SOLUÇÃO

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{16}{1-3/4} = \frac{16}{1/4} = 64 \text{ polegadas}$$

22.48 Determine o menor número de termos da série $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots$ necessários para que sua soma difira de sua soma infinita por menos de 1/1000.

SOLUÇÃO

Denotemos por S_∞ = a soma infinita e por S_n = a soma dos n primeiros termos. Assim,

$$S_\infty - S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{ar^n}{1-r}$$

Queremos que

$$\frac{ar^n}{1-r} < \frac{1}{1.000}, \quad \text{onde} \quad a = 1/3,\ r = 1/2$$

Então,

$$\frac{(1/3)(1/2)^n}{1-1/2} < \frac{1}{1.000}, \quad \frac{1}{3(2^n)} < \frac{1}{2.000}, \quad 3(2^n) > 2.000, \quad 2^n > 666\frac{2}{3}$$

Quando $n = 9, 2^n < 666\frac{2}{3}$; quando $n = 10, 2^n > 666\frac{2}{3}$. Portanto, são necessários pelo menos 10 termos.

22.49 Quais das seqüências abaixo são harmônicas?

(a) $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$ é uma seqüência harmônica, pois 3, 5, 7, ... é uma progressão aritmética.

(b) $2, 4, 6, \ldots$ não é uma seqüência harmônica, pois $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots$ não é uma progressão aritmética.

(c) $\frac{1}{12}, \frac{2}{15}, \frac{1}{3}, \ldots$ é uma seqüência harmônica, pois $12, \frac{15}{2}, 3, \ldots$ é uma progressão aritmética.

22.50 Determine o 15º termo da seqüência harmônica $\frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \ldots$.

SOLUÇÃO

A progressão aritmética correspondente é 4, 7, 10, . . ., cujo 15º termo é $l = a + (n-1)\,d = 4 + (15-1)3 = 46$.

Portanto, o 15º termo da seqüência harmônica é $\frac{1}{46}$.

22.51 Deduza a fórmula da média harmônica, H, entre dois números p e q.

SOLUÇÃO

Como p, H, q formam uma seqüência harmônica, $\frac{1}{p}, \frac{1}{H}, \frac{1}{q}$ é uma seqüência aritmética.

Então, $\frac{1}{H} - \frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{H}$, $\quad \frac{2}{H} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{p+q}{pq}$ $\quad$ e $\quad H = \frac{2pq}{p+q}$

Outro método:

Média harmônica entre p e q = inverso da média aritmética entre $\frac{1}{p}$ e $\frac{1}{q}$.

Média aritmética entre $\frac{1}{p}$ e $\frac{1}{q} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{p+q}{2pq}$.

Portanto, a média harmônica entre p e $q = \frac{2pq}{p+q}$.

22.52 Qual é a média harmônica entre 3/8 e 4?

SOLUÇÃO

Média aritmética entre $\frac{8}{3}$ e $\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{35}{24}$.

Portanto, a média harmônica entre $\frac{3}{8}$ e $4 = 24/35$.

Ou, pela fórmula, média harmônica $= \frac{2pq}{p+q} = \frac{2(3/8)(4)}{3/8+4} = \frac{24}{35}$.

22.53 Insira quatro médias harmônicas entre 1/4 e 1/64.

SOLUÇÃO

Para inserir quatro médias aritméticas entre 4 e 64: $l = a\,(n-1)\,d$, $64 = 4 + (6-1)\,d$, $d = 12$.
Portanto, as quatro médias aritméticas entre 4 e 64 são 16, 28, 40, 52.

Concluímos, então, que as quatro médias harmônicas entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{64}$ são $\frac{1}{16}, \frac{1}{28}, \frac{1}{40}, \frac{1}{52}$.

22.54 Insira três médias harmônicas entre 10 e 20.

SOLUÇÃO

Para inserir três médias aritméticas entre $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{20}$:

$$l = a + (n-1)d, \quad \frac{1}{20} = \frac{1}{10} + (5-1)d, \quad d = -\frac{1}{80}$$

Portanto, as três médias aritméticas entre $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{20}$ são $\frac{7}{80}, \frac{6}{80}, \frac{5}{80}$. Assim, concluímos que as três médias harmônicas entre 10 e 20 são $\frac{80}{7}, \frac{40}{3}$, 16.

22.55 Determine se a seqüência $-1, -4, 2$ é uma progressão aritmética, geométrica ou uma seqüência harmônica.

SOLUÇÃO

Como $-4-(-1) \neq 2-(-4)$, ela não é uma progressão aritmética.

Como $\frac{-4}{-1} \neq \frac{2}{-4}$, ela não é uma progressão geométrica.

Como $\frac{1}{-1}, \frac{1}{-4}, \frac{1}{2}$ estão em progressão aritmética, i.e., $\frac{1}{-4} - (-1) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{-4}\right)$, ela é uma seqüência harmônica.

Problemas Complementares

22.56 Determine o n-ésimo termo e a soma dos n primeiros termos das progressões aritmética para o valor indicado de n.

(*a*) $1, 7, 13, \ldots$ $n = 100$
(*b*) $2, 5\frac{1}{2}, 9, \ldots$ $n = 23$
(*c*) $-26, -24, -22, \ldots$ $n = 40$
(*d*) $2, 6, 10, \ldots$ $n = 16$
(*e*) $3, 4\frac{1}{2}, 6, \ldots$ $n = 37$
(*f*) $x-y, x, x+y, \ldots$ $n = 30$

22.57 Determine a soma dos n primeiros termos das progressões aritméticas.

(*a*) $1, 2, 3, \ldots$ (*b*) $2, 8, 14, \ldots$ (*c*) $1\frac{1}{2}, 5, 8\frac{1}{2}, \ldots$

Mathcad

22.58 Uma progressão aritmética tem como primeiro termo 4 e como último, 34. Se a soma de seus termos é 247, encontre o número de termos e sua diferença comum.

22.59 Uma progressão aritmética consistindo de 49 termos tem o último termo igual a 28. Se a diferença comum de seus termos é 1/2, encontre o primeiro termo e a soma de seus termos.

22.60 Encontre a soma de todos os inteiros pares entre 17 e 99.

22.61 Encontre a soma de todos os inteiros entre 84 e 719 que são múltiplos de 5.

22.62 Quantos termos da progressão aritmética 3, 7, 11, ... são necessários para nos proporcionarem uma soma igual a 1275?

22.63 Encontre três números em progressão aritmética cuja soma é 48 e cuja soma dos quadrados é 800.

22.64 Uma bola, partindo do repouso, rola em um plano inclinado, percorrendo 3 polegadas durante o primeiro segundo, 5 durante o segundo, 7 polegadas durante o terceiro, etc. Em quanto tempo, a partir do repouso, esta bola percorrerá 120 polegadas?

22.65 Se forem poupados 1 centavo no primeiro dia, 2 no segundo, 3 no terceiro, etc., qual será o total acumulado ao final de 365 dias?

22.66 A soma de 40 termos de uma certa progressão aritmética é 430, enquanto a soma de 60 termos é 945. Determine o n-ésimo termo da progressão aritmética.

22.67 Encontre uma progressão aritmética cuja soma dos n primeiros termos seja igual a $2n^2 + 3n$.

22.68 Determine a média aritmética entre (*a*) 15 e 41, (*b*) -16 e 23, (*c*) $2-\sqrt{3}$ e $4+3\sqrt{3}$, (*d*) $x - 3y$ e $5x + 2y$.

22.69 (*a*) Insira quatro médias aritméticas entre 9 e 24.
(*b*) Insira duas médias aritméticas entre -1 e 11.
(*c*) Insira três médias aritméticas entre $x + 2y$ e $x + 10y$.
(*d*) Insira entre 5 e 26 um número de médias aritméticas tal que a soma da progressão resultante seja 124.

22.70 Determine o n-ésimo termo e a soma dos primeiros n termos das seguintes progressões geométricas para o valor de n indicado.

(*a*) $2, 3, 9/2, \ldots \quad n = 5$
(*b*) $6, -12, 24, \ldots \quad n = 9$
(*c*) $1, 1/2, 1/4, \ldots \quad n = 10$
(*d*) $1, 3, 9, \ldots \quad n = 8$
(*e*) $8, 4, 2, \ldots \quad n = 12$
(*f*) $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, \ldots \quad n = 8$

22.71 Encontre a soma dos n primeiros termos das progressões geométricas.
(*a*) $1, 1/3, 1/9, \ldots$ (*b*) $4/3, 2, 3, \ldots$ (*c*) $1, -2, 4, \ldots$

22.72 Uma progressão geométrica tem o primeiro termo 3 e o último, 48. Se cada termo é o dobro do anterior, encontre o número de termos e a soma da progressão geométrica.

22.73 Prove que a soma S dos termos de uma progressão geométrica na qual o primeiro termo é a, o último é l e a razão comum r é dada por

$$S = \frac{rl - a}{r - 1}$$

22.74 Em uma progressão geométrica, o segundo termo excede o primeiro em 4, e a soma do segundo e do terceiro termos é 24. Demonstre que existem duas progressões geométricas possíveis que satisfazem estas condições e encontre a soma dos cinco primeiros termos de ambas.

22.75 Determine a progressão geométrica que consiste em quatro termos, na qual a razão é positiva, a soma dos dois primeiros termos é 10 e a soma dos dois últimos é $22\frac{1}{2}$.

22.76 Os dois primeiros termos de uma progressão geométrica são $b/(1 + c)$ e $b/(1 + c)^2$. Demonstre que a soma dos n termos desta progressão é dada pela fórmula

$$S = b\left(\frac{1-(1+c)^{-n}}{c}\right)$$

22.77 Determine a soma dos n primeiros termos da progressão geométrica $a - 2b$, $ab^2 - 2b^3$, $ab^4 - 2b^5$, ...

22.78 O terceiro termo de uma progressão geométrica é 6 e o quinto é 81 vezes o primeiro. Escreva os primeiros cinco termos da progressão, supondo que todos os seus termos sejam positivos.

22.79 Determine três números em progressão geométrica cuja soma é 42 e cujo produto é 512.

22.80 O terceiro termo de uma progressão geométrica é 144 e o sexto, 486. Encontre a soma dos cinco primeiros termos da progressão.

22.81 Um tanque contém água na qual estão dissolvidas 972 libras de sal. Um terço da solução é retirada e o tanque é completado com água pura. Após a solução se tornar novamente uniforme, um terço da mistura é retirado e novamente o tanque é completado com água pura. Se este processo for repetido quatro vezes, que peso de sal continuará no tanque?

22.82 A soma dos três primeiros termos de uma progressão geométrica é 26 e a dos seis primeiros é 728. Qual é o n-ésimo termo da progressão?

22.83 A soma de três números em progressão geométrica é 14. Se os dois primeiros termos forem acrescidos de uma unidade e o terceiro decrescido de uma unidade, os números resultantes formarão uma progressão aritmética. Determine a progressão geométrica.

22.84 Determine a média geométrica entre:

(*a*) 2 e 18, (*b*) 4 e 6, (*c*) -4 e -16, (*d*) $a + b$ e $4a + 4b$.

22.85 (*a*) Insira duas médias geométricas entre 3 e 192.

(*b*) Insira quatro médias geométricas entre $\sqrt{2}$ e 8.

(*c*) A média geométrica de dois números é 8. Se um deles é 6, encontre o outro.

22.86 O primeiro termo de uma progressão aritmética é 2, e o primeiro, terceiro e décimo primeiro termos são também os três primeiros termos de uma progressão geométrica. Encontre a soma dos onze primeiros termos da progressão aritmética.

22.87 Quantos termos consecutivos da progressão aritmética 9, 11, 13, . . . devem ser adicionados, de modo que sua soma seja igual à de nove termos da progressão geométrica 3, – 6, 12, – 24, . . . ?

22.88 Em um conjunto de quatro números, os três primeiros estão em progressão geométrica e os três últimos estão em progressão aritmética com diferença comum igual a 6. Se o primeiro número é igual ao quarto, encontre os quatro números.

22.89 Encontre dois números cuja diferença é 32 e cuja média aritmética excede a geométrica em 4.

22.90 Encontre a soma das séries geométricas infinitas.

(*a*) $3 + 1 + 1/3 + \cdots$ (*c*) $1 + 1/2^2 + 1/2^4 + \cdots$ (*e*) $4 - 8/3 + 16/9 - \cdots$

(*b*) $4 + 2 + 1 + \cdots$ (*d*) $6 - 2 + 2/3 - \cdots$ (*f*) $1 + 0{,}1 + 0{,}01 + \cdots$

22.91 A soma dos dois primeiros termos de uma progressão geométrica decrescente é 5/4, e a soma infinita é 9/4. Escreva os três primeiros termos da série geométrica.

22.92 A soma dos termos infinitos de uma progressão geométrica decrescente é 3, e a soma de seus quadrados é também 3. Escreva os primeiros três termos da série.

22.93 As sucessivas distâncias percorridas por um pêndulo são, respectivamente, 36, 24, 16, . . . polegadas. Encontre a distância total percorrida pelo pêndulo antes do repouso.

22.94 Expresse as dízimas periódicas como frações racionais.

(*a*) 0,121212. . . (*c*) 0,270270. . . (*e*) 0,1363636. . .

(*b*) 0,090909. . . (*d*) 1,424242. . . (*f*) 0,428571428571428. . .

22.95 (*a*) Encontre o oitavo termo da seqüência harmônica 2/3, 1/2, 2/5, . . .

(*b*) Encontre o décimo termo da seqüência harmônica 5, 30/7, 15/4, . . .

(*c*) Qual é o n-ésimo termo da seqüência harmônica 10/3, 2, 10/7, . . .?

22.96 Determine a média harmônica para os pares de números:

(*a*) 3 e 6 (*b*) 1/2 e 1/3 (*c*) $\sqrt{3}$ e $\sqrt{2}$ (*d*) $a+b$ e $a-b$

22.97 (*a*) Insira duas médias harmônicas entre 5 e 10.

(*b*) Insira quatro médias harmônicas entre 3/2 e 3/7.

22.98 Um objeto move-se em velocidade uniforme a, de A até B, e então viaja em velocidade uniforme b, de B até A. Demonstre que a velocidade média para fazer a viagem toda é $2ab/(a+b)$, a média harmônica entre a e b. Calcule a velocidade média se $a = 30$ pés/s e $b = 60$ pés/s.

Respostas dos Problemas Complementares

22.56 (*a*) $l = 595,\ S = 29.800$ (*c*) $l = 52,\ S = 520$ (*e*) $l = 57,\ S = 1.110$

(*b*) $l = 79,\ S = 931\frac{1}{2}$ (*d*) $l = 62,\ S = 512$ (*f*) $l = x + 28y,\ S = 30x + 405y$

22.57 (*a*) $\dfrac{n(n+1)}{2}$ (*b*) $n(3n-1)$ (*c*) $\dfrac{n(7n-1)}{4}$

22.58 $n = 13,\ d = 5/2$

22.59 $a = 4,\ S = 784$

22.60 2.378

22.61 50 800

22.62 25

22.63 12, 16, 20

21.64 10 segundos

22.65 \$ 667,95

22.66 $\dfrac{n+1}{2}$

22.67 5, 9, 13, 17, . . . , n-ésimo termo $= 4n + 1$

22.68 (*a*) 28, (*b*) 7/2, (*c*) $3+\sqrt{3}$, (*d*) $3x - y/2$

22.69 (*a*) 12, 15, 18, 21 (*c*) $x+4y,\ x+6y,\ x+8y$
(*b*) 3, 7 (*d*) A progressão aritmética é 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26

22.70 (*a*) $l = 81/8,\ S = 211/8$ (*c*) $l = 1/512,\ S = 1023/512$ (*e*) $l = 1/256,\ S = 4095/256$
(*b*) $l = 1536,\ S = 1026$ (*d*) $l = 2187,\ S = 3280$ (*f*) $l = 81,\ S = 120 + 40\sqrt{3}$

22.71 (*a*) $\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$ (*b*) $\frac{8}{3}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right]$ (*c*) $\frac{1-(-2)^n}{3}$

22.72 $n = 5,\ S = 93$

22.74 2, 6, 18, . . . e $S = 242$; 4, 8, 16, . . . e $S = 124$

22.75 4, 6, 9, 27/2

22.77 $\frac{(a-2b)(b^{2n}-1)}{b^2-1}$

22.78 2/3, 2, 6, 18, 54

22.79 2, 8, 32

22.80 844

22.81 192 libras

22.82 $2 \cdot 3^{n-1}$

22.83 2, 4, 8

22.84 (*a*) 6 (*b*) $2\sqrt{6}$ (*c*) -8 (*d*) $2a + 2b$

22.85 (*a*) 12, 48 (*b*) $2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}$ (*c*) 32/3

22.86 187 ou 22

22.87 19

22.88 8, −4, 2, 8

22.89 18, 50

22.90 (*a*) 9/2 (*b*) 8 (*c*) 4/3 (*d*) 9/2 (*e*) 12/5 (*f*) 10/9

22.91 3/4, 1/2, 1/3

22.92 3/2, 3/4, 3/8

22.93 108 polegadas

22.94 (*a*) 4/33 (*b*) 1/11 (*c*) 10/37 (*d*) 47/33 (*e*) 3/22 (*f*) 3/7

22.95 (*a*) 1/5 (*b*) 2 (*c*) $\frac{10}{2n+1}$

22.96 (*a*) 4 (*b*) 2/5 (*c*) $6\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$ (*d*) $\frac{a^2-b^2}{a}$

22.97 (*a*) 6, 15/2 (*b*) 1, 3/4, 3/5, 1/2

22.98 40 pés/segundo

Capítulo 23

Logaritmos

23.1 DEFINIÇÃO DE LOGARITMO

Se $b^x = N$, onde N é um número positivo e b é um número positivo distinto de 1, então o expoente x é o logaritmo de N na base b e é escrito na forma $x = \log_b N$.

Exemplo 23.1 Escreva $3^2 = 9$ usando a notação de logaritmos.
Como $3^2 = 9$, então 2 é o logaritmo de 9 na base 3, ou seja, $2 = \log_3 9$.

Exemplo 23.2 Calcule $\log_2 8$.
$\log_2 8$ é o número x ao qual a base 2 deve ser elevada para obter-se 8, ou seja, $2^x = 8$, $x = 3$. Assim, $\log_2 8 = 3$.

$b^x = N$ e $x = \log_b N$ são relações equivalentes; $b^x = N$ é chamada *forma exponencial* e $x = \log_b N$ é a *forma logarítmica* da relação. Como conseqüência, há *regras de logaritmos* correspondentes às *regras de expoentes*.

23.2 REGRAS DOS LOGARITMOS

I. O logaritmo do produto de dois números positivos M e N é igual à soma dos logaritmos dos números, ou seja,

$$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$$

II. O logaritmo do quociente de dois números positivos M e N é igual à diferença dos logaritmos dos números, ou seja,

$$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$$

III. O logaritmo da potência p de um número positivo M é igual a p multiplicado pelo logaritmo do número, ou seja,

$$\log_b M^p = p \log_b M$$

Exemplos 23.3 Aplique as regras dos logaritmos às expressões.

(*a*) $\log_2 3(5)$ (*b*) $\log_{10}\frac{17}{24}$ (*c*) $\log_7 5^3$ (*d*) $\log_{10}\sqrt[3]{2}$

(*a*) $\log_2 3(5) = \log_2 3 + \log_2 5$

(*b*) $\log_{10}\frac{17}{24} = \log_{10} 17 - \log_{10} 24$

(*c*) $\log_7 5^3 = 3\log_7 5$

(*d*) $\log_{10}\sqrt[3]{2} = \log_{10} 2^{1/3} = \frac{1}{3}\log_{10} 2$

23.3 LOGARITMOS COMUNS

O sistema de logaritmos cuja base é 10 é chamado de sistema logarítmico comum. Quando a base é omitida, subentende-se que a base é 10. Então, $\log 25 = \log_{10} 25$.

Considere a seguinte tabela:

Número N	0,0001	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1.000	10.000
Forma exponencial de N	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4
$\log N$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

É óbvio que $10^{1.5377}$ fornecerá um resultado maior que 10 (que é 10) mas menor que 100 (que é 10^2). Efetivamente, $10^{1.5377} = 34{,}49$; conseqüentemente, $\log 34{,}49 = 1{,}5377$.

O dígito que precede a parte decimal do número é a *característica* do logaritmo, e a fração decimal é a sua *mantissa*. No exemplo acima, a característica é 1 e a mantissa é 0,5377.

A mantissa do logaritmo de um número é encontrada em tabelas, nas quais subentende-se que cada mantissa seja precedida por vírgula, uma vez que ela é sempre inferior a 1 e positiva.

A característica é determinada por uma análise do número, obedecendo às seguintes regras:

(1) Para um número maior que 1, a característica é positiva e igual à quantidade de dígitos antes da vírgula *menos* um. Por exemplo:

Número	5.297	348	900	34,8	60	5,764	3
Característica	3	2	2	1	1	0	0

(2) Para um número menor que 1, a característica é negativa e igual à quantidade de zeros após a vírgula *mais* um. O sinal negativo da característica é representado de dois modos: (*a*) acima da característica, como $\bar{1}$, $\bar{2}$, etc.; (*b*) como $9 - 10$, $8 - 10$, etc. Assim, a característica de 0,3485 é $\bar{1}$, ou $9 - 10$, de 0,0513 é $\bar{2}$ ou $8 - 10$, e de 0,0024 é $\bar{3}$ ou $7 - 10$.

23.4 USANDO UMA TABELA DE LOGARITMOS COMUNS

Para encontrar o logaritmo comum de um número positivo, utilize a tabela apresentada no Apêndice A.

Suponha que desejamos encontrar o logaritmo do número 728. Na tabela de logaritmos comuns, descemos na coluna N até 72, deslocamo-nos na horizontal para a direita até a coluna 8 e anotamos 8621, que é a mantissa do logaritmo. Como a característica é 2, $\log 728 = 2{,}8621$. (Isso significa que $728 = 10^{2{,}8621}$.)

A mantissa para log 72,8; log 7,28; log 0,728; log 0,0728, etc., é 0,8621, mas as características diferem. Portanto:

$$\begin{array}{ll} \log 728 = 2.8621 & \log 0.728 = \bar{1}.8621 \text{ ou } 9.8621 - 10 \\ \log 72.8 = 1.8621 & \log 0.0728 = \bar{2}.8621 \text{ ou } 8.8621 - 10 \\ \log 7.28 = 0.8621 & \log 0.00728 = \bar{3}.8621 \text{ ou } 7.8621 - 10 \end{array}$$

Quando o número contiver quatro dígitos, recorra à interpolação usando o método das partes proporcionais.

Exemplo 23.4 Calcule log 4,638.

A característica é 0. A mantissa é encontrada como segue.

$$\begin{aligned} \text{Mantissa de } \log 4640 &= 0{,}6665 \\ \text{Mantissa de } \log 4630 &= \underline{0{,}6656} \\ \text{Diferença tabular} &= 0{,}0009 \end{aligned}$$

$0{,}8 \times$ diferença tabular $= 0{,}00072$ ou, para quatro casas decimais, 0,0007.

Mantissa de log 4638 = 0,6656 + 0,0007 = 0,6663 mantendo as quatro casas decimais.

Portanto, log 4,638 = 0,6663.

A mantissa de log 4638, log 463,8, log 46,38, etc., é 0,6663, mas as características diferem.

Assim:

$$\begin{array}{llll} \log 4638 = 3{,}6663 & \log 0{,}4638 & = \bar{1}{,}6663 & \text{ou } 9{,}6663 - 10 \\ \log 463.8 = 2{,}6663 & \log 0{,}046\,38 & = \bar{2}{,}6663 & \text{ou } 8{,}6663 - 10 \\ \log 46{,}38 = 1{,}6663 & \log 0{,}004\,638 & = \bar{3}{,}6663 & \text{ou } 7{,}6663 - 10 \\ \log 4{,}638 = 0{,}6663 & \log 0{,}000\,463\,8 & = \bar{4}{,}6663 & \text{ou } 6{,}6663 - 10 \end{array}$$

Antilogaritmo é o número que corresponde a um logaritmo. O "antilogaritmo de 3" significa "o número cujo logaritmo é 3", esse número obviamente é 1000.

Exemplos 23.5 Determine o valor de N.

(*a*) $\log N = 1{,}9058$ (*b*) $\log N = 7{,}8657 - 10$ (*c*) $\log N = 9{,}3842 - 10$

(*a*) Na tabela, a mantissa 0,9058 corresponde ao número 805. Como a característica de log N é 1, o número deve ter dois dígitos antes da vírgula; conseqüentemente $N = 80{,}5$ (ou antilog 1,9058 = 80,5).

(*b*) Na tabela, a mantissa 0,8657 corresponde ao número 734. Como a característica é 7 − 10, o número deve ter dois zeros imediatamente após a vírgula; então $N = 0{,}00734$ (ou antilog 7,8657 − 10 = 0,00734).

(*c*) Como a mantissa 0,3842 não consta na tabela, deve-se usar a interpolação.

$$\begin{aligned} \text{Mantissa de } \log 2430 &= 0{,}3856 & \text{Mantissa dada} &= 0{,}3842 \\ \text{Mantissa de } \log 2420 &= \underline{0{,}3838} & \text{Próxima mantissa menor} &= \underline{0{,}3838} \\ \text{Diferença tabular} &= 0{,}0018 & \text{Diferença} &= 0{,}0004 \end{aligned}$$

Então, $2420 + \frac{4}{18}(2430 - 2420) = 2422$ para quatro dígitos, e $N = 0{,}2422$.

23.5 LOGARITMOS NATURAIS

O sistema de logaritmos cuja base é a constante e é chamado de sistema logarítmico natural. Quando desejamos indicar que a base de um logaritmo é e, usamos a notação ln. Assim, $\ln 25 = \log_e 25$.

A forma exponencial de $\ln a = b$ é $e^b = a$. A constante e é um número irracional que tem expansão decimal $e = 2{,}718\,281\,828\,450\,45\ldots$

23.6 USANDO UMA TABELA DE LOGARITMOS NATURAIS

Para determinar o logaritmo natural de um número positivo, usamos a tabela de logaritmos naturais do Apêndice B.

Para determinar o logaritmo natural de um número entre 1 e 10, tal como 5,26, descemos na coluna N até 5,2, deslocamo-nos para a direita até a coluna encabeçada por 0,06 para obter o valor 1,6601. Assim, ln 5,26 = 1,6601. Isso significa que $5{,}26 = e^{1{,}6601}$.

Se desejarmos determinar o logaritmo natural de um número maior que 10 ou menor que 1, escreveremos o número em notação científica, aplicaremos as regras dos logaritmos, e usaremos a tabela de logaritmos naturais e o fato de ln 10 = 2,3026.

Exemplos 23.6 Determine o logaritmo natural dos números abaixo.

(*a*) 346 (*b*) 0,0217

(*a*)
$$\begin{aligned}\ln 346 &= \ln(3{,}46 \times 10^2)\\ &= \ln 3{,}46 + \ln 10^2\\ &= \ln 3{,}46 + 2 \ln 10\\ &= 1{,}2413 + 2(2{,}3026)\\ &= 1{,}2413 + 4{,}6052\\ \ln 346 &= 5{,}8465\end{aligned}$$

(*b*)
$$\begin{aligned}\ln 0{,}0217 &= \ln(2{,}17 \times 10^{-2})\\ &= \ln 2{,}17 + \ln 10^{-2}\\ &= \ln 2{,}17 - 2 \ln 10\\ &= 0{,}7747 - 2(2{,}3026)\\ &= 0{,}7747 - 4{,}6052\\ \ln 0{,}0217 &= -3{,}8305\end{aligned}$$

O valor de ln 4,638 não pode ser encontrado diretamente na tabela de logaritmos naturais porque tem quatro dígitos significativos, mas podemos recorrer à interpolação para determiná-lo.

$$\begin{aligned}\ln 4{,}640 &= 1{,}5347\\ \ln 4{,}630 &= \underline{1{,}5326}\\ \text{Diferença tabular} &= 0{,}0021\end{aligned}$$

$0{,}8 \times$ diferença tabular $= 0{,}8 \times 0{,}0021 = 0{,}001\,68$ ou $0{,}0017$ para quatro casas decimais.

Assim, $\ln 4{,}638 = \ln 4{,}630 + 0{,}0017 = 1{,}5324 + 0{,}0017 = 1{,}5343$.

O antilogaritmo de um logaritmo natural é o número que tem o logaritmo dado. O procedimento para determinação do antilogaritmo de um logaritmo natural menor que 0 ou maior que 2,3026, requer a adição ou subtração de múltiplos de $\ln 10 = 2{,}3026$ até trazer o logaritmo natural para a faixa de 0 a 2,3026, que então pode ser encontrada na tabela do Apêndice B.

Exemplos 23.7 Determine o valor de N.

(*a*) $\ln N = 2{,}1564$ (*b*) $\ln N = -4{,}9705$ (*c*) $\ln N = 1{,}8869$

(*a*) $\ln N = 2{,}1564$ está entre 0 e 2,3026, então procuramos na tabela de logaritmos naturais por 2,1564. Como ele está na tabela, obtemos N da soma dos números que encabeçam a linha e coluna para 1,1564. Assim, $N =$ antilogaritmo $2{,}1564 = 8{,}64$.

(*b*) Como $\ln N = -4{,}9705$ é menor que 0, devemos reescrevê-lo como um número entre 0 e 2,3026 menos um múltiplo de $2{,}3026 = \ln 10$. Então, se adicionarmos 3 vezes 2,3026 a $-4{,}9705$, obteremos um número positivo entre 0 e 2,3026, e reescreveremos $-4{,}9705$ como $1{,}9373 - 3(2{,}3026)$.

$$\begin{aligned}\ln N &= -4{,}9705\\ &= 1{,}9373 - 3(2{,}3026)\\ &= \ln 6{,}94 - 3 \ln 10 \qquad \text{Observação: } \ln 6{,}94 = 1{,}9373 \text{ e } \ln 10 = 2{,}3026\\ &= \ln 6{,}94 + \ln 10^{-3}\\ &= \ln(6{,}94 \times 10^{-3})\\ \ln N &= \ln 0{,}006\,94\\ N &= 0{,}006\,94\end{aligned}$$

(*c*) Como $\ln N = 1{,}8869$ está entre 0 e 2,3026, procuramos 1,8869 na tabela de logaritmos naturais, mas ele não consta. Temos então de usar interpolação para determinar N.

$$\begin{aligned}\ln 6{,}600 &= 1{,}8871 & \ln N &= 1{,}8869\\ \ln 6{,}590 &= \underline{1{,}8856} & \ln 6{,}590 &= \underline{1{,}8856}\\ \text{Diferença tabular} &= 0{,}0015 & \text{diferença} &= 0{,}0013\end{aligned}$$

$$N = 6{,}590 + \frac{13}{15}(6{,}600 - 6{,}590) = 6{,}590 + 0{,}0009 = 6{,}599$$

23.7 DETERMINAÇÃO DE LOGARITMOS USANDO UMA CALCULADORA

Se o número para o qual queremos determinar o logaritmo tiver quatro ou mais dígitos significativos, podemos arredondar o número para quatro dígitos significativos e usar as tabelas de logaritmos e interpolação ou utilizar uma calculadora científica ou gráfica para determinar o logaritmo do número considerado. A utilização de uma calculadora conduzirá a um resultado mais preciso.

Pode-se utilizar a calculadora científica para determinar logaritmos e antilogaritmos de base 10 ou base e. Essas calculadoras têm teclas para as funções log e ln, cujas inversas são os antilogaritmos.

Muitos dos cálculos feitos utilizando logaritmos podem ser realizados diretamente em uma calculadora científica. A vantagem de resolver um problema desta forma é que raramente os números têm de ser arredondados e o problema é resolvido de forma rápida e precisa.

Problemas Resolvidos

23.1 Expresse as seguintes formas exponenciais na forma logarítmica:

(*a*) $p^q = r$, (*b*) $2^3 = 8$, (*c*) $4^2 = 16$, (*d*) $3^{-2} = \frac{1}{9}$, (*e*) $8^{-2/3} = \frac{1}{4}$.

SOLUÇÃO

(*a*) $q = \log_p r$, (*b*) $3 = \log_2 8$, (*c*) $2 = \log_4 16$, (*d*) $-2 = \log_3 \frac{1}{9}$, (*e*) $-\frac{2}{3} = \log_8 \frac{1}{4}$

23.2 Expresse as seguintes formas logarítmicas na forma exponencial:

(*a*) $\log_5 25 = 2$, (*b*) $\log_2 64 = 6$, (*c*) $\log_{1/4} \frac{1}{16} = 2$, (*d*) $\log_a a^3 = 3$, (*e*) $\log_r 1 = 0$.

SOLUÇÃO

(*a*) $5^2 = 25$, (*b*) $2^6 = 64$, (*c*) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$, (*d*) $a^3 = a^3$, (*e*) $r^0 = 1$

23.3 Determine o valor das seguintes expressões.

(*a*) $\log_4 64$. Se $\log_4 64 = x$; então $4^x = 64 = 4^3$ e $x = 3$.

(*b*) $\log_3 81$. Se $\log_3 81 = x$; então $3^x = 81 = 3^4$ e $x = 4$.

(*c*) $\log_{1/2} 8$. Se $\log_{1/2} 8 = x$; então $(\frac{1}{2})^x = 8$, $(2^{-1})^x = 2^3$, $2^{-x} = 2^3$ e $x = -3$.

(*d*) $\log \sqrt[3]{10} = x$, $10^x = \sqrt[3]{10} = 10^{1/3}$, $x = 1/3$

(*e*) $\log_5 125\sqrt{5} = x$, $5^x = 125\sqrt{5} = 5^3 \cdot 5^{1/2} = 5^{7/2}$, $x = 7/2$

23.4 Solucione as seguintes equações.

(*a*) $\log_3 x = 2$, $3^2 = x$, $x = 9$

(*b*) $\log_4 y = -\frac{3}{2}$, $4^{-3/2} = y$, $y = \frac{1}{8}$

(*c*) $\log_x 25 = 2$, $x^2 = 25$, $x = \pm 5$. Como as bases são positivas, a solução é $x = 5$.

(*d*) $\log_y \frac{9}{4} = -\frac{2}{3}$, $y^{-2/3} = \frac{9}{4}$, $y^{2/3} = \frac{4}{9}$, $y = \left(\frac{4}{9}\right)^{3/2} = \frac{8}{27}$ é a solução procurada.

(*e*) $\log(3x^2 + 2x - 4) = 0$, $10^0 = 3x^2 + 2x - 4$, $3x^2 + 2x - 5 = 0$, $x = 1, -5/3$

23.5 Prove as regras dos logaritmos.

Denotemos $M = b^x$ e $N = b^y$; então $x = \log_b M$ e $y = \log_b N$.

I. Como $MN = b^x \cdot b^y = b^{x+y}$, então $\log_b MN = x + y = \log_b M + \log_b N$.

II. Como $\frac{M}{N} = \frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$, então $\log_b \frac{M}{N} = x - y = \log_b M - \log_b N$.

III. Como $M^p = (b^x)^p = b^{px}$, então $\log_b M^p = px = p \log_b M$.

23.6 Converta as expressões seguintes para uma soma algébrica de logaritmos usando as regras I, II e III.

(*a*) $\log_b UVW = \log_b (UV)\, W = \log_b UV + \log_b W = \log_b U + \log_b V + \log_b W$

(*b*) $\log_b \dfrac{UV}{W} = \log_b UV - \log_b W = \log_b U + \log_b V - \log_b W$

(*c*) $\log \dfrac{XYZ}{PQ} = \log XYZ - \log PQ = \log X + \log Y + \log Z - (\log P + \log Q)$
$= \log X + \log Y + \log Z - \log P - \log Q$

(*d*) $\log \dfrac{U^2}{V^3} = \log U^2 - \log V^3 = 2\log U - 3\log V$

(*e*) $\log \dfrac{U^2V^3}{W^4} = \log U^2V^3 - \log W^4 = \log U^2 + \log V^3 - \log W^4$
$= 2\log U + 3\log V - 4\log W$

(*f*) $\log \dfrac{U^{1/2}}{V^{2/3}} = \log U^{1/2} - \log V^{2/3} = \dfrac{1}{2}\log U - \dfrac{2}{3}\log V$

(*g*) $\log_e \dfrac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[4]{y^3}} = \log_e \dfrac{x^{3/2}}{y^{3/4}} = \log_e x^{3/2} - \log_e y^{3/4} = \dfrac{3}{2}\log_e x - \dfrac{3}{4}\log_e y$

(*h*) $\log \sqrt[4]{a^2b^{-3/4}c^{1/3}} = \dfrac{1}{4}\left\{2\log a - \dfrac{3}{4}\log b + \dfrac{1}{3}\log c\right\}$
$= \dfrac{1}{2}\log a - \dfrac{3}{16}\log b + \dfrac{1}{12}\log c$

23.7 Sabendo-se que log 2 = 0,3010, log 3 = 0,4771, log 5 = 0,6990, log 7 = 0,8451 (todos base 10), com precisão de quatro casas decimais, calcule:

(*a*) $\log 105 = \log(3\cdot5\cdot7) = \log 3 + \log 5 + \log 7 = 0{,}4771 + 0{,}6990 + 0{,}8451 = 2{,}0212$

(*b*) $\log 108 = \log(2^2\cdot3^3) = 2\log 2 + 3\log 3 = 2(0{,}3010) + 3(0{,}4771) = 2{,}0333$

(*c*) $\log \sqrt[3]{72} = \log \sqrt[3]{3^2\cdot2^3} = \log(3^{2/3}\cdot2) = \dfrac{2}{3}\log 3 + \log 2 = 0{,}6191$

(*d*) $\log 2{,}4 = \log \dfrac{24}{10} = \log \dfrac{3\cdot2^3}{10} = \log 3 + 3\ \log 2 - \log 10$
$= 0{,}4771 + 3(0{,}3010) - 1 = 0{,}3801$

(*e*) $\log 0{,}0081 = \log \dfrac{81}{10^4} = \log 81 - \log 10^4 = \log 3^4 - \log 10^4$
$= 4\ \log 3 - 4\ \log 10 = 4(0{,}4771) - 4 = -2{,}0916$ ou $7{,}9084 - 10$

Nota: Na forma exponencial, isso significa que $10^{-2{,}0916} = 0{,}0081$.

23.8 Transforme as expressões seguintes em logaritmos simples (de base 10, a menos que indicada outra):

(*a*) $\log 2 - \log 3 + \log 5 = \log \dfrac{2}{3} + \log 5 = \log \dfrac{2}{3}(5) = \log \dfrac{10}{3}$

(*b*) $3\ \log 2 - 4\log 3 = \log 2^3 - \log 3^4 = \log \dfrac{2^3}{3^4} = \log \dfrac{8}{81}$

(*c*) $\dfrac{1}{2}\log 25 - \dfrac{1}{3}\log 64 + \dfrac{2}{3}\log 27 = \log 25^{1/2} - \log 64^{1/3} + \log 27^{2/3}$

$= \log 5 - \log 4 + \log 9 = \log \dfrac{5}{4} + \log 9 = \log \dfrac{5}{4}(9) = \log \dfrac{45}{4}$

(*d*) $\log 5 - 1 = \log 5 - \log 10 = \log \dfrac{5}{10} = \log \dfrac{1}{2}$

(*e*) $2\ \log 3 + 4\ \log 2 - 3 = \log 3^2 + \log 2^4 - 3\ \log 10 = \log 9 + \log 16 - \log 10^3$

$= \log(9\cdot16) - \log 10^3 = \log \dfrac{9\cdot16}{10^3} = \log 0.144$

(*f*) $3\log_a b - \dfrac{1}{2}\log_a c = \log_a b^3 + \log_a c^{-1/2} = \log_a (b^3c^{-1/2})$

23.9 Solucione as equações abaixo para a letra indicada, em termos das demais quantidades.

(*a*) $\log_2 x = y + c : x$. $\quad x = 2^{y+c}$

(*b*) $\log a = 2\log b : a$. $\quad \log a = \log b^2,\ a = b^2$

(*c*) $\log_e I = \log_e I_0 - t : I$. $\quad \log_e I = \log_e I_0 - t \log_e e = \log_e I_0 + \log_e e^{-t}$
$= \log_e I_0 e^{-t},\ I = I_0 e^{-t}$

(*d*) $2\log x + 3\log y = 4\log z - 2 : y$.

Resolvendo para $\log y$, $3\log y = 4\log z - 2 - 2\log x$ e

$$\log y = \frac{4}{3}\log z - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\log x = \log z^{4/3} + \log 10^{-2/3} + \log x^{-2/3} = \log z^{4/3} 10^{-2/3} x^{-2/3}$$

Então, $y = 10^{-2/3} x^{-2/3} z^{4/3}$.

(*e*) $\log(x+3) = \log x + \log 3 : x$. $\quad \log(x+3) = \log 3x,\quad x + 3 = 3x,\quad x = 3/2$

23.10 Determine a característica do logaritmo comum dos seguintes números.

(*a*) 1 (*c*) 0 (*e*) 2 (*g*) 5 (*i*) 9 −10 (*k*) 7 −10
(*b*) 1 (*d*) 1 (*f*) 3 (*h*) 9 −10 (*j*) 8 −10 (*l*) 6 −10

SOLUÇÃO

(*a*) 1 (*c*) 0 (*e*) 2 (*g*) 5 (*i*) 9 −10 (*k*) 7 −10
(*b*) 1 (*d*) 1 (*f*) 3 (*h*) 9 −10 (*j*) 8 −10 (*l*) 6 −10

23.11 Calcule os seguintes logaritmos comuns.

(*a*) log 87,2	= 1,9405	(*h*) log 6,753	= 0,8295 (8,293 + 2)
(*b*) log 37,300	= 4,5717	(*i*) log 183,2	= 2,2630 (2625 + 5)
(*c*) log 753	= 2,8768	(*j*) log 43,15	= 1,6350 (6345 + 5)
(*d*) log 9,21	= 0,9643	(*k*) log 876 400	= 5,9427 (9425 + 2)
(*e*) log 0,382	= 9,5821 − 10	(*l*) log 0,2548	= 9,4062 − 10 (4048 + 14)
(*f*) log 0,00159	= 7,2014 − 10	(*m*) log 0,043 72	= 8,6407 − 10 (6405 + 2)
(*g*) log 0,0256	= 8,4082 − 10	(*n*) log 0,009 848	= 7,9933 − 10 (9930 + 3)

23.12 Determinar:

(*a*) Antilog 3,8531	= 7130	(*h*) Antilog 2,6715	= 469,3	(3/9 × 10 = 3 aprox.)
(*b*) Antilog 1,4997	= 31,6	(*i*) Antilog 4,1853	= 15 320	(6/28 × 10 = 2 aprox.)
(*c*) Antilog 9,8267 − 10	= 0,671	(*j*) Antilog 0,9245	= 8,404	(2/5 × 10 = 4)
(*d*) Antilog 7,7443 − 10	= 0,005 55	(*k*) Antilog $\bar{1}$,6089	= 0,4064	(4/11 × 10 = 4 aprox.)
(*e*) Antilog 0,1875	= 1,54	(*l*) Antilog 8,8907 − 10	= 0,077 75	(3/6 × 10 = 5)
(*f*) Antilog $\bar{2}$,3927	= 0,0247	(*m*) Antilog 1,2000	= 15,85	(13/27 × 10 = 5 aprox.)
(*g*) Antilog 4,9360	= 86.300	(*n*) Antilog 7,2409 − 10	= 0,001 742	(4/25 × 10 = 2 aprox.)

23.13 Escreva como potências de 10: (*a*) 893, (*b*) 0,358.

SOLUÇÃO

(*a*) Desejamos x tal que $10^x = 893$. Então, $x = \log 893 = 2{,}9509$ e $893 = 10^{2{,}9509}$.

(*b*) Desejamos x tal que $10^x = 0{,}358$.
Então, $x = \log 0{,}358 = 9{,}5539 - 10 = -0{,}4461$ e $0{,}358 = 10^{-0{,}4461}$.

Calcule utilizando logaritmos.

23.14 $P = 3{,}81 \times 43{,}4$

SOLUÇÃO

$$\log P = \log 3{,}81 + \log 43{,}4$$

$$\begin{array}{rl} \log 3{,}81 = & 0{,}5809 \\ (+)\ \log 43{,}4 = & \underline{1{,}6375} \\ \log P = & 2{,}2184 \end{array}$$

Conseqüentemente, $P = \text{antilog } 2{,}2184 = 165{,}3$.

Observe a utilidade da exponencial no cálculo a seguir:

$$\begin{aligned} 3{,}81 \times 43{,}4 &= 10^{0{,}5809} \times 10^{1{,}6375} \\ &= 10^{0{,}5809+1{,}6375} = 10^{2{,}2184} = 165{,}3 \end{aligned}$$

23.15 $P = 73{,}42 \times 0{,}004\,62 \times 0{,}5143$

SOLUÇÃO

$$\log P = \log 73{,}42 + \log 0{,}004\,62 + \log 0{,}5143$$

$$\begin{array}{rl} \log 73{,}42 = & 1{,}8658 \\ (+)\ \log 0{,}004\,62 = & 7{,}6646 - 10 \\ (+)\ \log 0{,}5143 = & \underline{9{,}7112 - 10} \\ \log P = & 19{,}2416 - 20 = 9{,}2416 - 10. \end{array}$$

Conseqüentemente, $P = 0{,}1744$.

23.16 $P = \dfrac{784{,}6 \times 0{,}0431}{28{,}23}$

SOLUÇÃO

$$\log P = \log 784{,}6 + \log 0{,}0431 - \log 28{,}23$$

$$\begin{array}{rl} \log 784{,}6 = & 2{,}8947 \\ (+)\ \log 0{,}0431 = & \underline{8{,}6345 - 10} \\ & 11{,}5292 - 10 \\ (-)\ \log 28{,}23 = & \underline{1{,}4507} \\ \log P = & 10{,}0785 - 10 = 0{,}0785 \end{array}$$

$$P = 1{,}198$$

23.17 $P = \dfrac{0{,}4932 \times 653{,}7}{0{,}072\,13 \times 8456}$

SOLUÇÃO

$$\begin{array}{rl} & \text{Numerador } N \\ \log 0{,}4932 = & 9{,}6930 - 10 \\ (+)\ \log 653{,}7 = & \underline{2{,}8154} \\ \log N = & 12{,}5084 - 10 \\ (-)\ \log D = & \underline{2{,}7853} \\ \log P = & 9{,}7231 - 10 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & \text{Denominador } D \\ \log 0{,}072\,13 = & 8{,}8581 - 10 \\ (+)\ \log 8456 = & \underline{3{,}9272} \\ \log D = & 12{,}7853 - 10 \\ = & 2{,}7853 \end{array}$$

$$P = 0{,}5286$$

23.18 $P = (7{,}284)^5$

SOLUÇÃO

$$\log P = 5 \log 7{,}284 = 5(0{,}8623) = 4{,}3115 \quad \text{e} \quad P = 20490$$

23.19 $P = \dfrac{(63{,}28)^3(0{,}008\,43)^2(0{,}4623)}{(412{,}3)(2{,}184)^5}$

SOLUÇÃO

$$\log P = 3\log 63{,}28 + 2\log 0{,}008\,43 + \log 0{,}4623 - (\log 412{,}3 + 5\log 2{,}184)$$

Numerador N

$$\begin{array}{rl} 3\log 63{,}28 = 3(1{,}8013) & = 5{,}4039 \\ (+)\ 2\log 0{,}008\,43 = 2(7{,}9258-10) & = 15{,}8516-20 \\ (+)\ \log 0{,}4623 & = \underline{9{,}6649-10} \\ \log N & = 30{,}9204-30 \\ (-)\ \log D & = \underline{4{,}3117} \\ \log P & = 26{,}6087-30 = 6{,}6087-10 \end{array}$$

$$P = 0{,}000\,406\,2 \text{ (ou } 4{,}062\times 10^{-4})$$

Denominador D

$$\begin{array}{rl} \log 412{,}3 & = 2{,}6152 \\ (+)\ 5\log 2{,}184 & = \underline{1{,}6965} \\ \log D & = 4{,}3117 \end{array}$$

23.20 $P = \sqrt[5]{0{,}8532}$

SOLUÇÃO

$$\log P = \frac{1}{5}\log 0{,}8532 = \frac{1}{5}(9{,}9310-10) = \frac{1}{5}(49{,}9310-50) = 9{,}9862-10 \quad \text{e} \quad P = 0{,}9688$$

23.21 $P = \dfrac{(78{,}41)^3\sqrt{142{,}3}}{\sqrt[4]{0{,}1562}}$

SOLUÇÃO

$$\log P = 3\log 78{,}41 + \frac{1}{2}\log 142{,}3 - \frac{1}{4}\log 0{,}1562$$

Numerador N

$$\begin{array}{rl} 3\log 78{,}41 = 3(1{,}8944) & = 5{,}6832 \\ (+)\ \tfrac{1}{2}\log 142{,}3 = \tfrac{1}{2}(2{,}1532) & = \underline{1{,}0766} \\ \log N = 6{,}7598 & = 16{,}7598-10 \\ (-)\ \log D & = \underline{9{,}7984-10} \\ \log P & = 6{,}9614 \end{array}$$

$$P = 9\,150\,000 \quad \text{ou} \quad 9{,}15\times 10^6$$

Denominador D

$$\begin{array}{rl} \tfrac{1}{4}\log 0{,}1562 & = \tfrac{1}{4}(9{,}1937-10) \\ & = \tfrac{1}{4}(39{,}1937-40) \\ \log D & = 9{,}7984-10 \end{array}$$

23.22 O período T de um pêndulo simples de comprimento l é dado pela fórmula $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, onde g é a aceleração da gravidade. Determine T (em segundos) se $l = 281{,}3$ cm e $g = 981{,}0$ cm/s^2. Considere $2\pi = 6{,}283$.

SOLUÇÃO

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 6{,}283\sqrt{\frac{281{,}3}{981{,}0}}$$

$$\log T = \log 6{,}283 + \tfrac{1}{2}(\log 281{,}3 - \log 981{,}0)$$

$$\begin{array}{rl} \log 6{,}283 = & = 0{,}7982 \\ (+)\ \tfrac{1}{2}\log 281{,}3 = \tfrac{1}{2}(2{,}4492) & = \underline{1{,}2246} \\ & \ 2{,}0228 \\ (-)\ \tfrac{1}{2}\log 981{,}0 = \tfrac{1}{2}(2{,}9917) & = \underline{1{,}4959} \\ \log T & = 0{,}5269 \end{array}$$

$$T = 3{,}365 \text{ segundos}$$

23.23 Resolva para x: $5^{2x+2} = 3^{5x-1}$.

SOLUÇÃO

Aplicando logaritmos, $(2x + 2)\log 5 = (5x - 1)\log 3$.

Então, $2x\log 5 - 5x\log 3 = -\log 3 - 2\log 5$,

$x(2\log 5 - 5\log 3) = -\log 3 - 2\log 5$,

e $$x = \frac{\log 3 + 2\log 5}{5\log 3 - 2\log 5} = \frac{0{,}4771 + 2(0{,}6990)}{5(0{,}4771) - 2(0{,}6990)} = \frac{1{,}8751}{0{,}9875}$$

$$\begin{aligned} \log 1{,}875 &= 10{,}2730 - 10 \\ (-)\ \log 0{,}9875 &= \underline{\ 9{,}9946 - 10\ } \\ \log x &= 0{,}2784 \\ x &= 1{,}898 \end{aligned}$$

23.24 Determine o valor dos seguintes logaritmos naturais.

(*a*) ln 5,78 (*c*) ln 3,456 (*e*) ln 190 (*g*) ln 2839

(*b*) ln 8,62 (*d*) ln 4,643 (*f*) ln 0,0084 (*h*) ln 0,01485

SOLUÇÃO

(*a*) $\ln 5{,}78 = 1{,}7544$ direto da tabela de logaritmos naturais

(*b*) $\ln 8{,}62 = 2{,}1541$ direto da tabela de logaritmos naturais

(*c*) $$\begin{aligned} \ln 3{,}456 &= \ln 3{,}45 + 0{,}6(\ln 3{,}46 - \ln 3{,}45) \\ &= 1{,}2384 + 0{,}6(1{,}2413 - 1{,}2384) \\ &= 1{,}2384 + 0{,}6(0{,}0029) \\ &= 1{,}2384 + 0{,}0017 \\ \ln 3{,}456 &= 1{,}2401 \end{aligned}$$

(*d*) $$\begin{aligned} \ln 4{,}643 &= \ln 4{,}64 + 0{,}3(\ln 4{,}65 - \ln 4{,}64) \\ &= 1{,}5347 + 0{,}3(1{,}5369 - 1{,}5347) \\ &= 1{,}5347 + 0{,}3(0{,}0022) \\ &= 1{,}5347 + 0{,}0007 \\ \ln 4{,}643 &= 1{,}5354 \end{aligned}$$

(*e*) $$\begin{aligned} \ln 190 &= \ln(1{,}90 \times 10^2) \\ &= \ln 1{,}90 + \ln 10^2 \\ &= \ln 1{,}90 + 2\ \ln 10 \\ &= 0{,}6419 + 2(2{,}3026) \\ &= 0{,}6419 + 4{,}6052 \\ \ln 190 &= 5{,}2471 \end{aligned}$$

(*f*) $$\begin{aligned} \ln 0{,}0084 &= \ln(8{,}40 \times 10^{-3}) \\ &= \ln 8{,}40 + \ln 10^{-3} \\ &= \ln 8{,}40 - 3\ \ln 10 \\ &= 2{,}1282 - 3(2{,}3026) \\ &= 2{,}1282 - 6{,}9078 \\ \ln 0{,}0084 &= -4{,}7796 \end{aligned}$$

(*g*) $$\begin{aligned} \ln 2839 &= \ln(2{,}839 \times 10^3) \\ &= \ln 2{,}839 + \ln 10^3 \\ &= [\ln 2{,}83 + 0{,}9(\ln 2{,}84 - \ln 2{,}83)] + 3\ \ln 10 \\ &= [1{,}0403 + 0{,}9(1{,}0438 - 1{,}0403)] + 3(2{,}3026) \\ &= [1{,}0403 + 0{,}9(0{,}0035)] + 6{,}9078 \\ &= [1{,}0403 + 0{,}0032] + 6{,}9078 \\ &= 1{,}0435 + 6{,}9078 \\ \ln 2839 &= 7{,}9513 \end{aligned}$$

(*h*) $$\begin{aligned} \ln 0{,}014\,85 &= \ln(1{,}485 \times 10^{-2}) \\ &= \ln 1{,}485 + \ln 10^{-2} \\ &= [\ln\ 1{,}48 + 0{,}5(\ln 1{,}49 - \ln 1{,}48)] - 2\ \ln 10 \\ &= [0{,}3920 + 0{,}5(0{,}3988 - 0{,}3920)] - 2\ (2{,}3026) \\ &= [0{,}3920 + 0{,}5(0{,}0068)] - 4{,}6052 \\ &= [0{,}3920 + 0{,}0034] - 4{,}6052 \\ &= 0{,}3954 - 4{,}6052 \\ \ln 0{,}014\,85 &= -4{,}2098 \end{aligned}$$

23.25 Determine o valor de N.

(a) $\ln N = 2{,}4146$ (b) $\ln N = 0{,}9847$ (c) $\ln N = 4{,}1482$ (d) $\ln N = -1{,}7654$

SOLUÇÃO

(a)
$$\begin{aligned}
\ln N &= 2{,}4146\\
&= 0{,}1120 + 2{,}3026\\
&= \ln\left(1{,}11 + \frac{0{,}1120 - 0{,}1044}{0{,}1133 - 0{,}1044}(1{,}12 - 1{,}11)\right) + \ln 10\\
&= \ln\left(1{,}11 + \frac{0{,}0076}{0{,}0089}(0{,}01)\right) + \ln 10\\
&= \ln(1{,}11 + 0{,}009) + \ln 10\\
&= \ln 1{,}119 + \ln 10\\
&= \ln(1{,}119 \times 10)\\
\ln N &= \ln 11{,}19\\
N &= 11{,}19
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}
\ln N &= 0{,}9847\\
&= \ln\left(2{,}67 + \frac{0{,}9847 - 0{,}9821}{0{,}9858 - 0{,}9821}(2{,}68 - 2{,}67)\right)\\
&= \ln\left((2{,}67 + \frac{0{,}0026}{0{,}0037}(0{,}01)\right)\\
&= \ln(2{,}67 + 0{,}007)\\
\ln N &= \ln 2{,}677\\
N &= 2{,}677
\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}
\ln N &= 4{,}1482\\
&= 1{,}8456 + 2{,}3026\\
&= \ln\left(6{,}33 + \frac{1{,}8456 - 1{,}8453}{1{,}8469 - 1{,}8453}(6{,}34 - 6{,}33)\right) + \ln 10\\
&= \ln\left(6{,}33 + \frac{0{,}0003}{0{,}0016}(0{,}01)\right) + \ln 10\\
&= \ln(6{,}33 + 0{,}002) + \ln 10\\
&= \ln 6{,}332 + \ln 10\\
&= \ln(6{,}332 \times 10)\\
\ln N &= \ln 63{,}32\\
N &= 63{,}32
\end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned}
\ln N &= -1{,}7654\\
&= 0{,}5372 - 2{,}3026\\
&= \ln\left(1{,}71 + \frac{0{,}5372 - 0{,}5365}{0{,}5423 - 0{,}5365}(1{,}72 - 1{,}71)\right) - \ln 10\\
&= \ln\left(1{,}71 + \frac{0{,}0007}{0{,}0058}(0{,}01)\right) + \ln 10^{-1}\\
&= \ln(1{,}71 + 0{,}001) + \ln 10^{-1}\\
&= \ln 1{,}711 + \ln 10^{-1}\\
&= \ln(1{,}711 \times 10^{-1})\\
\ln N &= \ln 0{,}1711\\
N &= 0{,}1711
\end{aligned}$$

Problemas Complementares

Mathcad

23.26 Calcule: (a) $\log_2 32$, (b) $\log \sqrt[4]{10}$, (c) $\log_3 1/9$, (d) $\log_{1/4} 16$, (e) $\log_e e^x$, (f) $\log_8 4$.

23.27 Resolva as equações para a incógnita.

(*a*) $\log_2 x = 3$ (*c*) $\log_x 8 = -3$ (*e*) $\log_4 x^3 = 3/2$
(*b*) $\log y = -2$ (*d*) $\log_3 (2x+1) = 1$ (*f*) $\log_{(x-1)}(4x-4) = 2$

23.28 Expresse como uma soma algébrica de logaritmos.

(*a*) $\log \dfrac{U^3 V^2}{W^5}$ (*b*) $\log \sqrt{\dfrac{2x^3 y}{z^7}}$ (*c*) $\ln \sqrt[3]{x^{1/2} y^{-1/2}}$ (*d*) $\log \dfrac{xy^{-3/2} z^3}{a^2 b^{-4}}$

23.29 Resolva as equações para a letra indicada, em termos das demais quantidades.

(*a*) $2 \log x = \log 16$; x (*c*) $\log_3 F = \log_3 4 - 2 \log_3 x$; F
(*b*) $3 \log y + 2 \log 2 = \log 32$; y (*d*) $\ln (30 - U) = \ln 30 - 2t$; U

23.30 Prove que, se a e b são positivos e $\neq 1$, $(\log_a b)(\log_b a) = 1$.

23.31 Prove que $10^{\log N} = N$, onde $N > 0$.

23.32 Determine a característica dos logaritmos comuns dos números:

(*a*) 248 (*d*) 0,162 (*g*) 1,06 (*j*) 40,60 (*m*) 7 000 000
(*b*) 2,48 (*e*) 0,0006 (*h*) 6000 (*k*) 237,63 (*n*) 0,000 007
(*c*) 0,024 (*f*) 18,36 (*i*) 4 (*l*) 146,203

23.33 Determine os logaritmos comuns dos números:

(*a*) 237 (*d*) 0,263 (*g*) 10 400 (*j*) 6 000 000 (*m*) 1
(*b*) 28,7 (*e*) 0,086 (*h*) 0,00 607 (*k*) 23,70 (*n*) 1000
(*c*) 1,26 (*f*) 0,007 (*i*) 0,000 000 728 (*l*) 6,03

23.34 Determine os antilogaritmos:

(*a*) 2,8802 (*c*) 0,6946 (*e*) 8,3160 − 10 (*g*) 4,6618 (*i*) $\bar{1}$,9484
(*b*) 1,6590 (*d*) $\bar{2}$,9042 (*f*) 7,8549 − 10 (*h*) 0,4216 (*j*) 9,8344 − 10

23.35 Determine os logaritmos comuns dos números por interpolação.

(*a*) 1463 (*c*) 86,27 (*e*) 0,6041 (*g*) 1,006 (*i*) 460,3
(*b*) 810,6 (*d*) 8,106 (*f*) 0,046 22 (*h*) 300,6 (*j*) 0,003 001

23.36 Determine os antilogaritmos dos números por interpolação.

(*a*) 2,9060 (*c*) 1,6600 (*e*) 3,7045 (*g*) 2,2500 (*i*) $\bar{1}$,4700
(*b*) $\bar{1}$,4860 (*d*) $\bar{1}$,9840 (*f*) 8,9266 − 10 (*h*) 0,8003 (*j*) 1,2925

23.37 Escreva os números como potências de 10: (*a*) 45,4, (*b*) 0,005 278

23.38 Calcule:

(*a*) $(42{,}8)(3{,}26)(8{,}10)$

(*b*) $\dfrac{(0{,}148)(47{,}6)}{284}$

(*c*) $\dfrac{(1{,}86)(86{,}7)}{(2{,}87)(1{,}88)}$

(*d*) $\dfrac{2453}{(67{,}2)(8{,}55)}$

(*e*) $\dfrac{5608}{(0{,}4536)(11\,000)}$

(*f*) $\dfrac{(3{,}92)^3(72{,}16)}{\sqrt[4]{654}}$

(*g*) $3{,}14\sqrt{11{,}65/32}$

(*h*) $\sqrt{\dfrac{906}{(3{,}142)(14{,}6)}}$

(*i*) $\sqrt{\dfrac{(1600)(310{,}6)^2}{7290}}$

(*j*) $\sqrt[3]{\dfrac{(5{,}52)(2610)}{(7{,}36)(3{,}142)}}$

23.39 Solucione a seguinte equação de hidráulica:

$$\frac{20{,}0}{14{,}7} = \left(\frac{0{,}0613}{x}\right)^{1{,}32}$$

23.40 A fórmula

$$D = \sqrt[3]{\frac{W}{0{,}5236(A-G)}}$$

fornece o diâmetro de um balão esférico necessário para elevar um peso W. Determine D se $A = 0{,}0807$, $G = 0{,}0056$ e $W = 1250$.

23.41 Dada a fórmula $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, determine l se $T = 2{,}75$, $\pi = 3{,}142$ e $g = 32{,}16$.

23.42 Resolva para x.

(*a*) $3^x = 243$ (*c*) $2^{x+2} = 64$ (*e*) $x^{-3/4} = 8$ (*g*) $7x^{-1/2} = 4$ (*i*) $5^{x-2} = 1$

(*b*) $5^x = 1/125$ (*d*) $x^{-2} = 16$ (*f*) $x^{-2/3} = 1/9$ (*h*) $3^x = 1$ (*j*) $2^{2x+3} = 1$

23.43 Resolva as equações exponenciais: (*a*) $4^{2x-1} = 5^{x+2}$, (*b*) $3^{x-1} = 4 \cdot 5^{1-3x}$.

23.44 Determine os logaritmos naturais.

(*a*) $\ln 2{,}367$ (*b*) $\ln 8{,}532$ (*c*) $\ln 4875$ (*d*) $\ln 0{,}000\,189\,4$

23.45 Determine N, o antilogaritmo do número dado.

(*a*) $\ln N = 0{,}7642$ (*b*) $\ln N = 1{,}8540$ (*c*) $\ln N = 8{,}4731$ (*d*) $\ln N = -6{,}2691$

Respostas dos Problemas Complementares

23.26 (*a*) 5 (*b*) 1/4 (*c*) −2 (*d*) −2 (*e*) x (*f*) 2/3

23.27 (*a*) 8 (*b*) 0,01 (*c*) 1/2 (*d*) 1 (*e*) 2 (*f*) 5

23.28 (*a*) $3\log U + 2\log V - 5\log W$

(*b*) $\dfrac{1}{2}\log 2 + \dfrac{3}{2}\log x + \dfrac{1}{2}\log y - \dfrac{7}{2}\log z$

(*c*) $\dfrac{1}{6}\ln x - \dfrac{1}{6}\ln y$

(*d*) $\log x - \dfrac{3}{2}\log y + 3\log z - 2\log a + 4\log b$

23.29 (*a*) 4 (*b*) 2 (*c*) $F = 4/x^2$ (*d*) $U = 30(1 - e^{-2t})$

23.32 (*a*) 2 (*c*) $\bar{2}$ (*e*) $\bar{4}$ (*g*) 0 (*i*) 0 (*k*) 2 (*m*) 6

(*b*) 0 (*d*) $\bar{1}$ (*f*) 1 (*h*) 3 (*j*) 1 (*l*) 2 (*n*) $\bar{6}$

23.33 (*a*) 2,3747 (*d*) $\bar{1}$,4200 (*g*) 4,0170 (*j*) 6,7782 (*m*) 0,0000
(*b*) 1,4579 (*e*) $\bar{2}$,9345 (*h*) $\bar{3}$,7832 (*k*) 1,3747 (*n*) 3,0000
(*c*) 0,1004 (*f*) 7,8451 − 10 (*i*) $\bar{7}$,8621 (*l*) 0,7803

23.34 (*a*) 759 (*c*) 4,95 (*e*) 0,0207 (*g*) 45 900 (*i*) 0,888
(*b*) 45,6 (*d*) 0,0802 (*f*) 0,007 16 (*h*) 2,64 (*j*) 0,683

23.35 (*a*) 3,1653 (*c*) 1,9359 (*e*) $\bar{1}$,7811 (*g*) 0,0026 (*i*) 2,6631
(*b*) 2,9088 (*d*) 0,9088 (*f*) 8,6648 − 10 (*h*) 2,4780 (*j*) 7,4773 − 10

23.36 (*a*) 805,4 (*c*) 45,71 (*e*) 5064 (*g*) 177,8 (*i*) 0,2951
(*b*) 0,3062 (*d*) 0,9638 (*f*) 0,084 45 (*h*) 6,314 (*j*) 19,61

23.37 (*a*) $10^{1,6571}$ (*b*) $10^{-2,2776}$

23.38 (*a*) 1130 (*c*) 29,9 (*e*) 1,124 (*g*) 1,90 (*i*) 145,5
(*b*) 0,0248 (*d*) 4,27 (*f*) 860 (*h*) 4,44 (*j*) 8,54

23.39 0,0486

23.40 31,7

23.41 6,16

23.42 (*a*) 5 (*c*) 4 (*e*) 1/16 (*g*) 49/16 (*i*) 2
(*b*) −3 (*d*) ±1/4 (*f*) ±27 (*h*) 0 (*j*) −3/2

23.43 (*a*) 3,958 (*b*) 0,6907

23.44 (*a*) 0,8616 (*b*) 2,1438 (*c*) 8,4919 (*d*) −8,5717

23.45 (*a*) 2,147 (*b*) 6,385 (*c*) 4784 (*d*) 0,001 894

Capítulo 24

Aplicações de Logaritmos e Expoentes

24.1 INTRODUÇÃO

Os logaritmos são aplicados principalmente na solução de equações exponenciais e equações cujas variáveis estejam logaritmicamente relacionadas. Para solucionar equações cuja variável está no expoente, geralmente começamos por transformar a expressão da forma exponencial para a logarítmica.

24.2 JURO SIMPLES

Juro é a quantia paga pelo uso de uma soma em dinheiro chamada de principal. Geralmente é pago ao final de intervalos especificados, como mensal, trimestral, semestral ou anualmente. A soma do principal com o juro é chamada de montante.

O juro simples I, sobre o principal P, para determinado intervalo em anos t, a uma taxa de juro anual r, é dado pela fórmula $I = Prt$, sendo o montante A, determinado pela fórmula $A = P + Prt$ ou $A = P(1 + rt)$.

Exemplo 24.1 Se uma pessoa tomar emprestados \$ 800 a 8% ao ano por dois anos e meio, quanto em juros o empréstimo renderá?

$$I = Prt$$
$$I = \$\ 800\,(0{,}08)(2{,}5)$$
$$I = \$\ 160$$

Exemplo 24.2 Se uma pessoa investir \$ 3.000,00 a 6% ao ano por cinco anos, qual será o valor total do investimento ao final dos cinco anos?

$$A = P + Prt$$
$$A = \$\ 3\,000 + \$\ 3\,000\,(0{,}06)\,(5)$$
$$A = \$\ 3\,000 + \$\ 900$$
$$A = \$\ 3\,900$$

24.3 JURO COMPOSTO

Juro composto significa que o juro é pago periodicamente sobre o réstimo, o que resulta em um novo principal ao final de cada intervalo.

Se um principal P for investido por t anos a uma taxa anual r, composto n vezes por ano, então o montante A, ou balanço final, será dado por:

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Exemplo 24.3 Determine o montante de um investimento se \$ 20 000 forem aplicados a 6% compostos mensalmente por três anos.

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$A = 20\,000\left(1+\frac{0{,}06}{12}\right)^{12(3)}$$

$$\begin{aligned}
A &= 20\,000(1+0{,}005)^{36}\\
A &= 20\,000(1{,}005)^{36}\\
\log A &= \log 20\,000(1{,}005)^{36}\\
\log A &= \log 20\,000 + 36\ \log 1{,}005\\
\log A &= 4{,}3010 + 36(0{,}002\,15)\\
\log A &= 4{,}3010 + 0{,}0774\\
\log A &= 4{,}3784\\
A &= \text{antilog}\, 4{,}3784\\
A &= 2{,}39\times 10^4 \qquad \log 2{,}39 = 0{,}3784 \text{ e } \log 10^4 = 4\\
A &= \$23\,900
\end{aligned}$$

Quando o juro é composto com uma freqüência muito grande, chegamos a uma situação de juro composto continuamente. Se um principal P for investido por t anos a uma taxa anual r, composto continuamente, então o montante A, ou balanço final, será dado por:

$$A = Pe^{rt}$$

Exemplo 24.4 Determine o montante de um investimento de \$ 20 000,00 a 6% compostos continuamente por três anos.

$$\begin{aligned}
A &= Pe^{rt}\\
A &= 20\,000e^{0{,}06(3)}\\
A &= 20\,000e^{0{,}18}\\
\ln A &= \ln 20\,000e^{0{,}18}\\
\ln A &= \ln 20\,000 + \ln e^{0{,}18}\\
\ln A &= \ln(2{,}00\times 10^4) + 0{,}18\ \ln e\\
\ln A &= \ln 2{,}00 + 4\ \ln 10 + 0{,}18(1) \qquad \ln e = 1\\
\ln A &= 0{,}6931 + 4(2{,}3026) + 0{,}18 \qquad \ln 2{,}00 = 0{,}6931 \text{ e } \ln 10 = 2{,}3026\\
\ln A &= 10{,}0835\\
\ln A &= 0{,}8731 + 4(2{,}3026)\\
\ln A &= \ln\left(2{,}39 + \frac{0{,}8731-0{,}8713}{0{,}8755-0{,}8713}(2{,}40-2{,}39)\right) + 4\ln 10\\
\ln A &= \ln\left(2{,}39 + \frac{0{,}0018}{0{,}0042}(0{,}01)\right) + \ln 10^4\\
\ln A &= \ln(2{,}39+0{,}004) + \ln 10^4\\
\ln A &= \ln 2{,}394 + \ln 10^4\\
\ln A &= \ln(2{,}394\times 10^4)\\
\ln A &= \ln 23\,940\\
A &= \$23\,940
\end{aligned}$$

Ao solucionarmos os Exemplos 24.3 e 24.4, encontramos respostas com quatro dígitos significativos. Entretanto, o uso das tabelas logarítmicas e de interpolações apresenta uma margem de erro. Também podemos ter problemas se o juro for composto diariamente, porque quando dividimos r por n o resultado pode ser zero quando arredondado a milésimos. Para lidar com esse problema e obter maior precisão, podemos usar tabelas de logaritmos de cinco casas decimais, calculadoras ou computadores. Em geral, os bancos e as empresas utilizam computadores ou calculadoras para obter a precisão de que necessitam.

Exemplo 24.5 Use uma calculadora científica ou gráfica para determinar o montante de um investimento de $ 20 000,00 aplicados a 6% compostos mensalmente por três anos.

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$A = \$20\,000\left(1 + \frac{0{,}06}{12}\right)^{12(3)}$$

$$A = \$20\,000(1{,}005)^{36} \qquad \text{usar o comando de potência da calculadora para obter } (1{,}005)^{36}$$

$$A = \$23\,933{,}61$$

O montante foi acrescido em $ 33,61 em relação ao obtido no Exemplo 24.3. Isso ocorreu porque calculamos arredondando os centavos e, no Exemplo 24.3, arredondamos a dezena.

Exemplo 24.6 Use uma calculadora científica ou gráfica para determinar o montante de um investimento de $ 20 000,00 a 6% compostos continuamente por três anos.

$$A = Pe^{rt}$$

$$A = \$20\,000e^{0,06(3)}$$

$$A = \$20\,000e^{0,18} \qquad \text{use o inverso de } \ln x \text{ para calcular } e^{0,18}$$

$$A = \$23\,944{,}35$$

O montante foi aumentado em $ 4,35 em relação ao calculado no Exemplo 24.4. A maior precisão foi possível porque a calculadora trabalha com mais casas decimais em cada operação, e então o resultado é arredondado. Em nossos exemplos, arredondamos para os centésimos porque centavos são a menor divisão monetária e têm utilização generalizada. A maior parte das calculadoras trabalha com oito, dez ou 12 dígitos significativos ao realizar as operações.

24.4 APLICAÇÕES DE LOGARITMOS

O volume L de um som (em decibéis) percebido pelo ouvido humano depende da relação entre a intensidade I do som e o limiar I_0 de audição para a média do ouvido humano.

$$L = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Exemplo 24.7 Determine o volume de um som com intensidade 10 000 vezes o limiar de audição da média do ouvido humano.

$$L = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

$$L = 10\log\left(\frac{10\,000 I_0}{I_0}\right)$$

$$L = 10\ \log 10\,000$$

$$L = 10\ (4)$$

$$L = 40 \text{ decibéis}$$

Os químicos utilizam o potencial de hidrogênio, pH, de uma solução para medir sua acidez ou basicidade. O pH da água destilada é cerca de 7. Se o pH de uma solução for superior a 7, diz-se que é ácida, se for inferior, diz-se que é básica. Se $[H^+]$ é a concentração de íons de hidrogênio em mols por litro, o pH é dado pela fórmula:

$$pH = -\log[H^+]$$

Exemplo 24.8 Determine o pH da solução cuja concentração de íons de hidrogênio é $5{,}32 \times 10^{-5}$ mols por litro.

$$\begin{aligned}
pH &= -\log[H^+] \\
pH &= -\log(5{,}32 \times 10^{-5}) \\
pH &= -[\log 5{,}32 + \log 10^{-5}] \\
pH &= -\log 5{,}32 - (-5)\log 10 \qquad \log 10 = 1 \\
pH &= -\log 5{,}32 + 5(1) \\
pH &= -0{,}7259 + 5 \\
pH &= 4{,}2741 \\
pH &= 4{,}3
\end{aligned}$$

Os sismologistas usam a escala Richter para medir e registrar a magnitude de terremotos. Esse resultado depende da relação entre a intensidade I do tremor e a intensidade de referência I_0, que é o menor movimento de terra que pode ser registrado por um sismógrafo. Os números na escala Richter geralmente são arredondados para o décimo ou centésimo, seguindo a fórmula:

$$R = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Exemplo 24.9 Se a intensidade de um terremoto é determinada como sendo 50 000 vezes de referência, qual é a leitura na escala Richter?

$$\begin{aligned}
R &= \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \\
R &= \log\left(\frac{50\,000 I_0}{I_0}\right) \\
R &= \log 50\,000 \\
R &= 4{,}6990 \\
R &= 4{,}70
\end{aligned}$$

24.5 APLICAÇÕES DE EXPOENTES

O número e está envolvido em muitas funções que ocorrem na natureza. A curva de crescimento de vários materiais pode ser descrita pela equação exponencial:

$$A = A_0 e^{rt}$$

onde A_0 é a quantidade inicial de material, r é a razão anual de crescimento, t é o tempo em anos e A é a quantidade de material ao final do tempo considerado.

Exemplo 24.10 A população de um país era 2 400 000 em 1990 e tinha uma razão anual de crescimento de 3%. Se o crescimento é exponencial, qual será a população em 2000?

$$A = A_0 e^{rt}$$

$$\begin{aligned}
A &= 2\,400\,000 e^{(0{,}03)(10)} & & \\
A &= 2\,400\,000 e^{0{,}3} & N &= e^{0{,}3} \\
A &= 2\,400\,000(1{,}350) & \ln N &= 0{,}3 \ln e \\
A &= 3\,240\,000 & \ln N &= 0{,}3 \\
& & N &= 1{,}350
\end{aligned}$$

A equação do declínio ou do decréscimo é similar à do crescimento, exceto em que o expoente é negativo.

$$A = A_0 e^{-rt}$$

onde A_0 é a quantidade inicial, r é a taxa anual de declínio ou decréscimo, t é o tempo em anos e A é a quantidade final.

Exemplo 24.11 Um pedaço de madeira acusou conter 100 gramas de carbono-14 quando foi removido de uma árvore. Se a razão de decréscimo do carbono-14 é de 0,0124% por ano, quanto de carbono-14 restará na madeira após 200 anos?

$$A = A_0 e^{-rt}$$
$$A = 100e^{-0{,}000124(200)} \qquad N = e^{-0{,}0248}$$
$$A = 100e^{-0{,}0248} \qquad \ln N = -0{,}0248$$
$$A = 100(0{,}9755) \qquad \ln N = \ln 2{,}2778 - 2{,}3026$$
$$A = 97{,}55 \text{ gramas} \qquad \ln N = \ln 9{,}755 - \ln 10$$
$$\ln N = \ln(9{,}755 \times 10^{-1})$$
$$\ln N = \ln 0{,}9755$$
$$N = 0{,}9755$$

Problemas Resolvidos

24.1 Uma mulher empresta $ 400,00 por 2 anos a uma taxa de juro simples de 3%. Determine o montante necessário para pagá-la ao final dos 2 anos.

SOLUÇÃO

Juro $I = Prt = 400(0{,}03)(2) =$ US$ 24,00 Montante $A =$ principal $P +$ juro $I =$ $ 424,00

24.2 Determine o juro I e o montante A para:

(*a*) $ 600,00 por 8 meses (2/3 do ano) a 4% ao ano

(*b*) $ 1 562,60 por 3 anos e 4 meses (10/3 do ano) a 3,5% ao ano

SOLUÇÃO

(*a*) $I = Prt = 600(0{,}04)(2/3) = \$\,16{,}00.$ $\qquad A = P + I = \$\,616{,}00$

(*b*) $I = Prt = 1562{,}60(0{,}035)(10/3) = \$\,182{,}30.$ $\qquad A = P + I = \$\,1\,744{,}90$

24.3 Que principal investido a 4% anuais por 5 anos gerará um montante de $ 1 200,00?

SOLUÇÃO

$$A = P(1 + rt) \qquad \text{ou} \qquad P = \frac{A}{1 + rt} = \frac{1200}{1 + (0{,}04)(5)} = \frac{1200}{1{,}2} = \$1000$$

O principal de $ 1 000,00 é chamado o valor presente de $ 1 200,00. Isso significa que $ 1 200,00 a serem pagos *daqui a 5 anos* valem $ 1 000,00 *agora* (sendo a taxa de juro igual a 4% anuais).

24.4 Que taxa de juro transformará um principal de $ 800,00 em um montante de $ 1 000,00 no espaço de 5 anos?

SOLUÇÃO

$$A = P(1 + rt) \qquad \text{ou} \qquad r = \frac{A - P}{Pt} = \frac{1000 - 800}{800(5)} = 0{,}05 \text{ ou } 5\%$$

24.5 Um homem deseja tomar emprestados $ 200,00. Ele vai ao banco, onde é informado que a taxa de juro é de 5% anuais, descontados adiantadamente, e de que os $ 200,00 deverão ser pagos ao término de um ano. Que taxa de juro ele efetivamente pagará?

SOLUÇÃO

O juro simples de \$ 200,00 a 5% em 1 ano é $I = 200(0{,}05)(1) = \$\ 10{,}00$. Assim, ele receberá \$ 200,00 − \$ 10,00 = \$ 190,00. Como ele deve devolver \$ 200,00 após um ano, $P = \$\ 190{,}00$, $A = \$\ 200{,}00$, $t = 1$ ano. Então,

$$r = \frac{A - P}{Pt} = \frac{200 - 190}{190(1)} = 0{,}0526,$$

ou seja, a taxa efetiva de juro é de 5,26%.

24.6 Uma comerciante toma \$ 4000,00 emprestados sob a condição de pagar ao término de cada trimestre \$ 200,00 do principal mais juro simples de 6% ao ano sobre o restante do principal. Determine a quantia total que ela deve pagar.

SOLUÇÃO

Como \$ 4 000,00 serão pagos (excluindo o juro) à razão de \$ 200,00 por trimestre, o tempo necessário para o pagamento será 4000/200(4) = 5 anos, ou seja, 20 pagamentos.

Juro pago na 1ª parcela (para os primeiros 3 meses)	$= 4000(0{,}06)(1/4)$	$= \$\ 60{,}00$
Juro pago na 2ª parcela	$= 3800(0{,}06)(1/4)$	$= \$\ 57{,}00$
Juro pago na 3ª parcela	$= 3600(0{,}06)(1/4)$	$= \$\ 54{,}00$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
Juro pago na 20ª parcela	$= 200(0{,}06)(1/4)$	$= \$\ 3{,}00$

O total em juros é $60 + 57 + 54 + \cdots + 9 + 6 + 3$: uma progressão geométrica tendo a soma dada por $S = (n/2)(a + l)$, onde a = primeiro termo, l = último termo e n = quantidade de termos.

Então, $S = (20/2)(60 + 3) = \$\ 630$, e a quantia total a ser paga é \$ 4 630.

24.7 Que montante será gerado por \$ 500,00 aplicados em um banco por dois anos se o juro for composto semestralmente a 2%?

SOLUÇÃO

Método 1. Sem fórmula.

Ao final do 1º semestre, juro = $500(0{,}02)(1/2)$	=	\$ 5,00
Ao final do 2º semestre, juro = $505(0{,}02)(1/2)$	=	\$ 5,05
Ao final do 3º semestre, juro = $510{,}05(0{,}02)(1/2)$	=	\$ 5,10
Ao final do 4º semestre, juro = $515{,}15(0{,}02)(1/2)$	=	\$ 5,15
Total	=	\$ 20,30
Montante	=	\$ 520,30

Método 2. Usando fórmula.

$P = \$\ 500{,}00$, i = taxa por período $= 0{,}02/2 = 0{,}01$. n = quantidade de períodos $= 4$

$$A = P(1 + i)^n = 500(1{,}01)^4 = 500(1{,}0406) = \$\ 520{,}30$$

Nota: $(1{,}01)^4$ pode ser calculado pela fórmula binomial, por logaritmos ou tabelas.

24.8 Determine o juro composto e o montante de \$ 2 800,00 em 8 anos a 5% anuais compostos trimestralmente.

SOLUÇÃO

$A = P(1 + i)^n = 2800(1 + 0{,}05/4)^{32} = 2800(1{,}0125)^{32} = 2800(1{,}4881) = \$\ 4\ 166{,}68$

Juro $= A - P = 4166{,}68 - \$\ 2800 = \$\ 1\ 366{,}68$

24.9 Um homem espera receber \$ 2 000,00 em 10 anos. Qual é a soma que ele está aplicando atualmente, considerando que o juro é de 6% anuais compostos trimestralmente? Qual é o desconto?

SOLUÇÃO

Queremos descobrir o valor presente P cujo montante será A = \$ 2 000,00 em 10 anos.

$$A = P(1+i)^n \quad \text{ou} \quad P = \frac{A}{(1+i)^n} = \frac{2000}{(1{,}015)^{40}} = \$\ 1\ 102{,}52 \text{ usando tabelas}$$

O desconto é \$ 2 000,00 − \$ 1 102,52 = \$ 897,48

24.10 Que taxa de juro composto anualmente é igual à taxa de 6% composta semestralmente?

SOLUÇÃO

Montante do principal P em um ano à taxa $r = P(1 + r)$.

Montante do principal P em um ano à taxa de 6% composta semestralmente = $P\,(1 + 0{,}03)^2$.

Os montantes serão iguais se $P(1 + r) = P(1{,}03)^2$, $1 + r = (1{,}03)^2$, $r = 0{,}0609$ ou 6,09%.

A taxa de juro i por ano composta um certo número de vezes ao ano é chamada *taxa nominal*. A taxa de juro r que, se composta anualmente, resultaria no mesmo total de juros é chamada *taxa efetiva*. Neste exemplo, 6% compostos semestralmente é a taxa nominal e 6,09% é a taxa efetiva.

24.11 Deduza a fórmula para a taxa efetiva em termos da taxa nominal.

SOLUÇÃO

Denotemos r = taxa efetiva,

i = taxa de juro anual composta k vezes por ano, ou seja, a taxa nominal.

Montante do principal P em um ano à taxa $r = P(1 + r)$.

Montante do principal P em um ano à taxa i composta k vezes por ano = $P(1 + i/k)^k$.

Os montantes serão iguais se $P(1 + r) = P(1 + i/k)^k$.

Conseqüentemente, $r = (1 + i/k)^k - 1$.

24.12 Quando os Bônus de Poupança dos Estados Unidos foram lançados, um bônus que custava US\$ 18,75 poderia ser descontado 10 anos depois por US\$ 25,00. Se o juro era composto anualmente, qual era a taxa de juro?

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}
A &= P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} \\
25{,}00 &= 18{,}75(1+r)^{10} \qquad n = 1 \\
4/3 &= (1+r)^{10} \\
\log 4 - \log 3 &= 10\ \log(1+r) \\
0{,}6021 - 0{,}3771 &= 10\ \log(1+r) \\
0{,}125 &= 10\ \log(1+r) \\
0{,}0125 &= \log(1+r) \\
1+r &= \text{antilog}\, 0{,}0125 \\
1+r &= 1{,}02 + \frac{39}{42}(0{,}01) \\
1+r &= 1{,}02 + 0{,}009 \\
1+r &= 1{,}029 \\
r &= 0{,}029 \\
r &= 2{,}9\%
\end{aligned}$$

24.13 A população de um país cresce à razão de 4% compostos anualmente. Com esta taxa, quanto tempo levará para que a população duplique?

SOLUÇÃO

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$
$$2P = P(1+0{,}04)^t \qquad n = 1$$
$$2 = (1{,}04)^t$$
$$\log 2 = t\log(1{,}04)$$
$$t = \frac{\log 2}{\log 1{,}04}$$
$$t = \frac{0{,}3010}{0{,}0170}$$
$$t = 17{,}7 \text{ anos}$$

24.14 Se \$ 1 000,00 forem investidos a 10% anuais compostos continuamente, em quanto tempo o investimento triplicará?

SOLUÇÃO

$$A = Pe^{rt}$$
$$3000 = 1000e^{0,10t}$$
$$3 = e^{0,10t}$$
$$\ln 3 = 0{,}10 \qquad \ln e = 1$$
$$t = \frac{\ln 3}{0{,}10}$$
$$t = \frac{1{,}0986}{0{,}10}$$
$$t = 10{,}986$$
$$t = 11{,}0$$

24.15 Se \$ 5 000,00 forem investidos a 9% anuais compostos continuamente, qual será o valor do investimento em cinco anos?

SOLUÇÃO

$$A = Pe^{rt}$$
$$A = 5000e^{(0,09)(5)} \qquad N = e^{0,45}$$
$$A = 5000e^{0,45} \qquad \ln N = 0{,}45$$
$$A = 5000(1{,}568) \qquad \ln N = \ln\left(1{,}56 + \frac{0{,}4500-0{,}4447}{0{,}4500-0{,}4447}(0{,}01)\right)$$
$$A = \$7840$$
$$\ln N = \ln(1{,}56 + 0{,}008)$$
$$\ln N = \ln 1{,}568$$
$$N = 1{,}568$$

24.16 Determine o pH do sangue, se a concentração de íons de hidrogênio é $3{,}98 \times 10^{-8}$.

SOLUÇÃO

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$$
$$\text{pH} = -\log(3{,}98 \times 10^{-8})$$
$$\text{pH} = -\log 3{,}98 - (-8)\log 10$$
$$\text{pH} = -0{,}5999 + 8$$
$$\text{pH} = 7{,}4001$$
$$\text{pH} = 7{,}40$$

24.17 Registros de um terremoto em São Francisco em 1989 mostram o número de 6,90 na escala Richter. Qual foi a intensidade do terremoto em comparação com a de referência?

SOLUÇÃO

$$R = \log \frac{I}{I_0}$$

$$6{,}90 = \log \frac{I}{I_0}$$

$$\log \frac{I}{I_0} = 6{,}90$$

$$\frac{I}{I_0} = \text{antilog}\, 6{,}90 \qquad \text{antilog}\, 0{,}9000 = 7{,}94 + \frac{0{,}9000 - 0{,}8998}{0{,}9004 - 0{,}8998}(0{,}01)$$

$$I = (\text{antilog}\, 6{,}90) I_0 \qquad = 7{,}94 + \frac{0{,}0002}{0{,}0006}(0{,}01)$$

$$I = (7{,}943 \times 10^6) I_0 \qquad = 7{,}94 + 0{,}003$$

$$I = 7\,943\,000 I_0 \qquad \text{antilog}\, 0{,}9000 = 7{,}943$$

$$\text{antilog}\, 6{,}9000 = 7{,}943 \times 10^6$$

24.18 Um som que causa dor tem uma intensidade 10^{144} vezes a intensidade do limiar de audição. Qual é o nível de decibéis desse som?

SOLUÇÃO

$$L = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

$$L = 10 \log\left(\frac{10^{14} I_0}{I_0}\right)$$

$$L = 10 \log 10^{14}$$

$$L = 10(14 \log 10)$$

$$L = 10(14)(1)$$

$$L = 140 \text{ decibéis}$$

24.19 Se a taxa de decréscimo do carbono-14 é 0,0124% ao ano, quanto tempo, arredondado para três dígitos significativos, levará o carbono-14 para diminuir em 1% sua quantidade original após a morte de um vegetal ou animal?

SOLUÇÃO

$$A = A_0 e^{-rt}$$

$$0{,}01 A_0 = A_0 e^{-0{,}000124t}$$

$$0{,}01 = e^{-0{,}000124t}$$

$$\ln 0{,}01 = -0{,}000\,124t \ln e$$

$$\ln (1 \times 10^{-2}) = -0{,}000\,124t(1)$$

$$0 - 2(2{,}3026) = -0{,}000\,124t$$

$$-4{,}6052 = -0{,}000\,124t$$

$$37\,139 = t$$

$$t = 37\,100 \text{ anos}$$

24.20 A população do mundo aumentou de 2,5 bilhões em 1950 para 5,0 bilhões em 1987. Se o crescimento foi exponencial, qual foi a taxa de crescimento anual?

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}
A &= A_0 e^{rt}\\
5{,}0 &= 2{,}5e^{r(37)}\\
2 &= e^{37r}\\
\ln 2 &= 37r \ \ln e\\
0{,}6931 &= 37r(1)\\
0{,}6931 &= 37r\\
0{,}018\,73 &= r\\
r &= 0{,}0187\\
r &= 1{,}87\%
\end{aligned}$$

24.21 Na Nigéria, a taxa de desmatamento é de 5,25% ao ano. Se a diminuição de florestas é exponencial, quanto tempo levará para que aquele país disponha de apenas 25% das florestas atualmente existentes?

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}
A &= A_0 e^{-rt}\\
0{,}25A_0 &= A_0 e^{-0{,}0525t}\\
0{,}25 &= e^{-0{,}0525t}\\
\ln 0{,}25 &= -0{,}0525t \ln e\\
\ln(2{,}5 \times 10^{-1}) &= -0{,}0525t(1)\\
\ln 2{,}5 - \ln 10 &= -0{,}0525t\\
0{,}9163 - 2{,}3026 &= -0{,}0525t\\
-1{,}3863 &= -0{,}0525t\\
26{,}405 &= t\\
t &= 26{,}41 \text{ anos}
\end{aligned}$$

Problemas Complementares

24.22 Se \$ 51,30 de juro forem creditados em dois anos sobre um depósito de \$ 95,00, qual será a taxa anual de juro simples?

24.23 Se \$ 500,00 forem tomados emprestados e \$ 525,00 tiverem de ser pagos ao final do mês, qual será a taxa anual de juro simples?

24.24 Se \$ 4 000,00 forem investidos em um banco que paga 8% anuais de juro composto trimestralmente, qual será o valor do investimento em 6 anos?

24.25 Se \$ 8 000,00 forem investidos em uma conta que paga 12% anuais compostos mensalmente, quanto valerá o investimento ao final de 10 anos?

24.26 Um banco tentou atrair investimentos novos, vultuosos e duradouros com o pagamento de 9,75% anuais de juro composto continuamente, se no mínimo \$ 30 000,00 fossem investidos por um período mínimo de cinco anos. Se \$ 30 000,00 forem investidos por cinco anos nesse banco, quanto valerá o investimento ao término do período?

24.27 Que juro renderá o investimento de \$ 8 000,00 por quatro anos a 10% anuais compostos semestralmente?

24.28 Que juro renderá o investimento de $ 3 500,00 por cinco anos a 8% anuais compostos trimestralmente?

24.29 Que juro renderá o investimento de $ 4 000,00 por seis anos a 8% anuais compostos continuamente?

24.30 Determine o montante que resultará de $ 9 000,00 investidos por dois anos a 12% anuais compostos mensalmente.

24.31 Determine o montante que resultará de $ 9 000,00 investidos por dois anos a 12% anuais compostos continuamente.

24.32 Em 1990, relatou-se que um terremoto no Irã teve cerca de seis vezes a intensidade do terremoto de São Francisco em 1989, o qual chegou a 6,90 na escala Richter. Qual o número Richter para o terremoto iraniano?

24.33 Determine o número na escala Richter de um terremoto, se a sua intensidade é 3 160 000 vezes maior que a de referência.

24.34 Um terremoto no Alasca em 1964 acusou 8,50 na escala Richter. Qual é a intensidade desse terremoto se comparada à de referência?

24.35 Determine a intensidade, quando comparada à de referência, do terremoto de São Francisco em 1906, que marcou 8,25 na escala Richter.

24.36 Determine o número na escala Richter de um terremoto com intensidade 20 000 vezes a intensidade de referência.

24.37 Determine o pH das substâncias abaixo relacionadas, a partir da concentração de íons de hidrogênio.

(*a*) cerveja: $[H^+] = 6{,}31 \times 10^{-5}$

(*b*) suco de laranja: $[H^+] = 1{,}99 \times 10^{-4}$

(*c*) vinagre: $[H^+] = 6{,}3 \times 10^{-3}$

(*d*) suco de tomate: $[H^+] = 7{,}94 \times 10^{-5}$

24.38 Calcule a concentração aproximada de íons de hidrogênio, $[H^+]$, para as substâncias abaixo a partir do pH.

(*a*) maçãs: pH = 3,0

(*b*) ovos: pH = 7,8

24.39 Se os sucos gástricos do estômago têm uma concentração de íons de hidrogênio de $1{,}01 \times 10^{-1}$ mols por litro, qual é o seu pH?

24.40 Uma sala relativamente silenciosa tem um nível de ruído externo de 32 decibéis. Quantas vezes a intensidade sonora da sala é maior que a do limiar da audição?

24.41 Se a intensidade de uma discussão é cerca de 3 980 000 vezes a do limiar da audição, qual é o nível de decibéis da discussão?

24.42 A população do mundo compõe-se continuamente. Se em 1987 a taxa de crescimento era de 1,63% anuais e a população era de 5 bilhões de pessoas, qual será a população mundial no ano 2000?

24.43 Durante a Peste Negra, a população mundial decresceu cerca de 1 milhão: de 4,7 milhões para cerca de 3,7 milhões durante um período de 50 anos (1350-1400). Se o decréscimo populacional foi exponencial, qual era a taxa anual de decréscimo?

24.44 Se a população mundial cresceu exponencialmente de 1,6 bilhões em 1900 para 5,0 bilhões em 1987, qual foi a taxa anual de crescimento?

24.45 Se o desmatamento em El Salvador continuar à razão atual por mais 20 anos, restarão somente 53% das florestas atuais. Se o decréscimo é exponencial, qual é a taxa anual de desmatamento do país?

24.46 Determina-se que um osso contém 40% do carbono-14 que continha quando era parte de um animal vivo. Se o decréscimo de carbono-14 é exponencial com taxa anual de 0,0124%, há quantos anos o animal morreu?

24.47 O estrôncio-90 é radioativo e é utilizado em reatores nucleares. Sua taxa anual de decréscimo exponencial é de 2,48%. Quanto de 50 gramas de estrôncio-90 restará após 100 anos?

24.48 Quanto tempo levam 12 gramas de carbono-14 para reduzirem-se a 10 gramas, se o decréscimo é exponencial com taxa anual de 0,0124%?

24.49 Quanto tempo levam 10 gramas de estrôncio-90 para reduzirem-se a 8 gramas, se o decréscimo é exponencial com taxa anual de 2,48%?

Respostas dos Problemas Complementares

Observação: As tabelas dos Apêndices A e B foram usadas nos cálculos dos problemas. Se for utilizada uma calculadora, poderá haver variação nos valores.

24.22 2,7%

24.23 60%

24.24 $ 6 436,00

24.25 $ 26 248,00

24.26 $ 48 840,00

24.27 $ 3 824,00

24.28 $ 1 701,00

24.29 $ 2 464,00

24.30 $ 11 412,00

24.31 $ 11 439,00

24.32 7,68

24.33 6,50

24.34 316 200 000 I_0

24.35 177 800 000 I_0

24.36 4,30

24.37 (*a*) pH = 4,2
(*b*) pH = 2,2
(*c*) pH = 3,7
(*d*) pH = 4,1

24.38 (*a*) $[H^+] = 0{,}001$ ou $1{,}00 \times 10^{-3}$ (*b*) $[H^+] = 1{,}585 \times 10^{8}$

24.39 1,0

24.40 1,585 I_0

24.41 66 decibéis

24.42 6,18 bilhões

24.43 0,48% ao ano

24.44 1,31% ao ano

24.45 3,17% ao ano

24.46 7 390 anos

24.47 4,2 gramas

24.48 1 471 anos

24.49 8 998 anos

Capítulo 25

Permutações e Combinações

25.1 PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DE CONTAGEM

Se uma coisa pode ser feita de m modos diferentes e uma segunda coisa pode ser feita de n modos diferentes, então as duas coisas juntas podem ser feitas de mn modos diferentes.

Por exemplo, se existem 3 candidatos a governador e 5 candidatos a prefeito, então os dois cargos podem ser preenchidos de $3 \cdot 5 = 15$ modos distintos.

Em geral, se a_1 pode ser feita de x_1 modos diferentes, a_2 pode ser feita de x_2 modos diferentes, a_3 pode ser feita de x_3 modos diferentes, ... e a_n pode ser feita de x_n modos diferentes, então o evento $a_1a_2a_3 \cdots a_n$ pode ser feito de $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \cdots \cdot x_n$ modos diferentes.

Exemplo 25.1 Um homem possui 3 jaquetas, 10 camisas e 5 calças. Se um traje consiste de uma jaqueta, uma camisa e uma calça, quantos trajes distintos podem ser compostos?

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 3 \cdot 10 \cdot 5 = 150 \text{ trajes}$$

25.2 PERMUTAÇÕES E ARRANJOS

Um arranjo é a organização de parte de um número de coisas ou de todas elas em uma ordem definida. Uma permutação é especificamente uma organização de um número de coisas em uma certa ordem.

Por exemplo, as permutações das três letras a, b, c tomadas juntas são abc, acb, bca, bac, cba, cab. Já os arranjos das três letras a, b, c tomadas apenas duas por vez são ab, ac, ba, bc, ca, cb.

Para um número natural n, n fatorial, denotado por $n!$, é o produto dos primeiros n números naturais. Ou seja, $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$. Assim, $n! = n \cdot (n-1)!$. O fatorial de zero é definido como 1: $0! = 1$.

Exemplo 25.2 Calcule cada fatorial.

(a) $7!$ (b) $5!$ (c) $1!$ (d) $2!$ (e) $4!$

(a) $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$

(b) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

(c) $1! = 1$

(d) $2! = 2 \cdot 1 = 2$

(e) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

O símbolo ${}_nA_r$ representa o número de arranjos (ordenamentos) de n coisas tomadas r por vez, enquanto P_n denota o número de permutações de n coisas (tomadas n por vez).

Assim, ${}_8A_3$ denota o número de arranjos de 8 coisas tomadas de três em três, e A_5 representa o número de permutações de 5 coisas tomadas 5 por vez.

Nota: O símbolo $A(n, r)$ tem o mesmo significado que ${}_nA_r$.

A. Arranjos de n coisas diferentes tomadas r por vez

$$ {}_nA_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} $$

Quando $r = n$, ${}_nA_r = P_n = n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.

Exemplo 25.3

$$ {}_5A_1 = 5,\ {}_5A_2 = 5\cdot 4 = 20,\ {}_5A_3 = 5\cdot 4\cdot 3 = 60,\ {}_5A_4 = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 = 120, P_5 = 5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120, $$
$$ {}_{10}A_7 = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 604\,800 $$

O número de maneiras que 4 pessoas podem sentar em um táxi de 6 lugares é ${}_6A_4 = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 360$.

B. Permutações com algumas coisas iguais (todas tomadas ao mesmo tempo)

O número de permutações P de n coisas tomadas todas ao mesmo tempo, das quais n_1 são iguais, outras n_2 são iguais, outras n_2 são iguais, etc., é dado por

$$ P = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots} \qquad \text{onde } n_1 + n_2 + n_3 + \cdots = n $$

Por exemplo, o número de modos que 3 *dimes* e 7 quartos podem ser distribuídos entre 10 garotos, cada um deles recebendo uma moeda, é

$$ \frac{10!}{3!7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120 $$

C. Permutações circulares

O número de maneiras de organizar n objetos diferentes em círculo é $(n-1)!$. Assim, 10 pessoas podem sentar-se em uma mesa redonda de $(10-1)!$ maneiras.

25.3 COMBINAÇÕES

Uma combinação é um agrupamento ou seleção de todos ou de uma parte de um número de coisas sem referência à ordem com que elas estão sendo selecionadas.

Assim, as combinações das três letras a, b, c tomadas duas por vez são ab, ac, bc. Observe que ab e ba são uma só combinação, mas são duas permutações das letras a, b.

O símbolo ${}_nC_r$ representa o número de combinações (seleções, grupamentos) de n coisas tomadas r por vez.

Portanto, ${}_9C_4$ denota o número de combinações de 9 coisas tomadas 4 por vez.

Nota: O símbolo $C(n, r)$ tem o mesmo significado de ${}_nC_r$.

A. Combinações de n coisas diferentes tomadas r por vez

$$ {}_nC_r = \frac{{}_nA_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} $$

Por exemplo, o número de apertos de mão que devem ser trocados em uma festa por 12 estudantes se cada estudante apertar uma vez a mão de cada um dos outros é:

$$ {}_{12}C_2 = \frac{12!}{2!(12-2)!} = \frac{12!}{2!\,10!} = \frac{12\cdot 11}{1\cdot 2} = 66 $$

A fórmula a seguir é muito útil para simplificar cálculos:

$$ {}_nC_r = {}_nC_{n-r} $$

Esta fórmula indica que o número de seleções de r em n é igual ao número de seleções de $n-r$ em n.

Exemplos 25.4

$$_5C_1 = \frac{5}{1} = 5, \qquad _5C_2 = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 10, \qquad _5C_5 = \frac{5!}{5!} = 1$$

$$_9C_7 = {_9C_{9-7}} = {_9C_2} = \frac{9\cdot 8}{1\cdot 2} = 36, \qquad _{25}C_{22} = {_{25}C_3} = \frac{25\cdot 24\cdot 23}{1\cdot 2\cdot 3} = 2300$$

Note que, em cada caso, o numerador e o denominador têm o mesmo número de fatores.

B. Combinações de coisas diferentes tomadas um número qualquer de vezes

O número total de combinações C de n coisas diferentes tomadas 1, 2, 3, ..., n por vez é

$$C = 2^n - 1$$

Por exemplo, uma mulher tem um quarto, um *dime*, um níquel e um *penny* no bolso. O número total de diferentes somas que ela pode retirar dele é $2^4 - 1 = 15$.

25.4 USANDO UMA CALCULADORA

Calculadoras científicas e gráficas têm uma tecla para fatoriais, $n!$, arranjos, $_nA_r$, e combinações, $_nC_r$. Como os fatoriais tornam-se maiores, os resultados são apresentados em notação científica. Muitas calculadoras permitem apenas dois dígitos para expoentes, o que limita o tamanho do fatorial que pode ser apresentado. Assim, 69! pode ser apresentado mas 70! não, pois 70! utiliza mais de dois dígitos para expoentes em notação científica. Quando uma calculadora pode realizar uma operação mas não pode apresentar seu resultado, aparece uma mensagem de erro.

Em geral, os valores de $_nA_r$ e $_nC_r$ podem ser computados na calculadora quando $n!$ não pode ser disponibilizado. Isto pode ser feito porque o procedimento interno não requer que o resultado seja disponibilizado, apenas utilizado.

Problemas Resolvidos

25.1 Calcule $_{20}A_2$, $_8A_5$, $_7A_5$, P_7.

SOLUÇÃO

$$_{20}A_2 = 20\cdot 19 = 380 \qquad _7A_5 = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 2520$$
$$_8A_5 = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 6720 \qquad P_7 = 7! = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 5040$$

25.2 Determine n sabendo que (a) $7 \cdot {_nA_3} = 6 \cdot {_{n+1}A_3}$, ($b$) $3 \,.\, {_nA_4} = {_{n-1}A_5}$

SOLUÇÃO

(a) $7n(n-1)(n-2) = 6(n+1)(n)(n-1)$.

Como $n \neq 0$, 1 podemos dividir por $n(n-1)$ e obter $7(n-2) = 6(n+1)$, $n = 20$.

(b) $3n(n-1)(n-2)(n-3) = (n-1)(n-2)\ (n-3)(n-4)(n-5)$.

Como $n \neq 1$, 2, 3 podemos dividir por $(n-1)(n-2)(n-3)$ e obter

$$3n = (n-4)(n-5),\ n_2 - 12n + 20 = 0,\ (n-10)(n-2) = 0.$$

Portanto $n = 10$.

25.3 Um estudante pode escolher entre 5 línguas estrangeiras e 4 ciências. De quantas maneiras ele pode escolher uma língua e uma ciência?

SOLUÇÃO

Ele pode escolher uma lingua de 5 maneiras, e para cada uma destas escolhas existem 4 maneiras de escolher uma ciência.

Portanto o número de maneiras possíveis é $5 \cdot 4 = 20$.

25.4 De quantas maneiras dois prêmios podem ser conferidos a 10 concorrentes se ambos os prêmios:

(a) não podem ser dados para a mesma pessoa?

(b) podem ser dados para a mesma pessoa?

SOLUÇÃO

(*a*) O primeiro prêmio pode ser conferido de 10 maneiras diferentes e, uma vez conferido, o segundo prêmio pode ser conferido de 9 maneiras diferentes, uma vez que um mesmo concorrente não pode receber os dois.

Portanto, o número de maneiras distintas é $10 \cdot 9 = 90$.

(*b*) O primeiro prêmio pode ser conferido de 10 maneiras diferentes e o segundo também, uma vez que os prêmios podem ser dados para o mesmo concorrente.

Portanto, o número de maneiras distintas é $10 \cdot 10 = 100$.

25.5 De quantas maneiras 5 cartas podem ser enviadas por correio se existem 3 caixas de correio à disposição?

SOLUÇÃO

Cada carta pode ser colocada em qualquer uma das 3 caixas.

Portanto, o número de maneiras distintas é $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$.

25.6 Existem 4 candidatos a presidente de um clube, 6 candidatos a vice-presidente e 2 candidatos a secretário. De quantas maneiras esses postos podem ser preenchidos?

SOLUÇÃO

Pode-se selecionar um presidente de 4 maneiras, um vice-presidente de 6 maneiras e um secretário de 2 maneiras. Portanto, a resposta desejada é $4 \cdot 6 \cdot 2 = 48$ maneiras.

25.7 De quantas maneiras diferentes 5 pessoas podem se sentar em fila?

SOLUÇÃO

A primeira pessoa pode ocupar qualquer assento, e depois que esta se senta, a segunda pessoa pode ocupar qualquer um dos quatro assentos restantes, etc. Portanto, o número de maneiras distintas é de $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Outra maneira: Número de ordens = número de arranjos de 5 pessoas sentadas todas juntas

$$= P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ maneiras}$$

25.8 De quantas maneiras podemos arrumar 7 livros em uma prateleira?

SOLUÇÃO

Número de maneiras = número de arranjos de 7 livros tomados todos juntos

$$= P_5 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040 \text{ maneiras.}$$

25.9 Doze quadros diferentes estão disponíveis, dos quais 4 devem ser pendurados em fila. De quantas maneiras isto pode ser feito?

SOLUÇÃO

O primeiro lugar pode ser ocupado por qualquer um dos 12 quadros, o segundo lugar, por qualquer um dos 11 restantes, o terceiro, por qualquer um dos 10 restantes e o quarto, por qualquer um dos 9 restantes.

Portanto, o número de maneiras distintas é $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11\,880$.

Outra maneira: Número de maneiras = número de arranjos de 12 quadros tomando-se apenas 4 por vez

$$= {}_{12}A_4 = 12 . 11 . 10 . 9 = 11\,880 \text{ maneiras.}$$

25.10 Pede-se a 5 homens e 4 mulheres para sentarem-se em fila de modo que as mulheres ocupem os lugares pares. Quantas possíveis distribuições existem?

SOLUÇÃO

Os homens podem sentar-se de P_5 maneiras e as mulheres podem sentar-se de P_4. Cada distribuição dos homens pode ser associada a cada distribuição das mulheres.

Portanto, o número de distribuições é

$$= P_5 \cdot P_4 = 5!\,4! = 120 \cdot 24 = 2880$$

25.11 De quantas maneiras podemos ordenar 7 quadros pendurados em fila de modo que um quadro específico esteja

(*a*) no centro?

(*b*) em alguma ponta?

SOLUÇÃO

(*a*) Como um determinado quadro deve estar no centro, sobram 6 quadros para serem arranjados em fila. Portanto, o número de ordenações é

$$P_6 = 6! = 720$$

(*b*) Depois de o quadro especificado estar pendurado em um dos dois locais possíveis, os 6 quadros restantes podem ser arranjados de P_6 maneiras diferentes.

Portanto, o número de ordenações neste caso é

$$2 \cdot P_6 = 1140$$

25.12 De quantas maneiras podemos arrumar 9 livros em uma estante de modo que:

(*a*) 3 livros determinados fiquem sempre juntos?

(*b*) 3 livros determinados nunca fiquem juntos?

SOLUÇÃO

(*a*) Os 3 livros especificados podem ser arrumados entre si de P_3 modos. Como devem estar sempre juntos, podem ser considerados como uma coisa só. Daí, junto com os outros 6 livros, temos 7 coisas, que podem ser arrumadas de P_7 maneiras.

Total de ordenações destes livros $= P_3 \cdot P_7 = 3!\,7! = 6 \cdot 5040 = 30\,240$ modos

(*b*) Número de maneiras com que 9 livros podem ser arrumados sem restrições $= 9! = 362\,880$ modos.

Número de maneiras com que 9 livros podem ser arrumados de modo que 3 deles estejam sempre juntos (de (*a*) acima) $= 3!\,7! = 30\,240$ modos.

Portanto, o número de maneiras com que 9 livros podem ser arrumados de modo que 3 deles nunca estejam juntos $= 3!\,7! = 362\,880 - 30\,240 = 332\,640$ modos.

25.13 De quantas maneiras n mulheres podem sentar-se em fila de modo que duas específicas não fiquem lado a lado?

SOLUÇÃO

Sem restrições, elas poderiam sentar em fila de P_n modos. Se duas delas devem sempre sentar lado a lado, o número de maneiras fica reduzido a $2!\,(P_{n-1})$.

Portanto, o número de maneiras com que n mulheres podem se sentar em fila com duas específicas nunca ficando lado a lado é $P_n - 2(P_{n-1}) = n! - 2(n-1)! = n(n-1)! - 2\,(n-1)! = (n-2) \cdot (n-1)!$

25.14 Seis livros diferentes de Biologia, 5 livros diferentes de Química e 2 livros diferentes de Física devem ser arrumados em uma estante, de modo que os de Biologia fiquem juntos e também os de Química e os de Física. Quantas são as maneiras de fazê-lo?

SOLUÇÃO

Os livros de Biologia podem ser arrumados entre eles de 6! maneiras, os de Química de 5! maneiras, os de Física de 2! maneiras e os três grupos de 3! maneiras. Assim, o número de disposições é $6!\,5!\,2!\,3! = 1\,036\,800$.

25.15 Determine quantas palavras distintas com 5 letras podem ser formadas com as letras da palavra "problema" (*a*) se cada letra puder ser usada apenas uma vez, (*b*) se puderem ser repetidas as letras. (As palavras não precisam ter significado).

SOLUÇÃO

(*a*) Número de palavras = arranjos de 8 letras diferentes tomadas 5 por vez $= {}_8A_5 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6\,720$ palavras.

(*b*) Número de palavras $= 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 32\,768$ palavras.

25.16 Quantos números podem ser formados utilizando-se 4 dos 5 dígitos 1, 2, 3, 4, 5 (*a*) se os dígitos não puderem ser repetidos, (*b*) se os dígitos puderem ser repetidos? Se os dígitos não puderem ser repetidos, quantos dos números de 4 dígitos (*c*) começam por 1, e (*d*) terminam por 25?

SOLUÇÃO

(*a*) Números formados $= {}_5A_4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ números

(*b*) Números formados $= 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$ números (*c*) Como o primeiro dígito de cada número está especificado, restam 4 dígitos para serem arranjados em 3 posições.

Números formados = ${}_4A_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ números

(*d*) Como os dois últimos dígitos de cada número estão especificados, restam 3 dígitos para serem arranjados em 2 posições.

Números formados = ${}_3A_2 = 3 \cdot 2 = 6$ números

25.17 Quantos números de 4 dígitos podem ser formados com os 10 dígitos 0, 1, 2, 3, ..., 9 (*a*) se cada dígito for utilizado apenas uma vez? (*b*) Quantos destes números serão ímpares?

SOLUÇÃO

(*a*) A primeira posição pode ser preenchida por qualquer dígito, exceto o 0, isto é, por qualquer um de 9 dígitos. Os 9 dígitos restantes podem ser arranjados nas 3 outras posições de ${}_9A_3$ maneiras.

Números formados = $9 \cdot {}_9A_3 = 9 \cdot (9 \cdot 8 \cdot 7) = 4\,536$ números

(*b*) A última posição pode ser preenchida por qualquer um dos 5 dígitos ímpares. A primeira posição pode ser preenchida pelos 8 dígitos, i.e., por qualquer um dos 4 dígitos ímpares restantes e pelos dígitos pares, 2, 4, 6, 8. Os 8 dígitos restantes podem ser arranjados nas 2 posições do meio, de ${}_8A_2$ maneiras.

Números formados = $5 \cdot 8 \cdot {}_8A_2 = 5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 2\,240$ números

25.18 (*a*) Quantos números de 5 dígitos podem ser formados com os 10 dígitos 0, 1, 2, 3, ..., 9 se forem permitidas repetições? Quantos destes números (*b*) começam por 40, (*c*) são pares, (*d*) são divisíveis por 5?

SOLUÇÃO

(*a*) A primeira posição pode ser preenchida por qualquer um dos 9 dígitos (qualquer um dos 10, com exceção do 0). Cada uma das outras 4 posições pode ser ocupada por qualquer um dos 10 dígitos.

Números formados = $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^4 = 90\,000$ números

(*b*) As duas primeiras posições podem ser preenchidas de uma única maneira, 40. As outras 3 posições podem ser preenchidas por qualquer um dos 10 dígitos.

Números formados = $1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1000$ números

(*c*) A primeira posição pode ser preenchida de 9 maneiras, e a última posição de 5 maneiras (0, 2, 4, 6, 8). Cada uma das outras 3 posições pode ser ocupada por qualquer um dos 10 dígitos.

Números formados = $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 45\,000$ números

(*d*) A primeira posição pode ser preenchida de 9 maneiras, e a última posição de 2 maneiras (0, 5), e as outras 3 posições podem ser ocupadas por qualquer um dos 10 dígitos.

Números divisíveis por 5 = $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 18\,000$ números

25.19 Quantos números entre 3 000 e 5 000 podem ser formados utilizando-se os 7 dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 se nenhum dígito puder ser repetido em um mesmo número?

SOLUÇÃO

Como os números estão entre 3 000 e 5 000, eles consistem de 4 dígitos. A primeira posição pode ser preenchida de 2 maneiras, i.e., pelos dígitos 3, 4. Cada um dos 6 dígitos restantes podem ser arranjados nas 3 outras posições de ${}_6A_3$ maneiras.

Números formados = $2 \cdot {}_6A_3 = 2(6 \cdot 5 \cdot 4) = 240$ números

25.20 De 11 romances e 3 dicionários, devemos selecionar 4 romances e 1 dicionário para dispor em uma estante de modo que o dicionário fique sempre no meio. De quantas maneiras eles podem ser organizados?

SOLUÇÃO

O dicionário pode ser escolhido de 3 maneiras. O número de arranjos de 11 romances tomados 4 por vez é de ${}_{11}A_4$.

Número de arranjos = $3 \cdot {}_{11}A_4 = 3(11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8) = 23760$

25.21 Quantos sinais podem ser feitos com 5 bandeiras sinalizadoras diferentes erguendo qualquer número de bandeiras?

SOLUÇÃO

Podem ser feitos sinais erguendo-se as bandeiras 1, 2, 3, 4 e 5 simultaneamente. Portanto, o número total de sinais é

$$_5A_1 + {_5A_2} + {_5A_3} + {_5A_4} + P_5 = 5 + 20 + 120 + 120 = 325 \text{ sinais}$$

25.22 Calcule a soma dos números de 4 dígitos que podem ser formados com 2, 5, 3, 8 se cada dígito é usado uma única vez em cada arranjo.

SOLUÇÃO

O número de arranjos, ou números, é $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

A soma dos dígitos $= 2 + 5 + 3 + 8 = 18$, e cada dígito vai aparecer $24/4 = 6$ vezes em cada casa das unidades, dezenas, centenas e milhares. Portanto, a soma de todos os números formados é

$$1\,(6 \cdot 18) + 10\,(6 \cdot 18) + 100\,(6 \cdot 18) + 1000\,(6 \cdot 18) = 199\,988$$

25.23 (*a*) Quantos arranjos podem ser feitos com as letras da palavra "cooperador" quando todas são tomadas simultaneamente? Quantos destes arranjos (*b*) possuem os três *os* juntos, (*c*) começam com os dois *rs*?

SOLUÇÃO

(*a*) A palavra "cooperador" consiste de 10 letras: 3 *os*, 2 *rs* e 5 letras diferentes.

$$\text{Número de arranjos} = \frac{10!}{3!\,2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(1 \cdot 2 \cdot 3)(1 \cdot 2)} = 302\,400$$

(*b*) Considere os 3 *os* como uma letra. Então, temos 8 letras, das quais 2 são iguais.

$$\text{Número de arranjos} = \frac{8!}{2!} = 20\,160$$

(*c*) O número de arranjos das 8 letras restantes, das quais 3 são iguais é *os* é $8!/3! = 6720$.

25.24 Existem 4 livros diferentes e 3 cópias de cada um. De quantas maneiras eles podem ser arranjados em uma estante?

SOLUÇÃO

Existem $3 \cdot 4 = 12$ livros dos quais cada 3 são iguais.

$$\text{Número de arranjos} = \frac{(3 \cdot 4)!}{3!\,3!\,3!\,3!} = \frac{12!}{(3!)^4} = 369\,600$$

25.25 (*a*) De quantas maneiras 5 pessoas podem sentar-se ao redor de uma mesa redonda?

(*b*) De quantas maneiras 8 pessoas podem sentar-se ao redor de uma mesa redonda se duas delas devem obrigatoriamente sentar-se lado a lado?

SOLUÇÃO

(*a*) Como ponto de partida, consideremos uma pessoa sentada em uma posição qualquer. Então, as 4 demais podem sentar-se de $4! = 24$ maneiras. Portanto, existem 24 maneiras de sentarem-se 5 pessoas em círculo.

(*b*) Considere estas duas pessoas particulares como uma só. Como existem 2! maneiras de arranjar duas pessoas entre si e 6! maneiras de arranjar 7 pessoas em círculo, o número é $= 2!6 = 2 \cdot 720 = 1440$ maneiras.

25.26 De quantas maneiras 4 homens e 4 mulheres podem se sentar ao redor de uma mesa redonda se cada mulher deve ficar entre dois homens?

SOLUÇÃO

Consideremos os homens sentados primeiro. Então, temos 3! maneiras de arranjá-los, e temos 4! maneiras de organizarmos as mulheres.

Número de arranjos $= 3!4! = 144$

25.27 Ao enfiar 9 contas de diversas cores em um cordão, quantas pulseiras diferentes podem ser produzidas?

SOLUÇÃO

Existem 8! maneiras de arranjá-las em uma pulseira, mas metade delas pode ser obtida da outra metade, apenas virando a pulseira. Portanto, existem $\frac{1}{2}(8!) = 20160$ pulseiras diferentes.

25.28 Em cada caso, determine n:

(a) ${}_nC_{n-2} = 10$, (b) ${}_nC_{15} = {}_nC_{11}$, (c) ${}_nA_4 = 30 \cdot {}_nC_5$

SOLUÇÃO

(a) $${}_nC_{n-2} = {}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2!} = \frac{n^2-n}{2} = 10, \qquad n^2 - n - 20 = 0, \qquad n = 5$$

(b) $${}_nC_r = {}_nC_{n-r}, \qquad {}_nC_{15} = {}_nC_{n-11}, \qquad 15 = n - 11, \qquad n = 26$$

(c) $$30 \cdot {}_nC_5 = 30\left(\frac{{}_nA_5}{5!}\right) = \frac{30 \cdot {}_nA_4 \cdot (n-4)}{5!}$$

Então, $${}_nA_4 = \frac{30 \cdot {}_nA_4 \cdot (n-4)}{5!}, \qquad 1 = \frac{30(n-4)}{120}, \qquad n = 8$$

25.29 Dado que ${}_nA_r = 3024$ e ${}_nC = 126$, encontre r.

SOLUÇÃO

$${}_nA_r = r!({}_nC_r), \qquad r! = \frac{{}_nA_r}{{}_nC_r} = \frac{3024}{126} = 24, \qquad r = 4$$

25.30 Quantos conjuntos de 4 estudantes podem ser escolhidos entre 17 estudantes qualificados para representar uma escola em um campeonato de matemática?

SOLUÇÃO

Número de conjuntos = número de combinações de 4 escolhidos entre 17 estudantes

$$= {}_{17}C_4 = \frac{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 2380 \text{ conjuntos}$$

25.31 De quantas maneiras podem ser escolhidos 5 gêneros entre 8?

SOLUÇÃO

Número de maneiras = número de combinações de 5 escolhidos entre 8

$$= {}_8C_5 = {}_8C_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56 \text{ maneiras}$$

25.32 De quantas maneiras 12 livros podem ser divididos entre A e B de modo que um ganhe 9 e o outro, 3 livros?

SOLUÇÃO

Em cada separação dos 12 livros em 9 e em 3, A pode ganhar 9 e B pode ganhar 3, ou B pode ganhar 9 e A ganhar 3.

Portanto, temos $= 2 \cdot {}_{12}C_9 = 2 \cdot {}_{12}C_3 = 2\left(\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right) = 440$ maneiras.

25.33 Determine o número de triângulos diferentes que podem ser formados unindo-se os vértices de um hexágono para formar os vértices de cada triângulo.

SOLUÇÃO

Número de triângulos = número de combinações de 3 escolhidos entre 6

$$= {}_6C_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20 \text{ triângulos}$$

25.34 Quantos ângulos menores que 180° são formados por 12 semi-retas de mesma origem se nenhum par delas é formado por semi-retas colineares?

SOLUÇÃO

Número de ângulos = número de combinações de 2 escolhidas entre 12

$$= {}_{12}C_2 = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} = 66 \text{ ângulos}$$

25.35 Quantas diagonais tem um octógono?

SOLUÇÃO

Retas originadas pelos vértices = número de combinações de 2 escolhidas entre 8 vértices

$$= {}_{8}C_2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

Como 8 destas retas são as retas suportes dos lados do octógono, o número de diagonais é 20

25.36 Quantos paralelogramos são formados por um conjunto de 4 retas paralelas interceptando um outro conjunto de 7 retas paralelas?

SOLUÇÃO

Cada combinação de 2 retas em 4 pode interceptar 2 retas escolhidas entre 7 para formar um paralelogramo.

Número de paralelogramos = ${}_{4}C_2 \cdot {}_{7}C_2 = 6 \cdot 21 = 126$ paralelogramos

25.37 Existem 10 pontos em um plano. Nenhum conjunto de três pontos é um conjunto de pontos colineares, com exceção de quatro pontos, que são colineares. Quantas retas podem ser formadas unindo-se alguns desses 10 pontos?

SOLUÇÃO

Número de retas formadas se não há três dos 10 pontos que sejam colineares = ${}_{10}C_2 = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$

Número de retas formadas por 4 pontos se nunca três deles são colineares = ${}_{4}C_2 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6.$

Como existem 4 pontos colineares, eles formam apenas uma reta em vez de 6.

Número de retas = 45 − 6 + 1 = 40 retas

25.38 De quantas maneiras podemos selecionar 3 mulheres de 15 se:

(*a*) uma delas está incluída em todas as seleções?

(*b*) duas delas estão sempre excluídas?

(*c*) uma delas está sempre incluída e duas delas mulheres estão sempre excluídas?

SOLUÇÃO

(*a*) Como uma está sempre incluída, devemos selecionar 2 de 14.

$$\text{Portanto, o número de maneiras é} = {}_{14}C_2 = \frac{14 \cdot 13}{2} = 91 \text{ maneiras.}$$

(*b*) Como duas estão sempre excluídas, devemos selecionar 3 de apenas 13.

$$\text{Portanto, o número é} = {}_{13}C_3 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3!} = 286 \text{ maneiras}$$

(*c*) Número de maneiras é $= {}_{15-1-2}C_{3-1} = {}_{12}C_2 = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$

25.39 Uma organização tem 25 membros, sendo 4 doutores. De quantas maneiras um comitê de 3 membros pode ser formado que envolva pelo menos 1 doutor?

SOLUÇÃO

Número total de maneiras com que 3 membros podem ser selecionados em $25 = {}_{25}C_3$.

Número de maneiras com que 3 membros podem ser selecionados de modo que nenhum seja doutor $= {}_{25-4}C_3 = {}_{21}C_3$.

Portanto, o número de maneiras com que 3 membros podem ser selecionados de modo que pelo menos 1 seja doutor é

$${}_{25}C_3 - {}_{21}C_3 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3!} - \frac{21 \cdot 20 \cdot 19}{3!} = 970$$

25.40 De 6 químicos e 5 biólogos, deve ser selecionado um comitê de 7 pessoas de modo que 4 sejam químicos. De quantas maneiras isso pode ser feito?

SOLUÇÃO

Cada seleção de 4 entre 6 químicos pode ser associada a uma seleção de 3 entre 5 biólogos.

Portanto, o número de maneiras é $= {}_6C_4 \cdot {}_5C_3 = {}_6C_2 \cdot {}_5C_2 = 15 \cdot 10 = 150$

25.41 Dadas 8 consoantes e 4 vogais, quantas palavras de 5 letras podem ser formadas, se cada uma delas deve ter 3 consoantes diferentes e 2 vogais diferentes?

SOLUÇÃO

As 3 consoantes diferentes podem ser selecionadas de ${}_8C_3$ maneiras, as 2 vogais diferentes, de ${}_4C_2$ e as 5 letras (3 consoantes e 2 vogais) podem ser arranjadas entre elas de $P_5 = 5!$ maneiras.

Portanto, o número de palavras é $= {}_8C_3 \cdot {}_4C_2 \cdot 5! = 56 \cdot 6 \cdot 120 = 40\,320$

25.42 Com 7 letras maiúsculas, 3 vogais e 5 consoantes, quantas palavras podem ser formadas, se cada uma delas deve começar com letra maiúscula, conter ao menos 1 vogal e ter todas as letras diferentes?

SOLUÇÃO

A primeira letra, maiúscula, pode ser selecionada de 7 maneiras. As 3 letras restantes podem ser:

(*a*) 1 vogal e 2 consoantes, que podem ser selecionadas de ${}_3C_1 \cdot {}_5C_2$ maneiras.

(*b*) 2 vogais e 1 consoante, que podem ser selecionadas de ${}_3C_2 \cdot {}_5C_1$ maneiras, e

(*c*) 3 vogais, que podem ser arranjadas entre si de ${}_3C_3 = 1$ maneira.

Cada uma dessas seleções de 3 letras pode ser arranjada entre si de $P_3 = 3!$ maneiras.

$$\begin{aligned}\text{Portanto, o número de palavras é } &= 7 \cdot 3!({}_3C_1 \cdot {}_5C_2 + {}_3C_2 \cdot {}_5C_1 + 1)\\ &= 7 \cdot 6(3 \cdot 10 + 3 \cdot 5 + 1) = 1932\end{aligned}$$

25.43 *A* tem 3 mapas e *B* tem 9 mapas. Determine o número de maneiras com que *A* e *B* podem trocar mapas de modo que cada um conserve o número inicial de mapas.

SOLUÇÃO

A pode trocar 1 mapa com *B* de ${}_3C_1 \cdot {}_9C_1 = 3 \cdot 9 = 27$ maneiras.

A pode trocar 2 mapas com *B* de ${}_3C_2 \cdot {}_9C_2 = 3 \cdot 36 = 108$ maneiras.

A pode trocar 3 mapas com *B* de ${}_3C_3 \cdot {}_9C_3 = 1 \cdot 84 = 84$ maneiras.

O número total de trocas é então $= 27 + 108 + 84 = 219$

Outro método: Suponhamos que *A* e *B* coloquem seus mapas juntos. Então, o problema é encontrar o número de maneiras que *A* pode escolher 3 mapas em 12, não incluindo a seleção que consta dos mapas originais de *A*.

$${}_{12}C_3 - 1 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 1 = 219 \text{ maneiras}$$

25.44 (*a*) De quantas maneiras podemos dividir 12 livros entre 3 estudantes de modo que cada um receba 4 livros?

(*b*) De quantas maneiras podemos dividir 12 livros em 3 grupos de 4 cada?

SOLUÇÃO

(*a*) O primeiro estudante pode selecionar 4 livros entre 12 de ${}_{12}C_4$ maneiras.

O segundo estudante pode selecionar 4 livros dos 8 restantes de ${}_8C_4$ maneiras.

O terceiro estudante pode selecionar 4 livros dos 4 restantes de uma única maneira.

O número total de maneiras é então ${}_{12}C_4 \cdot {}_8C_4 \cdot 1 = 495 \cdot 70 \cdot 1 = 34\,650$ maneiras

(*b*) Os 3 grupos poderiam ser distribuídos entre os alunos de $3! = 6$ maneiras.

Portanto, o número de grupos é $34\,650/3! = 5775$

25.45 De quantas maneiras uma pessoa pode escolher 1 ou mais entre 4 aparelhos elétricos?

SOLUÇÃO

Para cada aparelho temos duas situações: ou ele é escolhido ou ele não é escolhido. Portanto, o número de escolhas é $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$. Mas 2^4 inclui o caso em que nenhum é escolhido.

Portanto, o número de escolhas que queremos é $2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$.

Outro método: Os aparelhos podem ser escolhidos individualmente, em duplas, etc. Portanto o número de possibilidades é $= {}_4C_1 + {}_4C_2 + {}_4C_3 + {}_4C_4 = 4 + 6 + 4 + 1 = 15$ maneiras.

25.46 Quantas somas diferentes em dinheiro podem ser retiradas de uma carteira que contém uma nota de 1, de 2, de 5, de 10, de 20 e de 50 reais?

SOLUÇÃO

$$\text{Número de somas} = 2^6 - 1 = 63$$

25.47 De quantas maneiras 2 ou mais gravatas podem ser selecionadas de um conjunto de 8 gravatas?

SOLUÇÃO

Uma ou mais gravatas podem ser selecionadas de $(2^8 - 1)$ maneiras. Mas como devemos escolher 2 ou mais, o número requerido é $2^8 - 1 - 8 = 247$.

Outro método: 2, 3, 4, 5, 6, 7 ou 8 gravatas podem ser selecionadas de

$$\begin{aligned} {}_8C_2 + {}_8C_3 + {}_8C_4 + {}_8C_5 + {}_8C_6 + {}_8C_7 + {}_8C_8 &= {}_8C_2 + {}_8C_3 + {}_8C_4 + {}_8C_3 + {}_8C_2 + {}_8C_1 + 1 \\ &= 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1 = 247 \text{ maneiras.} \end{aligned}$$

25.48 Estão à disposição 5 corantes de diferentes tons de verde, 4 de diferentes tons de azul e 3 de diferentes tons de vermelho. Quantas seleções de corante podem ser feitas tomando-se pelo menos um tom de verde e um tom de azul?

SOLUÇÃO

Os tons de verde podem ser selecionados de $(2^5 - 1)$ maneiras, os de azul de $(2^4 - 1)$ maneiras e os de vermelho de 2^3 maneiras.

Número de seleções é $(2^5 - 1)(2^4 - 1)(2^3) = 31 \cdot 15 \cdot 8 = 3720$

Problemas Complementares

25.49 Calcule ${}_{16}A_3$, ${}_7A_4$, P_5, ${}_{12}A_1$

25.50 Determine n sabendo que (a) $10 \cdot {}_nA_2 = {}_{n+1}A_4$, (*b*) $3 \cdot {}_{2n+4}A_3 = 2 \cdot {}_{n+4}A_4$

25.51 De quantas maneiras 6 pessoas podem se sentar em um banco?

25.52 Com 4 bandeiras sinalizadoras de cores diferentes, quantos sinais diferentes podem ser feitos apenas colocando-se uma sobre a outra?

25.53 Com 6 bandeiras sinalizadoras de cores diferentes, quantos sinais diferentes podem ser feitos colocando-se três uma sobre a outra?

25.54 De quantas maneiras um clube de 12 membros pode escolher um presidente, um secretário e um tesoureiro?

25.55 Sabendo-se que não temos dois livros iguais, de quantas maneiras podemos organizar 2 livros vermelhos, 3 verdes e 4 azuis em uma estante de modo que todos os livros de mesma cor fiquem juntos?

25.56 Existem 4 ganchos na parede. De quantas maneiras podemos pendurar 3 casacos neles, um em cada gancho?

25.57 Quantos números de 2 dígitos podem ser formados com os dígitos 0, 3, 5, 7 se não é permitida repetição de dígitos?

25.58 Quantos números pares de dois dígitos diferentes podem ser formados com os dígitos 3, 4, 5, 6, 8?

25.59 Quantos números de 3 dígitos podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 se não é permitida repetição de dígitos em número algum?

25.60 Quantos números de 3 dígitos cada podem ser escritos com os dígitos 1, 2, ..., 9 se nenhum dígito pode ser repetido em nenhum número?

25.61 Quantos números de 3 dígitos podem ser formados com os dígitos 3, 4, 5, 6, 7 se os dígitos podem ser repetidos?

25.62 Quantos números ímpares de 3 dígitos podem ser formados sem a repetição de qualquer dígito em um número, com os dígitos (*a*) 1, 2, 3, 4, (*b*) 1, 2, 4, 6, 8?

25.63 Quantos números pares de 4 dígitos diferentes podem ser formados com os dígitos 3, 5, 6, 7, 9?

25.64 Quantos números diferentes de 5 dígitos podem ser formados com os dígitos 2, 3, 5, 7, 9 se nenhum dígito pode ser repetido?

25.65 Quantos inteiros existem entre 100 e 1 000 nos quais nenhum dígito é repetido?

25.66 Quantos inteiros maiores que 300 e menores que 1 000 existem com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 se nenhum dígito é repetido em número algum?

25.67 Quantos números entre 100 e 1 000 podem ser escritos com os dígitos 0, 1, 2, 3, 4 se nenhum dígito é repetido em número algum?

25.68 Quantos números de 4 dígitos, maiores do que 2 000, podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3, 4 se repetições (*a*) não são permitidas, (*b*) são permitidas?

Mathcad **25.69** Quantos dos arranjos das letras da palavra "problemas" começam com vogal e terminam com consoante?

Mathcad **25.70** Em um sistema telefônico, quatro letras distintas P, R, S, T e os dígitos 3, 5, 7, 8 são utilizados. Determine a maior quantidade de números telefônicos que o sistema pode ter se cada "número" consiste de uma letra seguida de um número de quatro dígitos no qual os dígitos podem ser repetidos.

25.71 De quantas maneiras 3 mulheres e 3 homens podem se sentar em fila se nem duas mulheres nem dois homens podem se sentar lado a lado?

25.72 Quantos caracteres de código Morse podem ser feitos utilizando-se três pontos e dois traços em cada caractere?

25.73 Quantos resultados diferentes 3 dados podem apresentar?

25.74 Quantas associações podem ser nomeadas com as 24 letras do alfabeto grego se cada uma deve envolver três letras e nenhuma letra é repetida em outro nome?

25.75 Quantos sinais podem ser feitos com oito bandeiras sinalizadoras se duas são vermelhas, três são brancas e três são azuis, se elas são todas levantadas numa vertical?

25.76 De quantas maneiras 4 homens e 4 mulheres podem se sentar em círculo de modo que dois homens não fiquem lado a lado?

25.77 Quantos arranjos diferentes podem ser feitos com os fatores do termo $a^2b^4c^5$ escritos por extenso?

25.78 De quantas maneiras 9 diferentes prêmios podem ser concedidos a dois estudantes de modo que um receba 3 e o outro receba 6?

25.79 Quantas estações de rádio podem ser nomeadas com 3 letras diferentes do alfabeto? Quantas com 4 letras diferentes do alfabeto nas quais W seja a primeira?

25.80 Determine n em cada caso: (*a*) $4 \cdot {}_nC_2 = {}_{n+2}C_3$, (*b*) ${}_{n+2}C_n = 45$, (*c*) ${}_nC_{12} = {}_nC_8$.

25.81 Se $5 \cdot {}_nP_3 = 24 \cdot {}_nC_4$, encontre n.

25.82 Calcule (*a*) ${}_7C_7$, (*b*) ${}_5C_3$, (*c*) ${}_7C_2$, (*d*) ${}_7C_5$, (*e*) ${}_7C_6$, (*f*) ${}_8C_7$, (*g*) ${}_8C_5$, (*h*) ${}_{100}C_{98}$.

25.83 Quantas retas podem ser determinadas por (*a*) 6, (*b*) n pontos, nenhum trio deles sendo pontos coplanares?

25.84 Quantas cordas podem ser determinadas por sete pontos de um círculo?

25.85 De quantas maneiras uma estudante pode escolher 5 questões de um total de 9?

25.86 Quantas somas diferentes em dinheiro podem ser formadas tomando-se duas das seguintes moedas: um centavo, um níquel, um *dime*, um quarto, um meio-dólar?

25.87 Quantas somas diferentes em dinheiro podem ser formadas tomando-se as moedas do Problema 25.86?

25.88 Uma liga de beisebol é composta de 6 times. Se todos os times devem jogar entre si (*a*) 2 vezes, (*b*) 3 vezes, quantos jogos haverão?

25.89 Quantos comitês diferentes compostos de dois homens e uma mulher podem ser formados com (*a*) 7 homens e 4 mulheres, (*b*) 5 homens e 3 mulheres?

25.90 De quantas maneiras 5 cores podem ser selecionadas entre 8 cores diferentes que incluem vermelho, azul e verde se:

(a) azul e verde devem sempre ser incluídos,

(*b*) vermelho deve sempre ser excluído,

(*c*) vermelho e azul deve sempre ser incluídos e verde excluído?

25.91 De 5 físicos, 4 químicos e 3 matemáticos, um comitê de 6 pessoas deve ser escolhido de modo a incluir 2 físicos, 2 químicos e 1 matemático. De quantas maneiras isto pode ser feito?

25.92 Do Problema 25.91, de quantas maneiras um comitê de 6 pessoas pode ser formado se:

(*a*) 2 membros do comitê são matemáticos,

(*b*) pelo menos três membros do comitê são físicos?

25.93 Quantas palavras de 2 vogais e 3 consoantes podem ser formadas (considerando qualquer conjunto uma palavra) a partir das letras da palavra (*a*) stenographic, (*b*) antecipou?

25.94 De quantas maneiras podemos pintar um quadro se 7 cores diferentes foram disponibilizadas para o uso?

25.95 De quantas maneiras 8 mulheres podem formar um comitê se pelo menos 3 delas devem obrigatoriamente pertencer a este comitê?

25.96 Uma caixa contém 7 cartas vermelhas, 6 brancas e 4 azuis. Quantas seleções de 3 cartas podem ser feitas se (a) todas as cartas devem ser vermelhas, (*b*) nenhuma carta deve ser vermelha?

25.97 Quantos conjuntos de 9 jogadores de beisebol podem ser formados a partir de 13 candidatos se A, B, C, D são os únicos candidatos para duas determinadas posições e não jogam em nenhuma outra posição?

25.98 Quantos comitês diferentes com 3 democratas e 2 republicanos podem ser formados entre 10 democratas e 8 republicanos?

25.99 Em um encontro em que todas as pessoas se cumprimentaram, houve 45 apertos de mãos. Quantas pessoas estavam neste encontro?

25.100 Encontre o número de (*a*) combinações, e (*b*) arranjos de 4 letras cada que pode ser obtido a partir das letras da palavras TENNESSEE.

Respostas aos Problemas Complementares

25.49 3360, 840, 120, 12

25.50 (*a*) 4, (*b*) 6

25.51 720

25.52 12

25.53 120

25.54 1320

25.55 1728

25.56 24

25.57 9

25.58 12

25.59 60

25.60 504

25.61 125

25.62 (*a*) 12, (*b*) 12

25.63 24

25.64 120

25.65 648

25.66 36

25.67 48

25.68 (*a*) 18, (*b*) 192

25.69 90 720

25.70 1024

25.71 72

25.72 10

25.73 216

25.74 12, 144

25.75 560

25.76 144

25.77 1260

25.78 168

25.79 15 600; 13 800

25.80 (*a*) 2, 7, (*b*) 8, (*c*) 20

25.81 8

25.82 (*a*) 1, (*b*) 10, (*c*) 21
(*d*) 21, (*e*) 7, (*f*) 8
(*g*) 56, (*h*) 4950

25.83 (*a*) 15, (*b*) $\dfrac{n(n-1)}{2}$

25.84 21

25.85 126

25.86 10

25.87 31

25.88 (*a*) 30, (*b*) 45

25.89 (*a*) 84, (*b*) 30

25.90 (*a*) 20, (*b*) 21, (*c*) 10

25.91 180

25.92 (*a*) 378, (*b*) 462

25.93 (*a*) 40 320, (*b*) 4800

25.94 127

25.95 219

25.96 (*a*) 35, (*b*) 120

25.97 216

25.98 3360

25.99 10

25.100 (*a*) 17, (*b*) 163

Capítulo 26

O Teorema Binomial

26.1 NOTAÇÃO COMBINATORIAL

A quantidade de combinações de n objetos tomados r a r, ${}_nC_r$, pode ser expressa na forma

$$\binom{n}{r},$$

que é chamada notação combinatorial.

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{r},$$

onde n e r são inteiros e $r \leq n$.

Exemplos 26.1 Calcule as expressões abaixo.

(a) $\binom{7}{3}$ $\quad$ (b) $\binom{8}{7}$ $\quad$ (c) $\binom{9}{9}$ $\quad$ (d) $\binom{5}{0}$

(a) $\binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)!3!} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!3\cdot 2\cdot 1} = 7\cdot 5 = 35$

(b) $\binom{8}{7} = \frac{8!}{(8-7)!7!} = \frac{8!}{1!7!} = \frac{8\cdot 7!}{17!} = 8$

(c) $\binom{9}{9} = \frac{9!}{(9-9)!9!} = \frac{9!}{0!9!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1$

(d) $\binom{5}{0} = \frac{5!}{(5-0)!0!} = \frac{5!}{5!0!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1$

26.2 EXPANSÃO DE $(a + x)^n$

Se n é um inteiro positivo, a expressão $(a + x)^n$ pode ser expandida como mostrado a seguir:

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3$$
$$+ \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}x^{r-1} + \cdots + x^n$$

Essa equação binomial é denominada teorema binomial ou fórmula binomial.

Existem outras formas do teorema binomial, e algumas utilizam combinações para expressar os coeficientes. A relação entre os coeficientes e as combinações está demonstrada abaixo.

$$\frac{5\cdot 4}{2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \binom{5}{2}$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ \cdots\ 2\cdot 1}{(n-3)!3!} = \frac{n!}{(n-3)!3!} = \binom{n}{3}$$

Então,

$$(a+x)^n = a^n + \frac{n!}{(n-1)!1!}a^{n-1}x + \frac{n!}{(n-2)!2!}a^{n-2}x^2 + \cdots$$
$$+ \frac{n!}{(n-[r-1])!(r-1)!}a^{n-r+1}x^{r-1} + \cdots + x^n$$

e

$$(a+x)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}x + \binom{n}{2}a^{n-2}x^2 + \cdots + \binom{n}{r-1}a^{n-r+1}x^{r-1} + \cdots + x^n$$

O r-ésimo termo da expansão de $(a+x)^n$ é

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}x^{r-1}$$

A fórmula do r-ésimo termo para a expansão de $(a+x)^n$ pode ser expressa em termos de combinações.

$$r\text{-ésimo termo} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}x^{r-1}$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)\cdots 2\cdot 1}{(n-r+1)(n-r)\cdots 2\cdot 1(r-1)!}a^{n-r+1}x^{r-1}$$
$$r\text{-ésimo termo} = \frac{n!}{(n-[r-1])!(r-1)!}\ a^{n-r+1}x^{r-1}$$
$$r\text{-ésimo termo} = \binom{n}{r-1}a^{n-r+1}x^{r-1}$$

Problemas Resolvidos

26.1 Calcule as expressões.

(*a*) $\binom{10}{2}$ (*b*) $\binom{10}{8}$ (*c*) $\binom{12}{10}$ (*d*) $\binom{170}{170}$

SOLUÇÃO

(a) $\binom{10}{2} = \dfrac{10!}{(10-2)!2!} = \dfrac{10!}{8!2!} = \dfrac{10\cdot 9\cdot 8!}{8!\cdot 2\cdot 1} = 45$

(b) $\binom{10}{8} = \dfrac{10!}{(10-8)!8!} = \dfrac{10!}{2!8!} = \dfrac{10\cdot 9\cdot 8!}{2\cdot 1\cdot 8!} = 45$

(c) $\binom{12}{10} = \dfrac{12!}{(12-10)!10!} = \dfrac{12!}{2!\cdot 10!} = \dfrac{12\cdot 11\cdot 10!}{2\cdot 1\cdot 10!} = 66$

(d) $\binom{170}{170} = \dfrac{170}{(170-170)!170!} = \dfrac{170!}{0!\cdot 170!} = \dfrac{1}{0!} = \dfrac{1}{1} = 1$

Expanda utilizando a fórmula binomial.

26.2 $(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + \dfrac{3\cdot 2}{1\cdot 2}ax^2 + \dfrac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$

26.3 $(a+x)^4 = a^4 + 4a^3x + \dfrac{4\cdot 3}{1\cdot 2}a^2x^2 + \dfrac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}ax^3 + \dfrac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 = a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4$

26.4 $(a+x)^5 = a^5 + 5a^4x + \dfrac{5\cdot 4}{1\cdot 2}a^3x^2 + \dfrac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}a^2x^3 + \dfrac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}ax^4 + x^5 = a^5 + 5a^4x + 10a^3x^2 + 10a^2x^3 + 5ax^4 + x^5$

Observe que na expansão de $(a+x)^n$:

(1) O expoente de a + o expoente de x é igual a n (ou seja, o grau de cada termo é n).
(2) A quantidade de termos é $n+1$ quando n é um inteiro positivo.
(3) Há *dois* termos médios quando n é um inteiro ímpar e positivo.
(4) Há somente *um* termo médio quando n é um inteiro par e positivo.
(5) Os coeficientes dos termos eqüidistantes dos extremos são os mesmos. É interessante observar que estes coeficientes podem ser organizados como a seguir:

$(a+x)^0$	1
$(a+x)^1$	1 1
$(a+x)^2$	1 2 1
$(a+x)^3$	1 3 3 1
$(a+x)^4$	1 4 6 4 1
$(a+x)^5$	1 5 10 10 5 1
$(a+x)^6$	1 6 15 20 15 6 1
etc.	

Esse arranjo de números é conhecido como o *Triângulo de Pascal*. O primeiro e o último números n de cada fileira são 1, enquanto qualquer outro número do arranjo pode ser obtido pela adição dos dois números à sua esquerda e à sua direita na fileira precedente.

26.5
$$\begin{aligned}(x-y^2)^6 &= x^6 + 6x^5(-y^2) + \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}x^4(-y^2)^2 + \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}x^3(-y^2)^3 + \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^2(-y^2)^4 \\ &\quad + \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x(-y^2)^5 + (-y^2)^6 \\ &= x^6 - 6x^5y^2 + 15x^4y^4 - 20x^3y^6 + 15x^2y^8 - 6xy^{10} + y^{12}\end{aligned}$$

Na expansão de um binômio da forma $(a-b)^n$, onde n é um inteiro positivo, os termos são alternadamente positivos e negativos.

26.6
$$\begin{aligned}(3a^3-2b)^4 &= (3a^3)^4 + 4(3a^3)^3(-2b) + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}(3a^3)^2(-2b)^2 + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}(3a^3)(-2b)^3 + (-2b)^4 \\ &= 81a^{12} - 216a^9b + 216a^6b^2 - 96a^3b^3 + 16b^4\end{aligned}$$

26.7 $(x-1)^7 = x^7 + 7x^6(-1) + \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}x^5(-1)^2 + \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}x^4(-1)^3 + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^3(-1)^4 + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^2(-1)^5$

$+ \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\,x(-1)^6 + (-1)^7$

$= x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1$

26.8 $(1-2x)^5 = 1 + 5(-2x) + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}(-2x)^2 + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}(-2x)^3 + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(-2x)^4 + (-2x)^5$

$= 1 - 10x + 40x^2 - 80x^3 + 80x^4 - 32x^5$

26.9 $\left(\frac{x}{3}+\frac{2}{y}\right)^4 = \left(\frac{x}{3}\right)^4 + 4\left(\frac{x}{3}\right)^3\left(\frac{2}{y}\right) + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\left(\frac{x}{3}\right)^2\left(\frac{2}{y}\right)^2 + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{2}{y}\right)^3 + \left(\frac{2}{y}\right)^4$

$= \frac{x^4}{81} + \frac{8x^3}{27y} + \frac{8x^2}{3y^2} + \frac{32x}{3y^3} + \frac{16}{y^4}$

26.10 $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^6 = (x^{1/2})^6 + 6(x^{1/2})^5(y^{1/2}) + \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}(x^{1/2})^4(y^{1/2})^2 + \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}(x^{1/2})^3(y^{1/2})^3$

$+ \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(x^{1/2})^2(y^{1/2})^4 + \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(x^{1/2})(y^{1/2})^5 + (y^{1/2})^6$

$= x^3 + 6x^{5/2}y^{1/2} + 15x^2y + 20x^{3/2}y^{3/2} + 15xy^2 + 6x^{1/2}y^{5/2} + y^3$

26.11 $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 = (x^{1/2} - x^{-1/2})^4$

$= (x^{1/2})^4 + 4(x^{1/2})^3(-x^{-1/2}) + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}(x^{1/2})^2(-x^{-1/2})^2$

$+ \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}(x^{1/2})(-x^{-1/2})^3 + (-x^{-1/2})^4 = x^2 - 4x + 6 - 4x^{-1} + x^{-2}$

26.12 $(a^{-2}+b^{3/2})^4 = (a^{-2})^4 + 4(a^{-2})^3(b^{3/2}) + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}(a^{-2})^2(b^{3/2})^2 + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}(a^{-2})(b^{3/2})^3 + (b^{3/2})^4$

$= a^{-8} + 4a^{-6}b^{3/2} + 6a^{-4}b^3 + 4a^{-2}b^{9/2} + b^6$

26.13 $(e^x - e^{-x})^7 = (e^x)^7 + 7(e^x)^6(-e^{-x}) + \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}(e^x)^5(-e^{-x})^2 + \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}(e^x)^4(-e^{-x})^3$

$+ \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(e^x)^3(-e^{-x})^4 + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(e^x)^2(-e^{-x})^5$

$+ \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}(e^x)(-e^{-x})^6 + (-e^{-x})^7$

$= e^{7x} - 7e^{5x} + 21e^{3x} - 35e^x + 35e^{-x} - 21e^{-3x} + 7e^{-5x} - e^{-7x}$

26.14 $(a+b-c)^3 = [(a+b)-c]^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2(-c) + \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}(a+b)(-c)^2 + (-c)^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2c - 6abc - 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 - c^3$

26.15 $(x^2+x-3)^3 = [x^2+(x-3)]^3 = (x^2)^3 + 3(x^2)^2(x-3) + \dfrac{3\cdot 2}{1\cdot 2}(x^2)(x-3)^2 + (x-3)^3$

$$= x^6 + (3x^5 - 9x^4) + (3x^4 - 18x^3 + 27x^2) + (x^3 - 9x^2 + 27x - 27)$$
$$= x^6 + 3x^5 - 6x^4 - 17x^3 + 18x^2 + 27x - 27$$

Nos Problemas 26.16 a 26.21, escreva o termo indicado em cada expansão usando a fórmula

$$r\text{-ésimo termo de } (a+x)^n = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}x^{r-1}$$

26.16 Sexto termo de $(x+y)^{15}$.

SOLUÇÃO

$$n=15,\ r=6,\ n-r+2=11,\ r-1=5,\ n-r+1=10$$
$$\text{sexto termo} = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^{10}y^5 = 3003x^{10}y^5$$

26.17 Quinto termo de $(a-\sqrt{b})^9$.

SOLUÇÃO

$$n=9,\ r=5,\ n-r+2=6,\ r-1=4,\ n-r+1=5$$
$$\text{quinto termo} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^5(-\sqrt{b})^4 = 126a^5b^2$$

26.18 Quarto termo de $(x^2-y^2)^{11}$.

SOLUÇÃO

$$n=11,\ r=4,\ n-r+2=9,\ r-1=3,\ n-r+1=8$$
$$\text{quarto termo} = \frac{11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3}(x^2)^8(-y^2)^3 = -165x^{16}y^6$$

26.19 Nono termo de $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}\right)^{12}$.

SOLUÇÃO

$$n=12,\ r=9,\ n-r+2=5,\ r-1=8,\ n-r+1=4$$
$$\text{nono termo} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\left(\frac{x}{2}\right)^4\left(\frac{1}{x}\right)^8 = \frac{495}{16x^4}$$

26.20 Décimo oitavo termo de $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{20}$.

SOLUÇÃO

$$n=20,\ r=18,\ n-r+2=4,\ r-1=17,\ n-r+1=3$$
$$18^{\text{o}}\text{ termo} = \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdots 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots 17}\left(-\frac{1}{x}\right)^{17} = -\frac{20\cdot 19\cdot 18}{1\cdot 2\cdot 3x^{17}} = -\frac{1140}{x^{17}}$$

26.21 Termo médio (quarto) de $(x^{1/3}-\frac{1}{2}x^{-2})^6$.

SOLUÇÃO

$$n=6,\ r=4,\ n-r+2=4,\ r-1=3,\ n-r+1=3$$
$$\text{quarto termo} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}(x^{1/3})^3(-\tfrac{1}{2}x^{-2})^3 = 20(x)(-\tfrac{1}{8}x^{-6}) = -\frac{5}{2x^5}$$