Capítulo 3

Cardinalidade, Ordem

CONJUNTOS EQUIVALENTES

Um conjunto A diz-se *equivalente* a um conjunto B, e se escreve $A \sim B$ se existe uma função $f : A \to B$ que é $1-1$ e sôbre. A função f define, então, uma correspondência biunívoca entre os conjuntos A e B.

Um conjunto é *finito* se e sòmente se é vazio ou é equivalente a $\{1, 2, \ldots, n\}$ para algum $n \in \mathbf{N}$; caso contrário, é chamado *infinito*. Òbviamente, dois conjuntos finitos serão equivalentes se e sòmente se contiverem o mesmo número de elementos. Então, para conjuntos finitos, identificam-se os conceitos "equivalência" e "mesmo número de elementos".

Exemplo 1.1: Sejam os conjuntos $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ e $E = \{2, 4, 6, \ldots\}$. A função $f : \mathbf{N} \to E$ definida por $f(x) = 2x$ é $1-1$ e sôbre. Logo, N é equivalente a E.

Exemplo 1.2: A função $f : (-1, 1) \to \mathbf{R}$, definida por $f(x) = x / (1 - |x|)$ é $1-1$ e sôbre.

Logo, o intervalo aberto $(-1, 1)$ é equivalente a $\mathbf{R}$, conjunto dos reais.

Observe-se que um conjunto infinito pode ser equivalente a um subconjunto próprio de si mesmo. Esta propriedade é válida para conjuntos infinitos em geral.

Proposição 3.1: A relação, em qualquer coleção de conjuntos, definida por $A \sim B$, é uma relação de equivalência.

CONJUNTOS ENUMERÁVEIS E CONTÁVEIS

Seja $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ o conjunto dos inteiros positivos. Diz-se que um conjunto X é *enumerável*, e tem cardinalidade $\aleph_0$ (leia-se: *aleph zero*), se e sòmente se é equivalente a $\mathbf{N}$. Um conjunto é chamado *contável* se e sòmente se é finito ou enumerável.

Exemplo 2.1: O conjunto dos têrmos de qualquer seqüência infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots$, de têrmos distintos, é enumerável, pois uma seqüência é essencialmente uma função $f(n) = a_n$ cujo domínio é $\mathbf{N}$. Então, se os a_n são distintos, a função é unívoca e sôbre. Conseqüentemente, são enumeráveis os conjuntos

$$\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots\}, \quad \{1, -2, 3, -4, \ldots\}, \quad \{\langle 1, 1\rangle, \langle 4, 8\rangle, \langle 9, 27\rangle, \ldots, \langle n^2, n^3\rangle, \ldots\}$$

Exemplo 2.2: Considere o conjunto produto abaixo, $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$:

$$\begin{tikzcd}
\langle 1,1\rangle \arrow[d] & \langle 1,2\rangle \arrow[r] & \langle 1,3\rangle \arrow[dl] & \langle 1,4\rangle \arrow[r] & \cdots \arrow[dl] \\
\langle 2,1\rangle \arrow[ur] & \langle 2,2\rangle \arrow[dl] & \langle 2,3\rangle \arrow[ur] & \langle 2,4\rangle \arrow[dl] & \cdots \arrow[ul] \\
\langle 3,1\rangle \arrow[d] & \langle 3,2\rangle \arrow[ur] & \langle 3,3\rangle \arrow[dl] & \langle 3,4\rangle \arrow[ur] & \cdots \arrow[dl] \\
\langle 4,1\rangle \arrow[ur] & \langle 4,2\rangle \arrow[dl] & \langle 4,3\rangle \arrow[ur] & \langle 4,4\rangle \arrow[dl] & \cdots \arrow[ul] \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

O conjunto $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ pode escrever-se sob forma de seqüência infinita de elementos distintos como segue

$$\langle 1, 1\rangle, \quad \langle 2, 1\rangle, \quad \langle 1, 2\rangle, \quad \langle 1, 3\rangle, \quad \langle 2, 2\rangle, \quad \langle 3, 1\rangle, \ldots$$

Note-se que a seqüência fica determinada seguindo-se as setas no diagrama acima. Logo, $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ é enumerável.

Exemplo 2.3: Seja $M = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbf{N} \cup \{0\}$. Ora, cada inteiro positivo $a \in \mathbf{N}$ pode escrever-se de modo único sob a forma $a = 2^r(2s + 1)$, onde $r, s \in M$. A função $f : \mathbf{N} \to M \times M$, definida por

$$f(a) = \langle r, s\rangle,$$

onde r, s são como acima, é 1 – 1 e sôbre. Logo, $M \times M$ é enumerável. (Note-se que $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ é um subconjunto de $M \times M$.)

Os teoremas seguintes referem-se a conjuntos enumeráveis e contáveis.

Teorema 3.2: Todo conjunto infinito contém um subconjunto enumerável.

Teorema 3.3: Todo subconjunto de um conjunto contável é contável.

Lema 3.4: Seja $\{A_1, A_2, \ldots\}$ uma classe disjunta, enumerável, de conjuntos enumeráveis. Então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ também é enumerável.

Teorema 3.5: Seja $\{A_i : i \in I\}$ uma classe contável de conjuntos contáveis, i. e., I é contável e A_i é contável para cada $i \in I$. Então, $\bigcup \{A_i : i \in I\}$ é contável.

Um conjunto que não é finito nem enumerável é chamado *não-enumerável* ou *não-contável*.

O CONTÍNUO

Nem todo conjunto infinito é enumerável; de fato, o teorema que segue dá-nos disso um exemplo específico e extremamente importante.

Teorema 3.6: O intervalo unitário [0, 1] é não-numerável.

Diz-se que um conjunto X tem a *potência do contínuo*, ou que tem *cardinalidade* **c**, se e sòmente se é equivalente ao intervalo $[0, 1]$.

Mostra-se, num dos exercícios resolvidos, que todo intervalo, aberto ou fechado, tem cardinalidade **c**. Pelo exemplo 1.2, o intervalo aberto $(-1, 1)$ é equivalente a **R**. Logo,

Proposição 3.7: **R**, conjunto dos números reais, tem cardinalidade **c**.

TEOREMA DE SCHROEDER-BERNSTEIN

Escreve-se $A \precsim B$ para indicar que A é equivalente a um subconjunto de B, i. e.,

$$A \precsim B \text{ se, e só se, } \exists\, B^* \subset B \mid A \sim B^*.$$

Também escrevemos $A \precsim B$ se $A \precsim B$ mas $A \nsim B$, i. e., A não é equivalente a B.

Exemplo 3.1: Como **N** é um subconjunto de **R**, podemos escrever, $\mathbf{N} \precsim \mathbf{R}$. Por outro lado, pela proposição 3.7, **R** é não-enumerável, i. e., $\mathbf{R} \nsim \mathbf{N}$. Logo, $\mathbf{N} \prec \mathbf{R}$.

Dado um par qualquer de conjuntos A e B, verifica-se ao menos uma das seguintes proposições:

(i) $A \sim B$, (ii) $A \prec B$ ou $B \prec A$, (iii) $A \precsim B$ e $B \precsim A$,
(iv) $A \not\prec B$, $A \nsim B$ e $B \not\prec A$.

O célebre teorema de Schroeder-Bernstein afirma que, no caso (iii) acima, A é equivalente a B; isto é:

Teorema (Schroeder-Bernstein) 3.8: Se $A \precsim B$ e $B \precsim A$, então $A \sim B$.

O teorema de Schroeder-Bernstein pode ser reformulado como segue:

Teorema 3.8: Seja $X \supset Y \supset X_1$ e $X \sim X_1$. Então, $X \sim Y$.

Observemos que o caso (iv) é impossível, isto é,

Teorema (Lei da Tricotomia) 3.9: Dado um par qualquer de conjuntos A e B ou $A \prec B$ ou $A \sim B$, ou $B \prec A$.

CONCEITO DE CARDINALIDADE

Se A é equivalente a B, i. e, $A \sim B$, então dizemos que A e B tem o mesmo *número cardinal*, ou a mesma *cardinalidade*. Indica-se por $\#(A)$ o "número cardinal de A", ou a "cardinalidade de A". Então,

$$\#(A) = \#(B) \text{ se e sòmente se } A \sim B.$$

Por outro lado, se $A \prec B$, dizemos que A tem cardinalidade inferior à de B ou que B tem cardinalidade superior à de A. Isto é,

$$\#(A) < \#(B) \text{ se, e só se, } A \prec B.$$

De forma que $\#(A) \leq \#(B)$ se, e só se, $A \precsim B$. Conseqüentemente, o teorema de Schroeder-Bernstein admite ainda uma terceira formulação:

Teorema 3.8: Se $\#(A) \leq \#(B)$ e se $\#(B) \leq \#(A)$, então $\#(A) = \#(B)$.

O número cardinal de cada um dos conjuntos

$$\varnothing, \quad \{\varnothing\}, \quad \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \quad \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \ldots$$

é representado por 0, 1, 2, 3,... respectivamente, e é chamado um cardinal *finito*. Os números cardinais de **N** e [0, 1] representam-se por

$$\aleph_0 = \#(N), \quad \mathbf{c} = \#([0, 1]).$$

Então, podemos escrever $0 < 1 < 2 < 3 < \ldots < \aleph_0 < \mathbf{c}$

O TEOREMA DE CANTOR E A HIPÓTESE DO CONTÍNUO

É natural que perguntemos se existem outros cardinais infinitos além de $\aleph_0$ e **c**. A resposta é afirmativa. Na realidade, o Teorema de Cantor define um conjunto que tem cardinalidade superior à de qualquer conjunto dado. A saber:

Teorema (Cantor) 3.10: O conjunto $\mathscr{P}(A)$ das partes de um conjunto arbitrário A tem cardinalidade superior à de A.

É natural também que perguntemos se existe algum conjunto cuja cardinalidade esteja entre $\aleph_0$ e **c**. A conjectura de que a resposta a esta pergunta seja negativa é conhecida como Hipótese do Contínuo. Isto é,

Hipótese do Contínuo: Não existe conjunto algum A com a propriedade $\aleph_0 < \#(A) < \mathbf{c}$.

Em 1963 demonstrou-se que a Hipótese do Contínuo é independente de nossos axiomas da teoria dos conjuntos mais ou menos no mesmo sentido em que o Quinto Postulado de Euclides sôbre as paralelas é independente dos outros axiomas da Geometria.

CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS

Uma relação $\precsim$ em um conjunto A é uma *ordem parcial* (ou *ordem*) se, e só se, para todo $a, b, c \in A$, (i) $a \precsim a$, (ii) $a \precsim b$ e $b \precsim a \Longrightarrow a = b$; (iii) $a \precsim b$ e $b \precsim c \Longrightarrow a \precsim c$. O conjunto A munido da ordem parcial, i. e, o par $(A, \precsim)$ é chamado um *conjunto parcialmente ordenado*.

Lembremos que uma relação é reflexiva se, e só se, satisfaz (i), transitiva se, e só se, satisfaz (iii). Uma relação é chamada anti-simétrica se, e só se, satisfaz (ii). Em outras palavras, uma ordem parcial é uma relação reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Exemplo 4.1: A inclusão de conjuntos é uma ordem parcial em qualquer classe de conjuntos, pois:

(i) $A \subset A \ \forall A$; (ii) $A \subset B$ e $B \subset A \Longrightarrow A = B$; e
(iii) $A \subset B$ e $B \subset C \Longrightarrow A \subset C$.

Exemplo 4.2: Seja A um conjunto qualquer de números reais. Então a relação em A definida por $x \leq y$ é uma ordem parcial e é chamada a *ordem natural* em A.

Exemplo 4.3: Seja $X = \{a, b, c, d, e\}$. Então, o diagrama

$$\begin{tikzcd} & a & & \\ b \arrow[ur] & & c \arrow[ul] & \\ & d \arrow[ul] \arrow[ur] & & e \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

define uma ordem parcial em X como segue: $x \precsim y$ se e só se $x = y$, ou se se pode ir de x a y no diagrama sempre caminhando na direção indicada, isto é, para cima.

Se $a \precsim b$ em um conjunto ordenado, diz-se que *a precede b* ou *a é menor que b*, e que *b segue a*, ou *b domina a*, ou *b é maior do que a*. Além disso, escrevemos $a \prec b$ se $a \precsim b$ mas $a \neq b$.

Diz-se que um conjunto A é *totalmente* (ou *linearmente*) *ordenado* se, para todo $a, b \in A$, ou $a \precsim b$ ou $b \precsim a$. **R**, conjunto dos reais, com a ordem natural definida por $x \leq y$, constitui exemplo de conjunto totalmente ordenado.

Exemplo 4.4: Sejam A e B totalmente ordenados. Então, o conjunto produto $A \times B$ pode ser totalmente ordenado como segue:

$$\langle a, b\rangle \prec \langle a', b'\rangle \text{ se } a \prec a' \text{ ou se } a = a' \text{ e } b \prec b'$$

Esta ordenação chama-se *ordem lexicográfica* de $A \times B$, pois é análoga à maneira como se dispõem as palavras em um dicionário.

Observação: Se uma relação R num conjunto A define uma ordem parcial, i. e, é reflexiva, anti-simétrica e transitiva, então a relação inversa R^{-1} é também uma ordem parcial; chama-se a *ordem inversa*.

SUBCONJUNTOS DE CONJUNTOS ORDENADOS

Seja A um subconjunto de um conjunto X parcialmente ordenado. Então, a ordem em X induz uma ordem em A, de modo natural, como segue: Se $a, b \in A$, então $a \precsim b$ como elementos de A se e só se $a \precsim b$ como elementos de X. Mais precisamente, se R é uma ordem parcial em X, então a relação $R_A = R \cap (A \times A)$, chamada *restrição* de R a A, é uma ordem parcial em A. O conjunto ordenado (A, R_A) é chamado um subconjunto *parcialmente ordenado* do conjunto ordenado (X, R).

Alguns subconjuntos de um conjunto parcialmente ordenado X podem, efetivamente, ser totalmente ordenados. Òbviamente, se X é totalmente ordenado, todo subconjunto de X também o será.

Exemplo 5.1: Considere-se, em $W = \{a, b, c, d, e\}$ a ordem parcial definida pelo diagrama

$$\begin{tikzcd} a & & b \\ & c \arrow[ul] \arrow[ur] & \\ d \arrow[ur] & & e \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Os conjuntos $\{a, c, d\}$ e $\{b, e\}$ são subconjuntos totalmente ordenados; já os conjuntos $\{a, b, c\}$ e $\{d, e\}$ não o são.

PRIMEIRO E ÚLTIMO ELEMENTOS

Seja X um conjunto ordenado. Um elemento $a_0 \in X$ é dito *primeiro*, ou *menor* elemento de X, se e sòmente se $a_0 \precsim x$ para todo $x \in X$. Anàlogamente $b_0 \in X$ será dito *último*, ou *maior* elemento de X se e sòmente se, $x \precsim b_0$ para todo $x \in X$.

Exemplo 6.1: Seja o conjunto $X = \{a, b, c, d, e\}$ ordenado conforme o diagrama

$$\begin{tikzcd} & a & \\ b \arrow[ur] & & c \arrow[ul] \\ & d \arrow[ul] \arrow[ur] & & e \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Então, a é o último elemento, pois a segue todos os elementos. Observe-se que X não possui primeiro elemento. O elemento d não é primeiro elemento, pois d não precede e.

Exemplo 6.2: Os inteiros positivos **N**, com a ordem natural, têm 1 como primeiro elemento. Já o conjunto **Z** dos inteiros, com a ordem natural, não possui primeiro nem último elemento.

ELEMENTOS MAXIMAL E MINIMAL

Seja X um conjunto ordenado. Um elemento $a_0 \in X$ é dito *maximal* se e só se $a_0 \precsim x \Longrightarrow x = a_0$, i. e., se nenhum elemento segue a_0 a não ser êle próprio. Anàlogamente, um elemento b_0 é dito *minimal* se e sòmente se $x \precsim b_0 \Longrightarrow x = b_0$, i. e., se nenhum elemento precede b_0 exceto êle próprio.

Exemplo 7.1: Seja $X = \{a, b, c, d, e\}$ ordenado pelo diagrama do exemplo 6.1. Então, tanto d como e são elementos minimais. a é elemento maximal.

Exemplo 7.2: Conquanto **R**, com a ordem natural, seja totalmente ordenado, não tem elemento maximal nem minimal.

Exemplo 7.3: Seja $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ um conjunto finito totalmente ordenado. Então A contém exatamente um elemento minimal e exatamente um elemento maximal, denotados respectivamente por

$$\min \{a_1, \ldots, a_m\} \quad \text{e} \quad \max \{a_1, \ldots, a_m\}$$

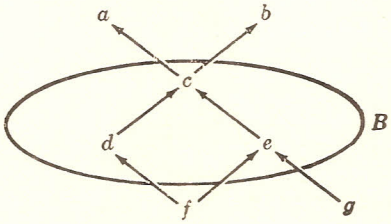
EXTREMO SUPERIOR (SUPREMO) E EXTREMO INFERIOR (ÍNFIMO)

Seja A um subconjunto de um conjunto parcialmente ordenado X. Um elemento $m \in X$ é *cota inferior* de A se, e só se, $m \precsim x$ para todo $x \in A$, i. e., se m precede cada elemento de A. Se uma determinada cota inferior de A segue tôda outra cota inferior de A, então é chamada *extremo inferior*, ou *ínfimo* de A, e representa-se por inf (A).

Anàlogamente, um elemento $M \in X$ é cota superior de A se, e só se, $x \precsim M$ para todo $x \in A$, i. e., se M segue todo elemento de A. Se uma determinada cota superior de A precede tôda outra cota superior de A, então é chamada *extremo superior*, ou *supremo*, de A, e representa-se por sup (A). A diz-se *cotado superiormente* se tem uma cota superior, e *cotado in-*

feriormente se tem uma cota inferior. Se A possui uma cota inferior e uma cota superior, diz-se simplesmente que A é *cotado*.

Exemplo 8.1: Seja o conjunto $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ordenado conforme o diagrama abaixo:



Seja $B = \{c, d, e\}$. Então, a, b e c são cotas superiores de B, e f é a única cota inferior de B. Observe-se que g não é cota inferior de B, uma vez que g não precede d. Além disso, $c = \sup(B)$ pertence a B, enquanto que $f = \inf(B)$ não pertence a B.

Exemplo 8.2: Seja A um conjunto cotado de números reais. Então, um teorema fundamental sôbre os números reais afirma que, sob a ordem natural, existem $\inf(A)$ e $\sup(A)$.

Exemplo 8.3: Seja $\mathbf{Q}$ o conjunto dos racionais e

$$B = \{x \mid x \in \mathbf{Q},\quad x > 0,\quad 2 < x^2 < 3\},$$

i. e., B consiste nos pontos racionais que estão entre $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ na reta real. Então B possui infinitas cotas inferiores e superiores, mas *não* existem $\inf(B)$ e $\sup(B)$. Observe-se que os reais $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ não pertencem a $\mathbf{Q}$, e não podem ser considerados cotas de B.

LEMA DE ZORN

O Lema de Zorn é um dos mais importantes instrumentos da Matemática; assegura a existência de certos tipos de elementos, embora não seja dado nenhum processo construtivo para determiná-los.

Lema de Zorn 3.11: Seja X um conjunto não-vazio, parcialmente ordenado, no qual todo subconjunto totalmente ordenado tem uma cota superior. Então, X contém ao menos um elemento maximal.

Observação: O Lema de Zorn é equivalente ao Axioma da Escolha e ao Princípio da boa ordenação. A demonstração dêste fato, que utiliza o conceito de número ordinal, ultrapassa o âmbito dêste livro.

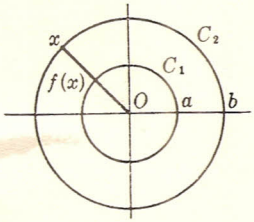
Problemas Resolvidos

CONJUNTOS EQUIVALENTES, CONJUNTOS ENUMERÁVEIS

1. Considerem-se os círculos concêntricos

$$C_1 = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 = a^2\}, \quad C_2 = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 = b^2\}$$

onde $0 < a < b$. Estabeleça, geomètricamente, uma correspondência $1-1$ entre C_1 e C_2.



Solução: Seja $x \in C_2$. Considere-se a função $f: C_2 \to C_1$, onde $f(x)$ é o ponto de intersecção, com C_1, do raio que vai do centro de C_2 (e de C_1) até x, como mostra o diagrama ao lado.

Note que f é $1-1$ e sôbre. Então f define uma correspondência $1-1$ entre C_1 e C_2.

2. Prove que o conjunto dos números racionais é enumerável.

Solução: Seja $\mathbf{Q}^+$ o conjunto dos racionais positivos e $\mathbf{Q}^-$ o conjunto dos números racionais negativos. Então, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbf{Q}^+$ é o conjunto dos números racionais. Seja a função $f: \mathbf{Q}^+ \to \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ definida por

$$f(p/q) = \langle p, q \rangle,$$

onde p/q é qualquer número racional positivo expresso como quociente de dois inteiros. Ora, f é $1-1$; logo, $\mathbf{Q}^+$é equivalente a um subconjunto de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Mas $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ é enumerável (v. ex. 2.2); então $\mathbf{Q}^+$ também é enumerável. Anàlogamente, $\mathbf{Q}^-$ é enumerável. Então, pelo teorema 3.5, a união de $\mathbf{Q}^-$, $\{0\}$ é $\mathbf{Q}^+$, i. e., o conjunto dos números racionais, é também enumerável.

3. Demonstre a proposição 3.1. A relação, em qualquer coleção de conjuntos, definida por $A \sim B$, é uma relação de equivalência. Isto é, (i) $A \sim A$ para qualquer conjunto A; (ii) se $A \sim B$, então $B \sim A$; (iii) se $A \sim B$ e $B \sim C$, então $A \sim C$.

Solução:

(i) A função identidade $1_A : A \to A$ é biunívoca e sôbre; logo, $A \sim A$.

(ii) Se $A \sim B$, então $\exists f : A \to B$ biunívoca e sôbre. Mas, então, f tem uma inversa $f^{-1} : B \to A$ que é também biunívoca e sôbre. Logo,

$$A \sim B \Longrightarrow B \sim A.$$

(iii) Se $A \sim B$ e $B \sim C$, então $\exists f : A \to B$ e $g : B \to C$, $1-1$ e sôbre. Então, a função composta $g \circ f : A \to C$ é também $1-1$ e sôbre. Logo,

$$A \sim B \text{ e } B \sim C \Longrightarrow A \sim C.$$

4. Prove que a coleção P de todos os polinômios

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$$

com coeficientes inteiros, é enumerável.

Solução: Para cada par de inteiros positivos $\langle n, m \rangle \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, seja P_{nm} o conjunto de polinômios $p(x)$ de grau m, em que

$$|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_m| = n.$$

Observe que P_{nm} é finito. Então,

$$P = \bigcup \{P_{nm} : \langle n, m \rangle \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}\}$$

é contável, pois é uma união contável de conjuntos contáveis. Em particular, como P não é finito, P é enumerável.

5. Um número real r é chamado número algébrico se é raiz de um polinômio

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$$

de coeficientes inteiros. Prove que o conjunto A dos números algébricos é enumerável.

Solução: Note, pelo problema precedente, que o conjunto E de equações polinômias é enumerável:

$$E = \{p_1(x) = 0, \quad p_2(x) = 0, \quad p_3(x) = 0, \ldots\}.$$

Seja, pois, $A_i = \{x \mid x \text{ é solução de } p_i(x) = 0\}$.

Como um polinômio de grau n tem, no máximo, n raízes, cada A_i é finito. Logo, $\bigcup \{A_i \mid i \in \mathbf{N}\}$ é enumerável.

6. Demonstre o teorema 3.2: Todo conjunto infinito X contém um subconjunto D enumerável.

Solução: Seja $f : \mathscr{P}(X) \to X$ uma função escolha, i. e., para cada subconjunto não-vazio A de X, $f(A) \in A$. (Tal função existe em razão do Axioma da Escolha.) Considere a seguinte seqüência:

$$\begin{aligned} a_1 &= f(X) \\ a_2 &= f(X \setminus \{a_1\}) \\ a_3 &= f(X \setminus \{a_1, a_2\}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= f(X \setminus \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Como X é infinito $X \setminus \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ é não-vazio para todo $n \in \mathbf{N}$. Além disso, como f é uma função escolha,

$$a_n \neq a_i \text{ para } i < n.$$

Assim, os a_n são distintos e $D = \{a_1, a_2, \ldots\}$ é um subconjunto enumerável de X.

Essencialmente, a função escolha f "escolhe" um elemento $a_1 \in X$, em seguida escolhe um elemento a_2 dentre aquêles que "ficaram" em X, etc. Como X é infinito, o conjunto dos elementos que "ficam" em X é não-vazio.

7. Prove que, se X é um conjunto qualquer e $C(X)$ é a coleção de funções características em X, i. e., a coleção de funções $f : X \to \{1, 0\}$, então o conjunto das partes de X é equivalente a $C(X)$, i. e., $\mathscr{P}(X) \sim C(X)$.

Solução: Seja A um subconjunto de X, i. e., $A \in \mathscr{P}(X)$. Seja $f : \mathscr{P}(X) \to C(X)$ definida por

$$f(A) = \chi_A = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin A \\ 1 & \text{se } x \in A \end{cases}$$

Então, f é biunívoca e sôbre. Logo, $\mathscr{P}(X) \sim C(X)$.

8. Prove que um subconjunto de um conjunto enumerável é finito ou enumerável.

Solução: Seja $X = \{a_1, a_2, \ldots\}$ um conjunto enumerável e A um subconjunto de X. Se $A = \varnothing$, então A é finito. Se $A \neq \varnothing$, então seja n_1 o menor inteiro positivo tal que $a_{n1} \in A$; seja n_2 o menor inteiro positivo tal que $n_2 > n_1$ e $a_{n2} \in A$; etc. Então, $A = \{a_{n1}, a_{n2}, \ldots\}$. Se o conjunto de inteiros $\{n_1, n_2, \ldots\}$ é cotado, A é finito. Em caso contrário, A é enumerável.

9. Prove o teorema 3.3: Todo subconjunto de um conjunto contável é contável.

Solução: Se X é contável, então X ou é finito ou é enumerável. Em qualquer dos casos, seus subconjuntos são contáveis.

10. Prove o lema 3.4: Seja $\{A_1, A_2, \ldots\}$ uma classe disjunta, enumerável, de conjuntos enumeráveis. Então, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ é enumerável.

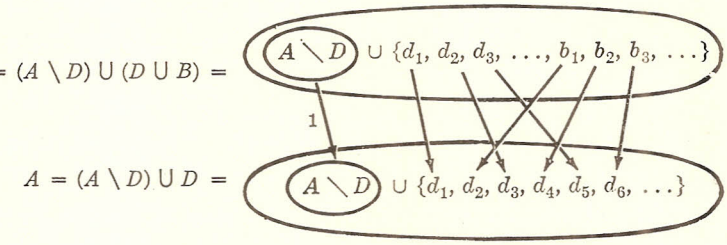
Solução: Como os A_i são enumeráveis, podemos escrever

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots\}$$
$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \ldots\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Então, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{a_{ij} : \langle i, j\rangle \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}\}$. A função $f : \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ definida por $f(a_{ij}) = \langle i, j\rangle$ é òbviamente biunívoca e sôbre. Logo, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ é enumerável, porque $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ o é.

11. Prove que, se A é um conjunto infinito, $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ é enumerável, e A e B são disjuntos, então $A \cup B \sim A$.

Solução: Como A é infinito, A contém um subconjunto enumerável $D = \{d_1, d_2, \ldots\}$. Seja $f : A \cup B \to A$ definida pelo diagrama abaixo:



Em outras palavras,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in A \setminus D \\ d_{2n-1} & \text{se } x = d_n \\ d_{2n} & \text{se } x = b_n. \end{cases}$$

Observe que f é biunívoca e sôbre. Logo, $A \cup B \sim A$.

CONTÍNUO, CARDINALIDADE

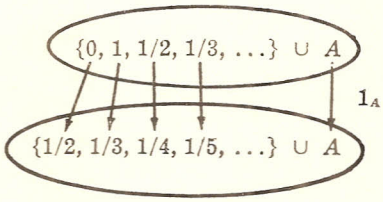
12. Prove que os intervalos $(0, 1)$, $[0, 1)$ e $(0, 1]$ têm cardinalidade **c**, i. e., são equivalentes a $[0, 1]$.

Solução:

(i) Note que $[0, 1] = \{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots\} \cup A$, $(0, 1) = \{1/2, 1/3, 1/4, \ldots\} \cup A$

onde $A = [0, 1] \setminus \{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots\} = (0, 1) \setminus \{1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$

Considere a função $f : [0, 1] \to (0,1)$ definida pelo seguinte diagrama



Em outras palavras,

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } x = 0 \\ 1/(n+2) & \text{se } x = 1/n,\ n \in \mathbf{N} \\ x & \text{se } x \neq 0,\ 1/n,\ n \in \mathbf{N}, \text{ i. e., se } x \in A \end{cases}$$

A função f é biunívoca e sôbre. Logo, $[0, 1] \sim (0, 1)$.

(ii) A função $f : [0, 1] \to [0, 1)$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1/(n+1) & \text{se } x = 1/n,\ n \in \mathbf{N} \\ x & \text{se } x \neq 1/n,\ n \in \mathbf{N} \end{cases}$$

é biunívoca e sôbre. (É análoga à função na parte (i).) Logo $[0, 1] \sim [0, 1)$.

(iii) Seja $f : [0, 1) \to (0, 1]$ definida por $f(x) = 1 - x$. Então f é biunívoca e sôbre. Logo, $[0,1) \sim (0,1]$ e, por transitividade, $[0,1] \sim (0,1]$.

Em outras palavras, $(0, 1)$, $[0, 1)$ e $(0, 1]$ têm cardinalidade **c**.

13. Prove que cada um dos intervalos seguintes tem a potência do contínuo, i. e., tem cardinalidade

$$[a, b],\ (a, b),\ [a, b) \text{ e } (a, b]; \text{ sendo } (a < b).$$

Solução: Seja cada uma das funções abaixo definidas por $f(x) = a + (b - a)\,x$:

$$[0, 1] \xrightarrow{f} [a, b] \qquad [0, 1) \xrightarrow{f} [a, b) \qquad (0, 1) \xrightarrow{f} (a, b) \qquad (0, 1] \xrightarrow{f} (a, b]$$

Cada função é biunívoca e sôbre. Logo, pelo teorema precedente e pela proposição 3.1, cada intervalo é equivalente a $[0, 1]$, i. e., tem cardinalidade **c**.

14. Prove o teorema 3.6: O intervalo unitário $A = [0, 1]$ é não-enumerável.

Solução:

Método 1. Suponhamos o contrário; então,

$$A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

i. e., os elementos de A podem dispor-se numa seqüência.

Cada elemento em A pode escrever-se sob forma de decimal infinita, como segue:

$$x_1 = 0.\, a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \ldots a_{1n} \ldots$$

$$x_2 = 0.\, a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \ldots a_{2n} \ldots$$

$$x_3 = 0.\, a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \ldots a_{3n} \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = 0.\, a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3} \ldots a_{nn} \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

onde $a_{ij} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ e onde cada decimal contém um número infinito de elementos diferentes de zero, i. e., para os números que podem ser escritos de duas maneiras sob forma de decimal, a saber,

$$\frac{1}{2} = 0{,}5000\ldots = 0{,}4999\ldots,$$

escrevemos a decimal infinita na qual todos os algarismos (exceto um número finito) são 9. Construamos, agora, o número real

$$y = 0,\, b_1\, b_2\, b_3 \ldots b_n \ldots,$$

que pertencerá a A, da seguinte maneira: Escolhamos b_1 tal que $b_1 \neq a_{11}$ e $b_1 \neq 0$; escolhamos, em seguida, b_2 tal que $b_2 \neq a_{22}$ e $b_2 \neq 0$; etc.

Observe-se que $y \neq x_1$ porque $b_1 \neq a_{11}$; $y_2 \neq x_2$ porque $b_2 \neq a_{22}$, etc. i. e., $y \neq x_n$ para $n \in \mathbf{N}$. Logo, $y \notin A$, o que é impossível. Então, a hipótese formulada de A ser enumerável conduz a uma contradição. Conseqüentemente, A é não-enumerável.

Método 2. Suponhamos o contrário. Então, como acima,

$$A = \{x_1, x_2, x_3 \ldots\}$$

Construamos, agora, uma seqüência de intervalos fechados como segue: Consideremos os três seguintes subintervalos fechados de $A = [0, 1]$,

$$\left[0, \tfrac{1}{3}\right], \left[\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right], \left[\tfrac{2}{3}, 1\right], \tag{1}$$

cada um de amplitude $\frac{1}{3}$. Ora, x não pode pertencer a todos os três intervalos. Seja $I_1 = [a_1, b_1]$ um dos intervalos em (1) tal que $x_1 \notin I_1$.

Consideremos, em seguida, os três seguintes subintervalos de $I_1 = [a_1, b_1]$,

$$\left[a_1,\ a_1 + \tfrac{1}{9}\right],\ \left[a_1 + \tfrac{1}{9}, a_1 + \tfrac{2}{9}\right],\ \left[a_1 + \tfrac{2}{9},\ b_1\right] \tag{2}$$

cada um de amplitude $\frac{1}{9}$. Anàlogamente, seja I_2 um dos intervalos em (2) tal que $x_2 \notin I_2$.

Continuando desta maneira, obtém-se uma seqüência de intervalos fechados

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots \tag{3}$$

tais que $x_n \notin I_n$ para todo $n \in \mathbf{N}$. De acôrdo com a *propriedade dos intervalos encaixados* (v. apêndice A), existe um real $y \in A = [0, 1]$ tal que y pertence a todo intervalo em (3). Mas

$y \in A = \{x_1, x_2, \ldots\} \Longrightarrow y = x_{m_0}$ para algum $m_0 \in \mathbf{N}$. Então, pela nossa construção, $y = x_{m_0} \notin I_{m_0}$, o que contradiz o fato de que y pertence a todo intervalo em (3). Assim, a nossa hipótese de que A é enumerável conduz a uma contradição. Logo, A não é enumerável.

15. Demonstre o teorema 3.8 (Schroeder-Bernstein): Seja $X \supset Y \supset X_1$ e $X \sim X_1$; então $X \sim Y$.

Solução: Como $X \sim X_1$, $\exists f = X \to X_1$, que é 1 – 1 e sôbre. Mas $X \supset Y$; logo, a restrição de f a Y, que também representaremos por f, é também biunívoca. Portanto, Y é equivalente a um subconjunto de X_1, i. e., $Y \sim Y_1$, onde

$$X \supset Y \supset X_1 \supset Y_1$$

e $f : Y \to Y_1$ é 1 – 1 e sôbre. Mas $Y \supset X_1$; logo, por análogas razões, $X \sim X_2$ onde

$$X \supset Y \supset X_1 \supset Y_1 \supset X_2$$

e $f : X_1 \to X_2$ é 1 – 1 e sôbre. Conseqüentemente, existem conjuntos equivalentes $X_1, X_2, X_3, \ldots$ e conjuntos equivalentes $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ tais que

$$X \supsetneq Y \supset X_1 \supset Y_1 \supset X_2 \supset Y_2 \supset \ldots$$

Seja

$$B = X \cap Y \cap X_1 \cap Y_1 \cap X_2 \cap Y_2 \cap \ldots$$

Então

$$X = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X_1) \cup (X_1 \setminus Y_1) \cup \ldots \cup B$$
$$Y = (Y \setminus X_1) \cup (X_1 \setminus Y_1) \cup (Y_1 \setminus X_2) \cup \ldots \cup B$$

Note-se, além disso, que

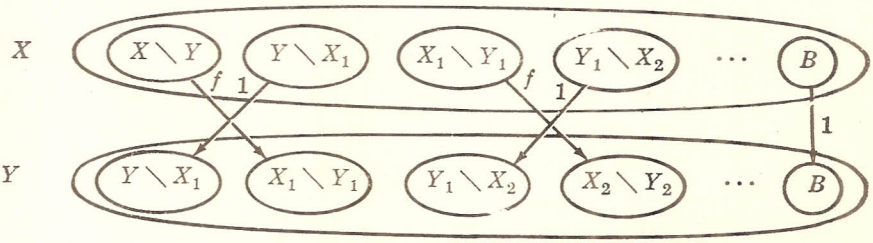
$$(X \setminus Y) \sim (X_1 \setminus Y_1) \sim (X_2 \setminus Y_2) \sim \ldots$$

Especìficamente, a função

$$f : (X_n \setminus Y_n) \to (X_{n+1} \setminus Y_{n+1})$$

é biunívoca e sôbre.

Considere a função $g : X \to Y$ definida pelo seguinte diagrama:



Em outras palavras,

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X_i \setminus Y_i \text{ ou } x \in X \setminus Y \\ x & \text{se } x \in Y_i \setminus X_i \text{ ou } x \in B \end{cases}$$

Então g é 1 – 1 e sôbre. Portanto $X \sim Y$.

16. Demonstre o teorema 3.10 (Cantor): O conjunto $\mathscr{P}(A)$ das partes de um conjunto arbitrário A tem cardinalidade superior à de A, i. e., $A \prec \mathscr{P}(A)$, donde $\# A < \# \mathscr{P}(A)$.

Solução: A função $g : A \to \mathscr{P}(A)$, que leva cada elemento $a \in A$ no conjunto unitário $\{a\}$, i. e., $g(a), = \{a\}$, é biunívoca; logo, $A \precsim \mathscr{P}(A)$.

Se mostrarmos, agora, que A *não* é equivalente a $\mathscr{P}(A)$, teremos estabelecido o teorema. Suponhamos, então, o contrário, i. e., admitamos que exista $f : A \to \mathscr{P}(A)$ biunívoca e sôbre. Chamemos $a \in A$ um elemento "mau" se a não é membro do conjunto que é sua imagem, i. e., se $a \notin f(a)$. Seja B o conjunto dos elementos "maus", i. e.,

$$B = \{x : x \in A, x \notin f(x)\}.$$

Note-se que B é um subconjunto de A, i. e., $B \in \mathscr{P}(A)$. Como $f : A \to \mathscr{P}(A)$ é sôbre, existe um elemento $b \in A$ com a propriedade $f(b) = B$. A questão é agora: O elemento b é "mau" ou "bom"? Se $b \in B$, então, pela definição de B, $b \notin f(b) = B$, o que é uma contradição. Anàlogamente, se $b \notin B$, então $b \in f(b) = B$, o que também é uma contradição. Então, a hipótese original, $A \sim \mathscr{P}(A)$, conduz a uma contradição. Logo, $A \sim \mathscr{P}(A)$ é falsa e o teorema é verdadeiro.

CONJUNTOS E SUBCONJUNTOS ORDENADOS

17. Ordenemos **N**, conjunto dos inteiros positivos, como segue: cada par de elementos $a, a' \in$ **N** pode ser representado de modo único sob a forma

$$a = 2^r (2s + 1), \quad a' = a'^{r'} (as' + 1)$$

onde $r, r', s, s' \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Seja

$$a \prec a' \text{ se } r \prec r' \text{ ou se } r = r' \text{ mas } s < s'$$

Insira o símbolo correto, $\prec$ ou $\succ$, entre cada um dos seguintes pares de números. (Aqui, $x \succ y$ se, e só se, $y \prec x$.)

(i) 5____14, (ii) 6____9, (iii) 3____20, (iv) 14____21

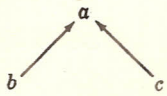
Solução: Os elementos em **N** podem escrever-se como segue:

r \ s	0	1	2	3	4	5	6	7	
0	1	3	5	7	9	11	13	15	...
1	2	6	10	14	18	22	26	30	...
2	4	12	20	28	36	44	52	60	...
	.	.	.	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	.	.	.	

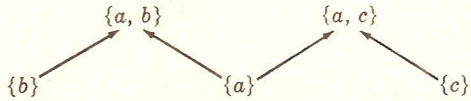
Então, um número de uma fileira superior precede um número de uma fileira inferior e, se dois números estão na mesma fileira, o da esquerda precede o da direita. Então,

(i) $5 \prec 14$, (ii) $6 \succ 9$, (iii) $3 \prec 20$, (iv) $14 \succ 21$

18. Seja $A = \{a, b, c\}$ ordenado conforme o diagrama da direita. Seja $\mathscr{A}$ a coleção de todos os subconjuntos de A, não-vazios, totalmente ordenados, e seja $\mathscr{A}$ parcialmente ordenado pela inclusão de conjuntos. Construa um diagrama da ordem de $\mathscr{A}$.



Solução: Os subconjuntos totalmente ordenados de A são: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$. Como $\mathscr{A}$ é ordenado pela inclusão de conjuntos, a ordem de $\mathscr{A}$ é a do diagrama ao lado.



19. Seja $A = \{2, 3, 4, \ldots\} = \mathbf{N} \setminus \{1\}$, ordenado segundo o critério "x divide y". (i) Determine os elementos minimais de A. (ii) Determine os elementos maximais de A.

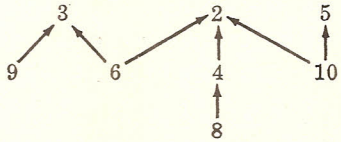
Solução:

(i) Se p é primo, então só p divide p (pois $1 \notin A$); logo, todos os números primos são elementos minimais. Além disso, se $a \in A$ não é primo, então existe $b \in A$ tal que b divide a, i. e., $b \prec a$; logo, a não é minimal. Em outras palavras, os elementos minimais são, precisamente, os números primos.

(ii) Não há elementos maximais, pois, para cada $a \in A$, a divide $2a$, por exemplo.

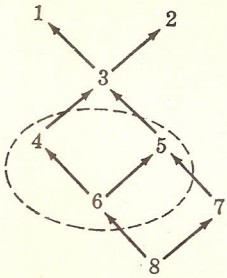
20. Seja $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$ ordenado pelo critério "x e múltiplo de y". (i) Determine todos os elementos maximais de B. (ii) Determine todos os elementos minimais de B.

Solução: Construa um diagrama da ordem de B, como segue:



(i) Os elementos maximais são 2, 3 e 5. (ii) Os elementos minimais são 6, 8, 9 e 10.

21. Seja $W = \{1, 2, \ldots, 7, 8\}$ ordenado como segue:



Considere o subconjunto $V = \{4, 5, 6\}$ de W. (i) Determine o conjunto das cotas superiores de V. (ii) Determine o conjunto das cotas inferiores de V. (iii) Existe sup (V)? (iv) Existe inf (V)?

Solução:

(i) Cada um dos elementos em $\{1, 2, 3\}$, e sòmente êstes, segue cada elemento de V, logo, é cota superior.

(ii) Sòmente 6 e 8 precedem todo elemento de V; logo, $\{6, 8\}$ é o conjunto de cotas inferiores.

(iii) Como 3 é primeiro elemento do conjunto de cotas superiores, sup $(V) = 3$. Note-se que $3 \notin V$.

(iv) Como 6 é último elemento do conjunto de cotas inferiores, inf $(V) = 6$. Note-se que $6 \in V$.

22. Seja $\mathscr{A}$ uma coleção de conjuntos parcialmente ordenados pela inclusão, e seja $\mathscr{B}$ uma subcoleção de $\mathscr{A}$. (i) Prove que se $A \in \mathscr{A}$ é cota superior de $\mathscr{B}$, então $\bigcup \{B \mid B \in \mathscr{B}\} \subset A$. (ii) $\bigcup \{B \mid B \in \mathscr{B}\}$ é cota superior de $\mathscr{B}$?

Solução:

(i) Seja $x \in \bigcup \{B \mid B \in \mathscr{B}\}$; então $\exists\, B_0 \in \mathscr{B} \mid x \in B_0$. Mas A é cota superior de $\mathscr{B}$; então $B_0 \subset A$ e $x \in A$. Logo, $\bigcup \{B \mid B \in \mathscr{B}\} \subset A$.

(ii) Mesmo que $\mathscr{B}$ seja uma subcoleção de $\mathscr{A}$, não é necessàriamente verdadeiro que a união de membros de $\mathscr{B}$, i. e., $\bigcup \{B \mid B \in \mathscr{B}\}$ seja membro de $\mathscr{A}$. Em outras palavras, $\bigcup \{B \mid B \in \mathscr{B}\}$ é cota superior de $\mathscr{B}$ se e só se pertence a $\mathscr{A}$.

APLICAÇÕES DO LEMA DE ZORN

23. Prove que, se X é um conjunto parcialmente ordenado, então existe um subconjunto totalmente ordenado de X que não é subconjunto próprio de nenhum outro subconjunto totalmente ordenado de X.

Solução: Seja $\mathscr{A}$ a classe de todos os subconjuntos totalmente ordenados de X, parcialmente ordenada pela inclusão de conjuntos. Devemos mostrar, pelo Lema de Zorn, que $\mathscr{A}$ possui um elemento maximal. Suponhamos, então, que $\mathscr{B} = \{B_i : i \in I\}$ é uma subclasse totalmente ordenada de $\mathscr{A}$. Seja $A = \bigcup \{B_i : i \in I\}$

Observe que

$$B_i \subset X \text{ para todo } B_i \in \mathscr{B} \Longrightarrow A \subset X$$

Mostremos, a seguir, que A é totalmente ordenado. Seja $a, b \in A$; então $\exists\, B_j, B_k \in \mathscr{B}$ tais que $a \in B_j$, $b \in B_k$. Mas $\mathscr{B}$ é totalmente ordenada pela inclusão de conjuntos; logo, um dêles, digamos B_j, é subconjunto do outro. Conseqüentemente, $a, b \in B_k$. Recordemos que $B_k \in \mathscr{B}$ é um subconjunto totalmente ordenado de X; portanto, ou $a \precsim b$ ou $b \precsim a$. Então, A é um subconjunto totalmente ordenado de X, logo $A \in \mathscr{A}$.

Mas $B_i \subset A$ para todo $B_i \in \mathscr{B}$; logo, A é cota superior de $\mathscr{B}$. Como todo subconjunto totalmente ordenado de $\mathscr{A}$ tem uma cota superior em $\mathscr{A}$, pelo Lema de Zorn, $\mathscr{A}$ tem um elemento maximal, i. e., um subconjunto totalmente ordenado de X, que não é subconjunto próprio de nenhum outro subconjunto totalmente ordenado de X.

24. Seja R uma relação de A para B, i. e., $R \subset A \times B$, e suponhamos que o domínio de R é A. Prove que, então, existe um subconjunto f^* de R tal que f^* é uma função de A em B.

Solução: Seja $\mathscr{A}$ a classe de subconjuntos de R tais que cada $f \in \mathscr{A}$ é uma função de um subconjunto de A em B. Ordenemos parcialmente $\mathscr{A}$ pela inclusão de conjuntos. Notemos que, se $f : A_1 \to B$ é um subconjunto de $g : A_2 \to B$, então $A_1 \subseteq A_2$.

Suponhamos, agora, que $\mathscr{B} = \{f_i | A_i \to B\}_{i \in I}$ seja um subconjunto totalmente ordenado de $\mathscr{A}$. Então, (v. problema 44), $f = \bigcup_i f_i$ é uma função de $\bigcup_i A_i$ em B. Além disso, $f \subset R$. Logo, f é cota superior de $\mathscr{B}$. Pelo Lema de Zorn, $\mathscr{A}$ possui um elemento maximal $f^* : A^* \to B$. Se mostrarmos que $A^* = A$, então teremos provado o teorema.

Seja $A^* \neq A$. Então, $\exists\, a \in A \,|\, a \notin A^*$. Por hipótese, o domínio de R é A; logo, existe um par ordenado $\langle a, b \rangle \in R$. Então, $f^* \cup \{\langle a, b \rangle$ é uma função de $A^* \cup \{a\}$ em B. Mas isto contradiz o fato de que f^* é elemento maximal de $\mathscr{A}$. Logo, $A^* = A$ e o teorema está demonstrado.

Problemas Propostos

CONJUNTOS EQUIVALENTES, CARDINALIDADE

25. Prove que todo conjunto infinito é equivalente a um subconjunto próprio de si mesmo.

26. Prove que, se A e B são enumeráveis, então $A \times B$ também é enumerável.

27. Prove que o conjunto de pontos do plano R^2 com coordenadas racionais é enumerável.

28. Um número real é chamado *transcendente* se não é algébrico, i. e., se não é raiz de uma equação polinômia

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m = 0$$

com coeficientes inteiros (v. probl. 5). P. ex., π e e são números transcendentes.

(i) Prove que o conjunto T dos números transcendentes não é enumerável.

(ii) Prove que T tem a potência do contínuo, i. e., tem cardinalidade $\mathbf{c}$.

29. Define-se como segue a multiplicação de cardinais:

$$\#(A)\,\#(B) = \#(A \times B)$$

(i) Mostre que a operação é bem definida, i. e.,

$$\#(A) = \#(A') \text{ e } \#(B) = \#(B') \Longrightarrow \#(A)\,\#(B) = \#(A')\,\#(B')$$

ou, equivalentemente $A \sim A'$ e $B \sim B' \Longrightarrow (A \times B) \sim (A' \times B')$

(ii) Prove: (*a*) $\aleph_0\, \aleph_0 = \aleph_0$ (*b*) $\aleph_0\, \mathbf{c} = \mathbf{c}$, (*c*) $\mathbf{cc} = \mathbf{c}$.

30. Define-se como se segue a adição de cardinais:

$$\#(A) + \#(B) = \#(A \times \{1\} \cup B \times \{2\})$$

(i) Mostre que, se $A \cap B = \varnothing$, então $\#(A) + \#(B) = \#(A \cup B)$.

(ii) Mostre que a operação é bem definida, isto é,

$$\#(A) = \#(A') \text{ e } \#(B) = \#(B') \Longrightarrow \#(A) + \#(B) = \#(A') + \#(B')$$

31. Define-se como se segue a operação de potenciação para cardinais:

$$\#(A)^{\#(B)} = \#(\{f : f : B \to A\})$$

(i) Mostre que, se $\#(A) = m$ e $\#(B) = n$ são cardinais finitos, então

$$\#(A)^{\#(B)} = m^n$$

i. e., a potenciação de cardinais corresponde, no caso de cardinais finitos, à potenciação de inteiros positivos.

(ii) Mostre que a operação é bem definida, i. e.,

$$\#(A) = \#(A') \text{ e } \#(B) = \#(B') \Longrightarrow \#(A)^{\#(B)} = \#(A')^{\#(B')}$$

(iii) Prove: Para qualquer conjunto A, $\#(\mathscr{P}(A)) = 2^{\#(A)}$.

32. Seja $\sim$ a relação de equivalência em $\mathbf{R}$ definida por $x \sim y$ se e só se $x - y$ é racional. Determine a cardinalidade do conjunto quociente $\mathbf{R}/\sim$.

33. Prove: O número cardinal da classe de tôdas as funções de $[0, 1]$ em $\mathbf{R}$ é 2^c.

34. Prove que se equivalem as duas formas seguintes do teorema de Schroeder--Bernstein 3.8:

(i) Se $A \precsim B$ e $B \precsim A$, então $A \sim B$.

(ii) Se $X \supset Y \supset X_1$ e $X \sim X_1$, então $X \sim Y$.

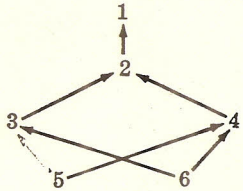
35. Prove o teorema 3.9: Dados dois conjuntos A e B, ou $A \prec B$, $A \sim B$ ou $B \prec A$. (*Sug.*: Use o Lema de Zorn.)

CONJUNTOS ORDENADOS E SUBCONJUNTOS

36. Seja $A = (\mathbf{N}, \leq)$ o conjunto dos inteiros positivos com a ordem natural; e seja $B = (\mathbf{N}, \geq)$ o mesmo conjunto com a ordem inversa. Além disso, seja $A \times B$ a ordenação lexicográfica de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ de acôrdo com a ordem de A e, a seguir, de B. Insira o símbolo correto, $\prec$ ou $\succ$, entre os elementos de cada par de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$.

(i) $\langle 3, 8\rangle$____$\langle 1, 1\rangle$, (ii) $\langle 2, 1\rangle$____$\langle 2, 8\rangle$, (iii) $\langle 3, 3\rangle$____$\langle 3, 1\rangle$, (iv) $\langle 4, 9\rangle$____$\langle 7, 15\rangle$.

37. Seja o conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ordenado conforme diagrama ao lado. Considere o subconjunto $A = \{2, 3, 4\}$ de X. (i) Determine os elementos maximais de X. (ii) Determine os elementos minimais de X. (iii) Tem X um primeiro elemento? (iv) Tem X um último elemento? (v) Determine o conjunto de cotas superiores de A. (vi) Determine o conjunto de cotas inferiores de A. (vii) Existe sup (A)? (viii) Existe inf. (A)?



38. Considere o conjunto $\mathbf{Q}$ dos racionais, com a ordem natural, e seu subconjunto $A = \{x \mid x \in \mathbf{Q},\ x^3 < 3\}$. (i) A é cotado superiormente? (ii) inferiormente? (iii) existe sup (A)? (iv) inf. (A)?

39. Seja $\mathbf{N}$ o conjunto dos inteiros positivos, ordenado pelo critério "x divide y", e seja $A \subset \mathbf{N}$. (i) Existe sup. (A)? (ii) inf. (A)?

40. Prove que todo conjunto finito parcialmente ordenado tem um elemento maximal.

41. Dê exemplo de um conjunto ordenado que tenha exatamente um elemento maximal mas não tenha último elemento.

42. Prove que, se R é uma ordem parcial em A, então R^{-1} também é uma ordem parcial em A.

LEMA DE ZORN

43. Considere a "prova" da seguinte afirmação: Existe um conjunto finito de inteiros positivos que não é subconjunto próprio de nenhum outro conjunto finito de inteiros positivos.

Prova: Seja $\mathscr{A}$ a classe de todos os conjuntos finitos de inteiros. Ordene-se $\mathscr{A}$ parcialmente, pela inclusão de conjuntos. Seja $\mathscr{B} = \{B_i | i \in I\}$ uma subclasse totalmente ordenada de $\mathscr{A}$. Considere-se o conjunto $A = \bigcup_i B_i$. Observe-se que $B_i \subset A$ para todo $B_i \in \mathscr{B}$; logo, A é cota superior de $\mathscr{B}$.

Como todo subconjunto totalmente ordenado de $\mathscr{A}$ tem uma cota superior, pelo Lema de Zorn, $\mathscr{A}$ tem um elemento maximal, um conjunto finito que não é subconjunto próprio de nenhum outro conjunto finito.

Questão: Como a afirmação é manifestamente falsa, indique onde falha a demonstração.

44. Prove o seguinte fato, que foi admitido como verdadeiro na demonstração do probl. 24: Seja $\{f_i | A_i \to B\}$ numa classe de funções totalmente ordenada pela inclusão de conjuntos. Então, $\bigcup_i f_i$ é uma função de $\bigcup_i A_i$ em B.

45. Prove que se equivalem as duas afirmações seguintes:

(i) (Axioma da Escolha). O produto $\prod \{A_i | i \in I\}$ de uma classe não-vazia de conjuntos não-vazios é não-vazio.

(ii) Se $\mathscr{A}$ é uma classe não-vazia de conjuntos disjuntos não-vazios, então existe um subconjunto $B \subset \bigcup \{A | A \in \mathscr{A}\}$ tal que a intersecção de B com cada $A \in \mathscr{A}$ consiste em exatamente um elemento.

46. Prove que, se todo subconjunto totalmente ordenado de um conjunto ordenado X tem uma cota inferior em X, então X tem um elemento minimal.

Respostas aos Problemas Propostos

32. c

36. (i) $\succ$, (ii) $\succ$, (iii) $\prec$, (iv) $\prec$

37. (i) $\{1\}$; (ii) $\{5, 6\}$; (iii) Não; (iv) Sim, 1; (v) $\{1, 2\}$; (vi) $\{5,6\}$ (vii) Sim, 2; (viii) Não.

38. (i) Sim, (ii) Não, (iii) Não, (iv) Não.

39. (i) Sim, (ii) sup. (A) existe se e só se A é finito.

41.

$$\begin{array}{l} a \\ \uparrow \\ 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to \ldots \end{array}$$

Aqui a é maximal, mas a não é último elemento.