Exemplo 5.7. Qual a função derivada de $f(x) = x^2$?

Temos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Assim, por exemplo, se quisermos a derivada no ponto $x_0 = 5$, basta calcularmos $f'(5)$ que é igual a 10.

É importante ainda observar que:

$$f'(x) \cong \frac{\Delta f}{\Delta x}, \text{ para } \Delta x \text{ pequeno.}$$

Dessa forma, se $x = 5$ e $\Delta x = 0{,}1$ teremos

$$f'(5) = 10,$$

$$\Delta f = f(5{,}1) - f(5) = (5{,}1)^2 - 5^2 = 1{,}01$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1{,}01}{0{,}1} = 10{,}1.$$

Portanto, $f'(5) \cong \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Exercícios

1. Para cada função $f(x)$, determine a derivada $f'(x_0)$ no ponto x_0 indicado:

a) $f(x) = x^2$	$x_0 = 4$	e) $f(x) = x^2 - 4$	$x_0 = 0$
b) $f(x) = 2x + 3$	$x_0 = 3$	f) $f(x) = \dfrac{1}{x}$	$x_0 = 2$
c) $f(x) = -3x$	$x_0 = 1$	g) $f(x) = \dfrac{1}{x}$	$x_0 = 5$
d) $f(x) = x^2 - 3x$	$x_0 = 2$	h) $f(x) = x^2 - 3x + 4$	$x_0 = 6$

2. Determine a função derivada para cada função do exercício anterior.

3. Dada a função:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \leqslant 1 \\ 2, \text{ se } x > 1. \end{cases}$$

Mostre que não existe $f'(1)$.

4. Considere a função $f(x) = 2|x|$. Mostre que não existe $f'(0)$.

5.3 Derivada das Principais Funções Elementares

Vimos no item anterior que a função derivada de $f(x) = x^2$ era $f'(x) = 2x$. Se conseguirmos achar a função derivada das principais funções elementares e se além disso soubermos achar as funções derivadas de somas, diferenças, produtos e quocientes dessas funções elementares, poderemos achar as derivadas de muitas funções sem termos que recorrer à definição (que muitas vezes pode dar muito trabalho). Vejamos então como que isso pode ser realizado.

5.3.1 Derivada da Função Constante

Se $f(x) = c$ (função constante), então $f'(x) = 0$, para todo x.

Demonstração

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0 \text{ para todo } x.$$

Exemplo 5.8

$$f(x) = 5 \Rightarrow f'(x) = 0,$$
$$f(x) = e^2 \Rightarrow f'(x) = 0.$$

5.3.2 Derivada da Função Potência

Se $f(x) = x^n$, então $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Demonstração

Provemos essa relação no caso de n ser inteiro e positivo, embora a propriedade seja válida para todo n real (desde que $x > 0$).

Temos:

$$\Delta f = (x + \Delta x)^n - x^n,$$

e usando a fórmula do Binômio de Newton,

$$\Delta f = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot (\Delta x)^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} x^1 \cdot (\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n - x^n,$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot (\Delta x)^1 + \ldots + \binom{n}{n-1} x^1 \cdot (\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}.$$

Para Δx tendendo a zero, todos os termos do 2º membro tendem a zero, exceto o 1º. Portanto:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \binom{n}{1} x^{n-1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} x^{n-1} = n \cdot x^{n-1}.$$

Exemplo 5.9

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2,$$
$$f(x) = x^8 \Rightarrow f'(x) = 8x^7,$$
$$f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3} \Rightarrow f'(x) = -3 \cdot x^{-4} = \frac{-3}{x^4},$$
$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\, x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

5.3.3 Derivada da Função Logarítmica

Se $f(x) = \ln x$, então $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ (para $x > 0$).

Demonstração

$$\Delta f = \ln(x + \Delta x) - \ln x,$$
$$= \ln \frac{x + \Delta x}{x} = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right),$$

logo

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$
$$= \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}.$$

Fazendo $m = \dfrac{\Delta x}{x}$, então quando Δx tende a 0, m também tende a 0.

Portanto,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{m \to 0} \ln(1 + m)^{\frac{1}{mx}}$$
$$= \lim_{m \to 0} \left[\frac{1}{x} \ln(1 + m)^{\frac{1}{m}}\right]$$
$$= \frac{1}{x} \lim_{m \to 0} \ln(1 + m)^{\frac{1}{m}}$$
$$= \frac{1}{x} \ln \lim_{m \to 0} (1 + m)^{\frac{1}{m}}.$$

Mas

$$\lim_{m \to 0} (1 + m)^{\frac{1}{m}} = e,$$

então

$$\lim_{\lambda x \to 0} \frac{\lambda f}{\lambda x} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x},$$

ou seja,

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

5.3.4 Função Seno e Função Cosseno

(a) Se $f(x) = \text{sen } x$, então $f'(x) = \cos x$ para todo x real;
(b) Se $f(x) = \cos x$, então $f'(x) = -\text{sen } x$ para todo x.

Demonstração

Provemos o item (a).

Temos, usando as fórmulas de transformação em produto, que

$$\begin{aligned} \lambda f &= \text{sen }(x + \lambda x) - \text{sen } x \\ &= 2 \text{ sen } \frac{\lambda x}{2} \cos\left(\frac{2x + \lambda x}{2}\right) \end{aligned}$$

Segue-se então que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\lambda x \to 0} \frac{\lambda f}{\lambda x} \\ &= \lim_{\lambda x \to 0} \frac{2 \text{ sen } \frac{\lambda x}{2} \cos\left(\frac{2x + \lambda x}{2}\right)}{\lambda x} \\ &= \lim_{\lambda x \to 0} \frac{\text{sen } \frac{\lambda x}{2}}{\frac{\lambda x}{2}} \cdot \cos\left(\frac{2x + \lambda x}{2}\right). \end{aligned}$$

Quando λx tende a 0, $\dfrac{\text{sen } \frac{\lambda x}{2}}{\frac{\lambda x}{2}}$ tende a 1 e $\cos\left(\dfrac{2x + \lambda x}{2}\right)$ tende a $\cos x$,

logo

$$f'(x) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

O item (b) tem demonstração análoga.

5.4 Propriedades Operatórias

As propriedades operatórias permitem achar as derivadas de somas, diferenças, produtos e quocientes de funções elementares. São as seguintes:

(P1) Se $f(x) = k \cdot g(x)$ então $f'(x) = k \cdot g'(x)$.
(P2) Se $f(x) = u(x) + v(x)$ então $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.
(P3) Se $f(x) = u(x) - v(x)$ então $f'(x) = u'(x) - v'(x)$.
(P4) Se $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ então $f'(x) = u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)$.
(P5) Se $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ então $f'(x) = \dfrac{v(x) \cdot u'(x) - v'(x) \cdot u(x)}{[v(x)]^2}$.

Demonstração

Provemos a (P1).

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k \cdot g(x + \Delta x) - k \cdot g(x)}{\Delta x} \\ &= k \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= k \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$f'(x) = k \cdot g'(x).$$

Provemos a (P2). Temos que:

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) \\ &= [u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)] - [u(x) + v(x)] \\ &= [u(x + \Delta x) - u(x)] + [v(x + \Delta x) - v(x)], \end{aligned}$$

do que segue

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Passando ao limite para Δx tendendo a 0,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

isto é,

$$f'(x) = u'(x) + v'(x).$$

A propriedade (P2) pode ser estendida a uma soma de n funções, isto é:
Se

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$$

então

$$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x).$$

A demonstração da (P3) é totalmente análoga à da (P2).
Provemos a (P4). Temos:

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x)\\ &= [u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x)] - [u(x) \cdot v(x)].\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\Delta u &= u(x + \Delta x) - u(x),\\ \Delta v &= v(x + \Delta x) - v(x)\end{aligned}$$

vem que

$$\begin{aligned}\Delta f &= [u(x) + \Delta u][v(x) + \Delta v] - u(x)\,v(x)\\ &= u(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot \Delta v + v(x) \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - u(x)\,v(x)\\ &= u(x) \cdot \Delta v + v(x) \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v.\end{aligned}$$

Portanto,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = u(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Mas

$\Delta u = \Delta x \cdot \dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ e quando Δx tende a 0, Δu também tende a 0.

Logo

$$f'(x) = u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x).$$

A (P5) tem demonstração análoga à (P4).

Exemplo 5.10

$$f(x) = 5 \ln x \Rightarrow f'(x) = 5 \cdot \frac{1}{x};$$

$$f(x) = x^2 + \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = 2x + \cos x;$$

$$f(x) = x^3 - \cos x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + \operatorname{sen} x;$$

$$f(x) = x^2 \cdot \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \operatorname{sen} x;$$

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\ln x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(\ln x) \cdot \cos x - \left(\frac{1}{x}\right) \cdot \operatorname{sen} x}{(\ln x)^2}.$$

Exercício

5. Obtenha a derivada de cada função a seguir:

a) $f(x) = 10$

b) $f(x) = x^5$

c) $f(x) = 10x^5$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

e) $f(x) = x^2 + x^3$

f) $f(x) = 10x^3 + 5x^2$

g) $f(x) = 2x + 1$

h) $f(t) = 3t^2 - 6t - 10$

i) $f(u) = 5u^3 - 2u^2 + 6u + 7$

j) $f(x) = 3 \ln x + 5$

k) $f(x) = 10 \ln x - 3x + 6$

l) $f(x) = 5 \text{ sen } x + 2 \cos x - 4$

m) $f(x) = x \cdot \text{sen } x$

n) $f(x) = x^2 \cdot \ln x$

o) $f(x) = (2x^2 - 3x + 5)(2x - 1)$

p) $f(x) = \dfrac{\text{sen } x}{x^2}$

q) $f(x) = \text{tg}x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$

r) $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$

s) $f(x) = \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{5}{x^2}$

t) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

u) $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{4}}$

v) $f(x) = 3\sqrt{x} + 5\sqrt[3]{x} + 10$

w) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \text{sen } x$

x) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

5.5 Função Composta — Regra da Cadeia

Consideremos a função $f(x) = (x^2 - 1)^3$. Poderíamos achar a derivada de $f(x)$, desenvolvendo a expressão cubo de uma diferença. Todavia poderíamos fazer $u = x^2 - 1$ e nossa função ficaria sob a forma u^3. Assim, para calcularmos uma imagem dessa função, procedemos em duas etapas:

- Para um dado valor de x, uma 1ª função calcula a imagem $u = x^2 - 1$.
- Para o valor de u assim encontrado, uma 2ª função calcula a imagem $v = u^3$.

Dizemos que a função $f(x)$ é uma composição dessas duas funções.

Para o cálculo da derivada de $f(x)$, podemos usar o seguinte raciocínio intuitivo (a demonstração formal encontra-se no apêndice):

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta v}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Sob condições bastante gerais (e mencionadas no apêndice), quando Δx tende a zero, o mesmo ocorre com Δu, de forma que:

$$\mathbf{f'(x) = v'(u) \cdot u'(x),}$$

isto é,

$$\mathbf{f'(x) = (\text{derivada de } v \text{ em relação a } u).(\text{derivada de } u \text{ em relação a } x).}$$

A fórmula acima é conhecida como regra da cadeia
Assim, no exemplo dado, teremos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3u^2 \cdot u' \\ &= 3(x^2 - 1)^2 \cdot (2x) \\ &= 6x(x^2 - 1)^2. \end{aligned}$$

Exemplo 5.11. Qual a derivada de $f(x) = \ln(3x + 6)$?

Fazendo-se $u = 3x + 6$, teremos $v = \ln u$. Assim:

$$f'(x) = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{3x+6} \cdot 3 = \frac{3}{3x+6}.$$

5.6 Derivada da Função Exponencial

Se $f(x) = a^x$, então $f'(x) = a^x \cdot \ln a$, para todo x real (com $a > 0$ e $a \neq 1$).

Demonstração

Consideremos a função:

$$l(x) = \ln f(x) = \ln a^x = x \ln a.$$

Aplicando-se a regra da cadeia, teremos:

$$l'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x).$$

Mas, por outro lado:

$$l'(x) = \ln a.$$

Conseqüentemente:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln a \Rightarrow f'(x) = f(x) \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$$

Exemplo 5.12

$$f(x) = 3^x \Rightarrow f'(x) = 3^x \cdot \ln 3;$$
$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \cdot \ln e = e^x, \text{ pois } \ln e = 1.$$

Exemplo 5.13. Se quisermos calcular a derivada de $f(x) = e^{x^2 + 3x - 5}$, poderemos fazer $u = x^2 + 3x - 5$ e aplicar a regra da cadeia, isto é,

$$f'(x) = e^u \cdot \ln e \cdot u',$$
$$f'(x) = e^{x^2 + 3x - 5} \cdot (2x + 3).$$

Exemplo 5.14. Vimos anteriormente que se $f(x) = x^n$ então $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ e fizemos a demonstração para n inteiro e positivo. Mostremos que tal relação é válida para qualquer n real (desde que $x > 0$).

De fato, tomando-se o logaritmo natural de ambos os membros de $f(x) = x^n$, teremos:

$$\ln f(x) = \ln x^n = n \cdot \ln x.$$

Derivando ambos os membros em relação a x, obteremos:

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = n \cdot \frac{1}{x},$$

e portanto

$$f'(x) = \frac{n}{x} \cdot f(x) = \frac{n}{x} \cdot x^n = n \cdot x^{n-1}.$$

Exercícios

6. Obtenha a derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = (2x - 1)^3$
b) $f(x) = (2x - 1)^4$
c) $f(x) = (5x^2 - 3x + 5)^6$
d) $f(x) = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1\right)^3$
e) $f(x) = \frac{1}{(x^2 - 3x - 2)^5}$
f) $f(x) = \ln(3x^2 - 2x)$
g) $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 6)$
h) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2 - 3x)$
i) $f(x) = 2^x$
j) $f(x) = 5^x$
k) $f(x) = e^x + 3^x$
l) $f(x) = e^{x^2 - 2x + 1}$
m) $f(x) = 3^{x^2 - 4}$
n) $f(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}}$
o) $f(x) = e^x + e^{-x}$
p) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
q) $f(x) = \sqrt{2x + 1}$
r) $f(x) = \sqrt[3]{2x + 1}$
s) $f(x) = (6x^2 + 2x + 1)^{\frac{3}{2}}$
t) $f(x) = \sqrt{x + 1} + \sqrt[3]{x^2 - 3x + 1}$
u) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x + 1}$
v) $f(x) = \sqrt{\frac{\ln x}{e^x}}$
w) $f(x) = \sqrt{\frac{x + 1}{3x - 2}}$
x) $f(x) = \ln\sqrt{3x^2 + 1}$

Função exponencial geral — Quando temos uma função do tipo $f(x) = u(x)^{v(x)}$, podemos calcular a derivada tomando o logaritmo de ambos os membros e aplicando a regra da cadeia. Por exemplo, se $f(x) = x^x$ teremos:

$$\ln f(x) = \ln x^x$$
$$\ln f(x) = x \cdot \ln x;$$

derivando ambos os membros,

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x},$$
$$f'(x) = f(x) \cdot [\ln x + 1],$$
$$f'(x) = x^x \cdot [\ln x + 1].$$

7. Calcule a derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = (x)^{x^2}$

b) $f(x) = (x^2 + 1)^x$

c) $f(x) = (x)^{\ln x}$

5.7 Função Inversa

Se R for uma relação de A em B, então

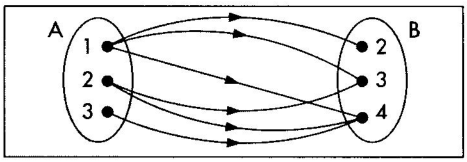
$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A/(a, b) \in A \times B\}$$

é chamada relação inversa de R. Segue-se que $R^{-1} \subset B \times A$, enquanto $R \subset A \times B$.

Se R for dado pelo diagrama da Figura 5.4, a relação inversa será

$$R^{-1} = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 3)\}.$$

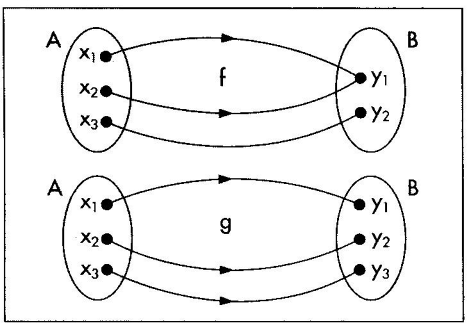
Figura 5.4: Relação de A em B.



Vemos que nem R nem R^{-1} são funções.

Consideremos agora os diagramas da Figura 5.5.

Figura 5.5: Relações de A em B.



f e g agora são funções. Considere f^{-1} e g^{-1}, isto é, as relações inversas. Vemos que f^{-1} não é função, pois ao elemento y_1 correspondem dois elementos x_1 e x_2. Mas g^{-1} é função.

Então, se f é uma função de A em B, considere a relação inversa f^{-1}. Se f^{-1} for também uma função, ela é dita função inversa de f.

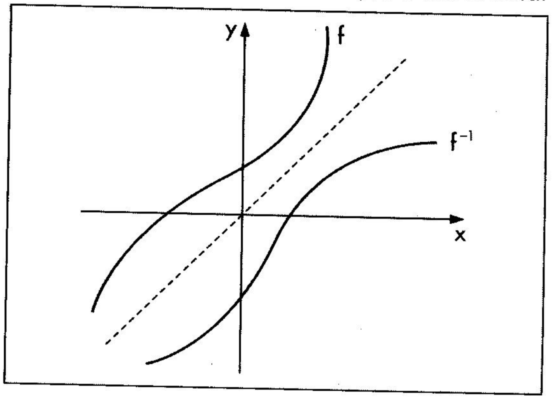
Pelo visto, acima, a função f admitirá inversa f^{-1} se, e somente se, f for bijetora de A em B.

Observemos que, se f for uma função em que $y = f(x)$ e f^{-1} for a inversa de f, então $x = f^{-1}(y)$ se, e somente se, $y = f(x)$. Além disso:

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ para todo } x \in A, \text{ e } f(f^{-1}(y)) = y \text{ para todo } y \in B.$$

Graficamente, se (x, y) é um ponto do gráfico de f, então (y, x) é um ponto do gráfico de f^{-1}; logo, os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação à reta $y = x$ (Figura 5.6).

Figura 5.6: Gráficos de uma função e sua inversa.



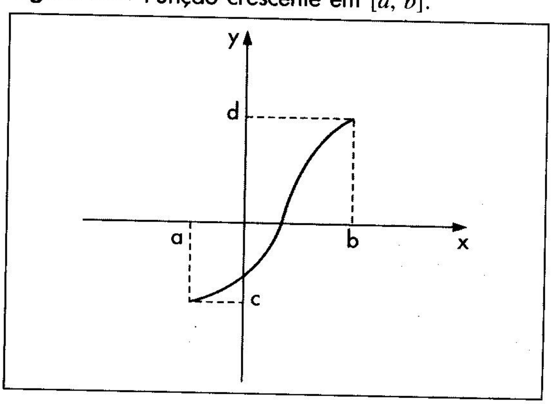
Exemplo 5.15. Seja $y = f(x) = 3x + 5$. Então como a função é bijetora de R em R, existe a função inversa f^{-1}, e ela é obtida isolando-se x na relação dada, isto é:

$$y = 3x + 5 \Rightarrow x = \frac{y-5}{3}.$$

Portanto, $f^{-1}(y) = x = \dfrac{y-5}{3}$.

Se $f(x)$ é uma função real definida no intervalo $[a, b]$ e crescente (ou decrescente) nesse intervalo, então existirá a inversa f^{-1}, pois f é bijetora (Figura 5.7).

Figura 5.7: Função crescente em $[a, b]$.



Além disso, se $f(a) = c$ e $f(b) = d$, então f^{-1} será definida no intervalo $[c, d]$.

Consideremos, agora, o problema da derivação da função inversa. O seguinte resultado, cuja demonstração se encontra no Apêndice, nos dá uma maneira de determinar a derivada de f^{-1}, conhecendo-se a derivada de f.

Seja f uma função definida no intervalo $[a, b]$, derivável e crescente (ou decrescente) nesse intervalo. Então, se $f'(x) > 0$ (ou $f'(x) < 0$) para todo $x \in]a, b[$, temos:

$$Df^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)},$$

em que por $Df^{-1}(y)$ indicamos a derivada de $f^{-1}(y)$.

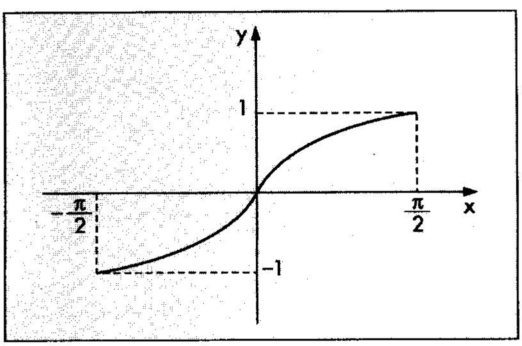
Também escrevemos: $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}$.

Exemplo 5.16. Seja $y = f(x) = x^2$, para todo $x \in [0, \infty[$. Assim:

- $x = \sqrt{y}$, pois $x \geqslant 0$;
- $f'(x) = 2x$;
- $Df^{-1}(y) = \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$.

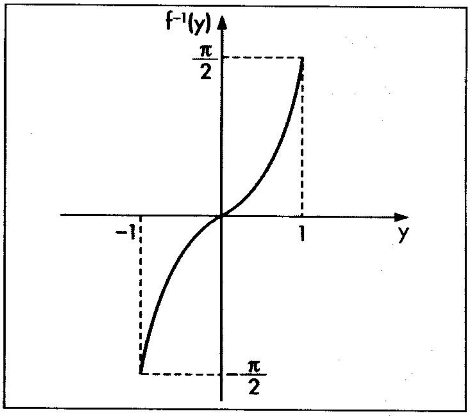
Exemplo 5.17. Se $y = f(x) = \text{sen } x$, não existe a inversa de f, pois existem infinitos valores de x que correspondem a um mesmo y. Mas se nos restringirmos ao intervalo $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, a função será crescente nesse intervalo e conseqüentemente existirá a função inversa (Figura 5.8).

Figura 5.8: Função seno no intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.



Como $\text{sen } \dfrac{\pi}{2} = 1$ e $\text{sen}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$, a função inversa será definida no intervalo $[-1, 1]$ e recebe o nome de função arco seno; isto é, se $y = f(x) = \text{sen } x$, então $x = f^{-1}(y) = \text{arcsen } y$, em que $-1 \leqslant y \leqslant 1$ (Figura 5.9).

Figura 5.9: Função arco seno.



A derivada de f^{-1} é dada por:

$$Df^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x}.$$

Como $\cos x = \sqrt{1 - \text{sen}^2 x}$ $\left(\text{raiz quadrada positiva pois } \cos x > 0 \text{ para } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, teremos:

$$Df^{-1}(y) = D \text{ arcsen } y = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Exemplo 5.18. Para acharmos a derivada da função $y = \text{arcsen}(3x^2)$, podemos fazer $u = 3x^2$. Assim, temos que derivar $y = \text{arcsen}(u)$. Tendo em conta o resultado do exemplo anterior e a regra da cadeia, teremos:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u' = \frac{6x}{\sqrt{1 - 9x^4}}.$$

Exercícios

8. Se $y = f(x) = \cos x$, ache a derivada de $x = f^{-1}(y) = \arccos y$, para $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

9. Se $y = f(x) = \text{tg } x$, ache a derivada de $x = f^{-1}(y) = \text{arctg } y$, para $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

10. Obtenha a derivada das funções:

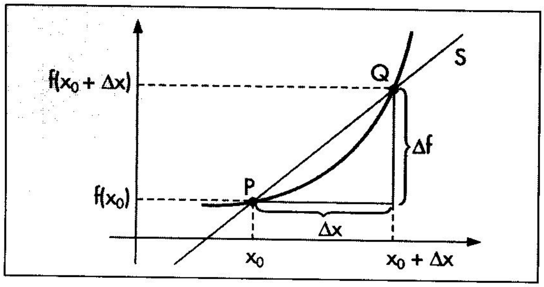
    a) $f(x) = \text{arcsen } (3x - 5)$ b) $f(x) = \arccos \left(\frac{x}{4}\right)$ c) $f(x) = \text{arctg } (x^2 - 5)$

11. Considere a função exponencial $y = f(x) = e^x$ como inversa da função logarítmica $x = \ln y$. Obtenha a derivada de $f(x)$ usando a derivada da função inversa.

5.8 Interpretação Geométrica da Derivada

Consideremos a função f e os pontos $P(x_0, f(x_0))$ e $Q(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ da Figura 5.10. A reta que passa por PQ é secante ao gráfico e seu coeficiente angular é $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Figura 5.10: Reta secante.



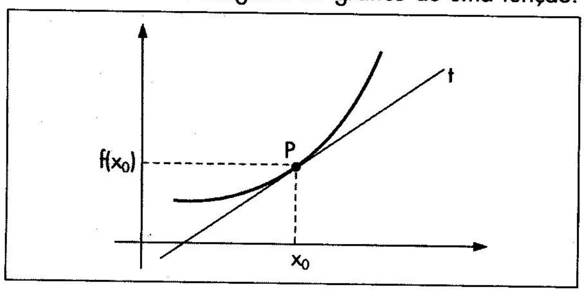
À medida que Δx se aproxima de zero, a reta secante vai mudando seu coeficiente angular.

Consideremos a reta que passa por P e cujo coeficiente angular é dado por:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Essa reta (Figura 5.11) é chamada de reta tangente ao gráfico de f no ponto P (desde que f seja derivável em x_0).

Figura 5.11: Reta tangente ao gráfico de uma função.



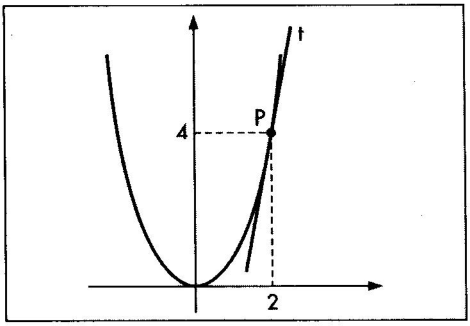
Exemplo 5.19. Obtenha a reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$ no ponto P de abscissa 2.

Temos que, para $x = 2, f(2) = 4$. Logo, o ponto P tem coordenadas $P(2, 4)$.

Também $f'(x) = 2x$ e portanto $f'(2) = 4$. Assim, a reta tangente t tem coeficiente angular igual a 4. Logo sua equação é

$$y - 4 = 4(x - 2), \text{ ou seja, } y = 4x - 4. \text{ (Figura 5.12)}$$

Figura 5.12: Reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$ no ponto $(2, 4)$.



5.9 Diferencial de uma Função

Consideremos uma função f derivável em x_0. A variação sofrida por f, quando se passa do ponto x_0 ao ponto $x_0 + \Delta x$, é:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Consideremos ainda a reta PR, tangente ao gráfico de f no ponto $P(x_0, f(x_0))$ e cujo coeficiente angular é $m = f'(x_0)$.

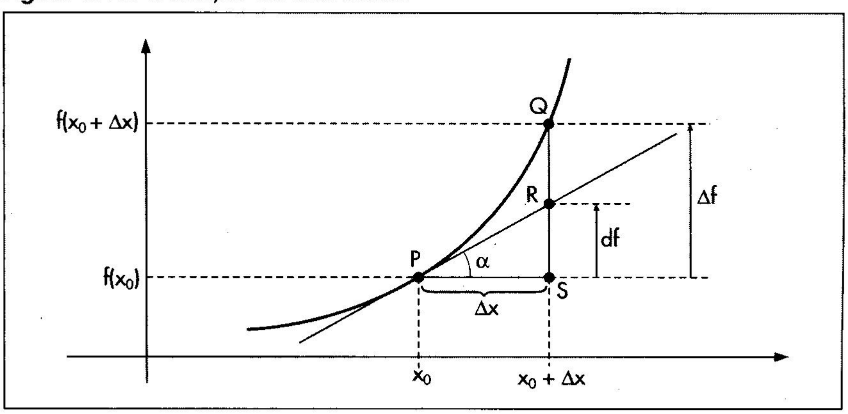
No triângulo PRS da Figura 5.13, temos

$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{RS}}{\overline{PS}} = \frac{\overline{RS}}{\Delta x}$$

e como $m = f'(x_0)$

$$f'(x_0) = \frac{\overline{RS}}{\Delta x} \quad \text{ou} \quad \overline{RS} = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Figura 5.13: Definição de diferencial.



Ao valor $\overline{RS}$ (que depende de Δx) denominamos diferencial de f no ponto de abscissa x_0 e o indicamos por df. Assim,

$$df = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Observemos que df depende de Δx e é fácil perceber que quanto menor for Δx, mais próximo df estará de Δf. Assim, podemos dizer que

$$df \cong \Delta f \text{ para pequenos valores de } \Delta x.$$

Dessa forma, a diferencial de uma função pode ser usada para calcular aproximadamente variações de f, para pequenos valores de Δx.

Exemplo 5.20. Consideremos a função $f(x) = 3x^2$ e os pontos de abscissa 1 e 1,01. A variação de f entrè os pontos dados é

$$\Delta f = f(1,01) - f(1) = 3 \cdot (1{,}01)^2 - 3 \cdot 1^2 = 0{,}0603.$$

A diferencial de f no ponto de abscissa 1, para $\Delta x = 0{,}01$ é

$$df = f'(1) \cdot 0{,}01.$$

Como $f'(x) = 6x$, $f'(1) = 6$ e temos $df = 6 \cdot (0{,}01) = 0{,}06$. Assim, $df \cong \Delta f$.

Exercícios

12. Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico de f nos pontos de abscissas indicados:

a) $f(x) = x^2$, $x_0 = 5$

b) $f(x) = x^2 - 5x$, $x_0 = 1$

c) $f(x) = 2x + 3$, $x_0 = 3$

d) $f(x) = x^2 - 5x + 6$, $x_0 = 2$

e) $f(x) = \ln x$, $x_0 = e$

f) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$, $x_0 = 3$

g) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$

h) $f(x) = e^{-x^2}$, $x_0 = 1$

13. Calcule a diferencial das funções dadas nas seguintes situações:

a) $f(x) = x^2$ $x_0 = 2$ e $\Delta x = 0{,}1$

b) $f(x) = \sqrt{x}$ $x_0 = 1$ e $\Delta x = 0{,}02$

c) $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ $x_0 = 2$ e $\Delta x = 0{,}1$

d) $f(x) = x \ln x - x$ $x_0 = a$ e $\Delta x = d$

e) $f(x) = e^{-x^2}$ $x_0 = 0$ e $\Delta x = 0{,}01$

f) $f(x) = \cos x$ $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$ e $\Delta x = \dfrac{1}{2}$

14. Dada a função $f(x) = ax + b$, mostre que $df = \Delta f$ qualquer que seja x e qualquer que seja Δx.

15. Usando o fato de que $\Delta f \cong df$, calcule, aproximadamente:
    a) $e^{1,1}$.
    b) O acréscimo sofrido pela área de um quadrado de lado x, quando x varia de 3 para 3,01.

16. O custo de fabricação de x unidades de um produto é $C(x) = 2x^2 + 5x + 8$. Atualmente o nível de produção é de 25 unidades. Calcule, aproximadamente, usando diferencial de função, quanto varia o custo se forem produzidas 25,5 unidades.

17. O custo de fabricação de x unidades de um produto é $C(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}5x^2 + 300x + 100$. Atualmente o nível de produção é de 10 unidades e o produtor deseja aumentá-la para 10,2 unidades. Calcule, aproximadamente, usando diferencial de função, de quanto varia o custo.

18. A função receita de uma empresa é $R(x) = 200x - 2x^2$, em que x é o número de unidades produzidas. Atualmente o nível de produção é de 40 unidades, e a empresa pretende reduzir a produção em 0,6 unidade. Usando diferencial de função, dê aproximadamente a variação correspondente da receita.

19. Uma empresa produz mensalmente uma quantidade de um produto dada pela função de produção $P(x) = 2.000x^{\frac{1}{2}}$, em que x é a quantidade de trabalho envolvida (medida em homens-hora). Atualmente são utilizados 900 homens-hora por mês. Calcule, aproximadamente, usando diferencial de função, qual o acréscimo na quantidade produzida quando se passa a utilizar 950 homens-hora.

20. O custo de fabricação de x unidades de um produto é $C(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}5x^2 + 300x + 100$. Calcule, usando diferencial de função, qual o custo aproximado de fabricação da 21ª unidade.

5.10 Funções Marginais

Em Economia e Administração, dada uma função $f(x)$, costuma-se utilizar o conceito de função marginal para avaliar o efeito causado em $f(x)$ por uma pequena variação de x. Chama-se função marginal de $f(x)$ à função derivada de $f(x)$. Assim, a função custo marginal é a derivada da função custo, a função receita marginal é a derivada da função receita, e assim por diante. Veremos a seguir algumas funções marginais e a sua interpretação.

Custo Marginal

Seja $C(x)$ a função custo de produção de x unidades de um produto. Chamamos de custo marginal à derivada de $C(x)$. Indicamos o custo marginal por $C_{mg}(x)$.

Exemplo 5.21. Consideremos a função custo $C(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}5x^2 + 300x + 100$.

O custo marginal é dado por $C_{mg}(x) = C'(x) = 0{,}03x^2 - x + 300$.

Se quisermos o custo marginal para $x = 10$, teremos

$$C_{mg}(10) = 0{,}03 \cdot (10)^2 - 10 + 300 = 293.$$

Esse resultado pode ser interpretado da seguinte forma: sendo

$$C_{mg}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x},$$

tem-se que

$$C_{mg}(x) \cong \frac{\Delta C}{\Delta x} \text{ (para } \Delta x \text{ pequeno).}$$

Freqüentemente esse Δx pequeno é suposto como igual a 1. Assim,

$$C_{mg}(x) \cong \Delta C = C(x+1) - C(x).$$

Portanto, o custo marginal é aproximadamente igual à variação do custo, decorrente da produção de ùma unidade adicional a partir de x unidades.

No exemplo dado, $C_{mg}(10) = 293$ representa, aproximadamente, $C(11) - C(10)$, ou seja, o custo de produção da 11ª unidade.

Receita Marginal

Seja $R(x)$ a função receita de vendas de x unidades de um produto. Chamamos de receita marginal a derivada de $R(x)$ em relação a x. Indicamos a receita marginal por $R_{mg}(x)$. Assim,

$$R_{mg}(x) = R'(x).$$

Exemplo 5.22. Dada a função receita $R(x) = -2x^2 + 1.000x$, a receita marginal é

$$R_{mg}(x) = -4x + 1.000.$$

Se quisermos a receita marginal no ponto $x = 50$, teremos

$$R_{mg}(50) = -4 \cdot (50) + 1.000 = 800.$$

Esse resultado pode ser interpretado da seguinte forma: sendo

$$R_{mg}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta x},$$

tem-se que

$$R_{mg}(x) \cong \frac{\Delta R}{\Delta x} \text{ (para } \Delta x \text{ pequeno).}$$

Supondo $\Delta x = 1$, vem:

$$R_{mg}(x) \cong \Delta R = R(x+1) - R(x).$$

Portanto, a receita marginal é aproximadamente igual à variação da receita decorrente da venda de uma unidade adicional, a partir de x unidades.

No exemplo dado, $R_{mg}(50) = 800$ representa aproximadamente $R(51) - R(50)$, ou seja, o aumento da receita decorrente da venda da 51ª unidade.

Exercícios

21. Dada a função custo $C(x) = 50x + 10.000$, obtenha o custo marginal e interprete o resultado.

22. Dada a função custo $C(x) = 0{,}3x^3 - 2{,}5x^2 + 20x + 200$, obtenha:
    a) o custo marginal C_{mg};
    b) $C_{mg}(5)$ e a interpretação do resultado;
    c) $C_{mg}(10)$ e a interpretação do resultado.

23. Repita o exercício anterior para a seguinte função custo: $C(x) = 0{,}1x^2 + 5x + 200$.

24. Dada a função receita $R(x) = 100x$, obtenha a receita marginal e interprete o resultado.

25. Dada a função receita $R(x) = -4x^2 + 500x$, obtenha:
    a) a receita marginal R_{mg};
    b) $R_{mg}(10)$ e a interpretação do resultado;
    c) $R_{mg}(20)$ e a interpretação do resultado.

26. Se a função de demanda for $p = 20 - 2x$, obtenha a receita marginal.

27. Repita o exercício anterior com a seguinte função de demanda: $p = \dfrac{500}{x + 30} - 10$.

28. Se $p = a - bx$ for a função de demanda, obtenha a receita e a receita marginal.

29. Em cada caso, obtenha o custo marginal e esboce os respectivos gráficos:
    a) $C(x) = 2x + 100$
    b) $C(x) = x + 200$
    c) $C(x) = 2x^3 - 10x^2 + 30x + 100$
    d) $C(x) = 3x^3 - 5x^2 + 20x + 100$

30. Em cada caso, obtenha a receita marginal e a receita média e esboce os respectivos gráficos:
    a) $R(x) = 10x$
    b) $R(x) = 6x$
    c) $R(x) = -2x^2 + 600x$
    d) $R(x) = -10x^2 + 1.000x$

    Observação: a receita média R_{me} é dada por $R_{me}(x) = \dfrac{R(x)}{x}$.

Propensão Marginal a Consumir e a Poupar

Chamando de y a renda disponível e, C o consumo, vimos que C é função de y, e a função $C(y)$ é chamada de função consumo. Denomina-se propensão marginal a consumir (e indica-se por p^C_{mg}) a derivada de C em relação a y. Isto é:

$$p^C_{mg} = C'(y).$$

Analogamente, vimos que a poupança S é também função de y, e que a função $S(y)$ é chamada de função poupança. Denomina-se propensão marginal a poupar (e indica-se por p^S_{mg}) a derivada de S em relação a y, ou seja:

$$p^S_{mg}(y) = S'(y).$$

Exemplo 5.23. Supondo que a função consumo de uma família seja $C(y) = 20 + 0,4y^{0,75}$, teremos

$$p_{mg}^{C}(y) = 0,3\, y^{-0,25}.$$

Se quisermos o valor dessa propensão para $y = 16$, teremos

$$p_{mg}^{C}(16) = 0,3 \cdot (16)^{-0,25} = 0,3 \cdot (2^4)^{-0,25} = 0,15.$$

A interpretação é análoga à feita para o custo e a receita marginal, ou seja, aumentando-se em uma unidade a renda disponível (de 16 para 17), o aumento do consumo será aproximadamente igual a 0,15.

Como vimos, a função poupança é dada por $S = y - C$, ou seja,

$$S(y) = y - 20 - 0,4y^{0,75}.$$

Assim, a propensão marginal a poupar é:

$$p_{mg}^{S}(y) = 1 - 0,3 \cdot y^{-0,25}.$$

Se quisermos o valor dessa propensão para $y = 16$, teremos:

$$p_{mg}^{S}(16) = 1 - 0,3 \cdot (16)^{-0,25} = 1 - 0,15 = 0,85.$$

Portanto, se a renda passar de 16 para 17, o aumento da poupança será aproximadamente 0,85.

Produtividade Marginal

Consideremos uma função de produção P que dependa da quantidade x de um fator variável. Chama-se produtividade marginal do fator à derivada de P em relação a x.

Exemplo 5.24. Consideremos a função de produção $P(x) = 50x^{0,5}$, em que P é a quantidade (em toneladas) produzida por mês de um produto, e x, o trabalho mensal envolvido (medido em homens-hora).

A produtividade marginal do trabalho é

$$P'(x) = 25 \cdot x^{-0,5}.$$

Se $x = 10.000$, então

$$P'(10.000) = 25 \cdot (10.000)^{-0,5} = 25 \cdot (10^4)^{-0,5} = 25 \cdot (10^{-2}) = 0,25.$$

Assim, se o número de homens-hora passar de 10.000 para 10.001, o aumento na produção mensal será, aproximadamente, 0,25 tonelada.