ISCTE - IUL

Engenharia de Telecomunicações e Informática

Engenharia de Informática, 1^o Ano

Cadeira: Análise Matemática II

Caderno : Análise Complexa

Elaborado de: **Rosário Laureano, Helena Soares, Diana Mendes**

Departamento de Métodos Quantitativos

Maio de 2011

Capítulo 1

Funções analíticas

1.1 Funções complexas de variável complexa

Consideremos uma função $f : D \to \mathbb{C}$, onde D é um subconjunto de $\mathbb{C}$. A função f diz-se uma **função complexa de uma variável complexa**. Trata-se de uma correspondência que associa a cada elemento $z \in D$ um único elemento w no plano complexo (designado por **imagem de z por f** ou **valor de f em z**):

$$w = f(z) = f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i,$$

onde $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são funções reais de duas variáveis reais x e y, designadas por **parte real** e **parte imaginária de $\mathbf{f(z)}$**, respectivamente. O conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$ é designado por **domínio de f** e o conjunto das imagens w é designado por **contradomínio de f**.

Exemplo 1 *Consideremos a função $f(z) = z^2 + 3$. Temos*

$$\begin{aligned} f(x + yi) &= (x + yi)^2 + 3 = x^2 + 2xyi - y^2 + 3 \\ &= \left(x^2 - y^2 + 3\right) + 2xyi, \end{aligned}$$

e logo $u(x, y) = x^2 - y^2 + 3$ e $v(x, y) = 2xy$. O domínio de f é todo o conjunto $\mathbb{C}$.

Exemplo 2 *A função $f(z) = z/\left(z^2 + 1\right)$ tem por domínio o conjunto*

$$D = \left\{z \in \mathbb{C} : z^2 + 1 \neq 0\right\}.$$

Dado que

$$z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -1 \Leftrightarrow z = i \vee z = -i,$$

podemos concluir que $D = \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$.

Exemplo 3 *Seja f a função definida por $f(z) = z^2 - 4z + \mathrm{Re}(z)$. Então,*

$$f(x+yi) = (x+yi)^2 - 4\,(x+yi) + x = (x^2 - y^2 - 3x) + (2xy - 4y)i,$$

e logo $u(x,y) = x^2 - y^2 - 3x$ e $v(x,y) = 2xy - 4y$. O domínio de f é todo o conjunto $\mathbb{C}$.

Nota 1 *Verificamos que a cada função $f(z)$ corresponde um par de funções reais de duas variáveis reais, $u(x,y)$ e $v(x,y)$, e que o recíproco também se verifica, isto é, $f(z)$ fica completamente determinada pelas respectivas funções $u(x,y)$ e $v(x,y)$.*

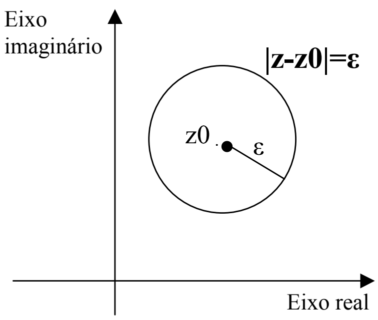
Exemplo 1 *Seja f a função complexa de variável complexa tal que $u(x,y) = xy$ e $v(x,y) = 3x^2 - y^3$. Sem determinar a expressão $f(z)$ de f na variável z é possível determinar a imagem w de qualquer objecto z. Por exemplo, a imagem de $z = 1 - 2i$ é o número complexo $w = -2 + 11i$, visto que*

$$f(1-2i) = u(1,-2) + iv(1,-2) = 1 \cdot (-2) + i(3 - (-8)) = -2 + 11i.$$

Consideremos o número complexo $z_0 = x_0 + y_0 i$. Se $z = x + yi$, a expressão

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

representa a distância entre os afixos Z e Z_0 de z e z_0, respectivamente. Como tal, os pontos do plano complexo que satisfazem a equação $|z - z_0| = \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, são os pontos da circunferência de centro z_0 e raio ε.



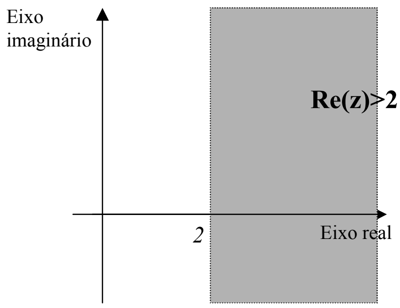
Exemplo 4

1 *A condição $|z| = 1$ é a equação da circunferência de centro $z_0 = 0$ e raio $\varepsilon = 1$.*

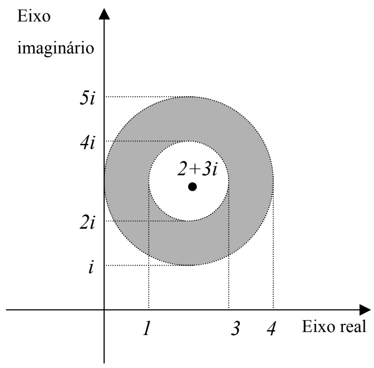
2 *A condição $|z - 1 + 3i| = 6$ é a equação da circunferência de centro $z_0 = 1 - 3i$ e raio $\varepsilon = 6$.*

3 *A condição $|z| \leq 1$ caracteriza o círculo de centro $z_0 = 0$ e raio $\varepsilon = 1$, designado por* ***círculo unitário na origem****.*

Exemplo 5 1 *Seja A o conjunto definido pela condição $\mathrm{Re}(z) > 2$. Esta condição define um semiplano direito no plano complexo. O conjunto A é constituído pelos números complexos $z = x + yi$ com $x > 2$. Trata-se de um conjunto aberto.*



2 *O conjunto A definido pela condição $1 < |z - 2 - 3i| < 2$ é um conjunto aberto.*



Trata-se do conjunto dos pontos z do plano complexo cuja distância ao ponto $z_0 = 2 + 3i$ é superior a 1 mas inferior a 2. Um conjunto deste tipo designa-se por ***coroa circular aberta****. A fronteira de A é*

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - 2 - 3i| = 1 \vee |z - 2 - 3i| = 2\},$$

o conjunto dos pontos que pertencem à circunferência de centro $z_0 = 2 + 3i$ e raio $\varepsilon = 2$ ou à circunferência de centro $z_0 = 2 + 3i$ e raio $\varepsilon = 1$. O conjunto fechado

$$B = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z - 2 - 3i| \leq 2\},$$

designado por ***coroa circular fechada****, tem a mesma fronteira que A. O conjunto complementar de A é definido pela condição $|z - 2 - 3i| \leq 1 \vee |z - 2 - 3i| \geq 2$.*

Exercícios resolvidos

1. Indique o domínio das seguintes funções complexas de variável complexa:

(a) $f(z) = \dfrac{z}{z+3i}$; (b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+2}$;

(c) $f(z) = \dfrac{x}{x^2+y^2} + ixy$; (d) $f(z) = \ln x + (x-2y)\, i$.

2. Determine as funções parte real e parte imaginária das seguintes funções complexas de variável complexa:

   (a) $f(z) = 2iz + 6\overline{z}$; (b) $g(z) = |z|^2$; (c) $h(z) = z/\overline{z}$.

   Calcule $f(1+3i)$, $g(-3i)$ e $h(2-2i)$.

3. Determine o conjunto dos números complexos que satisfazem as seguintes condições:

   (a) $\mathrm{Re}(\overline{z}+1) = 4$; (b) $|z+1| - |z-1| = 4$.

4. Averigúe se os conjuntos de números complexos, caracterizados pelas seguintes condições, são abertos ou fechados, conexos ou não conexos:

   (a) $|z| < 2$; (b) $\mathrm{Re}(\overline{z}+1) \geq 4$; (c) $|\mathrm{Im}\, z| > 1 \wedge |z| < 5$.

Propostas de resolução

1.

   (a) $D = \{z \in \mathbb{C} : z + 3i \neq 0\} = \{z \in \mathbb{C} : z \neq -3i\} = \mathbb{C} \setminus \{-3i\}$.

   (b) O domínio desta função é $D = \left\{z \in \mathbb{C} : z^2 + 2 \neq 0\right\}$.

   Dado que

$$\begin{aligned} & z^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -2 = 2cis(-\pi) \\ \Leftrightarrow\quad & z = \sqrt{2cis(-\pi)} = \sqrt{2}cis\left(\frac{-\pi}{2} + k\pi\right), \quad k = 0, 1 \\ \Leftrightarrow\quad & z_0 = \sqrt{2}cis\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -\sqrt{2}i \vee z_1 = \sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}i, \end{aligned}$$

   temos $D = \mathbb{C} \setminus \left\{-\sqrt{2}i, \sqrt{2}i\right\}$.

   (c) O domínio desta função é $D = \left\{z = x + iy \in \mathbb{C} : x^2 + y^2 \neq 0\right\}$.

   Mas

$$x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

   Logo, $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

   (d) Recordemos que o domínio da função real de variável real logaritmo neperiano, $\ln x$, é o conjunto $\mathbb{R}^+$. Logo, o conjunto dos pontos para os quais faz sentido calcular $\ln x + (x-2y)\, i$ é

$$D = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x > 0\},$$

   ou seja, é o conjunto dos pontos do semiplano direito aberto do plano complexo.

2. Seja $z = x + iy$.

(a) Temos $f(z) = 2i\,(x + yi) + 6\,(x - yi) = -2y + 6x + (2x - 6y)i$. Logo, $u(x, y) = -2y + 6x$ e $v(x, y) = 2x - 6y$. Como

$$u(1, 3) = -6 + 6 = 0 \quad \text{e} \quad v(x, y) = 2 - 18 = -16,$$

temos $f(1 + 3i) = 0 - 16i = -16i$. Alternativamente, podemos calcular directamente

$$f(1 + 3i) = 2i\,(1 + 3i) + 6(1 - 3i) = -6 + 6 + (2 - 18)i = -16i.$$

(b) $g(z) = |x + iy|^2 = x^2 + y^2$.
Então, $u(x, y) = x^2 + y^2$ e $v(x, y) = 0$ e

$$g(-3i) = u(0, -3) + iv(0, -3) = 0^2 + (-3)^2 + i0 = 9.$$

(c) $h(z) = \dfrac{x + iy}{x - iy} = \dfrac{(x + iy)\,(x + iy)}{(x - iy)\,(x + iy)} = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}i.$
Logo, $u(x, y) = \left(x^2 - y^2\right) / \left(x^2 + y^2\right)$, $v(x, y) = 2xy/\left(x^2 + y^2\right)$ e

$$\begin{aligned} h(2 - 2i) &= u(2, -2) + iv(2, -2) = \frac{2^2 - (-2)^2}{2^2 + (-2)^2} + \frac{2 \cdot 2\,(-2)}{2^2 + (-2)^2}i \\ &= 0 + (-1)\,i = -i. \end{aligned}$$

3. Seja $z = x + yi$.

(a) Dado que

$$\mathrm{Re}(\overline{z} + 1) = 4 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(x - yi + 1) = 4 \Leftrightarrow x + 1 = 4 \Leftrightarrow x = 3,$$

a condição $\mathrm{Re}(\overline{z} + 1) = 4$ representa o conjunto dos pontos do plano complexo na recta vertical de equação $x = 3$.

(b) Temos

$$\begin{aligned} & |z + 1| - |z - 1| = 4 \Leftrightarrow |x + 1 + yi| - |x - 1 + yi| = 4 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} - \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = 4 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} = 4 + \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \\ \Leftrightarrow\ & (x + 1)^2 + y^2 = 16 + (x - 1)^2 + y^2 + 8\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 2x + 1 = 16 + x^2 - 2x + 1 + 8\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \\ \Leftrightarrow\ & x - 4 = 2\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \\ \Leftrightarrow\ & (x - 4)^2 = 4\left[(x - 1)^2 + y^2\right] \wedge x - 4 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 8x + 16 = 4x^2 - 8x + 4 + 4y^2 \wedge x \geq 4 \\ \Leftrightarrow\ & 3x^2 + 4y^2 = 12 \wedge x \geq 4 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \wedge x \geq 4. \end{aligned}$$

Atendendo a que a elipse $x^2/4 + y^2/3 = 1$ não intersecta o semiplano direito $x \geq 4$, podemos concluir que o conjunto dos números complexos que satisfazem a condição $|z+1| - |z-1| = 4$ é vazio.

4.

(a) A condição $|z| < 2$ representa o interior do círculo de centro em $z = 0$ e raio $r = 2$. Trata-se de um conjunto aberto e conexo.

(b) Do exercício 3(a) concluímos que

$$\mathrm{Re}(\overline{z} + 1) \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 3.$$

O conjunto de pontos que verifica esta condição é um semiplano fechado e conexo.

(c) Se $z = x + iy$ então

$$\begin{aligned} |\mathrm{Im}\, z| > 1 \wedge |z| \leq 5 \quad &\Leftrightarrow |y| > 1 \wedge |z| < 5 \\ &\Leftrightarrow (y < -1 \vee y > 1) \wedge |z| < 5 \end{aligned}$$

Trata-se da intersecção de cada semiplano, $y < -1$ ou $y > 1$, com o interior do círculo de centro em $z = 0$ e raio $r = 5$. Logo, o conjunto dos pontos caracterizados pela condição $|\mathrm{Im}\, z| > 1 \wedge |z| < 5$ é um conjunto aberto e não conexo.

1.2 Limites e continuidade

As definições de limite e continuidade de uma função complexa de variável complexa num ponto são análogas às conhecidas no cálculo real.

Consideremos uma função $f : D \to \mathbb{C}$ definida em $D \subset \mathbb{C}$. Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que f está definida numa certa vizinhança de z_0 (não necessariamente no ponto z_0).

Definição 1 *Diz-se que f tem **limite L no ponto** $z = z_0$ (ou que o número complexo L é o **limite de f quando z se aproxima do ponto $\mathbf{z}_0$**), e denota-se*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L,$$

se para qualquer $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $|f(z) - L| < \delta$ sempre que $0 < |z - z_0| < \varepsilon$. Se existe o limite de f no ponto z_0 então este limite é único.

Proposição 1 ***Propriedades operacionais do limite*** *Sejam f e g funções complexas de variável complexa. Se existem os limites de f e g no ponto z_0, são válidas as seguintes igualdades:*

(a) $\lim\limits_{z\to z_0}(f(z)\pm g(z)) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \pm \lim\limits_{z\to z_0} g(z)$;

(b) $\lim\limits_{z\to z_0}(f(z)\cdot g(z)) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \cdot \lim\limits_{z\to z_0} g(z)$;

(c) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)/g(z) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z)/\lim\limits_{z\to z_0} g(z)$, *desde que* $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)\neq 0$.

Proposição 1 *Sejam $f : D \to \mathbb{C}$ uma função complexa de variável complexa e $z_0 = x_0 + y_0 i$ tal que f está definida numa certa vizinhança de z_0. Sendo $u(x, y)$ e $v(x, y)$ as partes real e imaginária de f demonstra-se (exercício 1) que, para $z = x + yi$,*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) + i \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y), \tag{1.1}$$

onde os dois últimos limites são de funções reais de duas variáveis reais.

Definição 2 *Sejam $f : D \to \mathbb{C}$ uma função complexa de variável complexa e $z_0 \in D$ tal que f está definida numa certa vizinhança de z_0. A função f diz-se **contínua em $\mathbf{z}_0$** se*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

*A função f diz-se **contínua** se for contínua em todos os pontos do seu domínio D.*

Nota 2 *Resulta da proposição anterior que a soma $f + g$, a diferença $f - g$ e o produto fg de funções contínuas em z_0 é ainda uma função contínua em z_0. Se $g(z_0) \neq 0$ o mesmo se verifica para o quociente f/g.*

Além disso, podemos ainda concluir que f é contínua em $z_0 = x_0 + y_0 i$ se e só se as funções reais de variáveis reais u e v são contínuas em (x_0, y_0). Deste modo, o estudo da continuidade de funções complexas reduz-se ao estudo da continuidade de funções reais de variáveis reais.

Exercícios resolvidos

1. Seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função complexa de variável complexa,

$$f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i,$$

   e seja z_0 um ponto interior a D. Mostre que, para $z = x + yi$ e $z_0 = x_0 + y_0 i$, se tem

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) + i \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y).$$

2. Calcule os seguintes limites:

   (a) $\lim\limits_{z\to -1+2i}\left(3xy + i(x - y^2)\right)$; (b) $\lim\limits_{z\to 1+i} \dfrac{z^2-5}{iz}$; (c) $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{z\left(z^2+1\right)}{z-i}$.

3. Mostre, recorrendo à definição, que $\lim_{z\to -i} 1/z = i$.

4. Verifique que a função $f(z) = \overline{z}$ é contínua em $\mathbb{C}$.

5. Mostre que a função $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2}{|z^2|} & \text{se } z \neq 0 \\ 0 & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

não é contínua em $z = 0$.

Propostas de resolução

1. Assumamos, em primeiro lugar, que existem os limites

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0.$$

Para cada $\delta > 0$ existem, então, números positivos ε_1 e ε_2 tais que

$$|u(x,y) - u_0| < \frac{\delta}{2} \text{ sempre que } 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \varepsilon_1 \tag{1.2}$$

e

$$|v(x,y) - v_0| < \frac{\delta}{2} \text{ sempre que } 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \varepsilon_2. \tag{1.3}$$

Seja $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Atendendo a que

$$\begin{aligned} |u(x,y) + v(x,y)i - (u_0 + v_0 i)| &= |u(x,y) - u_0 + (v(x,y) - v_0)\, i| \\ &\leq |u(x,y) - u_0| + |v(x,y) - v_0| \end{aligned}$$

e

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = |(x-x_0) + (y-y_0)\, i| = |(x+yi) - (x_0 + y_0 i)|$$

segue de (1.2) e (1.3) que

$$|u(x,y) + v(x,y)i - (u_0 + v_0 i)| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

sempre que $0 < |(x+yi) - (x_0 + y_0 i)| < \varepsilon$. Concluímos, então, que existe o limite $\lim_{z\to z_0} f(z) = u_0 + iv_0$.

Reciprocamente, suponhamos que existe o limite $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ com $w_0 = u_0 + iv_0$. Para cada $\delta > 0$ sabemos, então, que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$|u(x,y) + v(x,y)i - (u_0 + v_0 i)| < \delta \tag{1.4}$$

sempre que $0 < |(x + yi) - (x_0 + y_0 i)| < \varepsilon$. Dado que

$$\begin{aligned} |u(x,y) - u_0| &\leq |u(x,y) - u_0 + (v(x,y) - v_0)\, i| \\ &= |u(x,y) + v(x,y)i - (u_0 + v_0 i)|\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |v(x,y) - v_0| &\leq |u(x,y) - u_0 + (v(x,y) - v_0)\, i| \\ &= |u(x,y) + v(x,y)i - (u_0 + v_0 i)| \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |(x + yi) - (x_0 + y_0 i)| &= |(x - x_0) + (y - y_0)\, i| \\ &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \end{aligned}$$

segue de (1.4) que

$$|u(x,y) - u_0| < \delta \quad \text{e} \quad |v(x,y) - v_0| < \delta,$$

sempre que $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon$. Isto mostra que existem os limites $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0$ e $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$.

2.

(a) Comecemos por observar que $u(x,y) = 3xy$ e $v(x,y) = x - y^2$. Atendendo ao exercício 1,

$$\begin{aligned} \lim_{z\to -1+2i} \left(3xy + i(x - y^2)\right) &= \lim_{\substack{x\to -1\\ y\to 2}} 3xy + i \lim_{\substack{x\to -1\\ y\to 2}} (x - y^2) \\ &= \left(3\,(-1)\,2 + i\left(-1 - 2^2\right)\right) = -6 - 5i. \end{aligned}$$

(b) Recorrendo às propriedades operacionais dos limites,

$$\lim_{z\to 1+i} \frac{z^2 - 5}{iz} = \lim_{z\to 1+i} \frac{(1+i)^2 - 5}{i \cdot (1+i)} = \frac{-5 + 2i}{-1 + i} = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} i.$$

(c) Substituindo z por i, obtemos uma indeterminação do tipo $0/0$. No entanto, se observarmos que $z^2 + 1 = (z - i)\,(z + i)$, podemos calcular facilmente o limite:

$$\lim_{z\to i} \frac{z\left(z^2 + 1\right)}{z - i} = \lim_{z\to i} \frac{z\,(z + i)\,(z - i)}{z - i} = \lim_{z\to i} z\,(z + i) = -2.$$

3. É preciso que mostrar que dado $\delta > 0$ existe um $\varepsilon > 0$ tal que

$$\left|\frac{1}{z} - i\right| < \delta \quad \text{sempre que } |z - (-i)| = |z + i| < \varepsilon.$$

Escrevendo $|1/z - i|$ em função de $|z+i|$, e usando as propriedades do módulo, obtemos

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{z} - i\right| &= \left|\frac{1-iz}{z}\right| = \left|\frac{-i(z+i)}{z}\right| = \left|(z+i)\frac{-i}{z}\right| \\ &= |z+i|\left|\frac{-i}{z}\right| = |z+i|\frac{1}{|z|}. \end{aligned}$$

Dado que $z \to -i$, podemos supor que $|z| > 1/2$. Como tal,

$$\left|\frac{1}{z} - i\right| = |z+i|\frac{1}{|z|} < 2|z+i|.$$

Mas para que $|z| > 1/2$ é necessário que $|z+i| < \varepsilon = 1/2$. De facto,

$$\begin{aligned} |z| &= |z+i-i| = |(-i)+(z+i)| \geq |-i| - |z+i| \\ &= 1 - |z+i| > 1 - 1/2 = 1/2. \end{aligned}$$

Escolhendo $\varepsilon = \min\{\delta/2, 1/2\}$, sempre que $|z+i| < \varepsilon$, garantimos que

$$\left|\frac{1}{z} - i\right| < 2|z+i| < \delta.$$

4. A função complexa de variável complexa $f(z) = \overline{z} = x - yi$ tem por domínio o conjunto $\mathbb{C}$. Dado $z_0 \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{z\to z_0} \overline{z} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} (x - yi) = x_0 - y_0 i = \overline{z_0}.$$

Logo, f é contínua.

5. Analisemos se $\lim_{z\to 0} f(z) = f(0)$. Temos $f(0) = 0$ e

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 0} f(z) &= \lim_{z\to 0} \frac{z^2}{|z^2|} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 - y^2 + 2xyi}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + i \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Relativamente ao 1^o dos limites, calculemos os respectivos limites sucessivos (ou iterados):

$$\begin{aligned} \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) &= \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = \lim_{y\to 0}(-1) = -1 \\ \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{y\to 0} 1 = 1. \end{aligned}$$

A obtenção de dois limites diferentes permite concluir que não existe o $\lim_{x\to 0, y\to 0} \left(x^2 - y^2\right) / \left(x^2 + y^2\right)$. Como tal, não existe o $\lim_{z\to 0} f(z)$ e, logo, a função f não é contínua no ponto $z = 0$.

1.3 Derivação e analiticidade

Definição 3 *Seja f uma função complexa de variável complexa definida num conjunto aberto D e seja $z_0 \in D$. Define-se* ***a derivada de*** $\mathbf{f}$ ***em*** $\mathbf{z}_0$*, e denota-se por $f'(z_0)$ (ou df/dz ou dw/dz) como sendo o limite*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

(caso exista). Se f tem derivada em z_0 (i.e., se este limite existe) então f diz-se ***diferenciável em*** $\mathbf{z}_0$*. Escrevendo $\Delta z = z - z_0$, a definição é equivalente à expressão*

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Exemplo 6 *Seja $f(z) = 2x + 3yi$ de domínio $\mathbb{C}$. Vejamos que f não é diferenciável em nenhum ponto $z_0 = x_0 + iy_0$. Calculemos o limite respectivo, considerando $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, onde $\Delta x = x - x_0$ e $\Delta y = y - y_0$:*

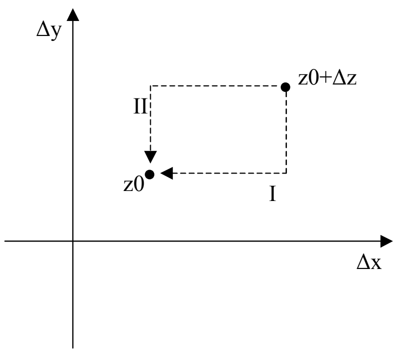
$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2(x_0 + \Delta x) + 3(y_0 + \Delta y)i - (2x_0 + 3y_0 i)}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2\Delta x + 3i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}. \end{aligned}$$

Suponhamos que $\Delta z \to 0$ ao longo de uma recta horizontal (caminho I). Então $\Delta y = 0$ e o valor do limite (direccional) é

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{2\Delta x + 3i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2.$$

Por outro lado, se escolhermos outra direcção, por exemplo que $\Delta z \to 0$ ao longo de uma recta vertical (caminho II), temos $\Delta x = 0$ e o valor do limite (direccional) é

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{2\Delta x + 3i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{3i\Delta y}{i\Delta y} = 3.$$



A obtenção de dois limites direccionais diferentes permite concluir que não existe o limite pretendido.

Proposição 2 *Se a função $f : D \to \mathbb{C}$ é diferenciável em z_0 então f é contínua em z_0. Notemos que, tal como no cálculo real, o recíproco não é verdadeiro: existem funções contínuas num determinado ponto do seu domínio que não têm derivada nesse ponto.*

A análise complexa estuda essencialmente as funções complexas de variável complexa que são diferenciáveis nalguma região do seu domínio.

Definição 4 *Seja f uma função complexa de variável complexa definida num conjunto aberto D e seja $z_0 \in D$. A função f diz-se* ***analítica em*** *z_0 se é diferenciável em z_0 e numa certa vizinhança de z_0. Se f é analítica em todos os pontos de D então diz-se* ***analítica*** *(**regular** ou **holomorfa**)* ***em*** *D.*

Proposição 3 *Seja $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e sejam f e g funções analíticas em D. São válidas as seguintes propriedades:*

(a) *$af(z) + bg(z)$ é analítica em D e*

$$[af(z) + bg(z)]' = af'(z) + bg'(z),$$

para quaisquer números complexos a e b ***(linearidade da derivada)****;*

(b) *$f(z)g(z)$ é analítica em D e*

$$[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z);$$

(c) *Se $g(z) \neq 0$ então $f(z)/g(z)$ é analítica em D e*

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)};$$

(d) *Se $n \in \mathbb{N}$ então $f^n(z)$ é analítica em D e*

$$[f^n(z)]' = nf^{n-1}(z)f'(z).$$

- Sabemos, por (d), que as potências inteiras não negativas 1, z, z^2, z^3,... são analíticas em $\mathbb{C}$. Podemos então concluir, por (a), que toda a função polinomial $f(z) = c_n z^n + c_{n-1}z^{n-1} + ... + c_2 z^2 + c_1 z + c_0$ é inteira e a sua derivada é

  $$f'(z) = nc_n z^{n-1} + (n-1)c_{n-1}z^{n-2} + ... + 2c_2 z + c_1.$$

  Quanto ao quociente de duas funções polinomiais

  $$f(z) = \frac{a_n z^n + ... + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{b_m z^m + ... + b_2 z^2 + b_1 z + b_0},$$

  designado por **função racional**, é analítica em todo o seu domínio, ou seja, no conjunto aberto $\left\{z \in \mathbb{C} : b_m z^m + ... + b_2 z^2 + b_1 z + b_0 \neq 0\right\}$.

Proposição 4 ***Regra da derivação da função composta*** *(ou* ***regra da cadeia****) Sejam $f : A \to \mathbb{C}$ e $g : B \to \mathbb{C}$ funções analíticas nos abertos A e B, respectivamente, tais que $f(A) \subseteq B$. Então a função $g \circ f : A \to \mathbb{C}$ definida por $(g \circ f)(z) = g(f(z))$ é analítica em A e*

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z).$$

Exercícios resolvidos

1. Calcule as derivadas das seguintes funções:
   (a) $f(z) = 2z^4 - z^3 + 10iz$; (b) $g(z) = (2z+3)^4$;
   (c) $h(z) = \dfrac{1+(2-i)z}{2z+9}$; (d) $j(z) = z + 1/z$.

2. Determine o conjunto dos pontos do plano complexo onde a função $f(z) = 1/\left[\left(z^3-1\right)\left(z^2+2\right)\right]$ é analítica.

3. Averigúe se a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2+y^2} & \text{se } z \neq 0 \\ 0 & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

   é diferenciável na origem.

Propostas de resolução

1. As funções f e g são polinomiais e logo, o seu domínio é $\mathbb{C}$. A função h é uma função racional, cujo domínio é o conjunto dos pontos tais que $2z + 9 \neq 0$, ou seja, $\mathbb{C}\setminus\{-9/2\}$. Da mesma forma, a função j (designada usualmente por **função de Joukowski**) é também racional e tem por domínio o conjunto $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Mais, estas funções são diferenciáveis nos seus domínios. Para obter a expressão da derivada podemos simplesmente usar as regras de derivação:

   (a) $f'(z) = 2\left(z^4\right)' - \left(z^3\right)' + 10i\,(z)' = 8z^3 - 3z^2 + 10i, \ \ \forall z \in \mathbb{C}$;

   (b) $g'(z) = \left[(2z+3)^4\right]' = 4\,(2z+3)^3\,2 = 8\,(2z+3)^3, \ \ \forall z \in \mathbb{C}$;

   (c) $$h'(z) = \frac{(1+(2-i)z)'\,(2z+9) - (1+(2-i)z)\,(2z+9)'}{(2z+9)^2}$$
   $$= \frac{(2-i)(2z+9) - (1+(2-i)z)\cdot 2}{(2z+9)^2} = \frac{16-9i}{(2z+9)^2}, \ \ \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{-9/2\};$$

   (d) $j'(z) = \left[z + z^{-1}\right]' = 1 + (-1)z^{-2} = 1 - \dfrac{1}{z^2}, \ \ \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

2. A função $f(z) = 1/\left[\left(z^3-1\right)\left(z^2+2\right)\right]$ é racional e tem por domínio o conjunto aberto

$$D = \left\{z \in \mathbb{C} : z^3 - 1 \neq 0 \wedge z^2 + 2 \neq 0\right\}.$$

Conforme visto no exemplo 22.1 da secção 1.2, a equação $z^3 = 1$ tem por raízes os pontos $z_0 = 1$, $z_1 = -1/2 + \sqrt{3}/2i$ e $z_2 = -1/2 - \sqrt{3}/2i$. Quanto à equação $z^2 = -2 = 2cis(-\pi)$, as suas raízes são dadas pela expressão

$$z = \sqrt{2}cis\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{2}\right), \quad \text{para } k = 0, 1,$$

ou seja,

$$z_0 = \sqrt{2}cis\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{2}i \vee z_1 = \sqrt{2}cis\left(-\frac{\pi}{2} + \pi\right) = \sqrt{2}i.$$

Concluímos, assim, que

$$D = \mathbb{C}\backslash\left\{1, -1/2 + \sqrt{3}/2i, -1/2 - \sqrt{3}/2i, -\sqrt{2}i, \sqrt{2}i\right\}.$$

A função f é analítica em D e, para obter a expressão da derivada podemos simplesmente usar as regras de derivação,

$$\begin{aligned} f'(z) &= \left[\left(z^3-1\right)^{-1}\left(z^2+2\right)^{-1}\right]' \\ &= (-1)\left(z^3-1\right)^{-2}3z^2\left(z^2+2\right)^{-1} + \left(z^3-1\right)^{-1}(-1)\left(z^2+2\right)^{-2}2z \\ &= -\frac{3z^2}{\left(z^3-1\right)^2\left(z^2+2\right)} - \frac{2z}{\left(z^3-1\right)\left(z^2+2\right)^2}. \end{aligned}$$

3. Calculando a derivada no ponto $z_0 = 0$ com $\Delta z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z} &= \lim_{\rho\to 0}\frac{\dfrac{\rho^3\cos^3\theta\,(1+i) - \rho^3\sin^3\theta\,(1-i)}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta} - 0}{\rho(\cos\theta + i\sin\theta)} \\ &= \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^3\left[\cos^3\theta\,(1+i) - \sin^3\theta\,(1-i)\right]}{\rho^3(\cos\theta + i\sin\theta)} \\ &= \frac{\cos^3\theta - \sin^3\theta + i\left(\cos^3\theta + \sin^3\theta\right)}{\cos\theta + i\sin\theta}, \end{aligned}$$

que depende do ângulo θ tomado. Concluímos então que f não é diferenciável na origem.

1.4 Equações de Cauchy-Riemann

Teorema 1 ***Cauchy-Riemann*** *Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa de variável complexa definida por $f(z) = u(x,y) + v(x,y)i$ num conjunto aberto D e $z_0 = x_0 + y_0 i \in D$. A derivada $f'(z_0)$ existe (ou seja, f é diferenciável em z_0) se e só se as funções u e v são contínuas e têm derivadas de 1^a ordem contínuas numa vizinhança de (x_0, y_0) e, no ponto (x_0, y_0), satisfazem as equações de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0).$$

Assim, se as derivadas parciais de 1ª ordem das funções u e v existem, são contínuas e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em D então f é analítica em D.

Exemplo 7 *Consideremos a função $f(z) = 2x + 3yi$. Vimos no exemplo 13.1, que f não é diferenciável em nenhum ponto do seu domínio $\mathbb{C}$. De facto, as equações de Cauchy-Riemann não são válidas em nenhum ponto (x, y):*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2 \neq 3 = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \textit{embora} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Exemplo 8 *Consideremos a função $f(z) = 2x^2 + y + (y^2 - x)i$ definida em $\mathbb{C}$. Temos $u(x, y) = 2x^2 + y$ e $v(x, y) = y^2 - x$, donde*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1 = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Verificamos que as funções u e v são contínuas e têm derivadas contínuas em todos os pontos. Pelo teorema de Cauchy-Riemann, f é diferenciável em todos os pontos em que as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas, ou seja, em pontos (x, y) tais que

$$4x = 2y \Leftrightarrow y = 2x$$

Logo f é diferenciável nos pontos da recta $y = 2x$. No entanto, dado que nenhum ponto desta recta tem uma vizinhança na qual as equações de Cauchy-Riemann sejam válidas, f não é analítica em nenhum ponto do seu domínio $\mathbb{C}$.

Exemplo 9 *Consideremos a função $f(z) = \overline{z}/\left|z\right|^2$ definida no conjunto aberto $D = \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Temos*

$$f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i,$$

logo,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Portanto, as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Pelo teorema de Cauchy-Riemann, f é analítica em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Exercícios resolvidos

1. Verifique as equações de Cauchy-Riemann para a função $f(z) = z^2 + 3z + 2$.

2. Considere a função $f(z) = x^2 - y^2 i$. Determine os pontos onde f é diferenciável e mostre que f não é analítica em nenhum ponto do seu domínio. Determine ainda a expressão da derivada nos pontos em que ela existe.

3. Determine os subconjuntos do plano complexo onde as seguintes funções são analíticas e calcule as suas derivadas:
   (a) $f(z) = x^3 - i(1-y)^3$; (b) $f(z) = z - \overline{z}$;
   (c) $f(z) = e^y(\cos x + i \sin x)$; (d) $f(z) = x^2 + y^2 i$.

4. Prove que as funções $f(z) = |z|$ e $g(z) = \overline{z}$ não são analíticas em nenhum ponto do seu domínio.

5. Mostre que as equações de Cauchy-Riemann, escritas em coordenadas polares, são dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Propostas de resolução

1. A função $f(z) = z^2 + 3z + 2$ tem parte real $u(x,y) = x^2 - y^2 + 3x + 2$ e parte imaginária $v(x,y) = 2xy + 3y$. Como

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 3, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y,$$

as equações de Cauchy-Riemann são válidas em todos os pontos do domínio $\mathbb{C}$.

2. Temos $u(x,y) = x^2$ e $v(x,y) = -y^2$. Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2y \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Verificamos que as equações de Cauchy-Riemann são válidas em pontos (x,y) tais que $2x = -2y$, ou seja, na recta de equação $y = -x$. Como as funções u, v, $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$ e $\partial v/\partial y$ são contínuas em todos os pontos, concluímos, pelo teorema de Cauchy-Riemann, que f é diferenciável nos pontos da recta $y = -x$ e a derivada é dada por

$$f'(z) = 2x + 0i = 2x = -2y.$$

No entanto, dado qualquer ponto desta recta, não existe uma vizinhança desse ponto na qual as equações de Cauchy-Riemann sejam válidas. Logo, f não é analítica em nenhum ponto do seu domínio $\mathbb{C}$.

3.

   (a) Pretendemos determinar os pontos em que f é diferenciável. Para esta função temos $u(x,y) = x^3$ e $v(x,y) = -(1-y)^3$. Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2, \; \frac{\partial v}{\partial y} = 3(1-y)^2, \; \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ e } \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

As funções u e v e as suas derivadas parciais de 1^a ordem são contínuas em todos os pontos do plano. Então, pelo teorema de Cauchy-Riemann, f é diferenciável em todos os pontos em que as equações de Cauchy-Riemann sejam satisfeitas, isto é, quando

$$3x^2 = 3(1-y)^2 \Leftrightarrow x = 1-y \vee x = -1+y,$$

já que $\partial u/\partial y = 0 = -\partial v/\partial x$ é verificado para qualquer (x, y). As condições $x = 1-y$ e $x = -1+y$ definem analiticamente rectas. A função f é diferenciável em pontos $z = x + yi$ que pertencem a uma das rectas $x = 1-y$ ou $x = -1+y$. No entanto, dado qualquer ponto destas rectas, não existe uma vizinhança desse ponto na qual as equações de Cauchy-Riemann sejam válidas. Concluímos então que f não é analítica em nenhum ponto do seu domínio $\mathbb{C}$. A derivada de f nos pontos das rectas $x = 1-y$ ou $x = -1+y$ é dada por

$$f'(z) = 3x^2 + 0i = 3x^2 = 3(1-y)^2.$$

(b) À função $f(z) = z - \overline{z}$ corresponde $u(x, y) = 0$ e $v(x, y) = 2y$. Temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 = \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Verificamos que as equações de Cauchy-Riemann não são válidas qualquer que seja o ponto (x, y). Pelo teorema de Cauchy-Riemann concluímos que f não é analítica (nem diferenciável) em nenhum ponto do seu domínio $\mathbb{C}$.

(c) À função f corresponde $u(x, y) = e^y \cos x$ e $v(x, y) = e^y \sin x$. Temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -e^y \sin x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^y \sin x \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= e^y \cos x \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^y \cos x. \end{aligned}$$

Verificamos que as equações de Cauchy-Riemann são válidas em pontos (x, y) tais que $-e^y \sin x = e^y \sin x$ e $e^y \cos x = -e^y \cos x$, ou seja, tais que $\sin x = 0$ e $\cos x = 0$ (notemos que $e^y \neq 0, \forall y \in \mathbb{R}$). Não e xiste qualquer valor real x tal que $\sin x = \cos x = 0$, como tal nenhum ponto do domínio $\mathbb{C}$ de f verifica as equações de Cauchy-Riemann. Pelo teorema de Cauchy-Riemann, f não é analítica (nem diferenciável) em nenhum ponto do seu domínio.

(d) À função $f(z) = x^2 + y^2 i$ corresponde $u(x, y) = x^2$ e $v(x, y) = y^2$. Temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Verificamos que as equações de Cauchy-Riemann são válidas em pontos (x, y) tais que $2x = 2y$, ou seja, na recta de equação $y = x$. Como as funções u, v, $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$ e $\partial v/\partial y$ são contínuas em todos os pontos, pelo teorema de Cauchy-Riemann, f é diferenciável nos pontos da recta $y = x$. A derivada de f nos pontos da recta $y = x$ é dada por

$$f'(z) = 2x + 0i = 2x = 2y.$$

No entanto, dado qualquer ponto desta recta, não existe uma vi-zinhança desse ponto na qual as equações de Cauchy-Riemann sejam válidas. Concluímos então que f não é analítica em nenhum ponto do seu domínio $\mathbb{C}$.

4. À função $f(z) = |z|$ corresponde $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $v(x, y) = 0$. Temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Verificamos que as equações de Cauchy-Riemann são válidas em pontos (x, y) tais que $x/\sqrt{x^2 + y^2} = 0$ e $y/\sqrt{x^2 + y^2} = 0$, ou seja, no ponto $(0, 0)$. Como as funções u e v e as suas derivadas parciais de 1^a ordem são contínuas em todos os pontos, concluímos pelo teorema de Cauchy-Riemann que f é diferenciável no ponto $z = 0$. A derivada de f neste ponto é dada por

$$f'(0) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)_{(0,0)} = \left(-i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)_{(0,0)} = 0,$$

No entanto, não existe uma vizinhança de $z = 0$ na qual as equações de Cauchy-Riemann sejam válidas. Logo, f não é analítica em nenhum ponto do seu domínio $\mathbb{C}$.

À função $g(z) = \overline{z}$ corresponde $u(x, y) = x$ e $v(x, y) = -y$. Temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Verificamos que as equações de Cauchy-Riemann não são válidas, qualquer que seja o ponto (x, y). Pelo teorema de Cauchy-Riemann, concluímos que f não é analítica (nem diferenciável) em nenhum ponto do seu domínio $\mathbb{C}$.

5. Temos a seguinte relação entre as coordenadas rectangulares e polares:

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r\sin\theta.$$

Como tal, num ponto $z_0 = x_0 + y_0 i = r_0\cos\theta_0 + ir_0\sin\theta_0 = r_0 cis\theta_0$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial r}(r_0, \theta_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\cos\theta_0 + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\sin\theta_0, \\
\frac{\partial v}{\partial \theta}(r_0, \theta_0) &= \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)(-r_0\sin\theta_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)r_0\cos\theta_0.
\end{aligned}$$

Atendendo às equações de Cauchy-Riemann em coordenadas rectangulares,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r}(r_0,\theta_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\cos\theta_0 - \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\sin\theta_0 \\ &= \frac{1}{r_0}\left(\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)r_0\cos\theta_0 - \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)r_0\sin\theta_0\right) \\ &= \frac{1}{r_0}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta}(r_0,\theta_0)\,.\end{aligned}$$

De modo análogo, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \theta}(r_0,\theta_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\left(-r_0\sin\theta_0\right) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)r_0\cos\theta_0, \\ \frac{\partial v}{\partial r}(r_0,\theta_0) &= \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\cos\theta_0 + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\sin\theta_0\end{aligned}$$

donde, atendendo novamente às equações de Cauchy-Riemann em coordenadas rectangulares,

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial r}(r_0,\theta_0) &= -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\cos\theta_0 + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\sin\theta_0 \\ &= -\frac{1}{r_0}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\left(-r_0\right)\cos\theta_0 + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\left(-r_0\right)\sin\theta_0\right) \\ &= -\frac{1}{r_0}\frac{\partial u}{\partial \theta}(r_0,\theta_0)\,.\end{aligned}$$

1.5 Funções harmónicas

Definição 5 *Dada uma função $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$, definida num subconjunto aberto D de $\mathbb{R}^2$, com derivadas parciais de 2ª ordem contínuas, designa-se por* ***Laplaciano de*** *u a expressão*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)$$

e denota-se por $\bigtriangledown^2 u(x,y)$. A função u diz-se ***harmónica*** *se satisfaz a equação $\bigtriangledown^2 u\,(x,y) = 0$, para todo o $(x,y) \in D$, designada por* ***equação de Laplace****.*

Temos então o seguinte resultado:

Proposição 5 *Seja $f(z) = u(x,y) + v(x,y)i$ uma função complexa de variável complexa. Se f é analítica num conjunto aberto D então u e v são funções harmónicas em D.*

- Verificamos então que as partes real e imaginária de uma função analítica verificam a equação de Laplace. Esta ligação entre funções analíticas e a equação de Laplace reforça a importância das funções de variável complexa e abre caminho para numerosas aplicações da matemática.

Definição 6 *Se $f = u + iv$ é uma função analítica definida num conjunto aberto D, então as funções u e v são designadas por* ***harmónicas conjugadas*** *em D.*

Exemplo 2 *Consideremos a função polinomial $f(z) = z^2$. Trata-se de uma função analítica em $\mathbb{C}$ a que corresponde $u(x,y) = x^2 - y^2$ e $v(x,y) = 2xy$. Temos*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y \quad e \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x,$$

pelo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 2 + (-2) = 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Isto mostra que u e v são funções harmónicas em $\mathbb{C}$. Além disso, são conjugadas harmónicas por constituírem as partes real e imaginária, respectivamente, da função analítica $f(z) = z^2$.

Proposição 6 *Se u é uma função harmónica num conjunto aberto D e $z_0 \in D$, então existe uma vizinhança de z_0 na qual $u = \mathrm{Re}(f)$. Por outras palavras, existe uma função harmónica v definida em D tal que a função definida por $f(z) = u(x,y) + v(x,y)i$ é analítica em D.*

Exemplo 3 *Seja $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$. Trata-se de uma função harmónica em todos os pontos do plano*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 3y^2) = 6x \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}(-6xy) = -6x. \end{aligned}$$

Pela proposição 29, existe uma função f analítica em $\mathbb{C}$ (trata-se de uma função inteira) tal que $u = \mathrm{Re}(f)$. Determinemos então a função f. Sabemos que f é tal que $f(z) = \left(x^3 - 3xy^2\right) + v(x,y)i$, onde a função $v(x,y)$ está por determinar. Pelas equações de Cauchy-Riemann, temos

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy$$

o que implica $v(x,y) = 3x^2y + c(y)$. Por outro lado,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$$

ou seja, $\partial\left(3x^2y + c(y)\right)/\partial y = 3x^2 - 3y^2$. Então,

$$\begin{aligned} 3x^2 + c'(y) = 3x^2 - 3y^2 \quad &\Rightarrow c'(y) = -3y^2 \\ &\Rightarrow c(y) = -y^3 + K, \quad \text{para qualquer } K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Obtemos $v(x,y) = 3x^2y - y^3 + K$ e, como tal, para $z = x + yi$,

$$f(z) = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3 + K)i.$$

O exemplo apresentado mostra que a função harmónica conjugada de uma dada função harmónica u está univocamente determinada a menos de uma constante aditiva real.

Exercícios resolvidos

1. Considere a função $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$. Encontre uma função conjugada harmónica v que verifique $v(0,0) = 2$.

2. Determine os conjuntos nos quais as seguintes funções são harmónicas:

   (a) $u(x,y) = \mathrm{Re}(z + 1/z)$; (b) $u(x,y) = \dfrac{-y-1}{x^2 + (y+1)^2}$.

3. Encontre, se possível, uma função f inteira tal que $\mathrm{Re}(f) = x^2 - 3x - y^2$.

Propostas de resolução

1. Podemos mostrámos que $v(x,y) = 3x^2y - y^3 + K$ para qualquer constante $K \in \mathbb{R}$. Para que v verifique $v(0,0) = 2$ a constante real K não pode ser arbitrária. De facto,

$$v(0,0) = 2 \Leftrightarrow 3 \cdot 0 - 0 + K = 2 \Leftrightarrow K = 2.$$

   A função v pedida é $v(x,y) = 3x^2y - y^3 + 2$.

2.

   (a) Notemos que u é parte real da função $f(z) = z + 1/z$, analítica no conjunto aberto $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Então, pela proposição 27, a função u é harmónica em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

   (b) A função u não está definida nos pontos para os quais o denominador se anula. Como $x^2 + (y+1)^2 = 0$ se e só se $x = 0$ e $y = -1$, o domínio de u é $D = \mathbb{C}\setminus\{-i\}$. Efectuando os cálculos necessários para $z \neq -i$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{2\,(y+1)\left(x^2 + (y+1)^2\right) - 8x^2\,(y+1)}{\left(x^2 + (y+1)^2\right)^3}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{2\,(y+1)\left(x^2 + (y+1)^2\right) - 4\,(y+1)\left((y+1)^2 - x^2\right)}{\left(x^2 + (y+1)^2\right)^3}.
\end{aligned}$$

   Então,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 4\,(y+1)\left(x^2 + (y+1)^2\right) - 4\,(y+1)\left(x^2 + (y+1)^2\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 0 = 0.
\end{aligned}$$

   Logo, u é harmónica no seu domínio, isto é, em $D = \mathbb{C}\setminus\{-i\}$.

   Alternativamente, se observarmos que $u(x,y)$ é parte imaginária da função analítica em $\mathbb{C}\setminus\{-i\}$, $f(z) = 1/(z+i)$, concluímos de imediato que u é harmónica neste conjunto.

3. A função u é harmónica,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(2x-3) = 2\\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}(-2y) = -2\end{aligned}$$

e está definida em todo o conjunto $\mathbb{C}$. Pela proposição 29 existe $v(x,y)$ tal que $u(x,y)+v(x,y)i$ é analítica em $\mathbb{C}$. Pelas equações de Cauchy-Riemann, temos

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y,$$

que implica $v(x,y) = 2xy + c(y)$. Por outro lado,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x-3,$$

ou seja, $\partial\left(2xy + c(y)\right)/\partial y = 2x-3$. Então,

$$\begin{aligned} & 2x + c'(y) = 2x - 3 \Leftrightarrow c'(y) = -3\\ \Rightarrow\ & c(y) = -3y + K, \quad \text{para qualquer constante real } K.\end{aligned}$$

Obtemos $v(x,y) = 2xy - 3y + K$ e, escolhendo $K = 0$, vem $v(x,y) = 2xy - 3y$ e $f(z) = x^2 - 3x - y^2 + (2xy - 3y)\,i$.

Exercícios propostos

1. Determine as funções parte real e parte imaginária de cada uma das seguintes funções complexas de variável complexa:

   (a) $f(z) = z^2 + 3z - 2i$; (b) $f(z) = \dfrac{z+2}{z-1}$;

   (c) $f(z) = 3i\overline{z} + 4(i+z)$; (d) $f(z) = \dfrac{z-i}{|z-i|}$.

2. Caracterize geometricamente os conjuntos definidos pelas seguintes condições e indique quais os que são regiões:

   (a) $|z+4| > 2$; (b) $(\operatorname{Im} z)^2 \leq 4$;

   (c) $1 < |\operatorname{Re} z| \leq 2$; (d) $3\pi/4 < \arg z < \pi$.

3. Estude as seguintes funções definidas em $\mathbb{C}$ quanto à continuidade na origem:

   (a) $f(z) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Im} z}{|z|} & \text{se } z \neq 0 \\ 0 & \text{se } z = 0 \end{cases}$; (b) $f(z) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Re} z}{1+|z|} & \text{se } z \neq 0 \\ 0 & \text{se } z = 0 \end{cases}$.

4. Mostre que a função $f(z) = -\left(2xy + 5x\right) + \left(x^2 - 5y - y^2\right) i$ é inteira e calcule $f'(z)$.

5. Mostre que as funções $f(z) = \operatorname{Re} z$, $g(z) = y + xi$ e $\mathrm{h}(z) = \overline{z}^2$ não são analíticas em nenhum ponto do plano complexo.

6. Determine em que pontos as seguintes funções são diferenciáveis. Mostre que não são analíticas em nenhum ponto do plano complexo.

   (a) $f(z) = 3x^2y^2 - 6x^2y^2i;$; (b) $f(z) = x^2 - x + y + \left(y^2 - 5y - x\right) i.$

7. Determine o valor da derivada de f no ponto indicado

   (a) $f(z) = (z-i)\,/\,(z+i)$ em i; (b) $f(z) = \left(z^4+1\right)/z^4$ em $-1-i$.

8. Determine a imagem das funções
   (a) $f(z) = x^2 - y + \left(y^2 - x\right) i$, para z na recta $x = 1$;
   (b) $f(z) = z^3$, para z no 1^o quadrante ($\operatorname{Re} z \geq 0$ e $\operatorname{Im} z \geq 0$);
   (c) $f(z) = \dfrac{1}{z}$, para $|z| \geq 1$.

9. Determine os valores reais de a e b para os quais a função $f(z) = 3x - y + 5 + (ax + by - 3)\, i$ é inteira.

10. Mostre que a função $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 5y$ é harmónica em $\mathbb{R}^2$ e determine uma função conjugada harmónica v.

11. Determine a função analítica $f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$ tal que
    (a) $u(x, y) = x^2 - y^2$; (b) $v(x, y) = 2y(x-1)$;
    (c) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$; (d) $u(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2\right)$.

12. Determine os valores reais de a e b para os quais as seguintes funções são harmónicas em $\mathbb{R}^2$ e determine as funções conjugadas harmónicas.

    (a) $u(x, y) = ax^3 + by^3$; (b) $u(x, y) = e^{ax}\cos 5y$.

13. Determine, caso existam, os seguintes limites

    (a) $\lim_{z\to i}\left(4z^3 - 5z^2 + 4z + 1 - 5i\right);$

    (b) $\lim_{z\to i}\left(z^4 - 1\right)/\,(z - i);$

    (c) $\lim_{z\to 0} z/\overline{z}$.

14. Mostre que, dada uma função analítica f, são válidas as seguintes expressões para cálculo da derivada
$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{e} \quad f' = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

15. Para $x > 0$ considere a função
$$f(z) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i\arctan\frac{y}{x}.$$

(a) Use as equações de Cauchy-Riemann para mostrar que f é diferenciável em todo o seu domínio;

(b) Mostre que $f'(z) = 1/z$;

(c) Mostre que a função conjugada $\overline{f}$ não é diferenciável em nenhum ponto do seu domínio.

Soluções

1. (a) $u(x,y) = x^2 - y^2 + 3x - 5$, $v(x,y) = 2xy + 3y$; (b) $u(x,y) = \dfrac{x^2+y^2+x-2}{(x-1)^2+y^2}$, $v(x,y) = -\dfrac{3y}{(x-1)^2+y^2}$; (c) $u(x,y) = 4x + 3y$, $v(x,y) = 3x + 4y + 4$; (d) $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+(y-1)^2}$, $v(x,y) = \dfrac{y-1}{x^2+(y-1)^2}$.

2. (a) Todo o plano complexo excepto o círculo de centro $(-4,0)$ e raio $\sqrt{2}$; (b) união de dois semiplanos fechados: $y \geq 2$ e $y \leq -2$; (c) união de duas faixas ilimitadas verticais, definidas pelas condições $-2 \leq x < -1$ e $1 < x \leq 2$; (d) porção do plano complexo no 2^o quadrante delimitada pelas rectas $y = -x$ e $x = 0$, excluindo-as. São regiões os conjuntos definidos em (a) e (d).

3. (a) É contínua; (b)

4. $f'(z) = -2y - 5 + 2xi$.

5. Usar teorema de Cauchy-Riemann.

6. (a) É diferenciável ao longo dos eixos coordenados; (b) é diferenciável ao longo da recta de equação $y = x + 2$.

7. (a) $-i/2$; (b) $15\,(1-i)\,/2$.

8. (a) A parábola de equação $v = u^2 - 2u$; (b) os três primeiros quadrantes, incluindo a semirecta $y = 0$ e $x \geq 0$, e a semirecta $x = 0$ e $y \leq 0$; (c) o círculo de centro em $z = 0$ e raio 1, excluindo o ponto $z = 0$.

9. $a = 1$, $b = 3$.

10. $v(x,y) = 3x^2y - y^3 + 5x + 3$.

11. (a) $f(z) = x^2 - y^2 + (2xy + K)\,i = z^2 + Ki$, $K \in \mathbb{R}$; (b) $f(z) = z^2 - 2z + 1 + K$, $K \in \mathbb{R}$; (c) $f(z) = z^3 + K$, $K \in \mathbb{R}$; (d) $f(z) = \ln\left(x^2 + y^2\right) + (2\arctan(y/x) + K)\,i$, $K \in \mathbb{R}$.

12. (a) $a = b = 0$, $v(x,y) = K$, $K \in \mathbb{R}$; (b) $a = \pm 5$, $v(x,y) = \pm e^{\pm 5x} \sin 5y + K$, $K \in \mathbb{R}$.

13. (a) $6 - 5i$; (b) $-4i$; (c) não existe.

Capítulo 2

Funções elementares

2.1 A função exponencial

Definição 7 *Para qualquer* $z = x + yi \in \mathbb{C}$*, define-se a função* ***exponencial de*** $\mathbf{z}$ *por*

$$e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x(\cos y + i \sin y),$$

que pode também ser denotada por $\exp z$.

Nota 3 *Quando tomamos* z *como número real,* $z = x + 0i$*, a definição de* e^z *coincide com a definição já conhecida em* $\mathbb{R}$*:*

$$e^z = e^{x+0i} = e^x(\cos 0 + i \sin 0) = e^x(1 + 0i) = e^x.$$

Deste modo, a função exponencial de variável complexa é um prolongamento da função exponencial de variável real.

Proposição 7 ***Propriedades da exponencial*** *Sejam* $z, w \in \mathbb{C}$*. São válidas as seguintes propriedades:*

(a) $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$;

(b) e^z *nunca se anula;*

(c) $\left|e^{x+iy}\right| = e^x$;

(d) e^z *é uma função periódica, com período* $2\pi i$*;*

(e) $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2n\pi i$*, para algum* $n \in \mathbb{Z}$*;*

(f) $(e^z)^n = e^{nz}$*, com* $n \in \mathbb{Z}$.

Proposição 8 *A função exponencial*

$$f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

é analítica em $\mathbb{C}$ *e a sua derivada é*

$$\begin{aligned} f'(z) &= e^z \\ (e^z)' &= e^z \end{aligned}$$

Exercícios resolvidos

1. Escreva na forma algébrica os números complexos e^{3+i}, $e^{-\frac{\pi}{4}i}$ e $e^{2\pm 3\pi i}$.

2. Mostre, usando a definição de derivada, que $f(z) = e^z$ é uma função inteira (analítica).

3. Resolva a equação $e^z = -1$.

4. Determine o domínio de analiticidade da função $g(z) = z^2/(e^z - 1)$.

Propostas de resolução

1. Relembramos que

$$\begin{aligned} z &= x + iy \Leftrightarrow z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\ e^{\theta i} \\ \text{onde } r &= |z| = \sqrt{x^2+y^2} \text{ e } \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

Então temos:

$e^{3+i} = e^3(\cos 1 + i \sin 1) = e^3 \cos 1 + \left(e^3 \sin 1\right) i;$

$e^{-\frac{\pi}{4}i} = e^0\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i:$

$e^{2\pm 3\pi i} = e^2(\cos(\pm 3\pi) + i\sin(\pm 3\pi)) = e^2(-1+0i) = -e^2 + 0i = -e^2.$

2. Dado um complexo arbitrário z_0 procedamos ao cálculo, pela definição, da derivada de f em z_0 :

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{e^{z_0+\Delta z} - e^{z_0}}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{e^{z_0}(e^{\Delta z} - 1)}{\Delta z} = e^{z_0} \lim_{\Delta z \to 0} \frac{e^{\Delta z} - 1}{\Delta z} = e^{z_0} \end{aligned}$$

visto que $\lim_{\Delta z \to 0}\left(e^{\Delta z} - 1\right)/\Delta z = 1$, logo a derivada existe para qualquer z_0, logo a função é analítica.

3. Temos
$$\begin{aligned} & e^z = -1 \Leftrightarrow e^x(\cos y + i\sin y) = -1 \\ \Leftrightarrow\quad & e^x\cos y + (e^x \sin y)\, i = -1 \\ \Leftrightarrow\quad & e^x\cos y = -1 \wedge \sin y = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & e^x\cos y = -1 \wedge y = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$
Se k é par então $\cos y = 1$ e logo,
$$e^x \cos y = -1 \Rightarrow e^x = -1,$$
o que sabemos ser impossível. Se k é ímpar, dado que $\cos y = -1$, temos
$$e^x \cos y = -1 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0.$$
Então,
$$e^z = -1 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = (2n+1)\pi,$$
com $n \in \mathbb{Z}$. O conjunto S das soluções da equação $e^z = -1$ é dado por
$$S = \{(2n+1)\pi i : n \in \mathbb{Z}\}.$$

4. A função $g(z) = z^2/(e^z - 1)$ tem por domínio o conjunto
$$D = \{z \in \mathbb{C} : e^z - 1 \neq 0\}.$$
Tratando-se do quociente de duas funções inteiras, a função $g(z)$ é analítica em todos os pontos tais que $e^z - 1 \neq 0$, ou seja, em todos os pontos do domínio D. Mas, pela alínea (e) da proposição 3,
$$e^z - 1 \neq 0 \Leftrightarrow e^z \neq 1 \Leftrightarrow z \neq 2n\pi i, \quad n \in \mathbb{Z}.$$
Logo, o domínio de analiticidade da função dada é
$$D = \mathbb{C}\backslash \{z \in \mathbb{C} : z = 2n\pi i, n \in \mathbb{Z}\}.$$

2.2 As funções trigonométricas

Definição 8 *Para qualquer $z \in \mathbb{C}$, definem-se as funções* ***seno e coseno de z*** *por*
$$\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} \quad e \quad \cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}.$$

Nota 4 *Vejamos que se mantêm as propriedades já conhecidas em $\mathbb{R}$.*

Proposição 9 ***Propriedades do seno e do coseno*** *Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. São válidas as seguintes propriedades:*

(a) $\sin(-z) = -\sin z;$

(b) $\cos(-z) = \cos z;$

(c) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1;$

(d) $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \cos z \sin w;$

(e) $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w;$

(f) $\sin z$ *e* $\cos z$ *são funções periódicas, com período* 2π.

Proposição 10 *As funções* $\sin z$ *e* $\cos z$ *são analíticas em* $\mathbb{C}$ *e tem lugar as seguintes regras de derivação:*

$$(\sin z)' = \cos z \quad e \quad (\cos z)' = -\sin z$$

Nota 5 *Outras funções trigonométricas de variável complexa e as suas derivadas*

$$\begin{aligned}
\tan z &= \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \textit{onde} \quad (\tan z)' = \frac{1}{\cos^2 z}, \quad \cos z \neq 0 \\
\cot z &= \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \textit{onde} \quad (\cot z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}, \quad \sin z \neq 0 \\
\sec z &= \frac{1}{\cos z}, \quad \textit{onde} \quad (\sec z)' = \sec z \tan z, \quad \cos z \neq 0 \\
\csc z &= \frac{1}{\sin z}, \quad \textit{onde} \quad (\csc z)' = -\csc z \cot z, \quad \sin z \neq 0
\end{aligned}$$

Exercícios resolvidos

1. Mostre que $\cos \overline{z}$ não é analítica em nenhum ponto do seu domínio.

2. Determine as partes real e imaginária das funções seno e coseno.

3. Mostre que $|\sin z| \geq |\sin x|$.

4. Resolva a equação $\cos z = 2$.

5. Mostre que $\sin(2z) = 2 \sin z \cos z$ e $\cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z$.

6. Mostre que ainda é válida em $\mathbb{C}$ a **fórmula de Euler**

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Propostas de resolução

1. Dado $z = x + yi$,

$$\begin{aligned}
\cos \overline{z} &= \frac{e^{\overline{z}i} + e^{-\overline{z}i}}{2} = \frac{e^{(x-yi)i} + e^{-(x-yi)i}}{2} = \frac{e^{y+xi} + e^{-y-xi}}{2} \\
&= \frac{e^{y}(\cos x + i \sin x) + e^{-y}(\cos x - i \sin x)}{2} \\
&= \frac{(e^{y} + e^{-y}) \cos x + i(e^{y} - e^{-y}) \sin x}{2}.
\end{aligned}$$

A esta função correspondem as partes real e imaginária

$$u(x,y) = (e^{y} + e^{-y}) \cos \frac{x}{2} \quad \text{e} \quad v(x,y) = (e^{y} - e^{-y}) \sin \frac{x}{2},$$

respectivamente. As funções u e v não verificam as equações de Cauchy-Riemann. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad &\Leftrightarrow -\frac{e^{y} + e^{-y}}{2} \sin \frac{x}{2} = (e^{y} + e^{-y}) \sin \frac{x}{2} \\
&\Leftrightarrow -\frac{e^{y} + e^{-y}}{2} = e^{y} + e^{-y} \Leftrightarrow e^{y} + e^{-y} = 0,
\end{aligned}$$

trata-se de uma equação impossível.

2. Atendendo às expressões de seno e coseno hiperbólicos conhecidas em $\mathbb{R}$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\sin z &= \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} = \frac{e^{-y+xi} - e^{y-xi}}{2i} \\
&= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^{y}(\cos x - i \sin x)}{2i} \\
&= \frac{(e^{-y} - e^{y}) \cos x + i\,(e^{-y} + e^{y}) \sin x}{2i} \\
&= \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} \sin x + i \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \cos x \\
&= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.
\end{aligned}$$

Logo, $u(x,y) = \sin x \cosh y$ e $v(x,y) = \cos x \sinh y$. Analogamente,

$$\begin{aligned}
\cos z &= \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} = \frac{e^{-y+xi} + e^{y-xi}}{2} \\
&= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^{y}(\cos x - i \sin x)}{2} \\
&= \frac{(e^{-y} + e^{y}) \cos x + i\,(e^{-y} - e^{y}) \sin x}{2} \\
&= \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} \cos x - i \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \sin x \\
&= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y,
\end{aligned}$$

donde $u(x,y) = \cos x \cosh y$ e $v(x,y) = \sin x \sinh y$.

3. Notemos que, dado $y \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
\cosh^2 y - \sinh^2 y &= \left(\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{-2y} + 2e^{-y}e^{y} + e^{2y} - \left(e^{2y} - 2e^{y}e^{-y} + e^{-2y}\right)}{4} \\
&= \frac{4e^{-y+y}}{4} = 1.
\end{aligned}$$

Atendendo ao exercício 2, podemos escrever

$$\begin{aligned}
|\sin z|^2 &= |\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y|^2 \\
&= (\sin x \cosh y)^2 + (\cos x \sinh y)^2 \\
&= \sin^2 x(1+\sinh^2 y) + \cos^2 x \sinh^2 y \\
&= \sin^2 x + \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\sinh^2 y \\
&= \sin^2 x + \sinh^2 y = \left|\sin^2 x\right| + \sinh^2 y.
\end{aligned}$$

Logo,

$$|\sin z|^2 \geq |\sin x|^2$$

e, dado que $|\sin z|$ e $|\sin x|$ representam números reais positivos, concluímos que $|\sin z| \geq |\sin x|$. De modo análogo prova-se que

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y,$$

o que permite concluir que $|\cos z| \geq |\cos x|$, para $z = x + yi$.

4. Temos

$$\cos z = 2 \Leftrightarrow \frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2} = 2 \Leftrightarrow e^{zi} + e^{-zi} = 4.$$

Multiplicando por $e^{zi} \neq 0$, obtemos a equação quadrática

$$\begin{aligned}
\cos z = 2 \quad &\Leftrightarrow \left(e^{zi}\right)^2 - 4e^{zi} + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow e^{zi} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Então,

$$e^{(x+yi)i} = e^{-y+xi} = e^{-y}(\cos x + i \sin x) = 2 \pm \sqrt{3},$$

o que permite concluir que

$$e^{-y}\cos x = 2 \pm \sqrt{3} \wedge e^{-y} \sin x = 0.$$

De $e^{-y}\sin x = 0$ concluímos que $\sin x = 0$, ou seja, que $x = n\pi$, para $n \in \mathbb{Z}$. Se n ímpar então $\cos x = -1$ e logo

$$-e^{-y} = 2 \pm \sqrt{3} \Leftrightarrow e^{-y} = -2 \pm \sqrt{3},$$

o que sabemos ser impossível, visto que $-2 \pm \sqrt{3} < 0$. Se n par, $\cos x = 1$ e logo,

$$e^{-y} = 2 \pm \sqrt{3} \Leftrightarrow -y = \ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) \Leftrightarrow y = -\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right).$$

Atendendo a que $\ln\left(2-\sqrt{3}\right) = -\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$, podemos concluir que as soluções da equação são $z = 2k\pi \pm i\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$. Notemos que esta equação é impossível em $\mathbb{R}$.

5. $\sin(2z) = \sin(z+z) = \sin z\cos z + \cos z \sin z = 2\sin z\cos z$;

   $\cos(2z) = \cos(z+z) = \cos z\cos z - \sin z\sin z = \cos^2 z - \sin^2 z$.

6. $\cos z + i\sin z = \dfrac{e^{zi}+e^{-zi}}{2} + i\dfrac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i} = \dfrac{2e^{zi}}{2} = e^{zi}$.

2.3 As funções hiperbólicas

Recordemos que para $x \in \mathbb{R}$, as funções hiperbólicas seno e coseno são definidas através da função exponencial de variável real por

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{2.1}$$

As respectivas funções de variável complexa definem-se de modo análogo.

Definição 9 *Para qualquer $z \in \mathbb{C}$, definem-se as funções* ***seno hiperbólico*** *e* ***coseno hiperbólico de z*** *por*

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad e \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Proposição 11 *As funções seno e coseno hiperbólico são analíticas em $\mathbb{C}$ e são válidas as seguintes fórmulas de derivação:*

$$(\sinh z)' = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z \quad e \quad (\cosh z)' = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sinh z.$$

- Também se podem definir as funções tangente e cotangente hiperbólicas de variável complexa, a saber

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{1}{\tanh z},$$

  assim como a função secante hiperbólica, $1/\cosh z$, e a função cosecante hiperbólica, $1/\sinh z$.

Proposição 12 *As funções hiperbólicas tem asa seguintes propriedades*

1. As funções seno e coseno hiperbólico são periódicas de período $2\pi i$

2. $\sinh(iz) = i\sin(z)\,,\ \cosh(iz) = \cos z$

3. $\sin(iz) = i\sinh(z)\,,\ \cos(iz) = \cosh(z)$

4. $\sinh(z) = \sinh(x)\cos(y) + i\cosh(x)\sin(y)$

5. $\cosh(z) = \cosh(x)\cos(y) + i\sinh(x)\sin(y)$

6. $\sinh(z) = 0 \Leftrightarrow z = -n\pi i,\ n \in \mathbb{N}$

7. $\cosh(z) = 0 \Leftrightarrow z = -(2n+1)\frac{\pi}{2}i,\ n \in \mathbb{N}$

Exercícios resolvidos

1. Determine, às relações entre as funções trigonométricas e as funções hiperbólicas, as partes real e imaginária das funções seno e coseno.

2. Mostre que $\cos z = \cosh(iz)$.

3. Mostre que $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.

4. Mostre que $2\pi i$ é o período das funções seno e coseno hiperbólicos.

Propostas de resolução

1. $\sin z = \sin(x+yi) = \sin x\cos(yi) + \cos x\sin(yi) = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$

   $\cos z = \cos(x+yi) = \cos x\cos(yi) - \sin x\sin(yi) = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y.$

2. $\cos(iz) = \dfrac{e^{(iz)i} + e^{-(iz)i}}{2} = \dfrac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \cosh z.$

3. $$\begin{aligned}\cosh^2 z - \sinh^2 z &= \frac{\left(e^z + e^{-z}\right)^2}{4} - \frac{\left(e^z - e^{-z}\right)^2}{4}\\ &= \frac{e^{2z} + 2e^{z-z} + e^{-2z} - e^{2z} + 2e^{z-z} - e^{-2z}}{4} = 1.\end{aligned}$$

4. Temos

$$\begin{aligned}\sinh(z+2\pi i) &= \sinh(x + (2\pi + y)i)\\ &= \sinh x\cos(2\pi + y) + i\cosh x\sin(2\pi + y)\\ &= \sinh x\cos y + i\cosh x\sin y = \sinh z,\end{aligned}$$

assim como

$$\begin{aligned}\cosh(z+2\pi i) &= \cosh(x+(2\pi+y)i)\\ &= \cosh x\cos(2\pi+y)+i\sinh x\sin(2\pi+y)\\ &= \cosh x\cos y+i\sinh x\sin y=\cosh z.\end{aligned}$$

Não seria de esperar outro valor para o período, dado que estas funções são definidas através da função exponencial.

2.4 A função logaritmo

No caso das funções reais, a função logaritmo neperiano é simplesmente a função inversa da função exponencial neperiana. Dados $x, y \in \mathbb{R}$ temos $x = \ln y$ se e só se $e^x = y$.

O caso complexo é mais delicado. A função exponencial é periódica de período $2\pi i$ e, como tal, não é invertível em todo o seu domínio $\mathbb{C}$. No entanto, pretende-se que a relação

$$\log z = w \quad \text{se e só se} \quad z = e^w \tag{2.2}$$

se mantenha válida em $\mathbb{C}$. Se (2.2) se verificar para $w = u + vi$ então

$$\begin{aligned}e^{u+vi}=z &\Leftrightarrow e^u(\cos v+i\sin v)=z\\ &\Leftrightarrow |z|=e^u\wedge\arg z=v\\ &\Leftrightarrow u=\ln|z|\wedge v=\arg z.\end{aligned}$$

Deste modo, para $z \neq 0$ (visto que $e^w \neq 0$ para todo o $w \in \mathbb{C}$), é natural definir

$$\log z = \ln|z| + i\arg z. \tag{2.3}$$

Existem, no entanto, infinitos valores para $\log z$, um para cada argumento de z. A diferença entre quaisquer dois destes valores é um múltiplo inteiro de $2\pi i$. Assim, a expressão (2.3) não define uma função.

Observemos que, se $z = |z|\, e^{i\arg z} = x + yi$,

$$e^{\log z} = e^{\ln|z|+i\arg z} = e^{\ln|z|}e^{i\arg z} = |z|\, e^{i\arg z} = z.$$

Mas,

$$\begin{aligned}\log(e^z) &= \ln|e^z|+i\arg e^z=\ln e^x+i(y+2k\pi)\\ &= x+(y+2k\pi)i=(x+yi)+2k\pi i=z+2k\pi i,\end{aligned}$$

para $k \in \mathbb{Z}$. No entanto, se considerarmos para argumento de z o seu argumento principal, caso em que tomamos $k = 0$, é possível definir a função logaritmo.

Definição 10 *Para qualquer $z = x + yi \in \mathbb{C}$, com $z \neq 0$, define-se a função* ***logaritmo principal de z*** *por*

$$\log z = \ln |z| + i \arg z,$$

com $\arg z \in [-\pi, \pi[$.

Podemos agora afirmar que a **função logaritmo principal**, $\log z$, é a função inversa da restrição da função exponencial de variável complexa à região fundamental $\{x + yi : -\pi \leq y < \pi\}$. Ou seja, verifica-se (2.2).

Nota 6 *Podemos definir a função logaritmo mais geralmente da seguinte forma: a* ***função logaritmo relativa ao intervalo*** $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ *é a função*

$$\log z = \ln |z| + i \arg z, \quad \arg z \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi[\,.$$

Esta função designa-se muitas vezes por ***ramo do logaritmo*** *correspondente ao intervalo* $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$*; quando $\theta_0 = -\pi$, obtém-se o ramo principal do logaritmo. A função logaritmo relativa ao intervalo $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ é a função inversa da restrição da função exponencial à região fundamental* $\{x + yi : \theta_0 \leq y < \theta_0 + 2\pi\}$.

Nota 7 *Quando z é um número real positivo, $z = x + 0i$ com $x > 0$, a definição de $\log z$ coincide com a definição já conhecida em $\mathbb{R}$*

$$\log z = \log x = \ln |x| + i \arg x = \ln x.$$

Salvo indicação em contrário, em tudo o que se segue, quando nos referimos à função $\log z$ referimo-nos à função logaritmo principal.

Nota 8 *No cálculo real, não está definido o logaritmo de números negativos. Em $\mathbb{C}$ tal não é verdade. Por exemplo,*

$$\log(-1) = \ln |-1| + i \arg(-1) = \ln 1 + i\,(-\pi) = -\pi i.$$

Este é um dos motivos que nos leva a considerar notações diferentes para o logaritmo de um número complexo e para o logaritmo neperiano de um número real.

A parte real da função logaritmo, $u(x, y) = \ln |z| = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, é contínua em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Contudo, a parte imaginária $v(x, y) = \arg(x + yi)$ é descontínua nos pontos de coordenadas $(x, 0)$, com $x < 0$ (exercício 5). Como tal, a função logaritmo **não é contínua no eixo real negativo**, ou seja, em complexos z da forma $z = x + 0i$, com $x \leq 0$.

As propriedades do logaritmo que se verificam no cálculo real continuam válidas em $\mathbb{C}$, desde que correctamente interpretadas. Vejamos os seguintes exemplos.

Exemplo 4 *Consideremos os números complexos $z = -1$ e $w = i$ e escolham-se os argumentos no intervalo $[0, 2\pi[$. Temos $|z| = 1$, $\arg z = \pi$, $|w| = 1$ e $\arg w = \pi/2$. Como tal,*

$$\log z + \log w = (\ln 1 + i\pi) + \left(\ln 1 + i\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}i.$$

Por outro lado,

$$zw = cis\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = cis\frac{3\pi}{2},$$

pelo que

$$\log(zw) = \ln 1 + i\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}i.$$

Logo, neste caso, verifica-se a igualdade $\log z + \log w = \log(zw)$.

Escolha-se agora o intervalo $[-2\pi, 0[$ para os argumentos de z e w. Então, $\arg z = -\pi$, $\arg w = -3\pi/2$ e $\arg(zw) = -\pi/2$, donde

$$\begin{aligned} \log z + \log w &= (\ln 1 - i\pi) + \left(\ln 1 - i\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{5\pi}{2}i, \\ \log(zw) &= \ln 1 + i\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}i. \end{aligned}$$

Neste caso, verificamos que a diferença $(\log z + \log w) - \log(zw)$ é de $-2\pi i$.

Proposição 13 ***Propriedades do logaritmo*** *Sejam $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. São válidas as seguintes propriedades:*

(a) $\log(zw) = \log z + \log w \pmod{2\pi i}$;

(b) $\log(z/w) = \log z - \log w \pmod{2\pi i}$.

(c) $\log(z)$ *é analítica no conjunto $\mathbb{C} \setminus \{x + iy : x \leq 0$ e $y = 0\}$ e a sua derivada é dada por*

$$(\log z)' = \frac{1}{z}$$

Exercícios resolvidos

1. Determine os valores de $\log(-2)$, $\log i$, $\log(-1 - i)$ e $\log\left(\sqrt{3} + i\right)$.

2. Resolva a equação $e^z = \sqrt{3} + i$.

3. Calcule o valor principal de $\log(-3)$.

4. Considere os números complexos $z = -i$ e $w = -1 + i$. Mostre que $\log(z/w) = \log z - \log w \pmod{2\pi i}$.

5. Mostre que a função $v(x, y) = \arg(x + yi)$ é descontínua nos pontos de coordenadas $(x, 0)$, com $x < 0$.

6. Mostre que a função $f(z) = \log z$ verifica as condições de Cauchy-Riemann para $z = x + yi$, com $z \neq 0$ e $z \neq x < 0$.

7. Derive a função
$$f(z) = \log(e^z + 1),$$
indicando a região em que é analítica.

Propostas de resolução

1. $\log(-2) = \ln 2 + i \arg(-2) = \ln 2 + i(\pi + 2k\pi)$,
$\log i = \ln 1 + i \arg i = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$,
$\log(-1 - i) = \ln\sqrt{2} + i \arg(-1 - i) = \ln\sqrt{2} + i\left(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$,
$\log\left(\sqrt{3} + i\right) = \ln 2 + i \arg\left(\sqrt{3} + i\right) = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right), \;\; k \in \mathbb{Z}$.

2. Temos
$$e^z = \sqrt{3} + i \Leftrightarrow z = \log\left(\sqrt{3} + i\right).$$
Pelo exercício 1, o conjunto solução da equação é
$$S = \left\{\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

3. Dado que $-3 = 3cis\,(-\pi)$, o valor principal do logaritmo de -3 é
$$\log(-3) = \ln 3 + i(-\pi) = \ln 3 - \pi i.$$

4. Consideremos os números complexos $z = -i$ e $w = -1 + i$ e escolham-se os argumentos no intervalo $[-\pi, \pi[$. Temos $|z| = 1$, $\arg z = -\pi/2$, $|w| = \sqrt{2}$ e $\arg w = 3\pi/4$. Como tal,
$$\begin{aligned} \log z - \log w &= \left(\ln 1 + i\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) - \left(\ln\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4}\right) \\ &= \ln\sqrt{2} + i\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}\right) = \ln\sqrt{2} - i\frac{5\pi}{4}. \end{aligned}$$
Por outro lado,
$$\frac{z}{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}cis\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}cis\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}cis\frac{3\pi}{4},$$
pelo que
$$\log\frac{z}{w} = \ln\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4}.$$
Verificamos então que a diferença $(\log z - \log w) - \log(z/w)$ é de $-2\pi i$.

5. Seja $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x_0 < 0$. Então,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\ y>0}} \arg(x+yi) = \pi,$$

enquanto que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\ y<0}} \arg(x+yi) = -\pi.$$

Podemos assim concluir que, para $x_0 < 0$, não existe $\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} v(x,y)$.

6. Para $z = x + yi = re^{i\theta}$ temos $u(r,\theta) = \ln r$ e $v(r,\theta) = \theta$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{r} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = 1, \end{aligned}$$

o que mostra serem válidas as equações de Cauchy-Riemann estabelecidas para coordenadas polares,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad e \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

7. A função $e^z + 1$ é analítica em $\mathbb{C}$. Logo, $\log(e^z+1)$ é analítica em todos os pontos tais que $e^z + 1$ pertence ao domínio de analiticidade da função logaritmo, ou seja, é analítica no conjunto

$$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(e^z+1) = 0 \wedge \operatorname{Re}(e^z+1) \leq 0\}.$$

Escrevendo $z = x + yi$,

$$\operatorname{Im}(e^z+1) = 0 \Leftrightarrow e^x \sin y = 0 \Leftrightarrow \sin y = 0 \Leftrightarrow y = n\pi, \quad \text{para } n \in \mathbb{Z}.$$

Por outro lado,

$$\operatorname{Re}(e^z+1) \leq 0 \Leftrightarrow e^x \cos y + 1 \leq 0 \Leftrightarrow e^x \cos y \leq -1.$$

Como $y = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, temos $\cos y = 1$, se n é par, e $\cos y = -1$, se n é ímpar. Se n for par então $e^x \leq -1$, o que é impossível. Se n for ímpar então $e^x \geq 1$, ou seja, $x \geq 0$. Concluímos que f é analítica no conjunto

$$\mathbb{C} \setminus \{z = x + yi : x \geq 0 \wedge y = 2(k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Utilizando o teorema da função composta,

$$f'(z) = \frac{e^z}{e^z+1}.$$

Exercícios propostos

1. Calcule todos os valores de e^i, $\log(-2i)$, $e^{3\log(1-i)}$.

2. Resolva, em $\mathbb{C}$, as seguintes equações:

   (a) $\cos z = 10$; (b) $\cos z = \sin z$; (c) $\sin z = 2$;
   (d) $\sinh z = -i$; (e) $e^{iz} = -3$; (d) $e^z + 6e^{-z} = 5$.

3. Apresente as seguintes funções na forma $f(z) = u + vi$:

   (a) $f(z) = e^{-iz}$; (b) $f(z) = e^{z^2}$.

4. Determine as regiões onde as seguintes funções são analíticas e calcule $f'(z)$:

   (a) $f(z) = e^{\pi z^3 - 1}$; (b) $f(z) = \cos(1/z) + e^{\frac{1}{z^2+1}}$;
   (c) $f(z) = \sin\left(\log z^2\right)$; (d) $f(z) = \sqrt{z^2 - 2}$.

5. Determine para que valores de z é válida a igualdade $\log z^2 = 2\log z$, quando se considera o ramo principal do logaritmo.

6. Mostre que a função $f(z) = e^{\overline{z}}$ não é analítica em nenhum ponto do seu domínio.

7. Mostre que $e^{2\pi i} = 1$, $e^{\pi/2i} = i$, $e^{\pi i} = -1$, $e^{-\pi/2i} = -i$ e $e^{-\pi i} = -1$.

8. Mostre que $\left|e^{iy}\right| = 1$, para todo o $y \in \mathbb{R}$.

9. Mostre que $u(x, y) = \operatorname{Re}\left(e^{z^2}\right)$ é uma função harmónica.

10. Mostre que $\tan z = u + vi$ onde $u(x, y) = \sin 2x/\left(\cos 2x + \cosh 2y\right)$ e $v(x, y) = \sinh 2x/\left(\cos 2x + \cosh 2y\right)$.

11. Prove que a função $\tan z$ é periódica de período π.

12. Mostre que, para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$, são válidas as seguintes igualdades

    (a) $\cosh(z + w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w$;

    (b) $\sinh(z + w) = \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w$;

    (c) $\cosh^2 z + \sinh^2 z = 1$.

13. Mostre que $\cos\overline{z} = \overline{\cos z}$.

Soluções

1. $\cos 1 + i \sin 1$; $\ln 2 + i(-\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$; $-2 - 2i$.

2. (a) $z = 2n\pi \pm i \ln\left(10 + 3\sqrt{11}\right)$; (b) $z = \pi/4 + n\pi$; (c) $z = \pi/2 + 2n\pi - i\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$; (d) $z = (-\pi/2 + 2n\pi)\, i$; (e) $(-\pi + 2n\pi) - (\ln 3)\, i$; (f) $z = \ln 3 + 2n\pi i \vee z = \ln 2 + 2n\pi i$.

3. (a) $e^y \cos x - ie^y \sin x$; (b) $e^{x^2-y^2} \cos(2xy) + ie^{x^2-y^2} \sin(2xy)$.

4. (a) $f'(z) = 3\pi z^2 e^{\pi z^3 - 1}$, $\forall z \in \mathbb{C}$; (b) $f'(z) = \dfrac{1}{z^2} \sin\left(\dfrac{1}{z}\right) - \dfrac{2z}{\left(z^2+1\right)^2} e^{\frac{1}{z^2+1}}$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, 0, i\}$;(c) $f'(z) = \dfrac{2}{z}\cos\left(\log z^2\right)$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{z = yi : y \in \mathbb{R}\}$; (d) $\dfrac{z}{\sqrt{z^2-2}}$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{z = yi \vee z = x, -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}\right\}$.

5. $z = re^{i\theta}$, com $r > 0$ e $\theta \in [-\pi/2, \pi/2[$.

Capítulo 3

Integração no plano complexo

O estudo da integração no plano complexo é importante por duas razões essenciais. Por um lado, podem ocorrer integrais de variável real cujo cálculo não é imediato pelos métodos usuais de integração real mas que a integração complexa permite resolver facilmente. Por exemplo, o cálculo do integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

Por outro lado, algumas propriedades básicas das funções analíticas podem ser estabelecidas com base na integração complexa não sendo as abordagens alternativas imediatas. O **teorema de Cauchy-Goursat**, por exemplo, permite concluir que as funções analíticas possuem derivadas de todas as ordens.

3.1 Integrais curvilíneos

Os integrais curvilíneos, integrais de uma função $f(z)$ ao longo de uma certa curva no plano complexo, são definidos de forma análoga à usada para definir integrais curvilíneos no plano bidimensional $\mathbb{R}^2$.

Definição 11 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \leq b$. Uma* ***curva*** *em $\mathbb{C}$ é o contradomínio de uma função contínua $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. A função γ é designada por* ***parametrização da curva*** *(de parâmetro real t) e*

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t), \qquad t \in [a, b]$$

por ***equação paramétrica da curva.***[1]

[1] Podemos pensar numa curva como a trajectória de um ponto material $(x(t), y(t)) = x(t) + iy(t) \in \mathbb{C}$, em cada instante t, com t a variar num intervalo de tempo $[a, b]$.

Dada uma curva parametrizada por $\gamma(t) = x(t) + y(t)i$, $t \in [a,b]$, e $t_0 \in [a,b]$, o vector

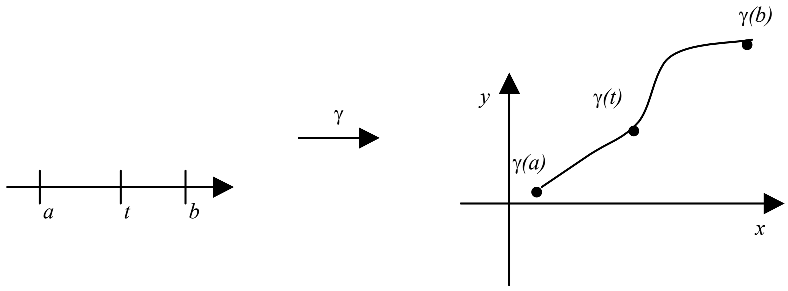
$$\gamma'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$$

designa-se por **vector tangente à curva no ponto $\mathbf{t} = \mathbf{t}_0$**.[2]

Sempre que não haja ambiguidade, referimo-nos à curva γ para mencionar a curva parametrizada por γ.

Definição 12 *Uma curva γ diz-se **suave** (ou **regular**) quando as funções $x(t)$ e $y(t)$ têm derivadas contínuas no intervalo $[a,b]$ e o vector $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ não se anula em $[a,b]$.*

*Se existir uma partição do intervalo $[a,b]$, ou seja, um número finito de valores reais $a_0, a_1, \ldots, a_n$, com $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$, tal que as restrições $\gamma_j = \gamma_{|]a_{j-1}, a_j[}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, são curvas suaves então a curva γ diz-se **seccionalmente suave** (ou **seccionalmente regular**). Neste caso, γ diz-se a **soma** (ou **união**) das curvas γ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, e denota-se por $\boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\gamma}_2 + \cdots + \boldsymbol{\gamma}_n$.*



A suavidade de uma curva significa geometricamente que ela tem vector tangente $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ único em cada ponto e que este varia continuamente em t.

Exemplo 10 *A função $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ tal que*

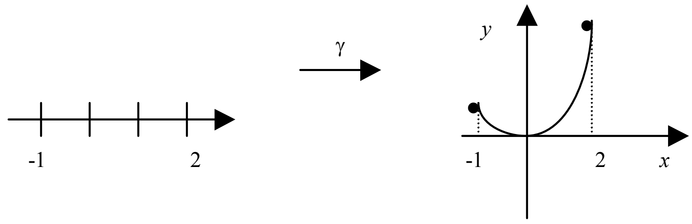
$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

define a parábola dada, em coordenadas rectangulares, pela equação $y = x^2$. Consideremos a função $\gamma : [-1,2] \to \mathbb{C}$ definida por $\gamma(t) = t + it^2$. Dado que $x(t)$ e $y(t)$ são funções contínuas com derivadas contínuas no intervalo $[-1,2]$, γ é uma curva suave que corresponde ao arco da parábola

[2] Note-se que γ é uma aplicação de variável real. Como tal, a existência da derivada $\gamma'(t)$ implica que existam as derivadas $x'(t)$ e $y'(t)$ enquanto derivadas de funções reais de variável real.

Em cada instante t, o vector tangente $(x'(t), y'(t)) = x'(t) + iy'(t)$ pode ser interpretado como o vector velocidade de um ponto material, com posição $(x(t), y(t))$.

$y = x^2$ compreendido entre os pontos $z_1 = \gamma(-1) = -1 + i$ e $z_2 = \gamma(2) = 2 + 4i$. Note-se que $\gamma'(t) = 1 + 2ti \neq 0$ para $-1 \leq t \leq 2$. Geometricamente,



Exemplo 11 *A circunferência de centro na origem e de raio* 1 *pode ser parametrizada por $\gamma(t) = \cos t + i \sin t = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. De facto,*

$$x^2(t) + y^2(t) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Trata-se de uma curva suave visto que $x(t) = \cos t$ e $y(t) = \sin t$ são funções contínuas com derivadas contínuas no intervalo $[0, 2\pi]$ e $\gamma'(t) = -\sin t + i \cos t \neq 0$ para $0 \leq t \leq 2\pi$ (as funções seno e coseno não têm zeros coincidentes).

Exemplo 12 *A elipse de centro na origem e de semi-eixos horizontal e vertical com medidas $a \neq 0$ e $b \neq 0$, respectivamente, tem parametrização $\gamma(t) = a \cos t + ib \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Com efeito,*

$$\frac{x^2(t)}{a^2} + \frac{y^2(t)}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Trata-se, tal como a circunferência, de uma curva suave.

Exemplo 13 *A curva γ parametrizada por*

$$\gamma(t) = \begin{cases} t + it^2 & \text{se } -1 \leq t \leq 2 \\ t + 4i & \text{se } 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

é seccionalmente suave. Dado que $\gamma_1(2) = \gamma_2(2)$, γ é a união da curva $\gamma_1(t) = \gamma_{|]-1,2[}(t) = t + it^2$ com a curva $\gamma_2(t) = \gamma_{|]2,3[}(t) = t + 4i$. Além disso, γ_1 é uma curva suave dado que as funções $x(t) = t$ e $y(t) = t^2$ têm derivadas contínuas e $\gamma_1'(t) = 1 + 2ti \neq 0$. Analogamente, a restrição γ_2 é uma curva suave. Observamos que γ não é suave pois $\gamma_1'(2) = 1 + 4i$ enquanto que $\gamma_2'(2) = 1$.

No que segue todas as curvas consideradas são seccionalmente suaves, salvo indicação em contrário.

Definição 13 *A **orientação** ou **sentido de uma curva** $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $a \leq b$, é de $\gamma(a)$ para $\gamma(b)$. A **curva** $-\gamma$ parametrizada por*

$$(-\gamma)(t) = \gamma(a+b-t), \quad t \in [a,b],$$

corresponde ao mesmo conjunto de pontos mas orientada no sentido inverso ao de γ.

*Quando o ponto final coincide com o ponto inicial, $\gamma(a) = \gamma(b)$, a curva γ diz-se **fechada**. A orientação de uma curva fechada diz-se **positiva** (ou **directa**) se é contrária à dos ponteiros do relógio e diz-se **negativa** (ou **indirecta**) no caso contrário.*

*Se $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ sempre que $t_1 \neq t_2$, com $t_1, t_2 \in]a,b[$, então a curva diz-se **simples**. Uma curva simples e fechada é designada por **curva de Jordan**[3].*

Exemplo 14 *A curva $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, com $t \in [\alpha, \beta]$ e $\beta \leq \alpha + 2\pi$, define um arco da circunferência de centro z_0 e de raio r, com extremidades inicial e final $\gamma(\alpha)$ e $\gamma(\beta)$, respectivamente. Trata-se de uma curva suave dado que $x(t) = x_0 + r\cos t$ e $y(t) = y_0 + r\sin t$ têm derivadas contínuas e $\gamma'(t) = ire^{it} \neq 0$ em todos os pontos. Quando $\beta = \alpha + 2\pi$, temos $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ e a curva é fechada e descrita no sentido positivo. Atendendo a que se trata de uma circunferência, é imediato que se trata de uma curva simples. A curva $(-\gamma)(t) = z_0 + re^{-it}$, $t \in [\alpha, \alpha + 2\pi]$, representa a mesma circunferência, mas orientada no sentido negativo.*

Comecemos por definir o integral curvilíneo de uma função complexa de variável real.

Definição 14 *Seja $h : [a,b] \to \mathbb{C}$ uma função complexa de variável real definida por $h(t) = u(t) + iv(t)$, para funções u e v contínuas em $[a,b]$. Define-se o **integral curvilíneo da função h no intervalo** $[a,b]$ como sendo o número complexo*

$$\int_a^b h(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt,$$

onde os integrais de u e v são integrais usuais de funções reais de uma variável real.

Exemplo 5 *Pretendemos determinar o integral curvilíneo da função $h(t) = t^2 + 1 + t^3 i$ no intervalo $[0,1]$. Dado que $u(t) = t^2 + 1$ e $v(t) = t^3$ são as partes real e imaginária de h, respectivamente, temos*

$$\int_0^1 \left(t^2 + 1 + it^3\right) dt = \int_0^1 (t^2+1)dt + i\int_0^1 t^3 dt = \frac{4}{3} + \frac{1}{4}i.$$

Segue-se a definição de integrais curvilíneos para funções complexas de variável complexa.

[3] Em referência a Camille Jordan (1838-1922).

Definição 15 *Sejam f uma função contínua definida num aberto $A \subseteq \mathbb{C}$ e $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ uma curva seccionalmente suave tal que $\gamma([a, b]) \subset A$. Define-se o* ***integral curvilíneo*** *(ou simplesmente* ***integral) ao longo de $\boldsymbol{\gamma}$****, que se denota por $\int_\gamma \mathbf{f(z)dz}$ (ou simplesmente por $\int_\gamma \mathbf{f}$), como sendo o número complexo*

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{a_{j-1}}^{a_j} f\left(\gamma_j(t)\right) \cdot \gamma_j'(t)dt,$$

onde $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ é uma partição do intervalo $[a, b]$ tal que as restrições $\gamma_j = \gamma_{|]a_{j-1}, a_j[}$, para $j = 1, \ldots, n$, parametrizam curvas suaves. A função f é designada por ***função integranda****. Quando a curva é fechada é usual a notação $\oint_\gamma \mathbf{f}$.*

A continuidade da função f em todos os pontos da curva e a continuidade das restrições γ_j', para $j = 1, ..., n$, garantem a existência do integral. O valor do integral corresponde, assim, à soma (finita) dos n integrais curvilíneos das funções complexas de variável real $f\left(\gamma_j(t)\right) \cdot \gamma_j'(t)$ em cada um dos intervalos $[a_{j-1}, a_j]$, conforme a definição 6. No caso particular de f ser uma função contínua em todos os pontos de uma curva suave $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, temos o caso mais simples em que

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt.$$

Exemplo 15 *Consideremos a circunferência de centro na origem e de raio 2. Uma parametrização para esta curva suave pode ser definida por*

$$\gamma(t) = 2\cos t + i2\sin t = 2e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

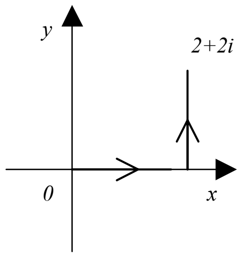
Pretendemos calcular o valor do integral de $f(z) = 1/z$ ao longo da curva γ. A função f está definida e é contínua em todos os pontos da curva γ (f tem por domínio $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ mas a origem não pertence à curva). Então, dado que $\gamma'(t) = -2\sin t + i2\cos t$,

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma f(z)dz &= \int_0^{2\pi} f(2\cos t + i2\sin t)\left(-2\sin t + i2\cos t\right)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\cos t + i2\sin t}\left(-2\sin t + i2\cos t\right)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{2\cos t - i2\sin t}{4\cos^2 t + 4\sin^2 t}\left(-2\sin t + i2\cos t\right)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{-4\cos t\sin t + 4i\cos^2 t + i4\sin^2 t + 4\sin t\cos t}{4}dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{4i}{4}dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.
\end{aligned}$$

Em alternativa, podemos usar a forma $\gamma(t) = 2e^{it}$. Temos então $\gamma'(t) = 2ie^{it}$ e o integral é dado *por*

$$\begin{aligned}\oint_\gamma f(z)dz &= \int_0^{2\pi} f\left(2e^{it}\right) 2ie^{it}dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2e^{it}} 2ie^{it}dt = \int_0^{2\pi} idt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.\end{aligned}$$

Exemplo 6 *Consideremos a curva representada na figura e a função $f(z) = z$ definida em todo o plano complexo.*



Trata-se de uma curva seccionalmente suave, união de duas curvas suaves: o segmento de recta que une $z = 0$ a $z = 2$ parametrizado por $\gamma_1(t) = t$, $t \in [0, 2]$, e o segmento de recta que une $z = 2$ a $z = 2 + 2i$ parametrizado por $\gamma_2(t) = 2 + (t - 2)\,i$, $t \in [2, 4]$. Dado que a função $f(z) = z$ é contínua em $\mathbb{C}$ (em particular, na curva) e $\gamma_1'(t) = 1$ e $\gamma_2'(t) = i$, o integral curvilíneo é obtido como soma de dois integrais na variável real t,

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_0^2 f(t)dt + \int_2^4 f\left(2 + (t-2)\,i\right) i\ dt \\ &= \int_0^2 tdt + \int_2^4 \left(2 + (t-2)\,i\right) i\ dt \\ &= \int_0^2 tdt + i\int_2^4 2dt - \int_2^4 (t-2)\,dt = 4i.\end{aligned}$$

Exemplo 16 *Consideremos a função $f(z) = \overline{z}$, de domínio $\mathbb{C}$, e o arco da circunferência de centro na origem e de raio 1 situado no 1^o quadrante, parametrizado por $\gamma(t) = \cos t + i\sin t$, $t \in [0, \pi/2]$. Temos $\gamma'(t) = -\sin t + i\cos t$ e, sendo $f(z) = x - yi$ uma função contínua em todos os pontos da curva, obtemos*

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_0^{\pi/2} f\left(\cos t + i\sin t\right)(-\sin t + i\cos t)dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\cos t - i\sin t\right)(-\sin t + i\cos t)dt \\ &= \int_0^{\pi/2} i\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)dt = i\int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}i.\end{aligned}$$

Exemplo 17 *Dada a função $f(z) = z^2$ contínua em todo o plano complexo, pretendemos calcular o valor do seu integral ao longo do segmento de recta definido, em coordenadas rectangulares, pela equação $y = 5x$, entre os pontos $z_1 = 0$ e $z_2 = 2 + 10i$. Podemos considerar a própria variável x como parâmetro e usar a parametrização $\gamma(x) = x + 5xi$, com $x \in [0, 2]$. Temos $\gamma'(x) = 1 + 5i$ e o integral é então dado por*

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_0^2 f(x+5xi)(1+5i)dx = \int_0^2 (x+5xi)^2 (1+5i)dx \\ &= \int_0^2 \left(10x^2 i - 24x^2\right)(1+5i)dx = \int_0^2 \left(-74x^2 - 110x^2 i\right) dx \\ &= \int_0^2 -74x^2 dx - i\int_0^2 110x^2 dx = -\frac{592}{3} - \frac{880}{3}i.\end{aligned}$$

Nota 9 *Seja $f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$ e $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ a parametrização de uma curva. Sem perda de generalidade, podemos supor que γ é suave[4]. Temos*

$$\mathrm{Re}\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \left[u(x,y)dx - v(x,y)dy\right],$$

e

$$\mathrm{Im}\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \left[u(x,y)dy + v(x,y)dx\right].$$

O integral curvilíneo $\int_\gamma f(z)dz$ pode assim ser escrito em termos de dois integrais de linha no plano bidimensional.

Algumas propriedades dos integrais curvilíneos são enunciadas a seguir.

Proposição 14 *Seja γ uma curva em $\mathbb{C}$ seccionalmente suave. Sejam f e g funções definidas e contínuas na curva γ. São válidas as seguintes propriedades:*

(a) $\int_\gamma [C_1 f(z) + C_2 g(z)]\, dz = C_1 \int_\gamma f(z)dz + C_2 \int_\gamma g(z)dz$ para constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ (**linearidade do integral curvilíneo**);

(b) $\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$ (**integral curvilíneo na orientação inversa**);

(c) Se $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$[5] então $\int_{\gamma_1+\cdots+\gamma_n} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)dz$ (**integral curvilíneo ao longo da união de curvas**).

---

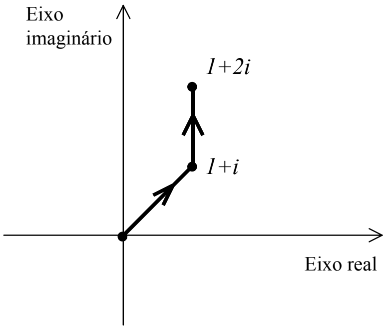
[4] No caso em que γ é uma curva seccionalmente suave basta, atendendo à definição 8, usar o mesmo raciocínio em cada subintervalo $[a_{j-1}, a_j]$ da partição do intervalo $[a, b]$.

[5] Escrevemos $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\gamma}_2$ para denotar que γ é a **união** ou **soma** das curvas seccionalmente suaves γ_1 e γ_2: dadas curvas $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_2 : [b, c] \to \mathbb{C}$ com $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, define-se $\gamma_1 + \gamma_2 : [a, c] \to \mathbb{C}$ por

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } a \le t \le b \\ \gamma_2(t) & \text{se } b \le t \le c \end{cases}.$$

A soma geral $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_1 + \cdots + \boldsymbol{\gamma}_n$ define-se de forma análoga.

Exemplo 7 *Considerando a curva apresentada na figura,*



pretendemos calcular o valor do integral curvilíneo da função $f(z) = x^2 + y^2 i$ *ao longo desta curva seccionalmente suave. Esta curva é a união de duas curvas suaves, uma parametrizada por* $\gamma_1(t) = t + ti$ *com* $t \in [0,1]$ *e outra parametrizada por* $\gamma_2(t) = 1 + ti$*, com* $t \in [1,2]$*. Então* $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ *e logo*

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)dz &= \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz \\ &= \int_0^1 f(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)dt + \int_1^2 f(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t)dt \\ &= \int_0^1 \left(t^2 + t^2 i\right)(1+i)\,dt + \int_1^2 \left(1 + t^2 i\right) i\ dt \\ &= (1+i)\int_0^1 t^2(1+i)dt + \int_1^2 \left(i - t^2\right) dt \\ &= (1+i)^2 \int_0^1 t^2 dt + i\int_1^2 dt - \int_1^2 t^2 dt \\ &= (1+i)^2 \frac{1}{3} + i - \frac{7}{3} = -\frac{7}{3} + \frac{5}{3} i. \end{aligned}$$

A mesma curva pode ser parametrizada por diferentes funções. Põe-se a questão de saber se o valor do integral curvilíneo $\int_\gamma f(z)dz$ é independente da parametrização usada. Para responder a esta questão necessitamos da seguinte definição.

Definição 16 *Dada uma curva seccionalmente suave parametrizada por* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$*, uma nova função* $\widetilde{\gamma} : \left[\widetilde{a}, \widetilde{b}\right] \to \mathbb{C}$ *diz-se uma* ***reparametrização de*** $\boldsymbol{\gamma}$ *se existe uma função* $\alpha : [a,b] \to \left[\widetilde{a}, \widetilde{b}\right]$ *tal que* $\alpha'(t) > 0$*,* $\alpha(a) = \widetilde{a}$*,* $\alpha(b) = \widetilde{b}$ *e* $\gamma(t) = \widetilde{\gamma}(\alpha(t))$*.*

As condições impostas a α, $\alpha'(t) > 0$, $\alpha(a) = \widetilde{a}$ e $\alpha(b) = \widetilde{b}$, garantem que a curva parametrizada por $\widetilde{\gamma}$ tem a mesma orientação que a curva parametrizada por γ.

Proposição 15 *Se* $\widetilde{\gamma} : \left[\widetilde{a}, \widetilde{b}\right] \to \mathbb{C}$ *é uma reparametrização de* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *então*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\widetilde{\gamma}} f(z)dz.$$

Exemplo 8 *Pretendemos calcular* $\int_\gamma \operatorname{Re}(z)dz$ *ao longo do segmento de recta que une* $z_1 = 0$ *a* $z_2 = 1+i$. *Escolha-se a parametrização* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ *dada por* $\gamma(t) = t + it$. *A função integranda é contínua nos pontos da curva. Dado que* $\gamma'(t) = 1+i$, *temos*

$$\begin{aligned} \int_\gamma \operatorname{Re}(z)dz &= \int_0^1 \operatorname{Re}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt = \int_0^1 \operatorname{Re}(t+it)(1+i)dt \\ &= \int_0^1 t(1+i)dt = (1+i)\int_0^1 t\ dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i. \end{aligned}$$

Para a mesma curva podemos considerar outras parametrizações, por exemplo, $\widetilde{\gamma} : [1,2] \to \mathbb{C}$ *definida por* $\widetilde{\gamma}(t) = (t-1) + i(t-1)$. *Verificamos que o integral é dado pelo mesmo valor,*

$$\begin{aligned} \int_{\widetilde{\gamma}} \operatorname{Re}(z)dz &= \int_1^2 \operatorname{Re}(\widetilde{\gamma}(t)) \cdot \widetilde{\gamma}'(t)dt = \int_1^2 \operatorname{Re}[t-1+i(t-1)](1+i)dt \\ &= \int_1^2 (t-1)(1+i)dt = (1+i)\int_1^2 (t-1)\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i. \end{aligned}$$

Frequentemente, é útil obter uma estimativa superior do módulo de um integral. Dada uma curva parametrizada por $\gamma(t) = x(t) + y(t)i$, com $t \in [a,b]$, o **comprimento da curva γ** é definido por

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt.$$

Nota-se que, o comprimento de uma curva é independente da parametrização considerada.

Proposição 16 *Seja* f *uma função complexa de variável complexa definida e contínua num aberto* $A \subseteq \mathbb{C}$ *e seja* $\gamma : [a,b] \to A$ *uma curva seccionalmente suave em* A. *Se* f *for limitada sobre a curva, isto é, se existir* $M \geq 0$ *tal que* $|f(z)| \leq M$, *para todo o* $z \in \gamma([a,b])$, *então*

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq M \cdot l(\gamma).$$

Exemplo 9 *Consideremos a função complexa* $f(z) = e^z/(z+1)$ *de domínio* $\mathbb{C}\setminus\{-1\}$. *Pretendemos obter uma estimativa superior do módulo do integral de* f *ao longo da circunferência de centro na origem e de raio 4, definida por* $|z| = 4$. *Considerando a parametrização* $\gamma(t) = 4\cos t + 4\sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, *o comprimento desta curva é dado pelo integral*

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-4\sin t)^2 + (4\cos t)^2}\ dt = \int_0^{2\pi} 4\ dt = 8\pi$$

(como seria de esperar pela fórmula do perímetro de uma circunferência). Quanto à limitação da função f *ao longo desta circunferência, podemos escrever*

$$\left| \frac{e^z}{z+1} \right| = \frac{|e^z|}{|z+1|} \leq \frac{|e^z|}{|z|-1} = \frac{|e^z|}{4-1} = \frac{|e^z|}{3} = \frac{e^x}{3} \leq \frac{e^4}{3},$$

já que o valor máximo que $x = \mathrm{Re}(z)$ pode tomar ao longo da circunferência é 4*. Então, pela proposição* 16*, obtemos a estimativa pedida,*

$$\left|\oint_\gamma \frac{e^z}{z+1}dz\right| \leq \frac{e^4}{3}8\pi = \frac{8\pi e^4}{3}.$$

Exercícios resolvidos

1. Dada a função complexa $f(z) = \overline{z}$ calcule o valor do integral curvilíneo $\int_\gamma f(z)dz$ onde γ é a curva definida por $x(t) = 3t$ e $y(t) = t^2$, com $t \in [1, 4]$.

2. Calcule o valor do integral curvilíneo $\int_\gamma f(z)dz$ para

   (a) $f(z) = y - x - 3x^2 i$ sobre a curva que é a união do segmento de recta que une $z = 0$ a $z = i$ com o segmento de recta que une $z = i$ a $z = 1 + i$;

   (b) $f(z) = (z + 2)/z$ sobre a semicircunferência parametrizada por $\gamma(\theta) = 2e^{i\theta}$, com $0 \leq \theta \leq -\pi$;

   (c) $f(z) = 1/z$ sobre os pontos da semicircunferência de centro 2 e de raio 1 com parte real superior a 2 e percorrida no sentido negativo.

3. Considere o caminho $\gamma(t) = e^{it}$, para $t \in [0, 2\pi]$. Prove que são nulos os integrais curvilíneos

$$\oint_\gamma \frac{1}{|z|}dz \quad \text{e} \quad \oint_\gamma \frac{1}{|z^2|}dz.$$

4. Calcule o valor do integral curvilíneo $\int_\gamma f(z)dz$ onde γ é a curva de equação dada, em coordenadas rectangulares, por $y = x^3$ entre os pontos $z = -1 - i$ e $z = 1 + i$, e onde f é a função definida por

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{se } y < 0 \\ 4y & \text{se } y > 0 \end{cases}.$$

5. Considere a curva $\gamma(t) = e^{it}$, com $t \in [0, \pi]$. Mostre que

$$\left|\int_\gamma \frac{e^z}{z}dz\right| \leq e\pi.$$

6. Escrevendo o integral curvilíneo em termos de integrais reais, prove que

$$\int_\gamma dz = B - A$$

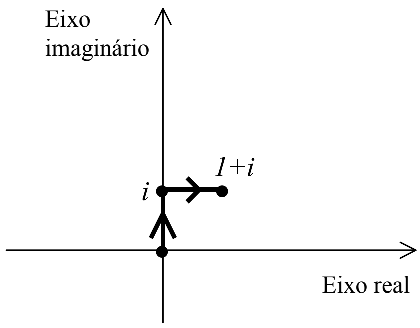
   quando a integração é feita ao longo de uma curva seccionalmente suave que una o ponto A ao ponto B.

Propostas de resolução

1. Dada a curva $\gamma(t) = 3t + it^2$, com $t \in [-1, 4]$, temos $\gamma'(t) = 3 + 2ti$. Sendo $x(t) = 3t$ e $y(t) = t^2$ funções contínuas com derivadas contínuas no intervalo $[-1, 4]$, a curva γ é suave. Corresponde ao arco da parábola definida, em coordenadas rectangulares, pela equação $y = x^2/9$ entre os pontos $z = \gamma(-1) = -3 + i$ e $z = \gamma(4) = 12 + 16i$. Sendo a função $f(z) = \overline{z}$ contínua em todos os pontos da curva γ, o integral curvilíneo é dado por

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \overline{z} dz &= \int_{-1}^{4} \overline{3t + it^2}(3 + 2ti)dt = \int_{-1}^{4} \left(3t - t^2 i\right)(3 + 2ti)dt \\
&= \int_{-1}^{4} \left(9t + 2t^3 + 3t^2 i\right) dt = \int_{-1}^{4} \left(9t + 2t^3\right) dt + 3i \int_{-1}^{4} t^2 \ dt \\
&= \frac{9}{2}15 + \frac{1}{2}255 + 3i\frac{1}{3}63 = 195 + 63i.
\end{aligned}$$

2. (a) O segmento de recta que une $z = 0$ a $z = i$ pode ser parametrizado por $\gamma_1(t) = ti$, com $0 \leq t \leq 1$, e o segmento de recta que une $z = i$ a $z = 1 + i$ por $\gamma_2(t) = t + i$, com $0 \leq t \leq 1$.



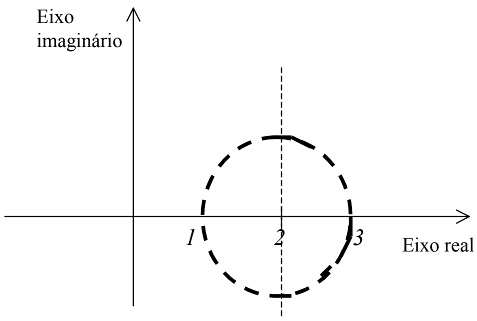
Dado que a função $f(z) = y - x - 3x^2 i$ está definida e é contínua ao longo de cada uma das curvas suaves consideradas, temos

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_0^1 f(ti)i \ dt + \int_0^1 f(t + i)1 \ dt = \int_0^1 ti \ dt + \int_0^1 \left(1 - t - 3t^2 i\right) dt \\
&= i \int_0^1 t \ dt + \int_0^1 (1 - t) \, dt - 3i \int_0^1 t^2 \ dt = i + \frac{1}{2} - 3i\frac{1}{3} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(b) A semicircunferência parametrizado por $\gamma(\theta) = 2e^{i\theta}$, com $-\pi \leq \theta \leq 0$, centrada na origem e com raio 2 situada nos 3^o e 4^o quadrantes, é uma curva suave com $\gamma'(\theta) = 2ie^{i\theta}$. A função $f(z) = (z+2)/z$ está definida (o seu domínio é $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ e a origem não pertence a γ) e é contínua na semicircunferência γ. Temos, então

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_{-\pi}^{0} f\left(2e^{i\theta}\right) 2ie^{i\theta}\, d\theta = \int_{-\pi}^{0} \frac{2e^{i\theta}+2}{2e^{i\theta}} 2ie^{i\theta}\, d\theta \\
&= i\int_{-\pi}^{0} \left(2e^{i\theta}+2\right) d\theta = i\int_{-\pi}^{0} \left(2\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)+2\right) d\theta \\
&= i\left[\int_{-\pi}^{0} \left(2\cos\theta + 2\right) d\theta + 2i\int_{-\pi}^{0} \sin\theta d\theta\right] \\
&= i\left[2\pi + 2i\left(-1-1\right)\right] = i(2\pi - 4i) = 4 + 2\pi i.
\end{aligned}$$

(c) Os pontos da semicircunferência de centro 2 e de raio 1 com parte real superior a 2, percorrida no sentido negativo,.podem ser parametrizados por $\gamma(t) = 2 + \cos t - i\sin t$ com $-\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.



Trata-se de uma curva suave onde a função $f(z) = 1/z$ está definida (o seu domínio é $\mathbb{C}\setminus\{0\}$) e é contínua. O integral curvilíneo é dado por

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma f(z)dz &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(2+\cos t - i\sin t)(-\sin t - i\cos t)dt \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2+\cos t - i\sin t}(-\sin t - i\cos t)dt \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\left(2+\cos t + i\sin t\right)\left(-\sin t - i\cos t\right)}{\left(2+\cos t - i\sin t\right)\left(2+\cos t + i\sin t\right)}dt \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{-2\sin t - 2i\cos t - i}{\left(2+\cos t\right)^2 + \sin^2 t}dt \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{-2\sin t - i\left(2\cos t - 1\right)}{4+4\cos t}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{-\sin t}{1+\cos t}dt - \frac{i}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2\cos t - 1}{1+\cos t}dt.
\end{aligned}$$

Efectuando a mudança de variável no 2^o integral simples $\tan t/2 = s$, temos $\cos t =$

$\left(1-s^2\right)/\left(1+s^2\right)$ e $t' = 2/\left(1+s^2\right)$. Obtemos, então,

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma f(z)dz &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{-\sin t}{1+\cos t}dt - \frac{i}{4}\int_{-1}^{1} \frac{2\frac{1-s^2}{1+s^2}-1}{1+\frac{1-s^2}{1+s^2}} \frac{2}{1+s^2}ds \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln|1+\cos t|\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \frac{i}{2}\int_{-1}^{1} \frac{2-2s^2-1-s^2}{1+s^2+1-s^2}\frac{1}{1+s^2}ds \\
&= \frac{1}{2}(\ln 1 - \ln 1) - \frac{i}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1-3s^2}{2}\frac{1}{1+s^2}ds \\
&= 0 + \frac{i}{4}\int_{-1}^{1}\frac{3s^2-1}{1+s^2}ds = \frac{i}{4}\int_{-1}^{1}\left(3-\frac{4}{1+s^2}\right)ds \\
&= \frac{i}{4}\left[3s - 4\arctan s\right]_{-1}^{1} = \frac{i}{4}\left(3-4\frac{\pi}{4}+3+4\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= \frac{i}{4}(6-2\pi) = \frac{3-\pi}{2}i.
\end{aligned}$$

3. Dada a curva $\gamma(t) = e^{it}$, para $t \in [0, 2\pi]$ temos $\gamma'(t) = ie^{it}$. Trata-se da circunferência de centro na origem e de raio 1, onde as funções $f(z) = 1/|z|$ e $g(z) = 1/\left|z^2\right|$, de domínio $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, estão definidas e são contínuas. Para esta curva suave os integrais curvilíneos são dados por

$$\oint_\gamma \frac{1}{|z|}dz = \int_0^{2\pi}\frac{1}{|e^{it}|}\cdot ie^{it}\ dt = \int_0^{2\pi} ie^{it}\ dt = \left[e^{it}\right]_0^{2\pi} = e^{2\pi i}-1 = 0$$

$$\oint_\gamma \frac{1}{|z^2|}dz = \int_0^{2\pi}\frac{1}{|e^{2it}|}\cdot ie^{it}\ dt = \int_0^{2\pi}\frac{1}{e^2}\cdot ie^{it}\ dt = \frac{1}{e^2}\int_0^{2\pi} ie^{it}\ dt = 0.$$

4. A curva pode ser parametrizada por $\gamma(t) = t + t^3 i$, com $-1 \le t \le 1$. Trata-se de uma curva suave com $\gamma'(t) = 1 + 3t^2 i$. A função f, de domínio $\mathbb{C}$, é contínua em todos os ponto da curva. Temos

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_{-1}^{1} f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt = \int_{-1}^{1} f(t+t^3 i)\left(1+3t^2 i\right)dt \\
&= \int_{-1}^{0}\left(1+3t^2 i\right)dt + \int_0^1 4t^3\cdot\left(1+3t^2 i\right)dt \\
&= \int_{-1}^{0} dt + 3i\int_{-1}^{0} t^2\ dt + 4\int_0^1 t^3\ dt + 12i\int_0^1 t^5\ dt \\
&= 1 - \frac{3i}{3} + \frac{4}{4} + \frac{12i}{6} = 2 + i.
\end{aligned}$$

5. A curva $\gamma(t) = e^{it}$, para $t \in [0, \pi]$, é a semicircunferência de centro na origem e de raio 1 situada nos 1^o e 2^o quadrantes. Trata-se de uma curva suave onde a função $f(z) = e^z/z$, de domínio $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, está definida e é contínua. Pretendemos obter uma estimativa superior

do módulo do integral curvilíneo de f ao longo da semicircunferência. O comprimento da semicircunferência é π,

$$l(\gamma) = \int_0^{\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\, dt = \int_0^{\pi} dt = \pi,$$

e todos os seus pontos verificam $|z| = \left|e^{it}\right| = 1$. Quanto à limitação da função f ao longo desta semicircunferência, podemos escrever

$$\left|\frac{e^z}{z}\right| = \frac{|e^z|}{|z|} \leq \frac{|e^z|}{1} = e^x \leq e,$$

já que o valor máximo que x pode tomar ao longo da circunferência é 1. Então, por (5.2), temos a estimativa pedida

$$\left|\oint_\gamma \frac{e^z}{z} dz\right| \leq e\pi.$$

6. Consideremos a parametrização $\gamma(t)$ com $t \in [a, b]$ para uma curva seccionalmente suave que una o ponto A ao ponto B. Temos a função $f(z) = 1$ que é contínua ao longo de qualquer curva seccionalmente suave. Como tal,

$$\int_\gamma dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt = \int_a^b \gamma'(t)dt = \gamma(b) - \gamma(a) = B - A.$$

3.2 Primitivação complexa

O teorema fundamental do cálculo integral para funções reais de variável real afirma que o integral da derivada de uma função é a diferença dos valores da função nos extremos do intervalo de integração e que o integral indefinido de uma função é uma primitiva para a função. Vejamos um resultado análogo para integrais curvilíneos complexos.

Definição 17 *Dada uma função complexa f definida e contínua numa região $A \subseteq \mathbb{C}$, a função F tal que $F'(z) = f(z)$, para todo $z \in A$, diz-se uma* ***primitiva de* f** *(ou uma* ***antiderivada de* f***).*

Notemos que esta definição implica que F é analítica em A (e, portanto, também contínua em A) por ter derivada em todos os pontos do aberto A.

Exemplo 10 *A função $F(z) = -\cos z$ é uma primitiva de $f(z) = \sin z$ visto que $(-\cos z)' = \sin z$. Dado que $(-\cos z + C)' = \sin z$, qualquer que seja $C \in \mathbb{C}$, $-\cos z + C$ é a expressão geral das primitivas de $f(z) = \sin z$.*

Sejam f uma função complexa definida e contínua numa região $A \subseteq \mathbb{C}$ e $F = u + iv$ uma primitiva de f em A. Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ é uma curva contida em A parametrizada por $\gamma(t) =$

$x(t) + y(t)i$ então

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t))dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Está assim provado o seguinte resultado.

Teorema 2 ***Teorema fundamental do cálculo integral*** *Sejam $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ uma curva e f uma função contínua numa região $A \subseteq \mathbb{C}$ contendo a curva γ. Se F é uma primitiva de f em A então*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(a)) - F(\gamma(b)).$$

Em particular, se $\gamma(a) = \gamma(b)$,

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0.$$

Se $\gamma(a) = z_1$ e $\gamma(b) = z_2$ é usual escrever

$$\int_\gamma f(z)dz = [F(z)]_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1).$$

Notemos ainda que, nas condições do teorema anterior, o valor do integral $\int_\gamma f(z)dz$ depende apenas dos extremos da curva γ. Assim, se α for outra curva com as mesmas extremidades, o valor do integral é o mesmo. Diz-se que **o integral é independente da curva considerada** e pode denotar-se simplesmente por $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$.

Teorema 3 *Seja f uma função contínua numa região $A \subseteq \mathbb{C}$. Então são equivalentes as seguintes afirmações:*

(i) *f tem uma primitiva em A;*

(ii) *o valor do integral curvilíneo de f é o mesmo ao longo de qualquer curva contida em A ligando pontos z_1 e z_2 fixos;*

(iii) *o valor do integral curvilíneo de f é zero ao longo de qualquer curva fechada contida em A.*

Exercícios resolvidos

1. Mostre que não existe uma função analítica f definida em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $f'(z) = 1/z$.

2. Calcule $\int_\gamma z^2\, dz$, para a curva $\gamma(t) = e^{it} \sin^3 t$, com $t \in [0, \pi/2]$.

3. Calcule $\int_\gamma e^z\, dz$ sobre o contorno do triângulo de vértices $z = 0$, $z = 1$ e $z = \pi i$.

4. Calcule o valor de cada um dos seguintes integrais curvilíneos:

(a) $\int_0^{\pi+2i} \cos(z/2)\, dz$;

(b) $\int_i^{i/2} e^{\pi z}\ dz$;

(c) $\int_1^3 (z-2)^3\ dz$.

5. Seja γ a parametrização de uma curva contida no conjunto $\mathbb{C}\setminus\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0\}$ que una o ponto $z = -i$ ao ponto $z = i$. Calcule o valor do integral curvilíneo $\int_\gamma 1/z\ dz$.

6. Calcule $\int_\gamma \log z\ dz$, onde γ é o arco da circunferência de centro na origem e de raio r situado no 1^o quadrante.

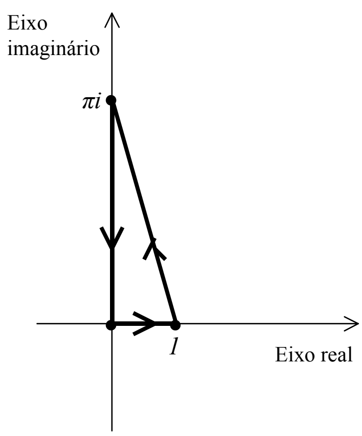
7. Demonstre as implicações $(i) \Rightarrow (ii)$ e $(ii) \Rightarrow (iii)$ do teorema 2.

Propostas de resolução

1. Suponhamos, por absurdo, que existe uma função f analítica definida em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ tal que $f'(z) = 1/z$. Vimos que a função logaritmo principal $\log z$ verificava $(\log z)' = 1/z$. Contudo, a função logaritmo, embora definida em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, não é analítica no eixo real negativo.

2. A função $f(z) = z^2$ é contínua em $\mathbb{C}$ e $F(z) = z^3/3$ é uma primitiva de f. A curva $\gamma(t) = e^{it}\sin^3 t$, para $t \in [0, \pi/2]$, une o ponto $z = \gamma(0) = 0$ ao ponto $z = e^{\pi i/2} = i$. Então, pelo teorema 1,
$$\int_\gamma f(z)dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^i = \frac{i^3}{3} - 0 = -\frac{i}{3}.$$

3. O contorno do triângulo de vértices $0, 1$ e πi é seccionalmente suave.



Consideremos as parametrizações $\gamma_1(t) = t + 0i$, com $0 \leq t \leq 1$, $\gamma_2(t) = 1 - t/\pi + ti$. com $0 \leq t \leq \pi$ e $\gamma_3(t) = 0 - ti$,com $-\pi \leq t \leq 0$. A função $f(z) = e^z$ é contínua no contorno do triângulo γ. Temos então

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_0^1 f(t)\ dt + \int_0^\pi f(1-\frac{t}{\pi}+ti)\left(-\frac{1}{\pi}+i\right)dt + \int_{-\pi}^0 f(-ti)(-i)dt \\ &= \int_0^1 e^t\ dt + \int_0^\pi e^{1-\frac{t}{\pi}+ti}\left(-\frac{1}{\pi}+i\right)dt + \int_{-\pi}^0 e^{-ti}(-i)dt \\ &= \left[e^t\right]_0^1 + \left[e^{1-\frac{t}{\pi}+ti}\right]_0^\pi + \left[e^{-ti}\right]_{-\pi}^0 = e + e^{\pi i} - e + e - e^{\pi i} = e.\end{aligned}$$

4. (a) A função $f(z) = \cos(z/2)$ é contínua em todos os pontos do seu domínio $\mathbb{C}$ e $F(z) = 2\sin(z/2)$ é uma primitiva de f. Então, pelo teorema 1,

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \left[2\sin\frac{z}{2}\right]_0^{\pi+2i} = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}+i\right) - 0 = \frac{e^{(\pi/2+i)i} - e^{-(\pi/2+i)i}}{2i} \\ &= \frac{e^{-1+\pi/2i} - e^{1-\pi/2i}}{2i} = \frac{e^{-1}(0+i) - e^1(0-i)}{2i} = \frac{e^{-1}-e}{2} = \frac{1-e^2}{2e}.\end{aligned}$$

(b) A função $f(z) = e^{\pi z}$ é contínua em todos os pontos do seu domínio $\mathbb{C}$ e $F(z) = 1/\pi e^{\pi z}$ é uma primitiva de f. Então, pelo teorema 1,

$$\int_\gamma f(z)dz = \left[\frac{1}{\pi}e^{\pi z}\right]_i^{i/2} = \frac{1}{\pi}\left(e^{\pi/2i} - e^{\pi i}\right) = \frac{1}{\pi}(i-1).$$

(c) A função $f(z) = (z-2)^3$ é contínua em todos os pontos do seu domínio $\mathbb{C}$ e $F(z) = (z-2)^4/4$ é uma primitiva de f. Então, pelo teorema 1,

$$\int_\gamma f(z)dz = \left[\frac{(z-2)^4}{4}\right]_1^3 = \frac{1}{4}(1-1) = 0.$$

5. A função $f(z) = 1/z$ é contínua em todos os pontos do seu domínio $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, ao qual pertencem todos os pontos da curva, e $F(z) = \log z$ é uma primitiva de f. Então, pelo teorema 1, temos

$$\int_\gamma f(z)dz = [\log z]_{-i}^i = \log(-i) - \log i = \ln 1 + i\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \left(\ln 1 + i\frac{\pi}{2}\right) = -\pi i.$$

6. A função $f(z) = \log z$ é analítica em todos os pontos do conjunto $\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z \le 0\}$, ao qual pertencem todos os pontos da curva, e $F(z) = z\log z - z$ é uma primitiva de f. A função F tem derivada contínua em todos os pontos do conjunto $C\setminus\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z \le 0\}$ ao qual pertencem todos os pontos da curva. Então, pelo teorema 1, temos

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= [z\log z - z]_i^{ri} = ri\log(ri) - ri - (i\log i - i) \\ &= ri\left(\ln r + i\frac{\pi}{2}\right) - ri - i\left(\ln 1 + i\frac{\pi}{2}\right) + i \\ &= \frac{\pi(1-r)}{2} + r(\ln r - 1)i.\end{aligned}$$

3.3 Teorema de Cauchy-Goursat

Em 1825, o matemático francês Louis-Augustin Cauchy provou um dos mais importantes teoremas da análise complexa: se γ parametriza uma curva simples e fechada (i.e., uma curva de Jordan) no plano complexo e f é uma função analítica em todos os pontos da curva e do seu interior então

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0.$$

Se f não for analítica em toda a região do interior da curva então o valor do integral poderá ou não ser nulo. Consideremos o seguinte exemplo.

Exemplo 11 *A função $f(z) = 1/z$ analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Se a curva de Jordan considerada for a circunferência de centro na origem e de raio r,*

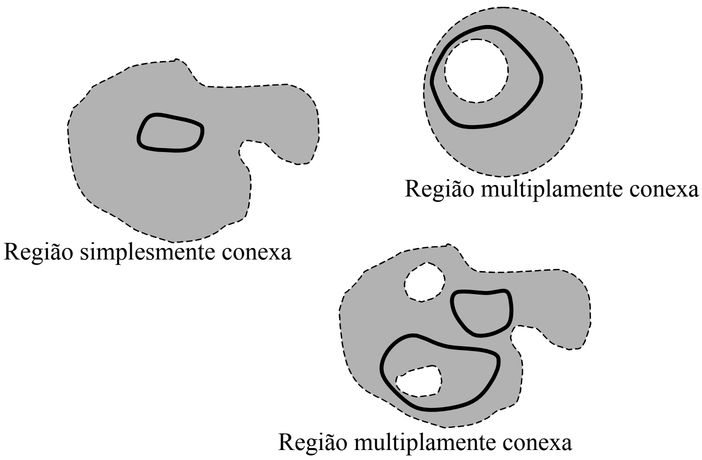
$$\begin{aligned} \oint_\gamma f(z)dz &= \int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) re^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} e^{-i\theta} ire^{i\theta} d\theta \\ &= i \int_0^{2\pi} d\theta = i\,[\theta]_0^{2\pi} = 2\pi i. \end{aligned}$$

Não era esperado um resultado nulo dado que a função f não é analítica no círculo de centro na origem e de raio r. No entanto, para a função $f(z) = 1/z^2$ temos

$$\begin{aligned} \oint_\gamma f(z)dz &= \int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) re^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} e^{-i2\theta} ire^{i\theta} d\theta \\ &= -\frac{1}{r}\left[e^{-i\theta}\right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{r}\left(e^{-i2\pi} - e^0\right) = 0, \end{aligned}$$

mas tal não ocorre por consequência do teorema de Cauchy. De facto, f é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, não sendo, portanto, analítica na curva e no seu interior.

Definição 18 *Um conjunto D diz-se simplesmente conexo se toda a curva de Jordan em D pode ser deformada num ponto de D, sem sair do conjunto D. Dito de outro modo, num conjunto simplesmente conexo D, cada curva simples fechada inteiramente contida em D delimita apenas pontos do conjunto D. Num conjunto simplesmente conexo não é admitida a existência de "buracos". Todo o plano complexo é um exemplo de conjunto simplesmente conexo. O interior de uma curva de Jordan é uma **região simplesmente conexa**. No entanto, o exterior de uma curva fechada não o é, assim como também não o é a região entre duas circunferências. Uma região que* *não é simplesmente conexa designa-se por* ***região multiplamente conexa****.*



Teorema 4 *Sejam f uma função analítica e com derivada contínua em todos os pontos de uma região simplesmente conexa D e γ a parametrização de uma curva de Jordan contida em D. Então*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0.$$

Uma versão mais precisa do teorema de Cauchy foi desenvolvida pelo matemático francês Edouard Goursat em 1883. Ele provou que a hipótese de continuidade de f' pode ser omitida. A reformulação do teorema é a seguinte.

Teorema 5 ***Teorema de Cauchy-Goursat*** *Sejam f é uma função analítica numa região simplesmente conexa D e γ a parametrização de uma curva de Jordan contida em D. Então*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0.$$

Visto que o interior de uma curva de Jordan é uma região simplesmente conexa, o teorema de Cauchy-Goursat pode ter a seguinte reformulação mais simples.

Teorema 6 *Se f é uma função analítica numa região simplesmente conexa D então, para cada curva de Jordan γ contida em D, é válido que*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0.$$

Exemplo 18 *Consideremos a função inteira $f(z) = \sin(e^z)$. Em particular, é analítica nos pontos da circunferência de centro na origem e raio 1 bem como no seu interior. Sendo γ uma parametrização desta curva de Jordan temos, pelo teorema 4,*

$$\oint_\gamma \sin(e^z)dz = 0.$$

Exemplo 19 *Pretendemos determinar o valor do integral curvilíneo de* $f(z) = e^z$ *ao longo de qualquer curva de Jordan* γ. *Trata-se de uma função inteira que, em particular, é analítica em todos os pontos da curva e do seu interior. Temos então, pelo teorema* 4,

$$\oint_\gamma e^z dz = 0.$$

Exemplo 20 *Consideremos a função racional* $f(z) = 1/z^2$ *e a elipse definida, em coordenadas rectangulares, por* $(x-2)^2 + (y-5)^2/4 = 1$. *A função é analítica em* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *mas a origem não é ponto da elipse nem do seu interior. Podemos então, pelo teorema* 4, *concluir que*

$$\oint_\gamma \frac{1}{z^2} dz = 0.$$

Exemplo 12 *Pretendemos calcular o valor do integral curvilíneo* $\int_\gamma 1/\left(z^2+1\right) dz = 0$ *ao longo da circunferência* γ *definida por* $|z| = 3$. *A função* $f(z) = 1/\left(z^2+1\right)$ *é analítica em* $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ *visto que* $z^2 + 1 = (z-i)(z+i)$. *Ambos os complexos* $z = -i$ *e* $z = i$ *estão no interior da curva* γ. *Atendendo a que*

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{\frac{1}{2i}}{z-i} - \frac{\frac{1}{2i}}{z+i}$$

temos

$$\oint_\gamma \frac{1}{z^2+1} dz = \frac{1}{2i} \oint_\gamma \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right) dz.$$

Consideremos as curvas de Jordan γ_1 *e* γ_2 *definidas por* $|z-i| = 1/2$ *e* $|z+i| = 1/2$, *respectivamente. Temos, então, pelo teorema* 8,

$$\begin{aligned} \oint_\gamma \frac{1}{z^2+1} dz &= \frac{1}{2i} \oint_{\gamma_1} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right) dz + \frac{1}{2i} \oint_{\gamma_2} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right) dz \\ &= \frac{1}{2i} \oint_{\gamma_1} \frac{1}{z-i} dz - \frac{1}{2i} \oint_{\gamma_1} \frac{1}{z+i} dz + \frac{1}{2i} \oint_{\gamma_2} \frac{1}{z-i} dz - \frac{1}{2i} \oint_{\gamma_2} \frac{1}{z+i} dz. \end{aligned}$$

Visto que a função $1/(z+i)$ *é analítica na circunferência* γ_1 *e no seu interior, assim como a função* $1/(z-i)$ *é analítica na circunferência* γ_2 *e no seu interior temos, pelo teorema* 4, $\oint_{\gamma_1} 1/(z+i) dz = \oint_{\gamma_2} 1/(z-i) dz = 0$. *Quanto aos restantes integrais curvilíneos, consideremos as parametrizações*

$$\gamma_1(\theta) = i + \frac{1}{2} e^{i\theta} \quad e \quad \gamma_2(\theta) = -i + \frac{1}{2} e^{i\theta}$$

com $0 \leq \theta \leq 2\pi$. *Temos, então,*

$$\oint_{\gamma_1} \frac{1}{z-i} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma_1(\theta) - i} \gamma_1'(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{1}{2} e^{i\theta}} \frac{1}{2} i e^{i\theta}\, d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

e

$$\oint_{\gamma_2} \frac{1}{z+i} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma_2(\theta) + i} \gamma_2'(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{1}{2} e^{i\theta}} \frac{1}{2} i e^{i\theta}\, d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

Como tal,

$$\oint_\gamma \frac{1}{z^2+1}dz = \frac{1}{2i}2\pi i - 0 - 0 - \frac{1}{2i}2\pi i = 0.$$

Exercícios resolvidos

1. Determine o domínio de analiticidade das seguintes funções e aplique o teorema 4 para mostrar que $\oint_\gamma f(z)dz = 0$, onde γ é uma parametrização da circunferência definida por $|z| = 1$.

   (a) $f(z) = ze^{-z}$;

   (b) $f(z) = 1/\left(z^2 + 2z + 2\right)$;

   (c) $f(z) = \log(z + 2)$.

2. Calcule $\oint_\gamma e^{3z}/\left(z - i\pi\right)dz$, onde γ é a elipse de equação $|z-2| + |z+2| = 6$ descrita no sentido positivo.

3. Sejam $f(z) = u + iv$ uma função analítica numa região D e $\gamma(t) = x(t) + y(t)i$, com $t \in [a, b]$, uma curva de Jordan contida e D.

   Mostre que
   $$\oint_\gamma \frac{\partial u}{\partial x}dx = \oint_\gamma \frac{\partial v}{\partial x}dy \quad \text{e} \quad \oint_\gamma \frac{\partial u}{\partial x}dy = -\oint_\gamma \frac{\partial v}{\partial x}dx.$$

4. Sejam γ e η parametrizações de curvas que unam $z = -i$ a $z = i$ definidas por $\gamma(t) = e^{it}$, para $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, e $\eta(t) = (-1 + 2t)\, i$, para $t \in [0, 1]$.
   $$\int_\gamma \left(\frac{\overline{z}^2}{2} + |z|^2\right)dz \quad \text{e} \quad \int_\eta \left(\frac{\overline{z}^2}{2} + |z|^2\right)dz$$
   e determine os seus valores. Justifique que não é possível utilizar o teorema 4.

5. Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z_1 \neq z_2$. Se γ é um caminho de z_1 para z_2 no interior de uma região simplesmente conexa que não contenha a origem, mostre que
   $$\int_\gamma \frac{1}{z^2}dz = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{z^2}dz = \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}.$$

6. Use um integral indefinido para calcular o valor do integral curvilíneo
   $$\int_{-2i}^{2i} \frac{1}{z}dz$$
   ao longo de qualquer curva que une $z = -2i$ a $z = 2i$, contida no semiplano direito.

Propostas de resolução

1. A circunferência definida por $|z| = 1$ é uma curva de Jordan.

   (a) A função $f(z) = ze^{-z}$ tem domínio $\mathbb{C}$ e é contínua em todo o seu domínio. Podemos então, pelo teorema 4, concluir que
   $$\oint_\gamma ze^{-z}dz = 0.$$

   (b) A função racional $f(z) = 1/\left(z^2 + 2z + 2\right)$ tem por domínio o conjunto $\left\{z \in \mathbb{C} : z^2 + 2z + 2 \neq 0\right\}$. A equação $z^2 + 2z + 2 = 0$ é equivalente a
   $$z = \left(-2 + \sqrt{-4}\right)/2 = -1 + i \quad \vee \quad z = \left(-2 - \sqrt{-4}\right)/2 = -1 - i.$$
   Como tal, temos $D_f = \mathbb{C} \setminus \{-1 + i, -1 - i\}$. A função f é contínua em todo o seu domínio. Nenhum dos pontos $-1 + i$ e $-1 - i$ pertence à circunferência definida por $|z| = 1$ ou ao seu interior. De facto, $|-1 + i| = \sqrt{2} > 1$ e também $|-1 - i| = \sqrt{2} > 1$. Podemos então, pelo teorema 4, concluir que
   $$\oint_\gamma \frac{1}{z^2 + 2z + 2}dz = 0.$$

   (c) A função $f(z) = \log(z + 2)$ está definida para números complexos tais que $z \neq -2$. Temos então $D_f = \mathbb{C} \setminus \{-2\}$. A função f é analítica em complexos z tais que $z + 2$ não seja um número real negativo, ou seja, f é analítica em
   $$\mathbb{C} \setminus \{x + yi : x \leq -2 \wedge \; y = 0\}.$$
   Nenhum dos pontos do conjunto $\{x + yi : x \leq -2 \wedge \; y = 0\}$ pertence à circunferência definida por $|z| = 1$ ou ao seu interior. De facto, os pontos deste conjunto têm módulo superior ou igual a 2. Podemos então, pelo teorema, concluir que
   $$\oint_\gamma \log(z + 2)dz = 0.$$

2. A elipse de equação $|z - 2| + |z + 2| = 6$ tem centro em $(0, 0)$ e semieixos maior e menor de valor 3 e $\sqrt{5}$, respectivamente. De facto,
   $$|x + yi - 2| + |x + yi + 2| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + y^2} + \sqrt{(x + 2)^2 + y^2} = 6,$$
   o que implica
   $$(x - 2)^2 + y^2 + 2\sqrt{(x - 2)^2 + y^2}\sqrt{(x + 2)^2 + y^2} + (x + 2)^2 + y^2 = 36.$$

Temos, então, $-x^2+14-y^2=\sqrt{(x-2)^2+y^2}\sqrt{(x+2)^2+y^2}$ que implica

$$\begin{aligned}
\left(-x^2+14-y^2\right)^2 &= \left((x-2)^2+y^2\right)\left((x+2)^2+y^2\right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \left(-x^2+14-y^2\right)^2 = \left(x^2+y^2+4-4x\right)\left(x^2+y^2+4+4x\right) \\
&\Leftrightarrow x^4-28x^2+2x^2y^2+196-28y^2+y^4 = \left(x^2+y^2+4\right)^2-16x^2 \\
&\Leftrightarrow 20x^2+36y^2=180 \\
&\Leftrightarrow 5x^2+9y^2=45 \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1.
\end{aligned}$$

A função $f(z)=e^{3z}/\left(z-i\pi\right)$ tem por domínio $\mathbb{C}\setminus\{\pi i\}$ e é analítica em todo o seu domínio. O ponto πi não pertence à elipse definida por $|z-2|+|z+2|=6$ ou ao seu interior. De facto, $|\pi i-2|+|\pi i+2|=2\sqrt{4+\pi^2}>6$. Podemos então, pelo teorema 4, concluir que

$$\oint_\gamma \frac{e^{3z}}{z-i\pi}dz=0.$$

3. Sendo $f(z)=u+iv$ uma função analítica numa região D e γ uma curva de Jordan contida em D, sabemos ser nulo o valor do integral $\oint_\gamma f(z)dz$. Temos então,

$$\oint_\gamma (udx-vdy)+i\oint_\gamma (udy+vdx)=0,$$

o que permite concluir que

$$\oint_\gamma (udx-vdy)=0 \quad \text{e} \quad \oint_\gamma (udy+vdx)=0,$$

equivalente a

$$\oint_\gamma udx=\oint_\gamma vdy \quad \text{e} \quad \oint_\gamma udy=-\oint_\gamma vdx.$$

Isto permite concluir que

$$\oint_\gamma \frac{\partial u}{\partial x}dx=\oint_\gamma \frac{\partial v}{\partial x}dy \quad \text{e} \quad \oint_\gamma \frac{\partial u}{\partial x}dy=-\oint_\gamma \frac{\partial v}{\partial x}dx.$$

4. Consideremos a função $f(z)=\overline{z}^2/2+|z|^2$. Trata-se de uma função definida e contínua em todo o plano complexo. Podemos escrever a expressão de f como segue:

$$f(z)=\frac{\overline{z}\cdot\overline{z}}{2}+z\cdot\overline{z}=\overline{z}\left(\frac{\overline{z}}{2}+z\right).$$

Cada uma das parametrizações γ e η define uma curva suave e f está definida ao longo de cada uma dessas curvas. Isto garante a existência de cada um dos integrais curvílineos presentes no exercício. Para o cálculo de cada um desses integrais, consideremos que $\gamma'(t) = ie^{it}$ e $\eta'(t) = 2i$. Temos então

$$\int_\gamma \left(\frac{\overline{z}^2}{2} + |z|^2\right) dz = \int_\gamma \overline{z}\left(\frac{\overline{z}}{2} + z\right) dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \overline{e^{it}}\left(\frac{\overline{e^{it}}}{2} + e^{it}\right) ie^{it}dt.$$

Atendendo a que $\overline{e^{it}}e^{it} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$, temos então

$$\begin{aligned}\int_\gamma \left(\frac{\overline{z}^2}{2} + |z|^2\right) dz &= i\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\overline{e^{it}}}{2} + e^{it}\right) dt \\ &= i\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\cos t - i\sin t}{2} + \cos t - i\sin t\right) dt \\ &= i\frac{3}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t - i\sin t)\, dt = i\frac{3}{2}(-2 - i\cdot 0) = -3i.\end{aligned}$$

De modo análogo, temos

$$\begin{aligned}\int_\eta \left(\frac{\overline{z}^2}{2} + |z|^2\right) dz &= \int_\eta \overline{z}\left(\frac{\overline{z}}{2} + z\right) dz \\ &= \int_0^1 \overline{(-1+2t)\,i}\left(\frac{\overline{(-1+2t)\,i}}{2} + (-1+2t)\,i\right)\cdot 2idt \\ &= 2i\int_0^1 (1-2t)\,i\left(\frac{(1-2t)\,i}{2} + (-1+2t)\,i\right) dt \\ &= -2\int_0^1 (1-2t)\left(-\frac{1}{2} + t\right) idt = -2i\int_0^1 \left(-\frac{1}{2} + 2t - 2t^2\right) dt \\ &= -2i\left(-\frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}i.\end{aligned}$$

Não é possível utilizar o teorema 4 porque nenhuma das curvas é fechada.

5. Basta atender a que $F(z) = -1/z$ é uma primitiva de $f(z) = 1/z^2$ e que o integral curvilíneo $\int_\gamma 1/z^2 dz$ é independente do caminho considerado, podendo denotar-se simplesmente por $\int_{z_1}^{z_2} 1/z^2 dz$. Notemos que as funções $f(z) = 1/z^2$ e $F(z) = -1/z$ estão definidas em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mas, atendendo a que γ é um caminho de z_1 para z_2 no interior de uma região simplesmente conexa que não contém a origem, está garantido que F é uma função com derivada contínua num aberto G contendo a curva. Obviamente, estamos a considerar que γ parametriza uma curva seccionalmente suave.

6. Um integral indefinido (ou primitiva) de $f(z) = 1/z$ é $F(z) = \log z$. Como tal, temos

$$\int_{-2i}^{2i} \frac{1}{z} dz = [\log z]_{-2i}^{2i} = \ln 2 + i\frac{\pi}{2} - \left(\ln 2 + i\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \pi i,$$

considerando qualquer curva seccionalmente suave que una $z = -2i$ a $z = 2i$ orientada no sentido positivo.

3.4 Aplicações do teorema de Cauchy-Goursat

3.4.1 Fórmulas integrais de Cauchy

Apresentado o teorema de Cauchy-Goursat, podemos agora estabelecer algumas consequências importantes deste teorema.

Teorema 7 ***Fórmula integral de Cauchy*** *Seja f uma função analítica no interior e sobre uma curva de Jordan γ orientada no sentido positivo. Se z_0 é um ponto qualquer no interior de γ, então*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

Esta fórmula mostra que os valores de f sobre γ determinam completamente os valores de f no interior de γ. Dito de outro modo, o valor de uma função analítica no interior de uma curva de Jordan é determinado pelos seus valores sobre essa curva.

Exemplo 13 *Pretendemos calcular o valor do integral curvilíneo $\int_\gamma \cos z/z dz$, onde γ é uma curva de Jordan contendo a origem no seu interior. A função $f(z) = \cos z$ é inteira. Pela fórmula integral de Cauchy, tomando $z_0 = 0$, temos*

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z}dz = 2\pi i \cdot f(0) = 2\pi i,$$

já que $f(0) = 1$.

Recorrendo à fórmula integral de Cauchy podemos, ainda, obter uma fórmula para a derivada $f'(z_0)$.

Teorema 8 ***Fórmula integral de Cauchy para a primeira derivada*** *Seja f uma função analítica no interior e sobre uma curva de Jordan γ orientada no sentido positivo. Se z_0 é um ponto qualquer no interior de γ, então*

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz.$$

Podemos agora enunciar o resultado que afirma que uma função analítica é infinitamente diferenciável, possui derivadas de todas as ordens. Este resultado fornece ainda uma fórmula para as derivadas de todas as ordens. A sua demonstração usa o método de indução matemática.

Teorema 9 ***Fórmula integral de Cauchy para derivadas de qualquer ordem*** *Seja f uma função analítica no interior e sobre uma curva de Jordan γ orientada no sentido positivo. Se z_0 é um ponto qualquer no interior de γ, então*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Exemplo 14 *Pretendemos calcular o valor do integral curvilíneo $\int_{|z|=2} e^z / (z-1)^4 \, dz$. Para tal, consideremos a função inteira $f(z) = e^z$ que verifica $f^{(n)}(z) = e^z$. O ponto $z_0 = 1$ está no interior da circinferência definida por $|z| = 2$. É então possível aplicar a fórmula integral de Cauchy para a derivada de ordem $n = 3$, obtendo-se*

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} \cdot f^{(3)}(1) = \frac{\pi e}{3} i,$$

já que $f^{(3)}(1) = e$.

Exercícios resolvidos

1. Calcule o valor do integral curvilíneo $\oint_\gamma (e^z + z) / (z - 2) \, dz$, onde

   (a) γ é uma parametrização da circunferência de centro na origem e de raio 1;

   (b) γ é uma parametrização da circunferência de centro na origem e de raio 3.

2. Calcule o valor dos seguintes integrais curvilíneos

   (a) $\oint_{|z|=5} [\sin(3z)] / (z + \pi/2) \, dz$;

   (b) $\oint_{|z-i|=2} 1 / \left(z^2 + 4\right)^2 \, dz$;

   (c) $\oint_{|z|=2} [\log(z+3)] / \left[z\left(z^2+9\right)\right] dz$.

3. Seja $f(x+iy) = \left(y^3 - x^3 + 3xy^2 - 3x^2y\right) + i\left(x^3 + y^3 - 3xy^2 - 3x^2y\right)$. Calcule $\int_{|z|=1} f(z)/z^2 dz$.

4. Seja f uma função analítica sobre e no interior de uma curva de Jordan parametrizada por γ. Se z_0 é um ponto que não está sobre a curva, mostre que

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.$$

Propostas de resolução

1. Consideremos a função $f(z) = e^z + z$ que é analítica em todo o plano complexo.

   (a) Embora f seja analítica no interior e sobre a circunferência com centro na origem e raio 1, não é possível aplicar a fórmula integral de Cauchy visto que $z_0 = 2$ não é um ponto interior a esta circunferência. Consideremos então a função $g(z) = (e^z + z) / (z - 2)$ que é contínua em $\mathbb{C} \setminus \{2\}$. Atendendo a que é possível considerar uma região simplesmente conexa que contenha esta circunferência (que é uma curva de Jordan) e onde g seja contínua temos, pelo teorema 4,

   $$\oint_\gamma \frac{e^z + z}{z - 2} dz = 0.$$

   (b) A função f é analítica no interior e sobre a circunferência com centro na origem e raio 3 (que consideramos orientada no sentido positivo). Tomando $z_0 = 2$ que é um ponto no interior de γ temos, pela fórmula integral de Cauchy,

   $$\oint_\gamma \frac{e^z + z}{z - 2} dz = 2\pi i \cdot f(2) = 2\pi \left(e^2 + 2\right) i,$$

   já que $f(2) = e^2 + 2$.

2. Qualquer das curvas $|z| = 5$, $|z - i| = 2$ e $|z| = 2$ são curvas de Jordan. Para o que segue vamos considerar estas circunferências orientadas no sentido positivo.

   (a) Consideremos a função $f(z) = \sin(3z)$ que é analítica no interior e sobre a circunferência com centro na origem e raio 5. Tomando $z_0 = \pi/2$ que é um ponto no interior desta circunferência temos, pela fórmula integral de Cauchy,

   $$\oint_{|z|=5} \frac{\sin(3z)}{z + \frac{\pi}{2}} dz = 2\pi i \cdot f(-\frac{\pi}{2}) = 2\pi i \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -2\pi i.$$

   (b) Temos $\left(z^2 + 4\right)^2 = [(z + 2i)(z - 2i)]^2 = (z + 2i)^2 (z - 2i)^2$. Consideremos a função $f(z) = 1/(z + 2i)^2$, de domínio $\mathbb{C} \setminus \{-2i\}$, que é analítica no interior e sobre a circunferência de centro i e de raio 2. Tomando $z_0 = 2i$ que é um ponto no interior desta circunferência temos, pela fórmula integral de Cauchy para a primeira derivada,

   $$\oint_{|z-i|=2} \frac{1}{(z^2 + 4)^2} dz = \oint_{|z-i|=2} \frac{\frac{1}{(z + 2i)^2}}{(z - 2i)^2} dz = 2\pi i \cdot f'(2i) = 16\pi,$$

   já que $f'(2i) = (-2)(2i + 2i) = -8i$.

(c) Consideremos a função $f(z) = [\log(z+3)] / \left(z^2+9\right)$, de domínio $\mathbb{C} \setminus \{-3i, 3i, 3\}$, que é analítica no interior e sobre a circunferência de centro na origem e de raio 2. Tomando $z_0 = 0$ que é um ponto no interior desta circunferência temos, pela fórmula integral de Cauchy,

$$\oint_{|z|=2} \frac{\log(z+3)}{z(z^2+9)} dz = \oint_{|z|=2} \frac{\frac{\log(z+3)}{z^2+9}}{z} dz = 2\pi i \cdot f(0) = 2\pi \frac{\log 3}{9} i,$$

já que $f(0) = [\log 3]/9$.

3. A função $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ com $u(x,y) = y^3 - x^3 + 3xy^2 - 3x^2y$ e $v(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy^2 - 3x^2y$ é analítica em todo o plano complexo visto que se verificam as condições de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = -3x^2 + 3y^2 - 6xy = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 3y^2 + 6xy - 3x^2 = -\left(3x^2 - 3y^2 - 6xy\right) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y).$$

Em particular, f é analítica no interior e sobre a circunferência de centro na origem e de raio 1. Tomando $z_0 = 0$ que é um ponto no interior desta circunferência temos, pela fórmula integral de Cauchy para a primeira derivada,

$$\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^2} dz = 2\pi i \cdot f'(0) = 0$$

já que $f'(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = 0$.

4. Suponhamos que z_0 é um ponto que está no interior da curva de Jordan γ. Se f uma função analítica sobre e no interior da curva de Jordan parametrizada por γ temos

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz = 2\pi i \cdot f'(z_0)$$

e, f é infinitamente diferenciável. Sendo f' analítica sobre e no interior da curva de Jordan parametrizada por γ, também

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f'(z_0),$$

conforme o pretendido. Se z_0 é um ponto que está no exterior da curva de Jordan $\gamma(t) = x(t) + iy(y)$, com $a \leq t \leq b$, então

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz &= \int_a^b \frac{f(\gamma(t))}{(\gamma(t)-z_0)^2} \gamma'(t) dz = \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))}{(\gamma(t)-z_0)^2} dz \\ &= \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))}{\gamma(t)-z_0} \frac{1}{\gamma(t)-z_0} dz = (???) = \int_\gamma \frac{f'(z)}{z-z_0} dz \end{aligned}$$

Teorema 10 ***Teorema de Morera*** *Seja f uma função contínua numa região simplesmente conexa D tal que $\int_\gamma f = 0$, para qualquer curva de Jordan γ contida em D. Então f é analítica em D.*

Notemos que o teorema de Morera é o recíproco do teorema de Cauchy-Goursat.

Exercícios propostos

1. Calcule $\oint_\gamma f(z)dz$ onde γ é a curva definida por $|z| = 1$ e f cada uma das seguintes funções:

   (a) $f(z) = [\sin z] / \left[\left(z^2 - 25\right)\left(z^2 + 9\right)\right]$;

   (b) $f(z) = \tan z$;

   (c) $f(z) = e^z / (z + 3) - 3\overline{z}$;

   (d) $f(z) = z^2 + 1/(z - 4)$.

2. Calcule $\oint_\gamma f(z)dz$ onde $f(z) = \dfrac{2z + 1}{z^2 + z}$ e γ é cada uma das seguintes curvas:

   (a) γ definida por $|z| = 1/2$;

   (b) γ definida por $|z - 3i| = 1$;

   (c) γ definida por $|z| = 2$.

3. Determine o valor do integral curvilíneo $\oint_\gamma (z - 1) / [z(z - i)(z - 3i)]\, dz$.

4. Determine o valor de cada um dos seguintes integrais:

   (a) $\int_{\pi i}^{2\pi i} \cosh z \; dz$;

   (b) $\int_{-4i}^{4i} 1/z^2 \; dz$;

   (c) $\int_{-i/2}^{1-i} (2z + 1)^2 \; dz$.

5. Calcule $\oint_\gamma 2z \; dz$ onde $\gamma(t) = 2t^3 + \left(t^4 - 4t^3 + 2\right) i$, $-1 \leq t \leq 1$.

6. Mostre que $\oint_\gamma 1/z \; dz = 2\pi i$ onde γ é o contorno do paralelogramo de vértices $z = 2i$, $z = -2$, $z = -2i$ e $z = 2$.

7. Mostre que $\oint_\gamma 2z \; dz = -1 - 2i$ onde γ é uma curva com ponto inicial $z = -1$ e ponto final $z = 2$.

Soluções

1. (a) 0

   (b) 0

   (c) $-6\pi i$

   (d) 0

2. (a) $2\pi i$

   (b) 0

   (c) $4\pi i$

3. $-\pi - \pi i$

4. (a) 0

   (b) $i/2$

   (c) $-7/16 - 22/3i$

5. $48 + 24i$

3.5 Integração

3.5.1 Exercícios resolvidos

1. Considere a circunferência γ de centro na origem e raio 2. Calcule o valor do integral $\oint_\gamma f(z)dz$ para $f(z) = 1/z$.

2. Calcule, pela definição, o valor do integral $\int_\gamma \frac{z+2}{z} dz$, onde γ é parametrizada por:

   (a) $z = 2e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$;

   (b) $z = 2e^{i\theta}$, $\pi \leq \theta \leq 2\pi$;

   (c) $z = 2e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

3. Seja γ a circunferência de raio 1 centrada na origem e percorrida uma vez no sentifo positivo. Usando o teorema de Cauchy e as fórmulas integrais de Cauchy, calcule o valor de cada um dos seguintes integrais:

   (a) $\int_\gamma 1\ dz$;

(b) $\int_\gamma \frac{e^z}{z} dz$;

(c) $\int_\gamma \frac{\cos z}{(z-2i)^7} dz$;

(d) $\int_\gamma \frac{\sin z}{(2z-i)^6} dz$.

3.5.2 Propostas de resolução

1. Uma parametrização para a circunferência γ de centro na origem e raio 2 pode ser definida por $\gamma(t) = 2\cos t + i2\sin t = 2e^{it}$ para $t \in [0, 2\pi]$. Para vector tangente em cada ponto temos $\gamma'(t) = -2\sin t + i2\cos t$. Trata-se de uma curva suave, pois $x(t) = 2\cos t$ e $y(t) = 2\sin t$ são funções contínuas com derivadas contínuas para todo o $0 \le t \le 2\pi$ e a função f está definida e é contínua em todos os pontos da curva (f tem por domínio $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mas a origem não pertence à curva). Não é necessário considerar uma partição e temos, então,

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma f(z)dz &= \int_0^{2\pi} f(2\cos t + i2\sin t)(-2\sin t + i2\cos t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\cos t + i2\sin t}(-2\sin t + i2\cos t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{2\cos t - i2\sin t}{4\cos^2 t + 4\sin^2 t}(-2\sin t + i2\cos t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{-4\cos t\sin t + 4i\cos^2 t + i4\sin^2 t + 4\sin t\cos t}{4}dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{4i}{4}dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.
\end{aligned}$$

Em alternativa, pode-se usar $\gamma(t) = 2e^{it}$ tendo-se então $\gamma'(t) = 2ie^{it}$. O integral pedido é dado por

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma f(z)dz &= \int_0^{2\pi} f\left(2e^{it}\right)2ie^{it}dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2e^{it}}2ie^{it}dt = \int_0^{2\pi} idt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.
\end{aligned}$$

2. (a) Para a parametrização $z(\theta) = 2e^{i\theta}$ da semicircunferência tem-se $z'(\theta) = 2ie^{i\theta}$. Portanto, pela definição de integral, temos

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{z+2}{z}dz &= \int_\gamma \left(1 + \frac{2}{z}\right)dz = \int_0^\pi \left(1 + \frac{2}{2e^{i\theta}}\right)2ie^{i\theta}d\theta \\
&= \int_0^\pi \left(2ie^{i\theta} + 2i\right)d\theta = 2e^{i\theta}\Big|_0^\pi + 2\pi i = -4 + 2\pi i.
\end{aligned}$$

(b) Analogamente

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{z+2}{z}dz &= \int_\gamma \left(1+\frac{2}{z}\right)dz = \int_\pi^{2\pi}\left(1+\frac{2}{2e^{i\theta}}\right)2ie^{i\theta}d\theta \\ &= \int_\pi^{2\pi}\left(2ie^{i\theta}+2i\right)d\theta = 2e^{i\theta}\Big|_\pi^{2\pi} + 2\pi i = 4+2\pi i.\end{aligned}$$

(c) Pela aditividade do integral em relação ao caminho de integração, este integral de linha é a soma dos integrais das alíneas anteriores,

$$\int_\gamma \frac{z+2}{z}dz = (-4+2\pi i)+(4+2\pi i) = 4\pi i.$$

3. (a) A função constante $f(z)=1$ é analítica em $\mathbb{C}$, que é uma região simplesmente conexa. Portanto, pelo teorema de Cauchy, o integral de $f(z)$ ao longo de qualquer caminho fechado em $\mathbb{C}$ é 0. Em particular,

$$\int_\gamma 1\ dz = 0.$$

(b) A função $f(z)=e^z$ é analítica em $\mathbb{C}$ e γ é um caminho fechado simples contendo a origem e orientado no sentido positivo. Portanto, pela fórmula de Cauchy,

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z}dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-0}dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i.$$

(c) A função

$$\frac{\cos z}{(z-2i)^7}$$

é analítica em $\mathbb{C}\setminus\{2i\}$. Como $2i$ não pertence ao interior do contorno γ, a função é analítica numa região que contem o interior do contorno γ. Portanto, pelo teorema de Cauchy,

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{(z-2i)^7}dz = \int_\gamma f(z)dz = 0.$$

(d) Pode-se escrever o integral na forma

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{(2z-i)^6}dz = \frac{1}{2^6}\int_\gamma \frac{\sin z}{\left(z-\frac{i}{2}\right)^6}dz.$$

Aplicando a fórmula integral de Cauchy para a derivada de ordem 5 de uma função analítica à função $f(z)=\sin z$ que é analítica em $\mathbb{C}$ (e, portanto, numa região que contém o interior do caminho γ), tem-se

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{\sin z}{(2z-i)^6}dz &= \frac{1}{2^6}\frac{2\pi i}{5!}f^{(5)}\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{\pi i}{2^5 120}\cos\left(\frac{i}{2}\right) \\ &= \frac{\pi i}{2^8 15}\frac{e^{-\frac{1}{2}}+e^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{(1+e)\pi i}{2^9 15\sqrt{e}}.\end{aligned}$$

Capítulo 4

Representação em série de funções analíticas

Consideremos o desenvolvimento em série de Taylor para uma função real de variável real f em torno de um ponto $a \in D_f$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \cdots .$$

Estabelecer este desenvolvimento pode conduzir a algumas dificuldades. Por um lado, podem não existir as derivadas de todas as ordens. É o caso da função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

em que temos $f'(x) = 2\,|x|$ e, como tal, não existe $f''(0)$. Por outro lado, as derivadas de todas as ordens podem existir mas a série de Taylor não convergir para a função f. Por exemplo, é possível mostrar por indução matemática que a função

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-1/x^2\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} .$$

tem derivadas de qualquer ordem na origem e que $f^{(k)}(0) = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Como tal, a série de Taylor em torno da origem é a série nula, enquanto que a função não vale zero em nenhuma vizinhança de $a = 0$.

No caso de funções complexas de variável complexa, a situação é um pouco mais simples quando falamos de funções f analíticas. Se uma função f é analítica num ponto z_0, a fórmula integral de Cauchy para derivadas garante que f tem derivadas de todas as ordens nesse ponto. Como consequência, veremos que uma série de potências de $(z - z_0)$ designada por série de Taylor converge para f. Por outro lado, mesmo no caso de f não ser analítica num ponto z_0, há situações em que é possível obter um outro tipo de desenvolvimento em série através das chamadas séries de Laurent.

4.1 Séries de Taylor e de Laurent

Teorema 11 ***Teorema de Taylor*** *Se f é uma função analítica no disco $D(z_0, R) = \{z : |z - z_0| < R\}$, com $0 < R \leq \infty$, então f pode ser representada por uma série de potências que converge para $f(z)$, a saber,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(z_0) \frac{(z - z_0)^n}{n!}, \text{ para todo o } z \in D(z_0, R).$$

A série definida no teorema anterior designa-se por **série de Taylor de f em torno de $\mathbf{z_0}$** (ou **série de Taylor de f com centro $\mathbf{z_0}$**) e os coeficientes $a_n = 1/n! f^{(n)}(z_0)$ designam-se por **coeficientes de Taylor de f no ponto $\mathbf{z_0}$**. Este desenvolvimento é único, isto é, se $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n / n!$, tem-se necessariamente $b_n = 1/n! f^{(n)}(z_0)$. Quando $z_0 = 0$, a série é designada por **série de MacLaurin**[1] **da função f**. O **resto de ordem n da série de Taylor de f em torno do $\mathbf{z_0}$** é dado pela expressão

$$R_n(z) = \frac{(z - z_0)^{n+1}}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+2}(\zeta - z)} d\zeta.$$

Para além de sabermos que uma função analítica tem derivadas de todas as ordens, verificamos agora que elas podem sempre ser representadas por uma série de potências. Esta propriedade não é, em geral, verdadeira no cálculo real. Existem funções reais de variável real que têm derivadas de todas as ordens mas que não podem ser representadas por uma série de potências. É o caso da função definida por $f(x) = \exp\left(-1/x^2\right)$ para $x \neq 0$ e $f(0) = 0$.

Exemplo 21 *Seja $f(z) = \exp z$. A função f é inteira e $f^{(n)}(z) = \exp z$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Temos então $f^{(n)}(0) = 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, logo a série de Taylor de f em torno de $z_0 = 0$ é dada por*

$$\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \text{ para todo o } z \in \mathbb{C}.$$

Notemos que esta série é a obtida do desenvolvimento em série da função real e^x substituindo x por z.

Exemplo 22 *Seja $f(z) = 1/(1 - z)$. A função f é analítica e*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1 - z)^{n+1}},$$

logo $f^{(n)}(0) = n!$. Como tal, obtemos a série de Taylor

$$\frac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

[1] Em homenagem ao matemático escocês Colin MacLaurin (1698 – 1746).

para $|z| < 1$.

As séries de Taylor são obviamente séries de potências. O recíproco também é verdadeiro (demonstrado no exercício 1).

Proposição 17 *Uma série de potências com raio de convergência não-nulo é a série de Taylor da sua função soma.*

Para funções como $1/z$ ou e^z/z^2 o teorema de Taylor não se aplica em $z = 0$, tratando-se de funções não analíticas na origem. Para estas funções existe uma outra expansão, a chamada expansão de Laurent, que recorre a potências inversas de $z - z_0$ em vez de potências de $z - z_0$. Esta expansão é de grande importância no estudo dos pontos onde uma função não é analítica (designados por singularidades ou pontos singulares) e para obter o teorema dos resíduos, um outro resultado fundamental da análise complexa que será apresentado no próximo capítulo.

Teorema 12 ***Teorema de Laurent*** *Seja f uma função analítica na coroa circular $C(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < r < |z - z_0| < R\}$, com $r \geq 0$ e $R > r$. Então*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n},$$

onde os coeficientes são dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \ n = 0, 1, 2, ...$$

e

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(\zeta) (\zeta - z_0)^{n-1} d\zeta, \ n = 1, 2, ...$$

Exemplo 15 *Consideremos a função $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$. A função é analítica em $C(0, 0, 1)$. Pretendemos determinar a série de Laurent de f nesta região. Temos*

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$$

e sabemos que $1/(1-z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ para $|z| < 1$. Podemos então concluir que

$$f(z) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - z^3 - \cdots$$

em $C(0, 0, 1)$. Relativamente à região $C(0, 1, \infty)$, podemos colocar a mesma questão. Temos

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{z}} \right]$$

e, dado que $|1/z| < 1$,

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n.$$

Como tal,

$$f(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

para $|z| > 1$.

Exercícios resolvidos

1. Mostre que uma série de potências com raio de convergência não-nulo é a série de Taylor da sua função soma.

2. Desenvolva a função $f(z) = 1/\left[(z-1)^2(z-3)\right]$ em série de Laurent para $0 < |z-1| < 2$ e para $0 < |z-2| < 3$

Propostas de resolução

1. Consideremos a série de potências

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2 (z-z_0)^2 + \cdots .$$

Temos $f(z_0) = a_0$. Pela proposição 68 temos

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 (z-z_0) + 3a_3 (z-z_0)^2 + \cdots ,$$

donde $f'(z) = a_1$,

$$f''(z) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 (z-z_0) + \cdots ,$$

donde $f''(z) = 2!a_2$, e em geral, $f^{(n)}(z_0) = n!a_n$. Deste modo, os coeficientes a_n são os que definem a série de Taylor de f em torno de z_0,

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

2. Necessitamos exprimir $z-3$ em termos de $z-1$. Se pretendermos atender a que $1/(1-z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ para $|z| < 1$, escrevemos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \frac{1}{(z-1)^2}\frac{1}{z-3} \\ &= \frac{1}{(z-1)^2}\frac{1}{-2+(z-1)} = \frac{-1}{2(z-1)^2}\frac{1}{1-\dfrac{z-1}{2}}. \end{aligned}$$

Temos, para $|(z-1)/2| < 1$,

$$f(z) = \frac{-1}{2(z-1)^2}\frac{1}{1-\dfrac{z-1}{2}} = \frac{-1}{2(z-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n,$$

ou seja,

$$f(z) = -\frac{1}{2(z-1)^2} - \frac{1}{4(z-1)} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16}(z-1) - \frac{1}{32}(z-1)^2 - \cdots$$

para $0 < |z-1| < 2$. Para obter potências de $z-3$, escrevemos $z-1 = 2+(z-3)$ e, com vista à série binomial, temos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \frac{1}{[2+(z-3)]^2}\frac{1}{z-3} \\ &= \frac{1}{z-3}\,[2+(z-3)]^{-2} = \frac{1}{4\,(z-3)}\left[1+\frac{z-3}{2}\right]^{-2}. \end{aligned}$$

Para $|(z-3)/2| < 1$,

$$f(z) = \frac{1}{4\,(z-3)}\left[1+\frac{-2}{1!}\left(\frac{z-3}{2}\right)+\frac{(-2)\,(-3)}{2!}\left(\frac{z-3}{2}\right)^2+\frac{(-2)\,(-3)\,(-4)}{3!}\left(\frac{z-3}{2}\right)^3+\cdots\right],$$

ou seja,

$$f(z) = \frac{1}{4(z-3)} - \frac{1}{4} + \frac{3}{16}(z-3) - \frac{1}{8}(z-3)^2 + \cdots$$

para $0 < |z-3| < 2$.

Capítulo 5

Resíduos e polos

Este capítulo tem como resultado principal o teorema dos resíduos que afirma que o valor do integral de uma função analítica f ao longo de uma curva fechada e simples é igual a $2\pi i$ vezes o somatório dos resíduos de f no interior dessa curva. Este teorema é muito útil para o cálculo de integrais.

5.1 Resíduos

Definição 19 *Seja f uma função complexa de variável complexa. Diz-se que z_0 é um **ponto singular** de f (ou que f tem no ponto z_0 uma **singularidade**) se f não é analítica em z_0 (podendo existir em qualquer vizinhança de z_0 pontos onde a função é analítica). Se existe uma vizinhança de z_0 onde f é analítica, excepto no ponto z_0, então o ponto singular z_0 diz-se um **ponto singular isolado** (ou uma **singularidade isolada**).*

Exemplo 23 *A função $f(z) = 1/\left[z(z^2+4)\right]$ tem pontos singulares isolados em $z = 0$, $z = 2i$ e $z = -2i$.*

Exemplo 24 *Se $f(z) = \log z$, todos os pontos do eixo real negativo, incluindo a origem, são pontos singulares mas não existem pontos singulares isolados.*

Seja z_0 um ponto singular isolado de uma função f. Então, existe uma série de Laurent que representa f,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(z-z_0)^k + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} \\ &= \cdots + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots, \end{aligned}$$

válida para uma vizinhança definida por $0 < |z - z_0| < R$. Os termos da série que envolvem potências de $z - z_0$ de expoente negativo , $\sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k}/(z-z_0)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k}(z-z_0)^{-k}$, constituem a **parte principal de f em $\mathbf{z}_0$**. O coeficiente c_{-1} da potência $(z-z_0)^{-1}$ designa-se por **resíduo de f em** z_0 e denota-se por $\mathbf{Res}(f, z_0)$.

Exemplo 25 *Dado que*

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \cdots,$$

temos $Res(1/\left(1-z\right), 0) = -1$.

Exemplo 26 *Dado que*

$$\frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = -\frac{1}{2(z-1)^2} - \frac{1}{4(z-1)} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16}(z-1) - \frac{1}{32}(z-1)^2 - \cdots,$$

temos $Res\big(1/\left[(z-1)^2(z-3)\right], 1\big) = -1/4$. *Atendendo a que*

$$\frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \frac{1}{4(z-3)} - \frac{1}{4} + \frac{3}{16}(z-3) - \frac{1}{8}(z-3)^2 + \cdots,$$

$Res\big(1/\left[(z-1)^2(z-3)\right], 3\big) = 1/4$.

Podemos questionar o porquê de atribuir um nome específico ao coeficiente c_{-1}? Note-se que, dada uma curva de Jordan γ orientada positivamente no disco $0 < |z-z_0| < R$ e que contenha o ponto z_0 no seu interior, temos

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz. \tag{5.1}$$

Este facto facilita o cálculo de muitos integrais em variável complexa.

Exemplo 16 *Pretendemos calcular o valor do integral* $\int_\gamma \exp\left(1/z\right)dz$, *onde* γ *é a circunferência definida por* $|z| = 1$ *com orientação positiva. A função integranda tem um ponto isolado em* $z = 0$. *Sabemos que o valor deste integral é* $2\pi i$ *vezes o resíduo de* $\exp\left(1/z\right)$ *em* $z = 0$. *Recordando que a série de Laurent de* $\exp z$ *em torno do ponto* $z = 0$ *é dada por*

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}z^j$$

para todo o z, *temos*

$$\exp\frac{1}{z} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}z^{-j} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + ...$$

Como tal, o resíduo de f *em* $z = 0$ *tem o valor* 1, *ou seja,* $Res(f, 0) = 1$. *Temos então*

$$1 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \exp\frac{1}{z}dz$$

donde se conclui que $\int_\gamma \exp(1/z)dz = 2\pi i$.

Suponhamos agora que f é uma função analítica em todos os pontos, excepto num número finito de pontos singulares isolados $z_1, z_2, ..., z_n$, e que γ é uma curva simples e fechada (orientada positivamente) contendo no interior os pontos z_k, $k = 1, ...n$. Para cada $k = 1, ...n$, consideremos uma circunferência γ_k centrada em z_k, contida em γ e não contendo outros pontos singulares para além de z_k. Então, aplicando o teorema de Cauchy-Goursat para regiões multiplamente conexas e (7), obtemos

$$\begin{aligned}\oint_\gamma f(z)dz &= \oint_{\gamma_1} f(z)dz + \oint_{\gamma_2} f(z)dz + ... + \oint_{\gamma_n} f(z)dz \\ &= 2\pi i \mathrm{Res}(f, z_1) + 2\pi i \mathrm{Res}(f, z_2) + ... + 2\pi i \mathrm{Res}(f, z_n) \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k).\end{aligned}$$

Podemos então enunciar o seguinte teorema.

Teorema 13 ***Teorema dos resíduos*** *Seja D uma região simplesmente conexa e γ uma curva de Jordan orientada positivamente contida em D. Se f é uma função analítica em γ e no seu interior excepto num número finito de pontos singulares isolados $z_1, z_2, ..., z_n$ do seu interior de γ, então*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k).$$

Exemplo 17 *Pretendemos determinar o valor do integral*

$$\oint_\gamma f(z)dz = \oint_\gamma \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}dz$$

onde γ é o contorno do rectângulo definido por $x = 0$, $x = 4$, $y = -1$ e $y = 1$. Temos

$$\oint_\gamma \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}dz = 2\pi i \left[Res(f, 1) + Res(f, 3)\right] = 2\pi i \left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right] = 0.$$

De facto, os pontos singulares isolados $z_1 = 1$ e $z_2 = 3$ estão contidos no interior de γ. No entanto, para γ a circunferência definida por $|z| = 2$, temos

$$\oint_\gamma \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}dz = 2\pi i Res(f, 1) = 2\pi i \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}i,$$

já que o ponto singular isolado $z_2 = 3$ não está contido no interior da circunferência de centro 0 e raio $\sqrt{2}$.

Exercícios

1. Calcule o valor dos seguintes integrais, onde γ é a circunferência orientada positivamente definida por $|z| = 2$:

(a) $\oint_\gamma \exp \dfrac{1}{z^2} dz$;

(b) $\oint_\gamma \cos \dfrac{1}{z} dz$;

(c) $\oint_\gamma \dfrac{1}{z} \sin \dfrac{1}{z} dz$.

5.2 Polos e outras singularidades

Seja z_0 ponto singular isolado de uma função complexa f. Se a série de Laurent de f em torno de z_0 inclui um número finito de termos envolvendo potências negativas de $z - z_0$, o ponto z_0 é designado por **polo**. Significa que a parte principal de f em z_0 é constituída por um número finito de termos não nulos. Neste caso, existe um número inteiro n tal que c_{-n} é o primeiro coeficiente não-nulo da parte principal de f em z_0. O número $n \in \mathbb{N}$ diz-se a **ordem do polo**. Um polo de ordem 1 também se designa por **polo simples**. Se não existem na série de Laurent termos envolvendo potências negativas de $z - z_0$, o ponto singular isolado z_0 diz-se uma **singularidade removível**. Trata-se do caso em que a parte principal de f em z_0 é nula, ou seja, todos os coeficientes c_{-n} ($n \in \mathbb{N}$) são nulos. Se a série de Laurent de f em torno de z_0 inclui um número infinito de termos envolvendo potências negativas de $z - z_0$, o ponto z_0 é designado por **singularidade essencial**. Uma singularidade essencial é portanto um ponto singular isolado que não é polo nem singularidade removível. Verificamos assim que os pontos singulares isolados são classificados conforme a sua parte principal contenha um número finito de termos, um número infinito de termos ou nenhum termo.

Exemplo 27 *Consideremos a função*

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2 (z-3)}$$

cuja série de Laurent é dada por

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2 (z-3)} = -\frac{1}{2(z-1)^2} - \frac{1}{4(z-1)} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16}(z-1) - \cdots$$

para $0 < |z-1| < 2$. *Dado que* $c_{-2} = -1/2 \neq 0$ *(sendo* $c_{-n} = 0$ *para* $n = 3, 4, 5, ...$*),* $z_0 = 1$ *é um polo de ordem* 2.

Exemplo 28 *Dado que*

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \cdots$$

para $z \neq 0$, *concluímos que* $z_0 = 0$ *é um polo simples de* f.

Exemplo 29 *Se* $f(z) = (\sin z)/z$ *então* $z = 0$ *é uma singularidade removível. De facto, temos*

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z}\sin z = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!}\cdots\right) \\ &= 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots . \end{aligned}$$

Exemplo 30 *Dado que* $\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ *para* $z \neq 0$*, a série de Laurent de* $f(z) = \exp 3/z$ *em* $z_0 = 0$ *é dada por*

$$\exp\frac{3}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{3}{z}\right)^n = 1 + \frac{3}{z} + \frac{3^2}{2!z^2} + \frac{3^3}{3!z^3} + \frac{3^4}{4!z^4} + \cdots$$

para $z \neq 0$*. Como tal,* $z_0 = 0$ *é uma singularidade essencial.*

Verificámos na secção 7.1 que o teorema dos resíduos é uma boa ferramenta para o cálculo de integrais. Dado que escrever a série de Laurent em cada ponto singular pode ser trabalhoso, é conveniente encontrar técnicas que facilitem o cálculo de resíduos. Vejamos que, em casos especiais mas muito frequentes, os resíduos são de fácil determinação. De facto, para z_0 um polo de qualquer ordem, é fácil determinar $\mathrm{Res}(f, z_0)$.

CASO 1

Suponhamos que z_0 é um polo de f em z_0 de ordem n. Temos

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots \tag{5.2}$$

para $0 < |z - z_0| < R$. Multiplicando ambos os membros de (8) por $(z-z_0)^n$, obtemos

$$(z-z_0)^n f(z) = c_{-n} + c_{-n+1}(z-z_0) + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{n-1} + c_0(z-z_0)^n + c_1(z-z_0)^{n+1} + \cdots,$$

a série de Taylor de $\phi(z) = (z-z_0)^n f(z)$. Pretendemos o coeficiente c_{-1} de $(z-z_0)^{n-1}$ que, dada a definição de série de Taylor, sabemos ser dado por $\phi^{(n-1)}(z_0)/(n-1)!$. Temos então

$$c_{-1} = \mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{\phi^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}.$$

Em alternativa, podemos ainda considerar sucessivas derivações (até á ordem $n-1$),

$$[(z-z_0)^n f(z)]^{(n--1)} = (n-1)!c_{-1} + n!c_0(z-z_0) + (n+1)!c_1(z-z_0)^2 + \cdots,$$

donde se conclui que

$$\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)^n f(z)]^{(n--1)} = (n-1)!c_{-1}$$

ou seja,

$$c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)^n f(z)]^{(n--1)}.$$

Designando $(z-z_0)^n f(z)$ por $\phi(z)$ podemos então escrever

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\phi^{(n-1)}(z)=\frac{1}{(n-1)!}\phi^{(n-1)}(z_0)=\frac{\phi^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}.$$

Exemplo 18 *Calculemos os resíduos de* $f(z)=(\exp z)/z^2\left(z^2+1\right)$. *A função tem pontos singulares em* $z=0$, $z=i$ *e* $z=-i$. *Para o cálculo do resíduo de* f *em* $z_0=0$ *consideremos que é um polo de ordem* 2 *e, como tal, seja*

$$\phi(z)=(z-0)^2\,\frac{e^z}{z^2\left(z^2+1\right)}=\frac{e^z}{z^2+1}.$$

O resíduo é dado pela expressão

$$\operatorname{Res}(f,0)=\frac{\phi'(0)}{1!}=\left[\frac{\left(z^2+1\right)e^z-2ze^z}{\left(z^2+1\right)^2}\right]_{z=0}=1.$$

Para o cálculo do resíduo de f em $z_0=i$ consideremos que é um polo simples e, como tal, seja

$$\phi(z)=(z-i)\,\frac{e^z}{z^2\left(z^2+1\right)}=\frac{e^z}{z^2(z+i)}.$$

O resíduo é dado pela expressão

$$\operatorname{Res}(f,i)=\frac{\phi(i)}{0!}=\left[\frac{e^z}{z^2(z+i)}\right]_{z=i}=-\frac{e^i}{2i}.$$

De forma análoga, verificamos que $\operatorname{Res}(f,-i)=\dfrac{e^{-i}}{2i}$. Se pretendermos determinar o valor do integral

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^2\left(z^2+1\right)}dz,$$

onde γ é uma curva de Jordan contendo $z=i$ e $z=-i$ (mas não contendo $z=0$), podemos utilizar o teorema dos resíduos,

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^2\left(z^2+1\right)}dz=2\pi i\left(\frac{e^i}{2i}+\frac{e^{-i}}{2i}\right)=-2\pi i\sin 1.$$

CASO 2

Suponhamos que a função $f(z)$ se pode escrver como um quociente de funções

$$f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$$

onde p e q são funções analíticas em $z = z_0$, com $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = 0$ e $q'(z_0) \neq 0$. O ponto singular z_0 é um polo simples de f e podemos escrever

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0) + p'(z_0)(z - z_0) + \cdots}{q'(z_0)(z - z_0) + \frac{q''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + \cdots}.$$

Considerando $\phi(z) = (z - z_0)f(z)$, temos

$$\phi(z) = \frac{p(z_0) + p'(z_0)(z - z_0) + ...}{q'(z_0) + \frac{q''(z_0)}{2}(z - z_0) + ...}.$$

Mas então,

$$\text{Res}(f, z_0) = \phi(z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Exemplo 19 *Consideremos γ o contorno do rectângulo de lados definido por $x = \pm 1$, $y = -\pi$ e $y = 3\pi$ e f a função definida por*

$$f(z) = \frac{\cos z}{\exp z - 1}.$$

Pretendemos calcular o valor do integral $\int_\gamma f(z)dz$. Os pontos singulares da função integranda f são as soluções da equação $\exp z = 1$, ou seja, os pontos $z = 2k\pi i$, para $k \in \mathbb{Z}$. Os pontos singulares isolados no interior de γ são $z = 0$ e $z = 2\pi i$. Então, pelo teorema dos resíduos,

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{e^z - 1} dz = 2\pi i \left[Res(f, 0) + Res(f, 2\pi i) \right].$$

Notemos que $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{\cos z}{e^z - 1}$, onde p e q são funções analíticas em ambos os pontos 0 e $2\pi i$. Temos ainda $p(0) = 1 \neq 0, p(2\pi i) \neq 0$, $q(0) = q(2\pi i) = 0$ e $q'(0) = e^0 = 1 \neq 0$, $q'(2\pi i) = e^{2\pi i} = 1 \neq 0$. Como tal,

$$Res(f, 0) = \frac{p(0)}{q'(0)} = \frac{\cos 0}{e^0} = 1 \quad e \quad Res(f, 2\pi i) = \frac{p(2\pi i)}{q(2\pi i)} = \frac{\cos 2\pi i}{e^{2\pi i}} = \frac{e^{-2\pi} + e^{2\pi}}{2}.$$

Portanto,

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{e^z - 1} dz = 2\pi i \left(1 + \frac{e^{-2\pi} + e^{2\pi}}{2} \right).$$

Exercícios resolvidos

1. Mostre que $f(z) = (\sin z)/z^3$ tem um polo de ordem 2 em $z_0 = 0$.

2. Determine os resíduos da função $f(z) = 1/\left(z^4 + 1\right)$.

3. Determine o valor do integral $\oint_\gamma \tan z \, dz$, onde γ é a circunferência definida por $|z| = 2$ com orientação positiva.

4. Determine o valor do integral $\oint_\gamma (2z+6)/\left(z^2+4\right) dz$, onde γ é a circunferência orientada positivamente definida por $|z-i|=2$.

5. Determine o valor do integral $\oint_\gamma \exp z/\left(z^4+5z^3\right) dz$, onde γ é a circunferência definida por $|z|=2$ com orientação positiva.

6. Determine o valor do integral $\oint_\gamma \exp(3/z)\, dz$, onde γ é a circunferência orientada positivamente definida por $|z|=1$.

Propostas de resolução

1. Temos
$$\frac{\sin z}{z^3} = \frac{1}{z^2}\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z^2}\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots.\right) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^4}{7!} + \cdots.$$

2. Sejam z_1, z_2, z_3 e z_4 as raizes da equação $z^4+1=0$. Temos
$$z_1 = \exp\frac{\pi i}{4}, \quad z_2 = \exp\frac{3\pi i}{4}, \quad z_3 = \exp\frac{5\pi i}{4} \quad \text{e} \quad z_4 = \exp\frac{7\pi i}{4}.$$
Condiderando f como quociente de funções analíticas $p(z)=1$ e $q(z)=z^4+1$, obtemos
$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, z_1) &= \left[\frac{1}{4z^3}\right]_{z=z_1} = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4}\exp\left(-\frac{3\pi i}{4}\right) = -\frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}i,\\
\operatorname{Res}(f, z_2) &= \left[\frac{1}{4z^3}\right]_{z=z_2} = \frac{1}{4z_2^3} = \frac{1}{4}\exp\left(-\frac{9\pi i}{4}\right) = \frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}i,\\
\operatorname{Res}(f, z_3) &= \left[\frac{1}{4z^3}\right]_{z=z_3} = \frac{1}{4z_3^3} = \frac{1}{4}\exp\left(-\frac{15\pi i}{4}\right) = \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}i,\\
\operatorname{Res}(f, z_4) &= \left[\frac{1}{4z^3}\right]_{z=z_4} = \frac{1}{4z_4^3} = \frac{1}{4}\exp\left(-\frac{21\pi i}{4}\right) = -\frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}i.
\end{aligned}$$

3. Dado que $f(z) = \tan z = \sin z/\cos z$ e
$$\cos z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{(2n+1)\pi}{2} \quad \text{para } n \in \mathbb{Z}, \tag{5.3}$$
temos
$$\oint_\gamma \tan z\ dz = 2\pi i\left[\operatorname{Res}\left(f, -\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{Res}\left(f, \frac{\pi}{2}\right)\right] = 2\pi i\,[-1-1] = -4\pi i$$
atendendo a que $z_1 = -\pi/2$ e $z_2 = \pi/2$ são os únicos complexos de (9) que pertencem ao interior de γ. Dado que $(\cos z)' = -\sin z$, temos
$$\operatorname{Res}\left(f, -\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = -1 \quad \text{e} \quad \operatorname{Res}\left(f, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{-\sin\frac{\pi}{2}} = -1,$$
donde concluímos que
$$\oint_\gamma \tan z\ dz = 2\pi i\,[-1-1] = -4\pi i.$$

5.2.1 Exercícios resolvidos

1. Seja $f(z) = z^k e^{1/z}$, com k inteiro positivo.

   (a) Calcule a série de Laurent de $f(z)$ para z próximo de 0. Qual é a maior região de validade desse desenvolvimento em série?

   (b) Calcule o resíduo $\operatorname{Res} f(z)\,|_{z=0}$.

   (c) Calcule os possíveis valores de $\oint f(z)dz$ ao longo de curvas de Jordan seccionalmente regulares não intersectando a origem.

   (d) Calcule
   $$\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz,$$
   com a curva orientada no sentido directo.

2. Seja $g(z)$ uma função analítica em $\mathbb{C}$ tal que $g(0) \neq 0$. Seja $f(z) = z^m g(z)$, com m inteiro positivo. Mostre que
   $$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = m,$$
   se a curva for percorrida no sentido directo.

3. Considere a função real de variável real $f(x) = 5 + 4\cos x$.

   (a) Calcule, utilizando o teorema dos resíduos, o valor dos integrais
   $$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx}}{f(x)} dx, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

   (b) Deduza, da alínea anterior, o valor dos integrais
   $$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nx)}{f(x)} dx \qquad \text{e} \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nx)}{f(x)} dx, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

   (c) Diga, justificando, qual o valor da soma da série $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ para $x \in [-\pi, \pi]$.

4. Seja $r > 1$ e $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$.

   (a) Calcule, usando o teorema dos resíduos, o valor do integral
   $$\oint_{\gamma} \frac{1}{z(z-1)} dz.$$

   (b) Obtenha o resultado da alínea anterior usando o teorema de Cauchy e majorando o módulo do integral para r grande.

(c) Prove que $f(z) = 1/(z-1)$ não é a derivada de uma função analítica em $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

(d) Prove que

$$g(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

é a derivada de uma função analítica em $\mathbb{C}\setminus[0,1]$.

5. Seja f uma função inteira tal que

$$|f(z)| \leq c(1 + r^\alpha)$$

se $|z| = r$, onde c e α pertencem a R^+. O que pode afirmar quanto a f? Sugestão: prove uma generalização do teorema de Liouville.

5.2.2 Propostas de resolução

1. (a) Da série de potências $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, obtem-se $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!}$. Logo,

$$z^k e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{k-n}}{n!} = \sum_{j=-k}^{\infty} \frac{z^{-j}}{(k+j)!} = z^k + z^{k-1} + \frac{z^{k-2}}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^{-j}}{(k+j)!},$$

usando uma reindexação $n \to j$ com $j = n - k$. Quanto à maior região de validade recorde-se que, para uma série de Laurent do tipo $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, é a maior coroa circular, $r < |z - z_0| < R$, que não contém singularidades e que contém pontos onde a série é convergente. A função dada apenas possui uma singularidade, $z = 0$. Portanto, a maior região de validade desta série de Laurent é a região definida por $|z| > 0$, ou seja, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(b) Por definição, Res $f(z)|_{z=0} = a_{-1}$, onde a_{-1} é o coeficiente correspondente à potência z^{-1} da série anterior. Como tal,

$$\text{Res } f(z)|_{z=0} = a_{-1} = \frac{1}{(k+1)!}.$$

Note-se que z=0 é uma singularidade essencial da função $z^k e^{\frac{1}{z}}$ e, como tal, não é um pólo. Assim, não é válida a aplicação da expressão para cálculo de resíduos de pólos de ordem n.

(c) Seja γ a curva de Joprdan ao longo da qual o integral é calculado. Se 0 pertence ao interior da curva γ, pelo teorema dos resíduos tem-se

$$\oint_\gamma f(z)dz = \pm 2\pi i \text{Res } f(z)|_{z=0} = \pm \frac{2\pi i}{(k+1)!},$$

em que o sinal $+$ ou $-$ é usado se γ percorrida, respectivamente, no sentido positivo ou negativo. Se 0 não pertence ao interior da curva γ, pelo teorema de Cauchy, tem-se

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0.$$

(d) Como o disco $|z-1| \leq 1/2$ está contido numa região onde a função $f(z)$ é analítica, pode aplicar-se a fórmula integral de Cauchy para a primeira derivada,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{f(z)}{(z-1)^2}dz = f'(1).$$

Dado que $f'(z) = \left(kz^{k-1} - z^{k-2}\right) e^{\frac{1}{z}}$, obtem-se

$$\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{f(z)}{(z-1)^2}dz = 2\pi i f'(1) = 2\pi i\,(k-1)\,e.$$

2. Seja $f(z) = z^m g(z)$ com $g(z)$ analítica, então $f'(z) = mz^{m-1}g(z) + z^m g'(z)$ e, portanto, para $0 < |z| \leq 1$ tem-se

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{mz^{m-1}g(z) + z^m g'(z)}{z^m g(z)} = \frac{m}{z} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Como $g(z) \neq 0$, se $|z| \leq 1$, a função $g'(z)/g(z)$ é analítica para $|z| \leq 1$. Portanto, $z = 0$ é a única singularidade de $f'(z)/f(z)$ no disco $|z| \leq 1$ e é um pólo simples cujo resíduo facilmente se calcula,

$$\text{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}\right]_{z=0} = \lim_{z\to 0} z\left(\frac{m}{z} + \frac{g'(z)}{g(z)}\right) = m.$$

Pelo teorema dos resíduos, tem-se

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \text{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}\right]_{z=0} = m.$$

3. (a) Seja γ a curva $|z| = 1$ parametrizada por $z(x) = e^{ix}$, para $x \in [-\pi, \pi]$. Então,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx}}{f(x)}dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx}}{5 + 4\cos x}dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left(e^{ix}\right)^n}{5 + 2\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)}dx \\
&= \oint_\gamma \frac{z^n}{5 + 2\left(z + z^{-1}\right)}\frac{dz}{iz} = -i\oint_\gamma \frac{z^n}{2z^2 + 5z + 2}dz \\
&= -\frac{i}{2}\oint_\gamma \frac{z^n}{\left(z + \frac{1}{2}\right)(z+2)}dz \\
&= -\frac{i}{2}2\pi i \text{Res}\left[\frac{z^n}{\left(z + \frac{1}{2}\right)(z+2)}\right]_{z=-\frac{1}{2}} \\
&= \pi\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{3}{2}} = \frac{(-1)^n\,\pi}{3\cdot 2^{n-1}},
\end{aligned}$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots.$

(b) Uma vez que $\cos(nx) = \operatorname{Re}\left(e^{inx}\right)$ e $\sin(nx) = \operatorname{Im}\left(e^{inx}\right)$, imediatamente se conclui que

$$a_n = \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}(I_n) = \frac{(-1)^n}{3\cdot 2^{n-1}} \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}(I_n) = 0.$$

(c) Os coeficientes a_n para $n = 0, 1, 2, ...$ e b_n para $n = 1, 2, ...$ são os coeficientes de Fourier da função periódica de período 2π,

$$g(x) = \frac{1}{5 + 4\cos x}.$$

Como esta função é de classe C^1 em $\mathbb{R}$, pelo teorema de Fourier conclui-se que a soma da série é $\dfrac{1}{5+4\cos x}$, para cada $x \in \mathbb{R}$.

4. (a) Tem-se

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z(z-1)}\right]_{z=0} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{z(z-1)} = -1,$$

e

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z(z-1)}\right]_{z=1} = \lim_{z\to 1}\frac{1}{z} = 1.$$

Como tal

$$\oint_\gamma \frac{1}{z(z-1)}dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z(z-1)}\right]_{z=0} + \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z(z-1)}\right]_{z=1}\right) = 0.$$

(b) O teorema de Cauchy afirma que os integrais de funções analíticas num domínio Ω, ao longo de caminhos homotópicos em Ω, são iguais. Como tal, o valor do integral não depende de r. Tem-se, atendendo a que $|z-1| \geq |z| - 1$ para $|z| > 1$,

$$\left|\oint_\gamma \frac{1}{z(z-1)}dz\right| \leq \oint_\gamma \frac{1}{|z|(|z|-1)}|dz| = \oint_\gamma \frac{1}{r(r-1)}|dz| = \frac{2\pi r}{r^2 - r}$$

e $\left|\oint_\gamma \frac{1}{z(z-1)}dz\right| \to 0$ quando $r \to +\infty$. Logo, $\oint_\gamma \frac{1}{z(z-1)}dz = 0$.

(c) Seja Ω um domínio em $\mathbb{C}$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Sabe-se que f é a derivada de uma função analítica se e só se o integral de f ao longo de qualquer contorno fechado em Ω for nulo. Ora,

$$\oint_{|z-1|=1}\frac{1}{z-1}dz = 2\pi i \neq 0.$$

Conclui-se que $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$ não é a derivada de uma função analítica em $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

(d) Se C é um contorno de Jordan fechado em $\mathbb{C}\setminus[0,1]$, descrito no sentido positivo, então C é homotópica à curva γ do enunciado (supondo γ também descrita no sentido positivo) ou C é homotópica a um ponto, pelo que

$$\oint_C \frac{1}{z(z-1)}dz = \oint_\gamma \frac{1}{z(z-1)}dz = 0.$$

Conclui-se que os integrais de $g(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ ao longo de contornos fechados em $\mathbb{C}\setminus[0,1]$ são nulos. Como tal, g é a derivada de uma função analítica em $\mathbb{C}\setminus[0,1]$.

5. Designe-se por n a parte inteira de α, ou seja, o número natural tal que $\alpha - 1 < n \leq \alpha$. Provemos que a derivada de ordem $n+1$ de f é identicamente nula. Seja $a \in \mathbb{C}$ e $r > 0$. Pela fórmula integral de Cauchy,

$$f^{(n+1)}(a) = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+2}} dz.$$

Então

$$\begin{aligned}
\left| f^{(n+1)}(a) \right| &\leq \frac{(n+1)!}{2\pi} \int_{|z-a|=r} \frac{|f(z)|}{|z-a|^{n+2}} |dz| \\
&\leq \frac{(n+1)!}{2\pi} \int_{|z-a|=r} \frac{c\left(1+|z|^{\alpha}\right)}{|z-a|^{n+2}} |dz| \\
&\leq \frac{(n+1)!}{2\pi} \int_{|z-a|=r} \frac{c\left[1+(r+|a|)^{\alpha}\right]}{r^{n+2}} |dz| \\
&= \frac{(n+1)!}{2\pi} \frac{c\left[1+(r+|a|)^{\alpha}\right]}{r^{n+2}} 2\pi r \\
&\sim c\,(n+1)! \frac{r^{\alpha+1}}{r^{n+2}} \to 0
\end{aligned}$$

quando $r \to +\infty$. Assim, $f^{(n+1)}(a) = 0$. Como a é arbitrário, $f^{(n+1)} \equiv 0$. Integrando $n+1$ vezes, conclui-se que f é um polinómio de grau menor ou igual a n.