro de ângulo triplo um terceiro triângulo rectângulo denominado de *ângulo quádruplo*; e a partir de um triângulo rectângulo de ângulo simples e de outro de ângulo quádruplo, um terceiro triângulo rectângulo denominado *de ângulo quíntuplo*.

Na primeira construção, a hipotenusa era proporcional a *A quad.-quad.*, a perpendicular proporcional a *B in* 4*D cubus* – *B cubus in* 4*D* e a base proporcional a *D quad.-quad.* – *D quad. in* 6*B quad.* + *B quad.-quad.*; e, na segunda construção referida, a hipotenusa era proporcional a *A quadrato-cubus*, a perpendicular proporcional a *B in* 5*D quad.-quad.* – *B cubus in* 10*D quad.* + *B quadrato-cubus* e a base a *D quadrato-cubus* – *D cubus in* 10*B quad.* + *D in* 5*B quad.-quad.*. Do mesmo modo se deduzem as fórmulas para $sen\ 4\alpha$, $cos\ 4\alpha$, $sen\ 5\alpha$ e $cos\ 5\alpha$.

A partir do que foi descrito, Viète concluiu que na construção de triângulos rectângulos

Se qualquer potência de uma raiz binomial é construída e os termos homogéneos que resultam são separados alternadamente em dois grupos e em ambos o primeiro [termo] é positivo, o seguinte negativo [e assim sucessivamente], e a base de um triângulo rectângulo é proporcional ao primeiro destes [grupos] e a perpendicular é proporcional ao segundo [grupo], a hipotenusa será proporcional à própria potência [cuja base é a hipotenusa do triângulo que admite as parcelas do binómio considerado como catetos]. Por outro lado, um triângulo cuja base é proporcional ou igual a uma das raízes da construção e a perpendicular [proporcional ou igual] à outra, obtém o seu nome a partir do ângulo subtendido pela perpendicular [ângulo oposto à perpendicular]. Claro que triângulos construídos a partir das mesmas raízes serão, através de toda a extensão das potências, chamados múltiplos do mesmo ângulo de acordo com a natureza da potência: duplo, quando a potência é um quadrado; triplo, quando a potência é um cubo; quádruplo, quando é uma quarta potência; quíntuplo, quando é uma quinta potência; e assim por diante numa progressão infinita. (Witmer 1983, 74)

É de notar, segundo Witmer (1983, 7), que a partir destas proposições e respectiva conclusão Viète esteve perto de alcançar as fórmulas que, em notação actual, se escrevem:

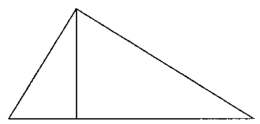
$$\cos n\alpha = \cos^n \alpha - \frac{n.(n-1)}{1.2}\cos^{n-2}\alpha.sen^2\alpha + \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3.4}\cos^{n-4}\alpha.sen^4\alpha - \ldots$$

e

$$\begin{aligned} sen\, n\alpha = n.\cos^{n-1}\alpha.sen\,\alpha - \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}\cos^{n-3}\alpha.sen^3\alpha + \\ + \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)}{1.2.3.4.5}\cos^{n-5}\alpha.sen^5\alpha - \ldots \end{aligned}$$

As *Notas Preliminares* terminam com mais algumas proposições sobre triângulos, destacando-se as proposições 54, 55 e 56.

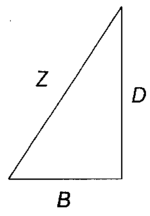
A partir de um triângulo rectângulo, Viète propôs a construção de dois triângulos rectângulos de igual altura cuja união resultasse num triângulo com a mesma altura, as hipotenusas formassem dois dos seus lados, a soma das bases formassem a sua base e o ângulo[83] oposto a essa base fosse, no caso da proposição 54, recto, no caso da proposição 55, agudo e, no caso da proposição 56, obtuso.



Observe-se, primeiramente, a resolução da proposição 54.

[83] Ângulo do vértice. Cf. Viète 1970, 39

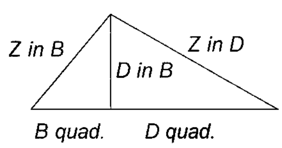
Para obter a construção pedida, Viète considerou um triângulo rectângulo em que Z era a hipotenusa, B sua base e D a perpendicular.



Seguidamente, considerou um outro triângulo rectângulo de perpendicular proporcional à base do triângulo anterior, que designou por D, e de base proporcional à perpendicular desse mesmo triângulo. Os dois triângulos eram, portanto, semelhantes. Assim, B estava para D como D estava para a base deste novo triângulo, que por essa razão seria $\frac{D\ quad.}{B}$ e de igual modo B estava para D como Z estava para a hipotenusa deste triângulo, que por essa razão seria $\frac{Z\ in\ D}{B}$.

Viète possuía, portanto, dois triângulos rectângulos com a mesma altura, D. Multiplicando todos os lados destes triângulos por B, Viète obteve dois triângulos rectângulos com a mesma altura, D *in* B, em que no primeiro triângulo a hipotenusa era Z *in* B, a base era B *quad.* e a perpendicular D *in* B; e no segundo triângulo a hipotenusa era Z *in* D, a base D *quad.* e a perpendicular D *in* B.

De facto, unindo estes dois triângulos rectângulos, obtém-se outro triângulo rectângulo. Isto, porque por construção os triângulos eram semelhantes, portanto, os ângulos correspondentes eram iguais. Por essa razão, o ângulo oposto à perpendicular do primeiro triângulo era igual ao ângulo oposto à base do segundo triângulo e inversamente. Assim, o ângulo resultante da junção das duas hipotenusas era recto. Além disso, estas formavam os lados deste novo triângulo e a soma das bases a sua base. Deste modo, Viète tinha encontrado o triângulo rectângulo procurado.



É de notar que este problema é o inverso do da decomposição de um triângulo rectângulo em dois triângulos pela altura relativa à hipotenusa.

Analisem-se agora as últimas duas proposições da "Génese dos Triângulos".

Nestas duas proposições, tal como na anterior, Viète propôs a construção de dois triângulos rectângulos de igual altura cuja união resultasse num triângulo com a mesma altura, as hipotenusas formassem dois dos seus lados, a soma das bases formassem a sua base, mas que o ângulo oposto a essa base fosse, respectivamente, agudo e obtuso.

Em ambas resoluções, Viète considerou dois triângulos rectângulos, um de hipotenusa Z, base B e perpendicular D, o outro construído a partir das raízes $F + D$ e B. No caso da proposição 55, Viète tomou $F < Z$, enquanto na seguinte considerou $F > Z$.

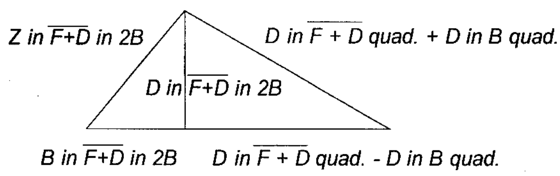
Observe-se então a resolução da proposição 55 visto que a seguinte é de raciocínio análogo.

Utilizando a proposição 45, a hipotenusa[84] do segundo triângulo, construído a partir das raízes $F + D$ e B, seria proporcional a $\overline{F+D}\, quad. + B\ quad.$, a base proporcional a $\overline{F+D}\, quad. - B\, quad.$ e a perpendicular proporcional a $\overline{F+D}\ in\, 2B$. Observe-se que a quantidade F introduzida por Viète era da sua escolha desde que fosse menor que Z, portanto, podia ser escolhida de tal modo que $F + D$ fosse maior que B.

[84] É de referir que a barra, utilizada nestas expressões, corresponde aos parêntesis actuais. Viète apenas começou a usar a barra a partir de um lema do quarto Livro dos *Cinco Livros das Zetéticas*. Antes deste lema ou não os identificava, deixando ao cuidado do leitor a percepção de sua existência, como ocorreu nesta proposição, ou usava o símbolo $\{$, como no caso das *Zetéticas* IV, 3. Ao longo deste trabalho e por umas questão de coerência de notação, optou-se por representar os parêntesis por uma barra.

Viète construiu ainda um outro triângulo semelhante a este tendo D como perpendicular, a base seria igual a $\dfrac{D\,in\,\overline{F+D}\,quad. - D\,in\,B\,quad.}{\overline{F+D}\,in\,2B}$ e a hipotenusa seria igual a $\dfrac{D\,in\,\overline{F+D}\,quad. + D\,in\,B\,quad.}{\overline{F+D}\,in\,2B}$.

Multiplicando o triângulo rectângulo inicial e este último triângulo rectângulo por $\overline{F+D}\,in\,2B$, Viète obteve dois triângulos rectângulos em que no primeiro a hipotenusa era igual a $Z\,in\,\overline{F+D}\,in\,2B$, a base era igual a $B\,in\,\overline{F+D}\,in\,2B$ e a perpendicular era igual a $D\,in\,\overline{F+D}\,in\,2B$; e no segundo a hipotenusa era igual a $D\,in\,\overline{F+D}\,quad. + D\,in\,B\,quad.$, a base era igual a $D\,in\,\overline{F+D}\,quad. - D\,in\,B\,quad.$ e a perpendicular era igual a $D\,in\,\overline{F+D}\,in\,2B$. Unindo estes dois triângulos rectângulos, as suas hipotenusas formavam os lados do novo triângulo e a soma das suas bases formava a base do mesmo.



Faltava apenas verificar que o ângulo oposto à base deste novo triângulo era agudo. Para isso, Viète verificou que

> (...) a base do primeiro [triângulo] está para a altura assim como a altura está para alguma coisa maior que a base do segundo [triângulo]. (Peyroux 1990,76)

Deste modo, no novo triângulo, o ângulo oposto à base seria agudo. Com efeito

$$\frac{B\,in\,\overline{F+D}\,in\,2B}{D\,in\,\overline{F+D}\,in\,2B} \text{ era igual a } \frac{D\,in\,\overline{F+D}\,in\,2B}{2D\,cubus + D\,quad.\,in\,2F}.$$

Neste ponto o texto tem uma nota que, segundo Witmer (1983, 80), presumivelmente foi escrita por Beaugrand, em que se demonstra esta última igualdade; contudo, ela é trivial, uma vez que ambos os membros se reduzem facilmente à razão de B para D.

Assim, considerando dois triângulos rectângulos de perpendiculares $D\,in\,\overline{F+D}\,in\,2B$ e de bases, respectivamente, $B\,in\,\overline{F+D}\,in\,2B$ e $2D\,cubus + D\,quad.\,in\,2F$, o triângulo resultante da união desses triângulos, com altura $D\,in\,\overline{F+D}\,in\,2B$ e base $B\,in\,\overline{F+D}\,in\,2B + 2D\,cubus + D\,quad.\,in\,2F$ era rectângulo.

Para mostrar que o ângulo oposto à base do triângulo formado anteriormente era agudo, bastava provar que $2D\ cubus + D\ quad.\ in\ 2F$ era maior que $D\,in\,\overline{F+D}\,quad. - D\,in\,B\,quad.$, ou seja, em notação actual que

$$2D^3 + 2D^2F > DF^2 + 2D^2F + D^3 - B^2D,$$

ou ainda que

$$DF^2 < D^3 + B^2D.$$

Dividindo ambos os termos da desigualdade por D bastava-lhe mostrar que $F^2 < B^2 + D^2$, ou seja, que $F^2 < Z^2$. Ora, F foi justamente escolhido menor do que Z, pelo que também $F^2 < Z^2$ e, portanto, o ângulo formado pelas hipotenusas dos dois triângulos anteriormente considerados era agudo.

Assim, a partir de um triângulo rectângulo, Viète obtinha dois triângulos rectângulos com a mesma altura entre si, a união das quais era um triângulo cujos lados eram as hipotenusas dos dois triângulos anteriores, cuja base era a soma das bases desses triângulos e cujo ângulo oposto à base era agudo.

Como foi referido a resolução da proposição 56 é de raciocínio análogo, diferindo apenas na escolha de F ser maior que D, sendo esta a opção que permite concluir que a amplitude do ângulo oposto à base do triângulo procurado é obtuso.

As Zetéticas de Viète e a Aritmética de Diofanto

Os cinco livros das Zetéticas

Como se referiu, a arte analítica de Viète contribuiu para o desenvolvimento da álgebra, fomentando o interesse pela teoria das equações. De facto, os vários trabalhos que abrangem a *Arte Analítica*[85] ilustram essa motivação. Por exemplo as *Notas Preliminares* continham, como se pôde observar, diversas manipulações algébricas[86] que mais tarde Viète usaria na transformação de equações nas formas canónicas, um dos assuntos abordados na sua teoria das equações (cf. Mahoney 1973, 36). Na verdade, «(···) como um resultado da formulação dos objectivos e processos [dados] por Viète, a "arte dos cossistas" tornou-se a "doutrina das equações"» (Mahoney 1973, 36), isto é, a arte analítica permitiu que, além do processo de resolução das equações (a procura do valor desconhecido, a *cosa*), se desse importância ao estudo da estrutura das mesmas.

De modo a dar consistência à sua teoria das equações e consequentemente ao seu programa analítico, Viète necessitava de mostrar a aplicabilidade e o alcance da sua *logística especiosa*, o seu sistema de cálculo simbólico. Assim, com base neste sistema, em 1593, Viète publicou *Zeteticorum Libri Quinque* (*Cinco Livros das Zetéticas*) que, segundo Busard (1991, 2515), provavelmente foi completado em 1591. Neste trabalho Viète debruçou-se sobre uma vasta extensão de problemas algébricos tradicionais tirados de várias fontes, tanto antigas como suas contemporâneas (cf. Katz 1993, 342), e traduziu-os em equações usando o seu método simbólico de cálculo, isto é, a sua arte analítica. De facto, em cada problema Viète deduziu, de acordo com o que estabeleceu na sua *Introdução*, uma equação em termos de quantidades conhecidas e desconhecidas (cf. Katz 1993, 342). Muitos desses problemas algébricos foram extraídos da *Aritmética* de Diofanto, uma vez que «(...) Viète acreditava que era um trabalho clássico sobre álgebra que,

---

[85] Nome por que ficou conhecida a compilação dos vários tratados de Viète. Cf. Katz 1993, 339

até certo ponto, mostrava a análise oculta dos gregos.» (Katz 1993, 342). O tratado *Cinco Livros das Zetéticas* oferecia, assim, uma amostra da aplicabilidade da *logística especiosa*, contrastando-a com a *Aritmética* de Diofanto que, para Viète, ficava dentro dos limites da *logística numérica* (cf. Busard 1991, 2515).

Como referido, nos *Cinco Livros das Zetéticas*, Viète considerou vários problemas da *Aritmética* de Diofanto, criando portanto um certo paralelismo entre os dois trabalhos[87]. Uma prova desse paralelismo foi Viète ter iniciado o primeiro livro e terminado o quinto livro das suas *Zetéticas* com o mesmo problema com que Diofanto iniciou o primeiro e concluiu o quinto livro da sua *Aritmética* (cf. Katz 1993, 342 e Busard 1991, 2515). Para Busard (1991, 2515), as referências de Peletier[88] (1517-1582) e Ramus, bem como as traduções de Xylander[89] (1532-1576) introduziram Viète na *Aritmética* de Diofanto, embora Busard considere que Viète conhecia este trabalho no original.

Viète estava também familiarizado com os trabalhos de outros autores nomeadamente com as obras de Cardano – *De numerorum proprietatibus*, (*Das propriedades dos Números*) *Ars magna* (*A Grande Arte*) *e Ars magna arithmeticæ* (*A Grande Arte da Aritmética*) – mencionando o nome deste último nos problemas II, 21 e II, 22 das *Zetéticas*. Busard refere isto baseando-se nas provas dadas por K. Reich no seu artigo: "Diofanto, Cardano, Bombelli, Viète: ein Vergleich ihrer Aufgaben". Contudo, e de acordo com K. Reich, não é sabido se Viète na preparação das suas *Zetéticas*, considerou a *Algebra* de Bombelli.

---

[86] Como o caso, na notação actual, de $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ e $(A + B)^2 + (A - B)^2 = 2A^2 + 2B^2$. Cf. Mahoney 1973, 37

[87] É de notar que no capítulo IV da *Introdução*, Viète apresentou uma pequena tabela onde constavam alguns dos problemas dos *Cinco Livros das Zetéticas* que tinham sido retirados da *Aritmética* de Diofanto. Cf. Peyroux 1990, 21-22

[88] Jacques Peletier, francês, estudou Direito no "Collège Navarre", mas interessou-se pelo estudo da matemática e medicina, tendo-se licenciado nesta última ciência em 1560. Entre outros tratados publicou: *Arithmètique* (1549) em quatro livros e *Algèbre* de 1554. Cf. Dedron 1959, 176-177

[89] De nome verdadeiro Wilhelm Holtzmann. Nascido numa família pobre, desde cedo mostrou interesse pelo estudo de línguas e literaturas clássicas. Depois de aperfeiçoar os seus conhecimentos em história, teologia, filosofia e matemática, em 1558 ocupou a cadeira de língua grega na Universidade de Heidelberga. Cf. Eecke 1959, LXVIII

A Aritmética de Diofanto

Pouco se conhece sobre a vida de Diofanto. Supõe-se que viveu na Alexandria no século III d.C. e, de acordo com o epigrama 126 do Livro XIV da *Antologia Grega*, terá morrido com 84 anos de idade (cf. Katz 1993, 157).

Segundo Katz (1993, 162), foi através da *Aritmética* que a influência matemática de Diofanto alcançou os nossos dias. A sua *Aritmética* era composta por treze livros, seis dos quais chegaram à actualidade na versão original (cf. Struik 1997, 105). Recentemente foram descobertos mais quatro, escritos em árabe; contudo, o estilo de resolução dos problemas é diferente dos de origem grega. Katz (1993, 163) refere que, nos livros encontrados em árabe, os passos da resolução dos problemas são explicados detalhadamente. Para este autor, é possível que «(...) o trabalho árabe seja uma tradução não do original de Diofanto, mas de um comentário sobre a *Aritmética* escrito por Hipatia por volta do ano 400 [d.C.].» (Katz 1993, 163).

Diofanto iniciou a *Aritmética* com um longo preâmbulo onde expôs quais os conhecimentos indispensáveis para a leitura e entendimento do tratado. Começou por definir *número* como um composto de *unidades*, indo mais longe que Euclides ao englobar nesta definição todos os racionais positivos e, de seguida, apresentou uma nomenclatura para potências de quantidades desconhecidas e inversos dessas potências até ao sexto grau (cf. Eecke 1959, XVII-XVIII).

Para Diofanto, entre os números existiam: os *quadrados*, que eram obtidos a partir da multiplicação de um número (o lado do quadrado) por si próprio; os *cubos*, formados a partir da multiplicação de um quadrado pelo seu próprio lado; os *quadrado-quadrados*, que eram o produto dos quadrados por si próprios; os *quadrado-cubos*, obtidos a partir da multiplicação de um quadrado por um cubo formado a partir do mesmo lado; e os *cubo-cubos*, que eram o produto dos cubos por si próprios. Acresce que Diofanto considerava ainda que a adição, subtracção, multiplicação e divisão destes números constituíam a maior parte dos problemas aritméticos (cf. Eecke 1959, 2). Deste modo, e de acordo com Diofanto, a resolução de problemas, aritméticos envolvendo este tipo de números, suscitava a necessidade de uma simbologia própria (cf. Katz 1993, 163).

Diofanto designou a quantidade desconhecida por *aritmos*[90] representando-a pelo símbolo ς (última letra da palavra grega $\alpha\rho\iota\theta\mu o\varsigma$). Diofanto representou ainda o quadrado de uma quantidade desconhecida por Δ^y (com origem em *dynamos* = potência, neste caso quadrado); o cubo por K^y (com origem em *kybos* = cubo) (cf. Mahoney 1973, 35); o quadrado-quadrado por $\Delta^y\Delta$; o quadrado-cubo por ΔK e o cubo-cubo por K^yK. As potências inversas eram definidas utilizando os símbolos atrás descritos com a marca χ. Por exemplo, $\frac{1}{x^2}$ era representado por $\Delta^y{}_\chi$ (inverso do quadrado de *aritmo*).

Diofanto introduziu também um símbolo, $\overset{o}{M}$ (com origem em *mónadas* = unidades), para representar as unidades.

Diofanto continuou a introdução da sua *Aritmética* definindo os resultados da multiplicação e divisão entre as diversas potências de quantidades desconhecidas.

Ainda em relação à sua nomenclatura, Diofanto definiu o símbolo ⩚ para notar as subtracções. Numa dada expressão os termos a somar eram meramente justapostos. O mesmo acontecia com os termos a subtrair, mas estes eram precedidos pelo símbolo ⩚. Assim, a expressão

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

na notação de Diofanto escrevia-se na forma

$$K^y \alpha\varsigma\gamma ⩚ \Delta^y\gamma \overset{o}{M} \alpha,$$

com $\alpha = 1$ e $\gamma = 3$. Observe-se que os gregos usavam os sucessivos símbolos do alfabeto para representar números (cf. Struik 1997, 110).

Apesar de Diofanto usar termos subtractivos nas suas expressões algébricas e de ser conhecedor das regras de multiplicação de números com sinal menos, ele não trabalhava com números negativos. Aliás, estes números não existiam para ele, resultando apenas das regras necessárias para

[90] Em grego: αριθμος.

multiplicar expressões algébricas envolvendo subtracções (cf. Katz 1993, 164). Antes de finalizar a introdução, Diofanto referiu a importância de conhecer, além destas regras, as de adição, subtracção e multiplicação de termos semelhantes.

Como conclusão, Diofanto observou que o grau de dificuldade dos seus problemas era crescente ao longo da obra e que esta era constituída por treze livros.

A *Aritmética* contém uma colecção muito variada de problemas, alguns dos quais são resolvidos de modo bastante engenhoso, apesar de, na maioria das vezes, a solução ser particularizada. A maioria dos problemas conduz a equações indeterminadas, cujo tratamento revela que Diofanto era conhecedor da álgebra babilónica ou mesmo da indiana (cf. Struik 1997, 105). Contudo, o tipo de processos de resolução usados por Diofanto mostra um certo aperfeiçoamento em relação às álgebras orientais. De facto, nestas, as equações e as próprias resoluções eram redigidas de uma forma retórica, enquanto que Diofanto usava certas abreviaturas para os vários termos envolvidos nas equações e nas respectivas resoluções (cf. Katz 1993, 163). Esta utilização sistemática de símbolos algébricos, por parte de Diofanto, permitiu-lhe a resolução de problemas de maior complexidade.

Como já tem sido observado, é ponto assente que Viète conhecia o tratado de Diofanto. E, na *Introdução à Arte Analítica*, Viète estabeleceu uma simbologia para potências de quantidades desconhecidas usando o mesmo tipo de sequência, embora a tivesse prolongado para potências de grau superior. Apesar desta aproximação à notação de Diofanto, a distinção de termos dados/procurados mediante a utilização de consoantes/vogais permitiu a Viète desenvolver a notação algébrica e consequentemente generalizar a resolução de problemas. Os *Cinco Livros das Zetéticas* são uma prova deste desenvolvimento. Como referido, nesta obra, Viète, com recurso à sua *logística especiosa*, resolveu alguns problemas da *Aritmética* de Diofanto apresentando as respectivas resoluções e soluções de uma forma geral.

Seguidamente analisar-se-á cada um dos Livros deste tratado e resolver-se-ão os problemas aí propostos, segundo a notação usada por Viète, comparando-os, sempre que possível, com a resolução e solução dos mesmos apresentados na *Aritmética* de Diofanto.

Zetéticas I

O primeiro dos *Cinco Livros das Zetéticas* contém dez problemas que procuram determinar quantidades cuja soma, diferença ou razão são conhecidas (cf. Busard 1991, 2515). No primeiro deles, *Zetéticas* I, 1, Viète propôs-se determinar duas raízes, dadas a sua diferença e a sua soma. Este problema tinha sido já proposto e resolvido por Diofanto em *Aritmética* I, 1:

> Dividir um número dado em dois números em que a diferença também é dada. (Eecke 1959, 9)

Diofanto toma 100 como número dado e 40 como a diferença dada entre as partes. Resolve o problema considerando que o número mais pequeno era 1 *aritmo*; portanto, o maior número era 1 *aritmo* mais 40 unidades. Como consequência, a soma destes dois números era 2 *aritmos* mais 40 unidades. Associando termos semelhantes a termos semelhantes, obteve 2 aritmos igual a 60 unidades e, portanto, o aritmo valia 30 unidades. Assim os números procurados eram 30 e 70.

Observe-se a resolução dada por Viète.

A partir dos dados do problema e usando a sua *logística especiosa*, Viète tomou B como a diferença entre as duas raízes e D como a sua soma. Repare-se na completa generalidade da abordagem de Viète, fruto da *logística especiosa*, enquanto que a *logística numérica* tinha forçado Diofanto a escolher valores particulares (40 para a diferença e 100 para a soma).

Considerando A a menor raiz[91], a maior raiz era $A+B$. Logo, a soma das raízes era $2A+B$ e, portanto, $2A+B$ era igual a D. Por transposição,

$2A$ era igual a $D-B$

e, dividindo ambos os membros por 2,

[91] Segundo a sua *logística especiosa* Viète designava as quantidades desconhecidas por vogais. Observe-se ainda que a vogal A corresponde em Diofanto a 1 *aritmo*.

$$A \text{ era igual a } \frac{1}{2}D - \frac{1}{2}B.$$

Viète considerou ainda que, se E fosse a maior raiz, a menor raiz era $E - B$. Logo, a soma das raízes era $2E - B$ e, portanto,

$$2E - B \text{ era igual a } D.$$

Por transposição,

$$2E \text{ era igual a } D + B$$

e, dividindo ambos os membros por 2,

$$E \text{ era igual a } \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}B.$$

Viète concluía assim que se podiam encontrar duas raízes, dadas a sua diferença e a sua soma. Com efeito,

> A metade da soma das raízes menos a metade da sua diferença é igual à raiz mais pequena; e as mesmas adicionadas é a maior raiz. (Peyroux 1990, 78)

Viète terminou exemplificando numericamente a solução encontrada. Tomando B igual a 40 e D igual a 100, A seria igual a 30 e E a 70. A escolha destes números comprova mais uma vez a ligação de Viète à *Aritmética* de Diofanto, pois são os mesmos que foram usados pelo matemático de Alexandria na resolução deste problema.

Os dois próximos problemas são dedicados a determinar duas raízes dadas a sua razão e a sua diferença/soma. Observe-se a resolução das *Zetéticas* I, 2, uma vez que *Zetéticas* I, 3 é de raciocínio análogo. Este último problema corresponde na *Aritmética* de Diofanto ao problema 2 do Livro I.

Em *Zetéticas* I, 2 Viète propôs-se determinar duas raízes a partir da sua diferença e da sua razão. Este problema já tinha sido proposto e resolvido por Diofanto em *Aritmética* I, 4:

> Encontrar dois números a partir da razão dada e de tal modo que a sua diferença também seja dada. (Eecke 1959, 11)

Tomando o maior número como quíntuplo do mais pequeno e a sua diferença igual a 20, Diofanto designou o menor número por 1 *aritmo*. Assim, o maior seria 5 aritmos e, portanto, 5 *aritmos* excediam 1 *aritmo* em 20 unidades, ou seja, 4 *aritmos* eram iguais a 20 unidades. Assim, Diofanto obtinha que o número mais pequeno era 5 unidades e o maior 25 unidades.[92]

Observe-se a resolução dada por Viète, que novamente se baseia no raciocínio usado por Diofanto.

Tomando B como a diferença entre as raízes e $\frac{R}{S}$ a razão entre a menor e a maior raiz, Viète considerou A a menor raiz e, portanto, a maior raiz era igual a $A+B$. Assim,

A estava para $A+B$ assim como R estava para S.

Resolvendo esta proporção, Viète obteve

$S \text{ in } A$ igual a $R \text{ in } A + R \text{ in } B$

e, por transposição,

$S \text{ in } A - R \text{ in } A$ era igual a $R \text{ in } B$.

Dividindo ambos os membros por $S-R$ Viète obteve

$\frac{R \text{ in } B}{S-R}$ igual a A,

donde, concluiu que

$S-R$ estava para R assim como B estava para A.

Viète considerou ainda que se tomasse E como a maior raiz, a menor seria $E-B$ e, portanto,

E estava para $E-B$ assim como S estava para R,

ou seja,

$R \text{ in } E$ era igual a $S \text{ in } E - S \text{ in } B$.

Aplicando a transposição,

$S \text{ in } E - R \text{ in } E$ era igual a $S \text{ in } B$,

donde, Viète deduziu que

$S-R$ estava para S assim como B estava para E.

[92] É de notar que a solução deste problema se obtém resolvendo as equações $x-y=20$ e $x=5y$.

Assim, dada a diferença entre duas raízes e a sua razão, as raízes podiam ser determinadas. Com efeito,

(...) a diferença entre as duas raízes semelhantes está para a maior ou menor raiz semelhante, assim como a diferença entre as verdadeiras raízes está para a maior ou menor raiz verdadeira. (Peyroux 1990,79)

Observe-se que, para Viète, as "raízes verdadeiras" eram as raízes procuradas, enquanto que as "raízes semelhantes" eram os termos que apareciam na razão inicialmente dada. As "semelhantes" eram, portanto, proporcionais às "verdadeiras".

Exemplificando numericamente esta resolução, Viète tomou B igual a 12, R igual a 2 e S igual a 3. A seria então igual a 24 e E igual a 36.

Nos problemas 4 e 5, Viète propôs-se determinar a raiz justa (verdadeira raiz), dadas duas "raízes" que são menores/maiores que a raiz justa e dadas as razões dos seus defeitos/excessos.

Antes da análise da resolução do problema 4 proposto por Viète, observe-se a resolução dada por Diofanto que se encontra em *Aritmética* I, 7:

Subtrair dois números dados a um mesmo número, de modo que a razão entre os defeitos seja também dada. (Eecke 1959, 13)

Subtraindo 100 e 20 a um mesmo número de tal modo que o maior defeito fosse triplo do menor, Diofanto pretendia determinar o número em questão.

Considerando o número pretendido 1 *aritmo*, Diofanto subtraiu 100 a 1 *aritmo* obtendo como defeito 1 *aritmo* menos 100 unidades. De igual modo, subtraindo 20 a 1 *aritmo* obteve como defeito 1 *aritmo* menos 20 unidades. Como, por hipótese, o maior defeito era triplo do menor, 3 *aritmos* menos 300 unidades era igual a 1 *aritmo* menos 20 unidades. Associando termos semelhantes com termos semelhantes, Diofanto obteve 2 *aritmos* igual a 280 unidades, donde 1 *aritmo* era 140 unidades, o número procurado. Diofanto terminou verificando o resultado obtido

(...) se [a 140] retirarmos 100 restará 40 unidades; enquanto que se retirarmos 20, restará 120 unidades; donde resulta o estabelecido, que o maior resto é o triplo do menor. (Eecke 1959, 14)

Na solução deste problema, Viète apresentou dois métodos de resolução usando em ambos os processos, a sua arte analítica. O segundo método é de raciocínio semelhante ao utilizado por Diofanto na resolução do mesmo problema.

Observe-se a primeira resolução apresentada por Viète.

Viète considerou B a primeira das duas raízes menor que a raiz justa, D a segunda e a razão entre o defeito da primeira raiz e o defeito da segunda $\frac{R}{S}$.

Tomando A o defeito da primeira raiz, $B + A$ seria a verdadeira raiz. Por outro lado, uma vez que

$$R \text{ estava para } S \text{ assim como } A \text{ estava para } \frac{S \, in \, A}{R},$$

Viète notou que $\frac{S \, in \, A}{R}$ era o defeito da segunda raiz. Assim,

$$D + \frac{S \, in \, A}{R} \text{ era igual a } B + A.$$

Multiplicando ambos os membros por R, Viète obteve

$$D \, in \, R + S \, in \, A \text{ igual a } B \, in \, R + A \, in \, R.$$

Ordenando a igualdade,

$$D \, in \, R = B \, in \, R \text{ era igual a } R \, in \, A = S \, in \, A,$$

donde,

$$R = S \text{ estava para } R \text{ assim como } D = B \text{ estava para } A.$$

Viète considerou ainda que, se E fosse o defeito da segunda raiz, $D + E$ seria a raiz justa. Por outro lado,

$$S \text{ estava para } R \text{ assim como } E \text{ estava para } \frac{R \, in \, E}{S}$$

e, portanto, $\frac{R\,in\,E}{S}$ era o defeito da primeira raiz. Deste modo, $B + \frac{R\,in\,E}{S}$ seria também a verdadeira raiz e, portanto, igual a $D + E$. Multiplicando ambos os membros por S, Viète obteve

$B\ in\ S + R\ in\ E$ igual a $D\ in\ S + E\ in\ S$.

Ordenando a igualdade,

$D\ in\ S = B\ in\ S$ era igual a $R\ in\ E = S\ in\ E$,

donde,

$R = S$ estava para S assim como $D = B$ estava para E.

Dadas, portanto, duas raízes que eram menores que a raiz justa e dada também a razão dos seus defeitos, Viète mostrou que se conseguia determinar a raiz justa. Com efeito,

> (.....) a diferença entre os defeitos semelhantes está para o defeito semelhante da primeira raiz defeito, ou da segunda, assim como a diferença entre as raízes defeitos está para o defeito da primeira raiz defeito, ou da segunda. E, adicionando o respectivo defeito à raiz defeito, obtém-se a raiz justa. (Peyroux 1990,80)

Viète exemplificou numericamente a solução obtida. Considerando B igual a 76, D igual a 4, R igual a 1 e S igual a 4, Viète observou que A seria 24 e E igual a 96. De facto, 24 + 76 era igual a 96 + 4 e, portanto, 100 era a raiz justa procurada.

Como referido, Viète forneceu ainda outro método, de raciocínio semelhante à resolução apresentada por Diofanto, para determinar a raiz justa. Tal como anteriormente, designou por B a primeira raiz que era menor que a raiz justa, por D a segunda raiz e por $\frac{R}{S}$ a razão entre o defeito da primeira raiz e da segunda, mas designou desta vez a raiz justa por A. Assim, $A - B$ seria o defeito da primeira raiz e $A - D$ o defeito da segunda e, então,

$A - B$ estava para $A - D$ assim como R estava para S.

Resolvendo esta proporção,

$R\ in\ A - R\ in\ D$ era igual a $S\ in\ A - S\ in\ B$.

Por transposição,

$$S \, in \, A = R \, in \, A \text{ era igual a } S \, in \, B = R \, in \, D$$

e, portanto,

$$\frac{S \, in \, B = R \, in \, D}{S = R} \text{ era igual a } A,$$

obtendo-se, assim, a raiz justa. Com efeito,

(...) a diferença entre o rectângulo de lados a primeira raiz defeito e o defeito semelhante da segunda raiz, e o rectângulo de lado a segunda raiz defeito e o defeito semelhante da primeira raiz, será dividida pela diferença dos defeitos semelhantes e originará a raiz justa [procurada]. (Peyroux 1990,81)

Como exemplo numérico, Viète considerou de novo B igual a 76, D igual a 4, R igual a 1 e S igual a 4, a raiz justa era de facto 100.

Este não foi o único problema em que Viète apresentou dois processos de resolução. Os dois próximos problemas são também exemplo desta determinação.

Um dos motivos que terá levado Viète a apresentar dois processos para solucionar o mesmo problema, talvez tenha sido o de tentar justificar a aplicabilidade do seu método analítico, um dos seus objectivos com este tratado. Observe-se que os dois métodos de resolução, com recurso ao uso da *logística especiosa*, forneciam uma solução geral do problema. Aliás, o segundo processo apresentado por Viète generaliza a solução dada por Diofanto, o que mostra a extensão do método simbólico de cálculo de Viète.

O problema 5 é de resolução análoga a este encontrando-se também no Livro I da *Aritmética* de Diofanto, a saber no problema 9:

Subtrair um número a dois números dados, de modo que a razão entre os excessos seja também dada. (Eecke 1959, 15)

No problema 6 das *Zetéticas* I, Viète pretendia determinar a raiz justa dadas duas raízes, uma menor que a raiz justa e a outra maior, e dada ainda a razão entre o defeito e o excesso respectivos.

Considerando B e D as raízes dadas, respectivamente menor e maior que a raiz justa, e $\frac{R}{S}$ a razão entre o defeito e o excesso, Viète designou por A o defeito e, portanto, a raiz justa seria $B + A$. Por outro lado, dado que

R estava para S assim como A estava para $\frac{S \, in \, A}{R}$,

Viète observou que $\frac{S \, in \, A}{R}$ seria o excesso e, então, $D - \frac{S \, in \, A}{R}$ seria igual à raiz justa, ou seja, igual a $B + A$. Multiplicando todos os termos por R, Viète obteve

$D \, in \, R - S \, in \, A$ igual a $B \, in \, R + R \, in \, A$.

Ordenando a igualdade,

$R \, in \, A + S \, in \, A$ era igual $D \, in \, R - B \, in \, R$,

donde,

$S + R$ estava para R assim como $D - B$ estava para A.

Viète considerou ainda que se E fosse o excesso, a raiz verdadeira seria $D - E$. Por outro lado, notou que

S estava para R assim como E estava para $\frac{R \, in \, E}{S}$,

logo $\frac{R \, in \, E}{S}$ seria o defeito e então, $B + \frac{R \, in \, E}{S}$ seria a raiz justa, portanto, igual a $D - E$. Multiplicando tudo por S, Viète obteve

$B \, in \, S + R \, in \, E$ igual a $D \, in \, S - S \, in \, E$.

Ordenando a igualdade,

$R \, in \, E + S \, in \, E$ era igual $D \, in \, S - B \, in \, S$,

donde,

$S + R$ estava para S assim como $D - B$ estava para E.

Viète conseguiu, assim, determinar a raiz justa a partir de duas raízes, uma menor que a raiz justa e outra maior, e também da razão entre o defeito e o excesso. Com efeito,

(...) a soma do defeito semelhante com o excesso semelhante está para o defeito semelhante ou excesso semelhante, assim como a diferença entre a raiz excesso e a raiz defeito está para o defeito ou excesso verdadeiro. E assim o defeito é adicionado à raiz defeito, ou o excesso é retirado à raiz excesso e obtém-se a raiz justa. (Peyroux 1990,83)

Para exemplificar numericamente o processo descrito, Viète considerou B igual a 60, D igual a 180, R igual a 1 e S igual a 5. Assim, A seria igual a 20, E igual a 100 e, portanto, a raiz justa procurada seria igual a 80.

Uma vez mais, Viète apresentou outro processo de obter a raiz justa. Tal como anteriormente, considerou B uma raiz defeito da justa, D uma raiz excedente, e a razão entre o defeito e o excesso como $\frac{R}{S}$. Tomando A como raiz justa, Viète observou que $A-B$ era o defeito e $D-A$ era o excesso. Deste modo,

$A-B$ estava para $D-A$ assim como R estava para S.

Resolvendo esta proporção Viète obteve que

$R\ in\ D - R\ in\ A$ era igual a $S\ in\ A - S\ in\ B$.

«Transpondo segundo a arte» (Peyroux 1990,83)

$S\ in\ A + R\ in\ A$ era igual $R\ in\ D + S\ in\ B$

e, assim,

$$\frac{R\,in\,D + S\,in\,B}{S+R} \text{ era igual a } A.$$

Viète conseguia também por este processo determinar a raiz justa. Com efeito,

Logo que a soma do produto do defeito semelhante pela raiz excesso com o produto do excesso semelhante pela raiz defeito é dividida pela soma do excesso com o defeito semelhante, aparece a raiz justa. (Peyroux 1990,83)

Viète terminou exemplificando numericamente este processo. Considerando de novo B igual a 60, D igual a 180, R igual a 1 e S igual a 5, a raiz justa era, de facto, 80.

Os quatro últimos problemas deste Livro I são dedicados a encontrar duas quantidades, dadas, por um lado, a sua soma ou diferença e, por outro, a soma ou a diferença de razões predefinidas das quantidades.

Em *Zetéticas* I, 7, Viète mostrou como dividir um lado dado em duas partes, de tal modo que uma razão predefinida da primeira parte juntamente com uma razão predefinida da segunda parte fosse igual a uma soma estabelecida.

Diofanto também propôs e resolveu este problema em *Aritmética* I, 5:

> Dividir um número dado em dois números de modo que a soma das fracções dadas de cada uma das partes seja igual a um número dado. (Eecke 1959,11)

A expressão geral deste problema, em notação actual, é $x + y = a$ e $\frac{1}{m}x + \frac{1}{n}y = b$, em que a é o número dado que se pretende dividir e b é a soma de cada uma das partes.

Diofanto referiu ainda que

> O número dado deve, contudo, estar compreendido entre os dois números que obtemos aplicando as fracções dadas ao número proposto inicialmente. (Eecke 1959,11)

o que mostra que não admitia números negativos. De facto, resolvendo algebricamente o problema, através das equações atrás descritas, verifica-se esta condição dada por Diofanto.

A partir de $x + y = a$ e $\frac{1}{m}x + \frac{1}{n}y = b$ tem-se que $\frac{1}{m}x + \frac{1}{n}(a - x) = b$, donde $x = \frac{m}{n - m}(bn - a)$ e $y = a - x = a - \frac{m}{n - m}(bn - a) = \frac{n}{n - m}(a - bm)$. Para as quantidades x e y serem positivas, há dois casos a considerar: se $n > m$ então,

$bn > a$ e $a > bm$; se $n < m$ então, $bn < a$ e $a < bm$. Ou seja, como Diofanto referiu, $\frac{a}{n} < b < \frac{a}{m}$ ou $\frac{a}{m} < b < \frac{a}{n}$.

Diofanto resolveu o problema em que 100 era o número a ser dividido em dois números tais que a soma da terça parte do primeiro número com a quinta parte do segundo número fosse 30 unidades. Em notação actual, Diofanto pretendia encontrar dois números x e y tais que $x + y = 100$ e $\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y = 30$. Notar que 30 satisfazia à condição exigida no problema proposto por Diofanto, isto é, $\frac{100}{5} < 30 < \frac{100}{3}$.

Tomando a quinta parte do segundo número como 1 *aritmo*, Diofanto observou que o segundo número seria 5 *aritmos*. Assim, a terça parte do primeiro número era 30 unidades menos 1 *aritmo*, donde o primeiro número era 90 unidades menos 3 *aritmos*. Como, por hipótese, os dois números adicionados formavam 100 unidades, então, 2 *aritmos* mais 90 unidades seria igual a 100 unidades. Associando termos semelhantes com termos semelhantes, 2 *aritmos* era igual a 10 unidades, donde, 1 *aritmo* era igual a 5 unidades. Assim,

> Nós designamos a quinta parte do segundo número como 1 *aritmo,* isto é, 5 unidades, portanto, o segundo número será 25 unidades. Ora, a terça parte do primeiro número é 30 unidades menos 1 *aritmo,* isto é, 25 unidades, portanto, o primeiro número será 75 unidades. Está então verificado que a soma da terça parte do primeiro número com a quinta parte do segundo número é 30 unidades, e que a soma dos números formam o número proposto [100]. (Eecke 1959, 12)

Observe-se a resolução dada por Viète.

Viète considerou B o lado que se pretendia dividir em duas partes, $\frac{D}{B}$ a razão da primeira parte, $\frac{F}{B}$ a razão dada da segunda parte e H a soma pretendida. Tomando A como a porção desejada da primeira parte, $H - A$ seria a porção da segunda parte. Assim, a primeira parte era $\frac{B \, in \, A}{D}$ e a segunda parte $\frac{B \, in \, H - B \, in \, A}{F}$ e, portanto,

$$\frac{B \, in \, A}{D} + \frac{B \, in \, H - B \, in \, A}{F} \text{ era igual a } B.$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por D *in* F, dividindo por B e aplicando a transposição (assumindo que D era maior que F) Viète obteve

$$D \, in \, H - D \, in \, F \text{ igual a } D \, in \, A - F \, in \, A$$

e, portanto,

$$D - F \text{ estava para } H - F \text{ assim como } D \text{ estava para } A.$$

Deste modo, Viète conseguia dividir um lado dado em duas partes.

Por outro lado, Viète considerou ainda que se E fosse a porção a tomar da segunda parte de modo a obter H, $H - E$ seria a porção a juntar da primeira parte. Procedendo de forma análoga à realizada anteriormente

$$\frac{B \, in \, E}{F} + \frac{B \, in \, H - B \, in \, E}{D} \text{ era igual a } B.$$

Multiplicando esta igualdade por F *in* D, dividindo por B e aplicando a transposição (assumindo D maior que F) Viète obteve

$$D \, in \, E - F \, in \, E \text{ igual a } D \, in \, F - H \, in \, F$$

e, portanto,

$$D - F \text{ estava para } D - H \text{ assim como } F \text{ estava para } E.$$

A concluir, Viète exemplificou numericamente o processo. Considerando B igual a 60, D igual a 20, F igual a 12 e H igual a 14 (é de notar que H era maior que F e menor que D), A seria igual a 5 e E igual a 9. De facto, $5 + 9 = 14$ e $\frac{60 \times 5}{20} + \frac{60 \times 9}{12} = 60$.

Os três problemas seguintes são de resolução análoga a *Zetéticas* I, 7.

No problema 8, era dada a soma das quantidades procuradas, mas em vez da soma de razões predefinidas das mesmas era dada a diferença dessas razões. Nos dois seguintes, Viète pretendia determinar as duas quantidades a partir da sua diferença e da soma/diferença de razões predefinidas das mesmas.

Tal como o problema 7, *Zetéticas* I, 8 também pode ser encontrado, com respectiva resolução, no Livro I da *Aritmética* de Diofanto, a saber, no problema 6. Contudo, os problemas 9 e 10 não são propostos na *Aritmética*.

Com estes problemas, Viète terminou o primeiro dos *Cinco Livros das Zetéticas*, no entanto, observe-se que na resolução dos problemas 7 e 8 Viète não referiu as condições de resolubilidade mencionadas por Diofanto na solução dos mesmos. De facto, o cálculo simbólico introduzido por Viète permitiu-lhe ultrapassar certas restrições na resolução de um dado problema. Este carácter extensivo da *logística especiosa* aponta na direcção da generalização do conceito de número.

Como conclusão da análise deste Livro I, apresenta-se em notação actual uma síntese dos problemas abordados por Viète e respectiva correspondência na *Aritmética* de Diofanto:

Zetéticas I, 1	$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases}$	*Aritmética* I, 1
Zetéticas I, 2	$\begin{cases} x-y=a \\ \dfrac{x}{y}=r \end{cases}$	*Aritmética* I, 4
Zetéticas I, 3	$\begin{cases} x+y=a \\ \dfrac{x}{y}=r \end{cases}$	*Aritmética* I, 2
Zetéticas I, 4	$\dfrac{x-a}{x-b}=r$	*Aritmética* I, 7
Zetéticas I, 5	$\dfrac{a-x}{b-x}=r$	*Aritmética* I, 9
Zetéticas I, 6	$\dfrac{x-a}{b-x}=r$	
Zetéticas I, 7	$\begin{cases} x+y=a \\ \dfrac{1}{m}x+\dfrac{1}{n}y=b \end{cases}$	*Aritmética* I, 5
Zetéticas I, 8	$\begin{cases} x+y=a \\ \dfrac{1}{m}x-\dfrac{1}{n}y=b \end{cases}$	*Aritmética* I, 6
Zetéticas I, 9	$\begin{cases} x-y=a \\ \dfrac{1}{m}x+\dfrac{1}{n}y=b \end{cases}$	
Zetéticas I, 10	$\begin{cases} x-y=a \\ \dfrac{1}{m}x-\dfrac{1}{n}y=b \end{cases}$	

Zetéticas II

O mais extenso dos *Cinco Livros das Zetéticas* é o segundo: contém vinte e dois problemas. Neles, são procuradas quantidades de que se conhecem a soma ou diferença dos quadrados ou dos cubos, os produtos, ou a razão entre os produtos e a soma ou diferença dos quadrados.

Os quatro primeiros são dedicados a determinar os lados de um rectângulo, dadas a sua área e, respectivamente, a razão entre os lados, a soma dos quadrados dos lados e a diferença/soma entre os lados.

Em *Zetéticas* II, 1, Viète propôs-se determinar os lados de um rectângulo, dadas a área do rectângulo[93] e a razão entre os seus lados.

Considerando $B\,planum$ o rectângulo dado e $\frac{S}{R}$ a razão dada, do maior para o menor lado, Viète designou por A o maior lado. Assim, como S estava para R também A estava para $\frac{R\,in\,A}{S}$ e, portanto, $\frac{R\,in\,A}{S}$ era o menor lado. O plano produzido pelos lados era igual a $\frac{R\,in\,A\,quad.}{S}$ que, por hipótese, era igual a $B\,planum$, donde,

R estava para S assim como $B\,planum$ estava para $A\,quad.$.

Viète considerou ainda que se E fosse o lado menor, $\frac{S\,in\,E}{R}$ era o lado maior e o plano produzido pelos lados era $\frac{S\,in\,E\,quad.}{R}$ que era igual a $B\,planum$, donde,

S estava para R assim como $B\,planum$ estava para $E\,quad.$.

Viète conseguia assim determinar os lados de um rectângulo, dados o produto dos seus lados (o próprio rectângulo) e a razão entre os mesmos.

---

[93] Para Viète, "dar a área do rectângulo", isto é, "dar o produtos dos lados", exprimia-se por "dar o rectângulo": «Dato rectangulo sub lateribus (...)» (Viète 1970, 50).

Exemplificando numericamente o seu raciocínio, Viète considerou B *planum* igual a 20, R igual a 1 e S igual a 5. Assim, A *quad.* seria igual a 100, portanto, A igual a 10 e E *quad.* igual a 4, ou seja, E igual a 2.

Em *Zetéticas* II, 2, dados um rectângulo e a soma dos quadrados dos seus lados, Viète pretendia determinar esses lados.

Nas *Notas Preliminares*, proposição 11, Viète mostrara que o quadrado da soma de duas raízes era igual à soma dos quadrados de cada uma das raízes mais o dobro do seu produto e que o quadrado da diferença entre duas raízes era igual à soma dos quadrados de cada uma das raízes menos o dobro do seu produto. Como em *Zetéticas* II, 2, por hipótese, era dado o produto entre os lados e a soma dos seus quadrados, facilmente se determinava o quadrado da soma e o quadrado da diferença dos lados e, portanto, a soma e a diferença dos lados. Aplicando *Zetéticas* I, 1 era possível então determinar os lados procurados.

Como foi referido, os dois próximos problemas são dedicados a determinar os lados de um rectângulo, dadas a sua área e a diferença/soma entre os lados. Observe-se a resolução de *Zetéticas* II, 3 uma vez que *Zetéticas* II, 4 é de raciocínio análogo. Este último problema corresponde na *Aritmética* de Diofanto ao problema 27 do Livro I.

Em *Zetéticas* II, 3 pretendia-se encontrar os lados de um rectângulo, dados o próprio rectângulo e a diferença entre os lados.

Este problema encontrava-se também proposto e resolvido em *Aritmética* I, 30:

> Encontrar dois números de tal modo que a sua diferença e o seu produto formem números dados. (Eecke 1959, 40)

Em notação actual, dados a e b, o problema tem a fórmula geral $x - y = a$ e $x.y = b$, em que x e y são os números procurados.

Para Diofanto, tanto os dados como as soluções dos problemas eram apenas números racionais positivos. Portanto, ele iniciou a resolução deste problema considerando a seguinte condição de resolubilidade:

a soma do quádruplo do produto dos dois números com o quadrado da sua diferença forma um quadrado (...) (Eecke 1959, 40)

De facto, resolvendo as equações anteriores tem-se $x = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4b + a^2}$ e $y = -\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4b + a^2}$ que são valores positivos e serão racionais se $4b + a^2$ for o quadrado de um número racional.

Diofanto propôs para a diferença de dois números 4 unidades e para o seu produto 96 unidades[94].

Considerando a soma dos dois números igual a 2 *aritmos* e como a sua diferença era 4 unidades, Diofanto observou que o maior número era igual a 1 *aritmo* mais 2 unidades e o menor era 1 *aritmo* menos 2 unidades. Deste modo, o produto dos números era 1 *aritmo* quadrado menos 4 unidades e, portanto, igual a 96 unidades, donde se obtinha que 1 *aritmo* era igual a 10 unidades. Diofanto concluía assim que o maior número era 12 unidades e o menor era 8 unidades.

Observe-se agora a resolução de Viète.

Viète observou que já tinha sido mostrado que o quadrado da soma das raízes menos o quadrado da diferença era igual ao quádruplo do produto das raízes[95]. Aplicando transposição, Viète determinava o quadrado da soma dos lados e, portanto, a soma dos lados, pois por hipótese eram dados o produto e a diferença entre os lados. Assim, tendo a soma e a diferença dos lados, e aplicando *Zetéticas* I, 1, Viète determinava os lados procurados.

Tal como nos problemas 7 e 8 das *Zetéticas* I, nas resoluções destes dois problemas, 3 e 4, Viète não necessitou de considerar condições de

[94] É de notar que $4 \times 96 + 4^2 = 400 = 20^2$. O problema resume-se a resolver as equações $x - y = 4$ e $x.y = 96$.

[95] Apesar de Viète não mencionar, corresponde ao teorema da proposição 13 das *Notas Preliminares*.

resolubilidade. De facto, o uso da *logística especiosa* permitia a Viète solucionar os problemas sem qualquer tipo de restrição.

Nos quatro problemas seguintes do segundo Livro das *Zetéticas*, Viète propôs-se determinar duas raízes, dadas, nos dois primeiros, a soma dos seus quadrados e a diferença/soma das raízes; nos outros dois, a diferença dos seus quadrados e a diferença/soma das mesmas.

É de notar que destes quatro somente os problemas 6 e 8 se encontram na *Aritmética* de Diofanto, a saber no Livro I, respectivamente, problemas 28 e 29.

Uma vez que os processos de resolução dos problemas 5 e 7 são de raciocínio análogo, respectivamente, aos dos problemas 6 e 8, seguidamente analisar-se-ão estes dois últimos.

Em *Zetéticas* II, 6, Viète propôs-se determinar duas raízes, dadas a sua soma e a soma dos seus quadrados.

Como foi referido, Diofanto propôs e resolveu este problema em *Aritmética* I, 28:

> Encontrar dois números de tal modo que a sua soma e a soma dos seus quadrados formem os números dados. (Eecke 1959, 38)

Em notação actual, dados a e b, o problema tem a forma geral $x + y = a$ e $x^2 + y^2 = b$, em que x e y são os números procurados.

De modo a obter exclusivamente números racionais positivos como solução, Diofanto considerou a seguinte condição de resolubilidade

> (...) o dobro da soma dos quadrados dos números excede num quadrado o quadrado da soma (...) (Eecke 1959, 38)

De facto, resolvendo o sistema de equações anteriores tem-se $y = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2b - a^2}$, sendo racional se $2b - a^2$ for o quadrado de um número racional, ou seja, se $2(x^2 + y^2) - (x + y)^2$ for o quadrado de um número racional.

Por outro lado, como $a^2 = (x + y)^2 > x^2 + y^2 = b$, então $a^2 > 2b - a^2$ e, assim, $\frac{a}{2} > \frac{1}{2}\sqrt{2b - a^2}$, o que mostra que as soluções são positivas.

Diofanto propôs 20 unidades para soma dos números e 208 para soma dos seus quadrados[96].

Considerando a diferença dos números como sendo 2 *aritmos* e dado que a sua soma era 20 unidades, Diofanto observou que o maior número era 1 *aritmo* mais 10 unidades e o menor era 10 unidades menos 1 *aritmo*. Deste modo, a soma dos quadrados dos números era 2 *aritmos* quadrados mais 200 unidades e, portanto, igual a 208 unidades, donde se obtinha que 1 *aritmo* era igual a 2 unidades. Diofanto concluía assim que o maior número era 12 unidades e o menor era 8 unidades.

Viète iniciou a resolução do problema observando que o quadrado da soma de duas raízes mais o quadrado da sua diferença era igual ao dobro da soma dos seus quadrados[97]. Aplicando transposição, Viète determinou o quadrado da diferença entre as raízes e, portanto, a diferença entre as raízes. A partir desta, e aplicando *Zetéticas* I,1, Viète obtinha as raízes procuradas.

Observe-se que mais uma vez, na sua resolução, Viète não necessitou de predefinir condições de resolubilidade.

Em *Zetéticas* II, 7 (respectivamente *Zetéticas* II, 8), Viète determinou as raízes, dada a diferença (respectivamente, a soma) destas e a diferença entre os seus quadrados. Como foi referido anteriormente, o modo de resolução de ambos os problemas é análogo.

É de referir que *Zetéticas* II, 8 se encontra em *Aritmética* I, 29 de Diofanto:

---

[96] Note-se que $2 \times 208 - 20^2 = 16 = 4^2$.

O problema resume-se a resolver as equações $x + y = 20$ e $x^2 + y^2 = 208$.

[97] Cf. proposição 12 das *Notas Preliminares*. Em notação actual, sendo x e y as raízes, $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2)$.

> Encontrar dois números tal que a sua soma e a diferença dos seus quadrados formem os números dados. (Eecke 1959, 39)

Na notação actual, o problema proposto por Diofanto resume-se à resolução do sistema $x+y=a$ e $x^2-y^2=b$, em que a e b são dados.

Diofanto resolveu o problema tomando 20 unidades como a soma dos números procurados e 80 unidades como a diferença dos seus quadrados. Considerando a diferença entre os números desconhecidos 2 *aritmos*, Diofanto observou que o maior número era 1 *aritmo* mais 10 unidades e o menor era 10 unidades menos 1 *aritmo*. Como a diferença entre os seus quadrados era 80 unidades, Diofanto obtinha 40 *aritmos* igual a 80 unidades, e, portanto, 1 *aritmo* era 2 unidades. Assim, 12 unidades e 8 unidades eram os números procurados.

Observe-se agora a resolução dada por Viète no problema 8. A partir do teorema da proposição 14 das *Notas Preliminares*, em que mostrou que

> O produto da diferença entre duas raízes e a sua soma é igual à diferença entre os seus quadrados. (Witmer 1990, 43)

Viète observou que a diferença entre as raízes era igual ao quociente entre a diferença dos seus quadrados e a soma das raízes. Como este quociente era possível de determinar, pois as quantidades eram dadas, Viète aplicou *Zetéticas* I, 1, o que o levou a determinar as raízes.

Em *Zetéticas* II, 9 Viète propôs-se determinar os lados de um rectângulo, dados o próprio rectângulo e a diferença entre os quadrados dos lados.

Considerando o rectângulo dado, isto é, o produto dos lados procurados, igual a B *planum*, Viète tomou D *planum* como a diferença entre os quadrados desses lados. Viète considerou ainda A *planum* como a soma dos quadrados dos lados do rectângulo B *planum* e observou, assim, que A *planum* $+ 2B$ *planum* era o quadrado da soma dos lados e A *planum* $- 2B$ *planum* o quadrado da sua diferença. Por outro lado, como o produto da diferença entre os lados procurados e a sua soma era igual à diferença entre os seus quadrados, Viète notou que o produto do quadrado da diferença entre os lados procurados e o quadrado da sua soma era igual ao quadrado da diferença entre os seus quadrados deduzindo, assim, que

$$A \textit{ plano-planum} - 4B \textit{ plano-planum} \text{ era igual a } D \textit{ plano-planum},$$

donde, obtinha

$$A \textit{ plano-planum} \text{ igual a } D \textit{ plano-planum} + 4B \textit{ plano-planum}$$

determinando, assim, a soma dos quadrados dos lados do rectângulo dado.

Viète possuía assim a soma dos quadrados dos lados do rectângulo dado, o que lhe permitia determinar os lados do próprio rectângulo, uma vez que podia utilizar *Zetéticas* II, 2, pois eram conhecidos o produto dos lados procurados (rectângulo dado) e a soma dos seus quadrados.

É de notar que Viète já tinha resolvido este problema para o caso de ser dada a soma dos quadrados dos lados do rectângulo em vez da diferença entre os mesmos, a saber no problema 2 deste mesmo Livro.

Nos problemas seguintes deste segundo Livro das *Zetéticas* (problemas 10, 11 e 12), dado um plano estabelecido pela soma de um rectângulo com o quadrado de cada um dos lados desse rectângulo, Viète pretendia determinar os lados do rectângulo dado. No caso do problema 10 era dado também um dos lados do rectângulo, sendo necessário determinar apenas o outro lado; no problema 11 era dada a soma dos lados do rectângulo; e no problema 12 era dado o próprio rectângulo.

Observe-se primeiramente a resolução do problema 10 dada por Viète.

Considerando *B planum* o plano que era a soma de um rectângulo com o quadrado de cada um dos lados desse rectângulo e *D* um dos lados, Viète tomou *A* como a soma do lado procurado com a metade do lado dado. Assim, $A - \frac{1}{2}D$ era o lado procurado e $A \textit{ quadratum} - D \text{ in } A + \frac{1}{4}D \textit{ quad.}$ o seu quadrado.

Viète conseguia deste modo determinar o rectângulo $D \text{ in } A - \frac{1}{2}D \textit{ quad.}$,

e o quadrado de cada lado, $D \textit{ quad.}$ e $A \textit{ quad.} - D \text{ in } A + \frac{1}{4}D \textit{ quad.}$.

Como $B \textit{ planum}$ era o plano dado que consistia na soma do rectângulo e dos quadrados de cada lado, Viète observou que

$$A\ quad. + \frac{3}{4}\ D\ quad.\ \text{era igual a}\ B\ planum,$$

donde,

$$A\ quad.\ \text{era igual a}\ B\ planum - \frac{3}{4}\ D\ quad.$$

a partir do que se determinava o lado procurado.

Viète exemplificou numericamente o seu raciocínio. Considerando *B planum* igual a 124 e *D* igual a 2, *A quad.* era igual a 121, donde, *A* era igual a 11 e, portanto, o lado procurado era igual a $11 - \frac{2}{2}$, ou seja, 10. Viète considerou ainda que se *D* fosse igual a 10, *A quad.* era igual a 49, donde, *A* era igual a 7 e, portanto, o lado procurado seria igual a $7 - \frac{10}{2}$, ou seja, 2.

No problema 11, Viète considerou novamente *B planum* como a soma de um rectângulo com os quadrados de cada um dos seus lados e tomou *G* como a soma dos próprios lados. Designando o rectângulo formado pelos lados procurados por *A planum*, Viète observou que, sendo o quadrado da soma dos lados procurados igual à soma dos quadrados de cada lado com o dobro do rectângulo,

$$G\ quad.\ \text{era igual}\ B\ planum + A\ planum,$$

donde,

$$A\ planum\ \text{era igual a}\ G\ quad. - B\ planum$$

e, portanto, determinava os lados procurados. Com efeito, Viète possuía a soma dos lados e o rectângulo formado por esses lados, pelo que bastava aplicar *Zetéticas* II, 4 para determinar os lados em questão.

Exemplificando numericamente este processo Viète considerou *B planum* igual a 124 e *G* igual a 12. Deste modo, *A planum* era igual a $12^2 - 124$, ou seja, 20 e uma vez que, aplicando o teorema[98] da proposição 13 das *Notas*

[98] «O quadrado da soma de dois lados menos o quadrado da sua diferença é igual ao quádruplo do plano formado pelos lados.» (Peyroux 1990, 44).

Preliminares, o quadrado da diferença entre os lados era igual a $12^2 - 4 \times 20$, ou seja, 64, por *Zetéticas* I, 1, os lados procurados eram iguais a $6 - \frac{1}{2}\sqrt{64}$, ou seja, 2 e $6 + \frac{1}{2}\sqrt{64}$, ou seja, 10.

Na resolução do problema 12, Viète observou que o processo de obter os lados em questão estava de acordo com o que tinha sido descoberto e exposto no problema anterior. De facto, como a soma do plano e do rectângulo dados era igual ao quadrado da soma dos lados procurados, Viète obtinha a soma dos lados procurados. Assim, aplicando o problema anterior, Viète determinava os lados procurados.

Viète também exemplificou numericamente este resultado. Considerando 124 o plano consistindo na soma de um rectângulo com o quadrado de cada um dos seus lados e 20 o próprio rectângulo, o quadrado da soma dos lados, pela *Zetéticas* anterior, era igual a 124 + 20, ou seja, 144. Assim, e usando novamente a proposição 13 das *Notas Preliminares*, o quadrado da diferença entre os lados era igual a $144 - 4 \times 20$, ou seja, 64 e, portanto, por *Zetéticas* I, 1 os lados procurados eram iguais a $6 - \frac{1}{2}\sqrt{64}$, ou seja, 2 e $6 + \frac{1}{2}\sqrt{64}$, ou seja, 10.

Nos dois problemas seguintes Viète propôs-se determinar as raízes, dadas a soma dos seus quadrados (respectivamente, cubos) e a sua diferença.

Na resolução de *Zetéticas* II, 13 considerando *D planum* a soma dos quadrados das raízes e *B planum* a sua diferença, Viète observou que o dobro do quadrado da maior raiz era *D planum* + *B planum* e que o dobro do quadrado da menor raiz era *D planum* – B *planum* e, portanto, obtendo os quadrados das raízes, estas eram facilmente determinadas.

A resolução de *Zetéticas* II, 14 dada por Viète é de raciocínio análogo. Viète considerou desta vez *B solidum* como a diferença entre os cubos das raízes e *D solidum* como a sua soma. Observou também que o dobro do cubo da maior raiz era *D solidum* + *B solidum* e o dobro do cubo da menor era igual a *D solidum* − *B solidum*, obtendo, portanto, as raízes procuradas.

Nos problemas seguintes, Viète estendeu à dimensão 3 uma das condições, respectivamente, dos problemas 9, 2, 7 e 6 deste mesmo Livro. Assim, nos dois primeiros (respectivamente, 15 e 16), Viète propôs-se determinar os lados de um rectângulo, dado o próprio rectângulo e, em vez da diferença/soma dos quadrados desses lados, dada a diferença/soma dos seus cubos. Nos seguintes, Viète propôs-se determinar duas raízes, dadas a diferença/soma entre as raízes e a diferença/soma entre os seus cubos. É de referir que Viète apresentou para cada um destes problemas duas resoluções, que expôs separadamente.

Observem-se as resoluções dadas por Viète.

Em *Zetéticas* II, 15 Viète propôs-se determinar os lados de um rectângulo, dada a diferença dos seus cubos e o próprio rectângulo.

Viète iniciou a resolução deste problema observando, através do que foi exposto nas *Notas Preliminares,* que o quadrado da soma dos cubos dos lados procurados menos o quadrado da sua diferença era igual ao quádruplo do cubo do rectângulo dado[99]. Assim, aplicando transposição, Viète determinou a soma dos cubos dos lados procurados e, aplicando *Zetéticas* II, 14 obteve os lados procurados.

Em *Zetéticas* II, 16, em vez da diferença dos cubos dos lados procurados, era dada a sua soma, sendo o problema de resolução análoga.

Os próximos problemas propostos por Viète neste segundo Livro eram dedicados à determinação das raízes, sendo no primeiro dadas a diferença entre as raízes e a diferença entre os seus cubos e no segundo a soma das raízes e a soma dos seus cubos. Viète indicou dois processos de resolução

---

[99] Em notação actual, sendo x e y as raízes $(x^3+y^3)^2-(x^3-y^3)^2=4(xy)^3$.

para cada um dos problemas referidos. Resolveu o primeiro em *Zetéticas* II, 17 e 19 e o segundo em *Zetéticas* II, 18 e 20.

Expõe-se o método de resolução do primeiro problema, sendo o do segundo análogo.

Em *Zetéticas* II, 17 dadas a diferença entre duas raízes, que Viète designou por B, e a diferença entre os seus cubos, designadas por D *solidum*, considerou E a soma das raízes a determinar. Assim, $E + B$ era igual ao dobro da maior raiz e $E - B$ era igual ao dobro da menor raiz. Por outro lado, Viète observou que a diferença entre o cubo de $E + B$ e o cubo de $E - B$ era igual a $6B \; in \; E \; quad. + 2B \; cubus$, consequentemente igual a $8D \; solidum$ e, portanto,

$$\frac{4 \; D \; solidum - B \; cubus}{3 \; B} \text{ era igual a } E \; quad..$$

Deste modo, Viète obteve a soma das raízes, e como por hipótese possuía a sua diferença, aplicando *Zetéticas* I, 1 conseguia determinar as raízes procuradas.

Exemplificando numericamente este raciocínio, Viète considerou B igual a 6 e D *solidum* igual a 504. Assim, o quadrado da soma das raízes (E *quad.*) era igual a $\frac{4 \times 504 - 6^3}{3 \times 6}$, ou seja, 100 e, portanto, a soma das raízes era igual a 10. Aplicando *Zetéticas* I, 1 a maior raiz era igual a 8 e a menor a 2.

Em *Zetéticas* II, 19 Viète forneceu o referido segundo processo de resolução. Tomando novamente B como a diferença entre as raízes e D *solidum* como a diferença entre os seus cubos, Viète considerou A *planum* o produto das raízes. Baseando-se novamente nas *Notas Preliminares*[100], Viète observou que a diferença entre os cubos das raízes e o cubo da diferença entre as raízes era igual ao sólido obtido do triplo do produto das raízes pela sua diferença[101]. Por esta razão,

$$D \; solidum - B \; cubus \text{ era igual } 3A \; planum \; in \; B$$

e, portanto, dividindo ambos os membros por $3B$,

---

[100] Nos teoremas referentes à génese do cubo de duas raízes.

[101] Em notação actual sendo x e y as raízes $(x^3 - y^3) - (x - y)^3 = 3xy.(x - y)$.

$$\frac{D\ solidum - B\ cubus}{3B} \text{ era igual a } A\ planum.$$

Viète estava assim nas condições de aplicar *Zetéticas* II, 15 e, portanto, obter as raízes, já que possuía o seu produto e a diferença entre os seus cubos.

Exemplificando numericamente este processo, Viète considerou B igual a 4 e $D\ solidum$ igual a 316. Assim, o produto das raízes, $A\ planum$, era igual a $\frac{316-4^3}{3\times 4}$, ou seja, 21 e, portanto, as raízes procuradas eram iguais a 7 e a 3.

Viète terminou esta resolução observando que se a diferença entre os lados fosse procurada a partir da diferença entre os seus cubos e do rectângulo formado por esses lados então $A\ planum$ era conhecido e, portanto, designar-se-ia por $F\ planum$ e a questão consistia em determinar B que seria designado por A. Assim, a equação que permitiria determinar a diferença entre os lados era

$$A\ cubus + 3F\ planum\ in\ A \text{ igual a } D\ solidum.$$

Analisam-se agora, os últimos dois problemas deste segundo Livro das *Zetéticas*.

Em *Zetéticas* II, 21 Viète propôs-se determinar duas raízes dados dois sólidos, um resultante do produto da diferença entre as raízes pela diferença dos seus quadrados, o outro resultante do produto da soma das raízes pela soma dos seus quadrados.

Considerando $B\ solidum$ o primeiro sólido e $D\ solidum$ o segundo, Viète tomou A como sendo a soma das raízes. Assim, $\frac{B\ solidum}{A}$ era o quadrado da diferença entre as raízes e $\frac{D\ solidum}{A}$ a soma dos quadrados das raízes. Ora, pela proposição 12 das *Notas Preliminares*, o quadrado da soma de duas raízes mais o quadrado da sua diferença era igual ao dobro da soma dos seus quadrados; portanto, o dobro da soma dos quadrados das raízes menos o quadrado da diferença entre as raízes era igual ao quadrado da soma das raízes e, então,

$$\frac{2D\ solidum - B\ solidum}{A}\ \text{era igual a}\ A\ quad..$$

Multiplicando ambos os membros por A,

$$2D\ solidum - B\ solidum\ \text{era igual a}\ A\ cubus$$

e, assim, Viète determinava a soma das raízes.

Viète obtinha também o quadrado da diferença entre as raízes, $\frac{B\ solidum}{A}$ e, portanto, a diferença entre as raízes; e, aplicando *Zetéticas* I, 1, as raízes eram determinadas.

Para exemplificar numericamente, Viète considerou $B\ solidum$ igual a 32 e $D\ solidum$ igual a 272. Assim, $A\ cubus$ era igual a $2 \times 272 - 32$, ou seja, 512 e, portanto, a soma das raízes, A, era igual a $\sqrt{}C.512$, ou seja, 8, o quadrado da diferença era $\frac{32}{8}$, ou seja, 4 logo, a diferença entre as raízes era $\sqrt{4}$, isto é 2. Assim, por *Zetéticas* I, 1 a menor raiz era igual a $\frac{8}{2}-\frac{2}{2}$, ou seja, 3 e a maior era $\frac{8}{2}+\frac{2}{2}$, isto é, 5.

Considerando ainda $B\ solidum$ igual a 10 e $D\ solidum$ igual a 20, Viète observou que $A\ cubus$ seria igual a 30 e, portanto, a soma das raízes, A, seria igual a $\sqrt{}C.30$. Assim, o quadrado da diferença era igual a $\sqrt{}C.\frac{100}{3}$ e, portanto, a diferença entre as raízes era igual a $\sqrt{}CC.\frac{100}{3}$. Deste modo, por *Zetéticas* I, 1 a menor raiz era igual a $\sqrt{}C.\frac{30}{8} - \sqrt{}CC.\frac{100}{192}$ e a maior era igual a $\sqrt{}C.\frac{30}{8} + \sqrt{}CC.\frac{100}{192}$

Viète observou ainda que Cardano, no problema 93 do capítulo 66 da *Arithmeticis*, referiu que para este último exemplo existia uma proporção entre as raízes, nomeadamente a menor estava para a maior assim como $2-\sqrt{3}$ estava para 1, ou como 1 estava para $2+\sqrt{3}$, embora Cardano tivesse omitido quais eram essas raízes (cf. Peyroux 1990, 100). De facto, usando a notação actual,

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{30}{8}}-\sqrt[6]{\frac{100}{192}}}{\sqrt[3]{\frac{30}{8}}+\sqrt[6]{\frac{100}{192}}}=2-\sqrt{3}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}.$$

Viète terminou este segundo livro das *Zetéticas* propondo o seguinte problema[102]:

É dada a soma dos quadrados e a razão entre o rectângulo e o quadrado da diferença dos seus lados, encontrar os lados. (Peyroux 1990, 101)

Considerando $B\,planum$ a soma dos quadrados dos lados procurados e a razão entre o rectângulo (produzido por esses lados) e o quadrado da diferença dos seus lados $\frac{R}{S}$, Viète tomou $A\ planum$ o rectângulo formado pelos lados procurados. Assim, o quadrado da diferença entre as raízes era $\frac{S\,in\,A\,planum}{R}$, portanto, quando adicionado ao dobro do rectângulo obtinha-se a soma dos quadrados dos lados procurados. Viète deduziu então que

$$\frac{S\,in\,A\,planum+2R\ in\,A\,planum}{R}\text{ era igual } B\,planum$$

e escrevendo sob a forma de proporção

$$\frac{S+2R}{R}\text{ era igual }\frac{B\,planum}{A\,planum},$$

donde, determinava o rectângulo formado pelos lados procurados. Deste modo, Viète possuía o rectângulo e a soma dos quadrados dos lados procurados bastando-lhe, portanto, aplicar *Zetéticas* II, 2 e determinar os lados em questão.

Exemplificando numericamente o processo obtido, Viète considerou a soma dos quadrados igual a 20 e a razão entre o rectângulo e o quadrado da diferença entre os seus lados como 2 estava para 1. Assim, o rectângulo

102 Problema vinte e dois.

formado pelos lados procurados era igual a $\frac{2\times 20}{1+2\times 2}$, ou seja, 8 e, portanto, o quadrado da diferença entre os lados era igual a $20 - 2 \times 8$, isto é, 4 e o quadrado da soma era igual a $20 + 2 \times 8$, isto é, 36. Logo, a diferença entre os lados era $\sqrt{4}$ e a soma $\sqrt{36}$. Assim, o lado menor era igual a $\sqrt{9}-\sqrt{1}$, ou seja, 2 e o lado maior era igual a $\sqrt{9}+\sqrt{1}$, ou seja, 4.

Considerando de novo a soma dos quadrados igual a 20 mas, tomando a razão entre o rectângulo e o quadrado da diferença entre os seus lados como 1 estava para 1, Viète observou que o rectângulo formado pelos lados procurados era igual a $\frac{1\times 20}{1+2\times 1}$, ou seja, $\frac{20}{3}$ e, portanto, o quadrado da diferença entre os lados era igual a $20 - 2 \times \frac{20}{3}$, ou seja, $\frac{20}{3}$ e o quadrado da soma era igual a $20 + 2 \times \frac{20}{3}$, ou seja, $\frac{100}{3}$. Logo, a diferença entre os lados era $\sqrt{\frac{20}{3}}$ e a soma $\sqrt{\frac{100}{3}}$. Assim, o lado menor era igual a $\sqrt{\frac{25}{3}}-\sqrt{\frac{5}{3}}$ e o lado maior era igual a $\sqrt{\frac{25}{3}}+\sqrt{\frac{5}{3}}$.

Viète terminou referindo que Cardano se enganou na resolução de um problema como este na *Arithmeticis*, a saber no capítulo 66 problema 94 (cf. Peyroux 1990, 101).

Como conclusão da análise deste Livro II, apresenta-se em notação actual uma síntese dos problemas abordados por Viète e respectiva correspondência na *Aritmética* de Diofanto:

Zetéticas II, 1	$\begin{cases} x.y = a \\ \frac{x}{y} = \frac{b}{c} \end{cases}$	
Zetéticas II, 2	$\begin{cases} x.y = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$	
Zetéticas II, 3	$\begin{cases} x.y = a \\ x - y = b \end{cases}$	*Aritmética* I, 30
Zetéticas II, 4	$\begin{cases} x.y = a \\ x + y = b \end{cases}$	*Aritmética* I, 27
Zetéticas II, 5	$\begin{cases} x - y = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$	
Zetéticas II, 6	$\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$	*Aritmética* I, 28
Zetéticas II, 7	$\begin{cases} x - y = a \\ x^2 - y^2 = b \end{cases}$	
Zetéticas II, 8	$\begin{cases} x + y = a \\ x^2 - y^2 = b \end{cases}$	*Aritmética* I, 29
Zetéticas II, 9	$\begin{cases} x.y = a \\ x^2 - y^2 = b \end{cases}$	
Zetéticas II, 10	$\begin{cases} x.y + x^2 + y^2 = a \\ y = b \end{cases}$	
Zetéticas II, 11	$\begin{cases} x.y + x^2 + y^2 = a \\ x + y = b \end{cases}$	
Zetéticas II, 12	$\begin{cases} x.y + x^2 + y^2 = a \\ x.y = b \end{cases}$	
Zetéticas II, 13	$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ x^2 - y^2 = b \end{cases}$	

Zetéticas II, 14	$\begin{cases} x^3 + y^3 = a \\ x^3 - y^3 = b \end{cases}$	
Zetéticas II, 15	$\begin{cases} x^3 - y^3 = a \\ x.y = b \end{cases}$	
Zetéticas II, 16	$\begin{cases} x^3 + y^3 = a \\ x.y = b \end{cases}$	
Zetéticas II, 17 e 19	$\begin{cases} x - y = a \\ x^3 - y^3 = b \end{cases}$	
Zetéticas II, 18 e 20	$\begin{cases} x + y = a \\ x^3 + y^3 = b \end{cases}$	
Zetéticas II, 21	$\begin{cases} (x-y).(x^2 - y^2) = a \\ (x+y).(x^2 + y^2) = b \end{cases}$	
Zetéticas II, 22	$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ \dfrac{x.y}{(x-y)^2} = \dfrac{b}{c} \end{cases}$	

Zetéticas III

O terceiro dos *Cinco Livros das Zetéticas* contém dezasseis problemas, sendo na maioria as quantidades desconhecidas proporcionais entre si, quantidades essas determinadas através da soma ou diferença dos extremos ou meios (cf.Busard 1991, 2515). Nos outros, as quantidades desconhecidas reduzem-se à procura de ternos pitagóricos.

Os dois primeiros problemas das *Zetéticas* III dedicam-se a determinar os extremos de uma proporção dados o meio proporcional de três segmentos de recta e a diferença (respectivamente, soma) entre os extremos.

Viète iniciou a resolução do problema 1 referindo que os extremos de uma proporção são como raízes e, portanto, que o quadrado do meio era igual ao produto dessas mesmas raízes. Deste modo, Viète conseguiu determinar o produto das raízes e, como por hipótese a diferença entre ambas era dada, Viète estava nas condições de aplicar *Zetéticas* II, 3 e assim determinar os extremos procurados.

A resolução de *Zetéticas* III, 2 é de raciocínio análogo para determinar o produto entre os extremos e, como a soma destes é dada, aplica-se *Zetéticas* II, 4 para a determinação dos mesmos.

Nos quatro problemas seguintes Viète propôs-se determinar dois lados de um triângulo rectângulo, dados o terceiro lado desse triângulo e a diferença/soma dos lados procurados. Assim, nos dois primeiros problemas, os lados a determinar eram a base e a hipotenusa e, nos outros dois, a base e a perpendicular.

Antes de prosseguir com a análise destes problemas, é de referir que Viète já os tinha proposto e resolvido em *Zetéticas* II. Enquanto que no Livro II são apresentados de uma forma geral, sem especificação de qual a sua aplicação, aqui, pelo facto de serem apresentados sob um cariz geométrico devido à evocação de triângulos rectângulos, está subjacente a procura de ternos pitagóricos mediante a aplicação da sua *logística especiosa*.

Como foi referido nas *Notas Preliminares*, o estudo de ternos pitagóricos era um tema nobre da matemática, sobretudo desde a "redescoberta" da obra de Diofanto. Ao abordar este assunto nas *Zetéticas*, Viète tentava mostrar a facilidade, maleabilidade e flexibilidade de aplicação do seu sistema de cálculo simbólico. Assim, estendendo-o a diferentes formas de procura de soluções para problemas já anteriormente propostos e resolvidos, como a seguir se inferirá, Viète prosseguia com o seu objectivo de justificar a aplicabilidade do seu método analítico.

Observe-se ainda que os problemas 3, 4, 5 e 6 deste terceiro Livro correspondem, respectivamente, aos problemas 7, 8, 5 e 6 do Livro II.

Em *Zetéticas* III, 3, Viète propôs-se determinar a base e a hipotenusa de um triângulo rectângulo, dada a perpendicular do mesmo e a diferença entre a hipotenusa e a base.

Viète iniciou a resolução de *Zetéticas* III, 3 referindo que este problema já tinha sido exposto anteriormente, isto porque era o mesmo que, dadas a diferença dos quadrados das raízes e a sua diferença, determinar as raízes[103]. Assim, observando que o quadrado da perpendicular era igual à diferença entre o quadrado da hipotenusa e o quadrado da base, Viète designou por D a perpendicular do triângulo rectângulo, por B a diferença entre a hipotenusa e a base e por A a soma da base com a hipotenusa. Então,

$$B \; in \; A \text{ era igual a } D \; quad.$$

e, por essa razão,

$$\frac{D quad.}{B} \text{ era igual a } A.$$

Deste modo, tendo a soma e a diferença entre a hipotenusa e a base, Viète conseguia determinar a base e a hipotenusa.

Viète terminou a resolução deste problema estabelecendo que

> A perpendicular de um triângulo rectângulo é [o meio] proporcional entre a diferença entre a base e a hipotenusa e a sua soma. (Peyroux 1990, 103)

Exemplificando numericamente este processo, Viète considerou D igual a 5 e B igual a 1. Assim, 1, 5 e 25 são proporcionais e por *Zetéticas* I, 1 a

---

[103] Cf. *Zetéticas* II, 7

hipotenusa era igual a $\frac{25}{2}+\frac{1}{2}$, ou seja, 13 e a base era igual a $\frac{25}{2}-\frac{1}{2}$, ou seja, 12.

O problema 4 é de raciocínio análogo, embora, em vez da diferença entre a hipotenusa e a base, seja dada a sua soma.

Como foi referido, os dois próximos problemas são parecidos com os dois anteriores, uma vez que Viète se propôs de novo determinar dois lados de um triângulo rectângulo, dada a sua diferença (respectivamente, a sua soma) e dado o terceiro lado. Assim, em *Zetéticas* III, 5 dada a hipotenusa de um triângulo rectângulo e a diferença entre os catetos, Viète pretendia determinar estes últimos. O problema 6 apenas difere do anterior pelo facto de ser dada a soma dos catetos em vez da sua diferença.

Observe-se a resolução de *Zetéticas* III, 5, já que o problema 6 é de resolução análoga.

Viète iniciou a resolução do problema 5 referindo que este já tinha sido exposto anteriormente uma vez que, pelo teorema de Pitágoras, o problema resumia-se a determinar os catetos dada a sua diferença e a soma dos seus quadrados, processo este resolvido em *Zetéticas* II, 5. Contudo, Viète apresentou outra resolução.

Considerando D a hipotenusa do triângulo rectângulo e B a diferença entre os seus catetos, Viète designou a soma dos mesmos por A. Deste modo, $A + B$ era igual ao dobro do maior cateto e $A - B$ igual ao dobro do menor. Calculando os quadrados respectivos e adicionando-os Viète observou que

$2A$ *quad.* $+ 2B$ *quad.* era igual a $4D$ *quad.*

e, portanto,

$2D$ *quad.* $- B$ *quad.* era igual a A *quad.*,

donde, se determinava a soma dos catetos. Como a diferença entre estes já era dada, aplicando *Zetéticas* I, 1 Viète determinava os catetos.

Para exemplificar numericamente o processo descrito, Viète considerou D igual a 13 e B igual a 7. Assim, A *quad.* era igual a $2 \times 13^2 - 7^2$, ou seja, 289, donde, A era igual a $\sqrt{289}$, ou seja, 17. Deste modo e aplicando *Zetéticas* I, 1, os catetos eram iguais a $\sqrt{72\frac{1}{4}}+3\frac{1}{2}$, ou seja, $\frac{17}{2}+\frac{7}{2}=12$ e a $\sqrt{72\frac{1}{4}}-3\frac{1}{2}$, isto é, $\frac{17}{2}-\frac{7}{2}=5$. Os catetos procurados eram então, respectivamente, 12 e 5.

No sétimo problema Viète propôs-se determinar, numericamente, três segmentos de recta proporcionais. Segundo Viète,

> São assumidas duas raízes que estão uma para a outra como um número para o outro, o maior extremo entre os proporcionais será semelhante ao quadrado da raiz assumida como sendo a maior, o meio [proporcional] ao produto das raízes e o menor extremo ao quadrado da raiz assumida como sendo a menor. (Witmer 1983, 116)

De facto, considerando B e D duas raízes racionais, Viète observou que se B fosse apresentado como o primeiro proporcional e D como o segundo, o terceiro proporcional era $\frac{D\,quad.}{B}$. Multiplicando todos os termos por B, o primeiro proporcional era então B *quad.*, o segundo proporcional B *in* D e o terceiro proporcional D *quad.*.

Viète terminou exemplificando este processo. Considerando B igual a 2 e D igual a 3, 2^2, ou seja, 4, 2×3, ou seja, 6 e 3^2, ou seja, 9 eram os proporcionais procurados.

Antes de prosseguir na análise dos próximos problemas, observe-se que o termo “numericamente”, utilizado por Viète, pretenderá ser uma chamada de atenção para o contexto aritmético do problema em questão. Aliás, nos problemas 8 e 9 deste mesmo Livro, como em vários problemas ao longo das próximas *Zetéticas*, far-se-á uso deste termo. Estes problemas devem pois ser entendidos como de aritmética, mas abordados por Viète de uma forma generalista, com recurso ao seu cálculo simbólico.

Nos problemas 8 e 9 das *Zetéticas* III, Viète mostrou como determinar, numericamente, um triângulo rectângulo a partir de três quantidades proporcionais.

Viète solucionou o problema 8 referindo que

> Estabelecendo três quantidades numericamente proporcionais, a hipotenusa [de um triângulo rectângulo] será semelhante à soma dos extremos, a base à sua diferença e a perpendicular ao dobro do meio. (Witmer 1983, 117)

Viète completou esta afirmação observando que já tinha mostrado no corolário da proposição 45 das *Notas Preliminares* e em *Zetéticas* III, 3 que a perpendicular de um triângulo rectângulo era o meio proporcional entre a soma da base com a hipotenusa e a sua diferença. De facto, dadas duas raízes racionais B e D, por *Zetéticas* III, 7, $B\ quad.$, $B\ in\ D$ e $D\ quad.$ eram três segmentos proporcionais. Como Viète mostrou na proposição 45 das *Notas Preliminares* que a hipotenusa era proporcional a $B\ quad. + D\ quad.$, a base era proporcional a $B\ quad. = D\ quad.$ e a perpendicular a $2B\ in\ D$, usando o corolário desta mesma proposição,

$$\frac{2B\, quad.}{2B\ in\, D} \text{ era igual a } \frac{2B\, in\, D}{2D\, quad.}.$$

Portanto, a partir de três quantidades numericamente proporcionais, Viète determinava numericamente um triângulo rectângulo, pois o dobro do meio era proporcional à perpendicular, a soma dos extremos era proporcional à hipotenusa e a sua diferença era proporcional à base.

Exemplificando este processo, Viète considerou três proporcionais: 4, 6 e 9. Assim, a hipotenusa do triângulo procurado era proporcional a $4+9$, ou seja, 13, a base a $9-4$, ou seja, 5 e a perpendicular a 2×6, ou seja, 12.

Na solução do problema 9, Viète observou que

> Assumindo duas raízes racionais, a hipotenusa [de um triângulo rectângulo] será semelhante à soma dos seus quadrados, a base à diferença entre os mesmos e a perpendicular ao dobro do produto das raízes. (Witmer 1983, 117)

De facto, o problema 9 é um corolário dos problemas 7 e 8. Com efeito, dados B e D, duas raízes racionais, pode passar-se imediatamente ao triângulo rectângulo de hipotenusa proporcional à soma dos seus quadrados, de base proporcional à diferença entre os mesmos e a perpendicular proporcional ao dobro do seu produto, sem mencionar explicitamente a proporcionalidade $\frac{B^2}{BD}=\frac{BD}{D^2}$.

Como exemplo numérico, Viète considerou novamente B igual a 2 e D igual a 3. A hipotenusa seria então proporcional a 2^2+3^2, ou seja, 13, a base proporcional a 3^2-2^2, isto é, 5 e a perpendicular proporcional a $2\times 2\times 3$, isto é, 12.

Os próximos três problemas deste Livro III são dedicados à determinação dos extremos de uma proporção de três proporcionais sendo dados a soma dos quadrados dos três proporcionais e, respectivamente, um dos extremos ou a soma dos extremos ou o meio proporcional.

Em *Zetéticas* III, 10, dados a soma dos quadrados de cada um dos três proporcionais e um dos extremos, Viète propôs-se determinar o outro extremo. Viète iniciou a resolução salientando que isto já tinha sido apresentado e demonstrado anteriormente, não existindo portanto nenhum novo método envolvido na determinação do extremo procurado (cf. Witmer 1983, 118). De facto, em *Zetéticas* II, 10, Viète já tinha resolvido este problema uma vez que, em notação actual, sendo x, y e z três proporcionais com $\frac{x}{z}=\frac{z}{y}$ a resolução do sistema $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a \\ y=b \end{cases}$ reduzia-se à resolução do sistema $\begin{cases} x.y+x^2+y^2=a \\ y=b \end{cases}$.

Por outro lado, observou que

A soma dos quadrados [de cada um dos três proporcionais] menos três quartos do quadrado do extremo dado é igual ao quadrado da soma da metade do extremo dado com o todo do outro [extremo] que se procura. (Witmer 1983, 118)

Assim, tomando B *planum* a soma dos quadrados de cada um dos três proporcionais, D um dos extremos da proporção e A como a soma do extremo procurado com $\frac{1}{2}D$, Viète obtinha a equação

$$A \textit{ quad.} \text{ igual a } B \textit{ planum} - \frac{3}{4}D \textit{ quad.},$$

donde, determinava A e o extremo procurado, $A-\frac{1}{2}D$.

Exemplificando numericamente este processo, Viète considerou a soma dos quadrados dos três proporcionais igual a 21 e o maior extremo igual a 4. Assim, o quadrado da soma do extremo procurado (o menor) com a metade do extremo dado era igual a $21 - \frac{3}{4} \times 4^2$, ou seja, 9 e, portanto, o extremo procurado era igual a $\sqrt{9}-\frac{1}{2}\times 4$, ou seja, 1.

Considerando novamente a soma dos quadrados dos três proporcionais igual a 21, Viète exemplificou de novo o seu processo mas, desta vez, tomando o menor extremo igual a 1. Assim, o quadrado da soma do extremo procurado com a metade do extremo dado era igual a $21-\frac{3}{4}\times 1^2$, ou seja, $\frac{81}{4}$ e, portanto, o extremo procurado era igual a $\sqrt{\frac{81}{4}}-\frac{1}{2}\times 1$, ou seja, 4.

No problema seguinte, dando novamente a soma dos quadrados de cada um dos três proporcionais e desta vez a soma dos extremos, Viète pretendia determinar cada um dos extremos. Viète iniciou a resolução do problema referindo que

> O quadrado da soma dos extremos menos a soma dos quadrados dos três [proporcionais individuais] é igual ao quadrado do meio. (Peyroux 1990, 106)

De facto, sendo $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ então $(a + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 2ac - b^2 = b^2$, porque $ac = b^2$. Deste modo, Viète conseguia determinar o meio proporcional; assim, possuía as duas condições necessárias (a saber o meio proporcional e a soma dos extremos) para aplicar *Zetéticas* III, 2 e, portanto, determinar os extremos procurados.

Para exemplificar numericamente o processo descrito, Viète considerou a soma dos quadrados dos três proporcionais novamente igual a 21 e a soma dos extremos igual a 5. Assim, o quadrado do meio era igual a $5^2 - 21$, ou seja, 4 logo, o meio era igual a $\sqrt{4}$, ou seja, 2 e, portanto, os extremos procurados eram iguais a 1 e 4.

Observe-se que Viète podia ter resolvido este problema utilizando *Zetéticas* II, 11. Em notação actual, sendo x, y e z três proporcionais tais que $\frac{x}{y}=\frac{y}{z}$ o problema consistia em resolver o sistema $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a \\ x+z=b \end{cases}$ que se reduzia a resolver o sistema $\begin{cases} x^2+x.z+z^2=a \\ x+z=b \end{cases}$, ou seja, o problema 11 do segundo Livro.

Em *Zetéticas* III, 12 Viète propôs-se determinar os extremos, novamente a partir da soma dos quadrados de cada um dos três proporcionais e também do meio proporcional. Na resolução deste problema, Viète começou por referir que

> A soma dos quadrados a partir dos três [proporcionais individuais] mais o quadrado do meio proporcional é igual ao quadrado da soma dos extremos. (Peyroux 1990, 106)

Deste modo, Viète conseguia, através da «(...) arte da transposição.» (Witmer 1983, 119), determinar a soma dos extremos e, portanto, o problema reduzia-se ao problema anterior.

Exemplificando numericamente este processo, Viète considerou, mais uma vez, a soma dos quadrados dos três proporcionais igual a 21 e o meio proporcional igual a 2. Assim, o quadrado da soma dos dois extremos era igual a $21 + 2^2$, ou seja, 25 logo, a soma dos extremos era igual a 5 e, portanto, os extremos procurados eram iguais a 1 e a 4.

Os últimos quatro problemas das *Zetéticas* III são referentes a sequências de quatro proporcionais contínuos. Dada a diferença (respectivamente, a soma) entre os extremos e a diferença (respectivamente, a soma) entre os meios, Viète propôs-se determinar esses proporcionais. O primeiro caso (isto é, dada a diferença entre os extremos e a diferença entre os meios) foi resolvido por Viète nos problemas 13 e 15, enquanto que nos problemas 14 e 16 Viète resolveu o caso da soma.

Viète iniciou o estudo do problema 13, referindo que este envolvia na sua resolução o método que já tinha sido utilizado no Livro II das *Zetéticas*, problema 17, em que se pedia para determinar as raízes dadas a sua diferença e a diferença entre os seus cubos (cf. Peyroux 1990, 107). Viète referiu ainda que esta afirmação seria evidente através do processo que iria descrever (cf. Witmer 1983, 119).

Considerando D a diferença entre os extremos numa série de quatro proporcionais contínuos, B a diferença entre os meios, Viète tomou A como a soma dos extremos. Deste modo, $A + D$ seria o dobro do maior extremo e $A - D$ o dobro do menor extremo. Portanto, multiplicando $A + D$ por $A - D$ Viète obteve o quádruplo do produto dos meios ou dos extremos, notando que $\frac{A\,quad. - D\,quad.}{4}$ era um rectângulo. Seguidamente, Viète observou que o produto de $\frac{A\,quad. - D\,quad.}{4}$ pelo maior extremo produzia o cubo do maior meio, que o produto de $\frac{A\,quad. - D\,quad.}{4}$ pelo menor extremo produzia o cubo do menor meio e que o produto de $\frac{A\,quad. - D\,quad.}{4}$ pela diferença dos dois extremos produzia a diferença entre os cubos dos meios, ou seja, $\frac{D\,in\,A\,quad. - D\,cubus}{4}$ era igual à diferença entre os cubos dos meios. De facto, na notação actual, considerando x_1, x_2, y_1, y_2 quatro proporcionais contínuos tais que x_1 e x_2 são os extremos (com $x_1 > x_2$) e y_1 e y_2 os meios (com $y_1 > y_2$) tem-se:

$$x_1x_2 \times x_1 = y_1 y_2 x_1 = y_1 y_1^2 = y_1^3$$
$$x_1x_2 \times x_2 = y_1 y_2 x_2 = y_2^3$$
$$x_1x_2 \times (x_1 - x_2) = x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2 = y_1^3 - y_2^3.$$

Por outro lado, Viète observou que a diferença entre os cubos de duas quaisquer raízes menos o cubo da sua diferença era igual ao triplo do produto da diferença entre as raízes e o rectângulo construído a partir destas. Em notação actual, $(a^3 - b^3) - (a - b)^3 = 3a^2b - 3ab^2 = 3(a - b).ab$, sendo a e b as raízes. Viète referiu ainda que este argumento decorria do desenvolvimento do cubo da diferença entre duas raízes (cf. Witmer 1983, 119). Assim, como $\frac{D \text{ in } A \text{ quad.} - D \text{ cubus}}{4}$ era igual à diferença entre os cubos dos meios, B igual à diferença entre os meios e $\frac{A \text{ quad.} - D \text{ quad.}}{4}$ igual ao produto destes, aplicando a identidade atrás referida, vinha

$$\frac{D \text{ in } A \text{ quad.} - D \text{ cubus}}{4} - B \text{ cubus} \text{ era igual a } 3B \text{ in} \frac{A \text{ quad.} - D \text{ quad.}}{4},$$

ou seja,

$$\frac{D \text{ in } A \text{ quad.} - D \text{ cubus} - 4B \text{ cubus}}{4} \text{ igual a } \frac{B \text{ in } 3A \text{ quad.} - B \text{ in } 3D \text{ quad.}}{4}.$$

Deste modo, ordenando esta última igualdade Viète obteve

$$\frac{D \text{ cubus} + 4B \text{ cubus} - B \text{ in } 3D \text{ quad.}}{D - 3B} \text{ igual a } A \text{ quad.},$$

donde determinava A e, portanto, aplicando *Zetéticas* I, 1, encontrava os extremos. Viète fica por aqui, não indicando qual dos problemas anteriores usaria para levar a resolução deste ao fim, isto é, como calcularia os meios.

Pela análise do Livro II observa-se que os meios podiam ser determinados aplicando *Zetéticas* II, 17, problema referido no início da resolução dada por Viète, ou mesmo *Zetéticas* II, 19, uma vez que $\frac{D \text{ in } A \text{ quad.} - D \text{ cubus}}{4}$ era igual à diferença entre os cubos dos meios e a diferença entre estes era dada por hipótese. Mas, mais natural, talvez seja a utilização de *Zetéticas* II, 3. É que, fazendo os cálculos respectivos, vem uma expressão relativamente simples para o produto dos meios em função de B e D, a saber $\frac{B\,cubus}{D-3B}$. Assim, tendo o produto dos meios e como a diferença entre estes era dada por hipótese, por *Zetéticas* II, 3 os meios eram facilmente determinados. Viète poderia também ter aplicado o problema 15 do mesmo Livro, pois, por hipótese, possuía a diferença entre os cubos dos meios.

Como exemplo numérico, Viète considerou D igual a 7 e B igual a 2. Assim, o quadrado da soma dos extremos era igual a $\frac{7^3+4\times 2^3-2\times 3\times 7^2}{7-3\times 2}$, ou seja, 81, logo, a soma dos extremos era igual a $\sqrt{81}$, ou seja, 9 e, portanto, os extremos eram iguais a $\frac{9}{2}-\frac{7}{2}$, ou seja, 1 e $\frac{9}{2}+\frac{7}{2}$, isto é, 8. Viète terminou então, referindo que os meios eram iguais, respectivamente, a 2 e a 4. De facto, e aplicando, por exemplo, o problema 17 do Livro II, a diferença entre os cubos dos meios era igual a $\frac{7\times 81-7^3}{4}$, ou seja 56 e, portanto, o quadrado da soma dos meios era igual a $\frac{4\times 56-2^3}{3\times 2}$, isto é, 36. Assim, a soma dos meios era igual a $\sqrt{36}$, ou seja, 6 e, portanto, os meios eram iguais a $\frac{6}{2}-\frac{2}{2}$, ou seja, 2 e $\frac{6}{2}+\frac{2}{2}$, isto é, 4. Como conclusão, Viète referiu que a sequência de proporcionais contínuos procurados era $1, 2, 4, 8$.

Outro processo para determinar os meios podia ser através da aplicação da *Zetéticas* II, 3. Uma vez que Viète possuía a diferença entre os extremos, D, e a diferença entre os meios, B, o produto dos meios era igual a $\frac{2^3}{7-3\times 2}$, ou seja, 8. Assim, pelo problema 3, o quadrado da soma dos meios era igual a $2^2+4\times 8$, isto é, 36 e, portanto, a soma dos meios era igual a 6. Aplicando *Zetéticas* I, 1 os meios eram, respectivamente, 2 e 4.

No problema 15, como referido, Viète propôs uma outra resolução deste problema. Referindo novamente que o método utilizado na resolução de *Zetéticas* II, 17 seria usado neste processo de resolução, Viète considerou de novo D como a diferença entre os extremos e B a diferença entre os meios numa sequência de quatro proporcionais contínuos e A *planum* o rectângulo formado pelos meios ou os extremos. Viète observou também, como já o tinha feito no problema 13, que o cubo do maior meio era igual ao produto do maior extremo pelo rectângulo formado pelos extremos e que o cubo do menor meio era igual ao produto do menor extremo pelo rectângulo formado pelos extremos. Deste modo, D *in* A *planum* era igual à diferença entre os cubos dos meios. Considerando de novo que a diferença entre os cubos de duas quaisquer raízes menos o cubo da sua diferença era igual ao triplo do produto da diferença entre as raízes e o rectângulo construído a partir destas, Viète obteve

$$D \textit{ in } A \textit{ planum} - B \textit{ cubus} \text{ igual a } B \textit{ in } 3A \textit{ planum}$$

e, portanto, ordenando a igualdade

$$\frac{B \textit{ cubus}}{D - 3B} \text{ era igual a } A \textit{ planum}.$$

Viète conseguia, assim, determinar o produto dos meios/extremos e como por hipótese a diferença entre os meios/extremos era dada, por *Zetéticas* II, 3, os meios e os extremos eram facilmente determinados (cf. Witmer 1983, 122).

Exemplificando numericamente este processo, Viète considerou de novo D igual a 7 e B igual a 2. Assim, o rectângulo formado pelos extremos era igual a $\frac{2^3}{7-3\times 2}$, ou seja, 8 e, portanto, os extremos eram iguais a 1 e 8, e os meios a 2 e 4. Logo, 1, 2, 4 e 8 eram a sequência de proporcionais contínuos procurados.

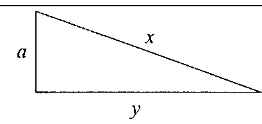
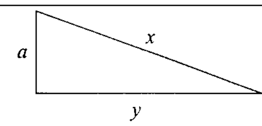
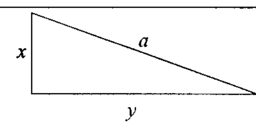
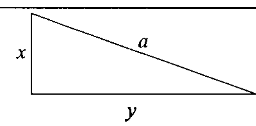
Viète terminou esta resolução referindo que se a diferença entre os meios fosse procurada a partir da diferença entre os extremos e do rectângulo formado por estes, então, A *planum* era conhecido e, portanto, designar-se-ia por F *planum* e a questão consistiria em determinar B que seria designado por A. Assim, a equação que permitiria determinar a diferença entre os meios era

A *cubus* $+ 3F$ *planum in* A igual a F *planum in* D.

Finalmente nos problemas 14 e 16 Viète determinou os proporcionais referentes a uma sequência de quatro proporcionais contínuos dada a soma dos seus extremos e a soma dos seus meios.

Viète iniciou a resolução do problema 14 referindo que este envolvia na sua resolução o método utilizado num problema que já tinha sido discutido no Livro II das *Zetéticas*, problema 18, em que se pedia para determinar as raízes, dada a sua soma e a soma dos seus cubos (cf. Peyroux 1990, 98). Viète referiu ainda que esta afirmação seria evidente através do processo que iria descrever (cf. Witmer 1983, 120). Considerando D a soma dos extremos, B a soma dos meios e A a diferença entre os extremos, o processo de resolução apresentado por Viète é de raciocínio análogo ao utilizado no problema 13. No problema 16, como foi referido, Viète propôs uma outra resolução salientando novamente que o método utilizado seria o do processo de resolução de *Zetéticas* II, 18. Considerando Z a soma dos extremos, G a soma dos meios, e A *planum* o rectângulo formado pelos meios ou pelos extremos, o processo de resolução apresentado por Viète é de raciocínio análogo ao utilizado no problema 15.

Como conclusão da análise deste Livro III, apresenta-se em notação actual uma síntese dos problemas abordados por Viète:

Zetéticas III, 1	$\begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{a}{y} \\ x - y = b \end{cases}$
Zetéticas III, 2	$\begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{a}{y} \\ x + y = b \end{cases}$
Zetéticas III, 3	$\begin{cases} x^2 - y^2 = a^2 \\ x - y = b \end{cases}$ 
Zetéticas III, 4	$\begin{cases} x^2 - y^2 = a^2 \\ x + y = b \end{cases}$ 
Zetéticas III, 5	$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x - y = b \end{cases}$ 
Zetéticas III, 6	$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x + y = b \end{cases}$ 
Zetéticas III, 7	Determinar numericamente três rectas proporcionais.
Zetéticas III, 8	Determinar numericamente um triângulo rectângulo.
Zetéticas III, 9	Determinar numericamente um triângulo rectângulo. (Corolário das *Zetéticas* III, 7 e 8)

Zetéticas III, 10	$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{z} \\ x^2 + y^2 + z^2 = a \\ x = b \end{cases}$
Zetéticas III, 11	$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{z} \\ x^2 + y^2 + z^2 = a \\ x + z = b \end{cases}$
Zetéticas III, 12	$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{z} \\ x^2 + y^2 + z^2 = a, \text{ ou seja, } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a \\ x.z = b^2 \end{cases} \\ y = b \end{cases}$
Zetéticas III, 13 e 15	$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{z} = \dfrac{z}{w} \\ x - w = a \\ y - z = b \end{cases}$
Zetéticas III, 14 e 16	$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{z} = \dfrac{z}{w} \\ x + w = a \\ y + z = b \end{cases}$

Zetéticas IV

O quarto Livro contém vinte problemas, sendo alguns indeterminados do 2º e 3º grau. São exemplo, os problemas 2 e 3 em que se pretende dividir um número que é a soma de dois quadrados, em dois outros quadrados (cf. Busard 1991, 2515).

No primeiro problema deste quarto Livro das *Zetéticas*, Viète propôs-se encontrar, numericamente, dois quadrados iguais a um quadrado dado. Note-se, como se referiu no Livro III, que este e os seguintes são problemas para serem compreendidos e resolvidos num contexto aritmético.

Diofanto também propôs e resolveu este problema em *Aritmética* II, 8:

> Dividir um quadrado proposto em dois quadrados. (Eecke 1959, 53)

Trata-se de um problema famoso na história da matemática. Segundo Eecke,

> Foi este problema de Diofanto que deu lugar a uma nota célebre de Fermat escrita na margem do seu exemplar da edição greco-latina de Diofanto, publicada pela primeira vez por Bachet de Meziriac, Paris, em 1621. Esta nota enuncia da maneira seguinte o que nós chamamos o grande teorema de Fermat: «(...) é impossível dividir um cubo em dois cubos, ou um biquadrado em dois biquadrados, ou, mais geralmente, uma potência qualquer, excepto o quadrado, em duas potências tendo o mesmo expoente. Eu descobri uma demonstração verdadeiramente maravilhosa deste facto; mas a margem é muito pequena para a conter» (...)». (Eecke 1959, 53-54)

Por outras palavras, o teorema de Fermat refere que a equação $x^m + y^m = z^m$ não pode ser resolvida em números racionais para nenhuma potência expressa por um número $m > 2$.

Na resolução deste problema, Diofanto propôs-se dividir 16 em dois quadrados. Designando o primeiro quadrado procurado por 1 quadrado de *aritmo*, Diofanto observou que o outro quadrado seria 16 unidades menos 1 quadrado de *aritmo*. Construindo um quadrado a partir da diferença entre um número qualquer de *aritmos* e a raiz do quadrado que se pretendia dividir, Diofanto especificou-o como sendo o quadrado da diferença entre 2 *aritmos* e 4 unidades. Por conseguinte, igualou-o ao segundo quadrado procurado, isto é, a 16 unidades menos 1 quadrado de *aritmo*. Associando termos semelhantes com termos semelhantes, Diofanto obteve 5 quadrados de *aritmos* igual a 16 *aritmos*, donde 1 *aritmo* era igual a $\frac{16}{5}$ e, portanto, os números procurados eram $\frac{256}{25}$ e $\frac{144}{25}$. De facto, $\frac{256}{25}+\frac{144}{25}=\frac{400}{25}=16$.

Sobre este problema Eecke revela, em nota de rodapé, uma curiosa anotação, colocada na margem do manuscrito de Madrid (Codex Matritensis 48) do século XIII, revelado por Tannery: «Que a tua alma, Diofanto, esteja com Satanás pela dificuldade dos teus outros teoremas e sobretudo deste mesmo teorema» (Eecke 1959, 54).

Observe-se agora a resolução apresentada por Viète do problema *Zetéticas* IV, 1.

Viète iniciou a resolução deste problema mostrando o processo a utilizar na procura da solução do mesmo.

Designando $F\,quad.$ o quadrado dado, Viète considerou um triângulo rectângulo em que, numericamente, a hipotenusa era Z, a base B e a perpendicular D. Seguidamente, considerou um outro triângulo rectângulo semelhante a este, tendo F como hipotenusa; logo, $\frac{B\ in\ F}{Z}$ e $\frac{D\ in\ F}{Z}$ eram, respectivamente, a base e a perpendicular deste triângulo. Deste modo, aplicando o teorema de Pitágoras, Viète observou que $F\,quad.$ era igual ao quadrado de $\frac{B\ in\ F}{Z}$ mais o quadrado de $\frac{D\ in\ F}{Z}$, portanto, $\frac{B\ in\ F}{Z}$ e $\frac{D\ in\ F}{Z}$ eram os quadrados procurados.

Viète continuou a resolução, referindo que «(...) a análise de Diofanto (...)» (Peyroux 1990, 111) coincidia com isto. De acordo com esta, pretendia-se dividir $B\,quad.$ em dois quadrados. Designando o lado do primeiro quadrado por A, correspondendo na *Aritmética* II, 8 a 1 *aritmo*, e o lado do segundo por

$B-\frac{S\ in\ A}{R}$, correspondendo ao simétrico do considerado por Diofanto em *Aritmética* II, 8, o quadrado do primeiro seria $A\,quad.$ e o quadrado do segundo $B\ quad. - \frac{S\ in\ A\ in\ 2B}{R} + \frac{S\ quad.\ in\ A\ quad.}{R\ quad.}$ e, portanto, a soma destes dois quadrados era igual a $B\,quad.$. Ordenando a igualdade,

$$\frac{S\ in\ R\ in\ 2B}{S\ quad. + R\ quad.} \text{ era igual a } A,$$

ou seja, o lado do primeiro quadrado, e executando as respectivas substituições $\frac{R\ quad.\ in\ B - S\ quad.\ in\ B}{S\ quad. + R\ quad.}$ era igual ao lado do segundo quadrado; logo, tornava-se possível a divisão de $B\,quad.$ em dois quadrados. Observe-se que, para Viète, a expressão que representava o lado do segundo quadrado só tinha significado se R fosse maior que S. Viète não referiu isso, uma vez que tinha liberdade de escolher R e S de modo a que não ocorressem quantidades negativas.

Viète referiu ainda que esta divisão de $B\,quad.$ correspondia ao que tinha descrito no início desta resolução. De facto, e segundo Viète, criando um triângulo rectângulo, numericamente, a partir dos lados S e R, a hipotenusa seria semelhante a $S\,quad. + R\,quad.$, a base a $S\,quad. = R\,quad.$ e a perpendicular a $S\,in\,2R$, conforme a proposição 45 das *Notas Preliminares*. Assim, e de modo a dividir $B\,quad.$ em dois quadrados, Viète notou que $S\,quad. + R\,quad.$ estava para B, a hipotenusa do triângulo semelhante, assim como $R\,quad. - S\,quad.$ estava para a sua base, $\frac{R\,quad.in\,B - S\,quad.in\,B}{S\,quad. + R\,quad.}$, que era o lado de um dos quadrados individuais, e assim como $S\,in\,2R$ estava para a perpendicular, $\frac{S\,in\,R\,in\,2B}{S\,quad. + R\,quad.}$, o outro lado.

Exemplificando numericamente este processo, Viète tomou B igual a 100 (o quadrado que se pretendia dividir). Considerando, numericamente, um triângulo rectângulo construído a partir de R igual a 4 e S igual a 3, a hipotenusa era igual a $4^2 + 3^2$, ou seja 25, a base igual a $4^2 - 3^2$, ou seja 7, e a perpendicular igual a $2 \times 4 \times 3$, ou seja 24. Assim, os lados dos quadrados procurados eram iguais a $\frac{4^2 \times 100 - 3^2 \times 100}{4^2 + 3^2}$, isto é 28, e $\frac{3 \times 4 \times 2 \times 100}{4^2 + 3^2}$, isto é 96.

Nos dois próximos problemas das *Zetéticas* IV, Viète propôs-se dividir, numericamente, um número, que era a soma de dois quadrados dados, em dois outros quadrados. Este problema encontrava-se proposto e resolvido em *Aritmética* II, 9 de Diofanto:

Dividir um número dado, o qual é soma de dois quadrados, em dois outros quadrados. (Eecke 1959, 55)

Na resolução do seu problema, Diofanto propôs-se dividir 13, que era a soma de 4 e 9, em dois quadrados. Tomando as raízes de 4 e 9, a saber 2 e 3, Diofanto considerou uma das raízes dos quadrados procurados igual a 1 *aritmo* mais 2 unidades e a outra raiz igual a uma quantidade de *aritmos* menos 3 unidades que especificou por 2 *aritmos* menos 3 unidades. Deste modo, um dos quadrados seria 1 quadrado de *aritmo* mais 4 *aritmos* mais 4 unidades e outro 4 quadrados de *aritmos* mais 9 unidades menos 12 *aritmos*. Igualando a soma destes dois quadrados a 13 unidades, Diofanto obteve 5 quadrados de *aritmos* mais 13 unidades menos 8 *aritmos* igual a 13 unidades e, portanto, 1 *aritmo* era igual a $\frac{8}{5}$. Assim, o primeiro quadrado seria $\frac{324}{25}$ e o segundo $\frac{1}{25}$.

Observe-se as resoluções apresentadas por Viète.

Viète iniciou a resolução do problema 2 mostrando o processo a utilizar para resolver o enunciado proposto.

Tomando $B\,quad.$ e $D\,quad.$ os quadrados dados, Viète considerou um triângulo rectângulo de base B, perpendicular D e hipotenusa Z. Uma vez que o quadrado da hipotenusa era igual a $B\,quad. + D\,quad.$, Viète observou que Z seria um lado racional ou irracional. Construindo, numericamente, um outro triângulo rectângulo com a hipotenusa igual a X, a base F e a perpendicular G, Viète estabeleceu a construção de um outro terceiro triângulo rectângulo que podia ser obtido tanto por sinérese como por diérese, de acordo com a proposição 46 das *Notas Preliminares*. Assim, através do primeiro método, a hipotenusa seria proporcional a $Z in X$, a perpendicular a $B in G + D in F$ e a base a $B in F = D in G$. Pelo segundo método, a hipotenusa seria proporcional a $Z in X$, a perpendicular a $B in G = D in F$ e a base a $B in F + D in G$.

Dividindo por X todos os lados do terceiro triângulo rectângulo formado por via de sinérese, a hipotenusa seria proporcional a Z, a base a $\frac{B in F = D in G}{X}$ e a perpendicular a $\frac{B in G + D in F}{X}$. Viète notou ainda que, dividindo por X todos os lados do triângulo rectângulo formado por via de diérese, a hipotenusa seria também proporcional a Z, mas a base seria proporcional a $\frac{B in F + D in G}{X}$ e a perpendicular a $\frac{B in G = D in F}{X}$. Viète observou, então, que a soma dos quadrados dos catetos deste terceiro triângulo rectângulo, sinerésico ou dierésico, era igual ao quadrado da hipotenusa Z que era igual a $B quad. + D quad.$ e, portanto, obtinha-se o pretendido.

Viète prosseguiu referindo que «(...) a análise de Diofanto (...)» (Peyroux 1990, 112), resumia-se a isto, ao pretender dividir $Z\ planum$ ou $Z\ quad.$, já dividido em dois quadrados, a saber $B quad. + D quad.$, em dois novos quadrados.

Viète designou o lado do primeiro quadrado por $A + B$, correspondendo na *Aritmética* II, 9 a 1 *aritmo* mais 2 unidades, e o lado do segundo quadrado por $\frac{S in A}{R} - D$, correspondendo na *Aritmética* II, 9 a 2 *aritmos* menos 3 unidades[104]. Deste modo, calculando a soma dos quadrados destes dois lados e igualando à soma dos dois quadrados dados, Viète notou que

[104] Observe-se que, na resolução de Diofanto, 2 era raiz de um dos quadrados dados, a saber 4, e 3 era raiz do outro, a saber 9. Na resolução de Viète, 2 e 3 são generalizados sob a forma de B e D, respectivamente.

$A\ quad. + B\ in\ 2A + B\ quad. + \dfrac{S\ quad.in\ A\ quad.}{R\ quad.} - \dfrac{S\ in\ D\ in\ 2A}{R} + D\ quad.$ era igual a $B\ quad. + D\ quad.$. Ordenando a igualdade, Viète obteve

$$\frac{S\ in\ R\ in\ 2D - R\ quad.in\ 2B}{S\ quad. + R\ quad.} \text{ igual a } A$$

e, portanto, executando as respectivas substituições, o lado do primeiro quadrado era $\dfrac{S\ in\ R\ in\ 2D + S\ quad.in\ B - R\ quad.in\ B}{S\ quad. + R\ quad.}$ e o lado do segundo era $\dfrac{S\ quad.in\ D - S\ in\ R\ in\ 2B - R\ quad.in\ D}{S\ quad. + R\ quad.}$. Observe-se ainda que, para Viète, estas expressões só tinham significado se representassem quantidades positivas. Witmer (1983, 126) salienta este facto utilizando o símbolo =. Assim, seguindo a sugestão de Witmer, as raízes quadradas procuradas eram, respectivamente, $\dfrac{\overline{S\ in\ R\ in\ 2D + S\ quad.in\ B} = R\ quad.in\ B}{S\ quad. + R\ quad.}$ e $\dfrac{S\ quad.in\ D = \overline{S\ in\ R\ in\ 2B + R\ quad.in\ D}}{S\ quad. + R\ quad.}$.

Viète observou ainda que a construção de dois novos quadrados cuja soma era igual à soma dos dois quadrados dados correspondia ao que tinha descrito no início desta resolução. De facto, e segundo Viète, considerando três triângulos rectângulos:

– o primeiro com hipotenusa, racional ou irracional, Z, base B e perpendicular D;

– o segundo construído a partir dos lados S e R, portanto, com hipotenusa proporcional a $S\ quad. + R\ quad.$, a base proporcional a $S\ quad. - R\ quad.$ e a perpendicular proporcional a $S\ in\ 2R$, conforme a proposição 45 das *Notas Preliminares*;

– e o terceiro construído a partir dos dois atrás referidos por via de diérese, sendo os lados deste último divididos por $S\ quad. + R\ quad.$;

verificava-se que a soma dos quadrados dos catetos do primeiro triângulo era igual à soma dos quadrados dos catetos do terceiro triângulo. É de notar que $\dfrac{S\ in\ R\ in\ 2D + S\ quad.in\ B - R\ quad.in\ B}{S\ quad. + R\ quad.}$ era igual a um dos catetos do terceiro triângulo e que $\dfrac{S\,quad.in\,D - S\,in\,R\,in\,2B - R\,quad.in\,D}{S\,quad. + R\,quad.}$ era igual ao outro cateto.

Viète referiu também que, se se considerasse o lado do primeiro quadrado $A - B$ e do segundo $\dfrac{S\,in\,A}{R} - D$, ter-se-ia

$$\frac{S\,in\,R\,in\,2D + R\ quad.\ in\ 2B}{S\,quad. + R\,quad.} \text{ igual a } A$$

e, portanto, o lado do primeiro quadrado era

$$(1)\ \frac{S\,in\,R\,in\,2D - S\,quad.\ in\,B + R\,quad.in\,B}{S\,quad. + R\,quad.}$$

e o lado do segundo quadrado era

$$(2)\ \frac{S\,in\,R\,in\,2B + S\,quad.in\,D - R\,quad.in\,D}{S\,quad. + R\,quad.}.$$

Seguindo novamente a sugestão de Witmer (1983, 126), uma vez que para Viète a diferença entre duas quantidades só tinha significado se à maior fosse subtraída a menor, as expressões (1) e (2) poderiam ser representadas, respectivamente, por $\dfrac{\overline{S\,in\,R\,in\,2D + R\,quad.in\,B} = S\,quad.in\,B}{S\,quad. + R\,quad.}$ e $\dfrac{\overline{S\,in\,R\,in\,2B + S\,quad.in\,D} = R\,quad.in\,D}{S\,quad. + R\,quad.}$. Viète concluiu observando que (1) e (2) eram lados de um terceiro triângulo rectângulo criado por sinérese.

Exemplificando numericamente este processo, Viète considerou B igual a 15 e D igual a 10. Assim, Z era igual a $\sqrt{15^2 + 10^2}$, ou seja, $\sqrt{325}$. Considerando, numericamente, 5, 3, 4 um outro triângulo rectângulo o lado de um dos quadrados procurados era igual a $\dfrac{2\times1\times2\times10 + 2^2\times15 - 1^2\times15}{2^2 + 1^2}$, ou seja, 17 e o outro era igual a $\dfrac{2\times1\times2\times15 + 1^2\times10 - 2^2\times10}{2^2 + 1^2}$, ou seja, 6.

Por outro lado, Viète observou que se, em vez do terceiro triângulo obtido por diérese, se utilizasse o triângulo obtido por sinérese, as raízes procuradas eram, respectivamente, $\frac{2^2 \times 15 - 2 \times 1 \times 2 \times 10 - 1^2 \times 15}{2^2 + 1^2}$, ou seja, 1 e $\frac{2 \times 1 \times 2 \times 15 + 2^2 \times 10 - 1^2 \times 10}{2^2 + 1^2}$, ou seja, 18.

Em *Zetéticas* IV, 3, Viète forneceu uma outra resolução para este problema .

Designando por $B quad.$ e $D quad.$ os dois quadrados dados, Viète considerou, numericamente, um triângulo rectângulo tendo B por hipotenusa e outro semelhante a este em que D era a hipotenusa. A partir destes dois triângulos rectângulos semelhantes, Viète construiu um terceiro triângulo rectângulo em que o quadrado da hipotenusa era igual à soma dos quadrados das hipotenusas do primeiro e do segundo triângulos considerados. Viète confirmou esta construção observando que este método já tinha sido exposto nas *Notas Preliminares*, a saber na proposição 47. Assim, o quadrado da hipotenusa do terceiro triângulo era igual a $B quad. + D quad.$ e esta soma era igual à soma dos quadrados dos catetos deste terceiro triângulo rectângulo. Determinava-se então o pedido, que a soma de dois quadrados dados era igual à soma de outros dois quadrados. Viète referiu ainda que este problema já tinha sido resolvido através da análise de Diofanto, já mencionada no processo de resolução do problema 2 (cf. Peyroux 1990, 113).

Para exemplificar numericamente este processo, Viète considerou de novo B igual a 10 e D igual a 15. Tornou, então, os catetos do primeiro triângulo rectângulo iguais a 8 e 6, pois $10^2 = 8^2 + 6^2$, e os catetos do segundo triângulo, semelhante ao primeiro, iguais a 12 e 9. Assim, pela proposição 47 das *Notas Preliminares* os catetos do terceiro triângulo rectângulo eram iguais a $12 + 6$ e $9 - 8$, ou seja, a 18 e 1, ou então eram iguais a $12 - 6$ e a $8 + 9$, ou seja, 6 e 17. Em qualquer dos casos, a soma dos quadrados dos catetos era igual à soma dos quadrados de 10 e 15.

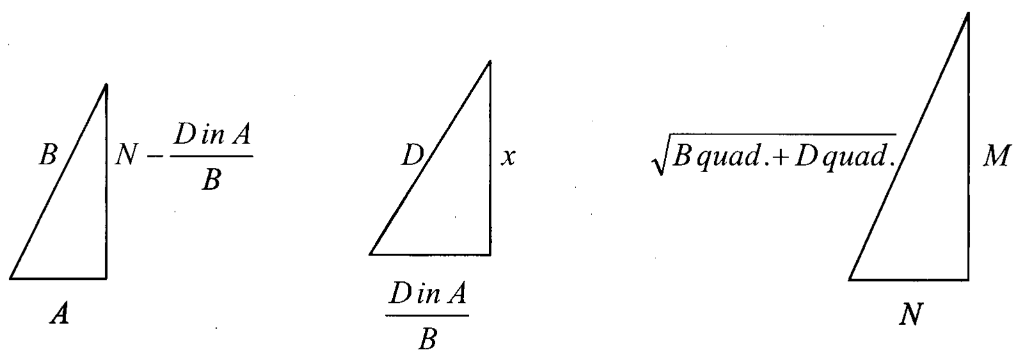
No quarto problema deste Livro IV, Viète propôs-se determinar dois triângulos rectângulos semelhantes sendo dadas as suas hipotenusas e a base de um terceiro triângulo rectângulo, deduzido dos anteriores, que fosse igual à soma da perpendicular do primeiro triângulo com a base do segundo e fosse maior que a hipotenusa do primeiro triângulo.

Tomando B a hipotenusa do primeiro triângulo e D a hipotenusa do segundo triângulo, semelhante ao primeiro, Viète iniciou a resolução do problema pela construção de um terceiro triângulo rectângulo deduzido a partir destas hipotenusas e de base igual a N, a soma da perpendicular do primeiro triângulo com a base do segundo. Deste modo, considerou

$$B\,quad. + D\,quad. - N\,quad. \text{ igual a } M\,quad.$$ [105]

e, portanto, a perpendicular do triângulo a deduzir seria M. Assim, o terceiro triângulo rectângulo tinha por base N, perpendicular M e hipotenusa $\sqrt{B\,quad. + D\,quad.}$.

Regressando ao objectivo do problema, construir dois triângulos rectângulos semelhantes de hipotenusa respectivamente B e D, Viète considerou A a base do primeiro triângulo rectângulo. Pela condição imposta de semelhança, Viète deduziu que a base do segundo seria $\frac{D\,in\,A}{B}$ e a perpendicular do primeiro $N - \frac{D\,in\,A}{B}$, visto que N, por hipótese, era a soma da perpendicular do primeiro triângulo com a base do segundo. Viète notou ainda que a perpendicular do segundo triângulo seria $A - M$ ou $A + M$, com M igual à diferença entre a base do primeiro triângulo e a perpendicular do segundo, isto porque, considerando três triângulos rectângulos como na figura,



[105] Embora nada apareça escrito na obra sobre o motivo que levou Viète a considerar tal relação, tudo leva a supor que ele se baseou na proposição 47 das *Notas Preliminares*.

os dois primeiros são semelhantes, porque têm dois lados proporcionais (a saber, B e D, A e $\frac{D\,in\,A}{B}$) e um ângulo igual, o de 90°. Assim, aplicando o teorema da proposição 47 das *Notas Preliminares*, M seria igual à diferença entre a base do primeiro triângulo e a perpendicular do segundo, ou seja, em notação actual $M = x - A$ ou $M = A - x$ e, portanto, $x = A + M$ ou $x = A - M$.

Considerando $A + M$ a perpendicular do segundo triângulo rectângulo, e como os dois primeiros triângulos eram semelhantes, Viète notou que

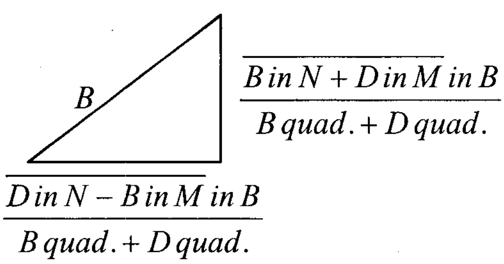
B estava para D assim como $N - \frac{D\,in\,A}{B}$ estava para $A + M$,

ou seja, que

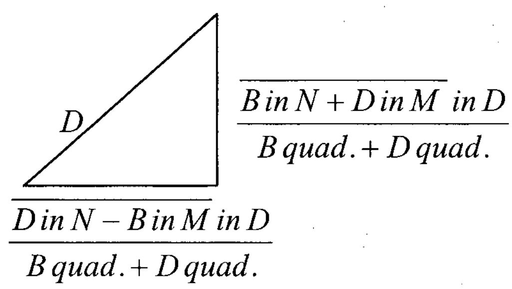
$\frac{D\,in\,N\,in\,B - B\,in\,M\,in\,B}{B\,quad. + D\,quad.}$ era igual a A.

Assim, Viète conseguia determinar os dois triângulos rectângulos semelhantes procurados.

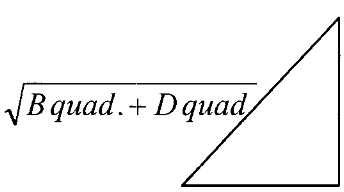
o primeiro



o segundo



donde o terceiro



M (a diferença entre a perpendicular do segundo e a base do primeiro)

N (a soma da perpendicular do primeiro com a base do segundo)

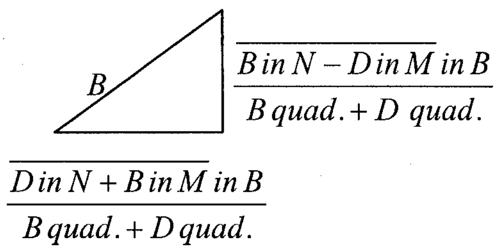
Por outro lado, Viète verificou que, se a perpendicular do segundo triângulo fosse $A - M$, como os dois primeiros triângulos eram semelhantes,

B estava para D assim como $N - \frac{D\,in\,A}{B}$ estava para $A - M$, ou seja, que

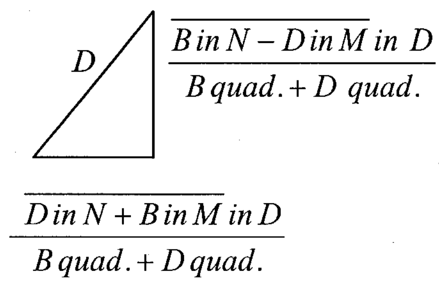
$$\frac{D\,in\,N\,in\,B + B\,in\,M\,in\,B}{B\,quad. + D\,quad.} \text{ era igual a } A.$$

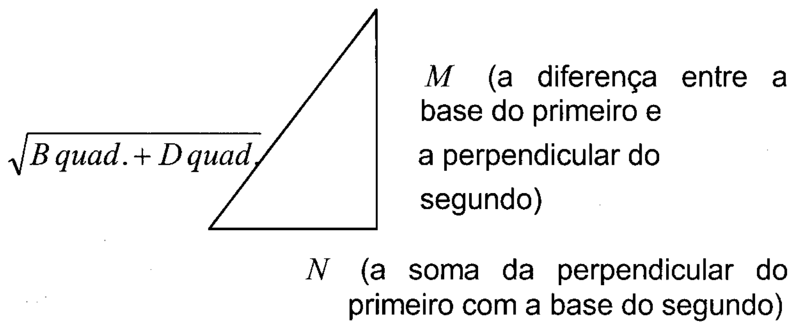
Logo, Viète determinava os dois triângulos rectângulos semelhantes procurados.

O primeiro



O segundo





Viète concluiu a resolução deste problema observando que a construção dos triângulos só era possível, no primeiro caso, se $D\,in\,N$ fosse maior que $B\,in\,M$ e, no segundo caso, se $B\,in\,N$ fosse maior que $D\,in\,M$.

Em *Zetéticas* IV, 5, Viète propôs-se encontrar, numericamente, dois quadrados iguais a dois quadrados dados, de tal modo que um desses quadrados procurados estivesse situado no interior de limites pré-fixados.

Designando por $B\,quad.$ e por $D\,quad.$ os quadrados dados, Viète considerou que um dos quadrados procurados fosse maior que $F\,planum$ e menor que $G\,planum$.

Considerando $Z\,quad.$ ou outro plano qualquer igual a $B\,quad. + D\,quad.$, Viète observou que Z, sendo racional ou irracional, seria a hipotenusa de um triângulo rectângulo de catetos B e D. Assim, Viète procurava um triângulo rectângulo de hipotenusa Z em que um dos catetos, por exemplo a base, fosse maior que N, mas menor que S. Embora Viète não o refira, está implícito que $N\,quad.$ era igual a $F\,planum$ e $S\,quad.$ era igual $G\,planum$. Deste modo, para Viète, o problema resumia-se a determinar, numericamente, dois triângulos rectângulos semelhantes, tendo B e D como suas hipotenusas, e construir a partir destes um terceiro triângulo em que a base fosse a soma da perpendicular do primeiro com a base do segundo e de tal modo que estivesse situada no interior de limites pré-fixados.

Viète começou por considerar

$$Z\,quad. - N\,quad. \text{ igual a } M\,quad.$$

e

$$Z\,quad. - S\,quad. \text{ igual a } R\,quad..$$

Assim, observou que se N fosse tomado como a base do terceiro triângulo rectângulo a deduzir dos dois triângulos semelhantes de hipotenusas dadas B e D, então a diferença entre a hipotenusa e a base (do primeiro destes dois triângulos), de acordo com o primeiro caso do problema anterior, estava para a perpendicular (do mesmo triângulo) assim como $Z\,quad. - D\ in\,N + B\,in\,M$ estava para $B\,in\,N + D\,in\,M$. De facto, em notação actual, e aplicando o primeiro caso das *Zetéticas* IV, 4

$$\frac{hipotenusa - base}{perpendicular} = \frac{B - \dfrac{(DN - BM).B}{B^2 + D^2}}{\dfrac{(BN + DM).B}{B^2 + D^2}}$$

$$= \frac{B.(B^2 + D^2) - (DN - BM).B}{(BN + DM).B}$$

$$= \frac{Z^2 - DN + BM}{BN + DM},$$

porque por hipótese $Z^2 = B^2 + D^2$.

É de notar que Viète escreveu $Z\,quad. = D\ in\ N + B\ in\ M$ em vez de $Z\,quad. - D\ in\,N + B\,in\,M$, talvez por considerar a «(...) diferença entre a base e a hipotenusa (...)» (cf. Peyroux 1990, 116) e não a diferença entre a hipotenusa e a base. Mas, como não trabalhava com quantidades negativas, apenas a expressão $Z\ quad. - D\ in\ N + B\ in\ M$ tinha significado.

Viète referiu ainda que $Z\ quad. - D\ in\ N + B\ in\ M$ estava para $B\,in\,N + D\,in\,M$ assim como uma quantidade X estava para $\dfrac{X\,in\,B\,in\,N + X\,in\,D\,in\,M}{Z\,quad. - D\,in\,N + B\,in\,M}$.

De igual modo, Viète observou também que se S fosse tomado como a base do terceiro triângulo rectângulo a deduzir dos dois triângulos rectângulos semelhantes de hipotenusas dadas B e D, então a diferença entre a hipotenusa e a base (do segundo destes dois triângulos), de acordo com o primeiro caso do problema anterior, estava para a perpendicular (do mesmo triângulo) assim como $Z\,quad. - D\,in\,S + B\,in\,R$ estava para $B\,in\,S + D\,in\,R$. É de notar que uma vez mais Viète utilizou o símbolo = escrevendo $Z\,quad. = D\,in\,S + B\,in\,R$, mas apenas a expressão $Z\,quad. - D\,in\,S + B\,in\,R$ tinha significado para ele. Tal como anteriormente, Viète observou que, considerando uma quantidade X, $Z\,quad. - D\,in\,S + B\,in\,R$ estava para $B\ in\ S + D\ in\ R$ assim como X estava para $\dfrac{X\,in\,B\,in\,S + X\,in\,D\,in\,R}{Z\,quad. - D\,in\,S + B\,in\,R}$.

Seguidamente, Viète considerou uma grandeza T compreendida entre $\dfrac{X\,in\,B\,in\,N + X\,in\,D\,in\,M}{Z\,quad. - D\,in\,N + B\,in\,M}$ e $\dfrac{X\,in\,B\,in\,S + X\,in\,D\,in\,R}{Z\,quad. - D\,in\,S + B\,in\,R}$, isto é, considerou T tal que $\dfrac{T}{X}$ estava compreendido entre $\dfrac{B\,in\,N + D\,in\,M}{Z\,quad. - D\,in\,N + B\,in\,M}$ e $\dfrac{B\,in\,S + D\,in\,R}{Z\,quad. - D\,in\,S + B\,in\,R}$, ou seja, entre $\dfrac{M-B}{D-N}$ e $\dfrac{R-B}{D-S}$, uma vez que Viète tomou N menor que S. É de referir que estas duas últimas expressões não se encontram mencionadas na obra de Viète, mas, como se verá, são importantes no desenvolvimento dos cálculos da resolução. Observe-se, utilizando a notação actual, que $\dfrac{BN+DM}{Z^2-DN+BM} = \dfrac{M-B}{D-N}$ e que $\dfrac{BS+DR}{Z^2-DS+BR} = \dfrac{R-B}{D-S}$. De facto, a primeira igualdade equivale a

$$BDN - BN^2 + D^2M - DMN = MZ^2 - DMN + BM^2 - BZ^2 + BDN - B^2M,$$

ou seja,

$$D^2M + BZ^2 + B^2M = MZ^2 + BM^2 + BN^2,$$

isto é,

$$BZ^2 + (B^2 + D^2).M = MZ^2 + B.(M^2 + N^2),$$

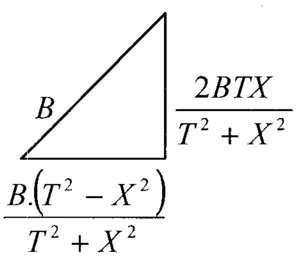
que é verdadeiro, porque

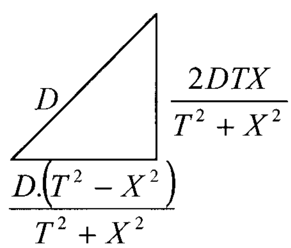
$$B^2 + D^2 = Z^2 = M^2 + N^2.$$

A outra igualdade prova-se de modo análogo.

Viète observou que a partir das raízes T e X era possível construir, numericamente, um triângulo rectângulo e também dois triângulos rectângulos semelhantes a este tendo B e D, respectivamente, por hipotenusas. Assim, a partir destes dois últimos, era possível construir um outro triângulo rectângulo de tal modo que a base fosse igual à soma da perpendicular do primeiro triângulo com a base do segundo e estivesse compreendida entre N e S.

De facto, a partir de T e X e aplicando a proposição 45 das *Notas Preliminares*, constrói-se o triângulo rectângulo de hipotenusa proporcional a $T^2 + X^2$, base proporcional a $T^2 - X^2$ e perpendicular proporcional a $2TX$. Observe-se que se está a supor $X < T$, pois o outro caso é análogo. Para obter dois triângulos rectângulos semelhantes a este, mas de hipotenusas B e D, basta multiplicar os lados, respectivamente, pelos factores $\dfrac{B}{T^2 + X^2}$ e $\dfrac{D}{T^2 + X^2}$.





Assim, aplicando a proposição 47 das *Notas Preliminares*, a base do terceiro triângulo (a deduzir destes dois últimos) era igual a $\dfrac{2BTX}{T^2 + X^2} + \dfrac{D.(T^2 - X^2)}{T^2 + X^2}$, a perpendicular era igual à diferença entre a perpendicular do segundo triângulo e a base do primeiro e a hipotenusa era igual a Z.

Resta ver que a base deste triângulo rectângulo assim obtido se encontra compreendida entre N e S. Verifique-se então que N é menor que a base; a outra desigualdade prova-se de modo análogo.

Como $\frac{M-B}{D-N} < \frac{T}{X}$, então $MX < BX + (D - N).T$. Elevando ao quadrado ambos os membros da desigualdade obtém-se

$$M^2X^2 < B^2X^2 + 2B.(D-N).TX + (D-N)^2.T^2.$$

Uma vez que M^2X^2 era igual a $(D^2 + B^2 - N^2).X^2$, então

$$(D^2 - N^2).X^2 < 2B.(D-N).TX + (D-N)^2.T^2,$$

ou seja,

$$(D+N).X^2 < 2BTX + (D-N).T^2,$$

isto é,

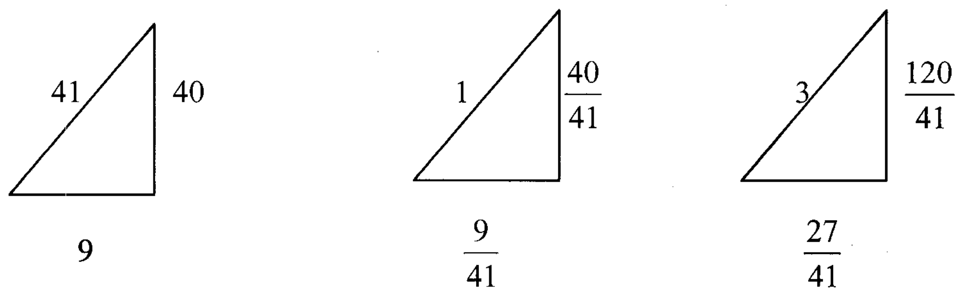
$$N.(T^2 + X^2) < 2BTX + D.(T^2 - X^2)$$

e, portanto,

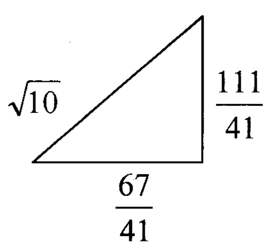
$$N < \frac{2BTX}{T^2+X^2} + \frac{D.(T^2-X^2)}{T^2+X^2},$$

como se queria provar.

Viète terminou exemplificando numericamente este processo. Considerando B igual a 1, D igual a 3, N igual a $\sqrt{2}$ e S igual a $\sqrt{3}$ (notar que N e S eram os limites pré-fixados), Z era igual a $\sqrt{1^2+3^2}$, ou seja, $\sqrt{10}$, M era igual a $\sqrt{(\sqrt{10})^2 - (\sqrt{2})^2}$, ou seja, $\sqrt{8}$ e R era igual a $\sqrt{(\sqrt{10})^2 - (\sqrt{3})^2}$, ou seja, $\sqrt{7}$. Tomando X igual a 1, Viète observou que T teria de ser escolhido entre $\frac{1\times 1\times\sqrt{2} + 1\times 3\times\sqrt{8}}{(\sqrt{10})^2 - 3\times\sqrt{2} + 1\times\sqrt{8}}$ e $\frac{1\times 1\times\sqrt{3} + 1\times 3\times\sqrt{7}}{(\sqrt{10})^2 - 3\times\sqrt{3} + 1\times\sqrt{7}}$, ou seja, entre $\frac{\sqrt{98}}{10-\sqrt{2}}$ e $\frac{\sqrt{63}+\sqrt{3}}{10-\sqrt{27}+\sqrt{7}}$. Viète escolheu então T igual a $\frac{5}{4}$. Assim, através do processo apresentado por Viète, um triângulo rectângulo podia ser construído a partir de 1 e $\frac{5}{4}$, ou a partir de 4 e 5, e, consequentemente, a partir deste podiam ser construídos dois triângulos rectângulos semelhantes de hipotenusas, respectivamente, iguais a 1 e 3. De facto, no primeiro triângulo a hipotenusa era igual a $4^2 + 5^2$, ou seja, 41, a base a $5^2 - 4^2$, ou seja, 9 e a perpendicular igual a $2 \times 4 \times 5$, ou seja, 40; no segundo triângulo a hipotenusa era igual a 1, a base a $\frac{1}{41} \times 9$, ou seja, $\frac{9}{41}$ e a perpendicular igual a $\frac{1}{41} \times 40$, ou seja, $\frac{40}{41}$; no terceiro triângulo a hipotenusa era igual a 3, a base a $\frac{3}{41} \times 9$, ou seja, $\frac{27}{41}$ e a perpendicular igual a $\frac{3}{41} \times 40$, ou seja, $\frac{120}{41}$.



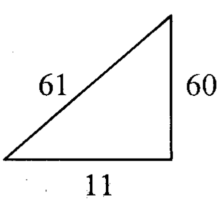
Viète observou então que podia construir um outro triângulo rectângulo, deduzido a partir destes dois últimos triângulos semelhantes, de tal modo que a base, deste triângulo rectângulo a construir fosse igual à soma da perpendicular do segundo triângulo com a base do terceiro e estivesse situada entre dois limites pré-fixados. Na verdade, Viète obtinha um triângulo rectângulo, deduzido a partir dos dois últimos triângulos, de hipotenusa igual a $\sqrt{1^2 + 3^2}$, ou seja, $\sqrt{10}$, base igual a $\frac{40}{41} + \frac{27}{41}$, ou seja, $\frac{67}{41}$ e perpendicular igual a $\frac{120}{41} - \frac{9}{41}$, ou seja, $\frac{111}{41}$.

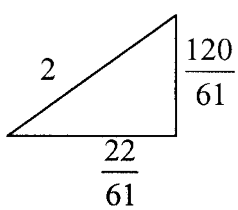


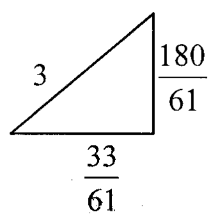
É de notar que $\frac{67}{41}$ era a soma da perpendicular do segundo triângulo com a base do terceiro e que estava compreendido entre os limites pré-fixados, a saber entre $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$. Assim, Viète determinava o pretendido, isto é, dois quadrados, $\left(\frac{67}{41}\right)^2$ e $\left(\frac{111}{41}\right)^2$, cuja soma era igual à soma de dois quadrados dados, 1^2 e 3^2, de tal modo que um dos quadrados estivesse situado entre dois limites pré-fixados. Neste caso, $\left(\frac{67}{41}\right)^2$ estava compreendido entre $\left(\sqrt{2}\right)^2$ e $\left(\sqrt{3}\right)^2$.

Viète forneceu ainda outro exemplo numérico. Desta vez considerou B igual a 2, D igual a 3, N igual a $\sqrt{6}$ e S igual a $\sqrt{7}$. Assim, Z era igual a $\sqrt{2^2+3^2}$, ou seja $\sqrt{13}$, M era igual a $\sqrt{\left(\sqrt{13}\right)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2}$, ou seja $\sqrt{7}$ e R era igual a $\sqrt{\left(\sqrt{13}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}$, ou seja $\sqrt{6}$. Considerando de novo X igual a 1, Viète observou que T podia ser escolhido entre $\frac{1\times 2\times\sqrt{6}+1\times 3\times\sqrt{7}}{\left(\sqrt{13}\right)^2-3\times\sqrt{6}+2\times\sqrt{7}}$ e $\frac{1\times 2\times\sqrt{7}+1\times 3\times\sqrt{6}}{\left(\sqrt{13}\right)^2-3\times\sqrt{7}+2\times\sqrt{6}}$, ou seja, entre $\frac{\sqrt{24}+\sqrt{63}}{13+\sqrt{28}-\sqrt{54}}$ e $\frac{\sqrt{28}+\sqrt{54}}{13+\sqrt{24}-\sqrt{63}}$. Tomando T igual a $\frac{5}{6}$, Viète referiu que a partir de 1 e $\frac{5}{6}$, ou de 5 e 6, podia construir-se um triângulo rectângulo. É de notar que $\frac{5}{6}$ não se encontra entre os valores pré-estabelecidos; portanto, Viète devia ter considerado, por exemplo, T igual a $\frac{6}{5}$. De facto, esta pequena imprecisão de Viète não altera a resolução uma vez que tomando T igual a $\frac{6}{5}$ pode construir-se também um triângulo rectângulo a partir de 5 e 6.

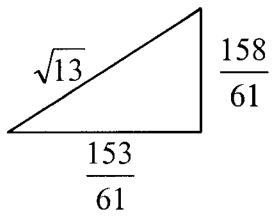
Viète construiu, então, um triângulo rectângulo a partir de 5 e 6 e outros dois semelhantes a este de hipotenusas, respectivamente, 2 e 3.







Deste modo, deduzindo um outro triângulo rectângulo a partir destes dois últimos triângulos semelhantes, tal que a base deste novo triângulo fosse igual à soma da perpendicular do segundo triângulo com a base do terceiro e estivesse situado entre dois limites pré-fixados, Viète determinava o pretendido.



De facto, a soma de $\left(\frac{153}{61}\right)^2$ e $\left(\frac{158}{61}\right)^2$ é igual à soma de dois quadrados dados, 2^2 e 3^2, $\frac{153}{61}$ é igual a $\frac{120}{61}+\frac{33}{61}$ e $\left(\frac{153}{61}\right)^2$ está compreendido entre $\left(\sqrt{6}\right)^2$ e $\left(\sqrt{7}\right)^2$.

No problema 6 das *Zetéticas* IV, Viète propôs-se determinar numericamente dois quadrados, dada a sua diferença. É de referir que em *Zetéticas* IV,1 Viète já tinha resolvido este problema para o caso da soma. Tal como o problema 1, este também se encontra proposto e resolvido na *Aritmética* de Diofanto, a saber no Livro II problema 10:

Encontrar dois números quadrados de diferença dada. (Eecke 1959, 56)

Propondo que a diferença entre esses números fosse de 60 unidades, Diofanto considerou a raiz de um dos números igual a 1 *aritmo* e a raiz do outro número 1 *aritmo* mais tantas unidades quantas se quisesse, desde que o quadrado dessa quantidade de unidades não excedesse a diferença dada (cf. Eecke 1959, 56). Diofanto tomou então este número como 1 *aritmo* mais 3 unidades. Deste modo, os seus quadrados eram 1 quadrado de *aritmo* e 1 quadrado de *aritmo* mais 6 *aritmos* mais 9 unidades e, portanto, a sua diferença era igual a 6 *aritmos* mais 9 unidades. Igualando esta diferença a 60 unidades, Diofanto determinou que 1 *aritmo* era igual a $8\frac{1}{2}$ unidades.

Assim, a raiz do primeiro número era $8\frac{1}{2}$ e a do segundo $11\frac{1}{2}$ unidades e, portanto, os quadrados procurados eram $72\frac{1}{4}$ e $132\frac{1}{4}$ unidades.

Observe-se a resolução apresentada por Viète.

Considerando $B\,planum$ a diferença entre os dois quadrados a encontrar, Viète observou que se $B\,planum$ fosse igual ao quadrado da base de um triângulo rectângulo então os dois quadrados procurados seriam os quadrados da hipotenusa e da perpendicular desse mesmo triângulo. Deste modo, observando que a base de um triângulo rectângulo era o meio proporcional entre a diferença da hipotenusa e da perpendicular (desse mesmo triângulo) e a soma das mesmas, e que a divisão de $B\,planum$ por qualquer comprimento racional era uma largura racional (cf. Peyroux 1990, 118), Viète notou que se a largura (o quociente dessa divisão) fosse menor (respectivamente, maior) que o comprimento (dividendo) então a largura (respectivamente, comprimento) seria a diferença entre a hipotenusa e a perpendicular e o comprimento (respectivamente, largura) a sua soma. Assim, aplicando *Zetéticas* I, 1, Viète conseguia determinar numericamente a perpendicular e a hipotenusa e consequentemente os seus quadrados.

É de notar que, para Viète, a resolução deste problema estava em identificar B com o quadrado da base de um triângulo rectângulo de hipotenusa X e perpendicular Y, porque $X^2 = B + Y^2$ e, portanto, $B = X^2 - Y^2$. Uma vez que $\frac{X+Y}{\sqrt{B}} = \frac{\sqrt{B}}{X-Y}$ deduzia-se facilmente que $B = (X + Y).(X - Y)$. Deste modo, decompondo B em dois factores (distintos), Viète solucionava o problema, pois bastava-lhe escolher o maior factor para $X + Y$ e o menor para $X - Y$. Determinando X e Y, Viète obtinha os quadrados procurados.

Viète apresentou ainda um outro processo de resolução, desta vez parecido com o de Diofanto.

Considerando de novo $B\,planum$ o quadrado da base de um triângulo rectângulo, Viète designou o quadrado da perpendicular por $A\,quad.$, um dos quadrados a determinar. Por essa razão, $A quad. + B\, planum$ seria igual ao outro quadrado, a saber o quadrado da hipotenusa. Considerando $A + D$ essa hipotenusa, em que D era a diferença entre a hipotenusa e a perpendicular, Viète obteve a seguinte igualdade:

$$A quad. + D\, in\, 2A + D quad. \text{ igual a } A quad. + B\, planum,$$

donde, ordenando a igualdade,

$$\frac{B\, planum - D quad.}{2D} \text{ era igual a } A.$$

Deste modo, Viète estabeleceu o seguinte teorema:

> Se, num triângulo rectângulo, o quadrado do primeiro lado adjacente ao ângulo recto menos o quadrado da diferença entre o segundo lado e a hipotenusa é dividido pelo dobro desta diferença o quociente será igual ao segundo lado ele mesmo adjacente ao ângulo recto. (Witmer 1983, 133)

Viète observou ainda que, se designasse o quadrado da hipotenusa por $E quad.$, um dos quadrados a determinar, $E quad. - B\, planum$ seria igual ao outro quadrado, a saber o quadrado da perpendicular. Considerando $E - D$ essa perpendicular, em que D era a diferença entre a hipotenusa e a perpendicular, Viète obteve a seguinte igualdade:

$$E quad. - D\, in\, 2E + D quad. \text{ igual a } E quad. - B\, planum,$$

donde, ordenando a igualdade,

$$\frac{B\, planum + D quad.}{2D} \text{ era igual a } E.$$

Deste modo Viète estabeleceu também o seguinte teorema:

> Num triângulo rectângulo, se o quadrado do lado adjacente ao ângulo recto mais o quadrado da diferença entre o outro lado adjacente ao ângulo recto e a hipotenusa é dividido pelo dobro desta diferença, o lado que aparece será igual à própria hipotenusa.

Igualmente:

Se o quadrado dum lado adjacente ao ângulo recto mais o quadrado da soma oriunda do outro lado adjacente ao ângulo recto e a hipotenusa é dividido pelo dobro desta soma, a largura que aparece será igual à própria hipotenusa.

donde:

Como a soma da hipotenusa e de um dos lados adjacentes ao ângulo recto [está] para a diferença dos mesmos, assim o quadrado da soma adicionado ou subtraído do quadrado do outro lado adjacente ao ângulo recto [está] para o quadrado do outro lado adicionado ou subtraído do quadrado da diferença. (Peyroux 1990, 119)

Exemplificando numericamente o processo de obter os quadrados procurados, Viète considerou $B\,planum$ igual a 240 e D igual a 6. Assim, A seria igual a $\frac{240-6^2}{2\times 6}$, ou seja, 17 e E seria igual a $\frac{240+6^2}{2\times 6}$, ou seja, 23. Assim, os quadrados procurados eram iguais a 17^2, isto é, 289 e 23^2, isto é, 529. De facto, $529-289=240$.

Viète também exemplificou numericamente o último resultado. Considerando o triângulo rectângulo 5, 4, 3, Viète observou que 9 estava para 1 assim como 90 estava para 10 e 72 para 8. De facto, através do teorema atrás descrito $\frac{5+4}{5-4}=\frac{(5+4)^2+3^2}{(5-4)^2+3^2}=\frac{(5+4)^2-3^2}{3^2-(5-4)^2}$, ou seja, $\frac{9}{1}=\frac{90}{10}=\frac{72}{8}$.

A terminar, Viète acrescentou que era possível

Adicionar um pequeno quadrado a um plano dado e obter um quadrado. (Witmer 1983, 134)

Sendo $B\,planum$ o plano dado, Viète observou que se considerasse esse plano igual ao quadrado de um dos catetos de um triângulo rectângulo, por exemplo em notação actual, igual a b^2, então restava procurar um triângulo rectângulo de catetos a e b e hipotenusa h, porque obtinha a igualdade pretendida:

$$B\ planum + a^2 = h^2,$$

isto é, era possível adicionar um plano dado um quadrado e ainda obter um quadrado.

Para exemplificar numericamente o pretendido, Viète necessitou de utilizar as relações entre os lados de um triângulo rectângulo de hipotenusa h e catetos a e b:

$$\frac{h+a}{h-a} = \frac{(h+a)^2 + b^2}{(h-a)^2 + b^2} = \frac{(h+a)^2 - b^2}{b^2 - (h-a)^2} \text{ e } a = \frac{b^2 - (h-a)^2}{2.(h-a)} = \frac{(h+a)^2 - b^2}{2.(h+a)},$$

apesar de não ter mencionado explicitamente esta última igualdade.

Considerando $B\ planum$ o quadrado da base de um triângulo rectângulo, Viète tomou $B\ planum$ igual a 17 e a diferença entre a hipotenusa e a perpendicular desse mesmo triângulo igual a 4. Então, a perpendicular era igual a $\frac{17-4^2}{2\times 4}$, ou seja $\frac{1}{8}$. Assim, Viète determinava o quadrado da hipotenusa que era igual a $17 + \left(\frac{1}{8}\right)^2$, ou seja $17\frac{1}{64}$, isto é, o quadrado de $4\frac{1}{8}$. Viète obtinha, portanto, o pretendido: $17 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \left(4\frac{1}{8}\right)^2$, ou seja, conseguia adicionar a um plano dado um quadrado e ainda obter um quadrado.

Considerando de novo $B\ planum$ o quadrado da base de um triângulo rectângulo, Viète tomou $B\ planum$ igual a 15, mas em vez da diferença entre a hipotenusa e a perpendicular considerou a sua soma igualando-a a 4. Viète referiu então que a perpendicular era igual a $\frac{15-16}{8}$, ou seja $-\frac{1}{8}$ e, portanto, o quadrado da hipotenusa era igual a $15\frac{1}{64}$, isto é, o quadrado de $3\frac{7}{8}$. Deste modo, Viète conseguia adicionar novamente a um plano dado um quadrado e ainda obter um outro quadrado.

Nesta resolução Viète considerou um número negativo, $-\frac{1}{8}$, embora isto não signifique que aceitasse os números negativos como entes matemáticos teorizáveis. É de notar que Viète utilizou neste segundo exemplo a mesma relação do exemplo numérico anterior, cometendo uma imprecisão; uma vez que 4 era a soma da hipotenusa com a perpendicular, Viète deveria, portanto, ter utilizado a última relação mencionada, $a=\frac{(h+a)^2-b^2}{2.(h+a)}=\frac{4^2-15}{2\times 4}$, obtendo, assim, a perpendicular igual a $\frac{1}{8}$. Tal como para o caso de $-\frac{1}{8}$, o quadrado da hipotenusa seria de novo igual a $15\frac{1}{64}$, ou seja, o quadrado de $3\frac{7}{8}$ e, portanto, Viète conseguiria o pretendido: adicionar a 15 um quadrado, $\left(\frac{1}{8}\right)^2$, e obter ainda um outro quadrado, $\left(3\frac{7}{8}\right)^2$.

Os três próximos problemas são dedicados a determinar, numericamente, um plano de tal modo que a soma (respectivamente, diferença) desse plano com cada um de dois planos dados forme um quadrado. É de notar que no caso da diferença Viète considerou as duas possibilidades: a diferença entre o plano procurado e cada um dos dois planos dados e a diferença entre cada um dos dois planos dados e o plano procurado.

Em *Zetéticas* IV, 7, Viète resolveu o problema para o caso da soma, isto é, dados dois planos, Viète pretendia determinar um outro plano que adicionado a cada um dos dois planos dados, completasse numericamente um quadrado. Também Diofanto em *Aritmética* II, 11 já se tinha debruçado sobre este problema:

> Adicionar um mesmo número a dois números dados, de maneira a que cada um forme um quadrado. (Eecke 1959, 56)

Tomando 2 e 3 como os números dados e designando por 1 *aritmo* o número a ser adicionado, Diofanto observou que 1 *aritmo* mais 2 unidades e 1 *aritmo* mais 3 unidades deveriam ser ambos iguais a quadrados[106]. Considerando a sua diferença, que era 1, Diofanto propôs-se encontrar dois

[106] Diofanto referiu-se a esta expressão como uma *equação dupla*. Cf. Eecke, 1959, 57

números cujo produto fosse igual a esta diferença. Os números tomados por Diofanto foram 4 unidades e $\frac{1}{4}$ da unidade.

Uma vez que (em notação actual) $\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m-n}{2}\right)^2 = m.n$, Diofanto identificou o quadrado da semi-soma de 4 e $\frac{1}{4}$ com 1 *aritmo* mais 3 unidades e o quadrado da semi-diferença entre de 4 e $\frac{1}{4}$ com 1 *aritmo* mais 2 unidades. Deste modo, efectuando os cálculos, 1 *aritmo* era igual a $\frac{97}{64}$ e, portanto, o número a adicionar aos números dados era $\frac{97}{64}$. De facto, resolvendo pelo método proposto por Diofanto, mas utilizando a notação actual, este identificou $x + 3$ com $\left(\frac{4+\frac{1}{4}}{2}\right)^2$ e $x + 2$ com $\left(\frac{4-\frac{1}{4}}{2}\right)^2$ e, portanto, como $\left(\frac{4+\frac{1}{4}}{2}\right)^2 = \frac{289}{64}$ e $\left(\frac{4-\frac{1}{4}}{2}\right)^2 = \frac{225}{64}$ resultava $x = \frac{289}{64} - 3 = \frac{97}{64} = \frac{225}{64} - 2$.

Contudo, Diofanto apresentou uma outra resolução para o problema ao utilizar as equações duplas. Diofanto observou que se se procurasse um número cuja soma com 2 fosse um quadrado, então o número procurado era igual à diferença entre um quadrado e 2 unidades. Tomando esse quadrado igual a 1 quadrado de *aritmo*, o número procurado era igual 1 quadrado de *aritmo* menos 2 unidades. Deste modo, Diofanto notou que 1 quadrado de *aritmo* menos 2 unidades mais 3 unidades, era também igual a um quadrado. Considerando esse quadrado como o quadrado da diferença entre 1 *aritmo* e 4 unidades, Diofanto obteve 8 *aritmo*s iguais a 15 unidades e, portanto, 1 *aritmo* igual a $\frac{15}{8}$. Logo, o número a adicionar a ambos os números dados era $\frac{97}{64}$.

Observe-se a resolução apresentada por Viète.

Designando os planos dados por *B planum* e *D planum*, Viète considerou *A planum* o plano a adicionar a cada um dos planos dados de tal modo que a soma resultante fosse um quadrado. Deste modo, $B\ planum + A\ planum$ era igual a um quadrado e $D\ planum + A\ planum$ também era igual a um quadrado. Viète referiu então, tal como Diofanto, que teria de resolver esta equação dupla (cf. Peyroux 1990, 120). De facto, *A planum* correspondia na *Aritmética* II, 11 a 1 *aritmo*, $B\ planum + A\ planum$ a 3 unidades mais 1 *aritmo* e $D\ planum + A\ planum$ a 2 unidades mais 1 *aritmo*.

Considerando *B planum* maior que *D planum*, Viète notou que a diferença entre os quadrados a serem construídos era $B\ planum - D\ planum$. Observando que o quadrado da soma de duas raízes excedia o quadrado da sua diferença no quádruplo do seu produto[107], Viète identificou $B\ planum - D\ planum$ com o quádruplo do produto das raízes. Assim, Viète tomou $B\ planum + A\ planum$ como o quadrado da soma das raízes e $D\ planum + A\ planum$ como o quadrado da sua diferença. Deste modo, *A planum* era igual ao quadrado da soma das raízes menos *B planum* ou ainda igual ao quadrado da diferença entre as raízes menos *D planum*.

Para Viète o problema resumia-se, então, em decompor num produto de dois factores a expressão $\frac{B\ planum - D\ planum}{4}$ que representava o produto de duas raízes. Tomando G como uma das raízes, a outra seria $\frac{B\ planum - D\ planum}{4G}$. Deste modo, a soma das raízes seria $\frac{B\ planum - D\ planum + 4G\ quad.}{4G}$ e a sua diferença $\frac{\overline{B\ planum - D\ planum} = 4G\ quad.}{4G}$ e, portanto, Viète determinava o plano A procurado.

Como exemplo numérico Viète considerou *B planum* igual a 192 e *D planum* 128. Assim, a diferença entre estes planos era igual a 64, que era

[107] Cf. *Notas Preliminares*, proposição 13.

também igual ao quádruplo do produto de duas raízes. Logo, o produto destas duas raízes era igual a 16 e, portanto, considerando 1 e 16 essas raízes, a sua soma era igual a $\frac{192-128+4\times16^2}{4\times16}$, ou seja 17, e a sua diferença era igual a $\frac{4\times16^2-(192-128)}{4\times16}$, ou seja 15. Deste modo, 97 era o plano procurado, porque $17^2 - 192 = 97 = 15^2 - 128$.

Viète referiu ainda que este problema podia ter sido resolvido por outro processo. Este método apresentado por Viète é de raciocínio semelhante ao segundo processo utilizado por Diofanto na resolução do mesmo problema em *Aritmética* II, 11.

Uma vez que se pretendia adicionar a *B planum* e também a *D planum* um mesmo plano de modo a obter numericamente um quadrado, Viète considerou esse plano igual *A quad. – B planum*, correspondendo na *Aritmética* II, 11 a 1 quadrado de *aritmo* menos 2 unidades. De facto, adicionando *B planum* a esse plano obtinha-se um quadrado, a saber *A quad.*. Por essa razão, da mesma forma, *D planum + A quad. – B planum* seria também um quadrado. Construindo-o a partir de *F – A*, correspondendo na *Aritmética* II, 11 ao simétrico de 4 unidades menos 1 *aritmo*, Viète observou que

A quad. + F quad. – F in 2A era igual a *D planum + A quad. – B planum*

e, portanto,

$$A \text{ era igual a } \frac{F\ quad. + B\ planum - D\ planum}{2F}.$$

Deste modo Viète determinava o plano procurado.

Viète também exemplificou numericamente este processo. Considerando *B planum* igual a 18, *D planum* igual a 9 e F também igual a 9, A seria igual a $\frac{9^2+18-9}{2\times9}$, ou seja 5, e o plano procurado seria igual a $5^2 - 18$, ou seja 7. De facto, $18 + 7 = 25 = 5^2$ e $9 + 7 = 16 = 4^2$.

No problema seguinte, dados novamente dois planos, Viète pretendia encontrar, numericamente, um plano de tal modo que a diferença entre cada um dos planos dados e o plano procurado fosse igual a um quadrado. A resolução deste problema 8 é de raciocínio análogo ao anterior. De igual modo, pode encontrar-se o mesmo problema, com a respectiva solução, no Livro II da *Aritmética* de Diofanto, a saber no problema 12.

Também o problema 9, em que Viète pretendia determinar um plano de tal modo que a diferença entre esse plano e dois planos dados fosse igual a um quadrado, é de raciocínio análogo ao seguido na resolução dos problemas anteriores. Como foi referido, este problema difere do anterior, problema 8, na medida em que se troca o aditivo pelo subtractivo. É de salientar que este problema aparece em *Aritmética* II, 13, sendo o processo de resolução dado por Diofanto de raciocínio análogo ao do problema 11 do mesmo Livro.

No problema 10, Viète propôs-se determinar numericamente duas raízes cujo produto mais a soma dos seus quadrados fosse um quadrado. Diofanto, num lema relativo ao problema 7 do Livro V da sua *Aritmética*, também considerou este problema:

> Encontrar dois números de tal modo que o seu produto aumentado da soma dos seus quadrados forme um quadrado. (Eecke 1959, 190)

Designando o primeiro número a encontrar por 1 *aritmo*, Diofanto considerou o segundo número como sendo 1 unidade. Deste modo, o produto entre os números seria 1 *aritmo* e a soma dos seus quadrados seria 1 quadrado de *aritmo* mais 1 unidade e, portanto, esta soma aumentada de 1 *aritmo* era igual a 1 quadrado de *aritmo* mais 1 *aritmo* mais 1 unidade. Como se pretendia que fosse igual a um quadrado, Diofanto igualou a soma atrás referida a um quadrado, de raiz 1 *aritmo* menos 2 unidades. Assim, resolvendo esta equação, Diofanto obteve 1 *aritmo* igual a $\frac{3}{5}$. Regressando ao que tinha sido suposto, Diofanto referiu que os números procurados seriam $\frac{3}{5}$ e $\frac{5}{5}$ observando que os seus múltiplos também satisfaziam à condição imposta no enunciado. Assim, 3 e 5 eram dois números cujo produto aumentado da soma dos seus quadrados formava um quadrado, a saber 49.

Da análise do processo apresentado por Diofanto observa-se que o seu procedimento é facilmente generalizável. A própria resolução apresentada por Viète, como se verá, segue esta tendência. De facto, e utilizando a notação actual, designando 1 *aritmo* por x, um dos números procurados por b e representando a raiz do quadrado a obter por $x - d$, obtém-se a equação

$$xb + b^2 + x^2 = (x - d)^2,$$

donde,

$$xb + b^2 = -2dx + d^2$$

e, portanto,

$$x = \frac{d^2 - b^2}{b + 2d} \text{ com } d > b,$$

uma vez que se estava a trabalhar em $\mathbb{Q}^+$. Repare-se ainda que Diofanto não mencionou esta última condição, embora tivesse escolhido os números de modo a obter uma quantidade positiva.

Observe-se então agora a resolução apresentada por Viète que, mais uma vez, generaliza o processo dado por Diofanto através do uso da *logística especiosa*.

Viète designou uma das raízes por B e a outra por A, o que correspondia no lema de Diofanto, respectivamente, a 1 unidade e a 1 *aritmo*. Deste modo, Viète pretendia que A *quad.* + B *in* A + B *quad.* fosse um quadrado. Construindo-o a partir de $A - D$, que correspondia na *Aritmética* de Diofanto a 1 *aritmo* menos 2 unidades, Viète observou que

A *quad.* – A *in* $2D$ + D *quad.* era igual a A *quad.* + B *in* A + B *quad.*

e, portanto, ordenando a equação,

$$\frac{D\,quad. - B\,quad.}{B + 2D} \text{ era igual a } A.$$

Deste modo, Viète observou que:

- a primeira raiz era proporcional a B *quad.* + B *in* $2D$;
- a segunda era proporcional a D *quad.* – B *quad.*.

De facto, o produto destas raízes mais a soma dos seus quadrados era proporcional a:

D quad.-quad. + B quad.-quad. + B quad. in 3D quad. + B cubus in 2D + B in 2D cubus que era o quadrado da raiz *B quad. + D quad. + B in D*.

Como exemplo numérico, Viète considerou D igual a 2 e B igual a 1. É de notar que estes também foram os valores considerados por Diofanto no seu lema. Assim, uma das raízes era igual a $1^2 + 2 \times 1 \times 2$, isto é 5, e a outra era igual a $2^2 - 1^2$, ou seja 3. De facto, $5 \times 3 + 5^2 + 3^2$ era igual a um quadrado, a saber 49.

Antes de enunciar e resolver *Zetéticas* IV, 11 Viète estabeleceu um lema que definiu por «Lema para a próxima Zetética» (Peyroux 1990, 122):

Três sólidos deduzidos de dois lados são iguais.

Um resultante [do produto] do primeiro lado pelo quadrado do segundo acrescentado ao rectângulo formado por [esses] lados.

O outro resultante [do produto] do segundo lado pelo quadrado do primeiro acrescentado ao rectângulo [formado por esses lados].

O terceiro resultante [do produto] da soma dos lados pelo mesmo rectângulo. (Peyroux 1990, 122-123)

Através do seu cálculo simbólico, Viète reformulou o lema designando B e D pelos lados. Deste modo e de acordo com o lema, Viète observou que B e D produziam três sólidos iguais: o primeiro obtido de $B\,in\,\overline{D\,quad. + B\,in\,D}$, o segundo obtido de $D\,in\,\overline{B\,quad. + B\,in\,D}$ e o terceiro obtido de $\overline{B + D}\,in\,B\,in\,D$. De facto, todos estes produtos originavam o sólido *B in D quad. + D in B quad.*. É de referir ainda, que é aqui que pela primeira vez Viète introduziu a barra como parêntesis.

Os próximos seis problemas deste quarto Livro são dedicados a encontrar um, dois ou três ternos pitagóricos satisfazendo a determinadas condições.

De facto, devido à evocação de triângulos rectângulos, no problema 16 está subjacente a procura de um terno pitagórico, nos problemas 13 e 14 a procura de dois, enquanto que nos problemas 11, 12 e 15 a procura de três.

Fica clara a razão pela qual Viète pretende encontrar *numericamente* um, dois ou três triângulos rectângulos mediante certas condições, pois está a mostrar como obter ternos pitagóricos com certas propriedades. Além disso, é de notar que algumas destas condições se mantêm quando os três números são multiplicados pelo mesmo factor racional. Daí que um triângulo possa, por vezes, ser substituído por outro que lhe seja *semelhante*; os lados são então substituídos por lados *proporcionais* e o terno é substituído por um seu *múltiplo*. Isto explica o uso tão frequente, por parte de Viète, da palavra latina *similis* (*semelhante*).

O problema 11 é então dedicado a encontrar, numericamente, três triângulos rectângulos com áreas iguais. Diofanto também se debruçou sobre este problema num outro lema relativo ao problema 7 do Livro V da sua *Aritmética*:

> Encontrar três triângulos rectângulos [em que os lados se exprimem em números racionais] tendo as mesmas áreas. (Eecke 1959, 191)

Diofanto iniciou a resolução do lema procurando dois números tais que a soma dos seus quadrados aumentada do produto dos seus números formasse um quadrado. Como atrás se referiu, no primeiro lema do problema 7 da *Aritmética* V, Diofanto tinha apresentado os números 3 e 5, sendo 7 a raiz do quadrado formado pela soma dos quadrados de 3 e 5 mais o produto desses números. Assim, Diofanto considerou três triângulos rectângulos formados por meio de dois números, respectivamente, por meio de 7 e 3, por meio de 7 e 5 e por meio de 7 e a soma de 3 com 5, ou seja, 7 e 8. Deste modo, Diofanto notou que os triângulos procurados teriam como lados, respectivamente, 40, 42, 58; 24, 70, 74 e 15, 112, 113 e a área destes triângulos seria a mesma, 840 unidades.

Segundo Eecke,

> Diofanto admite nesta sua resolução, sem qualquer explicação, que se três números a, b, c satisfazem a relação $a^2 + b^2 + ab = c^2$ então podemos formar três

triângulos rectângulos com a mesma área, respectivamente por meio dos dois números a e c, dos números b e c e dos números $(a + b)$ e c. (Eecke 1959,192)

Eecke prossegue, dando uma justificação que seguidamente se encontrará na resolução dada por Viète para este problema.

Com efeito, se o primeiro triângulo formado por meio de a e c tem os lados do ângulo recto expressos pelos números $(c^2 - a^2)$ e $2ac$, a área será $ac.(c^2 - a^2)$. Ou, pela relação da condição dada: $c^2 - a^2 = ab + b^2$; a área será:

$$ac.(c^2 - a^2) = ac.(ab + b^2) = abc.(a + b).$$

Por outro lado, se o segundo triângulo formado por meio de b e c tem os lados do ângulo recto expressos por $(c^2 - b^2)$ e $2bc$, a área será a mesma

$$bc.(c^2 - b^2) = bc.(ab + a^2) = abc.(a + b).$$

Enfim, se o terceiro triângulo formado por meio de $(a + b)$ e c tem os lados do ângulo recto expressos por $(a + b)^2 - c^2$, e por $2c.(a + b)$, a área será a mesma:

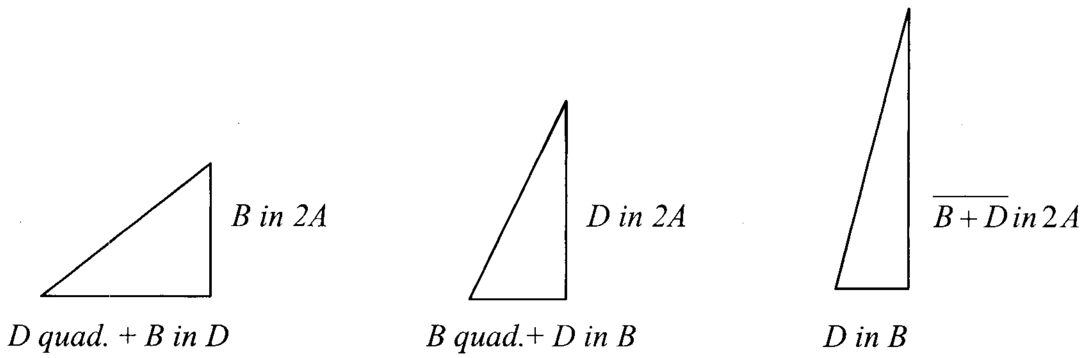
$$c.(a + b).[(a + b)^2 - c^2] = c.(a + b).[(a + b)^2 - ab - a^2 - b^2] = c.(a + b).ab = abc.(a + b).$$

(Eecke 1959, 192)

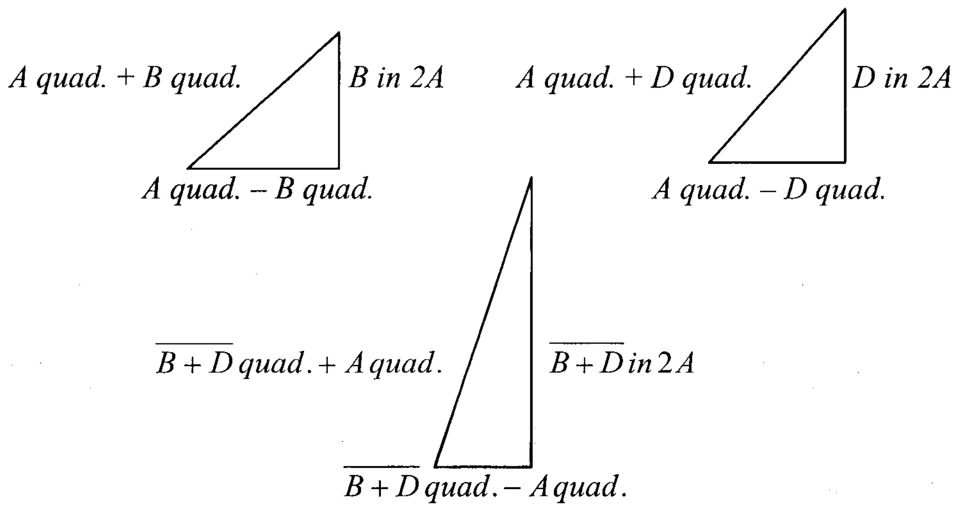
Eecke termina verificando que, aplicando 3, 5 e 7 às relações encontradas, de facto se obtêm os três triângulos rectângulos de igual área determinados por Diofanto.

Observe-se o modo como Viète utiliza os princípios da "Génese dos Triângulos", expostos nas *Notas Preliminares*, na resolução deste problema.

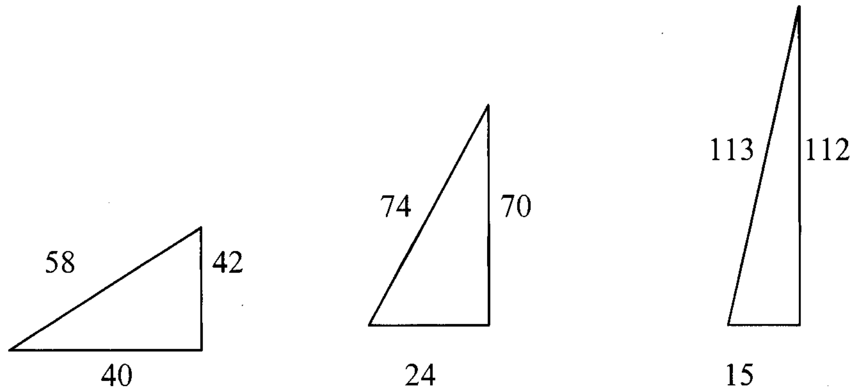
Considerando a perpendicular do primeiro triângulo proporcional a $B\,in\,2A$ e a sua base proporcional a $D\ quad. + B\ in\ D$; a perpendicular do segundo triângulo proporcional a $D\ in\ 2A$ e a sua base proporcional a $B\,quad. + D\,in\,B$ e a perpendicular do terceiro proporcional a $\overline{B + D}\,in\,2A$ e a sua base proporcional a $D\ in\ B$, Viète observou que, de acordo com o lema precedente, as áreas seriam iguais, a saber $B\ in\ D\ quad.\ in\ A + D\ in\ B\ quad.\ in\ A$. Assim, para Viète, a única questão a tomar em atenção seria se os planos proporcionais às hipotenusas eram racionais.



Viète observou ainda que as raízes B e D podiam ser escolhidas de acordo com *Zetéticas* IV, 10 de tal modo que $B\ quad. + D\ quad. + B\ in\ D$ fosse igual a um quadrado. Considerando $A\ quad.$ esse quadrado, por substituição a base do primeiro triângulo seria $A\ quad. - B\ quad.$, a base do segundo seria igual a $A\ quad. - D\ quad.$ e a do terceiro $\overline{B+D}\,quad. - A\,quad.$. Uma vez que as bases construídas a partir destas raízes eram proporcionais à diferença entre os quadrados dessas raízes e as perpendiculares proporcionais ao dobro do seu produto, de acordo com a proposição 45 das *Notas Preliminares*, as hipotenusas consistiam na soma dos mesmos quadrados. Por esta razão, a hipotenusa do primeiro triângulo seria proporcional a $A\ quad. + B\ quad.$, a do segundo proporcional a $A\ quad. + D\ quad.$ e a do terceiro proporcional a $\overline{B+D}\,quad. + A\,quad.$ e o problema estava resolvido.



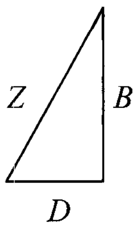
Como exemplo numérico Viète utilizou os mesmos números considerados por Diofanto, portanto, tomou B igual a 3 e D igual a 5. Assim, A era igual à raiz quadrada de $3^2 + 5^2 + 3 \times 5$, ou seja, 7 e a área comum dos triângulos rectângulos a representar numericamente era igual a $3 \times 5^2 \times 7 + 5 \times 3^2 \times 7$, ou seja, 840. Os triângulos rectângulos procurados eram então os seguintes:

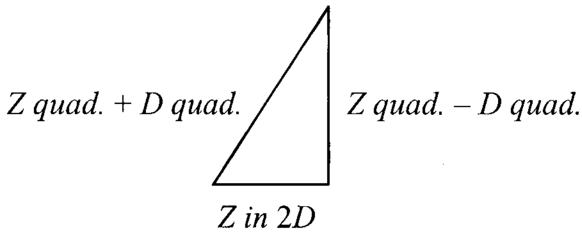


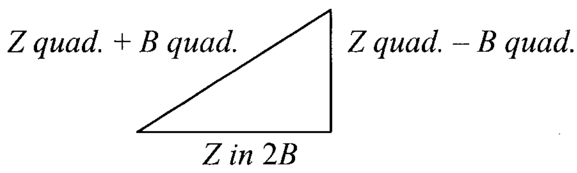
No problema seguinte, mais uma vez numericamente, Viète propôs-se determinar três triângulos rectângulos tais que o produto das perpendiculares estava para o produto das bases, assim como um número quadrado estava para outro número quadrado.

Considerando, numericamente, um triângulo rectângulo qualquer Viète tomou Z para hipotenusa, D para base e B para a perpendicular. Construindo um segundo triângulo rectângulo a partir de Z e D com Z *in* $2D$ para base, Viète observou que a hipotenusa seria Z *quad.* + D *quad.* e a perpendicular corresponderia a Z *quad.* – D *quad.*. Finalmente, o terceiro triângulo rectângulo seria construído a partir de Z e B com Z *in* $2B$ para base, portanto, a hipotenusa seria Z *quad.* + B *quad.* e a perpendicular Z *quad.* – B *quad.*. Deste modo, Viète observou que o produto das perpendiculares estava para o produto das bases assim como B *quad.* estava para $4Z$ *quad.*, ou seja, um quadrado estava para outro quadrado. De facto, em notação actual,

$$\frac{B.(Z^2 - D^2)(Z^2 - B^2)}{4Z^2D^2B} = \frac{BB^2D^2}{4Z^2D^2B} = \frac{B^2}{4Z^2}.$$







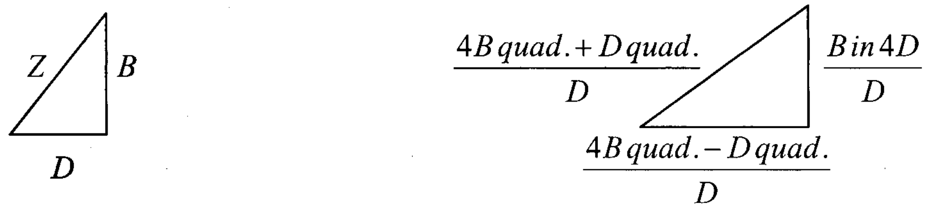
Para exemplificar numericamente este processo, Viète considerou 5, 3, 4 o primeiro triângulo rectângulo. Assim, $5^2 + 3^2$, ou seja 34, $2 \times 5 \times 3$, ou seja 30, $5^2 - 3^2$, ou seja 16 era o segundo e o terceiro era $5^2 + 4^2$, ou seja 41, $2 \times 5 \times 4$, ou seja 40, $5^2 - 4^2$, ou seja 9. Viète determinava, portanto, os três triângulos rectângulos procurados uma vez que o produto das perpendiculares, $4 \times 16 \times 9$, estava para o produto das bases, $3 \times 30 \times 40$, assim como o quadrado de 4 estava para o quadrado de 10.

Nos próximos dois problemas, Viète propôs-se encontrar, numericamente, dois triângulos rectângulos de tal modo que a diferença (respectivamente, a soma) entre o produto das perpendiculares e o produto das bases fosse um quadrado.

Observe-se a resolução dada por Viète no caso da diferença, pois o caso da soma é de raciocínio análogo.

Considerando, numericamente, um qualquer triângulo rectângulo, Viète tomou Z para hipotenusa, D para base e B para perpendicular de tal modo que o dobro da perpendicular B fosse maior do que a base D.

Seguidamente, Viète propôs a construção de um outro triângulo rectângulo a partir de $2B$ e D, ou a partir de raízes semelhantes, ou seja, proporcionais a estas. Considerando B *in* $4D$ a perpendicular desse novo triângulo a construir, Viète observou que todos os planos que fossem proporcionais aos lados desse triângulo seriam divididos por D. Assim, a hipotenusa e a base deste novo triângulo construído seriam proporcionais, respectivamente, a $\frac{4B\,quad. + D\,quad.}{D}$ e a $\frac{4B\,quad. - D\,quad.}{D}$. Viète concluiu observando que a diferença entre o produto das perpendiculares e o produto das bases originava um quadrado, a saber D *quad.*, ou um quadrado proporcional a D *quad.*. Deste modo, Viète tinha encontrado os dois triângulos rectângulos procurados.



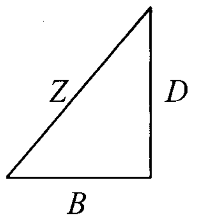
Como exemplo numérico Viète considerou 15, 9, 12 o primeiro triângulo rectângulo, portanto, o segundo seria $\frac{4\times 12^2 + 9^2}{9}$, ou seja 73, $\frac{4\times 12^2 - 9^2}{9}$, ou seja 55, $\frac{4\times 12\times 9}{9}$, ou seja 48. De facto, a diferença entre o produto das perpendiculares destes dois triângulos rectângulos, 12×48, e o produto das suas bases, 9×55, era igual a $576 - 495$, ou seja 81, o quadrado de 9.

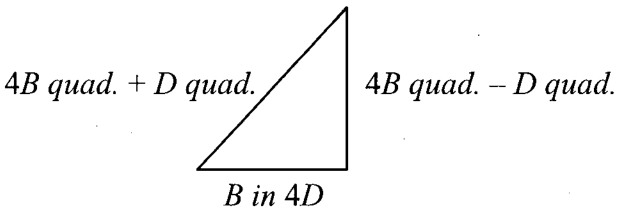
Em *Zetéticas* IV, 15 Viète propôs-se encontrar, numericamente, três triângulos rectângulos de tal modo que o produto das hipotenusas estava para o produto das bases, assim como o quadrado de um número estava para o quadrado de outro número.

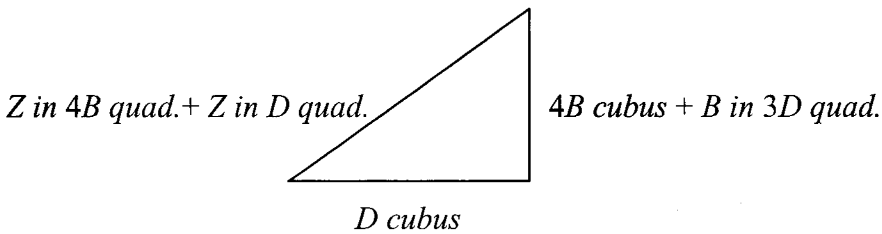
É de notar que, em *Zetéticas* IV,12, Viète tinha proposto encontrar três triângulos rectângulos, mas em vez do produto das hipotenusas considerou o produto das perpendiculares.

Considerando, numericamente, um triângulo rectângulo de hipotenusa Z, base B e perpendicular D de tal modo que o dobro da base fosse maior que a perpendicular, Viète construiu um outro triângulo rectângulo a partir de $2B$ e D designando a base por B *in* $4D$. Portanto, a hipotenusa, deste novo triângulo, seria proporcional a $4B$ *quad.* $+ D$ *quad.* e a perpendicular a $4B$ *quad.* $- D$ *quad.*. Finalmente, Viète considerou a hipotenusa do terceiro triângulo rectângulo, a construir, proporcional ao produto das hipotenusas do primeiro e segundo triângulos e a base proporcional à diferença entre o produto das bases e o produto das perpendiculares. Consequentemente, a perpendicular seria proporcional à soma dos produtos recíprocos das bases e das perpendiculares[108]. Assim, Viète tinha encontrado os triângulos rectângulos procurados, pois o produto das três hipotenusas estava para o produto das três bases assim como um quadrado estava para outro. De facto, usando a notação actual,

$$\frac{Z.(4B^2+D^2)(4ZB^2+ZD^2)}{B.4BD.D^3}=\frac{(4ZB^2+ZD^2)^2}{(2BD^2)^2}.$$







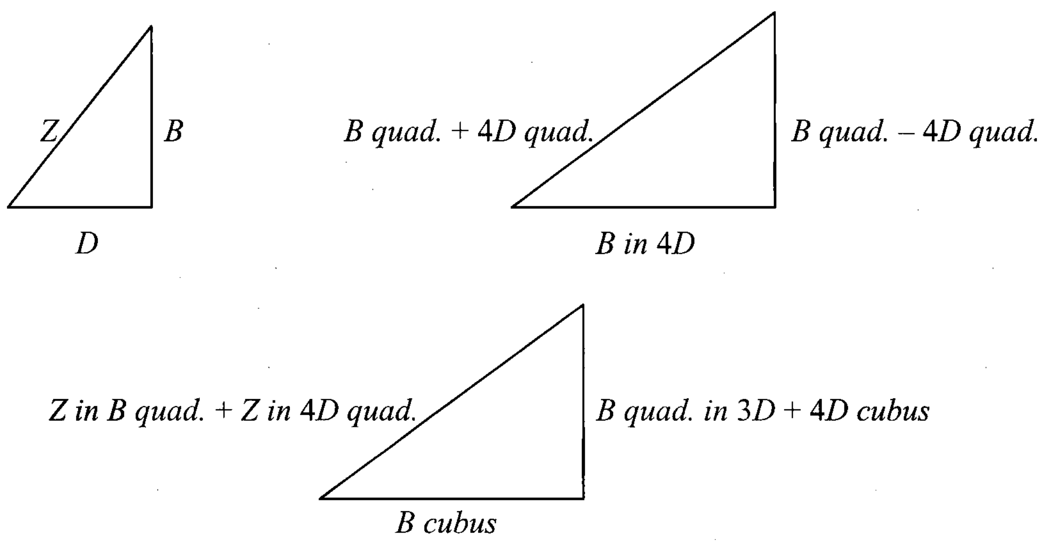
Exemplificando numericamente este processo, Viète considerou 5, 3, 4 o primeiro triângulo rectângulo. Assim, e dividindo por 4 cada um dos lados dos outros dois triângulos, Viète observou que $\frac{4\times3^2+4^2}{4}$, ou seja 13, $\frac{3\times4\times4}{4}$, ou seja 12, $\frac{4\times3^2-4^2}{4}$, ou seja 5 era o segundo e $\frac{5\times4\times3^2+5\times4^2}{4}$, ou seja 65, $\frac{4^3}{4}$, ou seja 16, $\frac{4\times3^3+3\times3\times4^2}{4}$, ou seja 63 era o terceiro. De facto, o produto das hipotenusas está para o produto das bases assim como o quadrado de 65 está para o quadrado de 24.

---

[108] É de notar que se trata de um triângulo sinerésico obtido dos dois primeiros, de acordo com a proposição 46 das *Notas Preliminares.*

Viète apresentou ainda um outro processo, considerando numericamente um triângulo rectângulo de hipotenusa Z, base D e perpendicular B, de tal modo que B fosse maior que o dobro de D. Assim, para Viète, o segundo triângulo rectângulo seria construído a partir de B e $2D$ com base igual a *B in* $4D$. Portanto a hipotenusa deste triângulo rectângulo, seria proporcional a *B quad.* + 4*D quad.* e a perpendicular a *B quad.* – 4*D quad.*. Finalmente, Viète considerou a hipotenusa do terceiro triângulo rectângulo a construir proporcional ao produto das hipotenusas do primeiro e segundo triângulos e a base proporcional à soma do produto das bases com o produto das perpendiculares. Consequentemente, a perpendicular seria proporcional à diferença entre os produtos recíprocos das bases e das perpendiculares[109]. Deste modo, Viète encontrou os triângulos rectângulos procurados, pois o produto das três hipotenusas estava para o produto das três bases assim como um quadrado estava para outro. De facto, em notação actual,

$$\frac{Z.\left(B^2+4D^2\right)\left(ZB^2+4ZD^2\right)}{D.\,4BD.B^3}=\frac{\left(ZB^2+4ZD^2\right)^2}{\left(2DB^2\right)^2}.$$



Antes de se prosseguir com a análise do Livro IV, observe-se que o papel desempenhado nesta resolução pelos métodos sinerésico e dierésico,

[109] É de notar que se trata de um triângulo dierésico, obtido dos dois primeiros de acordo com a proposição 46 das *Notas Preliminares*.

expostos na proposição 46 das *Notas Preliminares*, é certamente e razão pela qual Viète apresentou estes dois processos.

Em *Zetéticas* IV, 16, Viète propôs-se encontrar, numericamente, um triângulo rectângulo de área igual a uma quantidade dada por condições estabelecidas.

Viète apresentou apenas dois exemplos de áreas possíveis.

Começando por tomar a área do triângulo rectângulo procurado igual a $\frac{B\,quad\text{-}quad.\;-\;X\,quad\text{-}quad.}{D\,quad.}$, Viète considerou que o triângulo rectângulo seria construído a partir de $B\,quad.$ e $X\,quad.$ e os plano-planos proporcionais aos lados desse triângulo seriam divididos por $X\ in\ D\ in\ B$. De facto, utilizando a proposição 45 das *Notas Preliminares*, a hipotenusa do triângulo rectângulo construído a partir de $B\ quad.$ e $X\ quad.$ (sendo B maior que X) era proporcional a $X\ quad.\text{-}quad. + B\ quad.\text{-}quad.$, e os catetos eram proporcionais, respectivamente, a $2X\ quad.\ in\ B\ quad.$ e a $B\ quad.\text{-}quad. - X\ quad.\text{-}quad.$. Dividindo todos estes lados por $X\ in\ D\ in\ B$, a área do triângulo era, portanto, igual a $\frac{B\,quad\text{-}quad\;-\;X\,quad\text{-}quad.}{D\,quad.}$.

Para exemplificar numericamente este processo, Viète considerou B igual a 3, X igual a 1 e D igual a 2. Assim, a área dada era igual a $\frac{3^4-1^4}{2^2}$, ou seja 20, e $\frac{1^4+3^4}{1\times2\times3}$, ou seja $\frac{82}{6}$, $\frac{2\times1\times3^2}{1\times2\times3}$,ou seja $\frac{18}{6}$, $\frac{3^4-1^4}{1\times2\times3}$, ou seja $\frac{80}{6}$ era o triângulo rectângulo procurado. De facto, $\frac{1}{2}\times\frac{18}{6}\times\frac{80}{6}=\frac{720}{36}=20$.

Viète continua retirando a seguinte conclusão

(...) quando um número é dado para a área, nós devemos ver se o que foi proposto, ou o mesmo multiplicado por um quadrado mais 1 ou alguma outra quarta potência é uma quarta potência. (Witmer 1983, 144).

De facto, a resolução apresentada por Viète efectivamente demonstra que, dada qualquer área que, multiplicada por um quadrado, seja a diferença de dois biquadrados, é possível encontrar um triângulo rectângulo com a área dada. Viète observou ainda que

> (...) se 15 era dado [como área], visto que 15 mais 1 faz 16, a quarta potência de 2, um triângulo [rectângulo] pode ser construído a partir de 4 [isto é, 2^2] e 1 [isto é, 1^2]. (Witmer 1983, 144).

Viète terminou observando que se tomasse a área do triângulo rectângulo procurado igual a $\frac{D\, cubus\, in\, X - X\, cubus\, in\, D}{X\, quad.}$, o triângulo procurado seria construído a partir de D e X e os planos proporcionais aos lados desse triângulo seriam divididos por X. De facto, utilizando de novo a proposição 45 das *Notas Preliminares*, a hipotenusa do triângulo rectângulo construído a partir de D e X (com D maior que X) era proporcional a $D\ quad. + X\ quad.$ e os catetos eram proporcionais, respectivamente, a $2X\ in\ D$ e $D\ quad. - X\ quad.$. Dividindo todos estes lados por X, a área do triângulo era, portanto, igual a $\frac{D\, cubus\, in\, X - X\, cubus\, in\, D}{X\, quad.}$.

Exemplificando numericamente este processo, Viète considerou D igual a 2 e X igual a 1. Assim, a área dada seria igual a $\frac{2^3 \times 1 - 1^3 \times 2}{1^2}$, ou seja 6. Viète concluiu então que

> (...) quando um número é dado como área, ver se o que foi proposto ou o mesmo multiplicado por um quadrado é um cubo menos a sua raiz. (Witmer 1983, 144)

Viète exemplificou o referido tomando 60 como a área dada, portanto, o triângulo procurado seria então construído a partir das raízes 4 e 1 isto, porque $60 \times 1^2 = 4^3 - 4$, isto é, $4^3 \times 1 - 4 \times 1^3$.

Em *Zetéticas* IV, 17, Viète propôs-se encontrar, numericamente, três planos proporcionais de tal modo que a soma do meio com o primeiro ou último fosse um quadrado.

Designando por *E planum* o meio de três planos que se pretendiam proporcionais, *B quad. – E planum* o primeiro plano e *G quad. – E planum* o último, Viète notou que se adicionasse o primeiro plano a *E planum* obtinha um quadrado, a saber *B quad.*; e se de igual modo adicionasse *E planum* ao último plano obtinha também o quadrado, a saber *G quad.*. Como se pretendia que estes três planos fossem proporcionais, Viète observou que o quadrado do meio era igual ao produto dos extremos e, portanto, «(...) de acordo com a arte (...)» (Witmer 1983, 145)

$$\frac{B\,quad.in\,G\,quad.}{B\,quad.+G\,quad.} \text{ era igual a } E\,planum.$$

Assim, os três planos proporcionais procurados eram da forma: $\frac{B\,quad\div quad.}{B\,quad.+G\,quad.}$ (o primeiro plano), $\frac{B\,quad.in\,G\,quad.}{B\,quad.+G\,quad.}$ (o meio) e $\frac{G\,quad\div quad.}{B\,quad.+G\,quad.}$ (o último plano).

Como exemplo numérico, Viète considerou B igual a 1 e G igual a 2. Assim, os três planos proporcionais procurados eram, $\frac{1^4}{1^2+2^2}$, ou seja $\frac{1}{5}$, $\frac{1^2\times 2^2}{1^2+2^2}$, ou seja $\frac{4}{5}$ e $\frac{2^4}{1^2+2^2}$, ou seja $\frac{16}{5}$. De facto, a soma do meio com o primeiro plano era $\frac{4}{5}+\frac{1}{5}$, ou seja 1, e a soma do meio com o último plano era $\frac{4}{5}+\frac{16}{5}$, ou seja 4.

Viète terminou referindo que os mesmos planos multiplicados por um qualquer quadrado satisfaziam o problema proposto. Considerando 25 esse quadrado, Viète observou que $\frac{1}{5}\times 25$, ou seja 5, $\frac{4}{5}\times 25$, ou seja 20 e $\frac{16}{5}\times 25$, ou seja 80 eram planos proporcionais.

Os três últimos problemas deste Livro IV são dedicados a encontrar, numericamente, dois cubos cuja soma fosse igual à diferença de dois cubos dados; ou cuja diferença fosse igual à soma de dois cubos dados; ou cuja diferença fosse igual à diferença de dois cubos dados.

Observe-se a resolução do problema 18.

Designando os cubos dados por $B\ cubus$ e $D\ cubus$, em que o primeiro era maior que o segundo, Viète observou que a soma dos cubos procurados era igual a $B\ cubus - D\ cubus$.

Considerando $B - A$ o lado do primeiro cubo e $\dfrac{B\ quad.in\ A}{D\ quad.} - D$ o lado do segundo cubo, Viète construiu os cubos respectivos e igualando a sua soma a $B\ cubus - D\ cubus$ obteve

$$\frac{D\ cubus\ in\ 3B}{B\ cubus + D\ cubus} \text{ igual a } A.$$

De facto, usando a notação actual $(B - A)^3 = B^3 - 3AB^2 + 3A^2B - A^3$ e $\left(\dfrac{AB^2}{D^2} - D\right)^3 = \dfrac{\left(AB^2 - D^3\right)^3}{D^6} = \dfrac{A^3B^6 - 3A^2B^4D^3 + 3AB^2D^6 - D^9}{D^6}$. Deste modo,

$$(B - A)^3 + \left(\frac{AB^2}{D^2} - D\right)^3 = B^3 - D^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B^3 - 3AB^2 + 3A^2B - A^3 + \frac{A^3B^6 - 3A^2B^4D^3 + 3AB^2D^6 - D^9}{D^6} = B^3 - D^3$$

$$\Leftrightarrow -3AB^2D^6 + 3A^2BD^6 - A^3D^6 + A^3B^6 - 3A^2B^4D^3 + 3AB^2D^6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3A^2BD^6 - 3A^2B^4D^3 - A^3D^6 + A^3B^6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3BD^6 - 3B^4D^3 - AD^6 + AB^6 = 0$$

$$\Leftrightarrow A.(B^6 - D^6) = 3B^4D^3 - 3BD^6$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{3BD^3.\left(B^3 - D^3\right)}{\left(B^3 - D^3\right)\left(B^3 + D^3\right)}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{3BD^3}{B^3 + D^3}.$$

Assim, fazendo as substituições respectivas, o lado do primeiro cubo procurado era $\dfrac{B \, in \, \overline{B \, cubus - 2D \, cubus}}{B \, cubus + D \, cubus}$ e o lado do segundo era $\dfrac{D \, in \, \overline{2B \, cubus - D \, cubus}}{B \, cubus + D \, cubus}$. Portanto, Viète encontrava os cubos pedidos, cuja soma era igual a $B \ cubus - D \ cubus$.

Viète terminou referindo que, pelo processo anteriormente descrito, era possível encontrar quatro cubos, em que o maior era igual à soma dos outros três, através das raízes B e D, com B maior que D. Assim, o lado do maior cubo era proporcional a $B \, in \, \overline{B \, cubus + D \, cubus}$ e os lados dos restantes cubos eram proporcionais a $D \, in \, \overline{B \, cubus + D \, cubus}$, a $B \ in \ \overline{B \ cubus - 2D \ cubus}$ e a $D \, in \, \overline{2B \, cubus - D \, cubus}$, respectivamente. De facto, isto resulta, em notação actual, de $\left[\dfrac{B\left(B^3 - 2D^3\right)}{B^3 + D^3}\right]^3 + \left[\dfrac{D\left(2B^3 - D^3\right)}{B^3 + D^3}\right]^3 = B^3 - D^3$.

Exemplificando numericamente este processo, Viète considerou B igual a 2 e D igual a 1.

Com $B = 2$ e $D = 1$, as arestas dos cubos procurados seriam $\dfrac{2 \times (2^3 - 2 \times 1^3)}{2^3 + 1^3} = \dfrac{12}{9} = \dfrac{4}{3}$ e $\dfrac{1 \times (2 \times 2^3 - 1^3)}{2^3 + 1^3} = \dfrac{15}{9} = \dfrac{5}{3}$ contudo, os valores dados por Viète são os triplos destes, ou seja, os menores múltiplos inteiros de 2, 1, $\dfrac{4}{3}$ e $\dfrac{5}{3}$ que têm ainda a mesma propriedade. Assim, se os cubos dados tivessem arestas 6 e 3, então as arestas dos cubos procurados seriam 4 e 5; Viète observou ainda que se as arestas dadas fossem $6N$ e $3N$ então as arestas procuradas seriam $4N$ e $5N$.

Os processos de resolução dos problemas seguintes são de raciocínio semelhante, tendo Viète considerado no problema 19 que o lado do primeiro cubo era $B + A$ e do segundo $\dfrac{B \, quad. in \, A}{D \, quad.} - D$ e no problema 20 o lado do primeiro cubo era $A - D$ e do segundo $\frac{D\,quad.in\,A}{B\,quad.} - B$. É de notar que, no problema 20, Viète referiu ainda que os cubos procurados podiam ser determinados tomando para lado do primeiro cubo $B - A$ e do segundo $D - \frac{B\,quad.in\,A}{D\,quad.}$.

Como conclusão da análise deste Livro IV, apresenta-se em notação actual uma síntese dos problemas abordados por Viète e respectiva correspondência na *Aritmética* de Diofanto:

Zetéticas IV,1	$x^2 + y^2 = a^2$	*Aritmética* II, 8
Zetéticas IV, 2 e 3	$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$	*Aritmética* II, 9
Zetéticas IV, 4	Construir dois triângulos rectângulos semelhantes	
Zetéticas IV, 5	$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$; $c < x < d$	
Zetéticas IV, 6	$x^2 - y^2 = a^2$	*Aritmética* II, 10
Zetéticas IV, 7	$\begin{cases} a + x = \square \\ b + x = \square \end{cases}$	*Aritmética* II, 11
Zetéticas IV, 8	$\begin{cases} a - x = \square \\ b - x = \square \end{cases}$	*Aritmética* II, 12
Zetéticas IV, 9	$\begin{cases} x - a = \square \\ x - b = \square \end{cases}$	*Aritmética* II, 13
Zetéticas IV, 10	$x.y + x^2 + y^2 = \square$	1º lema da *Aritmética* V,7
Lema	$x.(y^2 + xy) = y.(x^2 + xy) = (x + y).xy$	
Zetéticas IV, 11	Encontrar três triângulos rectângulos com a mesma área	2º lema da *Aritmética* V, 7
Zetéticas IV, 12	Encontrar três triângulos rectângulos tais que $\frac{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3}{b_1 . b_2 . b_3} = \frac{\square}{\square}$, em que p_i e b_i com $i = 1, 2, 3$ são, respectivamente, a perpendicular e a base de cada um dos triângulos rectângulos procurados	

Zetéticas IV, 13	Encontrar dois triângulos rectângulos $p_1.p_2 - b_1.b_2 = \square$, em que p_i e b_i com $i = 1, 2$ são, respectivamente, a perpendicular e a base de cada um dos triângulos rectângulos procurados	
Zetéticas IV, 14	Encontrar dois triângulos rectângulos $p_1.p_2 + b_1.b_2 = \square$, em que p_i e b_i com $i = 1, 2$ são, respectivamente, a perpendicular e a base de cada um dos triângulos rectângulos procurados	
Zetéticas IV, 15	Encontrar três triângulos rectângulos $\frac{h_1.h_2.h_3}{b_1.b_2.b_3} = \frac{\square}{\square}$, em que h_i e b_i com $i = 1, 2, 3$ são, respectivamente, a hipotenusa e a base de cada um dos triângulos rectângulos procurados	
Zetéticas IV, 16	Encontrar um triângulo rectângulo de área dada	
Zetéticas IV, 17	$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{y}{z} \\ x + y = \square \\ y + z = \square \end{cases}$	
Zetéticas IV, 18	$x^3 + y^3 = a^3 - b^3$	
Zetéticas IV, 19	$x^3 - y^3 = a^3 + b^3$	
Zetéticas IV, 20	$x^3 - y^3 = a^3 - b^3$	

Zetéticas V

O quinto Livro contém catorze problemas do mesmo tipo dos do Livro IV, mas geralmente envolvendo a determinação de três números.

No primeiro problema, Viète propôs-se encontrar, numericamente, três planos cuja soma formasse um quadrado e tal que a soma de quaisquer dois desses planos formasse também um quadrado.

É de referir que Diofanto já tinha proposto e resolvido este problema em *Aritmética* III, 6:

> Encontrar três números valendo um quadrado, [isto é, a soma é um número quadrado], e de tal modo que, tomando dois a dois, eles formam um quadrado. (Eecke 1959, 87)

Observe-se uma das resoluções dadas por Diofanto.

Considerando a soma dos três números procurados igual a 1 quadrado de *aritmo* mais 2 *aritmos* mais 1 unidade e o primeiro número procurado aumentado do segundo igual a 1 quadrado de *aritmo*, Diofanto notou que o terceiro número procurado era igual a 2 *aritmos* mais 1 unidade. Por outro lado, e uma vez que se procuravam três números de tal modo que a soma do segundo com o terceiro formasse um quadrado, Diofanto designou esse quadrado por 1 quadrado de *aritmo* mais 1 unidade menos 2 *aritmos* e, portanto, a raiz era 1 *aritmo* menos 1 unidade. Assim, e como a soma dos três números era 1 quadrado de *aritmo* mais 2 *aritmos* mais 1 unidade, Diofanto observou que o primeiro número era 4 *aritmos*. Deste modo, e sendo a soma do primeiro com o segundo número igual a 1 quadrado de *aritmo*, o segundo número era igual a 1 quadrado de *aritmo* menos 4 *aritmos*. Para completar a resolução, Diofanto necessitava que a soma do primeiro número com o terceiro, que era igual a 6 *aritmos* mais 1 unidade, fosse igual a um quadrado. Tomando 121 esse quadrado, 1 *aritmo* era igual a 20 unidades e, portanto, Diofanto determinava três números satisfazendo as condições do problema: 80, 320 e 41.

A outra resolução, segundo Eecke (1959, 88), possivelmente foi introduzida por um comentador grego. A resolução é análoga a esta e apenas difere dela por considerar-se a soma do primeiro com o terceiro número igual a 36 unidades. Assim, 1 *aritmo* era igual a $\frac{35}{6}$ e, portanto, $\frac{840}{36}$, $\frac{385}{36}$ e $\frac{456}{36}$ eram três números que satisfaziam as condições do problema.

Observe-se que nestas duas resoluções os quadrados escolhidos por Diofanto para igualar a 6 *aritmos* mais 1 unidade são maiores que 25.

É de notar que se se procurar um quadrado perfeito que seja a soma de um múltiplo de seis com a unidade, antes de 121 encontra-se o 25. Assim, e designando o *aritmos* por A, se $6A + 1 = 25$ então $A = 4$ e, portanto, os três números procurados $4A$, $A^2 - 4A$ e $2A + 1$ são, respectivamente, 16, 0 e 9. Mas como Diofanto não trabalhava com o zero, $6A + 1$ tinha que ser diferente de 25. No entanto, Diofanto trabalhava com números racionais, portanto, não era necessário apenas procurar quadrados perfeitos que fossem soma de um múltiplo de seis com a unidade; tal como na segunda solução podia ser um quadrado de um racional qualquer, desde que superior a 1 para que A tomasse um valor racional positivo. Contudo, para determinar o segundo número, $A^2 - 4A$, era necessário que A fosse maior que 4. Logo, era preciso que $6A + 1$ além de ser um quadrado de um racional fosse maior do que 25. Daí a escolha, por parte de Diofanto, de 125 e 36.

Viète, através da sua *logística especiosa*, generalizou esta resolução apresentada por Diofanto. De facto, Viète designou 1 *aritmo* por A, tomou B em vez de 1 e D *quad.* em vez de 121, mas de resto seguiu o raciocínio de Diofanto. Observe-se então a resolução dada por Viète.

Considerando a soma dos três planos procurados igual ao quadrado de $A + B$, isto é, A *quad.* $+ 2A$ *in* B *quad.* $+ B$ *quad.*, Viète designou a soma do primeiro plano com o segundo igual a A *quad.*, e portanto, o terceiro plano era igual a $2A$ *in* $B + B$ *quad.*. Uma vez que se procuravam três planos cuja soma de quaisquer dois desses planos fosse um quadrado, Viète considerou o quadrado de $A - B$, isto é, A *quad.* $- B$ *in* $2A + B$ *quad.* igual à soma do segundo com o terceiro plano. Deste modo, o segundo plano era igual a $A\ quad. - B\ in\ 4A$ e o primeiro plano era igual a $B\ in\ 4A$. Adicionando-o ao terceiro plano, $B\,in\,6A + B\,quad.$ representava a soma do primeiro com o terceiro plano que, pelas condições do problema, era igual a um quadrado. Tal como Diofanto, Viète atribuiu um valor a esse quadrado, a saber $D\ quad.$. Assim, ordenando esta última igualdade Viète obteve

$$\frac{D\,quad. - B\,quad.}{6B} \text{ igual a } A.$$

Viète concluiu o seu raciocínio observando que, através das respectivas substituições e multiplicando por $36B\ quad.$, o primeiro plano era proporcional a $D\ quad.\ in\ 24B\ quad. - 24B\ quad.\text{-}quad.$, o segundo plano era proporcional a $D\,quad.\text{-}quad. + 25B\ quad.\text{-}quad. - B\ quad.\ in\ 26D\ quad.$ e o terceiro plano era proporcional a $B\ quad.\ in\ 12D\ quad. + 24B\ quad.\text{-}quad.$.

Viète terminou *Zetéticas* V, 1 exemplificando numericamente o seu raciocínio. Assim, considerando D igual a 11 e B igual a 1, os mesmos números considerados por Diofanto, os planos que satisfaziam o problema eram: 2880, 11520 e 1476. Viète referiu ainda que dividindo por qualquer quadrado, os planos obtidos dessa divisão ainda eram solução do problema. Por exemplo, Viète considerou 36 esse quadrado e, portanto, os planos eram 80, 320 e 41, números esses, como visto anteriormente, apresentados por Diofanto como solução do problema.

Viète considerou ainda D igual a 6 e B igual a 1, novamente os mesmos números considerados por Diofanto, os planos eram, portanto, 840, 385 e 456. Se se dividir esses planos por 36, que é um quadrado, verifica-se mais uma vez que os números obtidos estão presentes, como solução do problema 6 da *Aritmética* de Diofanto.

Nos dois próximos problemas das *Zetéticas* V, Viète propôs-se determinar numericamente, no problema 2, três quadrados separados por intervalos iguais; e, no problema 3, três planos equidistantes, mas de tal modo que a soma de dois quaisquer desses planos formasse um quadrado.

Diofanto também resolveu estes problemas em *Aritmética* III, 7. Propondo-se

Encontrar três números que sejam de igual diferença, e tal que, tomados dois a dois, eles formem um quadrado. (Eecke 1959, 89)

o que corresponderia a *Zetéticas* V, 3, Diofanto começou por estabelecer um resultado preliminar que mais tarde Viète considerou como um problema autónomo, *Zetéticas* V, 2.

Assim, antes de se debruçar sobre o problema proposto, Diofanto começou por procurar três números quadrados de *igual diferença*, isto é, $x^2 < y^2 < z^2$ com $z^2 - y^2 = y^2 - x^2$, e de tal modo que a semi-soma destes três números procurados fosse maior que cada um deles.

Considerando o primeiro número quadrado igual a 1 quadrado de *aritmo* e o segundo número quadrado igual a 1 quadrado de *aritmo* mais 2 *aritmos* mais 1 unidade, Diofanto notou que a sua diferença era 2 *aritmos* mais 1 unidade. Assim, juntando estes 2 *aritmos* mais 1 unidade ao segundo número, Diofanto observou que o terceiro número quadrado seria 1 quadrado de *aritmo* mais 4 *aritmos* mais 2 unidades. Igualando o terceiro número quadrado ao quadrado de 1 *aritmo* menos 8 unidades, isto é, 1 quadrado de *aritmo* mais 64 unidades menos 16 *aritmos*, Diofanto obteve que 1 *aritmo* era igual a $\frac{62}{20}$, isto é, $\frac{31}{10}$. Deste modo, Diofanto concluía que três números que satisfaziam o problema eram 961, 1681 e 2401. Observe-se que efectuando as respectivas substituições, o primeiro número quadrado era igual a $\frac{961}{100}$, o segundo $\frac{1681}{100}$ e o terceiro a $\frac{2401}{100}$. Ora, multiplicando por 100, os números obtidos continuavam a ser uma solução do problema, pois 961, 1681 e 2401 eram três números quadrados, a sua diferença era 720 e a sua semi-soma era $2521\frac{1}{2}$, um número maior que cada um dos números obtidos.

Regressando ao problema inicialmente proposto, «Encontrar três números que sejam de igual diferença e tal que a soma de dois quaisquer desses números seja igual a um quadrado.» (Eecke 1959, 89), Diofanto propôs-se encontrar primeiramente três quadrados com igual diferença. Pelo que se viu anteriormente, Diofanto tomou 961, 1681 e 2401 como esses quadrados. Assim, considerou a soma do primeiro número procurado com o segundo igual a 961 unidades, a soma do segundo número procurado com o terceiro igual a 2401 unidades e a soma do primeiro com o terceiro igual a 1681 unidades. É de notar que sendo x, y e z os números procurados com $x < y < z$ então $x + y < x + z < y + z$. Assim se justificam as escolhas de Diofanto ao considerar $x + y = 961$, $y + z = 2401$ e $x + z = 1681$. Note-se ainda que $y - x = z - y$, pois $y - x = (y + z) - (x + z) = 2401 - 961 = 1681 - 961 = (x + z) - (x + y) = z - y$.

Designando a soma dos três números procurados igual a 1 *aritmo*, Diofanto observou que o terceiro número procurado era igual a 1 *aritmo* menos 961 unidades, o primeiro número era igual a 1 *aritmo* menos 2401 unidades e o segundo número igual a 1 *aritmo* menos 1681 unidades. Deste modo, 1 *aritmo* era igual a $2521\frac{1}{2}$ unidades e, portanto, $120\frac{1}{2}$, $840\frac{1}{2}$ e $1560\frac{1}{2}$ satisfaziam o problema proposto.

Observem-se então agora as resoluções apresentadas por Viète, respectivamente, dos problemas 2 e 3.

Em *Zetéticas* V, 2, Viète propôs-se determinar, numericamente, três quadrados separados por intervalos iguais. É de notar que, ao contrário de Diofanto, Viète não mencionou a condição da semi-soma dos quadrados procurados ser maior que cada um deles.

Designando o primeiro quadrado por $A\ quad.$ e o segundo quadrado por $A\ quad. + B\ in\ 2A + B\ quad.$, Viète observou que o terceiro quadrado seria igual a $A\ quad. + B\ in\ 4A + 2B\ quad.$. Assumindo que o lado deste último quadrado era igual $D - A$, Viète notou que

$D\ quad. - A\ in\ 2D + A\ quad.$ era igual a $A\ quad. + B\ in\ 4A + 2B\ quad.$

e deste modo obteve

$$\frac{D\,quad. - 2B\,quad.}{4B + 2D} \text{ igual a } A.$$

Assim, através das respectivas substituições e multiplicando pelo quadrado de $4B + 2D$, Viète concluiu o seu raciocínio observando que o lado do primeiro quadrado era proporcional a D *quad.* $- 2B$ *quad.*, o lado do segundo quadrado proporcional a D *quad.* $+ 2B$ *quad.* $+ B$ *in* $2D$ e o lado do terceiro quadrado proporcional D *quad.* $+ 2B$ *quad.* $+ B$ *in* $4D$.

Viète terminou *Zetéticas* V, 2 exemplificando com uma ilustração numérica. Assim, considerando D igual a 8 e B igual a 1, Viète observou que os quadrados procurados eram 3844, quadrado de 62, 6724, quadrado de 82, e 9604, quadrado de 98, distintos uns dos outros pelo mesmo intervalo, 2880. Viète salientou ainda que dividindo por um quadrado qualquer, por exemplo 4, os quadrados 961, 1681 e 2401 eram soluções do problema e o intervalo que os separava era igual a 720.

É de referir que o processo utilizado por Viète na resolução deste problema assemelha-se ao usado por Diofanto no passo preliminar da resolução do problema 7 do Livro III da sua *Aritmética*, salvo na notação usada por cada um. De facto, enquanto Diofanto representou o primeiro quadrado por 1 quadrado de *aritmo* e o segundo por 1 quadrado de *aritmo* mais 2 *aritmos* mais 1 unidade, Viète designou esses quadrados, respectivamente, por A *quad.* e A *quad.* $+ B$ *in* $2A + B$ *quad.*. Utilizando estes quadrados, Viète determinou o terceiro e, tal como Diofanto, igualou-o a um quadrado. Em vez de 1 *aritmo* menos 8 unidades, considerado por Diofanto, Viète igualou o terceiro quadrado ao quadrado de $D - A$, determinando portanto o valor de A. Para concluir, Viète escolheu um exemplo numérico em que os quadrados que satisfaziam o seu problema eram os mesmos que Diofanto tinha considerado.

No terceiro problema das *Zetéticas* V, Viète propôs-se encontrar, numericamente, três planos equidistantes de tal modo que a soma de dois quaisquer desses planos formasse um quadrado.

Tal como Diofanto, Viète iniciou a resolução do seu problema considerando três quadrados equidistantes. De acordo com a *Zetéticas* V, 2, designou-os, respectivamente, por B *quad.* (o menor), B *quad.* $+ D$ *planum* e

$B\,quad. + 2D\,planum$ (o maior). Assim, tomando a soma do primeiro plano com o segundo igual a B *quad.*, a soma do primeiro com o terceiro igual a $B\,quad. + D\,planum$ e a soma do segundo com o terceiro igual a $B\,quad. + 2D\,planum$, Viète designou por $A\,planum$ a soma destes três planos[110]. Deste modo, o terceiro plano era igual a A *planum* – B *quad.*, o segundo plano igual A *planum* – B *quad.* – D *planum* e o primeiro destes planos era igual a $A\,planum - B\,quad. - 2D\,planum$.

E assim os três planos serão equidistantes. Com efeito a diferença do primeiro e do segundo é $D\,planum$ como [a diferença] do segundo e do terceiro. (Peyroux 1990, 133)

Viète concluiu referindo que $3A$ *planum* – $3B$ *quad.* – $3D$ *planum*, a soma dos três planos, era igual a $A\,planum$ e, portanto,

$$\frac{3B\,quad. + 3D\,planum}{2} \text{ era igual a } A\,planum.$$

Assim, o primeiro plano era igual a $\dfrac{B\,quad. - D\,planum}{2}$, o segundo a $\dfrac{B\,quad. + D\,planum}{2}$ e o terceiro a $\dfrac{B\,quad. + 3D\,planum}{2}$.

Multiplicando por 4, os planos seriam proporcionais, respectivamente, a $2B$ *quad.* – $2D$ *planum*, $2B$ *quad.* + $2D$ *planum* e o terceiro a $2B$ *quad.* + $6D$ *planum*. Viète observou ainda que, de facto, a diferença entre o segundo e o primeiro plano era igual à diferença entre o terceiro e o segundo planos, $4D$ *planum*. Além disso, a soma do primeiro com o segundo era igual a $4B$ *quad.*, um quadrado; a soma do primeiro com o terceiro era $4B$ *quad.* + $4D$ *planum*, também um quadrado, porque B *quad.* + D *planum* foi considerado como tal no início da resolução; e a soma do segundo com o terceiro era $4B$ *quad.* + $8D$ *planum*, um quadrado, visto que também, por hipótese, B *quad.* + $2D$ *planum* era um quadrado, como Viète havia considerado.

---

[110] É de notar que Diofanto tinha representado esta soma por 1 *aritmo*. É de referir também que se está a considerar o primeiro plano menor que o segundo e este menor que o terceiro.

Viète terminou esta resolução com um exemplo numérico. Tomou *B quad.* igual a 961 e *D planum* igual a 720. É de notar que 961 é o quadrado de 31 e 720 era o intervalo que separava os outros quadrados procurados no exemplo numérico do problema 2. Na verdade, de $961 + 720 = 1681$ obtém-se o quadrado de 41, e de $961 + 2 \times 720 = 2401$ o quadrado de 49. Assim, o primeiro plano seria 482, o segundo 3362 e o terceiro 6242. O intervalo entre os planos seria, portanto, 2880 e a soma do primeiro com o segundo era 3844, o quadrado de 62, a soma do primeiro com o terceiro era 6724, o quadrado de 82, e a soma do segundo com o terceiro era 9604, o quadrado de 98.

Os dois problemas seguintes das *Zetéticas* V eram dedicados a determinar, numericamente, três planos em certas condições. No problema 4, pretendia-se determinar esses planos de tal modo que a soma de quaisquer dois desses planos com um plano dado e ainda a soma dos três planos com esse mesmo plano formasse um quadrado. No problema 5, em vez de se adicionar o plano dado à soma de dois quaisquer dos planos procurados e à soma dos três planos procurados, subtrai-se esse plano dado às somas referidas de forma a obter quadrados.

Antes de analisar *Zetéticas* V, 4 observe-se que Diofanto em *Aritmética* III, 8 também tinha proposto e resolvido este problema:

> Encontrar, relativamente a um número dado, três outros números, de maneira a que a soma de dois quaisquer desses números, aumentada do número dado forme um quadrado, e que a soma desses três números [procurados] aumentada do número dado forme também um quadrado. (Eecke 1959, 91)

Considerando o número dado igual a 3 unidades Diofanto designou a soma dos dois primeiros números por 1 quadrado de *aritmo* mais 4 *aritmos* mais 1 unidade, para que aumentada de 3 unidades formasse um quadrado. Por outro lado, Diofanto considerou a soma do segundo com o terceiro número igual a 1 quadrado de *aritmo* mais 6 *aritmos* mais 6 unidades e a soma dos três números procurados igual a 1 quadrado de *aritmo* mais 8 *aritmos* mais 13 unidades, para que estas somas aumentadas de 3 unidades formassem também uns quadrados. Uma vez que a soma dos três números era 1 quadrado de *aritmo* mais 8 *aritmos* mais 13 unidades e a soma dos dois primeiros números era 1 quadrado de *aritmo* mais 4 *aritmos* mais 1 unidade, o terceiro número era igual a 4 *aritmos* mais 12 unidades. Do mesmo modo e uma vez que a soma do segundo com o terceiro número era 1 quadrado de *aritmo* mais 6 *aritmos* mais 6 unidades, o primeiro número era igual 2 *aritmos* mais 7 unidades. Como o primeiro número aumentado do segundo era igual a 1 quadrado de *aritmo* mais 4 *aritmos* mais 1 unidade, o segundo número era igual a 1 quadrado de *aritmo* mais 2 *aritmos* menos 6 unidades.

Restava a Diofanto verificar que a soma do primeiro com o terceiro número aumentada de 3 unidades formava um quadrado. Pelo que se viu anteriormente, a soma do primeiro com o terceiro aumentado de 3 unidades era igual a 6 *aritmos* mais 22 unidades. Assim, igualando esta soma a 100, que era um quadrado, Diofanto obteve 1 *aritmo* igual a 13 unidades e, portanto, 33, 189 e 64 eram soluções do problema.

Observe-se agora a resolução dada por Viète, cujo processo generaliza o raciocínio apresentado por Diofanto.

Designando por *Z planum* o plano dado, Viète considerou

A quad. + B in 2A + B quad. – Z planum igual à soma do primeiro com o segundo plano a determinar, visto que quando adicionada a *Z planum* a soma era o quadrado de *A + B*;

A quad. + D in 2A + D quad. – Z planum igual à soma do segundo com o terceiro plano, visto que quando adicionada a *Z planum* a soma era o quadrado de *A + D*;

A quad. + G in 2A + G quad. – Z planum igual à soma dos três planos, visto que quando adicionado a *Z planum* a soma era o quadrado de *A + G*.

Assim, subtraindo à soma dos três planos a soma do primeiro com o segundo, o terceiro plano era igual a *G in 2A + G quad. – B in 2A – B quad.* e, de igual modo, quando à soma dos três planos se subtraía a soma do segundo com o terceiro, obtinha-se o primeiro plano: *G in 2A + G quad. – D in 2A – D quad.*. Deste modo, a soma do primeiro com o terceiro plano adicionada de *Z planum* era igual a *G in 4A + 2G quad. – B in 2A – B quad. – D in 2A – D quad. + Z planum.*

Como, por hipótese, esta soma devia ser igual a um quadrado, Viète designou esse quadrado por $F\ quad.$, correspondendo na *Aritmética* III, 8 a 100 unidades, e obteve

$$\frac{F\ quad. + D\ quad. + B\ quad. - 2G\ quad. - Z\ planum}{4G - 2B - 2D} \text{ igual a } A.$$

Assim, realizando as respectivas substituições, Viète obtinha os três planos procurados.

Viète terminou exemplificando numericamente o seu raciocínio. Considerando $Z\ planum$ igual a 3, B igual a 1, D igual a 2, G igual a 3 e F igual a 10, então A seria igual a 14. A soma do primeiro com o segundo plano era igual a 222, ou seja, o quadrado de 15 menos 3; a soma do segundo com o terceiro plano era igual a 253, ou seja, o quadrado de 16 menos 3; a soma do primeiro com o terceiro plano era igual a 97, ou seja, o quadrado de 10 menos 3; e a soma dos três planos era igual a 286, ou seja, o quadrado de 17 menos 3. Assim, os planos procurados seriam 33, 189 e 64. É de notar que a solução apresentada por Viète, através deste exemplo numérico, foi a mesma que a dada por Diofanto.

O problema 5 deste quinto Livro é de raciocínio análogo a *Zetéticas* V, 4. Como se referiu, neste problema, Viète propôs-se novamente determinar três planos, mas em vez de adicionar o plano dado à soma de dois quaisquer dos planos procurados e à soma dos três planos procurados, subtraiu esse plano dado às somas referidas de modo a obter quadrados. Tal como o problema 4, *Zetéticas* V, 5 também se encontrava no Livro III da *Aritmética* de Diofanto, a saber no problema 9.

Em *Zetéticas* V, 6, dado um plano, Viète propôs-se encontrar, numericamente, um número infinito de quadrados, cada um dos quais, adicionado ao plano dado originasse um quadrado, e também um número infinito de quadrados, cada um dos quais, quando lhes fosse subtraído o plano dado, originasse ainda um quadrado.

É de notar que Viète faz aqui referência à infinidade de soluções do problema, o que não acontece em outros problemas indeterminados já tratados quer no Livro IV quer neste mesmo Livro V. O motivo que o levou a explicitar a procura de infinitas soluções terá sido o de necessitar de usar a infinitude no seu próximo problema.

Designando o plano dado por $Z\, planum$, a resolução de Viète resume-se a considerar a quarta parte desse plano igual ao produto de duas raízes, por exemplo, $B\ in\ D$ ou $F\ in\ G$. Assim,

$$B\ in\ 4D \text{ era igual a } Z\, planum$$

ou

$$F\ in\ 4G \text{ era igual a } Z\, planum.$$

Deste modo,

$$\overline{B-D}\, quad. + Z\ planum \text{ era igual a } \overline{B+D}\, quad.,$$

e também

$$\overline{F-G}\, quad. + Z\ planum \text{ era igual a } \overline{F+G}\, quad..$$

Viète terminou referindo que o mesmo processo seria válido para duas raízes quaisquer, desde que o quociente de $\frac{Z\ planum}{4}$ por uma das raízes fosse a outra; o que é possível, porque em $\mathbb{Q}^+$ há infinitas decomposições de $\frac{Z\ planum}{4}$ como produto de dois factores. O facto de Viète apresentar duas das possíveis decomposições da quarta parte do plano dado pretenderia sugerir o método a utilizar para poder encontrar as infinitas soluções do problema.

Exemplificando numericamente o método usado, Viète tomou $Z\ planum$ igual a 96. A quarta parte era então 24, que era o produto de 1 por 24, ou de 2 por 12, ou de 3 por 8, ou de 4 por 6, ou de «(...) inúmeras outras fracções.» (Peyroux 1990, 135), como, por exemplo, o produto de $\frac{28}{5}$ e $\frac{30}{7}$. Assim, o quadrado de 23, $24-1$, mais 96 é igual ao quadrado de 25; o quadrado de 10, $12-2$, mais 96 é igual ao quadrado de 14; o quadrado de 5, $8-3$, mais 96 é igual ao quadrado de 11; o quadrado de 2, 6 – 4, mais 96 é igual ao quadrado de 10 e assim por diante para as restantes raízes (cf. Peyroux 1990, 135).

Viète finalizou *Zetéticas* V, 6 resolvendo a segunda questão: encontrar um infinito número de quadrados em que subtraindo um plano dado a cada um desses quadrados procurados a diferença obtida fosse ainda um quadrado. Observando que

$$\overline{B+D}\,quad. - Z\,planum \text{ era igual a } \overline{B-D}\,quad.$$

e também que

$$\overline{F+G}\,quad. - Z\,planum \text{ era igual a } \overline{F-G}\,quad.,$$

Viète conseguia resolver o problema.

Como exemplo numérico desta segunda questão, Viète tomou novamente $Z\,planum$ igual a 96. Assim, $\frac{Z\,planum}{4}$ era igual a 24 e, portanto, considerando o produto de 1 por 24 e o produto de 2 por 12, que eram duas decomposições possíveis de $\frac{Z\,planum}{4}$ como produto de dois factores, Viète obtinha o pretendido uma vez que $(1+24)^2 - 96$ é igual a 529, o quadrado de 23 e $(2+12)^2 - 96$ é igual a 100, o quadrado de 10.

Nos dois próximos problemas das *Zetéticas* V, Viète propôs-se encontrar, numericamente, três raízes de tal modo que o produto de duas quaisquer dessas raízes mais (respectivamente, menos) um dado plano formasse um quadrado.

Uma vez que são problemas resolúveis por raciocínio semelhante, observe-se apenas a resolução dada por Viète da *Zetéticas* V, 7. É ainda de referir que ambos os problemas se encontram também no Livro III da *Aritmética* de Diofanto, respectivamente, no problema 10 e 11.

Como referido, Diofanto também se debruçou sobre este problema através do uso da sua *logística numérica*:

Encontrar três números tal que o produto de dois quaisquer de entre eles, aumentado de um número dado, forme um quadrado. (Eecke 1959,93)

Considerando 12 o número dado, Diofanto pretendia que o produto entre o primeiro e o segundo número aumentado de 12 formasse um quadrado. Assim, se a esse quadrado se retirasse 12, Diofanto obtinha o produto do primeiro pelo segundo número. Tomando esse quadrado igual a 25 unidades, Diofanto notou que o produto do primeiro pelo segundo número era então igual a 13 unidades. Diofanto considerou, que o primeiro número seria 13 *aritmos* e o segundo 1 inverso de *aritmo*. Por outro lado, Diofanto referiu que se retirasse ainda 12 unidades de um outro quadrado, este resultado seria, por exemplo, o produto do segundo pelo terceiro número. Tomando esse quadrado igual a 16, o produto do segundo pelo terceiro número era igual a 4 unidades. Exprimindo novamente em *aritmos* e uma vez que o segundo número, como já foi visto, era igual a 1 inverso de *aritmo*, Diofanto observou que o terceiro número era portanto igual a 4 *aritmos*. Assim, como se pretendia que o produto do primeiro pelo terceiro número aumentado de 12 unidades fosse igual a um quadrado, Diofanto notou que 52 quadrados de *aritmo* mais 12 unidades seria igual a esse quadrado. Diofanto observou então que, se 13 fosse um número quadrado, a expressão 52 quadrados de *aritmo* mais 12 unidades igual a um quadrado resolvia-se facilmente. De facto, se *m* for um número racional e designando x o *aritmos*, o problema $4m^2x^2 + 12$ igual a um quadrado pode resolver-se considerando $4m^2x^2 + 12 = (2mx + k)^2$, onde k é qualquer racional positivo de quadrado inferior a 12. Com efeito, desta igualdade obtém-se $12 = 4mkx + k^2$, donde, $x = \frac{12 - k^2}{4mk}$. Observe-se que cada escolha racional de k, nas condições atrás referidas, conduz a um valor racional positivo para x. Segundo Eecke (1959, 94), só mais tarde, no lema 2 relativo à *Aritmética* VI, 12, Diofanto provou que se $a + b$ fosse um quadrado então a equação $ax^2 + b = y^2$ teria infinitas soluções. Ora, é o caso da equação $52x^2 + 12 = y^2$, pois $52 + 12 = 8^2$.

Mas, não sendo o caso, Diofanto observou que o problema se solucionava encontrando dois números tais que o seu produto fosse um quadrado e que cada um deles adicionado de 12 unidades fosse também um quadrado.

Esta observação de Diofanto resulta do facto de 13 não ser quadrado de um número racional, portanto, o valor 25, tomado como o quadrado que era igual à soma do produto do primeiro pelo segundo número procurado com 12, não foi bem escolhido. Em contrapartida, o valor 16, tomado como o quadrado que era igual à soma do produto do segundo pelo terceiro número com 12, foi bem escolhido, uma vez que contribuía com o factor 4 (que era um quadrado) para o coeficiente 52 na equação: 52 quadrados de *aritmo* mais 12 unidades igual a um quadrado.

Diofanto necessitava, portanto, de um processo para escolher os quadrados que constituíam os segundos membros das equações construídas a partir da soma do produto de cada um dos números procurados com 12. Observe-se então, usando a notação actual, como é que Diofanto poderia escolher esses quadrados.

Supondo $\begin{cases} xy+12=\alpha^2 \\ yz+12=\beta^2 \end{cases}$, em que x, y e z são os números procurados, tem-se $\begin{cases} xy=\alpha^2-12 \\ yz=\beta^2-12 \end{cases}$, ou seja, tomando $y=\frac{1}{A}$, em que A designa o *aritmos*, obtém-se. $\begin{cases} x=(\alpha^2-12).A \\ y=\frac{1}{A} \\ z=(\beta^2-12).A \end{cases}$

Assim, fazendo as respectivas substituições na equação $xz + 12$ igual a um quadrado, tem-se a equação $(\alpha^2 - 12).(\beta^2 - 12).A^2 + 12$ igual a um quadrado, que se resolve facilmente desde que $(\alpha^2 - 12).(\beta^2 - 12)$ seja um quadrado. Portanto, tomando $\xi = \alpha^2 - 12$ e $\eta = \beta^2 - 12$, pretende-se que o produto de ξ por η seja um quadrado. Além disso, o coeficiente de A^2 decompõe-se no produto de dois números, cada um dos quais somado com 12 dá um quadrado, a saber α^2 e β^2, isto porque $\xi + 12 = \alpha^2$ e $\eta + 12 = \beta^2$. Dada a indefinição de α e β, o que Diofanto pretendia era encontrar ξ e η tais que o seu produto fosse um quadrado e a soma de cada um com 12 fosse também um quadrado.

Por outro lado, Diofanto observou que se no lugar desses números procurasse os seus quadrados, o produto dos quadrados procurados já era um quadrado e então o problema resumia-se a encontrar esses quadrados de tal modo que a soma de cada um com 12 unidades fosse também um quadrado. De facto, uma maneira de conseguir que o produto de ξ por η seja um quadrado é impor que $\xi = u^2$ e $\eta = v^2$ e, portanto, o problema transforma-se em determinar u e v de tal modo que $u^2 + 12$ e $v^2 + 12$ sejam iguais, respectivamente, a um quadrado.

Usando *Aritmética* II, 34, onde se propôs encontrar três números de tal modo que o quadrado de cada um desses números aumentado da soma desses três números formasse um quadrado e onde se resolveu o caso particular da soma dos números procurados ser igual a 12 obtendo as soluções $5\frac{1}{2}$, 2 e $\frac{1}{2}$, Diofanto tomou $u = 2$ e $v = \frac{1}{2}$. Assim, obtém-se $\alpha^2 = \xi + 12 = u^2 + 12$, isto é, $\alpha^2 = 16 = 4^2$ e também $\beta^2 = \eta + 12 = v^2 + 12 = 12\frac{1}{4} = \left(3\frac{1}{2}\right)^2$. Logo, tomando $\alpha^2 = 16$ e $\beta^2 = 12\frac{1}{4}$, Diofanto podia equacionar o problema inicial da seguinte forma:, $\begin{cases} xy + 12 = 16 \\ yz + 12 = 12\frac{1}{4} \end{cases}$, donde $\begin{cases} xy = 16 - 12 \\ yz = 12\frac{1}{4} - 12 \end{cases}$, ou seja $\begin{cases} xy = 4 \\ yz = \frac{1}{4} \end{cases}$ e, portanto, $\begin{cases} x = 4A \\ y = \frac{1}{A} \\ z = \frac{1}{4}A \end{cases}$, isto é, na linguagem de Diofanto, o primeiro número procurado era igual a 4 *aritmos*, o segundo a 1 inverso de *aritmo* e o terceiro igual a $\frac{1}{4}$ de *aritmo*.

Restava então a Diofanto verificar que a soma do produto do primeiro pelo terceiro número com 12 unidades era igual a um quadrado, ou seja, que 1 quadrado de *aritmo* mais 12 unidades era igual a um quadrado.

Diofanto tomou esse quadrado como a raiz de 1 *aritmo* mais 3 unidades. Assim, resolvendo a equação 1 quadrado de *aritmo* mais 12 unidades igual a 1 quadrado de *aritmo* mais 6 *aritmos* mais 9 unidades, Diofanto obteve 1 *aritmo* igual a $\frac{1}{2}$ e, portanto, procedendo às respectivas substituições 2, 2 e $\frac{1}{8}$ eram soluções do problema proposto.

Observe-se agora a resolução dada por Viète.

Designando o plano dado por $Z\ planum$, Viète notou o produto da primeira pela segunda raiz por $B\ quad. - Z\ planum$, uma vez que quando adicionasse este produto a $Z\ planum$ a soma era um quadrado, $B\ quad.$, o que correspondia na *Aritmética* III, 10 a 25 e depois a 16. Viète designou ainda a segunda raiz por A. Deste modo, a primeira raiz era igual a $\frac{B\,quad. - Z\,planum}{A}$. Considerando o produto da segunda pela terceira raiz $D\ quad. - Z\ planum$, uma vez que quando se adicionasse a este produto $Z\ planum$ a soma seria um quadrado, $D\ quad.$, o que correspondia na *Aritmética* III, 10 a 16 e depois a $12\frac{1}{4}$, Viète observou que a terceira raiz era igual a $\frac{D\,quad. - Z\,planum}{A}$, pois a segunda raiz já tinha sido anteriormente designada por A. Assim, faltava apenas verificar que $\frac{B\,quad - Z\,planum}{A}\ in\ \frac{D\,quad. - Z\,planum}{A} + Z\,planum$, ou seja, a soma do produto da primeira pela terceira raiz com o plano dado era igual a um quadrado. Viète observou então que se $B\ quad. - Z\ planum$ fosse igual a um quadrado, por exemplo $F\ quad.$, e $D\ quad. - Z\ planum$ fosse também igual a um quadrado, por exemplo $G\ quad.$, a equação seria «(...) expedita (...)» (Viète 1970, 78) uma vez que de $\frac{F\,quad\ in\ G\,quad. + Z\,planum\ in\ A\,quad.}{A\,quad.}$ igual ao quadrado de $\frac{F\ in\ G = H\ in\ A}{A}$ se concluiria

$$\frac{H\ in\ F\ in\ 2G}{H\ quad. = Z\ planum}\ \text{igual a}\ A.$$

Viète concluiu então o seu raciocínio observando que se podia definir a equação[111]

[111] Embora esta seja a forma de apresentação do resultado por Viète, este podia ter sido escrito: $\frac{H\ in\ F\ in\ 2G}{H\ quad. - Z\ planum}$ igual a A.

$$\frac{H \, in \, F \, in \, 2G}{H \, quad. = Z \, planum} \text{ igual a } A.$$

Isto, porque usando a *Zetéticas* V, 6 era possível encontrar uma infinidade de quadrados que diminuídos (respectivamente, adicionados) de um plano dado fossem ainda iguais a quadrados. De facto, para definir a equação, e usando a notação actual, era preciso escolher F e G tais que $\begin{cases} B^2 - Z = F^2 \\ D^2 - Z = G^2 \end{cases}$, ou seja, $\begin{cases} Z + F^2 = B^2 \\ Z + G^2 = D^2 \end{cases}$, o que era possível através do problema 6. Assim, com F e G definidos e tomando um qualquer H tal que $H^2 > Z$, pelo processo exposto, Viète definia $A = \dfrac{2FGH}{H^2 - Z}$.

Viète terminou exemplificando numericamente o seu raciocínio. Considerando $Z \, planum$ igual a 192, F igual a 8 e G igual a 2, Viète assumiu que H era 6 e, portanto, A era igual a $\frac{16}{13}$. Assim, 52, $\frac{16}{13}$ e $\frac{13}{4}$ eram as raízes procuradas. Deste modo, o produto da primeira pela segunda raiz era igual a 64, o produto da segunda pela terceira raiz era igual a 4 e o produto da primeira pela terceira raiz era igual a 169. Assim, a soma do produto da primeira pela segunda raiz com 192, o plano dado, era igual a 256, o quadrado de 16; a soma do produto da segunda pela terceira raiz com 192 era igual a 196, o quadrado de 14; e a soma do produto da primeira pela terceira raiz com 192 era igual a 361, o quadrado de 19.

Os três problemas seguintes deste Livro V são dedicados a encontrar, numericamente, um triângulo rectângulo cuja área adicionada com um plano (formado pela soma de dois quadrados) fosse um quadrado; ou cuja área menos um plano dado fosse um quadrado; ou cuja área subtraída a um plano dado fosse um quadrado. É de notar que nos dois últimos problemas Viète não impõe a condição do plano dado ser formado por dois quadrados.

Em *Zetéticas* V, 9, Viète propôs-se então determinar, numericamente, um triângulo rectângulo de tal modo que a sua área adicionada de um plano formado pela soma de dois quadrados fosse um quadrado. Este problema também se encontrava proposto e resolvido em *Aritmética* VI, 3:

> Encontrar um triângulo rectângulo tal que o número da sua área, aumentado de um número dado forme um quadrado. (Eecke 1959, 237)

Observe-se que Diofanto não exigia que o número adicionado fosse a soma de dois quadrados.

Considerando o número dado igual a 5 unidades, Diofanto designou os lados do triângulo rectângulo procurado por 3 *aritmos*, 4 *aritmos* e 5 *aritmos*. Assim, o número que representava a área do seu triângulo aumentado de 5 unidades era igual a 6 quadrados de *aritmo* mais 5 unidades. Igualando esta soma a um quadrado, a saber 9 quadrados de *aritmo*, e associando termos semelhantes, Diofanto obteve 3 quadrados de *aritmo* igual a 5 unidades. Ora, a solução desta equação era um número irracional, o que Diofanto não considerava nos seus trabalhos, pois apenas trabalhava com números racionais positivos. Diofanto observou então que se devia voltar às condições iniciais adoptadas, de modo a que a diferença entre um quadrado e a área do triângulo rectângulo procurado fosse igual a um quadrado. Assim, para Diofanto o problema resumia-se em encontrar um triângulo rectângulo assim como um número quadrado (auxiliares) tal que esse número quadrado diminuído do número que representava a área do triângulo fosse igual a um quinto de um quadrado. Isto porque, designando em notação actual a condição do problema por $\frac{1}{2}bh+5=\alpha^2$ com b,h respectivamente a base e a altura do triângulo procurado, tem-se que $\alpha^2-\frac{1}{2}bh=5$. Assim, Diofanto propunha encontrar um quadrado auxiliar α_1^2 e um triângulo rectângulo de lados H', h' e b' (hipotenusa, altura e base, respectivamente) tal que $\alpha_1^2-\frac{1}{2}b'h'=\frac{1}{5}\beta^2$. Uma vez determinados α_1, b' e h', voltava-se à condição inicial tomando $\alpha=\alpha_1 x$, $b=b'x$ e $h=h'x$ logo,

$$\alpha^2 - \frac{1}{2}bh = 5 \Leftrightarrow \alpha_1^2 x^2 - \frac{1}{2}b'h'x^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(\alpha_1^2 - \frac{1}{2}b'h'\right) = 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 \frac{1}{5}\beta^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{25}{\beta^2}$$

e portanto, como $\frac{25}{\beta^2} = \left(\frac{5}{\beta}\right)^2$, Diofanto conseguia determinar x e consequentemente o triângulo procurado.

Diofanto considerou então o triângulo rectângulo auxiliar formado por meio de dois números: 1 *aritmo* e 1 inverso de *aritmo*. Deste modo, Diofanto observou que o número que representava a área desse triângulo rectângulo era 1 quadrado de *aritmo* menos 1 inverso do quadrado de *aritmo*. De facto, sendo em notação actual 1 *aritmo* igual a y e 1 inverso de *aritmo* igual a $\frac{1}{y}$, para Diofanto, a hipotenusa do triângulo rectângulo formado por y e $\frac{1}{y}$ era $y^2 + \frac{1}{y^2}$, a altura era $y^2 - \frac{1}{y^2}$ e a base 2 (cf. Eecke 1959, 235). Portanto, a área deste triângulo seria $y^2 - \frac{1}{y^2}$.

Tomando a raiz do quadrado auxiliar igual a 1 *aritmo* mais 10 inversos de *aritmo*, o quadrado era igual a 1 quadrado de *aritmo* mais 100 inversos de quadrados de *aritmo* mais 20 unidades, isto é, em notação actual, $y^2 + \frac{100}{y^2} + 20$.

Como se pretendia que a diferença entre o quadrado (auxiliar) e a área do triângulo rectângulo (auxiliar) fosse igual a um quinto de um quadrado, Diofanto multiplicou ambos os membros da equação por 5 e seguidamente por 1 quadrado de *aritmo*, obtendo 100 quadrados de *aritmo* mais 505 unidades igual a um quadrado. Considerando esse quadrado de raiz como 10 *aritmos* mais 5 unidades, Diofanto observou que 1 *aritmo* era igual a $\frac{24}{5}$. Assim, o triângulo rectângulo auxiliar era formado por meio de $\frac{24}{5}$ e $\frac{5}{24}$ e a raiz do quadrado auxiliar era igual a $\frac{413}{60}$. Diofanto referiu então que, se exprimisse este triângulo rectângulo em *aritmos* e se igualasse a sua área aumentada de 5 unidades a $\left(\frac{413}{60}\right)^2$ quadrados de *aritmo*, ou seja, a $\frac{170569}{3600}$ quadrados de *aritmo*, o problema estava resolvido. De facto, tomando $H = H'x = \frac{332401}{14400}x$, $h = h'x = \frac{331151}{14400}x$, $b = b'x = 2x$, $\alpha^2 = \alpha_1^2 x^2 = \frac{170569}{3600}x^2$ e resolvendo a equação $\frac{1}{2}bh + 5 = \alpha^2$, ou seja, $\frac{331151}{14400}x^2 + 5 = \frac{170569}{3600}x^2$, tem-se $x = \frac{24}{53}$. Como consequência, os lados do triângulo procurado eram $H = \frac{332401}{31800}$, $h = \frac{331151}{31800}$ e $b = \frac{48}{53}$, ou seja, $\frac{28800}{31800}$.

É de notar que nesta resolução Diofanto usou o método da falsa posição (cf. Eecke 1959, 238). Na verdade, Diofanto a partir dos valores inicialmente tomados chegou a um resultado numérico não satisfatório, mas o processo utilizado permitiu-lhe corrigir a falsa suposição através de um algoritmo e, portanto, obter a solução do problema.

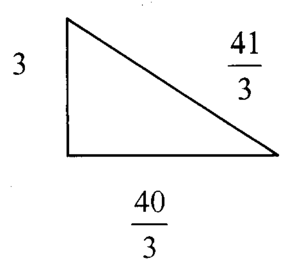
Observe-se, agora, a resolução apresentada por Viète.

Considerando $Z\ planum$ o plano dado composto por $B\ quad.$ e $D\ quad.$, Viète construiu um triângulo rectângulo a partir do quadrado da soma das raízes B e D e do quadrado da sua diferença. Assim, aplicando a proposição 45 das *Notas Preliminares*, Viète observou que a hipotenusa seria proporcional a $2B\ quad.\text{-}quad.\ +\ B\ quad.\ in\ 12\ D\ quad.\ +\ 2D\ quad.\text{-}quad.$, a base a $B\,in\,D\,in\,8Z\ planum$, pois por hipótese $B\,quad. + D\,quad.$ era igual a $Z\ planum$, e a perpendicular a $\overline{B+D}quad.in\,2\overline{B-D}quad.$. Dividindo todos estes termos por $\overline{B+D}in\,2\overline{B-D}quad.$, obtinha-se um triângulo semelhante ao anterior, de área

$\frac{Z\,planum\,in\,B\,in\,2D}{\overline{B-D}\,quad.}$. Adicionando $Z\,planum$, o plano dado, e uma vez que $\overline{B-D}\,quad. + B\,in\,2D$ era igual a $B\ quad.\ +\ D\ quad.$, que também era igual a $Z\,planum$, Viète notou que a soma seria $\frac{Z\,plano\text{-}planum}{\overline{B-D}\,quad.}$, o quadrado de $\frac{Z\,planum}{B-D}$.

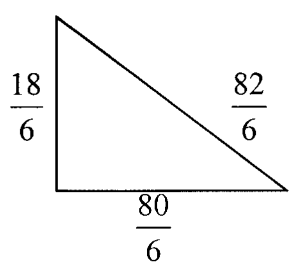
Viète conseguia, assim, resolver *Zetéticas* V, 9, pois aplicando a proposição 45 das *Notas Preliminares* um triângulo construído a partir de $\overline{B+D}\,quad.$ e de $\overline{B-D}\,quad.$, era a solução do problema.

Viète terminou com uma ilustração numérica. Considerando $Z\,planum$ igual a 5, D igual a 1 e B igual a 2, o triângulo rectângulo procurado seria semelhante ao da figura:



A área do triângulo seria, portanto, 20. E de facto 20 adicionado a 5 era um quadrado.

A edição de 1591 apresenta este triângulo na forma (cf. Witmer 1983, 153, e Peyroux 1990, 137):



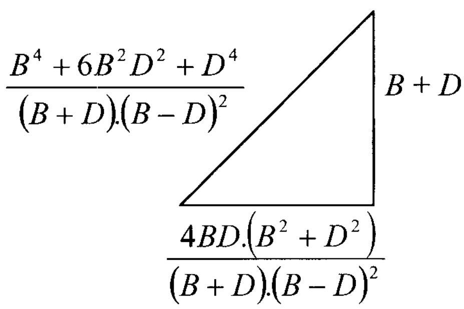
A edição de 1646, de F. Schooten, tem 16 como denominador em todas as fracções que representam os lados deste triângulo rectângulo (cf. Viète 1970, 79).

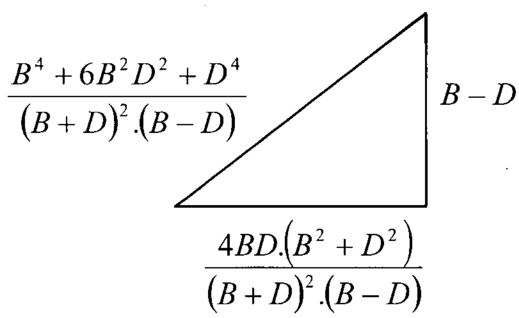
É de notar que esta resolução de Viète não é uma mera generalização da apresentada por Diofanto. De facto, o uso da *logística especiosa* permitiu a Viète distanciar-se do raciocínio usado por Diofanto tornando, portanto, mais simples a resolução do mesmo problema. É um exemplo de como o cálculo simbólico de Viète possibilitava a abordagem dos problemas de diferentes formas, isto é, permitia tanto generalizar os raciocínios baseados na *logística numérica* como introduzir outras formas de raciocínio baseadas na própria *logística especiosa*.

Como se referiu, nos dois problemas seguintes Viète propôs-se novamente encontrar um triângulo rectângulo, mas desta vez considerando a diferença entre a área e o plano dado e vice-versa.

Tal como *Zetéticas* V, 9, a resolução destes dois problemas inicia-se pela construção de um triângulo rectângulo a partir de $(B + D)^2$ e $(B - D)^2$, onde B e D são duas raízes em função das quais Viète exprime o plano dado. Para tal usa de igual modo a proposição 45 das *Notas Preliminares*.

Enquanto que no problema 9, e usando a notação actual, o plano dado é igual a $B^2 + D^2$, nestes dois Viète considera-o igual a $2BD$. Dividindo os lados dos triângulos, no problema 10, por $2(B - D)^2.(B + D)$ e, no problema 11, por $2(B - D).(B + D)^2$, Viète obtém os seguintes triângulos:





De facto, estes triângulos são, respectivamente, solução de cada um desses problemas.

É de notar que a área do primeiro triângulo é igual a $\frac{2BD.(B^2+D^2)}{(B-D)^2}$, enquanto que a área do segundo é igual a $\frac{2BD.(B^2+D^2)}{(B+D)^2}$, portanto, considerando Z o plano dado, no caso do problema 10, a diferença entre a área e esse plano é igual a $\frac{Z.(B^2+D^2)-Z.(B-D)^2}{(B-D)^2} = \frac{Z^2}{(B-D)^2} = \left(\frac{Z}{B-D}\right)^2$, ou seja, um quadrado; no caso do problema 11, a diferença entre o plano dado e a área do triângulo é igual a $\left(\frac{Z}{B+D}\right)^2$.

É ainda de referir que estes problemas se encontravam propostos e resolvidos no Livro VI da *Aritmética* de Diofanto, a saber nos problemas 4 e 5. Tal como o problema 3 do mesmo Livro, são de resolução engenhosa e complicada.

Viète conseguiu, assim, de uma forma simples resolver os mesmos problemas e, portanto, realçar a aplicabilidade e o alcance da *logística especiosa*.

Em *Zetéticas* V, 12, Viète propôs-se encontrar, numericamente, três quadrados tal que o plano-plano obtido do produto de cada par desses quadrados mais o produto da soma desse par pelo quadrado de um dado comprimento fosse um quadrado.

Designando por X o comprimento dado, Viète considerou o primeiro quadrado procurado igual a $A quad. - X in 2A + X quad.$, cuja raiz era $A - X$; o segundo igual a $A quad.$, cuja raiz era A e o terceiro igual a $4A quad. - X in 4A + 4X quad.$. A partir do produto do primeiro pelo segundo quadrado e do produto da soma desses quadrados por $X quad.$, quadrado do comprimento dado, Viète observou que a soma destes produtos era um quadrado cuja raiz plana era $A quad. - X in A + X quad.$. De facto, em notação actual,

$$(A-X)^2.A^2 + [(A-X)^2 + A^2].X^2 = A^4 - 2A^3X + 3A^2X^2 - 2AX^3 + X^4 = (A^2 - AX + X^2)^2.$$

Viète observou ainda que o produto do segundo pelo terceiro quadrado mais o produto da soma desses quadrados pelo quadrado do comprimento dado era igual ao quadrado do plano $2A\,quad. - X\,in\,A + 2X\,quad.$. Na verdade,

$$A^2.(4A^2 - 4AX + 4X^2) + (5A^2 - 4AX + 4X^2).X^2 = 4A^4 - 4A^3X + 9A^2X^2 - 4AX^3 + 4X^4$$
$$= (2A^2 - AX + 2X^2)^2.$$

Finalmente, o produto do primeiro pelo terceiro quadrado mais o produto da soma desses quadrados pelo quadrado do comprimento dado era igual ao quadrado do plano $2A\,quad. - X\,in\,3A + 3X\,quad.$. Isto, porque

$$(A^2 - 2AX + X^2).(4A^2 - 4AX + 4X^2) + (5A^2 - 6AX + 5X^2).X^2 =$$
$$= 4A^4 - 12A^3X + 21A^2X^2 - 18AX^3 + 9X^4$$
$$= (2A^2 - 3AX + 3X^2)^2.$$

Viète possuía assim três planos que satisfaziam as condições do problema, sendo os dois primeiros obviamente quadrados. Faltava-lhe, portanto, mostrar que o terceiro plano também podia ser escrito como um quadrado. Considerando a raiz do terceiro quadrado procurado igual a $D - 2A$, Viète notou que

$$4A\,quad. - X\,in\,4A + 4X\,quad. \text{ era igual a } \overline{D - 2A}\,quad.$$

e, portanto,

$$\frac{D\,quad. - 4X\,quad.}{4D - 4X} \text{ era igual a } A.$$

No exemplo numérico, Viète considerou X igual a 3 e D igual a 30. A seria então $\frac{30^2 - 4\times 3^2}{4\times 30 - 4\times 3}$, ou seja, igual a 8. Assim, os quadrados procurados seriam 25, 64 e 196. De facto, estes quadrados satisfazem as condições exigidas no problema: $25\times 64 + (25+64)\times 3^2$ era igual a 2401, quadrado de 49; $64\times 196 + (64+196)\times 3^2$ era igual a 14884, quadrado de 122; e $25\times 196 + (25+196)\times 3^2$ era igual a 6889, quadrado de 83. Viète observou ainda que, se a cada um desses quadrados procurados fosse adicionado o dobro do quadrado do comprimento dado, o plano-plano que resultava do produto de cada um destes pares de planos menos o produto da sua soma pelo quadrado do comprimento dado era igual a um quadrado. É de notar que, em notação actual, sendo x^2 e y^2 dois dos quadrados procurados e a^2 o quadrado do comprimento dado, tem-se

$$\begin{aligned}
&(x^2+2a^2).(y^2+2a^2)-(x^2+y^2+4a^2).a^2=\\
&=x^2y^2+2.(x^2+y^2).a^2+4a^4-(x^2+y^2).a^2-4a^4=\\
&=x^2y^2+(x^2+y^2).a^2,
\end{aligned}$$

que é igual a um quadrado pelo que foi exposto anteriormente.

Confirmando este resultado, Viète observou que sendo 3 o comprimento dado, o dobro do seu quadrado era 18, portanto, adicionando a cada um dos três quadrados obtém-se três planos: 43, 82 e 214 que satisfazem o pedido. Na verdade, $43\times 82-(43+82)\times 3^2$ era igual a 2401, quadrado de 49; $82\times 214-(82+214)\times 3^2$ era igual a 14884, quadrado de 122 e $43\times 214-(43+214)\times 3^2$ era igual a 6889, quadrado de 83.

É de notar que tal como aconteceu noutros problemas, nomeadamente no problema 2 deste mesmo Livro ou por exemplo no problema 10 do Livro IV, Viète não dá um processo para chegar à solução do problema propriamente dito. Ele aponta as soluções para o problema e verifica a sua veracidade. De facto, onde há mesmo *zetética* é só no fim, quando estabelece a condição necessária para o terceiro plano ser um quadrado.

Em *Zetéticas* V, 13, Viète propôs-se dividir um comprimento dado X de tal modo que, quando B fosse adicionado ao primeiro segmento e D adicionado ao segundo, o produto das partes resultantes fosse um quadrado.

Designando o primeiro segmento por $A-B$, Viète observou que o segundo segmento seria $X-A+B$. Deste modo, adicionando B ao primeiro segmento e D ao segundo, os resultados seriam A e $X-A+B+D$. Viète pretendia que o produto destas partes resultantes fosse um quadrado, isto é, que $\overline{B+D+X}\,in\,A-A\,quad.$ fosse igual a um quadrado. Considerando $\frac{S\,in\,A}{X}$ a raiz desse quadrado, Viète obteve

$$\frac{S\,quad.\,in\,A\,quad.}{X\,quad.} \text{ igual a } \overline{B+D+X}\,in\,A - A\,quad.,$$

donde,

$$\frac{\overline{B+D+X}\,in\,X\,quad.}{S\,quad. + X\,quad.} \text{ era igual a } A.$$

Assim, e de acordo com o que foi assumido, o primeiro segmento seria $\dfrac{\overline{D+X}\,in\,X\,quad. - B\,in\,S\,quad.}{S\,quad. + X\,quad.}$ e o segundo $\dfrac{\overline{B+X}\,in\,S\,quad. - D\,in\,X\,quad.}{S\,quad. + X\,quad.}$. Viète referiu ainda que, para estes quocientes terem significado, as subtracções no numerador teriam de ser possíveis, isto é, que $S\,quad.$ fosse menor que $\dfrac{X\,quad.\,in\,\overline{D+X}}{B}$ e que $S\,quad.$ fosse maior que $\dfrac{X\,quad.\,in\,D}{B+X}$.

Viète ilustrou este método com dois exemplos numéricos. Considerando X igual a 4, B igual a 12 e D igual a 20 e observando que, para estes valores, $S\,quad.$ deveria situar-se entre 20 e 32, Viète tomou $S\,quad.$ igual a 25. Assim, os segmentos procurados eram $\dfrac{84}{41}$ e $\dfrac{80}{41}$. De facto, o produto de $\dfrac{84}{41}+12$ por $\dfrac{80}{41}+20$ é igual a $\dfrac{518400}{1681}$, o quadrado de $\dfrac{720}{41}$.

Viète considerou ainda X igual a 3, B igual a 9 e D igual a 15. Observando que $S\,quad.$ deveria situar-se entre $11\frac{1}{4}$ e 18, Viète tomou-o igual a 16. Assim, os segmentos procurados eram $\dfrac{18}{25}$ e $\dfrac{57}{25}$. De facto, o produto de $\dfrac{18}{25}+9$ por $\dfrac{57}{25}+15$ era igual a $\dfrac{104976}{625}$, o quadrado de $\dfrac{324}{25}$.

No décimo quarto e último problema do quinto Livro das *Zetéticas*, Viète propôs-se igualar $A\,quad. - G\,planum$ a um quadrado de tal modo que esse quadrado fosse menor que $D\,in\,A$ e maior que $B\,in\,A$.

Como foi referido no início do capítulo, este problema também se encontra na *Aritmética* de Diofanto, sendo o problema 30 do Livro V. O enunciado é escrito sob a forma de um epigrama em que se pretende determinar a quantidade de *côngios*[112] existentes numa mistura de vinho.

> Obrigado a fazer uma coisa útil aos seus companheiros de navegação, alguém misturou côngios a oito dracmas com [côngios] a cinco dracmas, e, como preço de tudo, ele pagou um número quadrado que, aumentado de unidades propostas, origina de novo um outro quadrado tendo por raiz a soma dos côngios. Distingue, por conseguinte, quantos [côngios] havia a oito dracmas, e diz também, meu menino, quantos havia a cinco dracmas. (Eecke 1959, 231)

Diofanto iniciou a resolução do problema explicitando o proposto

> Alguém compra duas espécies de vinhos; o côngio de um é a 8 dracmas, e o côngio do outro é a 5 dracmas. Ele paga, pelo preço de tudo, um número quadrado que, aumentado de 60 unidades, forma um quadrado tendo por raiz a quantidade de côngios. Determinar os côngios a 8 dracmas e aqueles a 5 dracmas. (Eecke 1959, 231)

Considerando a quantidade de côngios 1 *aritmo*, o seu preço seria 1 quadrado de *aritmo* menos 60 unidades o que era igual a um quadrado, visto que o preço de toda a quantidade de côngios era um número quadrado que aumentado de 60 unidades era igual ao quadrado da raiz da quantidade total de côngios. Uma vez que 1 quadrado de *aritmo* menos 60 unidades se compunha de dois números – o preço dos côngios a 8 dracmas e o preço dos côngios a 5 dracmas – o problema resumia-se a dividir 1 quadrado de *aritmo* menos 60 unidades em dois números tais que a quinta parte de um aumentado com a oitava parte de outro fosse igual a 1 *aritmo*. De facto, designando por C_5 a quantidade de côngios que custam 5 dracmas, por C_8 a quantidade de côngios que custam 8 dracmas e 1 *aritmo* por x, a quantidade total de côngios era igual a $C_5 + C_8 = x$. O preço da quantidade total de côngios era igual a $x^2 - 60$; assim, considerando a o preço total dos côngios a 5 dracmas, com $a = 5C_5$ e b o preço total dos côngios a 8 dramas, com $b = 8C_8$, o problema

[112] Antiga medida de capacidade usada pelos gregos.

resumia-se a determinar a e b tais que $x^2 - 60 = a + b$ e $\frac{a}{5}+\frac{b}{8}=x$. Com efeito, determinando a e b, facilmente se obtém a quantidade de côngios, respectivamente, a 8 dracmas e a 5 dracmas, que é o que se pretendia.

Diofanto referiu ainda que isto só era possível se o *aritmo* fosse maior que a oitava parte de 1 quadrado de *aritmo* menos 60 unidades e menor que a quinta parte de 1 quadrado de *aritmo* menos 60 unidades. De facto, o preço pago, $x^2 - 60$, é mais do que aquilo que seria se todos os côngios fossem a 5 dracmas ($5x$) e menos do que se todos os côngios fossem a 8 dracmas ($8x$). Aliás, talvez seja esta a motivação para o problema de Viète, em notação actual,

$$BA < A^2 - G < DA.$$

Uma vez que 1 quadrado de *aritmo* diminuído de 60 unidades era maior que 5 *aritmos* e menor que 8 *aritmos*, Diofanto observou que 1 quadrado de *aritmo* era maior que 5 *aritmos* aumentado de 60 unidades, donde, concluiu que 1 *aritmo* não era menor que 11 unidades. Segundo Eecke (1959, 234), esta conclusão de Diofanto não é muito rigorosa; na verdade a condição que Diofanto apresenta como necessária é suficiente. Isto, porque resolvendo a inequação $x^2 > 5x + 60$ «(...) à maneira de Diofanto (...)» (Eecke 1959, 234), obtém-se $x^2-5x+\frac{25}{4}>60+\frac{25}{4}$, ou seja $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2>66\frac{1}{4}$, donde $x>\frac{5}{2}+\sqrt{66\frac{1}{4}}$. Ora, $11=\frac{5}{2}+\frac{17}{2}>\frac{5}{2}+\sqrt{66\frac{1}{4}}$, porque $\left(\frac{17}{2}\right)^2=\left(8\frac{1}{2}\right)^2=72\frac{1}{4}>66\frac{1}{4}$. Logo, se $x>11$ então $x>\frac{5}{2}+\sqrt{66\frac{1}{4}}$. Portanto, Diofanto apresentou uma condição efectivamente suficiente para que $x^2 > 5x + 60$. De igual modo, Diofanto também observou que 1 quadrado de *aritmo* era menor que 8 *aritmos* aumentados de 60 unidades, donde, 1 *aritmo* não era maior que 12 unidades[113]. Na verdade, resolvendo a inequação $x^2 < 8x + 60$, através do processo usado por Diofanto, obtém-se $x^2 - 8x + 16 < 60 + 16$, ou seja, $(x-4)^2 < 76$, donde, $x < 4+\sqrt{76}$. Assim, o *aritmo* poderia ser procurado entre 11 e 12 unidades.

[113] Também aqui Diofanto apresenta como necessária uma condição que na verdade é suficiente.

Uma vez que se procurava igualar 1 quadrado de *aritmo* menos 60 unidades a um quadrado, Diofanto considerou a raiz desse quadrado 1 *aritmo* menos uma certa quantidade de unidades. Deste modo, 1 *aritmo* era igual ao quociente entre o produto dessa quantidade de unidades por si própria mais 60 unidades e o dobro dessa mesma quantidade de unidades. De facto, sendo k a quantidade de unidades,

$$\begin{aligned} & x^2 - 60 = (x-k)^2 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x^2 - 60 = x^2 - 2kx + k^2 \\ & \Leftrightarrow 2kx = k^2 + 60 \\ & \Leftrightarrow x = \frac{k^2+60}{2k} \end{aligned}$$

Diofanto era assim conduzido a encontrar um número tal que o quociente entre o seu quadrado aumentado de 60 unidades e o seu dobro fosse maior que 11 unidades e menor que 12 unidades. Observou, então, que se designasse o número procurado por 1 *aritmo*[114], 1 quadrado de *aritmo* aumentado de 60 unidades era maior que 22 *aritmos*, para o que bastaria que o número procurado fosse maior do que 19. De igual modo, 1 quadrado de *aritmo* aumentado de 60 unidades é menor que 24 *aritmos* e, portanto, bastaria que o número procurado fosse menor que 21. De facto, designando o *aritmos* por k, de $k^2 + 60 > 22k$ obtém-se $(k-11)^2 > 61$, donde, $k - 11 > \sqrt{61}$ ou $k - 11 < -\sqrt{61}$. Do mesmo modo, de $k^2 + 60 < 24k$ Diofanto obtinha, através do complemento do quadrado, $(k - 12)^2 < 84$, donde, $-\sqrt{84} < k - 12 < \sqrt{84}$. Daqui, Diofanto deduzia que k podia ser procurado entre $11 + \sqrt{61}$ e $12 + \sqrt{84}$ ou, mais particularmente, entre 19 e 21.

Considerando esse número igual a 20 unidades, por ser um número inteiro, o que facilitava os cálculos, Diofanto igualou 1 quadrado de *aritmo* menos 60 unidades ao quadrado de 1 *aritmo* menos 20 unidades, donde 1 *aritmo* era igual a $11\frac{1}{2}$ unidades e, consequentemente, 1 quadrado de *aritmo* era igual a $132\frac{1}{4}$ unidades. Deste modo, retirando 60 unidades deste quadrado,

[114] É um novo *aritmo* ou, segundo Eecke (1959, 233), um *desconhecido auxiliar* que é introduzido no texto sem qualquer advertência.

Diofanto obteve $72\frac{1}{4}$ unidades, o número que pretendia dividir em dois números tal que a soma da quinta parte do primeiro com a oitava parte do segundo fosse $11\frac{1}{2}$ unidades. É de notar que se está perante o problema $\begin{cases} a+b=72\frac{1}{4} \\ \frac{a}{5}+\frac{b}{8}=11\frac{1}{2} \end{cases}$, sendo a e b os números procurados.

Considerando a quinta parte do primeiro número igual a 1 *aritmo*[115], a oitava parte do segundo número era igual a $11\frac{1}{2}$ unidades menos 1 *aritmo*. Assim, 5 *aritmos* mais 92 unidades menos 8 *aritmos* era igual a $72\frac{1}{4}$ unidades, donde 1 *aritmo* era igual a $\frac{79}{12}$ unidades. Como consequência, a quantidades de côngios de 5 dracmas era igual a $6\frac{7}{12}$, ou seja, 6 côngios e 7 *cotiles*[116] e a quantidade de côngios de 8 dracmas era igual a $11\frac{1}{2}-\frac{79}{12}$, isto é, $4\frac{11}{12}$, ou seja, 4 côngios e 11 cotiles. De facto, a soma de $5\times 6\frac{7}{12}$ com $8\times 4\frac{11}{12}$ era igual a $\frac{289}{4}$, quadrado de $\frac{17}{2}$, e a soma de $\frac{289}{4}$ com 60 era igual a $\frac{529}{4}$, quadrado de $\frac{23}{2}$ que era igual a $6\frac{7}{12}+4\frac{11}{12}$.

Observe-se agora a resolução dada por Viète.

Em primeiro lugar note-se que Viète pretendia determinar A de tal modo que A *quad.* $-$ G *planum* fosse igual a um quadrado e que esse quadrado fosse menor que D *in* A e maior que B *in* A. Repare-se que A corresponde no problema de Diofanto à quantidade de côngios, 1 *aritmo*, G *planum* às 60 unidades, D a 8 e B a 5.

---

[115] Diofanto introduz mais uma vez um novo *aritmo* ou *desconhecido auxiliar*. Cf. Eecke 1959, 233

[116] A duodécima parte do côngio. Cf. Eecke 1959, 234

Do mesmo modo que Diofanto igualara o quadrado de 1 *aritmo* menos 20 unidades a 1 quadrado de *aritmo* menos 60 unidades, Viète considerou o quadrado de $A - F$ igual a $A\ quad. - G\ planum$. Daí, obteve a expressão

$$A\,quad. - F\ in\ 2A + F\ quad. \text{ igual a } A\,quad. - G\ planum$$

e, consequentemente,

$$\frac{F\ quad. + G\ planum}{2F} \text{ igual a } A.$$

Visto que

$$A\ quad. - G\ planum \text{ era menor que } D\ in\ A,$$

Viète observou que

$$A\ quad. \text{ era menor que } D\ in\ A + G\ planum,$$

ou seja,

$$A\,quad. - D\ in\ A \text{ era menor que } G\ planum.$$

Assim, considerando S igual ou maior que $\sqrt{\frac{1}{4}D\,quad. + G\ planum} + \frac{1}{2}D$, Viète notou que A seria menor que S.

Por outro lado, visto que

$$A\ quad. - G\ planum \text{ era maior que } B\ in\ A,$$

Viète observou que

$$A\ quad. - B\ in\ A \text{ era maior que } G\ planum.$$

Assim, considerando R igual ou menor que $\sqrt{\frac{1}{4}B\,quad. + G\ planum} + \frac{1}{2}B$, Viète notou[117] que A seria maior que R.

Deste modo, $F\ quad. + G\ planum$ era, respectivamente, menor que $S\ in\ 2F$ e maior que $R\ in\ 2F$. Viète referiu então que F não podia ser escolhido ao acaso, mas mediante limites estabelecidos. De facto, considerando F igual a E, "de acordo com a *zetética*", Viète observou que $S\ in\ 2E - E\ quad.$ era maior que $G\ planum$ e, portanto, F podia ser tomado menor que $S + \sqrt{S\,quad. - G\ planum}$. De outro modo, $R\ in\ 2E - E\,quad.$ era menor que $G\ planum$, donde se podia

---

[117] O caso $A - \frac{1}{2}B < \sqrt{\frac{1}{4}B\ quad. + G\ planum}$ é impossível, uma vez que A tem que ser uma quantidade positiva.

tomar F maior que $R+\sqrt{R\,quad.-G\,planum}$. Viète conseguia assim o pretendido, determinar A.

Viète terminou exemplificando numericamente o estabelecido. Considerando $G\,planum$ igual a 60, B igual a 5 e D igual a 8, Viète observou que A era menor que $\sqrt{76}+4$ e era maior que $\sqrt{\frac{265}{4}}+\frac{5}{2}$. É de notar que os números escolhidos por Viète são os mesmos que Diofanto considerou na resolução de *Aritmética* V, 30. Uma vez que 12 é menor que $\sqrt{76}+4$ e 11 é maior que $\sqrt{\frac{265}{4}}+\frac{5}{2}$, Viète tomou S igual a 13 e R igual a 10. Assim, F seria menor que $13+\sqrt{109}$ e maior que $10+\sqrt{40}$. Ora, 23 é menor que $13+\sqrt{109}$ e 17 é maior que $10+\sqrt{40}$; portanto, Viète observou que F podia ser 21 ou 19 ou qualquer número racional intermédio. Assumindo F igual a 20, de acordo com a resolução de Diofanto, A era igual a $\frac{20^2+60}{2\times 20}$, ou seja, $11\frac{1}{2}$ que era a solução do problema proposto pelos epigramistas gregos.

Viète citou[118] textualmente, em grego, este epigrama, que constitui o enunciado do problema 30 do Livro V da *Aritmética* de Diofanto. Juntamente, apresentou também em grego uma resolução sucinta do problema, utilizando a *logística numérica*, que fez corresponder à sua *logística especiosa*; por esta resolução pode observar-se a generalização do problema e a simplicidade de notação que o cálculo simbólico de Viète introduz.

[118] Cf. Viète 1970, 81

„ Ὀκταδράχμους καὶ πενταδράχμους χοέας τις ἔμιξε,
„ Τοῖς προπόλοις πιεῖν χρηστὸν ἐπιταγμένος.
„ Καὶ τιμὴν ἀπέδωκεν ὑπὲρ πάντων τετράγωνον,
„ Τὰς ἐπιταχθείσας δεξάμενος μονάδας,
„ Καὶ ποιοῦντας πάλιν ἕτερόν σε φέρειν τετράγωνον
„ Κτησάμενον πλευρὰν σύνθεμα τῶν χοέων.
„ Ὥστε διάστειλον, τοὺς ὀκταδράχμους ποίησον,
„ Καὶ πάλι τοὺς ἑτέρους, παῖ, λέγε πενταδράχμους.

σύνθεμα τῶν χοέων	$11\frac{1}{2}$	A
πεντάδραχμοι	$6.\frac{7}{12}$	
ὀκτάδραχμοι	$4\frac{11}{12}$	
τιμὴ πενταδραχμῶν	$32\frac{11}{12}$	B in A
τιμὴ ὀκταδραχμῶν	$39\frac{1}{3}$	D in A
τιμὴ συμπᾶσα	$72\frac{1}{4}$ τετράγωνος	A quad. — Z plano.
μονάδες	60	Z planum

προσθέσεις τιμῆς καὶ μονάδων $132\frac{1}{4}$ τετράγωνος κτησάμενος πλευρὰν $11\frac{1}{2}$ A quad.

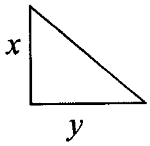
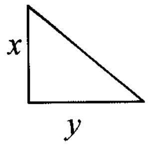
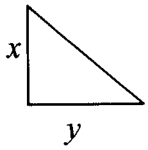
Viète terminou *Zetéticas* V referindo que

> Diofanto encerrou com [esta] última questão o livro V [da sua *Aritmética*]. Razão pela qual aceito [colocá-lo] no fim do nosso quinto livro das *Zetéticas*. (Viète 1970, 81)

enfatizando, uma vez mais, a inspiração diofantina desta sua obra.

Como conclusão da análise deste Livro V, apresenta-se em notação actual uma síntese dos problemas abordados por Viète e respectiva correspondência na *Aritmética* de Diofanto:

Zetéticas V, 1	$\begin{cases} x+y+z=\square \\ x+y=\square \\ y+z=\square \\ x+z=\square \end{cases}$	*Aritmética* III, 6
Zetéticas V, 2	$z^2-y^2=y^2-x^2$	1ª parte de *Aritmética* III, 7
Zetéticas V, 3	$\begin{cases} z-y=y-x \\ x+y=\square \\ y+z=\square \\ x+z=\square \end{cases}$	*Aritmética* III, 7
Zetéticas V, 4	$\begin{cases} x+y+z+\theta=\square \\ x+y+\theta=\square \\ y+z+\theta=\square \\ x+z+\theta=\square \end{cases}$	*Aritmética* III, 8
Zetéticas V, 5	$\begin{cases} x+y+z-\theta=\square \\ x+y-\theta=\square \\ y+z-\theta=\square \\ x+z-\theta=\square \end{cases}$	*Aritmética* III, 9
Zetéticas V, 6	Infinitas soluções de $a+x^2=\square$ e infinitas soluções de $x^2-a=\square$	
Zetéticas V, 7	$\begin{cases} x.y+\theta=\square \\ x.z+\theta=\square \\ y.z+\theta=\square \end{cases}$	*Aritmética* III, 10
Zetéticas V, 8	$\begin{cases} x.y-\theta=\square \\ x.z-\theta=\square \\ y.z-\theta=\square \end{cases}$	*Aritmética* III, 11

Zetéticas V, 9	$\frac{x.y}{2}+a^2+b^2=\square$ 	*Aritmética* VI, 3
Zetéticas V, 10	$\frac{x.y}{2}-a=\square$ 	*Aritmética* VI, 4
Zetéticas V, 11	$a-\frac{x.y}{2}=\square$ 	*Aritmética* VI, 5
Zetéticas V, 12	$\begin{cases} x^2y^2+(x^2+y^2).a^2=\square \\ x^2z^2+(x^2+z^2).a^2=\square \\ y^2z^2+(y^2+z^2).a^2=\square \end{cases}$	
Zetéticas V, 13	$(x+b).(a-x+d)=\square$	
Zetéticas V, 14	$\begin{cases} x^2-a=\square \\ bx<\square<cx \end{cases}$ ou $\begin{cases} x^2-a=\square \\ bx<x^2-a<cx \end{cases}$	motivado por *Aritmética* V, 30

Conclusão

Dos textos analisados sobressai que a notação assumiu uma grande relevância na arte analítica de Viète. A ideia de representar quantidades por letras não era, como se viu, inteiramente nova, já que se encontrava presente entre hindus e gregos e entre alguns algebristas do século XVI. Contudo, não existia um método de distinguir quantidades conhecidas das que se pretendia determinar.

Como alguns dos seus antecessores, Viète utilizou letras que representavam quantidades, mas, além disso, distinguiu termos dados de termos procurados pela utilização de consoantes num caso e vogais no outro. É de notar que esta separação entre o que é dado e o que é desconhecido não constituía uma distinção entre grandezas fixas e variáveis, embora Boyer (1956, 59) refira que essa separação preparou o caminho para diferenciar números dados, parâmetros e variáveis.

Embora sendo esta a mais conhecida contribuição dada por Viète para o desenvolvimento da álgebra, foi igualmente importante o facto de Viète se servir da distinção anterior para estabelecer um sistema de cálculo simbólico que lhe permitiu exprimir e obter resultados: a *logística especiosa*. Este novo sistema de notação permitiu que diversos problemas passassem a ser tratados de uma forma geral em vez de assentarem apenas em exemplos e algoritmos verbais.

A *logística especiosa* era um sistema amplo e sistemático de cálculo que estendia a *logística numérica* no sentido em que, através dos seus símbolos, permitia a representação tanto de grandezas geométricas como numéricas. Desta forma, possibilitava a abordagem simbólica de vários problemas dos diversos campos da matemática, por exemplo, de geometria, de aritmética ou de trigonometria. Tais problemas podiam agora ser tratados não só por generalização de resoluções estritamente numéricas, mas também directamente através deste sistema. De facto, como foi observado, Viète generalizou vários problemas de Diofanto ultrapassando, por vezes, certas restrições numéricas das suas resoluções. Este carácter extensivo da *logística especiosa* aponta na direcção da generalização do conceito de número. Viète apresentou ainda resoluções alternativas dos mesmos problemas e resolveu outros não propostos por Diofanto.

Com este cálculo simbólico Viète esteve perto de alcançar certos resultados, nomeadamente o da fórmula binomial geral e o das fórmulas trigonométricas dos seno e co-seno de múltiplos inteiros de um ângulo.

Acresce ainda que esta nova forma de notação permitiu que numa equação se utilizassem coeficientes não numéricos. Deste modo, tornou-se possível relacionar as soluções dos problemas com os dados iniciais o que, consequentemente, originou e incentivou a investigação da estrutura das próprias equações.

Os novos resultados revelam claramente que não é correcto afirmar que a arte analítica de Viète se resume apenas à sua notação, apesar de esta se ter mostrado determinante no sucesso do seu próprio trabalho.

No entanto, a arte analítica de Viète apresentava algumas limitações. O seu sistema de cálculo simbólico estava preso ao princípio grego da homogeneidade, pelo que Viète não considerava problemas que envolvessem operações com grandezas não homogéneas. Além disso, apesar do uso de simbolismo literal simplificar a leitura das expressões algébricas, no que concerne a expoentes a notação era demasiado pesada, o que impossibilitou que viesse a alcançar, por exemplo, a expressão da fórmula binomial geral. Outra grande limitação diz respeito ao facto de se ter interessado em resolver equações numa só incógnita e a reduzir problemas a equações desse tipo. Ora, desta forma, inviabilizou a possibilidade de aplicar o seu método algébrico ao estudo de problemas envolvendo lugares geométricos.

A técnica algébrica deixada por Viète permitiu à geração seguinte dispor de um mecanismo que pôde ser aperfeiçoado e estendido a outras áreas da matemática. Os trabalhos de Viète desempenharam, assim, um papel preparatório e impulsionador no desenvolvimento de ideias algébricas, nomeadamente em Fermat e em Descartes, podendo, portanto, Viète ser considerado o precursor do despontar da álgebra simbólica.

Bibliografia

- BALL, W.-W. Rouse 1906, *Histoire des Mathématiques* (edition française revue et augmenteé, traduite sur la troisième édition anglaise par L. Freund), **1**, Paris.

- BOS, H. & REICH, K. 1990, "Der doppelte Auftakt zur frühneuzeitlichen Algebra: Viète und Descartes", em Scholz 1990, 183-234.

- BOYER, C. B. 1956, *History of Analytic geometry*, New York.

- BOYER, C. B. 1989, *A History of Mathematics* (second edition, revised by U. C. Merzbach), New York.

- BUSARD, H. 1991, *Biographical Dictionary of Mathematicians: Reference Biographies from the Dictionary of Scientific Biography*, New York.

- CAJORI, F. 1991, *A History of Mathematics*, New York.

- COOKE, R. 1997, *The History of Mathematics: a brief course*, New York.

- DEDRON, P. e ITARD, J. 1959, "Le Père des Mathématiques Modernes: François Viète", em *Mathématiques et mathématiciens*, 173-185, Paris.

- EECKE, P. V. 1959, *Diophant D'Alexandrie. Les six livres Arithmétiques et le livre des nombres polygones*, Paris.

- HOEFER, F. 1874, *Histoire des Mathématique depuis leurs origines jusqu'au commencement du dix-neuvième siècle*, Paris.

- ITARD, J. & BOUVERESSE, J. & SALLÉ, É. (1977), *Histoire des mathématiques*, Canada.

- KARPINSKI, L. C. 1939 "The origin of the Mathematics as taught to Freshmen" em *Scripta Mathematica* **VI**, 133-140.

- KATZ, V. J. 1993, *A History of Mathematics. An Introduction*, New York.

- KLEIN, J. 1968, *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra* (translated by E. Brann), Massachusetts.

- KOKOMOOR, F. W. & KARPINSKI, L. C. 1928, "The Teaching of Elementary Geometry in the seventheenth century" em *Isis*, **X** (1928), 21-32.

- MAHONEY, M.S. 1973, *The Mathematical Career of Pierre de Fermat (1601-1665)*, Princeton.

- MARQUES, S. M. 1991, *Galeria de Matemáticos*, em Jornal de Matemática Elementar, 246-248, Lisboa.

- PEYROUX, J. 1990, *Oeuvres Mathématiques*, Paris.

- REICH, K. 1968, "Diophant, Cardano, Bombelli, Viète, ein Vergleich ihrer Aufgaben", em *Rechenpfennige*, 131-150, München.

- RÍBNIKOV, K. 1860, *Historia de las Matemáticas*, Madrid.

- SCHOLZ, (Editor) 1990, *Geschichte der Algebra. Eine Einführung*, Mannheim.

- SCOTT, J. F. 1958, *A History of Mathematics. From Antiquity to the Beginning of the Nineteenth Century*, London.

- SESIANO, J. 1990 "Rhetorische Algebra in der arabisch-islamischen Welt", em Scholz 1990, 97-128.

- STRUIK, D. J. (1997), *História Concisa das Matemáticas*, Lisboa.
- VASCONCELLOS, F. A. 1925, *História das Matemáticas na Antiguidade*, Lisboa.
- VAULÉZARD, J.-L. 1986, *La Nouvelle Algèbre de M. Viète*, Paris.
- VIÈTE, F. 1970, *Opera Mathematica* (recognita Francisci à Schooten, Vorwort und Register von Joseph E. Hofmann), Hildesheim.
- WAERDEN, B. L. V. 1985, *A History of Algebra*, Berlim.
- WITMER, T. R. 1983, *Analytic Art*, Ohio.
- ZEUTHEN, H.-G. 1902, *Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le moyen age*, Paris