

Introdução à topologia diferencial e algébrica

Vol. II

Topologia algébrica

Fabio Ferrari Ruffino

Sumário

Introdução	5
Capítulo 1. Complementos de topologia geral	7
1.1. Categorias de espaços topológicos	7
1.2. Espaços compactamente gerados e k -espaços	9
1.3. Algumas construções naturais	14
1.4. Colagem	23
Capítulo 2. Homotopia	29
2.1. Homotopia de funções	29
2.2. Equivalência homotópica de espaços	36
2.3. Retratos e retratos por deformação	40
2.4. Equivalência homotópica de morfismos	46
2.5. Homotopia, retrações e k -espaços	52
2.6. Cofibrações	53
2.7. Fibrações	68
Capítulo 3. Variedades, Δ -complexos e CW-Complexos	69
3.1. Variedades topológicas e suaves	69
3.2. Curvas e superfícies	72
3.3. CW-Complexos	82
3.4. Δ -Complexos	94
Capítulo 4. Grupo fundamental e recobrimentos	105
4.1. Definição e propriedades fundamentais	105
4.2. Grupo fundamental do círculo e aplicações	115
4.3. Grupo fundamental do produto de dois espaços	121
4.4. Teorema de Seifert-Van Kampen e aplicações	121
4.5. Recobrimentos	127
4.6. Grupos de homotopia de ordem superior e relativos	145
Capítulo 5. Noções básicas de álgebra homológica	153
5.1. Complexos de (co)cadeias e (co)homologia	153
5.2. Sequências exatas	156
5.3. Categorias abelianas	158
5.4. Morfismo de Bockstein	162
5.5. Homotopia de morfismos de complexos de (co)cadeias	164
5.6. Lema dos cinco	165

Capítulo 6. Homologia	167
6.1. Homologia simplicial	167
6.2. Homologia singular	176
6.3. Propriedades fundamentais	181
6.4. Homologia reduzida	192
6.5. Outras propriedades significativas – Parte I	196
6.6. Aplicações – Parte I	199
6.7. Outras propriedades significativas – Parte II	203
6.8. Aplicações – Parte II	208
6.9. Homologia celular	208
6.10. Homologia com coeficientes	215
Referências Bibliográficas	219

Introdução

A topologia geral consiste no estudo das propriedades de um espaço topológico invariantes por homeomorfismo. Trata-se de um área que qualquer matemático precisa conhecer em detalhe, independentemente da sua especialização. Entretanto, há vários problemas topológicos fundamentais que, apesar de parecerem elementares, não podem ser resolvidos facilmente utilizando somente a linguagem da topologia geral. Por exemplo, fica difícil demonstrar que os espaços euclidianos \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m são homeomorfos se, e somente se, $n = m$. Isso torna necessário enriquecer a topologia geral, acrescentando ferramentas mais flexíveis e eficazes que as tradicionais. A topologia algébrica desempenha este papel, pedindo ajuda à álgebra.

Por exemplo, tentemos demonstrar que não existe um homeomorfismo $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Se por absurdo existisse, tirando um ponto $x \in \mathbb{R}^2$ e a sua imagem $\varphi(x) \in \mathbb{R}^3$, obteríamos por restrição um homeomorfismo $\varphi': \mathbb{R}^2 \setminus \{x\} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{\varphi(x)\}$. Podemos intuir que haja uma obstrução à existência de φ' da seguinte maneira. Suponhamos de considerar um laço (isto é, um caminho fechado) em torno de x em \mathbb{R}^2 . Como tiramos o ponto x , não é possível contrair com continuidade este laço a um ponto, pois qualquer contração deveria passar por x . Pelo contrário, qualquer laço em $\mathbb{R}^3 \setminus \{\varphi(x)\}$ pode ser contraído a um ponto, pois há bastante espaço para construir uma contração que não passe por $\varphi(x)$. Isso já mostra que não pode existir o homeomorfismo φ' , pois, se existisse, dado qualquer laço no domínio, poderíamos contrair a um ponto a sua imagem no contradomínio e aplicar $(\varphi')^{-1}$, obtendo uma contração em $\mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$, que nem sempre existe.

Podemos refinar o argumento precedente da seguinte maneira. Percorrendo um caminho fechado em $\mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$, podemos contar (por enquanto intuitivamente) quantas voltas completas damos em torno de x , estabelecendo que uma volta tem sinal positivo se o sentido dela for anti-horário e negativo em caso contrário. Desta maneira associamos a cada laço γ um número inteiro $n(\gamma)$. Pode-se mostrar que este número caracteriza completamente o laço mesmo a menos de deformações contínuas (mais precisamente, a menos de *homotopia*, como veremos em detalhe). Além disso, dados dois laços γ e η , que partem e chegam no mesmo ponto, podemos definir a composição $\eta * \gamma$, que se obtém percorrendo γ e, a seguir, η . É claro que, desta maneira, damos $n(\gamma)$ voltas em torno de x e, logo depois, outras $n(\eta)$, portanto, em total, damos $n(\gamma) + n(\eta)$ voltas. Isso significa que $n(\eta * \gamma) = n(\eta) + n(\gamma)$, portanto acabamos de associar ao espaço $\mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$ o grupo $(\mathbb{Z}, +)$, que caracteriza os laços e a relativa composição a menos de deformações contínuas. A mesma operação no espaço $\mathbb{R}^3 \setminus \{\varphi(x)\}$ leva ao grupo trivial 0, pois qualquer laço, sendo deformável a um ponto, percorre 0 voltas em torno de $\varphi(x)$. Isso mostra que, aplicando a

mesma construção a $\mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$ e a $\mathbb{R}^3 \setminus \{\varphi(x)\}$, obtemos o grupo \mathbb{Z} no primeiro caso e o grupo 0 no segundo. Este resultado implica que os dois espaços não são homeomorfos, pois, em caso contrário, deveríamos encontrar grupos isomorfos. De fato, um homeomorfismo entre os dois espaços induziria uma bijeção entre os laços correspondentes, que “respeita” a composição, induzindo um isomorfismo entre os grupos que acabamos de construir. Formalizando este raciocínio, podemos concluir que \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 não são homeomorfos, dado que, como já vimos, se o fossem existiria também um homeomorfismo entre $\mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$ e $\mathbb{R}^3 \setminus \{\varphi(x)\}$.

O exemplo precedente, embora tenha ainda que ser completado com todos os detalhes técnicos necessários, mostra que um problema não simples de topologia geral, isto é, a não existência de um homeomorfismo entre \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , pode ser resolvido associando de modo natural um grupo ao espaço $\mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$ e um grupo ao espaço $\mathbb{R}^3 \setminus \{\varphi(x)\}$, verificando que não são isomorfos. É claro que a não existência de um isomorfismo de grupos entre \mathbb{Z} e 0 é uma questão bem mais simples que o problema do qual partimos, portanto um resultado algébrico trivial nos permitiu resolver um problema topológico bastante sério.

Toda a matéria deste volume seguirá este padrão, obviamente de modo mais rigoroso e levando a construções mais avançadas. Usando a linguagem das categorias, podemos afirmar que estamos procurando funtores interessantes de certas categorias, diretamente relacionadas à noção de espaço topológico, a outras, cujos objetos são estruturas algébricas adequadas. Graças a estes funtores traduziremos a topologia na álgebra, esperando que a tradução do problema originário seja mais simples. Em princípio nada exclui que ocorra o contrário, ou seja, que se possa resolver um problema algébrico traduzindo-o na linguagem da topologia; todavia, na prática isso acontece muito menos frequentemente, portanto podemos afirmar que para nós a álgebra será o meio e a topologia será o fim.

Este volume será organizado da seguinte maneira. No capítulo 1 completaremos o primeiro capítulo do volume 0, introduzindo várias noções de topologia geral, que serão essenciais em seguida. No capítulo 2 introduziremos a teoria da homotopia, que constituirá o ambiente natural para a topologia algébrica toda (ou quase). . . .

CAPÍTULO 1

Complementos de topologia geral

Neste capítulo introduziremos algumas noções complementares de topologia geral, usando a linguagem das categorias e dos funtores, e algumas construções naturais entre espaços topológicos, que serão usadas frequentemente nos próximos capítulos.

1.1. Categorias de espaços topológicos

No exemplo 0–2.1.10 definimos a categoria dos espaços topológicos, que é o ambiente natural da topologia geral. Esta categoria pode ser enriquecida de várias maneiras, como mostram as seguintes definições.

Categoria Top . Os objetos são os espaços topológicos e os morfismos são as funções contínuas (v. exemplo 0–2.1.10).

Categoria Top_+ . Um objeto é um par (X, x_0) , sendo X um espaço topológico e $x_0 \in X$. Um par deste tipo é dito *espaço topológico com ponto marcado*. Um morfismo $f: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ é uma função contínua $f: Y \rightarrow X$ tal que $f(y_0) = x_0$.

Categoria Top_n . Um objeto é uma n -upla de espaços topológicos (X, A_1, \dots, A_{n-1}) , tal que $A_{n-1} \subset \dots \subset A_1 \subset X$. Um morfismo $f: (Y, B_1, \dots, B_{n-1}) \rightarrow (X, A_1, \dots, A_{n-1})$ é uma função contínua $f: Y \rightarrow X$ tal que $f(B_i) \subset A_i$ para todo i entre 1 e $n - 1$.

Categoria Top_{n+} . Um objeto é uma n -upla de espaços topológicos com ponto marcado $(X, A_1, \dots, A_{n-1}, x_0)$, sendo $x_0 \in A_{n-1} \subset \dots \subset A_1 \subset X$. Um morfismo $f: (Y, B_1, \dots, B_{n-1}, y_0) \rightarrow (X, A_1, \dots, A_{n-1}, x_0)$ é uma função contínua $f: Y \rightarrow X$ tal que $f(B_i) \subset A_i$ para todo i e $f(y_0) = x_0$.

1.1.1. Mergulhos. Ficam definidos os mergulhos cheios

$$(1) \quad \text{Top} \hookrightarrow \text{Top}_+ \hookrightarrow \text{Top}_2 \hookrightarrow \text{Top}_{2+} \hookrightarrow \dots$$

da seguinte maneira.

Mergulhos $\text{Top}_{n+} \hookrightarrow \text{Top}_{n+1}$. Para definir a ação entre os objetos, consideramos o ponto marcado como um subespaço, ou seja:

$$(X, A_1, \dots, A_{n-1}, x_0) \mapsto (X, A_1, \dots, A_{n-1}, \{x_0\}).$$

A ação sobre os morfismos é a identidade.

Mergulhos $\text{Top}_n \hookrightarrow \text{Top}_{n+}$. Dado um espaço topológico X , definimos $X_+ := X \sqcup \{\infty\}$, sendo ∞ um ponto acrescentado como componente conexa separada, aberta e fechada em X . Definimos a ação entre os objetos da seguinte maneira:

$$(X, A_1, \dots, A_{n-1}) \mapsto (X_+, (A_1)_+, \dots, (A_{n-1})_+, \infty).$$

Dado um morfismo $f: (Y, B_1, \dots, B_{n-1}) \rightarrow (X, A_1, \dots, A_{n-1})$, a imagem dele é o mesmo morfismo f , estendido de modo que $f(\infty) = \infty$.¹

Compondo os dois precedentes, fica definido também o mergulho $\text{Top}_n \hookrightarrow \text{Top}_{n+1}$. Há vários outros mergulhos naturais. Por exemplo, podemos considerar os seguintes:

- (2) $\text{Top}_n \hookrightarrow \text{Top}_{n+1}, \quad (X, A_1, \dots, A_{n-1}) \mapsto (X, A_1, \dots, A_{n-1}, \emptyset),$
(3) $\text{Top}_{n+} \hookrightarrow \text{Top}_{(n+1)+}, \quad (X, A_1, \dots, A_{n-1}, x_0) \mapsto (X, A_1, \dots, A_{n-1}, \{x_0\}, x_0),$

que atuam como a identidade sobre os morfismos. Outra possibilidade é a seguinte:

- (4) $\text{Top}_n \hookrightarrow \text{Top}_{n+1}, \quad (X, A_1, \dots, A_{n-1}) \mapsto (X, X, A_1, \dots, A_{n-1}),$
(5) $\text{Top}_{n+} \hookrightarrow \text{Top}_{(n+1)+}, \quad (X, A_1, \dots, A_{n-1}, x_0) \mapsto (X, X, A_1, \dots, A_{n-1}, x_0),$

com todas as variantes possíveis. Existem também funtores (não mergulhos):

- (6) $\text{Top}_{n+1} \rightarrow \text{Top}_n, \quad (X, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n) \mapsto (X, A_1, \dots, A_{n-1}),$
(7) $\text{Top}_{(n+1)+} \rightarrow \text{Top}_{n+}, \quad (X, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n, x_0) \mapsto (X, A_1, \dots, A_{n-1}, x_0),$

que atuam esquecendo o subespaço menor (poderíamos também esquecer outro subespaço ou mais de um). Estes funtores são inversos à esquerda de (2) e (3). Enfim, existe um functor

- (8) $\text{Top}_{n+} \rightarrow \text{Top}_n \quad (X, A_1, \dots, A_{n-1}, x_0) \mapsto (X, A_1, \dots, A_{n-1}),$

que esquece o ponto marcado, o qual não é inverso nem à esquerda nem à direita do mergulho $\text{Top}_n \hookrightarrow \text{Top}_{n+}$ que aparece em (1) (v. exercício 1.1 da seção 1.5).

OBSERVAÇÃO 1.1.1. Para nós os casos mais significativos serão Top , Top_+ e Top_2 . Às vezes precisaremos de Top_{2+} e Top_3 , mas raramente. Usaremos também várias outras categorias de espaços topológicos, definidas a partir da noção de homotopia, que introduziremos mais adiante. \diamond

Fica definido também o mergulho

- (9) $\iota: \text{Top}_2 \hookrightarrow \text{Hom}(\text{Top})$

que manda o objeto (X, A) no objeto $i: A \hookrightarrow X$, sendo i a inclusão, e o morfismo $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ no morfismo $(f, f|_A)$. Trata-se de um mergulho cheio, pois, se $i: A \hookrightarrow X$ e $j: B \hookrightarrow Y$ forem inclusões, então, dado um morfismo $(f, g): i \rightarrow j$, temos que $g(a) = g \circ i(a) = j \circ f(a) = f(a)$ para todo $a \in A$, logo $g = f|_A$. Mais em geral, temos o mergulho cheio:

$$\iota: \text{Top}_n \hookrightarrow \text{Hom}_n(\text{Top})$$

¹Destacamos que estamos considerando X_+ , não a compactificação a um ponto X^+ , mesmo para X não compacto. Isso é necessário pois, considerando por exemplo a homologia singular, temos que $H_n(X) \simeq \tilde{H}_n(X_+, \infty)$, portanto o mergulho $\text{Top} \hookrightarrow \text{Top}_+$ “respeita” a homologia (e a cohomologia). Isso não aconteceria em geral com X^+ . Por exemplo, $H_1(\mathbb{R}) \simeq \tilde{H}_1(\mathbb{R}_+, \infty) = 0$, enquanto $\tilde{H}_1(\mathbb{R}^+, \infty) \simeq \tilde{H}_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$. Observamos também que, para que $\text{Top}_{n+} \hookrightarrow \text{Top}_{n+1}$ seja realmente um mergulho, devemos fixar o ponto ∞ e usar sempre o mesmo; por exemplo, podemos escolher $\{\infty\} = \{0\}$. Desta maneira, toda vez que um espaço contém $\{0\}$ como componente conexa aberta e como ponto marcado, pertence à imagem do mergulho.

que manda o objeto (X, A_1, \dots, A_{n-1}) na sequência de inclusões $A_{n-1} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow A_1 \hookrightarrow X$ e o morfismo $f: (X, A_1, \dots, A_{n-1}) \rightarrow (Y, B_1, \dots, B_{n-1})$ no morfismo $(f, f|_{A_1}, \dots, f|_{A_{n-1}})$. Nos próximos capítulos só precisaremos do mergulho (9).

1.1.2. Produto e coproduto. Vamos agora considerar o produto e o coproduto (fibrados) nas categorias introduzidas.

Categoria Top. O leitor pode verificar que o produto coincide com o produto cartesiano e as projeções naturais, enquanto o coproduto coincide com a união disjunta e as inclusões naturais, sendo a união disjunta $\bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}$ o espaço topológico em que cada X_{α} é uma componente conexa distinta, aberta e fechada. Dados dois morfismos $f: X \rightarrow Z$ e $g: Y \rightarrow Z$, o produto fibrado $X \times_Z Y$ é o subespaço topológico de $X \times Y$, formado pelos pares (x, y) tais que $f(x) = g(y)$. Dados dois morfismos $f: Z \rightarrow X$ e $g: Z \rightarrow Y$, o coproduto fibrado $X \amalg_Z Y$ é o quociente topológico de $X \sqcup Y$ pela relação ‘ \sim ’, sendo $f(z) \sim g(z)$ para todo $z \in Z$. A construção é análoga para famílias de mais de dois elementos.

Categoria Top_n. O produto $(X, A_1, \dots, A_{n-1}) \times (Y, B_1, \dots, B_{n-1})$ coincide com o produto cartesiano componente por componente $(X \times Y, A_1 \times B_1, \dots, A_{n-1} \times B_{n-1})$ e as projeções naturais, enquanto o coproduto $(X, A_1, \dots, A_{n-1}) \sqcup (Y, B_1, \dots, B_{n-1})$ coincide com a união disjunta componente por componente $(X \sqcup Y, A_1 \sqcup B_1, \dots, A_{n-1} \sqcup B_{n-1})$ e as inclusões naturais. O produto fibrado $(X, A_1, \dots, A_{n-1}) \times_{(Z, C_1, \dots, C_{n-1})} (Y, B_1, \dots, B_{n-1})$ coincide com o produto fibrado componente por componente $(X \times_Z Y, A_1 \times_{C_1} B_1, \dots, A_{n-1} \times_{C_{n-1}} B_{n-1})$ e as projeções naturais, enquanto o coproduto fibrado $(X, A_1, \dots, A_{n-1}) \amalg_{(Z, C_1, \dots, C_{n-1})} (Y, B_1, \dots, B_{n-1})$ coincide com o coproduto fibrado componente por componente $(X \amalg_Z Y, A_1 \amalg_{C_1} B_1, \dots, A_{n-1} \amalg_{C_{n-1}} B_{n-1})$ e as inclusões naturais. A construção é análoga para famílias de mais de dois elementos.

Categoria Top₊. O produto $(X, x_0) \times (Y, y_0)$ coincide com o produto cartesiano $(X \times Y, (x_0, y_0))$ e as projeções naturais. Dados dois morfismos $f: (X, x_0) \rightarrow (Z, z_0)$ e $g: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$, o produto fibrado $(X, x_0) \times_{(Z, z_0)} (Y, y_0)$ é dado por $(X \times_Z Y, (x_0, y_0))$. Dados dois morfismos $f: (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ e $g: (Z, z_0) \rightarrow (Y, y_0)$, o coproduto fibrado $(X, x_0) \amalg_{(Z, z_0)} (Y, y_0)$ é dado por $(X \amalg_Z Y, [f(z_0)])$, sendo $[f(z_0)] = [g(z_0)]$. O coproduto $(X, x_0) \amalg_{(Z, z_0)} (Y, y_0)$ coincide com o coproduto fibrado em relação aos morfismos $f: \{*\} \rightarrow X$ e $g: \{*\} \rightarrow Y$ definidos respetivamente por $* \mapsto x_0$ e $* \mapsto y_0$. Esse espaço é a *união a um ponto*, que discutiremos explicitamente na próxima seção.² A construção é análoga para famílias de mais de dois elementos.

Categoria Top_{n+}. O leitor pode caracterizar facilmente o produto e o coproduto (fibrado) a partir dos nas categorias Top_n e Top₊.

Deixamos como exercício a caracterização do produto e do coproduto (fibrado) na categoria Hom(Top) e nas análogas (v. exercício 1.2 da seção 1.5).

1.2. Espaços compactamente gerados e k-espaços

Já vimos na seção 0–1.4 que, considerando espaços topológicos genéricos, o comportamento da topologia compacto-aberto não é natural a respeito da composição,

²Observamos que também o produto coincide com o produto fibrado em relação aos únicos morfismos possíveis $f: X \rightarrow \{*\}$ e $g: Y \rightarrow \{*\}$.

do produto cartesiano e da avaliação. Vamos introduzir uma categoria adequada de espaços topológicos, suficientemente ampla para incluir todos os espaços interessantes em topologia algébrica (e diferencial), mas suficientemente reduzida para que a topologia compacto-aberto se comporte de modo natural, sem hipóteses adicionais.

1.2.1. k -Espaços de Hausdorff. Começamos considerando espaços de Hausdorff; mostraremos a seguir uma generalização adequada.

NOTAÇÃO 1.2.1. Sejam (X, \mathcal{T}) um espaço de Hausdorff e \mathcal{K} a família dos subespaços compactos de X . Denotamos por \mathcal{T}_k a topologia fraca de X induzida por \mathcal{K} . Quando subentendemos \mathcal{T} , denotamos por X_k o espaço topológico (X, \mathcal{T}_k) . \diamond

Por definição de topologia fraca, um subconjunto $A \subset X$ é aberto (fechado) em X_k se, e somente se, para todo subespaço compacto $K \subset X$, a interseção $A \cap K$ é aberta (fechada) em K . Ademais, observamos que, sendo (X, \mathcal{T}) de Hausdorff, \mathcal{K} é uma cobertura fechada de X , portanto valem as hipóteses do lema 0–1.1.52. Logo, se $K \subset X$ for compacto a respeito de \mathcal{T} (isto é, se for um elemento da família \mathcal{Y} no enunciado do lema), então K é fechado também a respeito de \mathcal{T}_k e as restrições de \mathcal{T} e de \mathcal{T}_k a K coincidem.

LEMA 1.2.2. *Para todo espaço topológico X , temos que $X_{kk} = X_k$.*

LEMA 1.2.3. *Seja $f: X \rightarrow Y$ uma função (não necessariamente contínua) entre espaços topológicos de Hausdorff.*

- *A função $f: X_k \rightarrow Y$ é contínua se, e somente se, para todo $K \subset X$ compacto, a restrição $f|_K: K \rightarrow Y$ é contínua.*
- *A função $f: X_k \rightarrow Y_k$ é contínua se, e somente se, $f: X_k \rightarrow Y$ é contínua.*

COROLÁRIO 1.2.4. *Se $f: X \rightarrow Y$ é contínua, então $f: X_k \rightarrow Y_k$ é contínua.*

O corolário precedente implica que, passando de X e Y a X_k e Y_k , em geral acrescentamos funções contínuas, pois é suficiente que uma função seja contínua quando for restrita a um compacto de X , sem sê-lo necessariamente em X todo.

DEFINIÇÃO 1.2.5. Um espaço topológico de Hausdorff X é dito *k -espaço* ou *espaço compactamente gerado* se $X = X_k$. \diamond

LEMA 1.2.6. *Seja X um espaço de Hausdorff.*

- *Se X for localmente compacto ou satisfizer o primeiro axioma de enumerabilidade (em particular, se for um espaço métrico ou um espaço de base enumerável), então X é compactamente gerado.*
- *Se $F \subset X$ é fechado e X é compactamente gerado, então F é compactamente gerado.*
- *Se $A \subset X$ é um aberto regular (ou seja, para todo $x \in A$ existe uma vizinhança U de x cujo fecho \bar{U} em X está contido em A) e X é compactamente gerado, então A é compactamente gerado.*
- *Se X for compactamente gerado e \sim for uma relação de equivalência em X , tal que X/\sim é de Hausdorff, então X/\sim é compactamente gerado.*

De fato todos os espaços com que trabalhamos concretamente são compactamente gerados; um exemplo de espaço de Hausdorff não compactamente gerado é o produto cartesiano de uma quantidade não enumerável de cópias de \mathbb{R} ou de $(0, 1)$. Denotamos por TopHd e TopHd^k as sub-categorias cheias de Top , cujos objetos são respetivamente os espaços de Hausdorff e os espaços de Hausdorff compactamente gerados. Se X for de Hausdorff, então X_k é também de Hausdorff, portanto, por causa do corolário 1.2.4, fica definido o functor:

$$(10) \quad \begin{aligned} \mathcal{K}: \text{TopHd} &\rightarrow \text{TopHd}^k \\ X &\mapsto X_k \quad (f: X \rightarrow Y) \mapsto (f: X_k \rightarrow Y_k). \end{aligned}$$

Esse functor é sobrejetor entre os objetos e injetor entre os morfismos. Ademais, \mathcal{K} é inverso à esquerda e adjunto à direita do mergulho $\text{TopHd}^k \subset \text{TopHd}$. Enfim, pode-se mostrar que a identidade $\text{id}: X_k \rightarrow X$, que é uma função contínua pelo lema 1.2.3, induz um isomorfismo entre os grupos de homotopia e de (co)homologia, portanto, a respeito das ferramentas fundamentais da topologia algébrica, os espaços X e X_k são indistinguíveis.

O produto cartesiano de dois espaços de Hausdorff compactamente gerados pode não ser compactamente gerado. Mostraremos exemplos quando introduziremos os CW-complexos. Todavia, a categoria TopHd^k admite um produto, definido da seguinte maneira:

$$(11) \quad X \times_k Y := (X \times Y)_k$$

com as projeções naturais. A definição (11) faz sentido para X e Y espaços de Hausdorff genéricos, mesmo se não compactamente gerados; nesse caso $(X \times Y)_k$ coincide com $(X_k \times Y_k)_k$. Vamos fazer um comentário a respeito do fato que (11) é um produto na categoria TopHd^k . Usando a notação da definição 2.4.1, dados dois espaços de Hausdorff compactamente gerados X e Y e dois morfismos $f: Z \rightarrow X$ e $g: Z \rightarrow Y$, sendo Z um espaço genérico, existe único um morfismo $f \times g: Z \rightarrow X \times Y$, que torna o diagrama comutativo, mesmo sem aplicar o functor \mathcal{K} a $X \times Y$. Todavia, $X \times Y$ pode não ser compactamente gerado. Considerando o produto $X \times_k Y$, existe único o morfismo $f \times g: Z \rightarrow X \times_k Y$ só se Z é compactamente gerado, portanto trata-se de um produto na categoria TopHd^k . Por isso o produto em TopHd^k é diferente do em TopHd , mesmo sendo $\text{TopHd}^k \subset \text{TopHd}$.

LEMA 1.2.7. *Se X for de Hausdorff compactamente gerado e Y localmente compacto, então $X \times Y$ é (de Hausdorff) compactamente gerado, portanto $X \times_k Y = X \times Y$.*

O comportamento inatural das projeções a respeito do produto cartesiano, descrito nos comentários antes dos lemas 0–1.1.40 e 0–1.1.41, não pode ocorrer entre espaços compactamente gerados, como mostra o seguinte lema.

LEMA 1.2.8. *Sejam $f: X \rightarrow Y$ e $g: Z \rightarrow W$ duas projeções na categoria TopHd^k . O produto $f \times_k g: X \times_k Z \rightarrow Y \times_k W$ é uma projeção.*

COROLÁRIO 1.2.9. *Sejam $\pi: X \rightarrow X^*$ uma projeção na categoria TopHd^k e Y um espaço de Hausdorff compactamente gerado. Então $\pi \times \text{id}: X \times_k Y \rightarrow X^* \times_k Y$ é uma projeção.*

Se X for compactamente gerado, um subespaço $Y \subset X$ pode não ser compactamente gerado, mas podemos considerar o espaço Y_k . Em geral, se X e Y forem de Hausdorff compactamente gerados, uma função $i: Y \hookrightarrow X$ é um mergulho na categoria TopHd^k se, e somente se, $\bar{i}: Y \rightarrow i(Y)_k$ é um homeomorfismo. Por isso, dado qualquer subespaço $Y \subset X$, sendo X compactamente gerado, a função $i: Y_k \hookrightarrow X$ é um mergulho. A categoria TopHd_n^k fica definida considerando como objetos as seqüências $A_{n-1} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow A_1 \hookrightarrow X$, sendo cada morfismo da seqüência um mergulho em TopHd^k . Dessa maneira ficam definidas as categorias:

$$(12) \quad \text{TopHd}^k \hookrightarrow \text{TopHd}_+^k \hookrightarrow \text{TopHd}_2^k \hookrightarrow \text{TopHd}_{2+}^k \hookrightarrow \dots$$

Enfim, pode-se mostrar que, se $i: Y \rightarrow X$ e $j: W \rightarrow Z$ forem mergulhos em TopHd^k , então $i \times_k j: Y \times_k W \rightarrow X \times_k Z$ é também um mergulho. Isso vale também na categoria Top .

Se X e Y são de Hausdorff compactamente gerados, o espaço $C(X, Y)$, com a topologia compacto-aberto, pode não ser compactamente gerado. Por isso, introduzimos o seguinte espaço:

$$(13) \quad k(X, Y) := (C(X_k, Y_k))_k.$$

É claro que, se X e Y forem compactamente gerados, $k(X, Y) = (C(X, Y))_k$. O seguinte lema mostra que, na categoria TopHd^k , a topologia compacto-aberto, adequadamente modificada conforme a definição (13), se comporta de modo natural.

LEMA 1.2.10. *Sejam X, Y e Z espaços de Hausdorff. Temos que:*

- a função $\circ: k(X, Y) \times_k k(Y, Z) \rightarrow k(X, Z)$, $(f, g) \mapsto g \circ f$, é bem definida e contínua;
- a função $k(X, k(Y, Z)) \rightarrow k(X \times_k Y, Z)$, $f \mapsto ((x, y) \mapsto f(x)(y))$ é bem definida e é um homeomorfismo;
- a função $k(X, Y) \times_k X \rightarrow Y$, $(f, x) \mapsto f(x)$, é contínua.

1.2.2. k -Espaços. Embora quase todos os espaços que consideraremos sejam de Hausdorff, pode ser útil generalizar de modo adequado a noção de espaço compactamente gerado. De fato, por exemplo, o quociente de um espaço de Hausdorff por uma relação de equivalência pode não ser de Hausdorff (e.g. colapsando a um ponto um subconjunto não fechado). Para um espaço não de Hausdorff não é natural considerar a topologia fraca determinada pela família dos subespaços compactos, pois um subespaço compacto tem que ser de Hausdorff por definição e isso torna a família dos subespaços compactos insuficiente em geral. Por isso, introduzimos a seguinte topologia.

NOTAÇÃO 1.2.11. Seja (X, \mathcal{T}) um espaço topológico. Denotamos por \mathcal{T}_k a seguinte topologia: um subconjunto $A \subset X$ é aberto se, e somente se, para todo espaço compacto K e toda função contínua $f: K \rightarrow X$, a imagem inversa $f^{-1}(A)$

é aberta em K . Quando subentendemos \mathcal{T} , denotamos por X_k o espaço topológico (X, \mathcal{T}_k) . \diamond

LEMA 1.2.12. *Seja $f: X \rightarrow Y$ uma função (não necessariamente contínua) entre espaços topológicos.*

- *A função $f: X_k \rightarrow Y$ é contínua se, e somente se, para todo espaço compacto K e toda função contínua $g: K \rightarrow X$, a composição $f \circ g: K \rightarrow Y$ é contínua.*
- *A função $f: X_k \rightarrow Y_k$ é contínua se, e somente se, $f: X_k \rightarrow Y$ é contínua.*

COROLÁRIO 1.2.13. *Se $f: X \rightarrow Y$ é contínua, então $f: X_k \rightarrow Y_k$ é contínua.*

DEFINIÇÃO 1.2.14. Um espaço topológico X é dito *k-espaço* se $X = X_k$. \diamond

É fácil provar que, se X for de Hausdorff, essa definição coincide com a 1.2.5 (v. exercício 1.3 da seção 1.5), portanto um espaço compactamente gerado é um k -espaço de Hausdorff. Denotamos por Top^k a sub-categoria cheia de Top , cujos objetos são os k -espaços. Podemos estender o functor (10) ao seguinte:

$$(14) \quad \begin{aligned} \mathcal{K}: \text{Top} &\rightarrow \text{Top}^k \\ X &\mapsto X_k \quad (f: X \rightarrow Y) \mapsto (f: X_k \rightarrow Y_k). \end{aligned}$$

A definição (11) vale também em Top^k e define o produto cartesiano nessa categoria. Consideremos agora dois k -espaços X e Y . Consideramos a seguinte topologia no conjunto $C(X, Y)$, que coincide com a topologia compacto-aberto se X e Y forem de Hausdorff.

DEFINIÇÃO 1.2.15. Sejam X e Y espaços topológicos e $C(X, Y)$ o conjunto das funções contínuas de X a Y . A família

$$\{U_{g,A} := \{f \in C(X, Y) : f(g(K)) \subset A\} : \\ K \text{ compacto, } g: K \rightarrow X \text{ contínua, } A \subset Y \text{ aberto}\}$$

é uma pre-base de uma topologia no conjunto $C(X, Y)$, que chamamos de *topologia test-aberto*. \diamond

O nome dessa topologia é devido ao fato que chamamos de *função test* uma função contínua $g: K \rightarrow Y$ tal que K é compacto. Com essa topologia podemos aplicar a definição (13). O lema 1.2.10 vale com o mesmo enunciado, sem supor que os espaços sejam de Hausdorff. Também o lema 1.2.6 vale tirando as hipóteses relativas à condição de Hausdorff; em particular, *um quociente de um k -espaço por uma relação de equivalência é um k -espaço*.

1.2.3. Espaços compactamente gerados. Vimos que, quando X for de Hausdorff, podemos definir os k -espaços só considerando os subespaços compactos de X , ao invés das funções $g: K \rightarrow X$ com K compacto. Analogamente, a topologia test-aberto coincide com a compacto-aberto. Pode-se provar facilmente que isso é devido ao fato que, dada uma função test $g: K \rightarrow X$, a imagem $g(K)$ é fechada (por ser compacta) em X (v. exercício 1.3 da seção 1.5). Essa condição é mais fraca que a de Hausdorff e às vezes é mais fácil verificá-la, portanto damos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 1.2.16. Um espaço topológico X é dito *fracamente de Hausdorff* se, para todo espaço compacto K e toda função contínua $f: K \rightarrow X$, a imagem $f(K)$ é fechada em X . \diamond

Em particular, em um espaço fracamente de Hausdorff todo ponto é fechado. Um exemplo de espaço fracamente de Hausdorff mas não de Hausdorff é dado por um conjunto não enumerável X com a topologia cujos fechados são os subconjuntos enumeráveis e X (v. exercício 1.4 da seção 1.5).

DEFINIÇÃO 1.2.17. Um k -espaço fracamente de Hausdorff é dito *espaço compactamente gerado*. \diamond

O seguinte lema mostra que a condição fraca de Hausdorff para k -espaços substitui naturalmente a condição de Hausdorff para espaços genéricos.

LEMA 1.2.18. *Um k -espaço X é fracamente de Hausdorff (portanto compactamente gerado) se, e somente se, a diagonal $\Delta \subset X \times_k X$ é fechada.*

O lema precedente implica que, toda vez que $X \times_k X = X \times X$, se o espaço X for fracamente de Hausdorff então é de Hausdorff. Em particular, isso vale para X localmente compacto. Para espaços fracamente de Hausdorff podemos usar as mesmas definições que usamos para os espaços de Hausdorff, substituindo as funções test com os subespaços compactos. Ficam definidas as sub-categorias cheias de Top, denotadas por TopW e TopW^k, cujos objetos são respetivamente os espaços fracamente de Hausdorff e os espaços compactamente gerados. O functor (14) se restringe a um functor $\mathcal{K}: \text{TopW} \rightarrow \text{TopW}^k$. Ademais, como o produto cartesiano de dois espaços fracamente de Hausdorff é fracamente de Hausdorff, da mesma maneira o produto (11) de dois espaços compactamente gerados é compactamente gerado. Analogamente, o espaço (13) é compactamente gerado se X e Y o forem. Afinal, temos os seguintes mergulhos de sub-categorias cheias de Top, todas com produto cartesiano e uma topologia natural no espaço das funções contínuas:

$$\text{TopHd}^k \subset \text{TopW}^k \subset \text{Top}^k.$$

Ficam definidas as categorias análogas às (12) para k -espaços e para espaços compactamente gerados. Às vezes chamaremos de *k-par* um objeto (X, A) de Top₂^k.

1.3. Algumas construções naturais

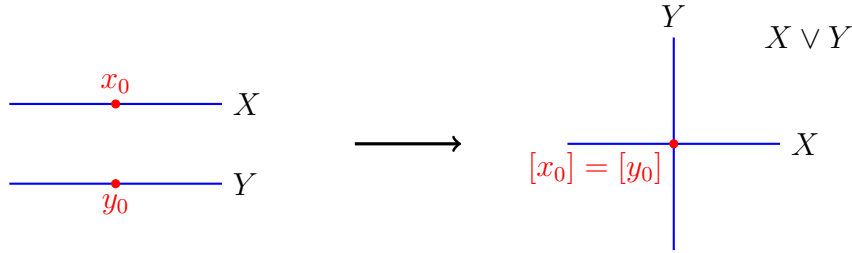
Vamos apresentar algumas construções topológicas naturais, que serão usadas frequentemente nos próximos capítulos.

1.3.1. União a um ponto e produto smashed.

DEFINIÇÃO 1.3.1. Dados dois espaços com ponto marcado (X, x_0) e (Y, y_0) , definimos a *união a um ponto*:

$$(15) \quad X \vee Y := (X \sqcup Y) / \{x_0, y_0\} \approx (X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y). \quad \diamond$$

Na primeira definição, o ponto em que colapsam x_0 e y_0 é o ponto marcado natural de $X \vee Y$. Na segunda definição, como a união *não* é disjunta, só há uma cópia de (x_0, y_0) em $X \vee Y$, a qual é o ponto marcado natural. É claro que as duas definições coincidem a menos do homeomorfismo canônico $[x] \mapsto (x, y_0)$ e $[y] \mapsto (x_0, y)$.



DEFINIÇÃO 1.3.2. Dados dois espaços com ponto marcado (X, x_0) e (Y, y_0) , definimos o *smashed product*:³

$$(16) \quad X \wedge Y := (X \times Y)/(X \vee Y).$$



Na categoria Top^k definimos:

$$(17) \quad X \wedge_k Y := (X \times_k Y)/(X \vee Y). \quad \diamond$$

Nas fórmulas (16) e (17) estamos considerando a segunda definição em (15), de modo que $X \vee Y \subset X \times Y$ (portanto $X \vee Y \subset X \times_k Y$, dado que os dois produtos coincidem como conjuntos). O ponto em que colapsa $X \vee Y$ é o ponto marcado natural de $X \wedge Y$ e $X \wedge_k Y$.

OBSERVAÇÃO 1.3.3. O espaço $X \wedge_k Y$, sendo o quociente de um k -espaço, é um k -espaço. \diamond

NOTAÇÃO 1.3.4. Dados $x \in X$ e $y \in Y$, denotamos por $x \wedge y$ o ponto $[(x, y)] \in X \wedge Y$ ou $[(x, y)] \in X \wedge_k Y$ e por $x \vee y$ o ponto $[(x, y)] \in X \vee Y$. \diamond

A união a um ponto é o coproduto nas categorias Top_+ e Top_+^k . Em Top_{n+} e Top_{n+}^k , o coproduto $(X, A_1, \dots, A_{n-1}, x_0) \sqcup (Y, B_1, \dots, B_{n-1}, y_0)$ coincide com a união a um ponto componente por componente $(X \vee Y, A_1 \vee B_1, \dots, A_{n-1} \vee B_{n-1}, *)$, sendo $*$ = $[x_0] = [y_0]$, e as inclusões naturais. A respeito do produto *smashed*, observamos que, na categoria Top_+^k , se trata da noção análoga à de produto tensor entre espaços vetoriais. Vamos dar uma ideia do assunto; o leitor pode encontrar os

³A palavra inglesa “smashed” significa “esmagado”.

detalhes no apêndice 0–A.3. Sejam V , W e Z espaços vetoriais sobre um corpo \mathbb{K} . Temos o seguinte isomorfismo canônico:

$$(18) \quad \begin{aligned} \text{Hom}(V, \text{Hom}(W, Z)) &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}(V \otimes W, Z) \\ f &\mapsto ((v \otimes w) \mapsto f(v)(w)). \end{aligned}$$

Em (18) usamos o fato que o conjunto dos morfismos entre dois espaços vetoriais tem uma estrutura natural de espaço vetorial. Ademais, temos os seguintes isomorfismos canônicos:

$$(19) \quad \begin{array}{ccc} V \otimes W &\xrightarrow{\cong}& W \otimes V & \quad & V \otimes (W \otimes Z) &\xrightarrow{\cong}& (V \otimes W) \otimes Z \\ v \otimes w &\mapsto & w \otimes v & & v \otimes (w \otimes z) &\mapsto & (v \otimes w) \otimes z \end{array}$$

$$(20) \quad \begin{aligned} V \otimes (W \oplus Z) &\xrightarrow{\cong} (V \otimes W) \oplus (V \otimes Z) \\ v \otimes (w, z) &\mapsto (v \otimes w, v \otimes z). \end{aligned}$$

Nas categorias Top e Top^k , podemos considerar o produto cartesiano, dado que a relação (18) corresponde à bijeção $C(X, C(Y, Z)) \simeq C(X \times Y, Z)$ e as relações (19) e (20) correspondem às bijeções $X \times Y \simeq Y \times X$, $(X \times Y) \times Z \simeq X \times (Y \times Z)$ e $X \times (Y \sqcup Z) \simeq (X \times Y) \sqcup (X \times Z)$. Também neste caso $C(X, Y)$ se torna naturalmente um espaço topológico, dotando-o da topologia compacto-aberto ou da (13) (exatamente como $\text{Hom}(V, W)$ tem uma estrutura natural de espaço vetorial). Para completar a analogia, devemos mostrar que as bijeções precedentes são homeomorfismos. Em relação à $C(X, C(Y, Z)) \simeq C(X \times Y, Z)$, isso só ocorre na categoria Top^k , por causa do primeiro item do lema 1.2.10 (adaptado à categoria Top^k).

Consideremos agora as categorias Top_+ e em Top_+^k . Neste caso o produto da categoria, isto é, o produto cartesiano com o ponto marcado correspondente, não induz isomorfismos análogos aos (18), (19) e (20). De fato, por exemplo, consideremos uma função $f: X \times Y \rightarrow Z$ e a função correspondente $\hat{f}: X \rightarrow C(Y, Z)$, sendo $\hat{f}(x)(y) := f(x, y)$. O fato que f respeite os pontos marcados significa que $f(x_0, y_0) = z_0$, enquanto a mesma condição para \hat{f} é bem mais forte, pois $\hat{f}(x_0)(y) = z_0$ para todo $y \in Y$ e $\hat{f}(x)(y_0) = z_0$ para todo $x \in X$. Por isso, precisamos utilizar o produto smashed. Neste caso, temos a seguinte bijeção natural (subentendendo os pontos marcados):

$$(21) \quad \begin{aligned} \text{Hom}(X, \text{Hom}(Y, Z)) &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}(X \wedge Y, Z) \\ f &\mapsto (x \wedge y \mapsto f(x)(y)). \end{aligned}$$

O conjunto $\text{Hom}(X, Y)$, dotado da topologia compacto aberto ou da topologia (13), se torna também um espaço topológico ou um k -espaço, cujo ponto marcado natural é a função constante de X ao ponto marcado de Y . Em Top_+ e em Top_+^k temos as seguintes bijeções naturais:

$$(22) \quad \begin{array}{ccc} X \wedge Y &\xrightarrow{\cong}& Y \wedge X & \quad & (X \wedge Y) \wedge Z &\xrightarrow{\cong}& X \wedge (Y \wedge Z) \\ x \wedge y &\mapsto & y \wedge x. & & (x \wedge y) \wedge z &\mapsto & x \wedge (y \wedge z). \end{array}$$

$$(23) \quad \begin{aligned} X \wedge (Y \vee Z) &\xrightarrow{\cong} (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \\ x \wedge (y \vee z) &\mapsto (x \wedge y) \vee (x \wedge z). \end{aligned}$$

Para completar a analogia entre o produto smashed e o produto tensor, devemos mostrar que as bijeções (21), (22) e (23) são homeomorfismos. De novo isso só vale em Top_+^k (portanto também em TopW_+^k e TopHd_+^k), não em Top_+ , não somente em relação a (21), e sim também em relação a (22) e (23), como mostra o seguinte exemplo.

EXEMPLO 1.3.5. Pode-se mostrar que $\mathbb{N} \wedge (\mathbb{Q} \wedge \mathbb{Q})$ não é homeomorfo a $(\mathbb{N} \wedge \mathbb{Q}) \wedge \mathbb{Q}$, enquanto, obviamente, $\mathbb{N} \wedge_k (\mathbb{Q} \wedge_k \mathbb{Q}) \approx (\mathbb{N} \wedge_k \mathbb{Q}) \wedge_k \mathbb{Q}$. É claro que $\mathbb{Q} \wedge_k \mathbb{Q} = \mathbb{Q} \wedge \mathbb{Q}$ e $\mathbb{N} \wedge_k \mathbb{Q} = \mathbb{N} \wedge \mathbb{Q}$, pois $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ e $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$, sendo de base enumerável, são k -espaços. Todavia $\mathbb{N} \wedge \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q} \wedge \mathbb{Q}$ não são de base enumerável. Como \mathbb{N} é localmente compacto, $\mathbb{N} \wedge_k (\mathbb{Q} \wedge_k \mathbb{Q}) = \mathbb{N} \wedge (\mathbb{Q} \wedge_k \mathbb{Q}) = \mathbb{N} \wedge (\mathbb{Q} \wedge \mathbb{Q})$. O problema está no fato que \mathbb{Q} não é localmente compacto. Neste caso, $(\mathbb{N} \wedge_k \mathbb{Q}) \wedge_k \mathbb{Q} = (\mathbb{N} \wedge \mathbb{Q}) \wedge_k \mathbb{Q} \neq (\mathbb{N} \wedge \mathbb{Q}) \wedge \mathbb{Q}$. \diamond

Pelo que acabamos de afirmar, podemos pensar no produto smashed em Top_+^k como em um produto tensor de k -espaços com ponto marcado. Mais precisamente, os dois seguintes funtores são adjuntos para todo k -espaço (X, x_0) fixado:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{T}_X : \text{Top}_+^k \rightarrow \text{Top}_+^k & \mathcal{H}_X : \text{Top}_+^k \rightarrow \text{Top}_+^k \\ Y \mapsto Y \wedge_k X & Y \mapsto k(X, Y) \\ f \mapsto f \wedge_k \text{id}_X & f \mapsto (g \mapsto f \circ g). \end{array}$$

Enfim, na categoria Top_{n+}^k fica definido o produto smashed componente por componente, com as mesmas propriedades. Como a maioria dos espaços com que trabalharemos (em particular, os CW-complexos) são k -espaços, em seguida poderemos ignorar os detalhes técnicos relativos às categorias Top_n^k e Top_{n+}^k e pensar no produto smashed ordinário. Contudo, isso mostra mais uma vez a naturalidade dos k -espaços, os quais são o ambiente natural para todas as construções que se encontram em topologia algébrica.

EXEMPLO 1.3.6. Através do homeomorfismo $S^n \approx I^n / \partial I^n$, sendo $\partial I^n / \partial I^n$ o ponto marcado, o leitor pode verificar facilmente que:

$$(24) \quad S^n \wedge S^m \approx S^{n+m}.$$

Em particular, $S^n \approx S^1 \wedge \dots \wedge S^1$ (n vezes). \diamond

Se considerarmos uma família $\{(X_i, x_{0,i})\}_{i \in I}$ de espaços com ponto marcado, ficam definidas a união a um ponto

$$(25) \quad \bigvee_{i \in I} X_i := \left(\bigsqcup_{i \in I} X_i \right) / \{x_{0,i}\}_{i \in I}$$

e, chamando de $\pi_i : \prod_{j \in I} X_j \rightarrow X_i$ a projeção, o smashed product:

$$(26) \quad \bigwedge_{i \in I} X_i := \left(\prod_{i \in I} X_i \right) / \left(\bigcup_{i \in I} \pi_i^{-1} \{x_{0,i}\} \right).$$

Entre k -espaços aplicamos o functor \mathcal{K} ao produto $\prod_{i \in I} X_i$. Observamos que, se $|I| > 2$ em (26), o denominador é um espaço bem maior que a união a um ponto da família $\{(X_i, x_{0,i})\}_{i \in I}$. Isso é natural, pois, por exemplo, $X \wedge_k Y \wedge_k Z$ não é o quociente de $X \times Y \times Z$ pela união a um ponto de X , Y e Z , e sim temos que quocientar por $(\{x_0\} \times Y \times Z) \cup (X \times \{y_0\} \times Z) \cup (X \times Y \times \{z_0\})$.

1.3.2. Cone, cilindro e suspensão – Caso absoluto.

DEFINIÇÃO 1.3.7. Dado um espaço topológico X , definimos

- o *cilindro* de X :

$$(27) \quad \text{Cyl}(X) := X \times I;$$

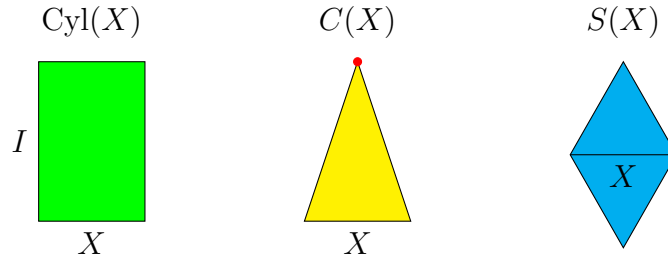
- o *cone* de X :

$$(28) \quad CX := X \times I / X \times \{1\} = \text{Cyl}(X) / X \times \{1\};$$

- a *suspensão não reduzida* de X :

$$(29) \quad SX := X \times [-1, 1] / (X \times \{-1\}, X \times \{1\}).$$

Em (29) a vírgula indica que estamos quotientando separadamente por $X \times \{-1\}$ e por $X \times \{1\}$, não pela união dos dois.



Dada uma função contínua $f: X \rightarrow Y$, ficam definidas as funções

- $\text{Cyl} \hat{f}: \text{Cyl}(X) \rightarrow \text{Cyl}(Y), (x, t) \mapsto (f(x), t)$;
- $C \hat{f}: CX \rightarrow CY, [x, t] \mapsto [f(x), t]$;
- $S \hat{f}: SX \rightarrow SY, [x, t] \mapsto [f(x), t]$. ◇

NOTAÇÃO 1.3.8. Usamos a notação $\text{Cyl} \hat{f}$, $C \hat{f}$ e $S \hat{f}$ pois usaremos a notação $\text{Cyl}(f)$, $C(f)$ e $S(f)$ com outro significado (v. def. 1.3.14). ◇

O cone CX tem um ponto marcado natural, ou seja, o *vértice* $X \times \{1\} / X \times \{1\}$, e a função $C \hat{f}$ respeita os pontos marcados. A suspensão SX é um duplo cone, de fato é homeomorfa a $CX \sqcup CX / \sim$, onde \sim identifica as duas cópias de $(x, 0)$ para cada $x \in X$. Obtemos os seguintes três funtores:

$$\text{Cyl}: \text{Top} \rightarrow \text{Top} \quad C: \text{Top} \rightarrow \text{Top}_+ \quad S: \text{Top} \rightarrow \text{Top}.$$

Poderíamos também escolher um dos dois vértices da suspensão não reduzida como ponto marcado canônico, obtendo o functor $S: \text{Top} \rightarrow \text{Top}_+$, mas preferimos deixar SX sem ponto marcado.

1.3.3. Cone, cilindro e suspensão – Caso reduzido. Agora podemos considerar as versões *reduzidas* das construções precedentes, as quais são as construções naturais associadas a um espaço com ponto marcado.

DEFINIÇÃO 1.3.9. Dado um espaço topológico com ponto marcado (X, x_0) , definimos

- o *cilindro reduzido* de (X, x_0) :

$$(30) \quad \text{Cyl}(X, x_0) := (X \times I) / (\{x_0\} \times I) = \text{Cyl}(X) / \text{Cyl}(\{x_0\});$$

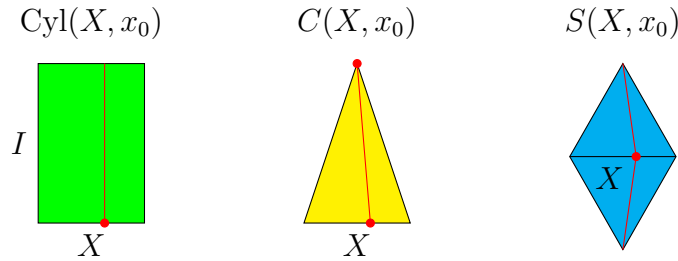
- o *cone reduzido* de (X, x_0) :

$$(31) \quad C(X, x_0) := X \times I / ((X \times \{1\}) \cup (\{x_0\} \times I)) = C(X) / C(\{x_0\});$$

- a *suspensão reduzida* de (X, x_0) :

$$(32) \quad S(X, x_0) := X \times [-1, 1] / ((X \times \{-1, 1\}) \cup (\{x_0\} \times [-1, 1])) = S(X) / S(\{x_0\}).$$

Dada uma função contínua $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, ficam definidas as funções $\text{Cyl} f$, $C f$ e $S f$ por $[(x, t)] \mapsto [(f(x), t)]$. \diamond



Nos três casos há um ponto marcado natural, ou seja, o em que colapsa o denominador, e as funções induzidas respeitam os pontos marcados. Obtemos os funtores:

$$\text{Cyl}: \text{Top}_+ \rightarrow \text{Top}_+ \quad C: \text{Top}_+ \rightarrow \text{Top}_+ \quad S: \text{Top}_+ \rightarrow \text{Top}_+.$$

NOTAÇÃO 1.3.10. Normalmente se denota a suspensão reduzida $S(X, x_0)$ por ΣX , subentendendo o ponto marcado. \diamond

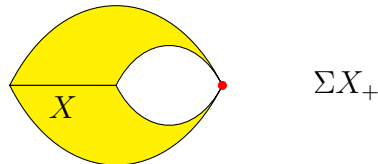
Lembramos que:

$$(33) \quad X_+ := X \sqcup \{\infty\}$$

sendo ∞ um ponto acrescentado a X como componente conexa aberta. Escolhendo ∞ como ponto marcado de X_+ , fica definido o mergulho de categorias $\iota: \text{Top} \hookrightarrow \text{Top}_+$ que aparece em (1). Temos os seguintes homeomorfismos canônicos:

$$(34) \quad \text{Cyl}(X)_+ \approx \text{Cyl}(X_+, \infty) \quad CX \approx C(X_+, \infty) \quad SX / \{v_1, v_2\} \approx \Sigma(X_+)$$

onde v_1 e v_2 são os dois vértices de SX . Mais precisamente, temos três isomorfismos de funtores $\iota \circ \text{Cyl} \simeq \text{Cyl} \circ \iota$, $C \simeq C \circ \iota$ e $\hat{S} \simeq \Sigma \circ \iota$, definindo da maneira natural a ação sobre os morfismos e sendo \hat{S} a composição entre S e o quociente pelos dois vértices. Para o cone e o cilindro, usamos os mesmos símbolos Cyl e C nos casos reduzido e não reduzido, mas, obviamente, se trata de funtores diferentes.



Se dotamos S^1 de um ponto marcado qualquer, temos o seguinte homeomorfismo canônico:

$$\Sigma X \approx X \wedge S^1.$$

Em particular, pela fórmula (24), temos que $\Sigma S^n \approx S^{n+1}$. Ademais:

$$\Sigma X \approx CX/((X \times \{0\}) \cup C\{x_0\}) \quad \text{Cyl}(X, x_0) \approx X \wedge I_+$$

1.3.4. Cone, cilindro e suspensão – Caso relativo I. Por enquanto vimos a definição reduzida e não reduzida do cilindro, do cone e da suspensão. Podemos também definir a versão relativa dessas construções.

DEFINIÇÃO 1.3.11. Dado um objeto (X, A) de Top_2 , definimos

- o *cilindro* de (X, A) :

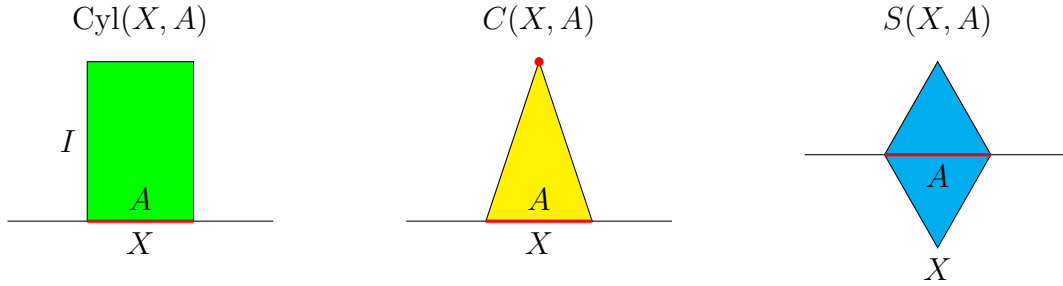
$$(35) \quad \text{Cyl}(X, A) := X \sqcup \text{Cyl}(A) / \sim, \quad (a, 0) \in \text{Cyl}(A) \sim a \in A \subset X \quad \forall a \in A;$$

- o *cone* de (X, A) :

$$(36) \quad C(X, A) := X \sqcup C(A) / \sim, \quad (a, 0) \in C(A) \sim a \in A \subset X \quad \forall a \in A;$$

- a *suspensão não reduzida* de (X, A) :

$$(37) \quad S(X, A) := X \sqcup S(A) / \sim, \quad (a, 0) \in S(A) \sim a \in A \subset X \quad \forall a \in A.$$



Dado um morfismo $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ na categoria Top_2 , ficam definidas as funções

$$\begin{aligned} \text{Cyl } f: \text{Cyl}(X, A) &\rightarrow \text{Cyl}(Y, B) & C f: C(X, A) &\rightarrow C(Y, B) \\ S f: S(X, A) &\rightarrow S(Y, B) \end{aligned}$$

por $[x] \mapsto [f(x)]$ para $x \in X$ e $[(a, t)] \mapsto [(f(a), t)]$ para $a \in A$. \diamond

Obtemos os funtores:

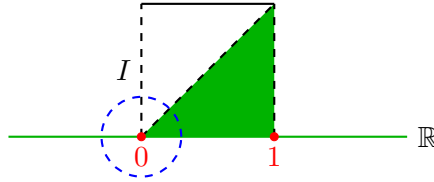
$$\text{Cyl}: \text{Top}_2 \rightarrow \text{Top} \quad C: \text{Top}_2 \rightarrow \text{Top}_+ \quad S: \text{Top}_2 \rightarrow \text{Top}.$$

Para todo par (X, A) , temos as seguintes funções contínuas naturais:

$$(38) \quad \begin{aligned} \iota_{\text{Cyl}(X, A)}: \text{Cyl}(X, A) &\hookrightarrow \text{Cyl}(X) & \iota_{C(X, A)}: C(X, A) &\hookrightarrow C(X) \\ \iota_{S(X, A)}: S(X, A) &\hookrightarrow S(X) \end{aligned}$$

todas definidas por $[x] \mapsto [(x, 0)]$ e $[(a, t)] \mapsto [(a, t)]$. Observamos que, em geral, as funções $\iota_{\text{Cyl}(X, A)}$, $\iota_{C(X, A)}$ e $\iota_{S(X, A)}$ não são mergulhos, como mostra o seguinte exemplo.

EXEMPLO 1.3.12. Consideremos o par $(X, A) = (\mathbb{R}, (0, 1))$ e a função correspondente $\iota_{\text{Cyl}(X, A)}: \text{Cyl}(X, A) \hookrightarrow \text{Cyl}(X)$. Seja $U \subset \text{Cyl}(X, A)$ o seguinte subconjunto: $U = X \cup \{(y, t) \in \text{Cyl}(A) : t < y\}$.



As imagens inversas de U em X em $\text{Cyl}(A)$ são respetivamente X e $\{(y, t) \in (0, 1) \times I : t < y\}$, as quais são ambas abertas, portanto U é aberto em $\text{Cyl}(X, A)$ por definição de topologia quociente. Todavia, $\iota_{\text{Cyl}(X, A)}(U)$ não é aberto em $\text{Cyl}(X)$, pois qualquer vizinhança de $(0, 0)$ em $\text{Cyl}(X)$ tem que conter uma bola de \mathbb{R}^2 interseccionada com $(0, 1) \times I$, logo tem que conter alguns pontos tais que $t \geq y$. Um argumento análogo vale para o cone e a suspensão. \diamond

Os espaços envolvidos no exemplo 1.3.12 são compactamente gerados (são de base enumerável), portanto o exemplo vale também em relação à categoria Top_2^k . Todavia, vale o seguinte lema.

LEMA 1.3.13. *Seja (X, A) um par tal que A é fechado em X . As funções (42) correspondentes são mergulhos.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\text{Cyl}'(X, A)$ a imagem de $\iota_{\text{Cyl}(X, A)}$, com a topologia induzida, e consideremos a função (entre conjuntos) $\bar{\iota}_{\text{Cyl}(X, A)}^{-1} : \text{Cyl}'(X, A) \rightarrow \text{Cyl}(X, A)$. Por construção, essa função é contínua em $A \times I \subset X \times I$ e em $X \times \{0\} \subset X \times I$. Como $\{A \times I, X \times \{0\}\}$ é uma cobertura fechada finita de $\text{Cyl}'(X, A)$, a função $\bar{\iota}_{\text{Cyl}(X, A)}^{-1}$ é contínua pelo lema 1.1.19. O mesmo vale para o cone e a suspensão. \square

Dado um objeto (X, A, x_0) de Top_{2+} , podemos definir o cilindro, o cone e a suspensão reduzidas de (X, A, x_0) , quotientando respetivamente por $\text{Cyl}(\{x_0\})$, $C(\{x_0\})$ e $S(\{x_0\})$. Obtemos os funtores:

$$\text{Cyl}: \text{Top}_{2+} \rightarrow \text{Top}_+ \quad C: \text{Top}_{2+} \rightarrow \text{Top}_+ \quad \Sigma: \text{Top}_{2+} \rightarrow \text{Top}_+.$$

1.3.5. Cone, cilindro e suspensão – Caso relativo II. Podemos estender a construção reduzida a uma função contínua genérica $f: A \rightarrow X$, que não seja necessariamente um mergulho.

DEFINIÇÃO 1.3.14. Dada uma função contínua $f: A \rightarrow X$, definimos

- o *cilindro* de f :

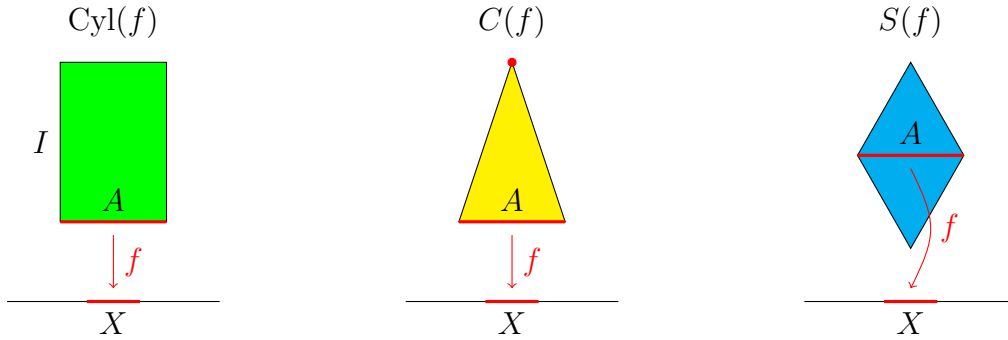
$$(39) \quad \text{Cyl}(f) := X \sqcup \text{Cyl}(A) / \sim, \quad (a, 0) \in \text{Cyl}(A) \sim f(a) \in X \quad \forall a \in A;$$

- o *cone* de f :

$$(40) \quad C(f) := X \sqcup C(A) / \sim, \quad (a, 0) \in C(A) \sim f(a) \in X \quad \forall a \in A;$$

- a *suspensão não reduzida* de f :

$$(41) \quad S(f) := X \sqcup S(A) / \sim, \quad (a, 0) \in S(A) \sim f(a) \in X \quad \forall a \in A.$$



Dado um morfismo $(h, k): f \rightarrow g$ na categoria $\text{Hom}(\text{Top})$, sendo $g: B \rightarrow Y$, ficam definidas as funções

$$\text{Cyl}(h, k): \text{Cyl}(f) \rightarrow \text{Cyl}(g) \quad C(h, k): C(f) \rightarrow C(g) \quad S(h, k): S(f) \rightarrow S(g)$$

por $[x] \mapsto [k(x)]$ para $x \in X$ e $[(a, t)] \mapsto [(h(a), t)]$ para $a \in A$. \diamond

Obtemos os funtores:

$$\text{Cyl}: \text{Hom}(\text{Top}) \rightarrow \text{Top} \quad C: \text{Hom}(\text{Top}) \rightarrow \text{Top}_+ \quad S: \text{Hom}(\text{Top}) \rightarrow \text{Top}.$$

Para toda função $f: A \rightarrow X$, temos as seguintes funções contínuas naturais:

$$(42) \quad \iota_{\text{Cyl}(f)}: \text{Cyl}(f) \rightarrow \text{Cyl}(X) \quad \iota_{C(f)}: C(f) \rightarrow C(X) \quad \iota_{S(f)}: S(f) \rightarrow S(X)$$

todas definidas por $[x] \mapsto [(x, 0)]$ e $[(a, t)] \mapsto [(f(a), t)]$.

OBSERVAÇÃO 1.3.15. Se $(X, A) \in \text{Ob}(\text{Top}_2)$ e $i: A \hookrightarrow X$ for a inclusão, os espaços $\text{Cyl}(i)$, $C(i)$ e $S(i)$ coincidem com os $\text{Cyl}(X, A)$, $C(X, A)$ e $S(X, A)$. \diamond

Dada uma função $f: (A, x_0) \rightarrow (X, x_0)$, podemos definir o cilindro, o cone e a suspensão reduzidas de f , quocientando respectivamente por $\text{Cyl}(\{x_0\})$, $C(\{x_0\})$ e $S(\{x_0\})$. Obtemos os funtores:

$$\text{Cyl}: \text{Hom}(\text{Top}_+) \rightarrow \text{Top}_+ \quad C: \text{Hom}(\text{Top}_+) \rightarrow \text{Top}_+ \quad \Sigma: \text{Hom}(\text{Top}_+) \rightarrow \text{Top}_+.$$

1.3.6. Cones, cilindros e suspensões vs k-espacos. Dado que a união disjunta e os quocientes de k-espacos são k-espacos, os funtores precedentes se restringem aos seguintes:

$$\text{Cyl}: \text{Hom}(\text{Top}^k) \rightarrow \text{Top}^k \quad C: \text{Hom}(\text{Top}^k) \rightarrow \text{Top}_+^k \quad S: \text{Hom}(\text{Top}^k) \rightarrow \text{Top}^k.$$

Quando consideramos o produto $A \times I$ ou $A \times [-1, 1]$, dado que I e $[-1, 1]$ são (localmente) compactos, esse produto coincide com o produto de k-espacos. Todavia, se $(X, A) \in \text{Ob}(\text{Top}_2^k)$, quando consideramos $A \times I$ ou $A \times [-1, 1]$, dotamos $A \subset X$ da topologia A_k . Obtemos os espacos $\text{Cyl}(X, A)_k$, $C(X, A)_k$ e $S(X, A)_k$. Portanto, o cilindro, o cone e a suspensão de um par de k-espacos, como objetos de Top^k , coincidem com os do mergulho $i: A_k \hookrightarrow X$ em Top^k e podem ser diferentes dos construídos a partir de (X, A) com objeto de Top_2 , pois pode ser necessário aplicar o functor \mathcal{K} . Estes detalhes não serão relevantes na prática.

1.3.7. Join. Enfim, outra construção natural é o *join* de dois espaços topológicos X e Y . Trata-se do espaço formado por um caminho de x a y para cada par $(x, y) \in X \times Y$.

DEFINIÇÃO 1.3.16. Sejam X e Y espaços topológicos. O *join* de X e Y é o seguinte espaço:

$$X * Y := (X \times I \times Y) / \sim, \quad (x, 0, y_1) \sim (x, 0, y_2), \quad (x_1, 1, y) \sim (x_2, 1, y) \\ \forall x, x_1, x_2 \in X, y, y_1, y_2 \in Y. \quad \diamond$$

Dessa maneira, um ponto de $X * Y$ é a classe de equivalência de uma tripla $[(x, t, y)]$, a qual representa o ponto t do caminho entre $x \in X$ e $y \in Y$. Quando $t \neq 0, 1$, a tripla (x, t, y) é o único representante da classe correspondente. Quando $t = 0$, se fixamos $x \in X$ e deixamos variar $y \in Y$, todos os caminhos de x a y partem do mesmo ponto x , portanto $[(x, 0, y)]$ não depende de y . Analogamente, $[(x, 1, y)]$ não depende de x . Isso explica a relação de equivalência introduzida. Obviamente, definimos $X *_k Y := (X \times_k I \times_k Y) / \sim$.

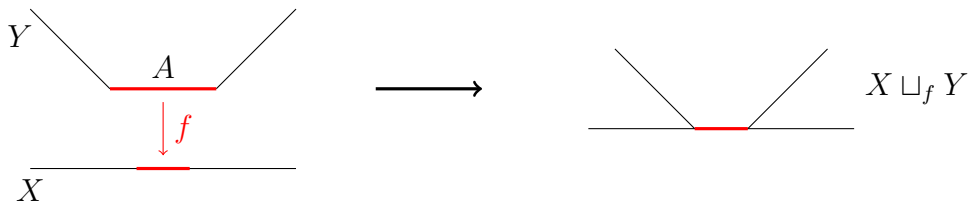
1.4. Colagem

As construções relativas do cilindro, do cone e da suspensão são casos particulares da noção de *colagem* de espaços topológicos, a qual é um caso particular de coproduto fibrado entre dois morfismos, em que um dos dois é um mergulho. Sejam X e Y espaços topológicos, $i: A \hookrightarrow Y$ um mergulho e $f: A \rightarrow X$ uma função contínua:

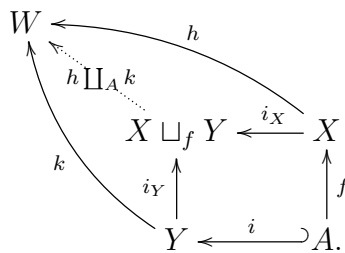
$$(43) \quad X \xleftarrow{f} A \xrightarrow{i} Y.$$

Com estes dados podemos construir um espaço topológico colando Y a X através de f , ou seja:

$$(44) \quad X \sqcup_f Y := X \sqcup Y / \sim, \quad i(a) \in Y \sim f(a) \in X \quad \forall a \in A.$$



Considerando a caracterização do coproduto fibrado na categoria Top , que mostramos no fim da seção 1.1, temos que $X \sqcup_f Y = X \amalg_A Y$:



LEMA 1.4.1. *A função i_X do diagrama precedente é um mergulho, o qual é fechado se, e somente se, i o é. Ademais, $i_Y(Y)$ é fechado em $X \sqcup_f Y$ se, e somente se, $f(A)$ é fechado em X .*

DEMONSTRAÇÃO. É evidente que a função i_X é injetora, pois a relação de equivalência em (44) nunca identifica dois pontos de $i_X(X)$. Para mostrar que é um mergulho, é suficiente mostrar que a função $\bar{i}_X: X \rightarrow i_X(X)$ é aberta. Seja $U \subset X$ aberto. Isso implica que $f^{-1}(U) \subset A$ é aberto, portanto, sendo i um mergulho, $i(f^{-1}(U))$ é aberto em $i(A)$. Isso implica que existe $V \subset Y$ aberto tal que $V \cap i(A) = i(f^{-1}(U))$. Por definição de topologia quociente, se $\pi: X \sqcup Y \rightarrow X \sqcup_f Y$ for a projeção, $\pi(U \sqcup V)$ é aberto, pois $\pi^{-1}(\pi(U \sqcup V)) = U \sqcup V$. Como $i_X(U) = \pi(U \sqcup V) \cap i_X(X)$, isso prova que $i_X(U)$ é aberto em $i_X(X)$, logo i_X é um mergulho.

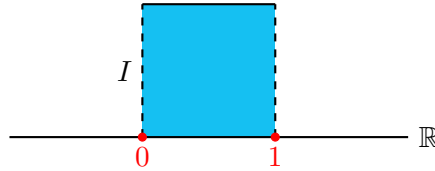
Sejam $Y' := Y \setminus i(A)$ e $Y'' := (X \sqcup_f Y) \setminus i_X(X)$. É claro que π induz um homeomorfismo canônico entre Y' e Y'' , pois a relação de equivalência em (44) nunca identifica dois pontos de Y' . As seguintes condições são equivalentes:

- (i) $i_X(X)$ é fechado em $X \sqcup_f Y$;
- (ii) Y'' é aberto em $X \sqcup_f Y$;
- (iii) Y' é aberto em $X \sqcup Y$;
- (iv) Y' é aberto em Y ;
- (v) $i(A)$ é fechado em Y .

As equivalências (i) \Leftrightarrow (ii) e (iv) \Leftrightarrow (v) são devidas à definição de Y' e Y'' . A equivalência (ii) \Leftrightarrow (iii) é devida ao fato que $\pi^{-1}(Y'') = Y'$ e à definição de topologia quociente. Enfim, a equivalência (iii) \Leftrightarrow (iv) é devida à definição de união disjunta de espaços topológicos. Comparando (i) e (v), podemos concluir que i_X é um mergulho fechado se, e somente se, i o é.

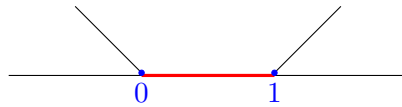
Em relação à segunda parte do enunciado, a partir dos subespaços $X' := X \setminus f(A)$ e $X'' := (X \sqcup_f Y) \setminus i_Y(Y)$, podemos provar da mesma maneira que $i_Y(Y)$ é fechado em $X \sqcup_f Y$ se, e somente se, $f(A)$ é fechado em X . \square

EXEMPLO 1.4.2. Sejam $X = \mathbb{R}$, $Y = (0, 1) \times I$, $A = (0, 1) \times \{0\}$ e $f: A \hookrightarrow X$ o mergulho natural. O espaço $X \sqcup_A Y$ é o cilindro $\text{Cyl}(\mathbb{R}, (0, 1))$, já considerado no exemplo 1.3.12.



Como $i: A \hookrightarrow Y$ é um mergulho fechado, temos que $i_X: X \hookrightarrow X \sqcup_f Y$ é um mergulho fechado. Pelo contrário, como $f(A)$ não é fechado em X , temos que $i_Y(Y)$ não é fechado em X ; de fato, por exemplo, $0, 1 \in \mathbb{R}$ pertencem ao fecho de $i_Y(Y)$, mas não a $i_Y(Y)$. \diamond

EXEMPLO 1.4.3. Sejam $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $A = (0, 1)$ e $f: A \hookrightarrow X$ o mergulho natural.



Como $i: A \hookrightarrow Y$ não é um mergulho fechado, nem $i_X: X \hookrightarrow X \sqcup_f Y$ é fechado; de fato, os pontos $0, 1 \in Y$ pertencem ao fecho de $i_X(X)$, mas não a $i_X(X)$. \diamond

Dada uma função $f: A \rightarrow X$, considerando os mergulhos naturais:

- $A \subset \text{Cyl}(A)$, $a \mapsto (a, 0)$;
- $A \subset C(A)$, $a \mapsto [(a, 0)]$;
- $A \subset S(A)$, $a \mapsto [(a, 0)]$

temos que:

$$\text{Cyl}(f) = X \sqcup_f \text{Cyl}(A) \quad C(f) = X \sqcup_f C(A) \quad S(f) = X \sqcup_f S(A).$$

Analogamente, a partir do diagrama

$$(X, x_0) \xleftarrow{f} (A, y_0) \xhookrightarrow{i} (Y, y_0)$$

a colagem $X \sqcup_f Y$ fica dotada do ponto marcado $[y_0] = [x_0]$. Dessa maneira podemos construir o cilindro, o cone e a suspensão relativos a um morfismo em Top_+ . Podemos definir a seguinte categoria, que chamamos de Col :⁴

- objetos: seqüências da forma (43);
- morfismos: pares (h, k) , sendo $k: X \rightarrow X'$ e $h: Y \rightarrow Y'$, que tornam o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{f} & A & \xhookrightarrow{i} & Y \\ k \downarrow & & \downarrow h|_A & & \downarrow h \\ X' & \xleftarrow{f'} & A' & \xhookrightarrow{i'} & Y' \end{array}$$

- composição: $(h', k') \circ (h, k) := (h' \circ h, k' \circ k)$.

Dado um morfismo (h, k) , fica definida a função $(h, k)_\# : X \sqcup_f Y \rightarrow X' \sqcup_{f'} Y'$ por $[x] \mapsto [k(x)]$ e $[y] \mapsto [h(y)]$. Com isso, a colagem se torna um functor $\mathcal{C}: \text{Col} \rightarrow \text{Top}$, sendo $\mathcal{C}(h, k) = (h, k)_\#$. Analogamente, podemos definir a categoria Col_+ e o functor colagem $\mathcal{C}: \text{Col}_+ \rightarrow \text{Top}_+$.

OBSERVAÇÃO 1.4.4. Por definição de coproduto fibrado, dadas duas funções contínuas $u: X \rightarrow Z$ e $v: Y \rightarrow Z$, tais que $u \circ f = v \circ i$, fica definida a função contínua $u \sqcup_f v: X \sqcup_f Y \rightarrow Z$. Isso corresponde ao seguinte morfismo entre objetos de Col :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{f} & A & \xhookrightarrow{i} & Y \\ u \downarrow & & \downarrow v \circ i & & \downarrow v \\ Z & \xleftarrow{\text{id}} & Z & \xhookrightarrow{\text{id}} & Z. \end{array} \quad \diamond$$

A hipótese inatural de compacidade local no seguinte lema sumirá considerando k -espaços.

⁴A mesma construção vale mais em geral para o coproduto fibrado (ou para o produto fibrado) entre dois morfismos quaisquer, tirando a hipótese que um dos dois seja um mergulho.

LEMA 1.4.5. *Consideremos o objeto (43) de Col e um espaço Z localmente compacto. Fica definido o seguinte objeto de Col:*

$$X \times Z \xleftarrow{f \times \text{id}_Z} A \times Z \xrightarrow{i \times \text{id}_Z} Y \times Z.$$

A bijeção natural:

$$(X \times Z) \sqcup_{f \times \text{id}_Z} (Y \times Z) \longrightarrow (X \sqcup_f Y) \times Z$$

é um homeomorfismo (canônico).

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (X \times Z) \sqcup (Y \times Z) & \xrightarrow{\pi_1} & (X \times Z) \sqcup_{f \times \text{id}_Z} (Y \times Z) \\ \Phi \downarrow \simeq & & \simeq \downarrow \Psi \\ (X \sqcup Y) \times Z & \xrightarrow{\pi_2} & (X \sqcup_f Y) \times Z. \end{array}$$

π_1 e a primeira componente de π_2 são projeções ao quociente. Pelo lema 0–1.1.40, também π_2 é uma projeção. Ademais, Φ é um homeomorfismo. Por enquanto, Ψ é uma bijeção entre conjuntos. Seja $U \subset (X \sqcup_f Y) \times Z$ um subconjunto aberto. Sendo π_2 uma projeção e Φ um homeomorfismo, $\Phi^{-1}(\pi_2^{-1}(U))$ é aberto, logo $\pi_1^{-1}(\Psi^{-1}(U))$ é aberto. Sendo π_1 uma projeção, $\Psi^{-1}(U)$ é aberto. O mesmo argumento, substituindo Φ por Φ^{-1} , mostra que, se $V \subset (X \times Z) \sqcup_{f \times \text{id}_Z} (Y \times Z)$ for um subconjunto aberto, então $\Psi(V)$ é aberto. Logo, Ψ é um homeomorfismo. \square

Considerando os k -espaços, vamos definir da mesma maneira a categoria Col^k e a colagem como functor $\mathcal{C}: \text{Col}^k \rightarrow \text{Top}^k$ ou $\mathcal{C}: \text{Col}_+^k \rightarrow \text{Top}_+^k$. A construção de $X \sqcup_f Y$ é idêntica. A única diferença está no seguinte fato. Suponhamos de partir de um par (Y, A) , sendo o mergulho $i: A \hookrightarrow Y$ a inclusão. Neste caso, quando consideramos seqüências da forma (43), i é um mergulho na categoria Top^k , portanto o espaço $A \subset Y$ é dotado da topologia A_k . Por isso, a função f tem que ser contínua como função $f: A_k \rightarrow X$, logo é suficiente que seja contínua nos subconjuntos compactos de $A \subset Y$. Isso não muda nada na definição do quociente, pois, mesmo se f fosse uma função genérica entre conjuntos (sem hipóteses de continuidade), a relação $a \sim f(a)$ ficaria bem definida em $X \sqcup Y$, portanto ficaria definido o espaço quociente $X \sqcup_f Y$. O fato que f seja contínua implica que valha a observação 1.4.4. Quando consideramos um objeto em Col^k , a observação 1.4.4 vale, para todo k -espaço Z , só supondo que f seja contínua nos subconjuntos compactos de $A \subset Y$. Portanto, por um lado reduzimos os possíveis contra-domínios Z , pois impomos que sejam k -espaços; por outro lado, isso implica que ampliamos as funções admissíveis f , pois é suficiente que sejam contínuas nos compactos de A . Tudo isso se descreve de modo uniforme sem pensar que $A \subset Y$, e sim que haja um mergulho $i: A \hookrightarrow Y$. Nesse caso, a definição de mergulho em Top leva à colagem em Top e a definição de mergulho em Top^k leva à colagem em Top^k . Enfim, o lema 1.4.5 se torna mais natural da seguinte maneira.

LEMA 1.4.6. *Consideremos o objeto (43) de Col^k e um k -espaço Z . Fica definido o seguinte objeto de Col^k :*

$$X \times_k Z \xleftarrow{f \times \text{id}_Z} A \times_k Z \xrightarrow{i \times \text{id}_Z} Y \times_k Z.$$

A bijeção natural:

$$(X \times_k Z) \sqcup_{f \times \text{id}_Z} (Y \times_k Z) \longrightarrow (X \sqcup_f Y) \times_k Z$$

é um homeomorfismo (canônico).

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração é idêntica à do lema 1.4.5, aplicando o corolário 1.2.9 ao invés do lema 0–1.1.40. \square

Como já observamos várias vezes, os k -espaços são o ambiente natural, mas em quase todas as aplicações podemos atuar como se fossem espaços topológicos genéricos.

1.5. Exercícios

1.1. Demonstre que o functor (8) não é inverso nem à esquerda nem à direita do mergulho $\text{Top}_n \hookrightarrow \text{Top}_{n+}$ que aparece em (1).

1.2. Descreva o produto e o coproduto (fibrado) na categoria $\text{Hom}(\text{Top})$.

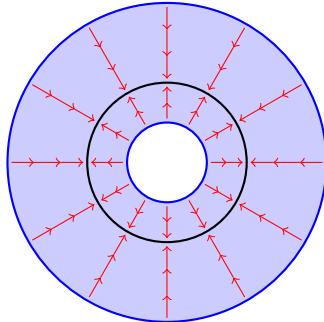
1.3. Demonstre que, se X for fracamente de Hausdorff, as definições 1.2.14 e 1.2.5 são equivalentes. Analogamente, demonstre que, se X e Y forem fracamente de Hausdorff, então a topologia test-aberto coincide com a compacto-aberto em $C(X, Y)$.

1.4. Demonstre que um conjunto não enumerável X , com a topologia cujos fechados são os subconjuntos enumeráveis e X , é um espaço fracamente de Hausdorff mas não de Hausdorff.

CAPÍTULO 2

Homotopia

A topologia geral, conforme a definição de geometria de Klein, consiste no estudo das propriedades de um espaço invariantes por homeomorfismo. O modo mais simples de pensar em um homeomorfismo consiste em imaginar uma deformação contínua, ou seja, uma deformação que não rasgue nem corte partes do espaço. Se pensarmos nos homeomorfismos de um espaço X a si mesmo, esta representação não é adequada para os que não pertencem à componente conexa da identidade a respeito da topologia compacto-aberto (ou test-aberto), mas é a mais fácil a ser imaginada. Embora a noção de homeomorfismo seja natural em topologia para identificar dois espaços, em várias circunstâncias se revela mais útil (ou mais prático) estudar propriedades invariantes por deformações não necessariamente bijetoras, que “mantêm a forma” do espaço, mesmo “esmagando” ou “esticando” algumas partes. Por exemplo, a corona circular $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ não é homeomorfa ao círculo $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, todavia “tem a mesma forma”, pois é possível contrair com continuidade C a S^1 : para visualizar a contração, imaginamos de contrair C de ambos os lados ao longo das direções radiais, ou seja, ao longo das semirretas de \mathbb{R}^2 que partem da origem.



$$C \simeq S^1$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

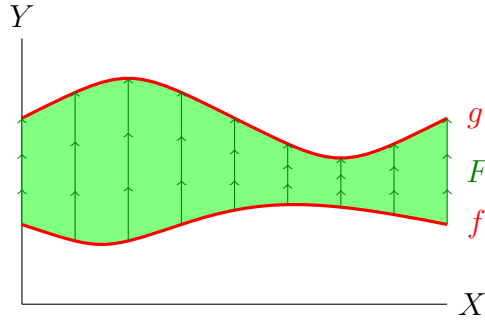
$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Da mesma maneira, o disco D^2 ou a bola B^2 se contraem com continuidade na origem, portanto, do ponto de vista que estamos considerando, são equivalentes a um ponto. Pelo contrário, o círculo S^1 não é equivalente a um ponto e sim ao disco furado $D^2 \setminus \{0\}$ ou à bola furada $B^2 \setminus \{0\}$. Para exprimir esta ideia matematicamente, é necessário introduzir o conceito de *homotopia*.

2.1. Homotopia de funções

Vamos definir antes de tudo quando duas funções são homotópicas. Intuitivamente significa que é possível mover com continuidade o gráfico da primeira até sobrepô-lo ao da segunda.

DEFINIÇÃO 2.1.1. Sejam $f, g: X \rightarrow Y$ duas funções contínuas. Uma *homotopia* entre f e g é uma função contínua $F: X \times I \rightarrow Y$ tal que $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. Se existir uma homotopia, f e g são ditas *homotópicas*. Neste caso usamos a notação $f \sim g$ e indicamos por $F: f \sim g$ uma homotopia. \diamond



EXEMPLO 2.1.2. Se $f, g: X \rightarrow Y$ forem constantes com imagens $p, q \in Y$, então f e g são homotópicas se, e somente se, p e q pertencem à mesma componente conexa por caminhos de Y . De fato, se $\varphi: I \rightarrow Y$ for um caminho que une p e q , podemos considerar a homotopia $F(x, t) := \varphi(t)$. Reciprocamente, se F for uma homotopia entre f e g , para qualquer $x_0 \in X$ fixado, o caminho $\varphi(t) := F(x_0, t)$ une p e q . \diamond

EXEMPLO 2.1.3. Sejam $X = S^1$ e $Y = \mathbb{R}^2$. Sejam $f: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ o mergulho e g a função constante com valor 0. As funções f e g são homotópicas, sendo $F(x, t) := (1 - t)f(x)$ uma homotopia. \diamond

EXEMPLO 2.1.4. Consideremos o exemplo precedente, substituindo somente o espaço Y por $Y = \mathbb{R}^2 \setminus \{(\frac{1}{2}, 0)\}$. Neste caso f e g não são homotópicas. Para prová-lo rigorosamente com poucas contas precisamos de ferramentas que introduziremos no capítulo 4, todavia já podemos imaginar que qualquer homotopia entre f e g teria necessariamente que passar por $(\frac{1}{2}, 0)$, o qual não pertence a Y . \diamond

Há muitos exemplos possíveis, mas trata-se sempre do mesmo princípio.

OBSERVAÇÃO 2.1.5. Sejam X e Y k -espaços. Como I é (localmente) compacto, $X \times_k I = X \times I$. Nesse caso, pelo lema 1.2.10, uma homotopia $F: X \times I \rightarrow Y$ entre f e g é equivalente a um caminho $F: I \rightarrow k(X, Y)$ tal que $F(0) = f$ e $F(1) = g$, logo f e g são homotópicas se, e somente se, pertencem à mesma componente conexa por caminhos de $k(X, Y)$. \diamond

OBSERVAÇÃO 2.1.6. A relação de homotopia entre funções de X a Y é uma relação de equivalência. De fato, é imediato verificar as propriedades reflexiva e simétrica. Para a transitiva, sejam $F: f \sim g$ e $G: g \sim h$. Definimos $G * F: f \sim h$ da seguinte maneira:

$$(45) \quad (G * F)(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$G * F$ está bem definida, pois $F(x, 1) = G(x, 0) = g(x)$, e é contínua pelo lema 1.1.19, pois $\{X \times [0, \frac{1}{2}], X \times [\frac{1}{2}, 1]\}$ é uma cobertura fechada finita de $X \times I$. O fato que se trate de uma relação de equivalência implica que, dada uma função $f: X \rightarrow Y$, está bem definida a sua *classe de homotopia* $[f]$. \diamond

Sejam $f, f': X \rightarrow Y$ e $g, g': Y \rightarrow Z$ funções contínuas. É fácil verificar que, se $f \sim f'$ e $g \sim g'$, então $g \circ f \sim g' \circ f'$: de fato, se $F: f \sim f'$ e $G: g \sim g'$ forem duas homotopias, podemos definir a homotopia

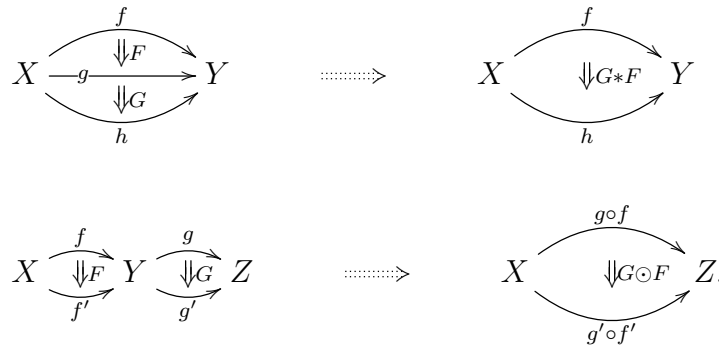
$$(46) \quad \begin{aligned} G \odot F: g \circ f &\sim g' \circ f' \\ (x, t) &\mapsto G(F(x, t), t). \end{aligned}$$

Portanto, podemos aplicar a definição de categoria quociente, definida na seção 0–2.3.2, obtendo a seguinte categoria:

- *Categoria TopH*: Objetos: espaços topológicos. Morfismos: classes de homotopia de funções contínuas. Composição de morfismos: $[g] \circ [f] := [g \circ f]$.

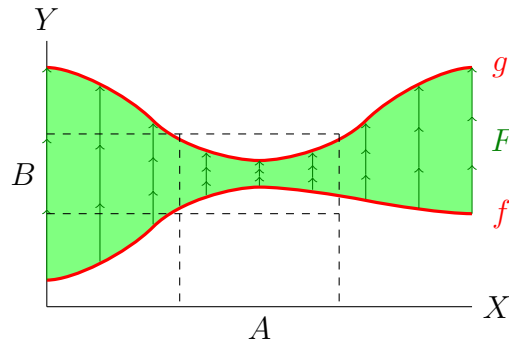
Destacamos que, por definição, os objetos de TopH coincidem com os de Top (ou seja, um objeto é um espaço topológico, não uma classe de equivalência), enquanto os morfismos de TopH são o quociente dos de Top por homotopia (ou seja, um morfismo é uma classe de homotopia de funções).

OBSERVAÇÃO 2.1.7. Observamos que (45) e (46) definem dois tipos diferentes de composição de homotopias, representados pelos seguintes diagramas:

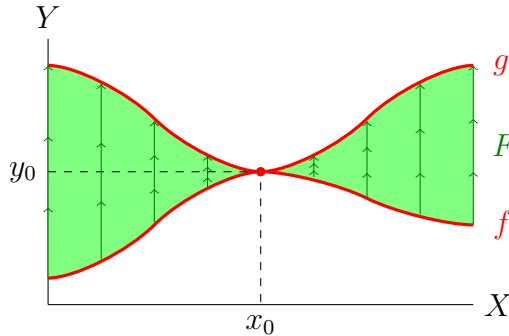


A primeira composição torna a existência de uma homotopia uma relação transitiva (portanto de equivalência) em $C(X, Y)$, o que torna bem definidos os morfismos de TopH; a segunda composição faz com que a composição de classes de homotopia seja bem definida, o que torna bem definida a composição em TopH. \diamond

2.1.1. Homotopia nas categorias Top_n e Top_{n+} . A noção de homotopia pode ser facilmente generalizada às categorias Top_n e Top_{n+} . Dados dois morfismos $f, g: (X, A_1, \dots, A_{n-1}) \rightarrow (Y, B_1, \dots, B_{n-1})$ em Top_n , uma homotopia entre eles é uma função contínua $F: (X \times I, A_1 \times I, \dots, A_{n-1} \times I) \rightarrow (Y, B_1, \dots, B_{n-1})$ tal que $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$. Isso significa que F é uma homotopia entre f e g tal que $F(a_i, t) \in B_i$ para todos $i \in \{1, \dots, n-1\}$ e $a_i \in A_i$. Em particular, $F|_{A_i \times I}: A_i \times I \rightarrow B_i$ é uma homotopia entre as duas funções $f|_{A_i}, g|_{A_i}: A_i \rightarrow B_i$. A seguinte figura representa uma homotopia em Top_2 entre $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$.



Para as categorias Top_{n+} a definição é a mesma, considerando o ponto marcado como um subespaço.¹ Consideremos em particular a categoria Top_+ : neste caso uma homotopia entre $f, g: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ é uma homotopia $F: f \sim g$ tal que $F(x_0, t) = y_0$ para todo $t \in I$.



Também nestas categorias a existência de uma homotopia é uma relação de equivalência no conjunto dos morfismos entre dois objetos fixados. Ademais, a composição de classes de equivalência continua sendo bem definida, graças à composição (46). Portanto, quotientando os morfismos por homotopia, ficam definidas as seguintes categorias:

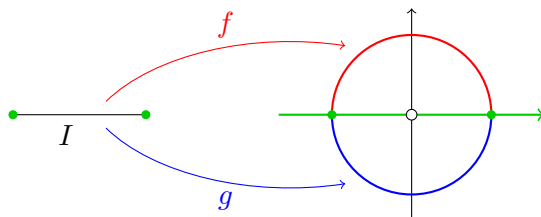
$$(47) \quad \text{TopH} \hookrightarrow \text{TopH}_+ \hookrightarrow \text{TopH}_2 \hookrightarrow \text{TopH}_{2+} \hookrightarrow \dots$$

Vale uma observação análoga à 2.1.5 para todas essas categorias. Dados dois morfismos $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ na categoria Top_2 , pode acontecer que $f, g: X \rightarrow Y$ sejam funções homotópicas (ou seja, morfismos homotópicos em Top) e que também $f|_A, g|_A: A \rightarrow B$ sejam funções homotópicas, mas que f e g não sejam homotópicos como morfismos em Top_2 . Analogamente, dados dois morfismos $f, g: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ na categoria Top_+ , pode acontecer que $f, g: X \rightarrow Y$ sejam funções homotópicas, mas que f e g não sejam homotópicos como morfismos em Top_+ , isto é, nenhuma homotopia entre f e g respeita os pontos marcados. Em geral, dados dois morfismos na categoria Top_n ou Top_{n+} , pode acontecer que as funções entre os

¹Neste caso, se $(X, A_1, \dots, A_{n-1}, x_0) \in \text{Ob}(\text{Top}_{n+})$, o objeto $(X \times I, A_1 \times I, \dots, A_{n-1} \times I, \{x_0\} \times I)$ não pertence a Top_{n+} e sim a Top_{n+1} . Isso não constitui um problema, pois a definição de homotopia fica válida entre dois objetos de Top_{n+} , mesmo aparecendo um objeto externo à categoria na formulação.

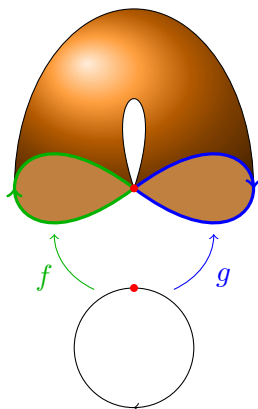
espaços maiores e as suas restrições aos subespaços envolvidos sejam homotópicas na categoria Top , sem que os morfismos dados sejam homotópicos em Top_n ou Top_{n+} (ou também podem ser homotópicos em uma categoria Top_m ou Top_{m+} , com $m < n$, mas não em Top_n ou Top_{n+}).

EXEMPLO 2.1.8. Na categoria Top_2 , consideremos os morfismos $f, g: (I, \partial I) \rightarrow (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, (\mathbb{R} \times \{0\}) \setminus \{0\})$ definidos da seguinte maneira: f manda I no semicírculo superior de S^1 e g no inferior.



Não existem homotopias em Top_2 , pois, se os extremos ficarem no eixo x , qualquer homotopia deve passar pela origem, o que não é possível. Todavia, f e g são homotópicas em Top , como é fácil verificar, e as suas restrições a ∂I coincidem (em particular, são homotópicas). Se considerássemos o contradomínio $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R} \times \{0\})$, então f e g seriam homotópicas também em Top_2 . \diamond

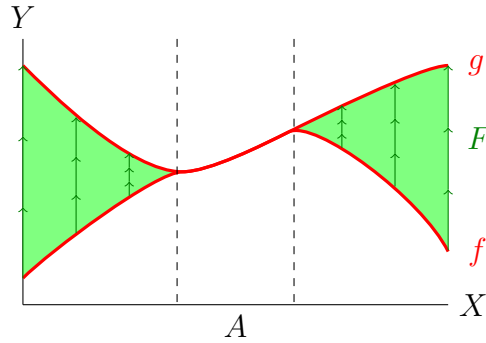
EXEMPLO 2.1.9. Na categoria Top_+ , como domínio consideramos $(S^1, *)$, sendo $*$ um ponto marcado qualquer. Como contradomínio, consideramos o seguinte espaço: pegamos o cilindro finito $S^1 \times I$, e identificamos os pontos $(*, 0)$ e $(*, 1)$: obtemos meio toro com dois pontos identificados.



Seja f a função que manda $(S^1, *)$ em $(S^1 \times \{0\}, * \times 0)$ e g a função que manda $(S^1, *)$ em $(S^1 \times \{1\}, * \times 1)$ invertendo a orientação. Então $f, g: S^1 \rightarrow S^1 \times I / \sim$ são homotópicas em Top e respeitam os pontos marcados, mas nenhuma homotopia respeita os pontos marcados, portanto $f, g: (S^1, *) \rightarrow (S^1 \times I / \sim, *)$ não são homotópicas em Top_+ . \diamond

2.1.2. Homotopia relativa. Vamos agora introduzir a noção fundamental de *homotopia relativa*.

DEFINIÇÃO 2.1.10. Sejam $A \subset X$ um subespaço topológico e $f, g: X \rightarrow Y$ duas funções contínuas tais que $f|_A = g|_A$. Uma *homotopia relativa a A* entre f e g é uma homotopia $F: f \sim g$ tal que $F(a, t) = f(a) = g(a)$ para todos $a \in A$ e $t \in I$. Neste caso usamos a notação $f \sim_A g$ e $F: f \sim_A g$. \diamond



EXEMPLO 2.1.11. Sejam $X = I$, $Y = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, f e g as funções que mandam I no semicírculo superior e inferior de S^1 . Seja $A = \partial I$. Neste caso f e g *não* são homotópicas relativamente a A , embora sejam homotópicas, pois qualquer homotopia que não mexe os pontos 0 e 1 teria que passar pela origem. Se $Y = \mathbb{R}^2$, então f e g são homotópicas também relativamente a A . \diamond

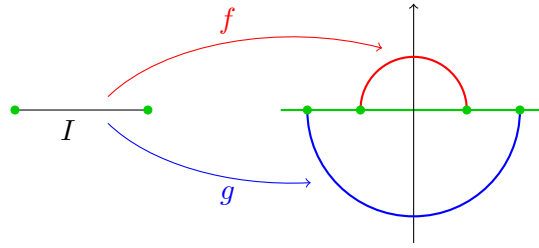
Dados dois morfismos $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$, podemos considerar a relação de homotopia relativa a A (esta relação só pode ser satisfeita se $f|_A = g|_A$). De novo obtemos uma relação de equivalência respeitada pela composição, portanto podemos quocientar os morfismos entre pares de espaços topológicos a respeito da homotopia relativa, obtendo a seguinte categoria:

- *Categoria TopHR*: Objetos: pares de espaços topológicos (X, A) (onde $A \subset X$). Morfismos de (X, A) a (Y, B) : classes de homotopia *relativa a A* de funções contínuas $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$. Composição de morfismos: $[g] \circ [f] := [g \circ f]$.

Na verdade, para definir a homotopia relativa a A não precisamos marcar um subespaço B do contradomínio. Neste caso, na categoria TopHR, consideramos como contradomínio o par (Y, Y) . No caso de um ponto marcado, considerar a homotopia relativa não acrescenta nada, pois uma homotopia que mande um ponto marcado em um ponto marcado é necessariamente uma homotopia relativa ao ponto do domínio. Podemos generalizar a definição a TopHR_n e TopHR_{n+} da seguinte maneira. Um objeto de TopHR_n é uma $(n + 1)$ -upla $(X, A_1, \dots, A_{n-1}, A)$ onde $(X, A_1, \dots, A_{n-1}) \in \text{Ob}(\text{Top}_n)$ e $A \subset X$. Os morfismos de $(X, A_1, \dots, A_{n-1}, A)$ a $(Y, B_1, \dots, B_{n-1}, B)$ são classes de homotopia *relativa a A* de morfismos em Top_n (portanto $f(A_i) \subset B_i$ para todo i) tais que $f(A) \subset B$. Uma construção análoga vale para TopHR_{n+} .

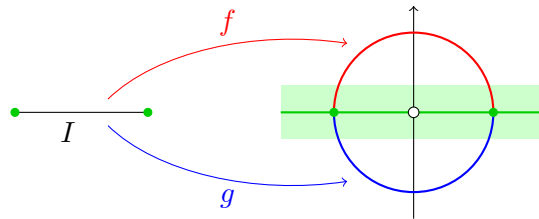
É claro que duas funções $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$, homotópicas relativamente a A , são também homotópicas na categoria Top_2 . Agora mostramos que f e g podem ser homotópicas em Top_2 (portanto também em Top) sem serem homotópicas relativamente a A .

EXEMPLO 2.1.12. Pode-se achar um exemplo imediato quando $f|_A \neq g|_A$. Considere-mos os morfismos $f, g: (I, \partial I) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbb{R} \times \{0\})$ definidos da seguinte maneira: f manda I no semicírculo superior de S^1 e g no inferior de $2S^1$, sendo $2S^1$ o círculo de raio 2.



Neste caso f e g são homotópicas em Top_2 , mas não relativamente a ∂I , pois as duas imagens de ∂I são diferentes. \diamond

EXEMPLO 2.1.13. Mais interessante, mas também muito simples, é mostrar um caso no qual $f|_A = g|_A$. Consideremos os morfismos $f, g: (I, \partial I) \rightarrow (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ definidos da seguinte maneira: f manda I no semicírculo superior de S^1 e g no inferior. Neste caso f e g são homotópicos em Top_2 (pois o são em Top e o subespaço do contradomínio é trivial), mas não o são relativamente a ∂I , pois uma homotopia relativa deveria passar pela origem. Poderíamos também considerar como contra-domínio o par $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, U \setminus \{0\})$, sendo U uma vizinhança de $\mathbb{R} \times \{0\}$ em \mathbb{R}^2 , obtendo exemplos nos quais o sub-espaço do contra-domínio não é trivial.



\diamond

Portanto, dados $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$, temos que:

homotópicos $\text{rel}_A \Rightarrow$ homotópicos em $\text{Top}_2 \Rightarrow$ homotópicos em Top ,

sendo as duas implicações não invertíveis. Para $f, g: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, temos que:

homotópicos $\text{rel}_{x_0} \Leftrightarrow$ homotópicos em $\text{Top}_+ \Rightarrow$ homotópicos em Top ,

sendo a segunda implicação não invertível. Afinal, temos o seguinte diagrama de categorias:

$$(48) \quad \begin{array}{ccccccc} \text{Top} & \hookrightarrow & \text{Top}_+ & \hookrightarrow & \text{Top}_2 & \hookrightarrow & \text{Top}_{2+} & \hookrightarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{TopH} & \hookrightarrow & \text{TopH}_+ & \hookrightarrow & \text{TopH}_2 & \hookrightarrow & \text{TopH}_{2+} & \hookrightarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{TopHR} & \hookrightarrow & \text{TopHR}_+ & \hookrightarrow & \text{TopHR}_2 & \hookrightarrow & \text{TopHR}_{2+} & \hookrightarrow & \dots \end{array}$$

Os funtores verticais entre as duas primeiras linhas atuam como a identidade sobre os objetos e a projeção ao quociente sobre os morfismos. Os mergulhos cheios verticais entre a segunda e a terceira linha são definidos por $(X, A_1, \dots, A_n) \mapsto$

$(X, A_1, \dots, A_n, \emptyset)$ sobre os objetos e atuam como a identidade entre os morfismos (a mesma construção vale quando houver um ponto marcado). Há também a projeção $\text{TopHR} \rightarrow \text{TopH}_2$, que atua como a identidade sobre os objetos e como a projeção ao quociente entre os morfismos, identificando duas classes de morfismos relativos quando os representantes delas forem equivalentes como morfismos de pares (trata-se da projeção de uma relação de equivalência mais fina a uma mais grossa). Analogamente fica definida a projeção $\text{TopHR}_+ \rightarrow \text{TopH}_{2+}$. Existe uma construção análoga para graus maiores, mas menos natural: por exemplo, para obter um functor $\text{TopHR}_2 \rightarrow \text{TopH}_3$, temos que definir a ação sobre os objetos $(X, A_1, A) \mapsto (X, A_1, A \cap A_1)$. Não precisaremos desta construção em nenhuma ocasião.

2.2. Equivalência homotópica de espaços

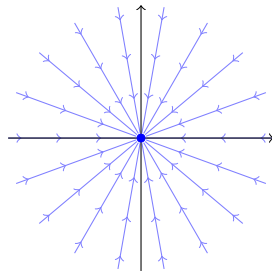
Por enquanto estudamos algumas relações de equivalência entre morfismos, agora vamos estudar as relações naturais entre objetos, que traduzem a ideia de “espaços com a mesma forma” da qual partimos. Dois espaços topológicos são *homeomorfos* quando são isomorfos na categoria Top . Analogamente, dois espaços *têm o mesmo tipo de homotopia* ou são *homotopicamente equivalentes* quando são isomorfos na categoria TopH . Portanto, a definição explícita é a seguinte:

DEFINIÇÃO 2.2.1. Dois espaços topológicos X e Y *têm o mesmo tipo de homotopia* ou são *homotopicamente equivalentes* se, e somente se, existem duas funções contínuas $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow X$ tais que $g \circ f \sim \text{id}_X$ e $f \circ g \sim \text{id}_Y$. Neste caso a função f e a função g são ditas *equivalências homotópicas* entre X e Y e usamos a notação $X \simeq Y$. Para indicar que X e Y são homeomorfos, usamos a notação $X \approx Y$. \diamond

OBSERVAÇÃO 2.2.2. As relações $g \circ f \sim \text{id}_X$ e $f \circ g \sim \text{id}_Y$ podem ser expressas a respeito das classes de homotopia na forma $[g] \circ [f] = [\text{id}_X]$ e $[f] \circ [g] = [\text{id}_Y]$, o que mostra que $[f]$ e $[g]$ são isomorfismos na categoria TopH inversos entre si. \diamond

Intuitivamente dois espaços homotopicamente equivalentes têm “a mesma forma” a menos de “esmagar” (mais precisamente, contrair) ou “esticar” com continuidade algumas partes do espaço.

EXEMPLO 2.2.3. \mathbb{R}^n é homotopicamente equivalente a um ponto. De fato, consideremos a função $f: \{*\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $* \mapsto 0$, e a única possível $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \{*\}$. Temos que $g \circ f = \text{id}_{\{*\}}$, portanto nesta direção nem precisamos de uma homotopia. Ademais, $f \circ g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a função constante $f \circ g(x) = 0$, que é homotópica a $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$ através da homotopia $F(x, t) = (1 - t)x$.

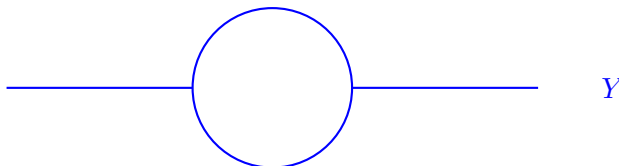


Intuitivamente, imaginamos de contrair \mathbb{R}^n na origem de modo contínuo, ou de puxar a origem em todas as direções até “esticá-la” a \mathbb{R}^n todo: por isso, o espaço todo e a origem são homotopicamente equivalentes. \diamond

EXEMPLO 2.2.4. Um cilindro é homotopicamente equivalente a um círculo. Sendo o cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ e sendo \mathbb{R} homotopicamente equivalente a um ponto, temos o resultado. Intuitivamente, imaginamos o cilindro em posição vertical, escolhemos uma seção horizontal que determina um círculo e imaginamos de contrair com continuidade o cilindro no círculo, ou de puxar o círculo acima e abaixo até formar um cilindro. \diamond

EXEMPLO 2.2.5. S^1 e um ponto *não* são homotopicamente equivalentes. Para prová-lo rigorosamente precisamos do grupo fundamental, todavia pode-se intuir que não é possível contrair o círculo em um ponto *sem sair do círculo mesmo*: não é permitido contrair dentro de \mathbb{R}^2 , pois o único espaço envolvido é S^1 mesmo, independentemente do mergulho em \mathbb{R}^2 (só “puxando” se podem criar novos pontos fora do espaço, pois nesse caso a operação toda fica contida no espaço maior que se obtém). Se poderia puxar o círculo dentro de \mathbb{R}^2 enchendo a bola sem a origem, mas encher a origem é uma operação cuja inversa não é contínua: as várias direções de aproximação bateriam na origem e, para achar uma homotopia contrária, seria necessário rasgar a bola puxando da origem em todas as direções. Vice-versa, puxando um ponto se obtém uma bola ou um disco, mas para chegar a S^1 seria preciso furar a bola, o que não é uma operação contínua. Analogamente, S^n não é homotopicamente equivalente a um ponto para todo $n \in \mathbb{N}$. Provaremos também que S^n e S^m não são homotopicamente equivalentes se $n \neq m$. \diamond

EXEMPLO 2.2.6. Sejam X o cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ e Y a união de S^1 (pensado como subespaço de \mathbb{R}^2) e das duas semirretas contidas no eixo $\mathbb{R} \times \{0\}$ definidas por $x \geq 1$ e $x \leq -1$.



Neste caso X e Y são homotopicamente equivalentes: de fato, em Y podem-se contrair as duas semirretas nos pontos $(1, 0)$ e $(-1, 0)$, obtendo S^1 ; ademais X pode ser contraído a S^1 , portanto X e Y são homotopicamente equivalentes a S^1 . Como a equivalência homotópica é uma relação de equivalência, obtemos a tese. Para verificar diretamente a definição, podemos considerar as duas funções $f: X \rightarrow Y$, que projeta $S^1 \times \mathbb{R}$ em S^1 e mergulha S^1 em Y , e $g: Y \rightarrow X$, que projeta Y em S^1 e mergulha S^1 em $S^1 \times \mathbb{R}$. Neste caso, $g \circ f$ é a projeção do cilindro em S^1 , que é homotópica a id_X , como pode-se verificar contraindo com continuidade o cilindro a S^1 . Vice-versa, $f \circ g$ é a função que projeta Y em S^1 , a qual é homotópica a id_Y , como pode-se verificar contraindo as duas semirretas com continuidade. \diamond

Os espaços que têm mesmo tipo de homotopia de um ponto, por exemplo \mathbb{R}^n , merecem um nome específico.

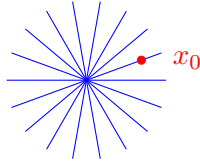
DEFINIÇÃO 2.2.7. Um espaço é dito *contrátil* quando for homotopicamente equivalente a um ponto. \diamond

2.2.1. Equivalência homotópica nas categorias Top_n e Top_{n+} . Podemos facilmente estender a noção de equivalência homotópica às categorias Top_n e Top_{n+} .

Por exemplo, dois pares (X, A) e (Y, B) têm o mesmo tipo de homotopia quando são isomorfos em TopH_2 , ou seja, quando existem duas funções $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ e $g: (Y, B) \rightarrow (X, A)$ tais que $g \circ f \sim \text{id}_{(X,A)}$ e $f \circ g \sim \text{id}_{(Y,B)}$. Os pares (X, A) e (Y, B) são isomorfos em TopHR quando existem $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ e $g: (Y, B) \rightarrow (X, A)$ tais que $g \circ f \sim_A \text{id}_X$ e $f \circ g \sim_B \text{id}_Y$. Em particular, isso implica que $f|_A: A \rightarrow B$ e $g|_B: B \rightarrow A$ são homeomorfismos. Dois espaços com ponto marcado (X, x_0) e (Y, y_0) têm o mesmo tipo de homotopia quando são isomorfos em TopH_+ , e assim em diante.

2.2.2. Contra-exemplos. Dados dois espaços com ponto marcado (X, x_0) e (Y, y_0) , pode acontecer que não sejam isomorfos em TopH_+ mesmo se X e Y têm o mesmo tipo de homotopia.

EXEMPLO 2.2.8. Seja $X \subset \mathbb{R}^2$ a união dos raios de S^1 que formam um ângulo racional (a menos de um fator 2π) com o semieixo x positivo, ou seja, $X = \{re^{2\pi i\theta} \in \mathbb{C} : 0 \leq r \leq 1, \theta \in \mathbb{Q}\}$. Seja $x_0 \in X \setminus \{0\}$.



O espaço X é contrátil, pois se retrai na origem com continuidade ao longo dos raios, logo X é homotopicamente equivalente ao espaço $\{*\}$ formado por um ponto. Todavia, (X, x_0) não é isomorfo a $(\{*\}, *)$ em TopH_+ , pois não existe um modo contínuo de retrair X a x_0 que mantenha x_0 fixo.² \diamond

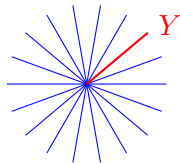
Analogamente, dados dois pares de espaços (X, A) e (Y, B) , pode acontecer que X e Y tenham o mesmo tipo de homotopia e que também A e B tenham o mesmo tipo de homotopia, mas que os dois pares não o tenham, mesmo se existem duas equivalências homotópicas $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow X$, inversas entre si, cujas restrições $f|_A: A \rightarrow B$ e $g|_B: B \rightarrow A$ são também equivalências homotópicas inversas entre si. O mesmo vale para graus superiores.

EXEMPLO 2.2.9. Consideremos os espaços do exemplo 2.2.8, pensados como os pares $(X, A) = (X, \{x_0\})$ e $(Y, B) = (\{*\}, \{*\})$. Os pares (X, A) e (Y, B) não são isomorfos em TopH_2 (logo nem em TopHR), apesar de X e Y serem isomorfos em TopH e de A e B serem também isomorfos em TopH . Mais precisamente, as equivalências homotópicas $f: Y \rightarrow X, * \mapsto x_0$, e $g: X \rightarrow Y, x \mapsto *$, se restringem a equivalências homotópicas entre A e B inversas entre si, mas não são equivalências homotópicas de pares. Deformando levemente estes espaços, podemos achar exemplos em que A e B não se reduzem a um ponto. Por exemplo, com o mesmo espaço X , podemos definir $A \subset X$ como um segmento afastado da origem, $Y = D^2$ como o disco unitário e $B \subset Y$ como o disco de raio $\frac{1}{2}$. \diamond

Também pode acontecer que dois pares (X, A) e (Y, B) sejam isomorfos em TopH_2 , mas não em TopHR , mesmo se existem equivalências homotópicas inversas $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ e $g: (Y, B) \rightarrow (X, A)$ em TopH_2 tais que $f|_A: A \rightarrow B$ e $g|_B: B \rightarrow A$ são homeomorfismos e $g|_B = (f|_A)^{-1}$.

²Para uma prova rigorosa, v. [1] exercício 5 p. 18, usando a noção de retrato por deformação, que introduziremos daqui a pouco. O exercício 6(a) mostra um exemplo bem parecido.

EXEMPLO 2.2.10. Considerando o mesmo espaço X do exemplo 2.2.8, seja $Y = \{re^{2\pi i\theta_0} : 0 \leq r \leq 1\}$, para $\theta_0 \in \mathbb{Q}$ fixado.



Ficam definidos o mergulho $i: (Y, Y) \hookrightarrow (X, Y)$ e a projeção $\pi: (X, Y) \rightarrow (Y, Y)$, sendo $\pi(re^{2\pi i\theta}) := re^{2\pi i\theta_0}$. Podemos verificar que i e π são isomorfismos em TopH_2 . De fato, $\pi \circ i = \text{id}_{(Y, Y)}$ e $i \circ \pi \sim \text{id}_{(X, Y)}$, através da seguinte homotopia. Partindo de $\text{id}_{(X, Y)}$, retraímos X na origem com continuidade ao longo dos raios, de modo que (X, Y) se retraia em $(\{0\}, \{0\})$; em seguida, dilatamos a origem até formar o raio Y , de modo que a função final seja $i \circ \pi$. Os pontos de Y se mexem ao longo da homotopia, mas sem saírem de Y , portanto se trata de um isomorfismo de pares. Observamos que i e π se restringem à identidade de Y , portanto se restringem a dois homeomorfismos de Y a Y , um inverso do outro. Todavia, não são isomorfos em TopHR , pois não há um modo contínuo de retrair X a Y sem mexer os pontos de Y diferentes da origem. \diamond

2.2.3. Exercícios.

2.1. Dada uma função contínua $f: X \rightarrow Y$, demonstre que:

- se X ou Y for contrátil, então f é homotópica a uma função constante;
- se f for homotópica a uma função constante e Y for conexo por caminhos (em particular, se Y for contrátil), então f é homotópica a qualquer função constante de X a Y .

2.2.4. Componentes conexas (por caminhos). Destacamos um fato importante: *o número de componentes conexas por caminhos é invariante por equivalência homotópica*. Na verdade podemos dizer mais. Dado um espaço topológico X , chamamos de $\pi_0(X)$ o conjunto das componentes conexas por caminhos de X . Vamos mostrar que uma função contínua $f: X \rightarrow Y$ induz uma função $f_*: \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$, definida por $f_*[x] = [f(x)]$. De fato, sejam $x_0, x_1 \in X$ pertencentes à mesma componente. Então existe um caminho $\varphi: I \rightarrow X$ tal que $\varphi(0) = x_0$ e $\varphi(1) = x_1$. É claro que o caminho $f \circ \varphi: I \rightarrow Y$ une $f(x_0)$ e $f(x_1)$, que portanto pertencem à mesma componente de Y . Por isso f_* está bem definida. Ademais, é imediato verificar que, dadas $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$, temos que $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. Enfim, $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_0(X)}$. Por isso, obtemos um functor:

$$\pi_0: \text{Top} \rightarrow \text{Sets}.$$

Para sermos uniformes com os grupos de homotopia que definiremos no capítulo 4, preferimos considerar o functor:

$$(49) \quad \pi_0: \text{Top}_+ \rightarrow \text{Sets}_+,$$

sendo Sets_+ a categoria dos conjuntos com um ponto marcado. Claramente a componente conexa do ponto marcado de um espaço X vai ser mandada no ponto marcado do conjunto $\pi_0(X)$ (isso não é importante em relação ao que estamos discutindo agora). Suponhamos agora que $f, g: X \rightarrow Y$ sejam homotópicas e mostremos que $f_* = g_*$. De fato, seja $F: f \sim g$ uma homotopia e seja $x \in X$. O

caminho $\varphi(t) = F(x, t)$ une $f(x)$ e $g(x)$, portanto $f(x)$ e $g(x)$ pertencem à mesma componente de Y . Por isso, podemos refinar o functor precedente ao seguinte:

$$(50) \quad \pi_0: \text{TopH}_+ \rightarrow \text{Sets}_+.$$

O lema 2.2.6, aplicado ao functor (50), implica que uma equivalência homotópica entre dois espaços induz uma bijeção entre as componentes conexas por caminhos.

O mesmo aconteceria considerando o conjunto das componentes conexas, não necessariamente por caminhos. De fato, uma função contínua manda componentes conexas em componentes conexas, portanto f_* fica bem definida. Se $f \sim g$, mostramos que os pontos $f(x)$ e $g(x)$ pertencem à mesma componente conexa por caminhos do contradomínio, portanto, em particular, à mesma componente conexa. Isso mostra que f_* só depende da classe de homotopia de f .

2.3. Retratos e retratos por deformação

Nos exemplos 2.2.3 e 2.2.4 de espaços homotopicamente equivalentes, uma das duas equivalências homotópicas que mostramos mergulha um espaço dentro do outro, enquanto no exemplo 2.2.6 isso não acontece. Nesta seção consideraremos casos em que um dos dois espaços está mergulhado no outro. Vamos considerar o exemplo de \mathbb{R}^n e de um ponto, pensando no ponto como na origem de \mathbb{R}^n . Neste caso, não somente os dois espaços têm o mesmo tipo de homotopia, mas é possível contrair com continuidade \mathbb{R}^n na origem mantendo fixa a origem mesma. É suficiente considerar a homotopia $F(x, t) = (1 - t)x$. O mesmo acontece considerando um cilindro e uma seção homeomorfa a S^1 : podemos contrair o cilindro no círculo de ambos os lados, mantendo o círculo firme.

DEFINIÇÃO 2.3.1. Seja $(X, A) \in \text{Ob}(\text{Top}_2)$. O subespaço A é dito *retrato por deformação* de X se existe uma função contínua $F: X \times I \rightarrow X$ tal que:

- (1) $F(x, 0) = x$ para todo $x \in X$;
- (2) $F(a, t) = a$ para todos $a \in A$ e $t \in I$;
- (3) $F(x, 1) \in A$ para todo $x \in X$.

A função F é dita *retração por deformação*. ◇

Vamos analisar brevemente a definição. Consideremos o mergulho $i: A \hookrightarrow X$ e a função $r: X \rightarrow A$ definida por $r(x) := F(x, 1)$. Temos que $r|_A = \text{id}_A$ pelo item (2) com $t = 1$, em particular r é sobrejetora. Equivalentemente, $r \circ i = \text{id}_A$. Isso implica obviamente que $r \circ i \sim \text{id}_A$. Do outro lado, a função $i \circ r: X \rightarrow X$ é homotópica a id_X relativamente a A graças a F . Por isso temos que $r \circ i \sim \text{id}_A$ e $i \circ r \sim \text{id}_X$, logo X e A são homotopicamente equivalentes. Contudo, veremos que o fato de ser A um retrato por deformação de X é bem mais forte que o fato de A e X serem homotopicamente equivalentes. Já mencionamos dois exemplos de retratos por deformação: $(\mathbb{R}^n, \{0\})$ e $(S^1 \times \mathbb{R}, S^1 \times \{0\})$. Enfim, observamos que a *definição de retrato por deformação é equivalente ao fato que o mergulho $i: (A, A) \hookrightarrow (X, A)$ seja um isomorfismo na categoria TopHR , o inverso sendo a função r* . De fato:

- Seja $i: (A, A) \hookrightarrow (X, A)$ um isomorfismo em TopHR e seja $r: (X, A) \rightarrow (A, A)$ o isomorfismo inverso. Então em particular $i \circ r \sim_A \text{id}_X$: seja F

uma tal homotopia relativa. Temos que $F(x, 0) = x$, $F(x, 1) = r(x) \in A$ e $F(a, t) = a$ para todos $a \in A$ e $t \in I$, portanto F é uma retração por deformação.

- Reciprocamente, seja F uma retração por deformação e seja $r(x) := F(x, 1)$. Então fica bem definido o morfismo $r: (X, A) \rightarrow (A, A)$, F é uma homotopia entre $i \circ r$ e id_X relativa a A e $r \circ i = \text{id}_A$, portanto r é o morfismo inverso a i em TopHR .

Podemos dar uma definição bem mais fraca, mas também interessante, que se obtém considerando a função r que acabamos de construir, sem pedir nenhuma propriedade homotópica.

DEFINIÇÃO 2.3.2. Seja $(X, A) \in \text{Ob}(\text{Top}_2)$. O subespaço A é dito *retrato* de X se existe uma função contínua $r: X \rightarrow A$ tal que $r|_A = \text{id}_A$. Neste caso a função r é dita *retração*. \diamond

A definição de retrato é equivalente ao fato que o mergulho $i: (A, A) \hookrightarrow (X, A)$ seja invertível à esquerda na categoria TopHR , ou também *ao fato que o mergulho $i: A \hookrightarrow X$ seja invertível à esquerda na categoria Top* . Os próximos exemplos mostram que ser invertível à esquerda na categoria Top é bem mais forte que ser uma função injetora, pois nem todo subespaço é um retrato.

EXEMPLO 2.3.3. Sejam $X = S^1$ e $A = \{p\}$, sendo $p \in S^1$ um ponto qualquer. Claramente A é retrato de X graças à retração constante $r: S^1 \rightarrow \{p\}$, todavia não pode ser retrato por deformação, pois S^1 e $\{p\}$ não são homotopicamente equivalentes. \diamond

EXEMPLO 2.3.4. Mostraremos que S^1 , pensado como o equador, não é retrato de S^2 : para uma prova rigorosa vamos precisar do grupo fundamental, mas pode-se intuir que uma função de S^2 ao equador, que fixa o equador, tem de rasgar os dois hemisférios no meio, portanto não pode ser contínua. Pelo mesmo motivo, o bordo S^1 não é retrato do disco D^2 . \diamond

Podemos também definir uma retração $r: X \rightarrow A$ como uma função $r: X \rightarrow X$ cuja imagem é A e tal que $r^2 = r$. Por isso, *as retrações desempenham em topologia um papel análogo ao das projeções nos espaços vetoriais* (de dimensão finita ou infinita).

LEMA 2.3.5. *Seja A um retrato de X , sendo X de Hausdorff ou compactamente gerado. O subespaço A é fechado em X .*

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos uma retração $r: X \rightarrow A$, que pensamos como uma função $r: X \rightarrow X$ cuja imagem é A . Seja $\tilde{r} := r \times \text{id}: X \rightarrow X \times X$. Denotando por $\Delta \subset X \times X$ a diagonal, temos que $A = \tilde{r}^{-1}(\Delta)$. Se X for de Hausdorff, então Δ é fechada, logo A é fechado em X . Se X for compactamente gerado, vale a mesma demonstração substituindo $X \times X$ por $X \times_k X$. \square

A respeito do cone e do cilindro, valem as seguintes observações.

OBSERVAÇÕES 2.3.6. Sejam X um espaço topológico, $x_0 \in X$ e $f: A \rightarrow X$ uma função contínua. Temos as seguintes retrações por deformação naturais:

- de $\text{Cyl}(X)$ em $X \times \{0\}$, definida por $F: \text{Cyl}(X) \times I \rightarrow \text{Cyl}(X)$, $((x, t), u) \mapsto (x, t(1 - u))$;
- de CX ao vértice, definida por $F: CX \times I \rightarrow CX$, $[(x, t), u] \mapsto [(x, 1 - (1 - t)(1 - u))]$; isso mostra que CX é contrátil para todo espaço X ;
- de $\text{Cyl}(X, x_0)$ em $(X \times \{0\}, (x_0, 0))$ e de $C(X, x_0)$ no vértice, ambas definidas como no caso não reduzido;
- de $\text{Cyl}(f)$ em X , definida retraindo $\text{Cyl}(A)$ em A e compondo com a projeção ao quociente; o mesmo vale se f for uma função entre espaços com ponto marcado. \diamond

2.3.1. Versão fraca I. Já destacamos que a definição de retrato por deformação é equivalente ao fato que o mergulho $i: (A, A) \hookrightarrow (X, A)$ seja um isomorfismo na categoria TopHR . Podemos também pedir que i seja um isomorfismo na categoria TopH_2 . Isso equivale a pedir, na hipótese (2) da definição 2.3.1, somente que $F(a, t) \in A$ para todo $t \in I$ e $a \in A$, conforme a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 2.3.7. Seja $(X, A) \in \text{Ob}(\text{Top}_2)$. O subespaço A é dito *retrato por deformação fraco* de X se existe uma função contínua $F: X \times I \rightarrow X$ tal que:

- (1) $F(x, 0) = x$ para todo $x \in X$;
- (2) $F(a, t) \in A$ para todos $a \in A$ e $t \in I$;
- (3) $F(x, 1) \in A$ para todo $x \in X$.

A função F é dita *retração por deformação fraca*. \diamond

De fato:

- Seja $i: (A, A) \hookrightarrow (X, A)$ um isomorfismo em TopH_2 e seja $r: (X, A) \rightarrow (A, A)$ um morfismo inverso. Então, em particular, $i \circ r \sim \text{id}_{(X, A)}$: seja F uma homotopia. Temos que $F(x, 0) = x$, $F(x, 1) = r(x) \in A$ e $F(a, t) \in A$ para todos $a \in A$ e $t \in I$, portanto F é uma retração fraca por deformação.
- Reciprocamente, seja F uma retração fraca por deformação e seja $r(x) := F(x, 1)$. Então F é uma homotopia entre r e $\text{id}_{(X, A)}$ por definição, portanto $i \circ r \sim \text{id}_{(X, A)}$. Ademais, é bem definida a restrição $F|_{A \times I}: A \times I \rightarrow A$, que é uma homotopia $r \circ i \sim \text{id}_A$, pois $F(a, 0) = a$ e $F(a, 1) = r(a)$.

Acabamos de mostrar que a função $r: X \rightarrow A$, definida por $r(x) := F(x, 1)$, só satisfaz $r \circ i \sim \text{id}_A$, não necessariamente a igualdade. Neste caso, vale a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 2.3.8. Seja $(X, A) \in \text{Ob}(\text{Top}_2)$. O subespaço A é dito *retrato fraco* de X se existe uma função contínua $r: X \rightarrow A$ tal que $r|_A \sim \text{id}_A$. Neste caso a função r é dita *retração fraca*. \diamond

A definição de retrato fraco é equivalente ao fato que o mergulho $i: (A, A) \hookrightarrow (X, A)$ seja invertível à esquerda na categoria TopH_2 , ou também *ao fato que o mergulho $i: A \hookrightarrow X$ seja invertível à esquerda na categoria TopH* .

2.3.2. Versão fraca II. A definição 2.3.1 (respetivamente 2.3.7) equivale ao fato que o mergulho $i: (A, A) \hookrightarrow (X, A)$ seja um isomorfismo na categoria TopHR (respetivamente TopH_2). Em particular, em ambos os casos, $i: A \hookrightarrow X$ é um

isomorfismo na categoria TopH , isto é, é uma equivalência homotópica. Por isso, podemos obter uma versão ainda mais fraca da noção de retração por deformação da seguinte maneira.

DEFINIÇÃO 2.3.9. Seja $(X, A) \in \text{Ob}(\text{Top}_2)$. O subespaço A é dito *retrato fraco por homotopia* de X se $i: A \hookrightarrow X$ é uma equivalência homotópica. \diamond

Vamos comparar explicitamente esta definição com as precedentes. O fato que $i: A \hookrightarrow X$ seja um isomorfismo em TopH equivale por definição à existência de um morfismo inverso $r: X \rightarrow A$, logo têm que existir duas homotopias $F: i \circ r \sim \text{id}_X$ e $G: r \circ i \sim \text{id}_A$. Por definição, F verifica as duas condições $F(x, 0) = x$ e $F(x, 1) = r(x) \in A$ para todo $x \in X$, logo temos que desconsiderar a hipótese (2) das definições 2.3.1 e 2.3.7. Neste caso, a existência da homotopia G , tal que $G(a, 0) = a$ e $G(a, 1) = r(a)$ para todo $a \in A$, não é consequência da existência de F (como acontecia com as definições 2.3.1 e 2.3.7), pois $F|_{A \times I}$ em geral não está bem definida. Observamos que a função $r: X \rightarrow A$ continua sendo uma retração fraca (como no caso de um retrato por deformação fraco), pois a condição $r \circ i \sim \text{id}_A$ é a mesma considerando o par (A, A) ou somente espaço A .

Às vezes se encontram definições intermediárias, por exemplo pedindo que exista uma retração (não somente fraca) que seja inversa a $i: (A, A) \hookrightarrow (X, A)$ em TopH_2 . Neste caso a hipótese (2) das definições 2.3.1 e 2.3.7 tem que ser substituída por $F(a, 1) = a$ e $F(a, t) \in A$ para todos $a \in A$ e $t \in [0, 1)$. Em particular, isso implica que A seja retrato por deformação fraco de X e também retrato (v. exercício 2.2 da seção 2.3.5). Claramente podem-se considerar várias combinações deste tipo dependendo do contexto. *Na verdade, só as noções de retrato e retrato por deformação serão significativas:* de fato, mostraremos que, para pares suficientemente regulares (ou seja, para *cofibrações*), as três noções de retrato por deformação, retrato por deformação fraco e retrato fraco por homotopia são equivalentes e as duas noções de retrato e retrato fraco o são também.

2.3.3. Resumo e exemplos. Resumindo, dado um par (X, A) , temos o seguinte diagrama:

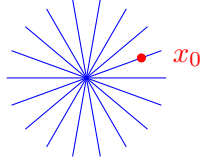
$$(51) \quad \begin{array}{ccccc} A \text{ ret. def. } X & \implies & A \text{ ret. def. fr. } X & \implies & A \text{ ret. fr. hom. } X & \implies & X \simeq A \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \swarrow & & \\ A \text{ ret. } X & \implies & A \text{ ret. fr. } X & & & & \end{array}$$

Desleixando pelo momento a segunda e a terceira coluna, os seguintes exemplos mostram que as flechas não podem ser invertidas.

EXEMPLO 2.3.10. Já mostramos que A pode ser retrato de X sem que A e X sejam homotopicamente equivalentes: $X = S^1$ e $A = \{p\}$. Isso prova em particular que A pode ser retrato de X sem ser retrato por deformação. \diamond

EXEMPLO 2.3.11. Pode acontecer que A seja homotopicamente equivalente a X sem ser retrato (nem fraco; em particular, isso implica que A não é retrato fraco por homotopia de X). Um exemplo é o seguinte: sejam $X = D^2 \setminus \{0\}$ e $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - (\frac{1}{2}, 0)\| = \frac{1}{8}\}$. Os espaços X e A são homotopicamente equivalentes a S^1 , todavia uma retração de X a A se restringiria a uma retração do disco interno a A a A mesmo, o que é impossível. \diamond

EXEMPLO 2.3.12. Enfim, pode acontecer que A seja retrato de X e homotopicamente equivalente a X , sem ser retrato por deformação. Por exemplo, consideremos de novo o espaço $X = \{re^{2\pi i\theta} \in \mathbb{C} : 0 \leq r \leq 1, \theta \in \mathbb{Q}\}$. Seja $x_0 \in X \setminus \{0\}$.



Temos que $\{x_0\}$ é um retrato de X e é homotopicamente equivalente a X , pois X é contrátil. Todavia, não é um retrato por deformação, pois não é possível retrair X a $\{x_0\}$ com continuidade sem mexer x_0 .³ \diamond

Para achar contra-exemplos relativos às versões fracas, vamos utilizar o exercício 2.1 da seção 2.2.3, que afirma o seguinte. Dada uma função contínua $f: X \rightarrow Y$:

- se X ou Y for contrátil, então f é homotópica a uma função constante;
- se f for homotópica a uma função constante e Y for conexo por caminhos (em particular, se Y for contrátil), então f é homotópica a qualquer função constante de X a Y .

A partir disso é fácil demonstrar o seguinte lema.

LEMA 2.3.13. *Seja (X, A) um par de espaços.*

- (1) *Se A for contrátil, então é um retrato fraco de X .*
- (2) *Se A e X forem ambos contráteis, então A é um retrato fraco por homotopia de X .*

DEMONSTRAÇÃO. (1) A identidade de A é homotópica a uma função constante $c: A \rightarrow A$. Seja x_0 a imagem de c . Definimos $r: X \rightarrow A$, $r(x) = x_0$. Temos que $r \circ i = c \sim \text{id}_A$, portanto r é uma retração fraca. (2) A composição $i \circ r$, sendo constante, é homotópica à identidade de X , portanto i e r são equivalências homotópicas. \square

EXEMPLO 2.3.14. O exemplo 2.3.10 mostra também que A pode ser retrato (fraco) de X sem ser retrato por deformação fraco, pois X e A não têm o mesmo tipo de homotopia. O exemplo 2.3.11 mostra também que A pode ser homotopicamente equivalente a X sem ser retrato fraco (portanto nem retrato por deformação fraco ou retrato fraco por homotopia). Enfim, o exemplo 2.3.12 mostra também que A pode ser retrato (fraco) de X e homotopicamente equivalente a X , sem ser retrato por deformação fraco. \diamond

EXEMPLO 2.3.15. Sejam $X = \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ e $A = \mathbb{Q} \cap [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Os espaços A e X são homeomorfos, portanto são homotopicamente equivalentes. A seguinte função é uma retração de X a A :

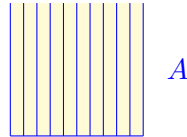
$$r: X \rightarrow A$$

$$x \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{2} & x \in [-1, -\frac{1}{2}] \\ x & x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ \frac{1}{2} & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

³Na verdade, pode também acontecer que um espaço X seja contrátil mas que nenhum ponto dele seja seu retrato por deformação (v. [1, Cap. 0, ex. 6]).

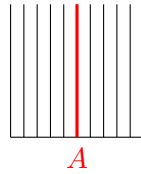
Todavia, o mergulho $i: A \hookrightarrow X$ não é uma equivalência homotópica, pois, como todo ponto é uma componente conexa, a única função de X a X , homotópica à identidade, é a identidade mesma. \diamond

EXEMPLO 2.3.16. Sejam $X = I \times I \subset \mathbb{R}^2$ e $A \subset X$ o subespaço definido da seguinte maneira: A contém a base $I \times \{0\}$ e os segmentos verticais $\{q\} \times I$ para todo $q \in \mathbb{Q} \cap I$.



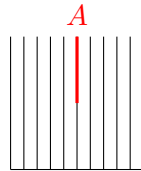
Como A é contrátil, é um retrato fraco de X , mas não é um retrato. De fato, sendo A denso em X , se $r: X \rightarrow A$ fosse uma retração teria que ser a identidade, o que é impossível pois $A \neq X$. \diamond

EXEMPLO 2.3.17. Seja X o espaço que, no exemplo precedente, era o sub-espaço A . Seja $A = \{\frac{1}{2}\} \times I$.



Temos que A é um retrato por deformação fraco de X , através da retração constante $r(x, y) = (\frac{1}{2}, 0)$. De fato, é possível retraindo com continuidade X na base $I \times \{0\}$ e retraindo a base em $(\frac{1}{2}, 0)$, de modo que os pontos de A não saiam de A mesmo. Todavia, não é um retrato por deformação, pois, se existisse uma retração por deformação, todos os pontos que não pertencem a A teriam que passar pela base $I \times \{0\}$ para alcançarem A . Por continuidade, isso teria que acontecer também com os pontos de A , o que é impossível, pois os pontos de A não podem mexer-se. Observamos que A é também retrato (forte) de X , através da retração $(t, u) \mapsto (\frac{1}{2}, u)$. Isso mostra que A pode ser retrato (forte) de X e retrato por deformação fraco, sem ser retrato por deformação (forte). \diamond

EXEMPLO 2.3.18. Seja X o mesmo espaço do exemplo precedente e seja $A = \{\frac{1}{2}\} \times [\frac{1}{2}, 1]$.



Como A e X são contráteis, A é um retrato fraco por homotopia de X . Todavia, não é um retrato por deformação fraco, pois todos os pontos que não pertencem a A teriam que passar pela base $I \times \{0\}$ para alcançarem A . Por continuidade, isso teria que acontecer também com os pontos de A , que portanto teriam de sair de A ao longo da homotopia. \diamond

Observamos enfim que as definições precedentes podem ser generalizadas às categorias análogas com n genérico. Por exemplo, o par $(A, A') \subset (X, X')$ é retrato por deformação de (X, X') se o mergulho $i: (A, A', A) \hookrightarrow (X, X', A)$ é um isomorfismo em TopHR_2 e assim em diante. Não precisaremos disso nos próximos capítulos.

2.3.4. Equivalência homotópica vs retração por deformação. Vamos concluir falando da relação mais geral entre equivalência homotópica e retração por deformação. Se A for retrato por deformação de X , então A e X são homotopicamente equivalentes, mas já destacamos que, em geral, dois espaços X e Y podem ser homotopicamente equivalentes sem que um esteja contido no outro. Neste caso nem faz sentido perguntar-se se X é retrato por deformação de Y ou vice-versa. Contudo, há uma relação geral entre a noção de equivalência homotópica e a de retração por deformação: mostraremos que dois espaços X e Y são homotopicamente equivalentes se, e somente se, existe um espaço Z que contém ambos e tal que X e Y são retratos por deformação de Z .

2.3.5. Exercícios.

2.2. Seja (X, A) um par de espaços tal que existe uma retração (não somente fraca) que seja inversa a $i: (A, A) \hookrightarrow (X, A)$ em TopH_2 . Demonstre que A não é necessariamente retrato por deformação de X . Complete o diagrama (51) incluindo esta possibilidade.

2.4. Equivalência homotópica de morfismos

Podemos introduzir a noção adequada de homotopia entre dois morfismos da categoria $\text{Hom}(\text{Top})$. Dada uma função contínua $f: A \rightarrow X$, chamamos de f_I a seguinte função:

$$f_I := f \times \text{id}: A \times I \rightarrow X \times I.$$

Ademais, dados uma função $g: A \times I \rightarrow X$ e $t \in I$, chamamos de $g_t: A \rightarrow X$ a função $a \mapsto g(a, t)$.

DEFINIÇÃO 2.4.1. Sejam $f: A \rightarrow X$ e $g: B \rightarrow Y$ funções contínuas. Sejam $(k, h), (k', h'): f \rightarrow g$ morfismos em $\text{Hom}(\text{Top})$. Uma *homotopia* entre (k, h) e (k', h') é um morfismo $(K, H): f_I \rightarrow g$ tal que $(K_0, H_0) = f$ e $(K_1, H_1) = g$. \diamond

É fácil verificar que a existência de uma homotopia define uma relação de equivalência no conjunto dos morfismos entre dois objetos, compatível com a composição. Por isso, fica definida a categoria $\text{HomH}(\text{Top})$, cujos objetos coincidem com os de $\text{Hom}(\text{Top})$ e cujos morfismos são o quociente dos de $\text{Hom}(\text{Top})$ por homotopia.

OBSERVAÇÃO 2.4.2. A categoria $\text{HomH}(\text{Top})$ é diferente da categoria $\text{Hom}(\text{TopH})$. De fato, um objeto de $\text{HomH}(\text{Top})$ é um objeto de $\text{Hom}(\text{Top})$, isto é, uma função contínua. Ao contrário, um objeto de $\text{Hom}(\text{TopH})$ é um morfismo em TopH , isto é, uma classe de homotopia de funções contínuas. Obviamente isso implica que também os morfismos de $\text{HomH}(\text{Top})$ sejam diferentes dos de $\text{Hom}(\text{TopH})$. \diamond

DEFINIÇÃO 2.4.3. Duas funções contínuas $f: A \rightarrow X$ e $g: B \rightarrow Y$ são *homotopicamente equivalentes* ou *têm o mesmo tipo de homotopia* se são isomorfas em $\text{HomH}(\text{Top})$. Um isomorfismo entre elas é dito *equivalência homotópica*. \diamond

Isso significa que f e g são homotopicamente equivalentes se existem dois morfismos $(k, h): f \rightarrow g$ e $(k', h'): g \rightarrow f$ em $\text{Hom}(\text{Top})$ tais que $(k', h') \circ (k, h) \sim \text{id}_f$ e

$(k, h) \circ (k', h') \sim \text{id}_g$, como mostra o seguinte diagrama:

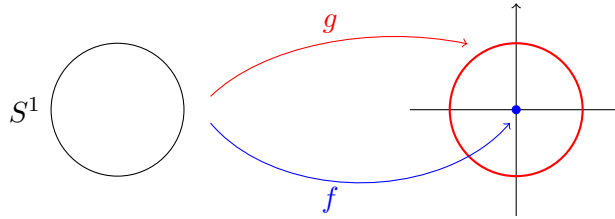
$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & X & & A \times I & \xrightarrow{f_I} & X \times I & & B \times I & \xrightarrow{g_I} & Y \times I \\
 \left. \begin{array}{c} \uparrow h' \\ \downarrow h \end{array} \right\} & & & & \Psi \downarrow & & \downarrow \Phi & & \Psi' \downarrow & & \downarrow \Phi' \\
 B & \xrightarrow{g} & Y & & A & \xrightarrow{f} & X & & B & \xrightarrow{g} & Y,
 \end{array}$$

sendo $\Phi: k' \circ k \sim \text{id}_X$, $\Psi: h' \circ h \sim \text{id}_A$, $\Phi': k \circ k' \sim \text{id}_Y$ e $\Psi': h \circ h' \sim \text{id}_B$. Isso implica, em particular, que h e h' são equivalências homotópicas entre A e B e k e k' são equivalências homotópicas entre X e Y , portanto X e Y têm o mesmo tipo de homotopia e A e B também. Todavia, a existência de duas equivalências homotópicas $k: X \rightarrow Y$ e $h: A \rightarrow B$, tais que $k \circ f = g \circ h$, não garante sozinha que f e g sejam homotopicamente equivalentes, pois:

- também o par (k', h') deve ser um morfismo em $\text{Hom}(\text{Top})$, ou seja, têm que existir inversos homotópicos k' e h' tais que $k' \circ g = f \circ h'$;
- também as homotopias $(\Phi, \Psi): (k' \circ k, h' \circ h) \sim \text{id}_f$ e $(\Phi', \Psi'): (k \circ k', h \circ h') \sim \text{id}_g$ devem ser morfismos em $\text{Hom}(\text{Top})$, ou seja, têm que tornar os diagramas correspondentes comutativos.

O fato que as duas funções f e g sejam homotopicamente equivalentes é diferente do fato que sejam homotópicas. De fato, se $(A, B) \neq (X, Y)$, nem faz sentido perguntar-se se f e g são homotópicas. Quando $(A, B) = (X, Y)$, os seguintes exemplos mostram que, em geral, não existe nenhuma relação entre o fato que duas funções $f, g: A \rightarrow X$ sejam homotópicas e o fato que sejam homotopicamente equivalentes.

EXEMPLO 2.4.4. Consideremos as duas funções $f, g: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, sendo f a função constante com valor 0 e g o mergulho natural.

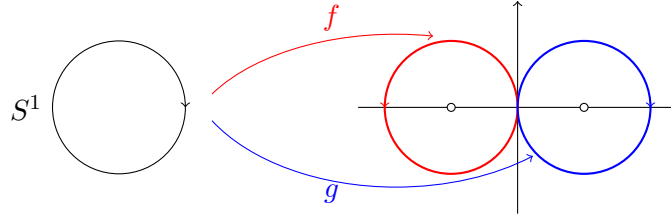


As duas funções são homotópicas, sendo $F(x, t) := tx$ uma homotopia. Suponhamos por absurdo que exista um diagrama da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc}
 S^1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \\
 h \downarrow & & \downarrow k \\
 S^1 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2
 \end{array}$$

sendo k e h equivalências homotópicas. A função $k \circ f$ é constante, pois f é constante, logo $g \circ h$ é constante. Como g é injetora, necessariamente h é constante. Todavia, nenhuma função constante de S^1 a S^1 é uma equivalência homotópica. O fato que h não possa ser um isomorfismo em TopH , implica que nenhum par (k, h) possa sê-lo na categoria $\text{HomH}(\text{Top})$. Isso mostra que f e g são homotópicas mas não homotopicamente equivalentes. \diamond

EXEMPLO 2.4.5. Consideremos os espaços $A = S^1$ e $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$. Sejam f e g os seguintes mergulhos: $f(\cos t, \sin t) = (\cos t + 1, \sin t)$ e $g(\cos t, \sin t) = (-1 - \cos t, \sin t)$.



Sejam $h = \text{id}_{S^1}$ e $k(x, y) := (-x, y)$. Consideremos os seguintes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \\ \text{id}_{S^1} \downarrow & & \downarrow k \\ S^1 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2 \\ \text{id}_{S^1} \downarrow & & \downarrow k \\ S^1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Os dois diagramas comutam e, compondo-os nas duas direções, vemos que (id_{S^1}, k) é um isomorfismo entre f e g em $\text{Hom}(\text{Top})$, portanto, em particular, uma equivalência homotópica. Todavia, f e g não são homotópicas. \diamond

Vimos que há um mergulho cheio $\text{Top}_2 \hookrightarrow \text{Hom}(\text{Top})$, que associa ao par (X, A) o mergulho $i: A \hookrightarrow X$ e ao morfismo $k: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ o morfismo $(k, k|_A)$. Uma homotopia entre $k, k': (X, A) \rightarrow (Y, B)$ coincide com uma homotopia entre os morfismos $(k, k|_A), (k', k'|_A): i \rightarrow j$, portanto fica definido o mergulho cheio $\text{TopH}_2 \hookrightarrow \text{HomH}(\text{Top})$. Em particular, os pares (X, A) e (Y, B) são isomorfos em TopH_2 se, e somente se, os mergulhos $i: A \hookrightarrow X$ e $j: B \hookrightarrow Y$ são isomorfos em $\text{HomH}(\text{Top})$. Logo, as definições de homotopia e equivalência homotópica entre morfismos são uma generalização das definições correspondentes entre pares de espaços.

2.4.1. Versão relativa. Analogamente, podemos definir as noções de *homotopia relativa* e *equivalência homotópica relativa* entre morfismos, as quais generalizam as definições correspondentes entre pares de espaços.

DEFINIÇÃO 2.4.6. Sejam $f: A \rightarrow X$ e $g: B \rightarrow Y$ funções contínuas. Sejam $(k, h), (k', h): f \rightarrow g$ morfismos em $\text{Hom}(\text{Top})$ (a função h é a mesma para os dois pares). Uma *homotopia relativa* entre (k, h) e (k', h) é uma homotopia $(K, H): f_I \rightarrow g$ entre (k, h) e (k', h) tal que $H(a, t) = h(a)$ para todos $a \in A$ e $t \in I$. Usamos a notação $(K, H): f \sim_h g$. \diamond

Fica definida a categoria $\text{HomHR}(\text{Top})$, obtida quocientando os morfismos em $\text{Hom}(\text{Top})$ por homotopia relativa. Uma *equivalência homotópica relativa* entre $f: A \rightarrow X$ e $g: B \rightarrow Y$ é um isomorfismo em $\text{HomHR}(\text{Top})$. Isso significa que temos dois morfismos $(k, h): f \rightarrow g$ e $(k', h'): g \rightarrow f$ tais que $h' \circ h = \text{id}_A$, $h \circ h' = \text{id}_B$, $(k', h') \circ (k, h) \sim_{\text{id}_A} \text{id}_f$ e $(k, h) \circ (k', h') \sim_{\text{id}_B} \text{id}_g$. Em particular, h e h' são homeomorfismos.

Consideremos novamente o mergulho cheio $\text{Top}_2 \hookrightarrow \text{Hom}(\text{Top})$, que associa ao par (X, A) o mergulho $i: A \hookrightarrow X$ e ao morfismo $k: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ o morfismo

$(k, k|_A)$. Uma homotopia relativa entre $k, k': (X, A) \rightarrow (Y, B)$, tais que $k|_A = k'|_A$, coincide com uma homotopia relativa entre os morfismos $(k, k|_A), (k', k'|_A): i \rightarrow j$. Portanto, fica definido o mergulho cheio $\text{TopHR} \hookrightarrow \text{HomHR}(\text{Top})$. Em particular, os pares (X, A) e (Y, B) são isomorfos em TopHR se, e somente se, os mergulhos $i: A \hookrightarrow X$ e $j: B \hookrightarrow Y$ são isomorfos em $\text{HomHR}(\text{Top})$.

2.4.2. Resumo. Observamos que os mergulhos $\text{Top}_n \hookrightarrow \text{Top}_{n+}$ e $\text{Top}_{n+} \hookrightarrow \text{Top}_{n+1}$ se estendem facilmente a mergulhos $\text{Hom}_n(\text{Top}) \hookrightarrow \text{Hom}_n(\text{Top}_+)$ e $\text{Hom}_n(\text{Top}_+) \hookrightarrow \text{Hom}_{n+1}(\text{Top})$. O mesmo vale para as categorias da família HomH e as da família HomHR , definindo HomHR_n e HomHR_{n+} como fizemos para TopHR_n e TopHR_{n+} . Por isso, obtemos o seguinte diagrama, análogo ao (48):

$$(52) \quad \begin{array}{ccccccc} \text{Top} & \hookrightarrow & \text{Top}_+ & \hookrightarrow & \text{Hom}(\text{Top}) & \hookrightarrow & \text{Hom}(\text{Top}_+) & \hookrightarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{TopH} & \hookrightarrow & \text{TopH}_+ & \hookrightarrow & \text{HomH}(\text{Top}) & \hookrightarrow & \text{HomH}(\text{Top}_+) & \hookrightarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{HomHR}(\text{Top}) & \hookrightarrow & \text{HomHR}(\text{Top}_+) & \hookrightarrow & \text{HomHR}_2(\text{Top}) & \hookrightarrow & \text{HomHR}(\text{Top}_+) & \hookrightarrow & \dots \end{array}$$

Há um “mergulho” de (48) a (52), formado pelos mergulhos $\text{Top}_n \hookrightarrow \text{Hom}_n(\text{Top})$, $\text{TopH}_n \hookrightarrow \text{HomH}_n(\text{Top})$ e $\text{TopHR}_n \hookrightarrow \text{HomHR}_n(\text{Top})$ e os análogos considerando um ponto marcado. Ademais, temos a projeção $\text{HomHR}(\text{Top}) \rightarrow \text{HomH}(\text{Top})$, análoga à $\text{TopHR} \rightarrow \text{Top}_2$, pois uma homotopia relativa é em particular uma homotopia de funções contínuas; esse mergulho se generaliza aos graus superiores, mas de modo menos natural.

2.4.3. Cone, cilindro e suspensão. Voltemos à categoria $\text{Hom}(\text{Top})$. Seja $(H, K): f_I \rightarrow g$ uma homotopia entre $(h, k), (h', k'): f \rightarrow g$. Ficam definidas as funções contínuas:

$$\begin{aligned} \text{Cyl}^\wedge(H, K): \text{Cyl}(f_I) &\rightarrow \text{Cyl}(g) & C^\wedge(H, K): C(f_I) &\rightarrow \text{Cyl}(g) \\ S^\wedge(H, K): S(f_I) &\rightarrow \text{Cyl}(g). \end{aligned}$$

No caso do cilindro, temos que $\text{Cyl}(f) \times I \approx \text{Cyl}(f_I)$. No caso do cone e da suspensão, temos funções naturais $C(f) \times I \rightarrow C(f_I)$ e $S(f) \times I \rightarrow S(f_I)$, que mandam $\{v\} \times I$ em $\{*\}$, sendo v um vértice e $*$ o vértice correspondente na imagem. Afinal, compondo com essas funções, obtemos as seguintes homotopias:

$$\text{Cyl}(f) \times I \rightarrow \text{Cyl}(g) \quad C(f) \times I \rightarrow C(g) \quad S(f) \times I \rightarrow S(g).$$

Portanto, se (h, k) e (h', k') são homotópicas em $\text{Hom}(\text{Top})$, então $\text{Cyl}^\wedge(h, k)$ e $\text{Cyl}^\wedge(h', k')$ são homotópicas em Top e o mesmo vale para $C^\wedge(h, k)$ e $C^\wedge(h', k')$ e para $S^\wedge(h, k)$ e $S^\wedge(h', k')$ em Top_+ , sendo as homotopias induzidas compatíveis com as composições. Afinal, obtemos os seguintes funtores:

$$\text{Cyl}: \text{HomH}(\text{Top}) \rightarrow \text{TopH}; \quad C: \text{HomH}(\text{Top}) \rightarrow \text{TopH}_+; \quad S: \text{HomH}(\text{Top}) \rightarrow \text{TopH}.$$

Pelo lema 2.2.6, isso implica que, se f e g têm o mesmo tipo de homotopia, então $\text{Cyl}(f)$ e $\text{Cyl}(g)$ têm também o mesmo tipo de homotopia e o mesmo vale para $C(f)$ e $C(g)$ e para $S(f)$ e $S(g)$. Tudo isso vale da mesma maneira considerando morfismos entre espaços com ponto marcado.

2.4.4. Colagens. O que acabamos de ver pode ser generalizado às colagens. Já definimos a categoria Col e vimos que a colagem é um functor $\mathcal{C}: \text{Col} \rightarrow \text{Top}$. Podemos definir da maneira análoga a categoria ColH e definir a colagem como um functor $\mathcal{C}: \text{ColH} \rightarrow \text{TopH}$. De fato, consideremos dois objetos de Col :

$$\alpha := X \xleftarrow{f} A \xrightarrow{i} Y \quad \beta := X' \xleftarrow{f'} A' \xrightarrow{i'} Y'$$

e dois morfismos $(h_0, k_0), (h_1, k_1): \alpha \rightarrow \beta$:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{f} & A & \xrightarrow{i} & Y \\ k_0 \downarrow & & \downarrow h_0|_A & & \downarrow h_0 \\ X' & \xleftarrow{f'} & A' & \xrightarrow{i'} & Y' \\ & & & & \downarrow h_1 \\ & & & & Y' \end{array}$$

Definimos o objeto:

$$\alpha_I := X \times I \xleftarrow{f_I} A \times I \xrightarrow{i_I} Y \times I.$$

DEFINIÇÃO 2.4.7. Uma *homotopia* entre α e β é um morfismo $(H, K): \alpha_I \rightarrow \beta$ tal que $(H_0, K_0) = (h_0, k_0)$ e $(H_1, K_1) = (h_1, k_1)$. \diamond

A homotopia (H, K) induz a seguinte homotopia:

$$\begin{aligned} (H, K)_\# : (X \sqcup_f Y) \times I &\rightarrow X' \sqcup_{f'} Y' \\ ([x], t) &\mapsto K(x, t) \quad ([y], t) \mapsto H(y, t) \end{aligned}$$

entre $(h_0, k_0)_\#$ e $(h_1, k_1)_\#$. Por isso obtemos o functor $\mathcal{C}: \text{ColH} \rightarrow \text{TopH}$. Isso implica que, pelo lema 2.2.6, se α e β têm o mesmo tipo de homotopia (ou seja, são isomorfos em ColH), então $X \sqcup_f Y$ e $X' \sqcup_{f'} Y'$ têm o mesmo tipo de homotopia. No caso, por exemplo, do cone, se trata de considerar o objeto:

$$X \xleftarrow{f} A \xrightarrow{\quad} C(A)$$

observando que uma homotopia entre $f, g: A \rightarrow A'$ induz uma homotopia entre $Cf, Cg: CA \rightarrow CA'$ como vimos, portanto, se f e g têm o mesmo tipo de homotopia (ou seja, se são isomorfos em $\text{HomH}(\text{Top})$), então $C(f)$ e $C(g)$ têm o mesmo tipo de homotopia. O mesmo vale para o cilindro e a suspensão.

OBSERVAÇÃO 2.4.8. As observações precedentes mostram que a noção de homotopia entre morfismos e a sua generalização na categoria Col são as definições naturais para que uma equivalência homotópica entre objetos do domínio corresponda a uma equivalência homotópica entre os espaços no contra-domínio (cones, cilindros, suspensões ou, em geral, espaços colados). Mais precisamente, com essa definição os funtores Cyl , C , S e \mathcal{C} se projetam naturalmente a funtores entre as categorias homotópicas correspondentes. \diamond

Apesar da naturalidade que acabamos de destacar, a noção de homotopia entre morfismos ou entre objetos de Col é bastante restritiva. Consideremos um morfismo (k, h) em Col :

$$(53) \quad \begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{f} & A & \xrightarrow{i} & Y \\ k \downarrow & & \downarrow h|_A & & \downarrow h \\ X' & \xleftarrow{f'} & A' & \xrightarrow{i'} & Y'. \end{array}$$

Se esse morfismo for uma equivalência homotópica, então k , $h|_A$ e h são equivalências homotópicas, ou seja, são isomorfismos em TopH . Contudo, se só sabemos que, no diagrama comutativo (53), k , $h|_A$ e h são equivalências homotópicas, não podemos concluir que (k, h) é um isomorfismo em ColH , pois as equivalências homotópicas inversas poderiam não tornar o diagrama correspondente comutativo ou, mesmo se isso valer, as homotopias entre as duas composições e as identidades poderiam não tornar o diagrama correspondente comutativo. Todavia, como $X \sqcup_f Y$ e $X' \sqcup_{f'} Y'$ são obtidos colando espaços com o mesmo tipo de homotopia, compativelmente com as funções envolvidas, podemos nos perguntar se têm o mesmo tipo de homotopia, só sabendo que o diagrama (53) comuta e que k , $h|_A$ e h são equivalências homotópicas. A resposta em geral é negativa, mas se torna positiva se as duas inclusões i e i' são suficientemente regulares, ou seja, se são *cofibrações*. Na próxima seção introduziremos esse conceito. Veremos também que os mergulhos de A em $\text{Cyl}(A)$, $C(A)$ e $S(A)$ são sempre cofibrações, portanto, dadas duas funções $f, g: A \rightarrow X$ e um morfismo $(k, h): f \rightarrow g$ em $\text{Hom}(\text{Top})$, se k e h forem equivalências homotópicas, então $C(f)$ e $C(g)$ têm o mesmo tipo de homotopia, mesmo se (k, h) não é uma equivalência homotópica entre f e g .

2.4.5. Tipo de homotopia da colagem. Outra pergunta natural é a seguinte. Consideremos duas funções homotópicas $f, g: A \rightarrow X$. Vimos que isso não implica que f e g tenham o mesmo tipo de homotopia em $\text{Hom}(\text{Top})$, nem que exista um morfismo $(k, h): f \rightarrow g$ tal que k e h são equivalências homotópicas. Nesse caso, os cones $C(f)$ e $C(g)$ têm o mesmo tipo de homotopia? A mesma pergunta pode ser posta para os cilindros e as suspensões. Mais em geral, consideremos os seguintes objetos de Col :

$$X \begin{array}{c} \xleftarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} A \xrightarrow{i} Y.$$

Se f e g forem homotópicas, os espaços $X \sqcup_f Y$ e $X \sqcup_g Y$ têm o mesmo tipo de homotopia? A resposta a estas perguntas é negativa em geral, porém de novo se torna positiva se i for uma cofibração. Em particular, como as inclusões $A \subset \text{Cyl}(A)$, $A \subset C(A)$ e $A \subset S(A)$ são cofibrações para qualquer espaço A , podemos deduzir que, se f e g forem homotópicas, então $C(f)$ e $C(g)$ têm o mesmo tipo de homotopia. O mesmo vale para o cilindro e a suspensão.

2.4.6. Observações complementares. Enfim, fixado um espaço topológico $A \in \text{Ob}(\text{Top})$, podemos definir o conceito de homotopia nas categorias $\text{Top} \downarrow A$ e $\text{Top} \uparrow A$. Trata-se de casos particulares da definição de homotopia em $\text{Hom}(\text{Top})$, considerando morfismos das seguintes formas:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & A \\ h \downarrow & & \parallel \text{id} \\ Y & \xrightarrow{g} & A \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \text{id} \parallel & & \downarrow h \\ A & \xrightarrow{g} & Y. \end{array}$$

Quocientando os morfismos por homotopia, obtemos as categorias $\text{Top} \downarrow_H A$ e $\text{Top} \uparrow_H A$. No segundo caso se trata de um caso particular de homotopia relativa, portanto temos o mergulho $\text{Top} \uparrow_H A \hookrightarrow \text{HomHR}(\text{Top})$. No primeiro caso temos o functor $\text{Top} \downarrow_H A \rightarrow \text{HomH}(\text{Top})$, que não é um mergulho. Podemos também formular a noção de homotopia em $\text{Top} \downarrow A$ e $\text{Top} \uparrow A$ da seguinte maneira equivalente.

DEFINIÇÃO 2.4.9. Sejam $f: X \rightarrow A$ e $g: Y \rightarrow A$ funções contínuas. Sejam $h, h': f \rightarrow g$ morfismos em $\text{Top} \downarrow A$. Uma *homotopia* entre h e h' é um morfismo $H: f \circ \pi_X \rightarrow g$, sendo $\pi_X: X \times I \rightarrow X$ a projeção, tal que $H_0 = h$ e $H_1 = h'$.

$$\begin{array}{ccc} X & & X \times I \\ \downarrow h & \searrow f & \downarrow H \\ Y & \xrightarrow{g} & A \\ \uparrow h' & & \nearrow f \circ \pi_X \end{array} \qquad \diamond$$

DEFINIÇÃO 2.4.10. Sejam $f: A \rightarrow X$ e $g: A \rightarrow Y$ funções contínuas. Sejam $h, h': f \rightarrow g$ morfismos em $\text{Top} \uparrow A$. Uma *homotopia* entre h e h' é um morfismo $H: f_I \rightarrow g \circ \pi_A$, sendo $\pi_A: A \times I \rightarrow A$ a projeção, tal que $H_0 = h$ e $H_1 = h'$.

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ & \nearrow f & \\ A & & X \times I \\ & \searrow g & \downarrow H \\ & Y & \\ & \nearrow h & \\ & \searrow h' & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & X \times I & \\ & \nearrow f_I & \\ A \times I & & X \times I \\ & \searrow g \circ \pi_A & \downarrow H \\ & Y & \end{array} \qquad \diamond$$

2.5. Homotopia, retrações e k-espaços

Como I é (localmente) compacto, por causa do lema 1.2.7 temos que $X \times_k I = X \times I$ para todo k -espaço X . Por isso, duas funções $f, g: X \rightarrow Y$ entre k -espaços são homotópicas em Top^k se, e somente se, o são em Top . Isso implica que as noções de homotopia de funções e de equivalência homotópica de espaços, na categoria Top^k , são a restrição das noções correspondentes em Top . Em particular, fica definida a categoria TopH^k como sub-categoria cheia de TopH . O mesmo vale para as categorias

TopH_n^k , TopH_{n+}^k , TopHR_n^k e TopHR_{n+}^k . Obtemos um diagrama análogo ao (48). Também a respeito das noções de retrato e retrato por deformação não há alguma variação. De fato, se $(X, A) \in \text{Ob}(\text{Top}^k)$, a definição 2.3.1 e as análogas não mudam, pois $X \times_k I$ coincide com $X \times I$. Observamos que, para que uma função $r: X \rightarrow A$ seja uma retração em Top^k , tem que ser contínua como função $r: X \rightarrow A_k$. Todavia, sendo X um k -espaço, pelo lema 1.2.3, as duas noções de continuidade coincidem. Por isso, A é um retrato (por deformação) de X na categoria Top^k se, e somente se, o é na categoria Top . Lembramos também que vale o lema 2.3.5 no caso de um espaço compactamente grado. Enfim, também a noção de homotopia entre morfismos fica invariada. Obtemos um diagrama análogo ao (52), formado por sub-categorias cheias das que aparecem em (48). Só devemos lembrar que, quando construímos o cilindro, o cone e a suspensão de uma função aplicamos o functor \mathcal{K} ao espaço A (ou ao espaço final).

2.6. Cofibrações

Dois problemas clássicos de topologia consistem em estabelecer quando é possível estender ou levantar uma homotopia, no sentido que agora vamos discutir.

DEFINIÇÃO 2.6.1. Seja $i: A \hookrightarrow X$ um mergulho.

- i tem a *propriedade de extensão da homotopia* a respeito de um espaço Y se, dada uma função $f: \text{Cyl}(i) \rightarrow Y$, existe uma função $F: \text{Cyl}(X) \rightarrow Y$ tal que $F \circ \iota_{\text{Cyl}(i)} = f$.⁴
- i é uma *cofibracão* se tem a propriedade da extensão da homotopia a respeito de qualquer espaço Y . \diamond

Quando A é um subespaço de X , dizemos que (X, A) é uma cofibracão se a inclusão $i: A \hookrightarrow X$ o for. Neste caso, dadas uma função $\varphi: X \rightarrow Y$ e uma homotopia F' entre $\varphi|_A$ e $\psi': A \rightarrow Y$, é possível estender F' a uma homotopia F entre φ e uma função $\psi: X \rightarrow Y$ tal que $\psi|_A = \psi'$. A priori, o dado de φ e F' define uma função contínua de $\text{Cyl}(i)$, não de $(X \times \{0\}) \cup (A \times I) \subset X \times I$, conforme a observação antes do exemplo 1.3.12. Todavia, veremos daqui a pouco que, no caso de uma cofibracão, se trata de condições equivalentes. Ademais, sendo I (localmente) compacto, podemos identificar uma função contínua $A \times I \rightarrow Y$ com uma função contínua $A \rightarrow Y^I$ (mesmo se A não é um k -espaço),⁵ portanto obtemos o seguinte diagrama:

$$(54) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{F'} & Y^I \\ \downarrow & \nearrow F & \downarrow \text{ev}_0 \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

Em princípio podemos estender a definição de cofibracão a uma função genérica $\varphi: A \rightarrow X$, que não seja necessariamente um mergulho.

DEFINIÇÃO 2.6.2. Seja $\varphi: A \rightarrow X$ uma função.

⁴A função $\iota_{\text{Cyl}(i)}$ foi definida em (42).

⁵Como I é de Hausdorff, a topologia test-aberto em Y^I coincide com a compacto-aberto.

- φ tem a *propriedade de extensão da homotopia* a respeito de um espaço Y se, dada uma função $f: \text{Cyl}(\varphi) \rightarrow Y$, existe uma função $F: X \times I \rightarrow Y$ tal que $F \circ \iota_{\text{Cyl}(\varphi)} = f$.
- φ é uma *cofibrção* se tem a propriedade da extensão da homotopia a respeito de qualquer espaço Y . \diamond

Todavia, no caso de uma cofibrção, a generalização precedente não é significativa, por causa do seguinte lema.

LEMA 2.6.3. *Uma cofibrção $\varphi: A \rightarrow X$ é um mergulho.*

DEMONSTRAÇÃO. Conforme a notação da definição 2.6.2, sejam $Y = \text{Cyl}(\varphi)$ e $f = \text{id}$. Seja $F: X \times I \rightarrow \text{Cyl}(\varphi)$ uma extensão de f conforme a definição. Temos que, para $a \in A$, $F \circ \iota_{\text{Cyl}(\varphi)}([a, t]) = f([a, t])$, ou seja, $F(\varphi(a), t) = [(a, t)]$. Portanto, para $t = 1$ (ou qualquer outro valor diferente de 0), a função $F_1: X \rightarrow A$ satisfaz $F_1(\varphi(a)) = a$. Isso implica que φ é injetora e que $F_1|_{\varphi(A)}: \varphi(A) \rightarrow A$ é uma função contínua inversa de φ , logo φ é um mergulho. \square

O seguinte lema mostra uma caracterização muito útil das cofibrções.

LEMA 2.6.4. *Seja $i: A \hookrightarrow X$ um mergulho. As seguintes condições são equivalentes:*

- (1) i é uma cofibrção;
- (2) existe uma função contínua $r: \text{Cyl}(X) \rightarrow \text{Cyl}(i)$ tal que $r \circ \iota_{\text{Cyl}(i)} = \text{id}_{\text{Cyl}(i)}$;
- (3) $\iota_{\text{Cyl}(i)}: \text{Cyl}(i) \rightarrow \text{Cyl}(X)$ é um mergulho e, se $\text{Cyl}'(i)$ for a sua imagem, existe uma retração $r': \text{Cyl}(X) \rightarrow \text{Cyl}'(i)$.

DEMONSTRAÇÃO. (1) \Rightarrow (2). Por definição, a identidade $\text{id}: \text{Cyl}(i) \rightarrow \text{Cyl}(i)$ se estende a uma função $F: \text{Cyl}(X) \rightarrow \text{Cyl}(i)$. Pondo $r := F$, temos a tese. (2) \Rightarrow (1). Seja $r: \text{Cyl}(X) \rightarrow \text{Cyl}(i)$ uma função que verifica a hipótese. Dada uma função $f: \text{Cyl}(i) \rightarrow Y$, fica definida a extensão $F := f \circ r: \text{Cyl}(X) \rightarrow Y$. (2) \Rightarrow (3). A restrição $r|_{\text{Cyl}'(i)}: \text{Cyl}'(i) \rightarrow \text{Cyl}(i)$ é a inversa de $\bar{\iota}_{\text{Cyl}(i)}$, logo $\iota_{\text{Cyl}(i)}$ é um mergulho. (3) \Rightarrow (2). É suficiente pôr $r := \bar{\iota}_{\text{Cyl}(i)}^{-1} \circ r'$. \square

Em princípio, quando $i: A \hookrightarrow X$ é uma cofibrção, não é necessário que $i(A)$ seja fechado em X . Todavia, veremos daqui a pouco que isso vale sempre quando X é de Hausdorff ou, na categoria dos k -espaços, quando é compactamente gerado. Portanto, na prática, trabalharemos quase sempre assumindo que $i(A)$ seja fechado.

DEFINIÇÃO 2.6.5. Uma cofibrção $i: A \hookrightarrow X$ é dita *cofibrção fechada* se i for um mergulho fechado. \diamond

Se i for um mergulho fechado, na condição (3) do lema 2.6.4 podemos tirar a hipótese conforme a qual $\iota_{\text{Cyl}(i)}$ é um mergulho, pois, pelo lema 1.3.13, é automaticamente verificada. Na verdade, pode-se provar que essa hipótese pode ser tirada para qualquer mergulho, pois, se existir uma retração $r': \text{Cyl}(X) \rightarrow \text{Cyl}'(i)$, então $\iota_{\text{Cyl}(i)}$ é um mergulho. Não aprofundamos os detalhes dado que, como já afirmamos, consideraremos sobretudo cofibrções fechadas. Ademais, mostraremos no teorema 2.6.25 que, se i for uma cofibrção fechada, as condições equivalentes do lema 2.6.4 equivalem também ao fato que $\text{Cyl}'(i)$ seja um retrato por deformação de $\text{Cyl}(X)$.

LEMA 2.6.6. *Seja $i: A \hookrightarrow X$ uma cofibração. Se X for de Hausdorff, i é uma cofibração fechada.*

DEMONSTRAÇÃO. Pelos lemas 2.6.4 e 2.3.5, $\text{Cyl}'(i)$ é fechado em $\text{Cyl}(X)$. Intersetando $\text{Cyl}'(i)$ com $X \times \{1\}$, vemos que $A \times \{1\}$ é fechado em $X \times \{1\}$, ou seja, A é fechado em X . \square

Vamos mostrar alguns exemplos de pares que *não* são cofibrações. Por causa do lema precedente, qualquer par (X, A) , tal que X é de Hausdorff e A não é fechado em X , não é uma cofibração. O seguinte exemplo mostra que, mesmo se A for fechado e X for de Hausdorff, o par (X, A) pode não ser uma cofibração.

EXEMPLO 2.6.7. O par (I, A) , sendo $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, não é uma cofibração. De fato, seja por absurdo $r: \text{Cyl}(I) \rightarrow \text{Cyl}(I, A)$ uma retração. Como $(0, 1) \in \text{Cyl}(I, A)$, temos que $r(0, 1) = (0, 1)$. Seja V uma vizinhança de $(0, 1)$ em $\text{Cyl}(I, A)$ da forma $V = ([0, \varepsilon) \times (1 - \varepsilon, 1]) \cap \text{Cyl}(X, A)$. Sendo $r^{-1}(V)$ aberto e sendo $I \times I$ localmente conexo por caminhos, existe uma vizinhança conexa por caminhos U de $(0, 1)$ em $\text{Cyl}(I)$ tal que $r(U) \subset V$. Isso implica que $r(U)$ está contido em uma componente conexa por caminhos de V que contém $(0, 1)$, portanto $r(U) \subset \{0\} \times I$. Isso é absurdo, pois U , sendo uma vizinhança de $(0, 1)$, contém infinitos pontos da forma $(a, 1) \in \text{Cyl}(I, A)$, sendo $a \neq 0$, logo $r(a, 1) = (a, 1) \notin \{0\} \times I$. \diamond

A hipótese inatural do seguinte lema, no caso de cofibrações não fechadas, sumirá considerando k -espaços.

LEMA 2.6.8. *Sejam $i: A \hookrightarrow X$ uma cofibração e Y um espaço topológico. Se i for uma cofibração fechada ou Y for localmente compacto, então $i \times \text{id}_Y: A \times Y \hookrightarrow X \times Y$ é uma cofibração.*

DEMONSTRAÇÃO. Se i for fechada, temos que $\text{Cyl}(i) \approx \text{Cyl}'(i)$ e $\text{Cyl}(i \times \text{id}_Y) \approx \text{Cyl}'(i \times \text{id}_Y)$. Seja $r: \text{Cyl}(X) \rightarrow \text{Cyl}'(i)$ uma retração. A função $r \times \text{id}_Y: \text{Cyl}(X) \times Y \rightarrow \text{Cyl}'(i) \times Y$ é uma retração e $\text{Cyl}'(i \times \text{id}_Y) = \text{Cyl}'(i) \times Y$, portanto obtemos a tese pelo lema 2.6.4. Se Y for localmente compacto, pelo lema 1.4.5 temos que $\text{Cyl}(i \times \text{id}_Y) \approx \text{Cyl}(i) \times Y$. Se $r: \text{Cyl}(X) \rightarrow \text{Cyl}(i)$ for uma função tal que $r \circ \iota_{\text{Cyl}(i)} = \text{id}_{\text{Cyl}(i)}$, compondo a função $r \times \text{id}_Y: \text{Cyl}(X) \times Y \rightarrow \text{Cyl}(i) \times Y$ com os homeomorfismos $\text{Cyl}(X) \times Y \approx \text{Cyl}(X \times Y)$ e $\text{Cyl}(i \times \text{id}_Y) \approx \text{Cyl}(i) \times Y$ obtemos uma função que verifica o item (2) do lema 2.6.4. \square

OBSERVAÇÃO 2.6.9. Sejam $j: B \hookrightarrow A$ e $i: A \rightarrow X$ mergulhos. Se i e j são cofibrações, então $i \circ j$ é uma cofibração. De fato, há uma função natural $\iota_{i,j}: \text{Cyl}(j) \hookrightarrow \text{Cyl}(i \circ j)$. Dada uma função $f: \text{Cyl}(i \circ j) \rightarrow Y$, sendo j uma cofibração, $f \circ \iota_{i,j}$ se estende a uma função $F'': \text{Cyl}(A) \rightarrow Y$. As funções F'' e $f|_X$ definem uma função $F': \text{Cyl}(i) \rightarrow Y$. Sendo i uma cofibração, F' se estende a uma função $F: \text{Cyl}(X) \rightarrow Y$. \diamond

Uma propriedade muito importante das cofibrações consiste no fato que o push-out de uma cofibração é uma cofibração. Analogamente, veremos que o pull-back de uma fibração é uma fibração.

LEMA 2.6.10. *Sejam $i: A \hookrightarrow X$ um mergulho e $f: A \rightarrow B$ uma função contínua. Consideremos o seguinte push-out:*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{j} & B \sqcup_f X. \end{array}$$

Equivalentemente, o espaço $B \sqcup_f X$ é o colamento induzido pelo objeto

$$B \xleftarrow{f} A \xrightarrow{i} X.$$

Se i for uma cofibração, então j é também uma cofibração.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\varphi: \text{Cyl}(j) \rightarrow Y$ uma função contínua e mostremos que existe uma extensão $\Phi: \text{Cyl}(B \sqcup_f X) \rightarrow Y$. A função φ equivale a duas funções $\varphi_1: B \sqcup_f X \rightarrow Y$ e $\varphi_2: \text{Cyl}(B) \rightarrow Y$ tais que $\varphi_2(b, 0) = \varphi_1(j(b))$. A partir da função φ_2 , podemos definir a função $\psi_2: \text{Cyl}(A) \rightarrow Y$, $(a, t) \mapsto \varphi_2(f(a), t)$. Sendo (X, A) uma cofibração, as funções $\varphi_1|_X$ e ψ_2 se estendem a uma função $\Psi: \text{Cyl}(X) \rightarrow Y$. As funções Ψ e φ_2 se colam a uma função $\Phi: (X \times I) \sqcup_{f \times \text{id}_I} (B \times I) \rightarrow Y$. Como I é (localmente) compacto, temos que $(X \times I) \sqcup_{f \times \text{id}_I} (B \times I) \approx (X \sqcup_f B) \times I = \text{Cyl}(X \sqcup_f B)$. \square

COROLÁRIO 2.6.11. *Se $i: A \hookrightarrow X$ for uma cofibração, então também os seguintes pares o são:*

$$(\text{Cyl}(i), \text{Cyl}(A)) \quad (C(i), C(A)) \quad (S(i), S(A)).$$

DEMONSTRAÇÃO. Trata-se dos pares $(C(A) \sqcup_i X, C(A))$, $(\text{Cyl}(A) \sqcup_i X, \text{Cyl}(A))$ e $(S(A) \sqcup_i X, S(A))$, portanto são três casos particulares do lema precedente. \square

A vantagem de trabalhar com as cofibrações está no fato que temos bastante flexibilidade para provar que o resultado de certas operações topológicas só depende do tipo de homotopia dos espaços de partida. O seguinte teorema é um primeiro resultado nesta direção, que será muito útil para calcular a homologia e o grupo fundamental de vários espaços.

TEOREMA 2.6.12. *Seja (X, A) uma cofibração tal que A é contrátil. A projeção $\pi: X \rightarrow X/A$ é uma equivalência homotópica. Ademais, se $x_0 \in A$ for um ponto marcado e $\{x_0\}$ for retrato por deformação de A , então $\pi: (X, x_0) \rightarrow (X/A, A/A)$ é um isomorfismo em TopH_+ .*

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos a função $p: A \rightarrow \{*\}$ e seja $q: \{*\} \rightarrow A$ uma inversa na categoria TopH . Sejam $a = q(*)$ e $f: A \times I \rightarrow A$ uma homotopia entre $q \circ p$ e a identidade. Como $f_0 = \text{id}$, podemos estender f_0 a X todo, obtendo $f: \text{Cyl}(X, A) \rightarrow X$. Sendo (X, A) uma cofibração, podemos estender f a uma função $F: X \times I \rightarrow X$. Como $F(A \times I) \subset A$, podemos projetar F a uma função $F': X/A \times I \rightarrow X/A$, definida por $F'([x], t) := [F(x, t)]$. Logo, para todo $t \in I$, temos que $F'_t \circ \pi = \pi \circ F_t$. Para $t = 1$, temos que $F'_1(A) = \{a\}$, portanto fica definida

a contínua $g: X/A \rightarrow X$, $[x] \mapsto F_1(x)$, de modo que $F_1 = g \circ \pi$. Obtemos o seguinte diagrama comutativo:

$$(55) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F_1} & X \\ \downarrow \pi & \nearrow g & \downarrow \pi \\ X/A & \xrightarrow{F'_1} & X/A \end{array}$$

As funções $g: X/A \rightarrow X$ e $\pi: X \rightarrow X/A$ são inversas a menos de homotopia. De fato, $g \circ \pi = F_1$, a qual é homotópica à identidade através de F , e $\pi \circ g = F'_1$, a qual é homotópica à identidade através de F' .

Enfim, se $\{x_0\}$ for retrato por deformação de A , todas as funções do diagrama (55) respeitam os pontos marcados $x_0 \in X$ e $A/A \in X/A$ e as homotopias $F: g \circ \pi \sim \text{id}_X$ e $F': \pi \circ g \sim \text{id}_{X/A}$ são relativas aos pontos marcados. \square

COROLÁRIO 2.6.13. *Se $i: A \hookrightarrow X$ for uma cofibração, então o cone $C(i)$ tem o mesmo tipo de homotopia de X/A , também na categoria Top_+ .*

DEMONSTRAÇÃO. Pelo corolário 2.6.11 temos que $(C(i), C(A))$ é uma cofibração, portanto, pelo teorema 2.6.12 temos que $\pi: (C(i), *) \rightarrow (C(i)/C(A), *)$ é uma equivalência homotópica com ponto marcado. Como $(C(i)/C(A), *) \approx (X/A, *)$ canonicamente, obtemos a tese. \square

Vamos agora mostrar uma caracterização muito útil das cofibrações, a partir da seguinte definição, a qual é interessante em si mesma.

DEFINIÇÃO 2.6.14. Um par $(X, A) \in \text{Ob}(\text{Top}_2)$ é dito *bom par* se A é fechado em X e existe uma vizinhança $U \subset X$ de A tal que A é um retrato por deformação de U . \diamond

Observamos que a retração por deformação de U a A tem que ser uma função $F: U \times I \rightarrow U$, ou seja, um ponto de U não pode “sair” de U ao longo do caminho que o leva a um ponto de A . Por exemplo, o par (\mathbb{R}^2, S^1) é um bom par, considerando uma corona circular como vizinhança de S^1 que se retrai por deformação a S^1 , enquanto $(\mathbb{Q}, \{0\})$ não o é. Agora vamos enunciar alguns resultados que provaremos a seguir.

LEMA 2.6.15. *Se X for um espaço perfeitamente normal, um par (X, A) é uma cofibração se, e somente se, é um bom par.*

Já observamos que todo espaço métrico, toda variedade topológica e todo CW-complexo são perfeitamente normais, portanto o lema precedente é uma caracterização bem clara das cofibrações para uma ampla classe de espaços (de fato, quase todos os interessantes em topologia algébrica). Também no caso em que X seja normal, sem supor que seja perfeitamente normal, podemos caracterizar adequadamente as cofibrações.

LEMA 2.6.16. *Se X for um espaço normal, um par (X, A) é uma cofibração se, e somente se, é um bom par e A é de tipo G_δ .*

O lema 2.6.15 segue imediatamente do lema 2.6.16, por causa do lema 1.2.18. O seguinte exemplo mostra que, em geral, um bom par pode não ser uma cofibração (fechada).

EXEMPLO 2.6.17. Consideremos o produto cartesiano de uma família não enumerável de cópias de I , por exemplo $I^{\mathbb{R}}$. Seja $0 = \{0\}_{x \in \mathbb{R}} \in I^{\mathbb{R}}$. Temos que $\{0\}$ é um retrato por deformação de $I^{\mathbb{R}}$, sendo uma retração dada por $F: I^{\mathbb{R}} \times I \rightarrow I^{\mathbb{R}}$, $(\{t_x\}_{x \in \mathbb{R}}, t) \mapsto \{tt_x\}_{x \in \mathbb{R}}$, portanto $(I^{\mathbb{R}}, \{0\})$ é um bom par. Todo espaço compacto é normal, logo $I^{\mathbb{R}}$ é normal. Contudo, $(I^{\mathbb{R}}, \{0\})$ não é uma cofibração, pois $\{0\}$ não é de tipo G_δ . De fato, se $\pi_x: I^{\mathbb{R}} \rightarrow I$ for a projeção relativa à coordenada $x \in \mathbb{R}$ e $A \subset I^{\mathbb{R}}$ for de tipo G_δ , por definição de topologia produto é fácil verificar que $\pi_x(A) = I$ para infinitas coordenadas x , logo A não pode conter somente um ponto. Observamos que $I^{\mathbb{R}}$, sendo compacto, é também compactamente gerado, portanto este contra-exemplo vale também na categoria Top_2^k . \diamond

As caracterizações precedentes são mais que suficientes nas aplicações concretas. Contudo, podemos achar uma caracterização de todas as cofibrações fechadas, sem hipóteses sobre X . O lema 1.2.17 afirma que, para X normal, o fato que um subconjunto fechado $A \subset X$ seja de tipo G_δ é equivalente ao fato que exista uma função contínua $u: X \rightarrow I$ tal que $A = u^{-1}(0)$. Para X genérico, temos que pedir explicitamente que valha esta condição.

DEFINIÇÃO 2.6.18. Um par (X, A) é dito *DR-par* (ou seja, *deformation retract pair*) se existe uma função $u: X \rightarrow I$ tal que $A = u^{-1}(0)$ (logo, A é fechado em X e de tipo G_δ) e A é um retrato por deformação de X . \diamond

Um caso típico é um par da forma $(X, A) = (\text{Cyl}(Y, B), Y)$; nesse caso, fica definida a função $u: X \rightarrow I$, $[y] \mapsto 0$ e $[(b, t)] \mapsto t$. Se X for normal, o fato que (X, A) seja um DR-par é equivalente ao fato que A seja retrato por deformação de X e de tipo G_δ . Na definição 2.6.18, não é restritivo supor que a imagem de u seja $[0, 1]$; de fato, se 1 pertencer à imagem de u , podemos considerar a função $\frac{1}{2}u: X \rightarrow [0, 1]$, a qual também satisfaz a definição. Consideremos agora um par (X, A) com a seguinte propriedade: existe uma vizinhança U de A tal que (U, A) é um DR-par (em particular, trata-se de um bom par). Isso implica que existe uma função $u: U \rightarrow [0, 1]$ tal que $A = u^{-1}(0)$ e que A é retrato por deformação de U . Na seguinte definição, pedimos que essa função u se estenda a uma função $u: X \rightarrow I$, de modo que $U = u^{-1}([0, 1])$.

DEFINIÇÃO 2.6.19. Um par (X, A) é dito *NDR-par forte* (“NDR” significa *neighborhood deformation retract*) se existe uma função $u: X \rightarrow I$ tal que $A = u^{-1}(0)$ e A é um retrato por deformação de $U := u^{-1}([0, 1])$. \diamond

OBSERVAÇÃO 2.6.20. Se (X, A) for um NDR-par forte, então (X, A) é também um bom par e (U, A) é um DR-par. Em geral, se (X, A) for um bom par, não é necessário que (U, A) seja um DR-par: no exemplo 2.6.17 temos que $(I^{\mathbb{R}}, \{0\})$ é um bom par, com $U = I^{\mathbb{R}}$, mas não um DR-par. \diamond

Por construção um NDR-par forte é também um bom par e A é de tipo G_δ . No caso de um espaço normal, vale também a volta.

LEMA 2.6.21. *Se X for um espaço normal, (X, A) é um NDR-par forte se, e somente se, é um bom par e A é de tipo G_δ .*

Pelo lema precedente e o 2.6.16, (X, A) é um NDR-par forte se, e somente se, é uma cofibração. Para X genérico, um NDR-par forte é uma cofibração fechada, mas as cofibrações fechadas são levemente mais gerais. Em particular, pode-se admitir a possibilidade que a retração de U a A saia de U ao longo do caminho.

DEFINIÇÃO 2.6.22. Um par (X, A) é dito *NDR-par* se existem uma função $u: X \rightarrow I$ e uma função $F: X \times I \rightarrow X$ tais que:

- $F(x, 0) = x$ para todo $x \in X$;
- $F(a, t) = a$ para todos $a \in A$ e $t \in I$;
- $A = u^{-1}(0)$;
- se $u(x) < 1$, então $F(x, 1) \in A$. ◇

É claro que, se $u(F(x, t)) < 1$ para todo $x \in X$ tal que $u(x) < 1$, então (X, A) é um NDR-par forte, mas esta condição poderia não valer. Não conseguimos encontrar exemplos de NDR-pares não fortes, portanto nem de NDR-pares que não sejam bons pares.

TEOREMA 2.6.23. *Um par (X, A) é um NDR-par se, e somente se, é uma cofibração fechada.*

Em particular, para X normal, (X, A) é um NDR-par se, e somente se, e um NDR-par forte, se, e somente se, é um bom par e A é de tipo G_δ . Resumindo:

- para X perfeitamente normal:

$$(X, A) \text{ bom par} \iff (X, A) \text{ NDR-par forte} \\ \iff (X, A) \text{ NDR-par} \iff (X, A) \text{ cofibração};$$

- para X normal:

$$(X, A) \text{ bom par e } A \text{ de tipo } G_\delta \iff (X, A) \text{ NDR-par forte} \\ \iff (X, A) \text{ NDR-par} \iff (X, A) \text{ cofibração};$$

- para X genérico:

$$\begin{array}{ccc} (X, A) \text{ NDR-par forte} & \iff & (X, A) \text{ NDR-par} \\ \Downarrow & & \Updownarrow \\ (X, A) \text{ bom par e } A \text{ de tipo } G_\delta & & (X, A) \text{ cofibração fechada.} \end{array}$$

O seguinte teorema será muito útil para mostrar que certos pares são cofibrações e será também necessário para provar que as noções de NDR-par e de cofibração fechada coincidem.

TEOREMA 2.6.24. *Se (X, A) e (Y, B) são NDR-pares, então também*

$$(56) \quad (X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$$

o é. Se um dos dois pares é também um DR-par, então (56) é um DR-par.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $u: X \rightarrow I$, $v: Y \rightarrow I$, $H: X \times I \rightarrow X$ e $K: Y \times I \rightarrow Y$ funções que verificam a definição de NDR-par. Definimos as funções $w: X \times Y \rightarrow I$, $w(x, y) := u(x)v(y)$, e $L: X \times Y \times I \rightarrow X \times Y$ tal que:

$$L(x, y, t) := \begin{cases} (x, y) & \text{se } x \in A, y \in B \\ (H(x, t), K(y, \frac{u(x)}{v(y)}t)) & \text{se } v(y) \geq u(x), v(y) > 0 \\ (H(x, \frac{v(y)}{u(x)}t), K(y, t)) & \text{se } u(x) \geq v(y), u(x) > 0. \end{cases}$$

Vamos verificar a continuidade de L . No domínio $((X \times Y) \setminus (A \times B)) \times I$ a função L é definida em dois sub-conjuntos fechados, que se interceptam no conjunto $\{(x, y, t) : u(x) = v(y)\}$. Nesse conjunto as duas definições coincidem com $L(x, y, t) = (H(x, t), K(y, t))$, logo a função L é contínua. Por isso, só falta verificar a continuidade nos pontos do conjunto $A \times B \times I$. Seja $(a, b) \in A \times B$ e sejam U e V vizinhanças de a e b em X e Y . Como $H(a, t) = a$, temos que $H(\{a\} \times I) \subset U$, logo $\{a\} \times I \subset H^{-1}(U)$. Isso mostra que $H^{-1}(U)$ é uma vizinhança de $\{a\} \times I$ em $X \times I$, portanto, pelo lema 1.3.7, existe uma vizinhança S de $\{a\}$ em X tal que $S \times I \subset H^{-1}(U)$. Analogamente, existe uma vizinhança T de $\{b\}$ em Y tal que $T \times I \subset K^{-1}(V)$. Isso implica que $L(S \times T \times I) \subset U \times V$, portanto, para todo $(a, b, t) \in A \times B \times I$ e para toda vizinhança $U \times V$ de $L(a, b, t) = (a, b)$, a imagem inversa $L^{-1}(U \times V)$ é uma vizinhança de (a, b, t) , logo, L é contínua em (a, b, t) . É fácil verificar que L e w verificam a definição de NDR-par. Enfim, se (X, A) for um DR-par, substituímos u por $\frac{1}{2}u$. Com isso obtemos que $w(x, y) < 1$ para todo $(x, y) \in X \times Y$, portanto (56) é um DR-par. \square

Agora podemos provar a equivalência entre as noções de cofibração fechada e NDR-par.

TEOREMA 2.6.25. *Seja (X, A) um par de espaços com A fechado em X . As seguintes condições são equivalentes:*

- (1) (X, A) é uma cofibração;
- (2) (X, A) é um NDR-par;
- (3) $(\text{Cyl}(X), \text{Cyl}(X, A))$ é um DR-par;
- (4) $\text{Cyl}(X, A)$ é um retrato por deformação de $\text{Cyl}(X)$;
- (5) $\text{Cyl}(X, A)$ é um retrato de $\text{Cyl}(X)$.

DEMONSTRAÇÃO. Pelo teorema 2.6.4, temos que (1) \Leftrightarrow (5). Como $(I, \{0\})$ é um DR-par, pelo teorema 2.6.24 temos que (2) \Rightarrow (3). É óbvio que (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5), portanto só falta provar que (5) \Rightarrow (2). Seja $r: \text{Cyl}(X) \rightarrow \text{Cyl}(X)$ uma retração com imagem $\text{Cyl}(X, A)$. Pomos $r = (r_1, r_2)$, sendo $r_1: \text{Cyl}(X) \rightarrow X$ e $r_2: \text{Cyl}(X) \rightarrow I$. Temos que construir uma função $H: X \times I \rightarrow X$ e uma função $u: X \rightarrow I$ que verifiquem a definição de NDR-par. Pomos $H := r_1$. Dessa maneira, $H(x, 0) = x$ e $H(a, t) = a$ para todos $a \in A$ e $x \in X$. Consideremos a função $u_0(x) := 1 - r_2(x, 1)$. Temos que $u_0(a) = 0$ para todo $a \in A$, todavia não podemos garantir que $A = u_0^{-1}\{0\}$. Seja $v_0(x) := r_2(x, 1)$ e, fixado $n \in \mathbb{N}$, consideremos a seguinte função:

$$v_n(x) = \min\left\{\frac{1}{2^n}, r_2\left(x, \frac{1}{2^n}\right)\right\}.$$

Temos que $v_n(a) = \frac{1}{2^n}$ para todos $a \in A$ e $n \geq 0$. Consideremos a seguinte série:

$$u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} - v_0(x)v_n(x) \right).$$

A série converge absolutamente e uniformemente, pois $u(x) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} v_0(x)v_n(x)$ e $|v_0(x)v_n(x)| < \frac{1}{2^n}$, portanto u é bem definida e contínua. Temos que $u(a) = 0$ para todo $a \in A$. Seja $x \in X \setminus A$. Como $X \setminus A$ é aberto, temos que $(X \setminus A) \times \{0\}$ é aberto em $\text{Cyl}(X, A)$, logo $r^{-1}((X \setminus A) \times \{0\})$ é aberto em $X \times I$. Seja $V \subset X \times I$ uma vizinhança de $(x, 0)$ tal que $r(V) \subset (X \setminus A) \times \{0\}$. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(x, \frac{1}{2^n}) \in V$, portanto $v_n(x) = 0$. Por isso, o termo n -ésimo na série que define u é igual a $\frac{1}{2^n}$, logo $u(x) > 0$. Isso prova que $A = u^{-1}\{0\}$.

Só falta verificar que, se $u(x) < 1$, então $H(x, 1) \in A$. Como $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$, se $u(x) < 1$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $v_0(x)v_n(x) > 0$, logo $r_2(x, 1) = v_0(x) > 0$. Por isso $r(x, 1) \in A \times (0, 1] \subset \text{Cyl}(X, A)$, logo $H(x, 1) = r_1(x, 1) \in A$. \square

COROLÁRIO 2.6.26. *Se (X, A) e (Y, B) são cofibrações, sendo A e B fechados, então também os nove pares⁶ formados pelos seguintes espaços são cofibrações:*

$$X \times Y \quad X \times B \cup A \times Y \quad X \times B \quad A \times Y \quad A \times B.$$

DEMONSTRAÇÃO. Segue diretamente do teorema 2.6.24 e da observação 2.6.9. O único fato a ser provado é que, se $(X \times B, A \times B)$ é uma cofibração, então também $(X \times B \cup A \times Y, A \times Y)$ o é. Para isso, sejam u e H funções que verificam a definição de NDR-par. Estendemos u e H de modo que $u|_{A \times (Y \setminus B)}$ seja a função nula e $H|_{A \times (Y \setminus B) \times I}(a, y, t) = (a, y)$. Isso torna $(X \times B \cup A \times Y, A \times Y)$ um NDR-par. \square

COROLÁRIO 2.6.27. *Sejam (X, A) um NDR-par e $Z := (\text{Cyl}(X) \times \partial I) \cup (\text{Cyl}(X, A) \times I)$. Então $(\text{Cyl}(X) \times I, Z)$ é um DR-par.*

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos os pares $(\text{Cyl}(X), \text{Cyl}(X, A))$ e $(I, \partial I)$. O primeiro par é um DR-par pelo teorema 2.6.25 e o segundo par é um NDR-par, como pode-se verificar facilmente considerando as duas seguintes funções:

$$\begin{array}{ll} h: I \rightarrow I & F: I \times I \rightarrow I \\ t \mapsto \begin{cases} 3t & t \in [0, \frac{1}{3}] \\ 1 & t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ 3(1-t) & t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases} & (t, u) \mapsto \begin{cases} t(1-u) & t \in [0, \frac{1}{3}] \\ u(3t-1) + (1-u)t & t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ u + (1-u)t & t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases} \end{array}$$

Pelo teorema 2.6.24, o par $(\text{Cyl}(X) \times I, Z)$ é um DR-par. \square

COROLÁRIO 2.6.28. *Seja (X, A) uma cofibração, sendo A fechado em X . Sejam $f: \text{Cyl}(X, A) \rightarrow Y$ uma função e sejam $F, F': \text{Cyl}(X) \rightarrow Y$ duas extensões de f . Então F e F' são homotópicas relativamente a $\text{Cyl}(X, A)$. Em particular, duas retrações $r, r': \text{Cyl}(X) \rightarrow \text{Cyl}(X, A)$ são homotópicas relativamente a $\text{Cyl}(X, A)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Usando a notação do corolário 2.6.27, seja $R: \text{Cyl}(X) \times I \rightarrow Z$ uma retração (por deformação) e consideremos a função $g: Z \rightarrow Y$, sendo $g(x, t, 0) = F(x, t)$, $g(x, t, 1) = F'(x, t)$, $g(x, 0, u) = f(x)$ e $g(a, t, u) = f(a, t)$. Fica

⁶Trata-se de $\binom{5}{2} = 10$ possibilidades, mas $X \times B$ e $A \times Y$ não formam um objeto de Top_2 .

definida a função $G: \text{Cyl}(X) \times I \rightarrow Z$, $G := g \circ R$. A função G é uma homotopia entre F e F' relativa a $\text{Cyl}(X, A)$. \square

Os resultados fundamentais que agora vamos enunciar e provar são os teoremas de colagem, dos quais o teorema 2.6.12 é um corolário. Antes de tudo precisamos de algumas definições e notações.

DEFINIÇÃO 2.6.29. Sejam $f, g: X \rightarrow Y$ duas funções homotópicas e sejam $F, F': X \times I \rightarrow Y$ duas homotopias entre f e g . Uma *homotopia de homotopias* entre F e F' é uma homotopia $\Phi: X \times I \times I \rightarrow Y$ entre F e F' relativa a $X \times \{0, 1\}$. Usamos a notação $\Phi: F \sim F'$. \diamond

NOTAÇÃO 2.6.30. Dados dois espaços topológicos X e Y , denotamos por $[X, Y]$ o conjunto das classes de homotopia de funções contínuas de X a Y , ou seja, $\text{Hom}_{\text{TopH}}(X, Y)$. Usamos a mesma notação nas demais categorias em que definimos a noção de homotopia. Dadas duas funções homotópicas $f, g: X \rightarrow Y$, denotamos por $\mathcal{H}(f, g)$ o conjunto das homotopias entre f e g e por $[f, g]$ o conjunto das classes de homotopia de homotopias entre f e g . Logo, se $F: f \sim g$, temos que $F \in \mathcal{H}(f, g)$ e $[F] \in [f, g]$. \diamond

Já definimos a composição (45) de homotopias, a qual define em particular a composição entre homotopias de homotopias. Ademais, consideremos as seguintes funções e homotopias:

$$f, g, h: X \rightarrow Y \quad F, F': f \sim g \quad G, G': g \sim h$$

e as seguintes homotopias de homotopias:

$$\Phi: F \sim F' \quad \Psi: G' \sim G.$$

Analogamente a (46), podemos definir a homotopia $\Psi \odot \Phi: G * F \sim G' * F'$. Isso implica que seja bem definida a classe $[G] * [F] := [G * F]$. Obtemos os seguintes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} f & \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \Phi \\ \xrightarrow{G} \\ \Downarrow \Psi \\ \xrightarrow{H} \end{array} & g \\ & \Downarrow \Psi & \\ & f & \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \Phi \\ \xrightarrow{G} \\ \Downarrow \Psi \\ \xrightarrow{H} \end{array} & g \end{array} & \dashrightarrow & \begin{array}{ccc} f & \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \Psi * \Phi \\ \xrightarrow{H} \end{array} & g \end{array} \\ \\ \begin{array}{ccc} f & \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \Phi \\ \xrightarrow{F'} \end{array} & g & \begin{array}{c} \xrightarrow{G} \\ \Downarrow \Psi \\ \xrightarrow{G'} \end{array} & h \\ & \Downarrow \Psi & & \Downarrow \Psi \\ & f & \begin{array}{c} \xrightarrow{G * F} \\ \Downarrow \Psi \odot \Phi \\ \xrightarrow{G' * F'} \end{array} & h \end{array} & \dashrightarrow & \begin{array}{ccc} f & \begin{array}{c} \xrightarrow{G * F} \\ \Downarrow \Psi \odot \Phi \\ \xrightarrow{G' * F'} \end{array} & h \end{array} \end{array}$$

Como passamos da categoria Top à categoria TopH , quotientando os morfismos por homotopia, analogamente podemos passar da categoria $C(X, Y)$ à categoria $CH(X, Y)$, definida da seguinte maneira:

- *Categoria $CH(X, Y)$:* Objetos: funções contínuas de X . Morfismos: classes de homotopia de homotopias, ou seja, $\text{Hom}_{CH(X, Y)}(f, g) := [f, g]$. Composição de morfismos: $[\Psi] \circ [\Phi] := [\Psi * \Phi]$.

LEMA 2.6.31. *A categoria $CH(X, Y)$ é um grupoide, ou seja, todo morfismo é invertível.*

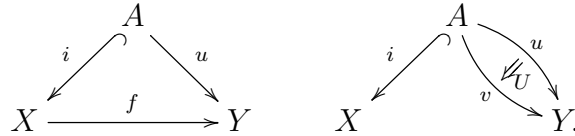
DEMONSTRAÇÃO. Sejam $f, g: X \rightarrow Y$ e $F: f \sim g$. Seja $\bar{F}: g \sim f$ definida por $\bar{F}(x, t) := F(x, 1 - t)$. Mostremos que $[\bar{F}] = [F]^{-1}$; isso prova que o genérico morfismo $[F]: f \rightarrow g$ em $CH(X, Y)$ é invertível. Consideremos a homotopia $\bar{F} * F: f \sim f$ e mostremos que existe uma homotopia de homotopias $\Phi: \bar{F} * F \sim \text{id}_f$, sendo $\text{id}_f: X \times I \rightarrow Y$, $(x, t) \mapsto f(x)$:

$$\Phi(x, t, u) := \begin{cases} F(x, 2t(1 - u)) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ F(x, (2 - 2t)(1 - u)) & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Analogamente podemos construir uma homotopia $\Psi: F * \bar{F} \sim \text{id}_g$. \square

Sejam $i: A \hookrightarrow X$ uma cofibração e $u, v: A \rightarrow Y$ funções contínuas. Consideremos uma função $f: X \rightarrow Y$ tal que $f|_A = u$. Se $U: A \times I \rightarrow Y$ for uma homotopia entre u e v , as funções f e U se colam a uma função $\bar{U}: \text{Cyl}(X, A) \rightarrow Y$, a qual, sendo i uma cofibração, se estende a $V: \text{Cyl}(X) \rightarrow Y$. A função $g := V_1: X \rightarrow Y$ satisfaz $g|_A = v$. O seguinte lema afirma a classe de homotopia *relativa a A* de g só depende da classe de homotopia relativa a A de f e da classe de homotopia de U . Ademais, essa ação de $[U]$, que leva de $[f]$ a $[g]$, induz uma *bijeção* entre a classe de homotopia relativa a A de funções de X a Y , cuja restrição a A é u , e a classe de homotopia relativa a A de funções de X a Y , cuja restrição a A é v .

LEMA 2.6.32. *Sejam $i: A \hookrightarrow X$ uma cofibração, $u: A \rightarrow Y$ uma função contínua e $f: X \rightarrow Y$ um morfismo em $\text{Top} \uparrow A$. Ademais, seja $v: A \rightarrow Y$ outra função contínua, homotópica a u .*



Um elemento $[U] \in [u, v]$ induz uma bijeção:⁷

$$\begin{aligned} [U]_{\#}: [i, u] &\rightarrow [i, v] \\ [f] &\mapsto [f] \cdot [U] \end{aligned}$$

de modo que, se $v = u$, temos $[\text{id}]_{\#} = \text{id}$ e, se $w: A \rightarrow Y$ for outra função e $V: v \sim w$, temos $[V * U]_{\#} = V_{\#} \circ U_{\#}$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $[U] \in [u, v]$. Como $u = f|_A$, fica definida a função $\bar{U}: \text{Cyl}(X, A) \rightarrow Y$, $[x] \mapsto f(x)$ e $[(a, t)] \mapsto U(a, t)$. Sendo i uma cofibração, existe uma extensão $V: X \times I \rightarrow Y$ de \bar{U} . Seja $g := V_1: X \rightarrow Y$. Pomos $[f] \cdot [U] := [g]$. Verifiquemos que essa ação é bem definida. Sejam $[f] = [f']$ e $[U] = [U']$ e sejam V uma extensão de f e U e V' uma extensão de f' e U' . Por hipótese existem uma homotopia $F: f \sim f'$, sendo $F: X \times I \rightarrow Y$, em $\text{Top} \uparrow A$ e uma homotopia de homotopias $\Phi: U \sim U'$, sendo $\Phi: \text{Cyl}(A) \times I \rightarrow Y$. Como $\Phi(a, t) = F(a, t) =$

⁷Na seguinte fórmula, o conjunto $[i, u]$ contém as classes de homotopia de morfismos entre i e u em $\text{Top} \uparrow A$. Logo, $[f] \in [i, u]$.

$u(a)$ para todos $a \in A$ e $t \in I$, as funções F , Φ , V e V' se colam a uma função $\bar{F}: \text{Cyl}(X, A) \times I \cup \text{Cyl}(X) \times \partial I \rightarrow Y$. Usando a notação do corolário 2.6.27, seja $R: \text{Cyl}(X) \times I \rightarrow Z$ uma retração (por deformação). A função $G := (\bar{F} \circ R)|_{X \times \{1\} \times I}$ é uma homotopia entre g e g' relativa a A . \square

Sejam $i: A \hookrightarrow X$ uma cofibração e $g: Y \rightarrow Z$ uma função contínua. Para toda função $u: A \rightarrow Y$ fixada, fica definida a função

$$(57) \quad \begin{aligned} g_*: [i, u] &\rightarrow [i, gu] \\ [f] &\mapsto [g \circ f] \end{aligned}$$

conforme o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & \swarrow i & & \searrow u & \\ X & & & & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ & \searrow f & & & & & \\ & & & & & & \end{array}$$

É fácil provar que, $h_*g_* = (hg)_*$ e que, se g for um homeomorfismo, então g_* é uma bijeção. Em geral g_* não depende somente da classe de homotopia de g , pois a função gu mesma depende do representante g .

LEMA 2.6.33. *Sejam $i: A \hookrightarrow X$ uma cofibração e $g, g': Y \rightarrow Z$ funções homotópicas. Seja $G: g \sim g'$ uma homotopia qualquer. Para toda função $u: A \rightarrow Y$ fixada, a composição $Gu_I: gu \sim g'u$ verifica a relação:*

$$(58) \quad [Gu_I]_{\#} \circ g_* = g'_*$$

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & \swarrow i & & \searrow u & \\ X & & & & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ & \searrow f & & & & \Downarrow G & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array}$$

DEMONSTRAÇÃO. A homotopia $Gf_I: gf \sim g'f$ estende $Gu_I: gu \sim g'u$, portanto, conforme a demonstração do lema 2.6.32, temos que $[Gu_I]_{\#}[gf] = [g'f]$. \square

COROLÁRIO 2.6.34. *Sejam $i: A \hookrightarrow X$ uma cofibração e $g: Y \rightarrow Y$ uma função homotópica à identidade de Y . Para toda função $u: A \rightarrow Y$ fixada, a função g_* , definida por (57), é um bijeção.*

DEMONSTRAÇÃO. É suficiente considerar $Z = Y$ e $g' = \text{id}_Y$ no lema 2.6.33. Obtemos que $[Gu_I]_{\#} \circ g_* = \text{id}$, logo, sendo $[Gu_I]_{\#}$ uma bijeção pelo lema 2.6.32, também g_* é uma bijeção. \square

COROLÁRIO 2.6.35. *Sejam $i: A \hookrightarrow X$ uma cofibração e $g: Y \rightarrow Z$ uma equivalência homotópica. Para toda função $u: A \rightarrow Y$ fixada, a função g_* , definida por (57), é um bijeção.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $h: Z \rightarrow Y$ uma inversa homotópica de g . Consideremos as seguintes funções:

$$[i, u] \xrightarrow{g_*} [i, gu] \xrightarrow{h_*} [i, hgu] \xrightarrow{g_*} [i, ghgu].$$

Pelo corolário 2.6.34, temos que h_*g_* e g_*h_* são bijeções. Por isso, é fácil provar que as três funções são bijeções. \square

O corolário 2.6.35 tem algumas consequências muito importantes. A primeira é a seguinte. Consideremos a função (57) no seguinte caso particular: seja $A = \{pt\}$ um espaço formado por um ponto. Então consideramos $x_0 := i(pt)$ e $y_0 := u(pt)$ como pontos marcados de X e Y . Obtemos a função $g_*: [(X, x_0), (Y, y_0)] \rightarrow [(X, x_0), (Z, g(y_0))]$. O corolário 2.6.35, neste caso particular, se torna o seguinte.

COROLÁRIO 2.6.36. *Sejam $\{x_0\} \hookrightarrow X$ uma cofibração e $g: Y \rightarrow Z$ uma equivalência homotópica. Para todo $y_0 \in Y$, a função*

$$(59) \quad \begin{aligned} g_*: [(X, x_0), (Y, y_0)] &\rightarrow [(X, x_0), (Z, g(y_0))] \\ [f] &\mapsto [g \circ f] \end{aligned}$$

é um bijeção.

Isso pode não valer se $\{x_0\} \hookrightarrow X$ não é uma cofibração. De fato, dada uma classe $[k] \in [(X, x_0), (Z, g(y_0))]$, se $h: Z \rightarrow Y$ for uma inversa homotópica de g , temos que $g \circ hk \simeq k$, mas não podemos garantir que $hk(x_0) = y_0$, portanto (59) pode não ser sobrejetora. Analogamente, se $g \circ f \sim g \circ f'$, existe uma homotopia $F: f \sim f'$, mas não podemos garantir que seja relativa a $\{x_0\}$, portanto (59) pode não ser injetora.

Outra consequência fundamental do corolário 2.6.35 é a seguinte. Consideremos dois pares (X, A) e (Y, B) e uma equivalência homotópica $f: X \rightarrow Y$ tal que $f|_A: A \rightarrow B$ é um homeomorfismo (em particular, isso acontece se $A = B$ e $f|_A = \text{id}$). Se (X, A) e (Y, B) forem cofibrações, então f é uma equivalência homotópica relativamente a A . Equivalentemente, se f for um isomorfismo em TopH (em particular, se o for em TopH_2), então é um isomorfismo em TopHR .

TEOREMA 2.6.37. *Sejam $i: A \hookrightarrow X$ e $j: B \hookrightarrow Y$ cofibrações e seja $(f, \bar{f}): i \rightarrow j$ um morfismo em $\text{Hom}(\text{Top})$:*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ \bar{f} \downarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{j} & Y. \end{array}$$

Se f for uma equivalência homotópica e \bar{f} um homeomorfismo, então (f, \bar{f}) é uma equivalência homotópica relativa (ou seja, é um isomorfismo em $\text{HomHR}(\text{Top})$); em particular, é uma equivalência homotópica entre i e j , ou seja, um isomorfismo em $\text{HomH}(\text{Top})$.

TEOREMA 2.6.39. *Sejam $i: A \hookrightarrow X$ e $j: B \hookrightarrow Y$ cofibrações e seja $(f, \bar{f}): i \rightarrow j$ um morfismo em $\text{Hom}(\text{Top})$:*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ \bar{f} \downarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{j} & Y. \end{array}$$

Se f e \bar{f} forem equivalências homotópicas, então (f, \bar{f}) é uma equivalência homotópica, ou seja, um isomorfismo em $\text{HomH}(\text{Top})$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\bar{g}: B \rightarrow A$ uma equivalência homotópica inversa a \bar{f} e vamos procurar uma equivalência homotópica $g: Y \rightarrow X$, inversa a f , que torne (f, g) um morfismo em $\text{Hom}(\text{Top})$. Consideremos os seguintes diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & B & & A \\ & & \swarrow & \searrow & \swarrow \\ Y & \xrightarrow{\dots\dots\dots g \dots\dots\dots} & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & & \swarrow & \searrow & \swarrow \\ & & Y & & X \end{array}$$

(Note: The diagram above is a simplified representation of the commutative diagrams in the image. The left diagram shows B at the top, with arrows $j: B \rightarrow Y$, $i\bar{g}: B \rightarrow X$, and $f\bar{g}: B \rightarrow Y$. A dotted arrow $g: Y \rightarrow X$ is shown below j , and an arrow $f: X \rightarrow Y$ is shown below $i\bar{g}$. The right diagram shows A at the top, with arrows $i: A \rightarrow X$ and $j: A \rightarrow Y$. A curved arrow $f\bar{g}: A \rightarrow Y$ is shown to the right, with a double-headed arrow α between $f\bar{g}$ and j .

onde $\alpha: f\bar{g} = j\bar{f}\bar{g} \sim j$. Obtemos as seguintes funções:

$$[j, i\bar{g}] \xrightarrow{f_*} [j, f\bar{g}] \xrightarrow{\alpha_{\#}} [j, j].$$

Pelos lemas 2.6.35 e 2.6.32 as funções f_* e $\alpha_{\#}$ são bijeções, portanto existe $g: Y \rightarrow X$ tal que $\alpha_{\#} f_* [g] = [1_Y]$, logo $f \circ g \sim_B \text{id}_Y$. Analogamente, podemos construir as seguintes funções:

$$[i, j\bar{f}] \xrightarrow{g_*} [i, g j\bar{f}] \xrightarrow{\beta_{\#}} [i, i]$$

sendo $\beta: g j\bar{f} = g f i \sim i$, portanto existe $f': X \rightarrow Y$ tal que $\beta_{\#} g_* [f'] = [1_X]$, logo $g \circ f' \sim_A \text{id}_X$. Temos que:

$$g \circ f \sim_A g \circ f \circ g \circ f' \sim_A g \circ f' \sim_A 1_X$$

portanto g é a inversa homotópica de f procurada. □

DEFINIÇÃO 2.6.40. Uma *tripla regular* é uma tripla de espaços (X, X_1, X_2) tal que:

- $X = X_1 \cup X_2$;
- X_1 e X_2 são fechados em X ;
- pondo $X_0 := X_1 \cap X_2$, as inclusões $X_0 \hookrightarrow X_1$ e $X_0 \hookrightarrow X_2$ são cofibrações.

Um *morfismo de triplas regulares* entre (X, X_1, X_2) e (Y, Y_1, Y_2) é uma função contínua $f: X \rightarrow Y$ tal que $f(X_1) \subset Y_1$ e $f(X_2) \subset Y_2$ (logo $f(X_0) \subset Y_0$). ◇

TEOREMA 2.6.41 (Primeiro teorema da colagem). *Seja $f: (X, X_1, X_2) \rightarrow (Y, Y_1, Y_2)$ um morfismo de triplas regulares. Se $f|_{X_i}: X_i \rightarrow Y_i$ é uma equivalência homotópica para todo $i \in \{0, 1, 2\}$, então $f: X \rightarrow Y$ é uma equivalência homotópica.*

DEMONSTRAÇÃO. □

Na categoria dos k -espaços, a noção de fibração é análoga, só considerando o cilindro $\text{Cyl}(X, A)_k$.

DEFINIÇÃO 2.6.42. Seja $(X, A) \in \text{Ob}(\text{Top}_2^k)$.

- (X, A) tem a *propriedade de extensão da homotopia* a respeito de um k -espaço Y se, dada uma função $f: \text{Cyl}(X, A)_k \rightarrow Y$, existe uma função $F: X \times I \rightarrow Y$ tal que $F|_{\text{Cyl}(X, A)_k} = f$.
- (X, A) é uma *k -cofibrção* se tem a propriedade da extensão da homotopia a respeito de qualquer k -espaço Y . \diamond

As proposições 2.6.3, 2.6.4, 2.6.8, 2.6.6 e 2.6.12 ficam válidas para k -cofibrções com as mesmas provas, considerando o cilindro em Top^k , a definição de mergulho em Top^k e, no lema 2.6.6, só pedindo que X seja fracamente de Hausdorff (portanto compactamente gerado). De novo, é mais natural considerar k -cofibrções que cofibrções, pelos motivos que já discutimos, mas todas as cofibrções que encontraremos serão k -cofibrções.

2.7. Fibrções

Afirmamos no começo da seção precedente que dois problemas clássicos de topologia consistem em estabelecer quando é possível estender ou levantar uma homotopia. O problema da extensão levou à definição de cofibrção, enquanto o problema do levantamento, que agora discutimos, nos levará à definição de fibrção.

DEFINIÇÃO 2.7.1. Seja $\pi: E \rightarrow X$ e $f: Y \rightarrow X$ funções contínuas. Um *levantamento* de f a E através de π , que chamamos também de *π -levantamento* de f , é uma função $\tilde{f}: Y \rightarrow E$ tal que $f = \pi \circ \tilde{f}$:

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{f} & X. \end{array} \quad \diamond$$

DEFINIÇÃO 2.7.2. Seja $\pi: E \rightarrow X$ uma função contínua.

- π tem a *propriedade de levantamento da homotopia* a respeito de um espaço Y se, dadas uma função $F: Y \times I \rightarrow X$ e um π -levantamento $\tilde{f}: Y \rightarrow E$ de F_0 , existe um π -levantamento $\tilde{F}: Y \times I \rightarrow E$ de F tal que $\tilde{F}_0 = \tilde{f}$.
- π é uma *fibrção* se tem a propriedade do levantamento da homotopia a respeito de qualquer espaço Y . \diamond

Isso significa que π é uma fibrção se, dadas uma homotopia F em X de f a g e um π -levantamento \tilde{f} de f , é possível levantar a homotopia toda a partir de \tilde{f} . Obtemos o seguinte diagrama:

$$(60) \quad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \downarrow i_0 & \nearrow \tilde{F} & \downarrow \pi \\ Y \times I & \xrightarrow{F} & X. \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{F'} & Y^I \\ \downarrow & \nearrow F & \downarrow \text{ev}_0 \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y. \end{array}$$

CAPÍTULO 3

Variedades, Δ -complexos e CW-Complexos

Vamos introduzir algumas categorias de espaços topológicos, com estruturas adicionais quando for necessário, que são fundamentais em topologia algébrica.

3.1. Variedades topológicas e suaves

Uma classe muito importante de espaços topológicos é formada pelas *variedades topológicas*. Discutimos essa noção no primeiro capítulo do volume I, portanto só vamos lembrar brevemente a definição. Antes de tudo se trata de espaços que localmente “se parecem” com um espaço euclidiano \mathbb{R}^n ou, equivalentemente, com uma bola aberta de \mathbb{R}^n . Ademais, pedimos algumas condições topológicas que garantam uma regularidade suficiente e a existência das partições da unidade.

DEFINIÇÃO 3.1.1. Sejam X um espaço topológico e $x \in X$ um ponto fixado. Uma *carta local* de X em x de *dimensão* k é uma tripla (U, V, φ) , onde:

- $U \subset X$ é uma vizinhança aberta de x ;
- $V \subset \mathbb{R}^k$ é um subconjunto aberto dotado da topologia induzida;
- $\varphi: V \rightarrow U$ é um homeomorfismo.

Se $U = X$, a carta local pode ser chamada também de *carta global*. ◇

DEFINIÇÃO 3.1.2. Um espaço topológico X é dito *espaço localmente euclidiano de dimensão* k se para todo $x \in X$ existe uma carta local de X em x de dimensão k . Usamos a notação $\dim X = k$. ◇

DEFINIÇÃO 3.1.3. Um espaço topológico X é dito *variedade topológica de dimensão* k se é conexo, de Hausdorff, de base enumerável e localmente euclidiano de dimensão k . ◇

Dessa maneira fica definida a seguinte categoria:

- *Categoria* VarTop : Objetos: variedades topológicas. Morfismos: funções contínuas.

Trata-se de uma subcategoria cheia de TopHd^k (logo de Top). Podemos também construir as categorias análogas às da sequência (1):

$$(61) \quad \text{VarTop} \hookrightarrow \text{VarTop}_+ \hookrightarrow \text{VarTop}_2 \hookrightarrow \text{VarTop}_{2+} \hookrightarrow \dots$$

Um objeto de VarTop_2 é um par (X, A) onde X é uma variedade e A é uma *subvariedade fechada* (v. cap. I-??). De modo análogo se definem os objetos das demais categorias. Também podemos quocientar as funções contínuas por homotopia, obtendo as categorias:

$$(62) \quad \text{VarTopH} \hookrightarrow \text{VarTopH}_+ \hookrightarrow \text{VarTopH}_2 \hookrightarrow \text{VarTopH}_{2+} \hookrightarrow \dots$$

Observamos que, na categoria Top, se um objeto X for uma variedade e um objeto Y for isomorfo a X , então também Y é uma variedade. Por isso, cada classe de isomorfismo de objetos de VarTop coincide com uma classe de isomorfismo de objetos de Top. Pelo contrário, na categoria TopH, um espaço Y pode ser isomorfo a uma variedade X , sem ser uma variedade, portanto uma classe de isomorfismo de objetos de VarTopH está contida em uma classe de isomorfismo de objetos de TopH.

3.1.1. Variedades suaves. Podemos considerar as *variedades suaves*, que são variedades topológicas dotadas de uma estrutura diferencial. Vamos lembrar brevemente a definição.

DEFINIÇÃO 3.1.4. Uma *variedade suave* $(X, \Phi_{\mathfrak{U}})$ de *dimensão* k é um espaço topológico X conexo, de Hausdorff e de base enumerável, dotado de uma família de triplas $\Phi_{\mathfrak{U}} = \{(U_i, V_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ tal que:

- $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de X , $V_i \subset \mathbb{R}^k$ é um subconjunto aberto e $\varphi_i: V_i \rightarrow U_i$ é um homeomorfismo;
- para todos $i, j \in I$ tais que $U_{ij} := U_i \cap U_j \neq \emptyset$, o homeomorfismo $\varphi_{ij} := \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i|_{\varphi_i^{-1}(U_{ij})}: \varphi_i^{-1}(U_{ij}) \rightarrow \varphi_j^{-1}(U_{ij})$ é suave e tem inverso suave (entre abertos de \mathbb{R}^k);
- a família $\Phi_{\mathfrak{U}} = \{(U_i, V_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$, dita atlas suave, é maximal entre as que satisfazem as duas propriedades precedentes. \diamond

Uma variedade suave é em particular uma variedade topológica, com uma estrutura a mais. Um morfismo entre duas variedades suaves é uma *função suave*, que podemos definir da seguinte maneira.

DEFINIÇÃO 3.1.5. Sejam $(X, \Phi_{\mathfrak{U}})$ e $(Y, \Psi_{\mathfrak{V}})$ variedades suaves. Uma função $f: Y \rightarrow X$ é dita *suave* se, para todo $y \in Y$, existem $(U, V, \varphi) \in \Psi_{\mathfrak{V}}$ e $(U', V', \psi) \in \Phi_{\mathfrak{U}}$ tais que $f(U) \subset U'$ e a função $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi: V \rightarrow V'$ é de classe C^∞ . \diamond

Dessa maneira fica definida a seguinte categoria:

- *Categoria* VarSuaves: Objetos: variedades suaves. Morfismos: funções suaves.

Não se trata de uma sub-categoria de VarTop (nem de Top), pois a mesma variedade topológica pode admitir infinitas estruturas suaves diferentes. Podemos definir o seguinte functor, que não é injetor nem sobrejetor entre os objetos:

$$\begin{aligned} \Pi: \text{VarSuaves} &\rightarrow \text{VarTop} \\ (X, \Phi_{\mathfrak{U}}) &\mapsto X \\ f &\mapsto f. \end{aligned}$$

Se duas variedades suaves $(X, \Phi_{\mathfrak{U}})$ e $(Y, \Psi_{\mathfrak{V}})$ forem *difeomorfas*, ou seja, isomorfas na categoria VarSuaves, então X e Y são homeomorfas, portanto o functor Π define uma função entre as classes de difeomorfismo de variedades suaves e as classes de homeomorfismo de variedades topológicas. Essa função não é nem injetora nem sobrejetora.

De novo, podemos construir as categorias análogas às da sequência (1):

$$(63) \quad \text{VarSuaves} \hookrightarrow \text{VarSuaves}_+ \hookrightarrow \text{VarSuaves}_2 \hookrightarrow \text{VarSuaves}_{2+} \hookrightarrow \dots$$

Um objeto de VarSuaves_2 é um par (X, A) onde X é uma variedade suave e A é uma *subvariedade suave fechada* (v. cap. I-??). De modo análogo se definem os objetos das demais categorias. Também podemos quocientar as funções suaves por homotopia, obtendo as categorias:

$$(64) \quad \text{VarSuavesH} \hookrightarrow \text{VarSuavesH}_+ \hookrightarrow \text{VarSuavesH}_2 \hookrightarrow \text{VarSuavesH}_{2+} \hookrightarrow \dots$$

Observamos que, conforme essa definição, consideramos homotopias *contínuas* de funções *suaves*. Também poderíamos definir homotopias suaves, considerando que, dada uma variedade (X, Φ_M) , existe uma estrutura natural de variedade suave *com bordo* em $X \times I$, a partir da qual podemos definir uma homotopia suave $F: X \times I \rightarrow Y$. Todavia, por causa do *teorema de aproximação suave*, existe uma homotopia suave entre duas funções se, e somente se, existe uma homotopia contínua, portanto as categorias da sequência (64) ficariam definidas da mesma maneira.

3.1.2. Variedades com bordo. Podemos também considerar as variedades *com bordo*, que já citamos no parágrafo precedente. Usamos a seguinte notação:

$$(65) \quad \mathbb{H}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}.$$

\mathbb{H}^n é um semi-espaço contido em \mathbb{R}^n , dotado da topologia induzida. Um subconjunto aberto de \mathbb{H}^n é aberto também em \mathbb{R}^n se, e somente se, não intercepta $\partial\mathbb{H}^n$.

DEFINIÇÃO 3.1.6. Sejam X um espaço topológico e $x \in X$ um ponto fixado. Uma *carta local com bordo* de X em x de *dimensão* k é uma tripla (U, V, φ) , onde:

- $U \subset X$ é uma vizinhança aberta de x ;
- $V \subset \mathbb{H}^k$ é um subconjunto aberto;
- $\varphi: V \rightarrow U$ é um homeomorfismo. \diamond

DEFINIÇÃO 3.1.7. Um espaço topológico X é dito *espaço localmente euclidiano com bordo de dimensão* k se para todo $x \in X$ existe uma carta local com bordo (U, V, φ) de X de dimensão k tal que $x \in U$. Usamos a notação $\dim X = k$. \diamond

DEFINIÇÃO 3.1.8. Um espaço topológico X é dito *variedade topológica com bordo de dimensão* k se é conexo, de Hausdorff, de base enumerável e localmente euclidiano com bordo de dimensão k . \diamond

Observamos que, quando dizemos “com bordo”, entendemos mais precisamente “eventualmente com bordo”, no sentido que admitimos a possibilidade que o bordo seja vazio. Dessa maneira fica definida a seguinte categoria:

- *Categoria* VarTopBd : Objetos: variedades topológicas com bordo. Morfismos: funções contínuas.

Trata-se de uma sub-categoria cheia de TopHd^k (logo de Top), da qual VarTop é uma sub-categoria cheia. Podemos também construir as categorias análogas às da sequência (1):

$$(66) \quad \text{VarTopBd} \hookrightarrow \text{VarTopBd}_+ \hookrightarrow \text{VarTopBd}_2 \hookrightarrow \text{VarTopBd}_{2+} \hookrightarrow \dots$$

Também podemos quocientar as funções contínuas por homotopia, obtendo as categorias:

$$(67) \quad \text{VarTopBdH} \hookrightarrow \text{VarTopBdH}_+ \hookrightarrow \text{VarTopBdH}_2 \hookrightarrow \text{VarTopBdH}_{2+} \hookrightarrow \dots$$

Enfim, podemos definir as variedades *suaves com bordo*. Na verdade, nesse caso podemos definir as *variedades com quinas*, das quais as com bordo são um caso particular. Ficam definidas as categorias análogas às precedentes. O leitor pode encontrar os detalhes no volume de topologia diferencial.

3.2. Curvas e superfícies

Vamos mostrar (sem demonstração) a classificação completa das curvas e, no caso compacto, das superfícies topológicas e suaves, com ou sem bordo, conforme a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 3.2.1. Uma *curva topológica (suave)* é uma variedade topológica (suave) de dimensão 1. Uma *superfície topológica (suave)* é uma variedade topológica (suave) de dimensão 2. Definimos de modo análogo as curvas e as superfícies *com bordo*. \diamond

OBSERVAÇÃO 3.2.2. Estudando as curvas mergulhadas em \mathbb{R}^n , frequentemente se considera uma definição diferente, que implica na possibilidade que haja auto-interseções, portanto não se pede que o suporte de uma curva seja uma variedade (além de não identificar a curva mesma com o suporte). Em outros contextos pode ser mais adequado definir uma curva como acabamos de fazer. Neste volume usaremos sempre a definição 3.2.1. \diamond

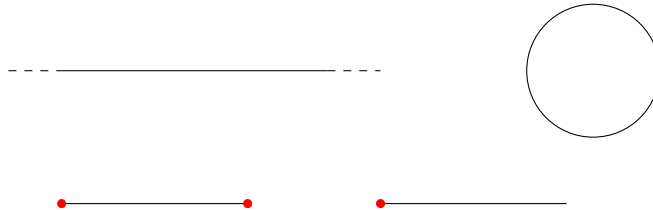
A classificação das curvas é particularmente simples, por causa do seguinte teorema.

TEOREMA 3.2.3.

- *Toda curva topológica sem bordo é homeomorfa a S^1 ou a \mathbb{R} .*
- *Toda curva topológica com bordo não vazio é homeomorfa a $[0, 1]$ ou a $[0, 1)$.*

Como S^1 , \mathbb{R} , $[0, 1)$ e $[0, 1]$ admitem uma única estrutura diferencial a menos de difeomorfismo, isso implica o seguinte.

- *Toda curva suave sem bordo é difeomorfa a S^1 ou a \mathbb{R} .*
- *Toda curva suave com bordo não vazio é difeomorfa a $[0, 1]$ ou a $[0, 1)$.*

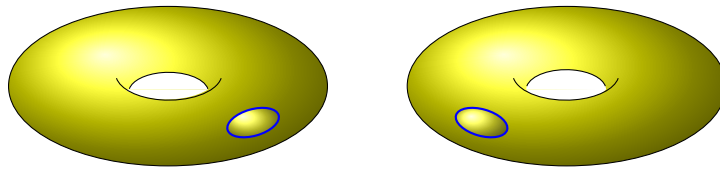


OBSERVAÇÃO 3.2.4. Do ponto de vista da equivalência homotópica, \mathbb{R} , $[0, 1]$ e $[0, 1)$ são equivalentes entre si, pois as três são contráteis, mas não são equivalentes a S^1 . Por isso, temos duas classes de homotopia em total. \diamond

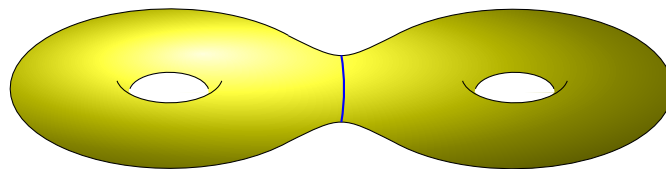
Agora vamos considerar as superfícies. Alguns exemplos são a esfera S^2 , o toro $S^1 \times S^1$, o plano \mathbb{R}^2 , o cilindro infinito ou sem os dois bordos, ou seja, $S^1 \times \mathbb{R}$ ou $S^1 \times (0, 1)$. Podemos mostrar a classificação completa das superfícies *compactas* a menos de homeomorfismo e de equivalência homotópica, começando pelo caso sem bordo. As superfícies fundamentais são as seguintes: a esfera S^2 , o toro $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ e o plano projetivo real $\mathbb{R}P^2$. O plano projetivo se obtém como quociente do disco D^2 , identificando os pares de pontos antipodais do bordo, ou, equivalentemente, como quociente de S^2 , identificando os pares de pontos antipodais. Vamos agora introduzir uma operação natural que permite criar novas superfícies a partir das fundamentais.

DEFINIÇÃO 3.2.5. Sejam X e Y superfícies topológicas. A soma conexa $X \# Y$ é definida da seguinte maneira:

- escolhemos dois subconjuntos $D \subset X$ e $D' \subset Y$ homeomorfos a D^2 ;
- tiramos o interior dos dois discos;

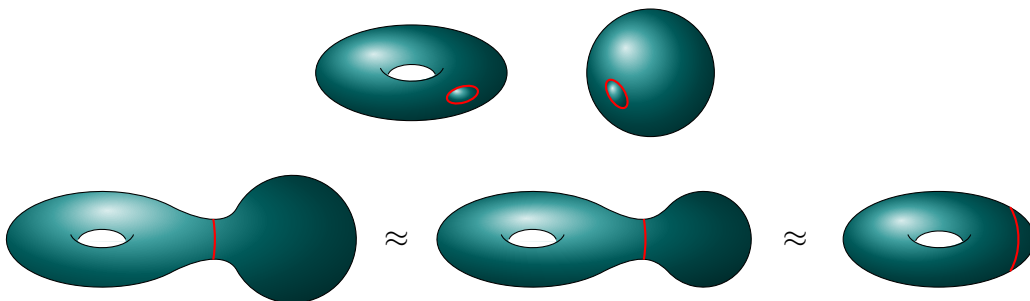


- identificamos os pontos correspondentes dos bordos ∂D e $\partial D'$ (homeomorfos a S^1).



◇

Pode-se provar que a soma conexa $X \# Y$ é uma superfície topológica que, a menos de homeomorfismo, não depende da posição dos dois discos escolhidos. Ademais, é fácil conferir que $X \# Y \approx Y \# X$ e que $X \# S^2 \approx X$.

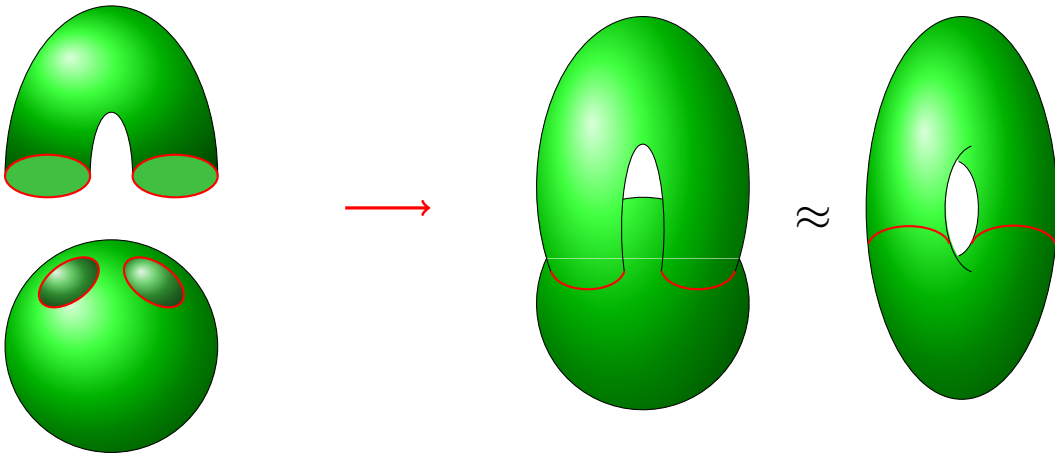


Portanto, as classes de homeomorfismo de superfícies topológicas se tornam um monoide abeliano a respeito da soma conexa, sendo a classe da esfera o elemento neutro. Consideramos dois tipos fundamentais de superfícies, a menos de homeomorfismo:

- a soma conexa de g toros $\Sigma_g := \mathbb{T}^2 \# \cdots \# \mathbb{T}^2$, para $g \in \mathbb{N}$. Para $g = 0$ definimos $\Sigma_0 := S^2$. Desta maneira obtemos um sub-monoide isomorfo a \mathbb{N} , pois $\Sigma_g \# \Sigma_{g'} \approx \Sigma_{g+g'}$.
- A soma conexa de k espaços projetivos $P_k := \mathbb{R}\mathbb{P}^2 \# \cdots \# \mathbb{R}\mathbb{P}^2$, para $k \in \mathbb{N}$. Para $k = 0$ definimos $P_0 := S^2$. De novo obtemos um sub-monoide isomorfo a \mathbb{N} .

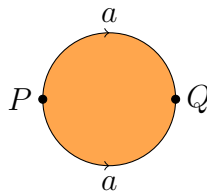
A superfície Σ_g é um toro generalizado, com g “buracos”. O número g é dito *gênero* da superfície e *corresponde ao número máximo de círculos mergulhados na superfície que podem ser tirados sem tornar a superfície desconexa*. Por exemplo, em um toro podemos cortar ao longo de um círculo vertical ou horizontal e a superfície fica conexa, mas não é possível fazer isso uma segunda vez. Na esfera, cortando ao longo de qualquer círculo a superfície se divide em duas componentes. Ademais, observamos que a superfície $X \# \mathbb{T}^2$ é homeomorfa à que se obtém acrescentando um cilindro a X da seguinte maneira:

- escolhemos dois discos $D, D' \subset X$ tais que $D \cap D' = \emptyset$;
- tiramos o interior dos discos;
- identificamos os bordos de D e D' com os bordos do cilindro.

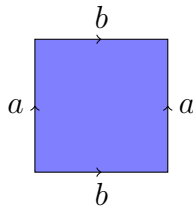


Portanto, Σ_g é homeomorfa a uma esfera com g cilindros. Podemos também descrever estas superfícies através de um polígono no plano com os lados identificados de modo adequado (em alguns casos, este “polígono” pode ter lados não retos). De fato:

- a esfera se obtém do disco identificando dois semicírculos no bordo em sentido oposto (este é o único caso no qual os vértices *não* são identificados).

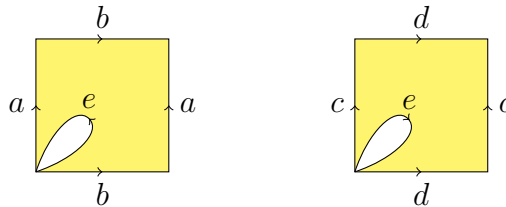


- O toro se obtém de um retângulo identificando os lados opostos no mesmo sentido (em particular todos os vértices ficam identificados).

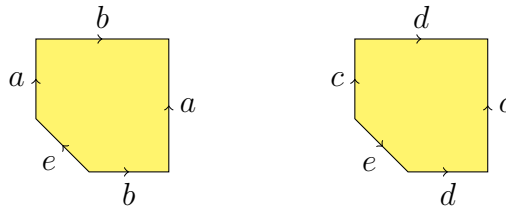


Imaginando de percorrer o bordo, completando uma volta, denotamos este polígono, quocientado como indicado, por $aba^{-1}b^{-1}$.

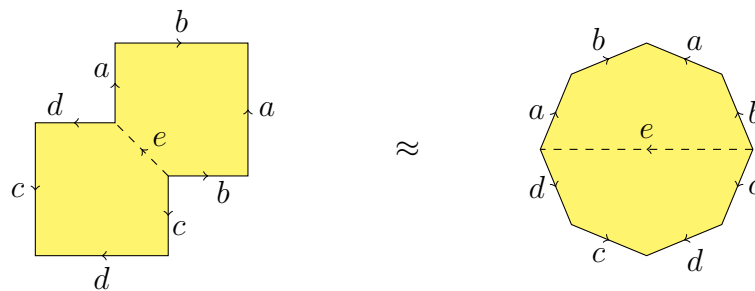
- A soma conexa de dois toros se obtém da seguinte maneira. Tiramos um disco perto de um vértice qualquer nos dois retângulos que representam os toros.



As figuras precedentes são equivalentes às seguintes:



Agora identificamos os bordos dos dois discos tirados, ou seja, os dois ciclos e .

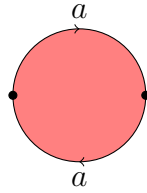


Se obtém o octágono (quocientado conforme as identificações indicadas) $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$.

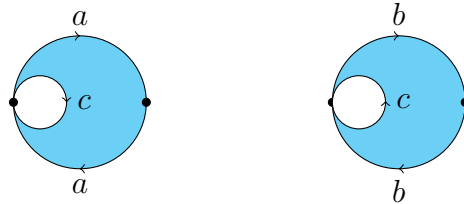
- A técnica mostrada no item precedente pode ser repetida, descrevendo a superfície Σ_g pelo polígono $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$.

Valem observações parecidas para a superfície P_k :

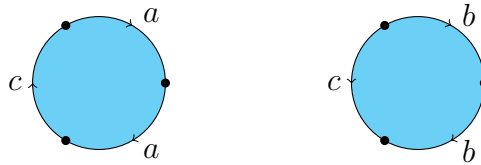
- $P_1 = \mathbb{RP}^2$ se obtém a partir do disco, identificando dois semicírculos no bordo no mesmo sentido (em particular os dois vértices ficam identificados, contrariamente ao caso de S^2).



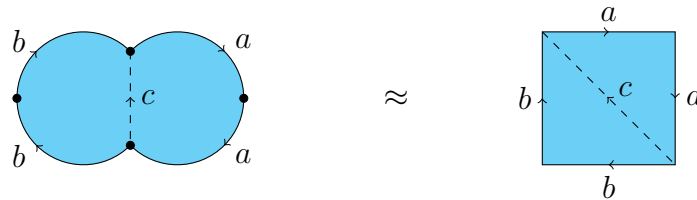
- A soma conexa de dois planos projetivos se obtém com uma técnica análoga à do bitoro Σ_2 : tiramos um disco perto de um vértice qualquer nos dois discos que representam os planos projetivos.



As figuras precedentes são equivalentes às seguintes:



Agora identificamos os bordos dos dois discos tirados, ou seja, os dois ciclos c .



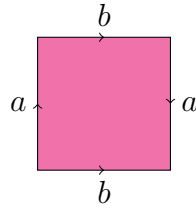
Se obtém o retângulo (quocientado conforme as identificações indicadas) $aabb$.

- A técnica mostrada no item precedente pode ser repetida, descrevendo a superfície P_k pelo polígono $a_1a_1 \cdots a_ka_k$.

Em geral, dados dois polígonos $a_1^{\epsilon_1} \cdots a_n^{\epsilon_n}$ e $b_1^{\tau_1} \cdots b_m^{\tau_m}$, sendo $\epsilon_i, \tau_i = \pm 1$, podemos aplicar a técnica que mostramos para descrever a soma conexa e obtemos que

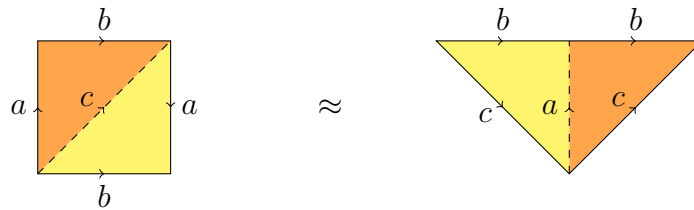
$$a_1^{\epsilon_1} \cdots a_n^{\epsilon_n} \# b_1^{\tau_1} \cdots b_m^{\tau_m} \approx a_1^{\epsilon_1} \cdots a_n^{\epsilon_n} b_1^{\tau_1} \cdots b_m^{\tau_m}.$$

A garrafa de Klein K se obtém identificando os lados opostos de um retângulo, fazendo com que dois lados opostos sejam identificados no mesmo sentido e os outros dois em sentido oposto.

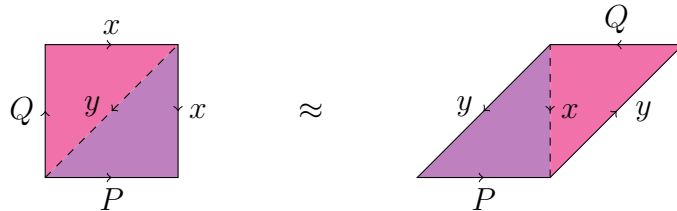


Temos que:

- $K \approx \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$. De fato, cortando K ao longo da diagonal e sobrepondo os lados identificados em sentido oposto se obtém $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$.



- Obtemos o polígono $c^{-1}c^{-1}bb$, o qual, pondo $a := c^{-1}$, equivale a $aabb$.
- $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{RP}^2 \approx \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \approx K \# \mathbb{RP}^2$. O segundo homeomorfismo é consequência do item precedente, portanto só temos que provar o primeiro. Para isso, observamos que, dadas duas seqüências de lados quaisquer P e Q e um lado x , temos o homeomorfismo $xxP^{-1}Q \approx yPyQ$. De fato, consideremos um retângulo com lados $QxxP^{-1}$ e chamemos de y a diagonal de $\hat{x}x$ a $\hat{P}Q$.



Cortamos ao longo da diagonal e identificamos os lados x obtemos $yPyQ$. Aplicando as duas seguintes operações:

- (i) $xxP^{-1}Q \approx yPyQ$;
- (ii) mudar o lado de partida em um ciclo de lados (obviamente o resultado é o mesmo)

obtemos o seguinte homeomorfismo:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^2 \# \mathbb{RP}^2 &\approx aba^{-1}b^{-1}cc \stackrel{(ii)}{\approx} cc(ab)(a^{-1}b^{-1}) \stackrel{(i)}{\approx} d(ab)^{-1}d(a^{-1}b^{-1}) \\ &\stackrel{(ii)}{\approx} db^{-1}a^{-1}da^{-1}b^{-1} \stackrel{(ii)}{\approx} b^{-1}(a^{-1}da^{-1})b^{-1}(d) \\ &\stackrel{(i)}{\approx} ee(a^{-1}da^{-1})^{-1}(d) = eead^{-1}ad \stackrel{(ii)}{\approx} a(d^{-1})a(dee) \\ &\stackrel{(i)}{\approx} ff(d)(dee) = ffddee \approx \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2. \end{aligned}$$

Isso implica que

$$P_{2k+1} \approx \Sigma_k \# \mathbb{R}P^2 \quad P_{2k+2} \approx \Sigma_k \# K$$

portanto as somas conexas de toros e projetivos são todas do tipo Σ_g , $\Sigma_g \# \mathbb{R}P^2$ ou $\Sigma_g \# K$. O seguinte teorema mostra que estas são *todas* as superfícies compactas a menos de homeomorfismo.

TEOREMA 3.2.6. *Qualquer superfície compacta é homeomorfa a Σ_g ou a P_k para $g, k \in \mathbb{N}$. Portanto, qualquer superfície compacta é homeomorfa a uma entre as seguintes, para $g \in \mathbb{N}$ (inclusive $g = 0$):*

$$\Sigma_g \quad \Sigma_g \# \mathbb{R}P^2 \quad \Sigma_g \# K.$$

Lembramos que, para $g = 0$ obtemos as superfícies S^2 , $\mathbb{R}P^2$ e K .

OBSERVAÇÃO 3.2.7. Mostraremos que as superfícies da família $\{\Sigma_g\}$ são *orientáveis*, enquanto as demais não o são. \diamond

A demonstração do teorema é muito técnica e não vamos mostrá-la. Trata-se de provar que cada superfície é triangulável (conceito que ainda não introduzimos mas cujo significado pode ser intuído) e que, dispondo em um plano os triângulos que cobrem a superfície, é possível reconduzir-se a um polígono com lados identificados que representa Σ_g ou P_k .

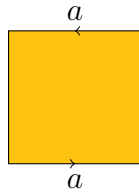
OBSERVAÇÃO 3.2.8. Mostraremos no próximo capítulo, através do grupo fundamental, que a classificação das superfícies topológicas compactas, a menos de *equivalência homotópica*, coincide com a enunciada no teorema 3.2.6. Isso significa que duas superfícies compactas têm o mesmo tipo de homotopia se, e somente se, são homeomorfas. \diamond

Vamos agora considerar as superfícies com bordo. Alguns exemplos são o disco D^2 , o cilindro com dois bordos $S^1 \times I$ e qualquer superfície sem bordo.

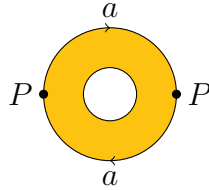
TEOREMA 3.2.9. *Qualquer superfície compacta com bordo se obtém, a partir de uma superfície compacta sem bordo, tirando o interior de uma quantidade finita de discos (fechados) disjuntos. Portanto, indicando com $\Sigma_{g,k}$ a superfície obtida tirando o interior de k discos disjuntos a Σ_g , temos que qualquer superfície compacta com bordo é homeomorfa a uma entre as seguintes, para $g, k \in \mathbb{N}$ (inclusive $g = 0$ e $k = 0$):*

$$\Sigma_{g,k} \quad \Sigma_{g,k} \# \mathbb{R}P^2 \quad \Sigma_{g,k} \# K.$$

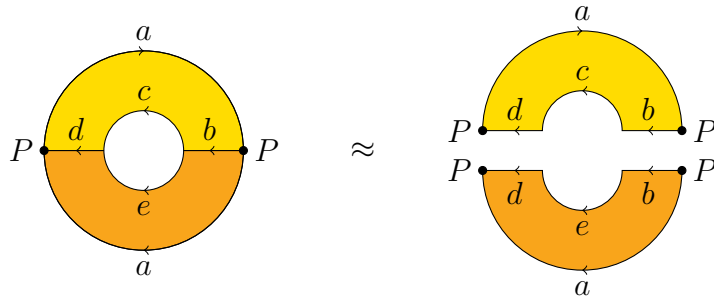
O disco D^2 se obtém, a partir da esfera, tirando o interior de um disco (por exemplo um hemisfério), portanto $D^2 \approx \Sigma_{0,1}$; o cilindro se obtém da esfera tirando o interior de dois discos (por exemplo em torno dos polos), portanto $S^1 \times I \approx \Sigma_{0,2}$. A *faixa de Möbius* é o exemplo mais elementar de superfície com bordo não orientável. Pode ser representada por um retângulo identificando dois lados opostos em sentido oposto e deixando os demais dois lados não identificados.



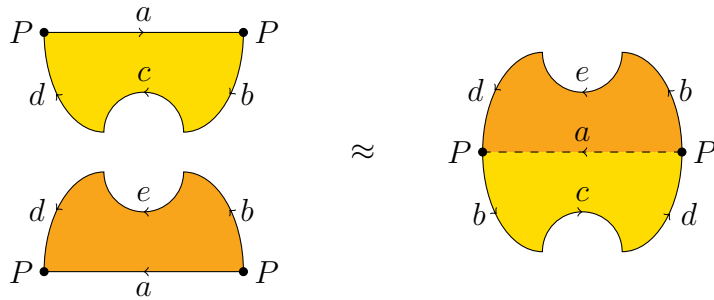
Podemos obter M tirando um disco ao plano projetivo, ou seja $M \approx \Sigma_{0,1} \# \mathbb{RP}^2$.



Vamos subdividir a figura da seguinte maneira:

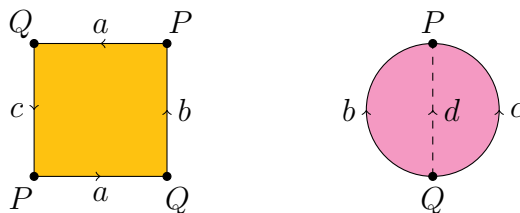


Obtemos o seguinte:

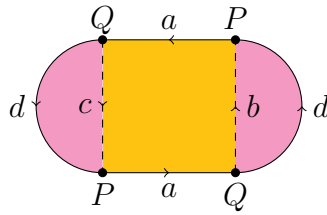


Como somente os vértices P são identificados, os lados b , c , d e e não são ciclos. Pondo $\tilde{a} := db$ obtemos a faixa de Möbius.

Equivalentemente, podemos mostrar que, acrescentando um disco a M , obtemos o plano projetivo.



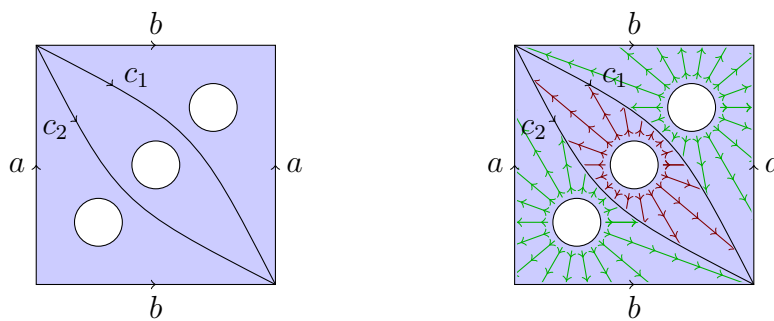
Obtemos:



O polígono precedente corresponde a $adad$, mas P e Q não são identificados, portanto a e d não são ciclos, enquanto $e := ad$ o é; afinal, obtemos $ee \approx \mathbb{RP}^2$.

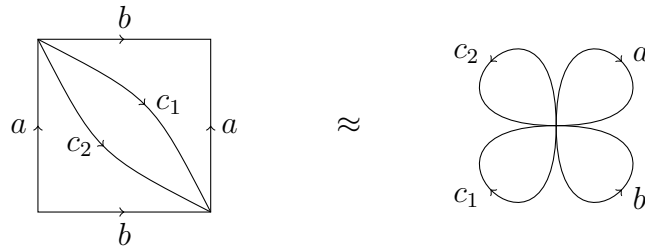
OBSERVAÇÃO 3.2.10. Contrariamente ao caso sem bordo, o teorema 3.2.6 não é válido como classificação a menos de equivalência homotópica: por exemplo, o cilindro e a faixa de Möbius são homotopicamente equivalentes a S^1 (logo entre si), mas não são homeomorfos entre si (pois, por exemplo, o cilindro é *orientável* e a faixa de Möbius não o é). Agora vamos mostrar a classificação a menos de equivalência homotópica. \diamond

Vamos mostrar que *toda* superfície com bordo *não vazio* é homotopicamente equivalente à união a um ponto de uma família de círculos.¹ De fato, consideremos um polígono que representa uma superfície sem bordo, por enquanto excluindo o caso da esfera (logo todos os vértices ficam identificados), e tiremos os interiores de k discos disjuntos. Imaginemos as bolas alinhadas no interior do polígono e tracemos $k - 1$ caminhos c_1, \dots, c_{k-1} , baseados no vértice, de modo que entre dois caminhos c_i e c_{i+1} haja somente um disco. Dessa maneira, podemos contrair a superfície ao espaço formado pelos caminhos c_i e pelo bordo. Por exemplo, a seguinte figura mostra um toro ao qual foram tirados os interiores de três discos disjuntos:



Obtemos o seguinte espaço:

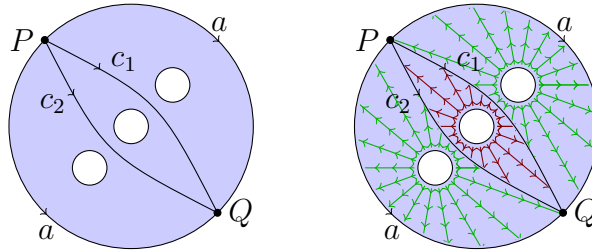
¹Estabelecemos por convenção que a união a um ponto de 0 círculos (em geral, de uma família vazia de espaços) é um ponto. Isso é coerente, pois um ponto é o elemento neutro da operação de união a um ponto.



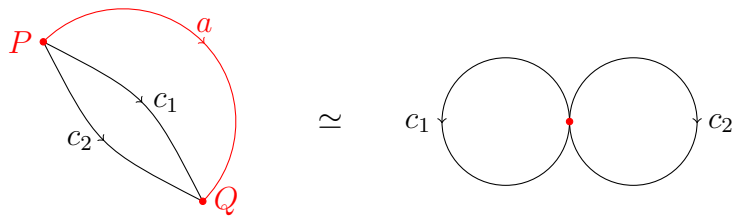
Em total restam os lados *distintos* do polígono e os $k - 1$ caminhos. Por isso, denotando por $(S^1)^{\vee m}$ a união a um ponto de m cópias de S^1 , obtemos as seguintes equivalências homotópicas, para $g \geq 0$ e $k \geq 1$:

$$(68) \quad \begin{aligned} \Sigma_{g,k} &\simeq (S^1)^{\vee(2g+k-1)} & \Sigma_{g,k} \# \mathbb{R}\mathbb{P}^2 &\simeq (S^1)^{\vee(2g+k)} \\ \Sigma_{g,k} \# K &\simeq (S^1)^{\vee(2g+k+1)}. \end{aligned}$$

Na verdade, por enquanto não foram consideradas as superfícies da família $\Sigma_{0,k}$, para $k \geq 1$, pois supusemos que todos os vértices do polígono fossem identificados. Contudo, vamos ver que a fórmula (68) continua valendo também neste caso. A seguinte figura mostra o exemplo de $\Sigma_{0,3}$:



Obtemos o seguinte espaço:



Seja X o espaço do lado esquerdo da figura precedente. Como os pontos P e Q não se identificam, cada caminho que os une é contrátil. Escolhendo por exemplo o caminho a , a mergulho de a em X é uma cofibração, pois é um bom par e o espaço X é perfeitamente normal (por exemplo por ser mergulhável em \mathbb{R}^2). Por isso, quocientando a um ponto, o tipo de homotopia de X não muda. Desta maneira obtemos a união a um ponto dos círculos formados por c_1 e c_2 . Em geral, considerando a superfície $\Sigma_{0,k}$, obtemos a união a um ponto de $k - 1$ círculos, isto é, $\Sigma_{0,k} \simeq (S^1)^{\vee(k-1)}$, coerentemente com a primeira fórmula de (68). Em particular, para $k = 1$, temos que $\Sigma_{0,1} \simeq \{pt\}$, isto é, o disco é contrátil.

Mostraremos no próximo capítulo que $(S^1)^m \simeq (S^1)^p$ se, e somente se, $m = p$, portanto (68) é uma classificação a menos de equivalência homotópica das superfícies compactas com bordo não vazio. Obviamente as equivalências (68) *não* valem para $k = 0$. Destacamos que:

- nenhuma superfícies com bordo não vazio é homotopicamente equivalente a uma sem bordo;
- duas superfícies com bordo não vazio, pertencentes à mesma família, podem ter o mesmo tipo de homotopia; por exemplo, $\Sigma_{g,k} \simeq \Sigma_{g',k'}$ se, e somente se, $2g + k = 2g' + k'$;
- duas superfícies com bordo não vazio, pertencentes a famílias diferentes, podem ter o mesmo tipo de homotopia; por exemplo, $\Sigma_{g,k} \simeq \Sigma_{g',k'} \# \mathbb{R}P^2$ se, e somente se, $2g + k - 1 = 2g' + k'$.

Isso conclui a classificação das superfícies compactas, com ou sem bordo, a menos de homeomorfismo e a menos de equivalência homotópica.

OBSERVAÇÃO 3.2.11. Como toda superfície topológica, com ou sem bordo, admite uma única estrutura diferenciável a menos de difeomorfismo, as classificações que acabamos de mostrar valem também no caso suave. \diamond

As superfícies não compactas são bem mais complicadas. Algumas são homotopicamente equivalentes a uma compacta, com ou sem bordo. Por exemplo o cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ é homotopicamente equivalente ao cilindro finito $S^1 \times I$ e o plano \mathbb{R}^2 é homotopicamente equivalente a um disco. Dada uma superfície compacta é sempre possível obter uma não compacta acrescentando um cilindro infinito de um lado (ou seja, tirando o interior de um disco e identificando o bordo do disco com o bordo do cilindro), mas neste caso a superfície é homotopicamente equivalente à que se obtém só tirando o disco. Também tirando alguns pontos de uma superfície compacta se obtém uma não compacta, mas de novo homotopicamente equivalente à compacta que se obtém tirando bolas ao invés de pontos. Todavia, há superfícies não compactas que não podem ser reconduzidas às compactas nem a menos de homotopia: um toro generalizado de gênero infinito (ou seja, com infinitos “buracos”) é uma superfície com grupo fundamental não finitamente gerado. Também um aberto dentro de uma superfície é uma superfície não compacta e isso pode ser menos trivial do que parece: por exemplo, podemos considerar o complementar de um conjunto de Cantor na esfera (Cantor tree surface). Por isso achar uma classificação das superfícies não compactas é bem mais complicado.

3.3. CW-Complexos

Para descrever os CW-complexos podemos partir das seguintes observações. É claro que um espaço topológico genérico pode ser muito patológico, mesmo sendo de Hausdorff. Por exemplo, em \mathbb{Q}^n ou $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^n$ cada ponto é uma componente conexa por caminhos, portanto estes espaços se comportam de modo bem inatural a respeito das ferramentas fundamentais da topologia algébrica, ou seja, a homotopia, a homologia e a cohomologia. De fato, com estas ferramentas nem podemos distinguir \mathbb{Q}^n de \mathbb{Z} , pois também em \mathbb{Z} cada ponto é uma componente conexa por

caminhos e o conjunto é enumerável. O problema geral está no fato que, para definir uma homotopia entre duas funções, precisamos do intervalo I , que é uma variedade topológica com bordo de dimensão 1; o mesmo vale para os grupos de homologia e cohomologia, pelos quais precisaremos dos simplexos Δ^n , e para os grupos de homotopia π_n , pelos quais precisaremos de I^n ou das esferas S^n , que são variedades topológicas com bordo de dimensão n . Isso mostra que as ferramentas fundamentais que usaremos são construídas a partir de alguns espaços fixados, todos dotados da topologia euclidiana e todos suficientemente regulares. Por isso, é razoável acreditar que, se um espaço tiver pouco a ver com a topologia euclidiana ou for mergulhado em \mathbb{R}^n de modo demasiado irregular, seus grupos de homotopia ou de homologia não sejam particularmente significativos. A ideia mais simples que pode-se pensar consiste em restringir-se à categoria das variedades topológicas, as quais são localmente homeomorfas a \mathbb{R}^n ou, se houver bordo, a \mathbb{H}^n , assim como os espaços I^n , Δ^n e S^n . O problema está no fato que esta escolha exclui muitos espaços que aparecem naturalmente em várias ocasiões, como a união a um ponto de uma família de espaços, o produto *smashed*, os cones, as suspensões, as colagens e assim em diante. Por isso, precisamos de uma categoria intermediária, que seja bastante ampla para conter todos os espaços significativos que deveremos considerar, mas também suficientemente limitada para excluir espaços demasiado irregulares. Em particular, temos que considerar espaços cuja topologia, pelo menos localmente, não se afaste demais da euclidiana, sem todavia serem necessariamente regulares como uma variedade. A categoria dos CW-complexos satisfaz estes requisitos: trata-se de espaços obtidos partindo de uma família de pontos e acrescentando discos de várias dimensões, colando o bordo do disco ao espaço precedente através de uma função contínua. Isso faz com que a topologia do espaço final seja localmente parecida com a euclidiana, pois o espaço é formado por discos, mas sem impor uma regularidade excessiva, pois a colagem é obtida através de uma função contínua qualquer. Na verdade, essa construção inclui quase todas as variedades topológicas (abrangendo em particular todas as que admitem uma estrutura suave), mas ainda não está claro se as inclui todas. Todavia, podemos estender essa família à dos espaços com *o mesmo tipo de homotopia* de um CW-complexo; nesse caso incluímos todas as variedades e, do ponto de vista da topologia algébrica, se trata de uma extensão natural. Vamos mostrar em detalhe a construção que acabamos de introduzir.

DEFINIÇÃO 3.3.1. Um *CW-complexo* é uma quadrupla $CW := (U, U_0, \{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{C_n\}_{n \in \mathbb{N}})$, definida da seguinte maneira.

- U_0 é um conjunto com a topologia discreta.
- Para todo $n \in \mathbb{N}$, tendo definido indutivamente U_{n-1} , são dados o conjunto de n -discos $S_n = \{D_\alpha^n\}_{\alpha \in I_n}$ (o qual pode também ser vazio) e o conjunto de funções contínuas $C_n = \{\varphi_\alpha: \partial D_\alpha^n \rightarrow U_{n-1}\}_{\alpha \in I_n}$. Definimos

$$(69) \quad U_n := (U_{n-1} \sqcup_{\alpha \in I_n} D_\alpha^n) / \sim, \quad x \sim \varphi_\alpha(x) \quad \forall x \in \partial D_\alpha^n.$$

- Definimos

$$U := \bigcup_n U_n$$

com a topologia fraca induzida pela família $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, ou seja, $A \subset U$ é aberto se, e somente se, $A \cap U_n$ é aberto em U_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $S_{n_0} \neq \emptyset$ e $S_n = \emptyset$ para todo $n > n_0$ (logo também $C_n = \emptyset$ para todo $n > n_0$), a *dimensão* de CW é n_0 e usamos a notação $\dim CW = n_0$; em caso contrário a dimensão de CW é infinita. Enfim, se o conjunto $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ for finito (enumerável), CW é dito *CW-complexo finito (enumerável)*. \diamond

É claro que um CW-complexo finito tem dimensão finita, mas não vale a volta, pois a cardinalidade de S_n pode ser infinita para alguns $n \leq \dim CW$. Observamos que a fórmula (69) pode ser escrita da seguinte maneira equivalente. Sejam:

- $\hat{D}^n := \sqcup_{\alpha \in I_n} D_\alpha^n$;
- $\partial \hat{D}^n := \sqcup_{\alpha \in I_n} \partial D_\alpha^n$;
- $\hat{i}: \partial \hat{D}^n \hookrightarrow \hat{D}^n$ a inclusão;
- $\hat{\varphi} := \sqcup_{\alpha \in I_n} \varphi_\alpha: \partial \hat{D}^n \rightarrow U_{n-1}$.

Com estas notações o espaço U_n é a colagem de \hat{D}^n a U_{n-1} através de $\hat{\varphi}$, ou seja:

$$(70) \quad U_n = U_{n-1} \sqcup_{\hat{\varphi}} \hat{D}^n.$$

LEMA 3.3.2. *Seja $CW = (U, U^0, \{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{C_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ um CW-complexo. A topologia induzida por U no subconjunto U_n coincide com a topologia de U_n para todo n ; ademais, U_n é fechado em U . Em particular, se a dimensão de CW for n , então $U = U_n$ como conjunto e como espaço topológico.*

DEMONSTRAÇÃO. Quando definimos $U := \bigcup_n U_n$, estamos considerando as inclusões naturais $U_{n-1} \subset U_n$, portanto trata-se da união de uma sequência crescente de espaços. Na colagem (70) o mergulho \hat{i} é fechado, portanto, pelo lema 1.4.1, U_{n-1} é fechado em U_n . Na família $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, se $k \leq n$ temos que $U_k \cap U_n = U_k$, portanto $U_k \cap U_n$ é fechado em U_k e em U_n , logo, pelo lema 0-1.1.52, cada U_n é um subespaço topológico fechado de U . Em particular, se $U_n = U$ como conjunto, então $U_n = U$ como espaço topológico. \square

3.3.1. Estrutura de CW-complexo. Por enquanto definimos a noção de CW-complexo em si. Agora vamos definir uma *estrutura de CW-complexo* em um espaço topológico X fixado.

DEFINIÇÃO 3.3.3. *Seja X um espaço topológico. Um representante de uma estrutura de CW-complexo em X é um par (CW, φ) , formado por um CW-complexo $CW = (U, U^0, \{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{C_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ e um homeomorfismo $\varphi: U \rightarrow X$.* \diamond

A partir da definição precedente, para todo disco $D_\alpha^n \in S_n$, qualquer seja n , fica definida a *função característica*

$$(71) \quad \Sigma_\alpha^n: D_\alpha^n \rightarrow X$$

através da seguinte composição:

$$(72) \quad \begin{array}{ccccccc} D_\alpha^n \hookrightarrow & U_{n-1} \sqcup_{\beta \in I} D_\beta^n & \xrightarrow{\pi} & U_n & \hookrightarrow & U & \xrightarrow{\varphi} & X. \\ & \searrow & & & \nearrow & & & \\ & & \Sigma_\alpha^n & & & & & \end{array}$$

Chamamos de B_α^n a bola que forma o interior do disco D_α^n . Para $n = 0$, definimos $B_\alpha^0 := D_\alpha^0$, pois o interior de um ponto é o ponto mesmo. A função característica Σ_α^n , definida por (75), se restringe à seguinte função, dita *função característica da bola* B_α^n :

$$(73) \quad \sigma_\alpha^n: B_\alpha^n \hookrightarrow X.$$

É fácil verificar que σ_α^n é um mergulho, pois, na composição (72), toda função intermediária (inclusive π) é um mergulho.

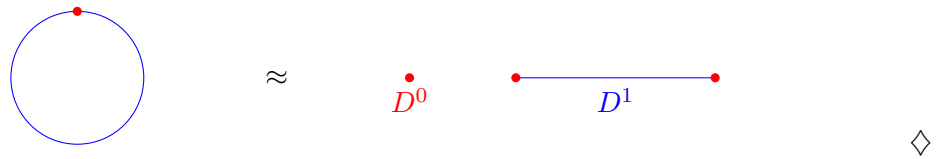
O homeomorfismo φ é importante pois cobre o espaço X através das imagens dos discos, mas não é importante o seu comportamento no interior de cada disco. Por isso, damos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 3.3.4. Sejam (CW, φ) e (CW', φ') dois representantes de estruturas de CW-complexo em X , sendo $CW = (U, U^0, \{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{C_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ e $CW' = (U', (U')^0, \{S'_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{C'_n\}_{n \in \mathbb{N}})$. Sejam $S_n = \{D_\alpha^n\}_{\alpha \in I_n}$ e $S'_n = \{D'_\beta^n\}_{\beta \in I'_n}$. Os representantes (CW, φ) e (CW', φ') são *equivalentes* se, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe uma bijeção $\phi_n: I_n \rightarrow I'_n$ tal que $\Sigma_{\phi_n(\alpha)}^n(D_{\phi_n(\alpha)}^n) = \Sigma_\alpha^n(D_\alpha^n)$ para todo $\alpha \in I_n$. \diamond

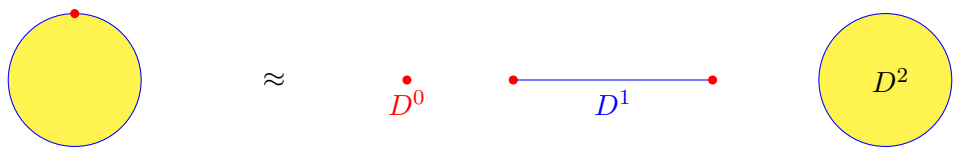
DEFINIÇÃO 3.3.5. Seja X um espaço topológico. Uma *estrutura de CW-complexo* em X é uma classe de equivalência de representantes de estruturas de CW-complexos em X . \diamond

OBSERVAÇÃO 3.3.6. Daqui em diante, quando diremos que “ X é um CW-complexo”, entenderemos que é um espaço topológico com uma estrutura de CW-complexo fixada, ou seja, um par $(X, [CW, \varphi])$. Além disso, quando não houver risco de confusão, usaremos a notação da definição 3.3.1, sem repetir toda vez que $CW = (U, U^0, \{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{C_n\}_{n \in \mathbb{N}})$. \diamond

EXEMPLO 3.3.7. A esfera S^n admite uma estrutura de CW-complexo com dois discos. De fato, pode ser obtida de um ponto D^0 e um disco D^n , sendo a função de colamento $\varphi: \partial D^n \rightarrow D^0$ a única possível. A seguinte figura mostra a construção relativa a S^1 .



EXEMPLO 3.3.8. O disco D^n admite uma estrutura de CW-complexo com três discos. De fato, acrescentamos um disco D^n à esfera S^{n-1} , com morfismo de colamento $\varphi: \partial D^n \rightarrow S^{n-1}$ igual à identidade. A seguinte figura mostra a construção relativa a D^2 .

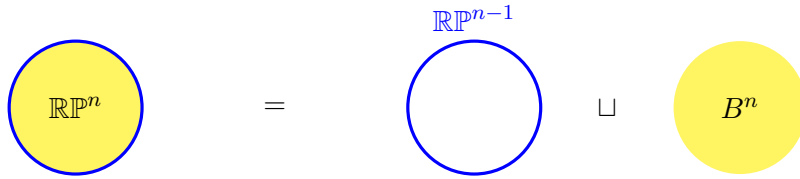


Não podemos considerar só um disco D^n , pois o morfismo de colamento teria contra-domínio vazio, portanto não estaria definido. \diamond

EXEMPLO 3.3.9. O espaço projetivo $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ pode ser definido de duas maneiras equivalentes:

$$\mathbb{R}\mathbb{P}^n := D^n / \sim_1 \quad \mathbb{R}\mathbb{P}^n := S^n / \sim_2$$

sendo \sim_1 a relação que identifica os pares de pontos antipodais do bordo e \sim_2 a relação que identifica qualquer par de pontos antipodais. Um homeomorfismo entre as duas representações pode ser obtido projetando ao quociente o mergulho $\iota: D^n \hookrightarrow S^n$, cuja imagem é um dos dois hemisférios. Comparando estes dois modelos de $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$, podemos observar que a relação \sim_1 , restrita ao bordo $\partial D^n = S^{n-1}$, coincide com a relação \sim_2 , logo o bordo de D^n , projetado ao quociente, coincide com $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$.

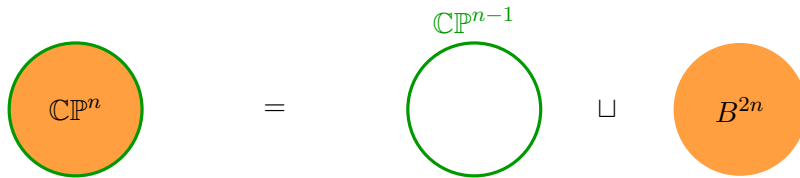


Por isso, podemos construir indutivamente uma estrutura de CW-complexo em $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ da seguinte maneira. O caso $n = 1$ é simples, pois $\mathbb{R}\mathbb{P}^1 \approx D^1 / \sim_1 \approx S^1$, logo temos a estrutura do exemplo 3.3.7, com um 0-disco e um 1-disco. Assumindo que $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$ tenha um representante fixado, podemos acrescentar mais um n -disco D^n , com a função de colamento $\varphi: \partial D^n \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$ que consiste na projeção ao quociente por \sim_2 . Afinal, obtemos um representante com $n + 1$ discos, um para cada dimensão entre 0 e n . \diamond

EXEMPLO 3.3.10. O espaço projetivo complexo $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ pode ser definido de duas maneiras equivalentes:

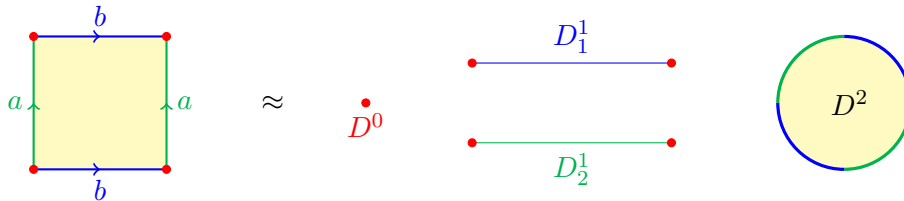
$$\mathbb{C}\mathbb{P}^n := D^{2n} / \sim_1 \quad \mathbb{C}\mathbb{P}^n := S^{2n+1} / \sim_2$$

onde \sim_1 e \sim_2 são definidas da seguinte maneira. Sendo $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, a relação \sim_2 identifica (z_1, \dots, z_{n+1}) com $(e^{i\theta} z_1, \dots, e^{i\theta} z_{n+1})$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Analogamente, sendo $D^{2n} \subset \mathbb{C}^n$, a relação \sim_1 atua como \sim_2 somente no bordo $\partial D^{2n} = S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$. Um homeomorfismo entre as duas representações pode ser obtido projetando ao quociente o mergulho $\iota: D^{2n} \hookrightarrow S^{2n+1}$, cuja imagem é formada pelos pontos da forma $(z_1, \dots, z_n, \sqrt{1 - |z_1|^2 - \dots - |z_n|^2})$, ou seja, com a última componente real positiva. Comparando estes dois modelos de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, podemos observar que, por definição, em D^{2n} / \sim_1 , a relação \sim_1 , restrita ao bordo $\partial D^{2n} = S^{2n-1}$, coincide com a relação \sim_2 , logo o bordo de D^{2n} , projetado ao quociente, coincide com $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$.

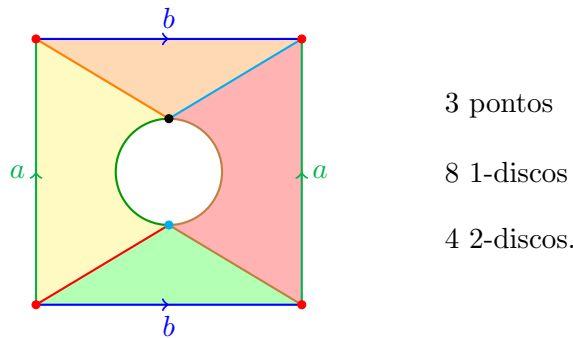


Por isso, podemos construir indutivamente uma estrutura de CW-complexo em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ da seguinte maneira. O caso $n = 1$ é simples, pois $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \approx S^2$, logo temos a estrutura do exemplo 3.3.7, com um 0-disco e um 2-disco. Assumindo que $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ tenha um representante fixado, podemos acrescentar mais um n -disco D^{2n} , com a função de colamento $\varphi: \partial D^{2n} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ que consiste na projeção ao quociente por \sim_2 . Afinal, obtemos um representante com $n + 1$ discos, um para cada dimensão par entre 0 e $2n$. \diamond

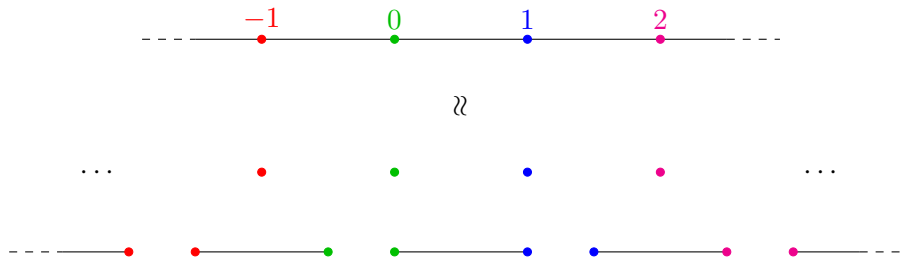
EXEMPLO 3.3.11. Toda superfície topológica, com ou sem bordo, possui uma estrutura de CW-complexo. De fato, no caso sem bordo, podemos representar a superfície com um polígono, conforme a classificação que mostramos na seção 3.2. Partindo de um ponto, acrescentamos um 1-disco para cada lado do bordo do polígono, sendo a função de colamento a única possível, e acrescentamos um 2-disco, cujo interior coincide com o do polígono e cujo bordo fica identificado com o bordo do polígono. Por exemplo, a seguinte figura mostra a estrutura correspondente no toro.



No caso com bordo, a seguinte figura mostra uma estrutura de CW-complexo na superfície $\Sigma_{1,1}$. O leitor pode construir as estruturas análogas para as demais superfícies.



EXEMPLO 3.3.12. A reta \mathbb{R} pode ser construída a partir de uma família enumerável de pontos e de 1-discos.



Através de um reticulado análogo, pode-se reconstruir \mathbb{R}^n a partir de uma família enumerável de pontos e de k -discos para todo k entre 1 e n . \diamond

3.3.2. Decomposição celular e esqueletos. Vamos analisar mais em detalhe a estrutura dos CW-complexos.

DEFINIÇÃO 3.3.13. Dado um CW-complexo $(X, [CW, \varphi])$, chamamos de n -células as imagens $\sigma_\alpha^n(B_\alpha^n)$, sendo $\alpha \in I_n$ e sendo σ_α^n definida em (73). \diamond

LEMA 3.3.14. *Seja $(X, [CW, \varphi])$ um CW-complexo. Como conjunto (não como espaço topológico) X é união disjunta das n -células, ou seja:*

$$(74) \quad X = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}, \alpha \in I_n} \sigma_\alpha^n(B_\alpha^n).$$

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos de ter definido U_{n-1} . Para construir U_n , acrescentamos os n -discos identificando somente os pontos dos bordos ∂D_α^n com os pontos correspondentes de U_{n-1} , portanto as bolas B_α^n ficam acrescentadas sem nenhuma identificação. Como U_n é um sub-espaço de U , a bola B_α^n fica mergulhada em U , portanto a interseção entre duas células é vazia. Como todo ponto de U pertence a alguma célula, U é união disjunta das células. Aplicando o homeomorfismo φ obtemos (74). \square

DEFINIÇÃO 3.3.15. *Seja $(X, [CW, \varphi])$ um CW-complexo. O n -esqueleto de X é o sub-espaço $\varphi(U^n)$.* \diamond

OBSERVAÇÃO 3.3.16. Sendo φ um homeomorfismo, segue imediatamente do lema 3.3.2 que cada n -esqueleto X_n é fechado em X , portanto também X_m para todo $m \geq n$. Ademais, a fórmula (74) implica que o n -esqueleto, como conjunto, é a união disjunta das células de dimensão menor ou igual a k . \diamond

3.3.3. Categoria dos CW-complexos. Para construir a categoria dos CW-complexos, temos que definir os morfismos. Poderíamos pedir que um morfismo mande células em células, como acontecerá com os Δ -complexos, mas esta definição seria demasiado restritiva. Introduzindo a homologia celular entenderemos o porquê e veremos que a definição mais natural é a seguinte.

DEFINIÇÃO 3.3.17. *Sejam X e Y dois CW-complexos. Um morfismo de CW-complexos ou função celular de X a Y é uma função contínua $f: X \rightarrow Y$ tal que $f(X^n) \subset Y^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.* \diamond

Com isso fica definidas as seguintes categorias:

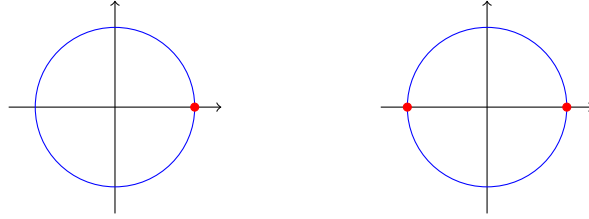
- *Categoria $CWComp$ (ou $CWComp_f$):* Objetos: CW-complexos (finitos).
Morfismos: funções celulares.

Observamos que $CWComp_f$ é uma sub-categoria cheia de $CWComp$. Também ficam definidas as sub-categorias cheias de $CWComp$ formadas pelos CW-complexos de dimensão finita e pelos CW-complexos enumeráveis; ambas contêm $CWComp_f$.

EXEMPLO 3.3.18. Consideremos S^1 com a estrutura de CW-complexo mostrada no exemplo 3.3.7. Identificamos S^1 com o conjunto dos números complexos de módulo 1, de modo que a 0-célula seja o ponto $1 \in \mathbb{C}$. As funções $p_n: S^1 \rightarrow S^1$, $z \mapsto z^n$, são celulares, pois $p_n(1) = 1$, logo $p_n((S^1)^0) \subset (S^1)^0$ e, obviamente, $p_n((S^1)^1) \subset (S^1)^1$. A função $z \mapsto -z$ não é celular a respeito desta estrutura de CW-complexo, pois manda 1 em -1 , mas -1 não pertence ao 0-esqueleto. Contudo, a função $z \mapsto -z$ é homotópica à identidade, que é uma função celular; não se trata de um caso particular, pois veremos daqui a pouco que toda função contínua entre CW-complexos é homotópica a uma função celular. Enfim, observamos que o fato que uma função seja celular depende estritamente das estruturas de CW-complexo

escolhidas. Por exemplo, se escolhêssemos no contradomínio de $z \mapsto -z$ a estrutura análoga à precedente, mas na qual a 0-célula é o ponto -1 , então essa função seria celular. \diamond

EXEMPLO 3.3.19. Antes da definição 3.3.17 afirmamos que seria demasiado restritivo pedir que um morfismo mande células em células. Vamos verificar que existem funções celulares que não satisfazem esta propriedade. Por exemplo, seja $X = Y = S^1$, com as duas seguintes estruturas de CW-complexo:



O espaço X contém uma 0-célula e uma 1-célula e o espaço Y contém duas 0-células e duas 1-células. A identidade $\text{id}: X \rightarrow Y$ é uma função celular, pois $\text{id}(1) = 1$, logo $\text{id}(X^0) \subset Y^0$ e, obviamente, $\text{id}(X^1) \subset Y^1$. Contudo, a imagem da 1-célula de X não está contida em nenhuma 1-célula de Y . \diamond

EXEMPLO 3.3.20. No exemplo precedente a identidade $\text{id}: X \rightarrow Y$ é uma função celular e um homeomorfismo, mas não é um isomorfismo na categoria CWComp . De fato, $\text{id}^{-1}: Y \rightarrow X$ não é celular, pois $\text{id}^{-1}(-1) = -1$, portanto $\text{id}^{-1}(Y^0) \not\subset X^0$. \diamond

O exemplo 3.3.19 mostra que nem sempre uma função celular manda células em células. Contudo, esta propriedade é satisfeita pelos isomorfismos de CW-complexos.

LEMA 3.3.21. *Sejam X e Y CW-complexos e sejam $X = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}, \alpha \in I_n} \sigma_\alpha^n(B_\alpha^n)$ e $Y = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}, \beta \in I'_n} \sigma_\beta^n(B_\beta^n)$ as decomposições (74) relativas a X e Y . Seja $f: X \rightarrow Y$ um homeomorfismo e uma função celular. As seguintes condições são equivalentes:*

- (i) f é um isomorfismo na categoria CWComp ;
- (ii) $f(X^n) = Y^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- (iii) para todo $n \in \mathbb{N}$ existe uma bijeção $\phi_n: I_n \rightarrow I'_n$ tal que $f(\sigma_\alpha^n(B_\alpha^n)) = \sigma_{\phi_n(\alpha)}^n(B_{\phi_n(\alpha)}^n)$.

DEMONSTRAÇÃO. (i) \Leftrightarrow (ii) Por hipótese f é uma função celular, portanto $f(X^n) \subset Y^n$. O homeomorfismo f é um isomorfismo em CWComp se, e somente se, f^{-1} é uma função celular, o que equivale a $f^{-1}(Y^n) \subset X^n$, ou seja, $Y^n \subset f(X^n)$. (iii) \Rightarrow (ii) Segue imediatamente do fato que $X^n = \bigsqcup_{k \leq n, \alpha \in I_k} \sigma_\alpha^k(B_\alpha^k)$ e $Y^n = \bigsqcup_{k \leq n, \beta \in I'_k} \sigma_\beta^k(B_\beta^k)$. (ii) \Rightarrow (iii) Como $f|_{X^n}: X^n \rightarrow Y^n$ e $f|_{X^{n-1}}: X^{n-1} \rightarrow Y^{n-1}$ são homeomorfismos para todo n , fica definido o homeomorfismo $\bar{f}^n: X^n/X^{n-1} \rightarrow Y^n/Y^{n-1}$. Por causa da definição (69), o quociente X^n/X^{n-1} é a união a um ponto de uma família de n -esferas, ou seja, $X^n/X^{n-1} \approx \sqcup_{\alpha \in I_n} S_\alpha^n$, sendo $S_\alpha^n \approx D_\alpha^n/\partial D_\alpha^n$. Por isso, $\bar{f}^n: \sqcup_{\alpha \in I_n} S_\alpha^n \rightarrow \sqcup_{\beta \in I'_n} S_\beta^n$. Tirando o ponto marcado canônico do domínio e do contra-domínio, cada esfera furada se torna uma componente conexa. Como um homeomorfismo induz uma bijeção entre as componentes conexas, fica definida a bijeção $\phi: I_n \rightarrow I'_n$ tal que $\bar{f}(S_\alpha^n) = S_{\phi(\alpha)}^n$, logo $f(\sigma_\alpha^n(B_\alpha^n)) = \sigma_{\phi(\alpha)}^n(B_{\phi(\alpha)}^n)$. \square

As funções celulares são uma classe particular de funções contínuas entre CW-complexos, mas, como já antecipamos no exemplo 3.3.18, vale o seguinte teorema.

TEOREMA 3.3.22 (Teorema de aproximação celular). *Sejam X e Y CW-complexos. Toda função contínua $f: X \rightarrow Y$ é homotópica a uma função celular.*

DEMONSTRAÇÃO. □

Por causa do teorema 3.3.22, podemos ampliar as categorias $CWComp$ e $CWComp_f$ considerando como morfismos todas as funções contínuas entre dois objetos. Isso permite também de estender a classe dos objetos, considerando todos os espaços que têm o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo (finito). Desta maneira obtemos as seguintes categorias:

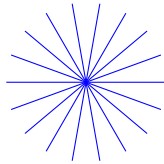
- *Categoria $HCWComp$ (ou $HCWComp_f$):* Objetos: espaços com o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo (finito). Morfismos: funções contínuas.

A mesma extensão pode ser aplicada às categorias dos CW-complexos de dimensão finita e enumeráveis.

OBSERVAÇÃO 3.3.23. É importante observar que as categorias $HCWComp$ e $HCWComp_f$ são subcategorias cheias de Top (mais precisamente de Top^{kH}), enquanto $CWComp$ e $CWComp_f$ *não* o são. De fato, um objeto de $CWComp$ ou de $CWComp_f$ é um par formado por um espaço topológico e uma estrutura fixada de CW-complexo. O mesmo espaço pode admitir infinitas estruturas de CW-complexo, fica definido o functor $CWComp \rightarrow Top$, $(X, [CW, \varphi]) \mapsto X$, $f \mapsto f$, o qual não é nem injetor nem sobrejetor em relação aos objetos. Esse functor é injetor em relação aos morfismos. Claramente a sua imagem está contida em $HCWComp$, portanto poderíamos defini-lo também da seguinte maneira: $CWComp \rightarrow HCWComp$, $(X, [CW, \varphi]) \mapsto X$, $f \mapsto f$. Isso implica que, dado um espaço X , faz sentido afirmar que $X \in HCWComp$ ou $X \notin HCWComp$, mas não que $X \in CWComp$ ou $X \notin CWComp$: a afirmação correta é que existe ou não existe uma estrutura $[CW, \varphi]$ tal que $(X, [CW, \varphi]) \in CWComp$. As mesmas considerações valem em relação a $CWComp_f$ e $HCWComp_f$. ◇

Vamos mostrar que as categorias $HCWComp$ e $HCWComp_f$ ampliam a classe de espaços topológicos considerados, incluindo vários objetos que não admitem uma estrutura de CW-complexo.

EXEMPLO 3.3.24. Seja $X \subset \mathbb{R}^2$ a união dos raios de S^1 que formam um ângulo racional (a menos do fator 2π) com o semieixo x positivo, ou seja, $X = \{re^{2\pi i\theta} \in \mathbb{C} : 0 \leq r \leq 1, \theta \in \mathbb{Q}\}$.



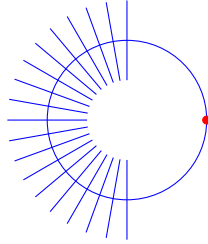
Este espaço não admite nenhuma estrutura de CW-complexo porque não é localmente contrátil, mas, sendo contrátil, tem o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo finito, logo $X \in HCWComp_f$ mas não existe nenhuma estrutura $[CW, \varphi]$

em X tal que $(X, [CW, \varphi]) \in \text{CWComp}$ (portanto nem $(X, [CW, \varphi]) \in \text{CWComp}_f$).
 \diamond

EXEMPLO 3.3.25. O espaço \mathbb{R} , com a topologia euclidiana, admite uma estrutura de CW-complexo (exemplo 3.3.12), mas nenhuma estrutura de CW-complexo finito, pois não é compacto. Contudo, $\mathbb{R} \in \text{HCWComp}_f$, pois é contrátil. Isso mostra que um CW-complexo infinito pode ter o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo finito. Seja X a união a um ponto de infinitas cópias de S^1 , por exemplo $X = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} (S^1)_n$. O espaço X admite uma estrutura de CW-complexo infinito, mas não tem o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo finito, pois mostraremos que o grupo fundamental de um CW-complexo finito é finitamente gerado, enquanto $\pi_1(X)$ não o é. \diamond

EXEMPLO 3.3.26. Consideremos o espaço \tilde{S}^1 definido da seguinte maneira:

$$\tilde{S}^1 = S^1 \cup \{re^{2\pi i\theta} : \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{3}{2}, \theta \in \mathbb{Q} \cap [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]\}.$$

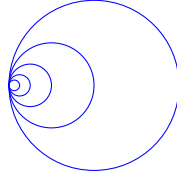


Como S^1 é um retrato por deformação de \tilde{S}^1 , os dois têm o mesmo tipo de homotopia. Sejam X a união a um ponto de infinitas cópias de \tilde{S}^1 e Y a união a um ponto de infinitas cópias de S^1 . Como X tem o mesmo tipo de homotopia de Y , temos que $X \in \text{HCWComp}$ e $X \notin \text{HCWComp}_f$. Claramente X não admite uma estrutura de CW-complexo, pois não é localmente contrátil. \diamond

Vamos mostrar que existem espaços topológicos que não têm o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo.

EXEMPLO 3.3.27. Nenhum espaço com o mesmo tipo de homotopia de \mathbb{Q} é um CW-complexo. De fato, suponhamos por absurdo que X seja um CW-complexo e $f: \mathbb{Q} \rightarrow X$ uma equivalência homotópica. Cada ponto de \mathbb{Q} é uma componente conexa (por caminhos), portanto, sendo $f_*: \pi_0(\mathbb{Q}) \rightarrow \pi_0(X)$ uma bijeção, f manda dois pontos distintos de \mathbb{Q} em duas componentes conexas distintas de X . Sendo X um CW-complexo, cada componente conexa é aberta em X , logo cada ponto de \mathbb{Q} tem que ser aberto, o que é absurdo. \diamond

EXEMPLO 3.3.28. O seguinte espaço, chamado de *Hawaiian earring* (brinco havaiano) é um exemplo de espaço compacto que não admite uma estrutura de CW-complexo. Dados $r > 0$ e $c \in \mathbb{R}^2$, seja $S_r^1(c) = \{c + re^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$ o círculo de raio r e centro c em \mathbb{R}^2 . Definimos $H := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_{\frac{1}{n}}^1(\frac{1}{n}, 0)$.



Ainda não temos as ferramentas para demonstrar que $H \notin \text{HCWComp}$. Trata-se de verificar que o grupo fundamental de H não é finitamente gerado. Observamos que há uma bijeção natural entre H e $X = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} S^1$, que manda o círculo $S^1_{\frac{1}{n}}(\frac{1}{n}, 0)$ na cópia de S^1 com índice n . Obviamente não pode ser um homeomorfismo, pois X é um CW-complexo. De fato, em X existe uma vizinhança do ponto marcado que não contém inteiramente nenhuma cópia de S^1 , enquanto qualquer vizinhança de $(0, 0)$ em H contém infinitos círculos. \diamond

Nas duas categorias HCWComp e HCWComp_f podemos quocientar os morfismos por homotopia. Ficam definidas as seguintes categorias:

- *Categoria* HCWCompH (ou HCWCompH_f): Objetos: espaços com o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo (finito). Morfismos: classes de homotopia de funções contínuas.

A mesma extensão pode ser aplicada às categorias dos CW-complexos de dimensão finita e enumeráveis. Vamos agora considerar os pares de CW-complexos.

DEFINIÇÃO 3.3.29. Dado um CW-complexo $CW := (U, U^0, \{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{C_n\}_{n \in \mathbb{N}})$, sendo $S_n = \{D_\alpha^n\}_{\alpha \in I_n}$ e $C_n = \{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I_n}$ conforme a definição 3.3.1, um *sub-CW-complexo* de CW é um CW-complexo $CW' := (U', U'^0, \{S'_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{C'_n\}_{n \in \mathbb{N}})$, sendo $S'_n = \{D'_\beta^n\}_{\beta \in I'_n}$ e $C'_n = \{\psi_\beta\}_{\beta \in I'_n}$, tal que:

- $U'^0 \subset U^0$;
- $S'_n \subset S_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo existe uma função injetora $\iota: I'_n \hookrightarrow I_n$ tal que $D'_{\iota(\alpha)} = D_\alpha^n$;
- $C'_n \subset C_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, sendo $\psi_{\iota(\alpha)}(x) = \varphi_\alpha(x)$ para todo $x \in D_\alpha$. \diamond

Isso significa que consideramos um subconjunto dos discos que definem CW , com as mesmas funções de colamento (a menos de restringir o contra-domínio). Em particular, as imagens das funções de colamento de CW devem estar ficadas contidas no esqueleto A^{n-1} . O fato que um subespaço $A \subset X$ seja um sub-CW-complexo depende da estrutura de CW-complexo escolhida para X . Por exemplo, se consideramos o mergulho de S^{n-1} em S^n como equador, a respeito da estrutura com duas células que mostramos acima não se trata de um sub-CW-complexo, pois S^n não tem células de dimensão $n - 1$. Todavia, podemos dar a S^n uma estrutura diferente, tornando S^{n-1} um sub-CW-complexo. De fato, consideramos uma célula D^0 , uma célula de dimensão D^{n-1} , com o único morfismo de colamento possível, e duas células D_0^n e D_1^n . O $(n-1)$ -esqueleto corresponde a S^{n-1} , logo temos que definir duas funções de colamento $\varphi_0: \partial D_0^n \rightarrow S^{n-1}$ e $\varphi_1: \partial D_1^n \rightarrow S^{n-1}$. Estabelecemos que as duas funções sejam homeomorfismos entre a borda do disco e S^{n-1} : desta maneira obtemos S^n , pois as duas n -células correspondem ao interior dos dois hemisférios. Com esta estrutura, S^{n-1} é um sub-CW-complexo de S^n . Refinando esta construção,

podemos obter uma estrutura tal que $S^k \subset S^n$ seja um sub-CW-complexo para todo $k \leq n$.

Um par (X, A) é dito *CW-par* se X é um CW-complexo e $A \subset X$ um sub-CW-complexo. Dado um CW-par (X, A) , o quociente X/A tem uma natural estrutura de CW-complexo. De fato, podemos considerar os discos que definem X , tirar os que definem A e acrescentar o 0-disco que corresponde a A/A . As funções de colamento $\varphi_\alpha : \partial D_\alpha^n \rightarrow (X/A)^{n-1}$ são definidas como a composição $\partial D_\alpha^n \rightarrow X^{n-1} \rightarrow X^{n-1}/A^{n-1} \approx (X/A)^{n-1}$. Uma função entre CW-pares $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ é dita *celular* se $f(X^n) \subset Y^n$ e $f(A^n) \subset B^n$ para todo n . Podemos agora definir as seguintes categorias:

- **Categoria \mathcal{CW}_2 (ou $\mathcal{CW}_{2,f}$):** Objetos: pares de CW-complexos (finitos). Morfismos: funções celulares.

Um caso particular de sub-CW-complexo é um ponto que coincide com um vértice. Neste caso obtemos as categorias:

- **Categoria \mathcal{CW}_+ (ou \mathcal{CW}_{f+}):** Objetos: CW-complexos (finitos) com vértice marcado. Morfismos: funções celulares.

É fácil generalizar a construção às categorias $\mathcal{CW}_n, \mathcal{CW}_{n,f}, \mathcal{CW}_{n+}, \mathcal{CW}_{n,f+}$.

Também podemos considerar o cone. De fato, dado uma função celular $f : A \rightarrow X$, o cone $C(f)$ tem uma natural estrutura de CW-complexo. Em particular, os k -discos de $C(f)$ são os seguintes:

- um k -disco de X é também um k -disco de $C(f)$;
- acrescentamos o 0-disco que corresponde ao vértice;
- para cada $(k-1)$ -disco \tilde{D}_α^{k-1} de A , acrescentamos um k -disco D_α^k a $C(f)$.

As funções de colamento são definidas por indução da seguinte maneira:

- para $k = 1$, as funções de colamento dos discos de X^1 não mudam, a menos de ampliar o contra-domínio; dado um disco D_α^1 induzido por \tilde{D}_α^0 , a função de colamento identifica um extremo com $f(\tilde{D}_\alpha^0)$ e outro com o vértice do cone.
- Para $k > 1$, as funções de colamento dos discos de X^k não mudam; as demais identificam a borda de D_α^k com o cone $C(\tilde{D}_\alpha^{k-1}, \partial\tilde{D}_\alpha^{k-1})$, sendo esse cone homeomorfo a uma k -esfera, e identificam $a \in \tilde{D}_\alpha^{k-1}$ com $f(a) \in X^{n-1}$.

Como no caso de um só espaço, podemos ampliar as categorias consideradas sem mudá-las significativamente. De fato, o teorema 3.3.22 vale também para funções entre CW-pares. Por isso, nas categorias \mathcal{CW}_2 e $\mathcal{CW}_{2,f}$, podemos considerar como morfismos todas as funções contínuas entre pares. Ademais, podemos considerar como objetos todos os pares que têm o mesmo tipo de homotopia de um CW-par. A homologia celular vai ser extensa da mesma maneira. Na verdade, podemos considerar uma generalização maior dos objetos: podem-se considerar todos os pares (X, A) tais que quer X quer A tenham o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo. Por exemplo, o par $(D^2, D^2 \setminus \{0\})$ satisfaz este pedido, mas não tem o mesmo tipo de homotopia de um CW-par. Podemos agora definir as seguintes categorias:

- **Categoria \mathcal{HCW}_2 (ou $\mathcal{HCW}_{2,f}$):** Objetos: pares (X, A) tais que X e A têm o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo (finito). Morfismos: funções contínuas de pares.

Como um ponto é sempre um CW-complexo, obtemos em particular as categorias:

- **Categoria \mathcal{HCW}_+ (ou \mathcal{HCW}_{f+}):** Objetos: espaços com ponto marcado (X, x_0) tais que X tem o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo (finito). Morfismos: funções contínuas que respeitam os pontos marcados.

TEOREMA 3.3.30. *Se (X, A) é um CW-par, então $\text{Cyl}(X, A)$ é um retrato por deformação de $X \times I$, portanto (X, A) é uma cofibração.*

DEMONSTRAÇÃO. Temos que $\text{Cyl}(D^n, \partial D^n)$ é retrato por deformação de $D^n \times I$; em particular, $(D^n, \partial D^n)$ é uma cofibração. De fato, mergulhando $D^n \times I$ em \mathbb{R}^{n+1} , podemos considerar a projeção radial de $(0, 2) \in D^n \times \mathbb{R}$. Desta maneira obtemos uma retração por deformação de $X^n \times I$ em $\text{Cyl}(X^n, X^{n-1} \cup A^n)$, pois, para obter $X^n \times I$, consideramos $\text{Cyl}(X^n, X^{n-1} \cup A^n)$ e, para cada célula de X^n que não pertence a A , acrescentamos $D^n \times I$. Se a dimensão de X é n , podemos compor as equivalências homotópicas obtidas: passamos de $X \times I$ ao cilindro sobre o sub-espaço $X^{n-1} \cup A$, depois o fator $X^{n-1} \times I$ se torna o cilindro sobre $X^{n-2} \cup A^{n-1}$ (que está incluso em $X^{n-2} \cup A$), e assim por diante até $X^0 \times I$, que se torna o cilindro sobre A^0 . Afinal chegamos a $\text{Cyl}(X, A)$. Se a dimensão de X for infinita, podemos compor as infinitas homotopias, de modo que a n -ésima fique aplicada no intervalo $t \in [\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]$. Assim, para $t = 0$ temos a identidade de $\text{Cyl}(X, A)$, enquanto para $t = 1$ temos a retração sobre $\text{Cyl}(X, A)$, sendo a ultima etapa em $[\frac{1}{2}, 1]$ a homotopia que contrai $X^0 \times I$ sobre $\text{Cyl}(X^0, A^0) \subset \text{Cyl}(X, A^0)$. Só temos de verificar que seja contínua em $t = 0$. Como um CW-complexo tem a topologia fraca, é suficiente verificar que a restrição a cada esqueleto seja contínua. Como a restrição a X^n é constante no intervalo $[0, \frac{1}{2^n}]$, é contínua também em uma vizinhança de 0. Sendo isso válido para cada n , a homotopia toda é contínua. \square

LEMA 3.3.31. *Sejam A e X CW-complexos e $f, g: A \rightarrow X$ funções homotópicas. Os cones $C(f)$ e $C(g)$ têm o mesmo tipo de homotopia.*

DEMONSTRAÇÃO. \square

3.4. Δ -Complexos

Outra classe importante de espaços topológicos é formada pelos que admitem uma estrutura de Δ -complexo. Trata-se de uma certa noção de triangulação de um espaço topológico, menos rígida que a usual de complexo simplicial (a qual será introduzida mais adiante), mas tal que um espaço admite uma estrutura de Δ -complexo se, e somente se, admite uma estrutura de complexo simplicial (portanto, afinal, a classe de espaços envolvida é a mesma). Um Δ -complexo é um caso particular de CW-complexo, no qual temos muita menos liberdade na escolha das funções de colagem. Em particular, consideramos *simplexos* (ou seja, do ponto de vista intuitivo, “triângulos de dimensão genérica”) ao invés de discos. Do ponto de vista topológico discos e simplexos são equivalentes, mas o bordo de um simplexo pode ser descrito

de modo natural como a união das faces correspondentes. Por isso, ao invés de colar o bordo de cada simplexo através de uma função contínua qualquer, identificamos entre si algumas faces da mesma dimensão, através de um homeomorfismo canônico. Dessa maneira, a estrutura do espaço fica bem mais rígida, mas também mais fácil a ser tratada; em particular, cada simplexo, dentro do espaço, possui um bordo natural, que será usado para definir a homologia simplicial. O preço a ser pago por isso é que a estrutura categorial correspondente é muito menos rica, pois existem poucos morfismos de Δ -complexos. Por isso, dependendo do contexto, pode ser mais ou menos vantajoso trabalhar os Δ -complexos. Pode-se provar que toda variedade suave (portanto toda variedade topológica de dimensão menor ou igual a 3) admite uma estrutura de Δ -complexo. Um exemplo de variedade topológica, que não admite essa estrutura, é a *variedade* E_8 , de dimensão 4, descoberta por Freedman. Contudo, toda variedade topológica e todo CW-complexo têm o mesmo tipo de homotopia de um Δ -complexo. Isso implica que, trabalhando na categoria TopH a menos de isomorfismo, as noções de CW-complexo e de Δ -complexo se tornam equivalentes.

DEFINIÇÃO 3.4.1. Dado um conjunto *ordenado* de $n + 1$ pontos $\{v_0, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^m$, que não fique contido em um subespaço afim de dimensão menor que n (ou seja, tal que $\{v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$ seja uma família independente), o n -simplexo $[v_0, \dots, v_n]$ é o par formado por:

- (1) o mínimo subconjunto convexo de \mathbb{R}^m que contém v_0, \dots, v_n , dotado da topologia euclidiana induzida; os pontos v_0, \dots, v_n são chamados de *vértices*;
- (2) a ordem dos vértices.

Em particular, o n -simplexo *canônico* é o cujos vértices são os elementos da base canônica de \mathbb{R}^{n+1} , isto é:

$$\Delta^n := \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i \geq 0; x_0 + \dots + x_n = 1\}$$

com a topologia euclidiana e a ordem dos vértices dada pela ordem usual da base canônica de \mathbb{R}^{n+1} . \diamond

Um 0-simplexo é um ponto, um 1-simplexo é um segmento, um 2-simplexo é um triângulo com o interior e assim em diante, sempre acrescentando a ordem dos vértices. Em todos os casos não admitimos degenerações, ou seja, um 1-simplexo não pode colapsar a um ponto, um 2-simplexo não pode colapsar a um segmento assim em diante.

Seja $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ a base canônica de \mathbb{R}^{n+1} . Dado um n -simplexo $[v_0, \dots, v_n]$, existe um homeomorfismo canônico $\varphi_{v_0, \dots, v_n} : \Delta^n \rightarrow [v_0, \dots, v_n]$, obtido restringindo a única aplicação linear tal que $e_i \mapsto v_{i-1}$. Isso implica que, dados dois n -simplexos $[v_0, \dots, v_n]$ e $[w_0, \dots, w_n]$, existe um homeomorfismo canônico $\varphi : [v_0, \dots, v_n] \rightarrow [w_0, \dots, w_n]$, definido por $\varphi := \varphi_{w_0, \dots, w_n} \circ \varphi_{v_0, \dots, v_n}^{-1}$. Observamos que a canonicidade deste homeomorfismo é consequência do fato de ter fixado a ordem dos vértices.

DEFINIÇÃO 3.4.2. Dado um n -simplexo $[v_0, \dots, v_n]$, uma k -face dele é um k -simplexo obtido considerando uma subfamília crescente de $k + 1$ vértices, ou seja, um k -simplexo da forma $[v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$, sendo $i_0 < \dots < i_k$. \diamond

Observamos que o simplexo mesmo é a única n -face dele e os vértices são as 0-faces. Em geral, para $0 \leq k \leq n$, existem $\binom{n+1}{k+1}$ k -faces.

Agora podemos definir um Δ -complexo. Trata-se de um espaço topológico obtido unindo vários simplexos, identificando algumas faces da mesma dimensão através do homeomorfismo canônico.

DEFINIÇÃO 3.4.3. Um Δ -complexo é uma tripla $\Delta := (X^\Delta, \{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{F_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ definida da seguinte maneira:

- para todo $n \in \mathbb{N}$ é dado um conjunto (que pode ser vazio) de n -simplexos $S_n = \{\Delta_\alpha^n\}_{\alpha \in I_n}$; por simplicidade, estamos supondo que se trate de várias cópias do n -simplexo canônico Δ^n ;
- para todo $n \in \mathbb{N}$ é dada uma família (que pode ser vazia) de conjuntos *disjuntos* de faces de dimensão n , ou seja, é dada uma família $F_n = \{\mathcal{F}_\beta^n\}_{\beta \in J_n}$, onde um elemento de \mathcal{F}_β^n é uma n -face $[v_{i_0}, \dots, v_{i_n}]$ de um simplexo $\Delta_\alpha^m \in S_m$, sendo $n < m$, e $\mathcal{F}_{\beta_1}^n \cap \mathcal{F}_{\beta_2}^n = \emptyset$ para $\beta_1 \neq \beta_2$;
- definimos:

$$X^\Delta := \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}, \alpha \in I_n} \Delta_\alpha^n \right) / \sim_{\{F_n\}}$$

onde $\sim_{\{F_n\}}$ identifica as faces do mesmo conjunto $\mathcal{F}_\beta^n \in F_n$ através do homeomorfismo canônico para todos n e β .

Se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $S_{n_0} \neq \emptyset$ e $S_n = \emptyset$ para todo $n > n_0$, então a *dimensão* de Δ é n_0 , em caso contrário é infinita. Enfim, se o conjunto $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ for finito (enumerável), Δ é dito *Δ -complexo finito* (enumerável). \diamond

É claro que um Δ -complexo finito tem dimensão finita, mas não vale a volta. O fato de impor que $n < m$ na definição de F_n , excluindo o caso $n = m$, impede que alguns elementos de S_n sejam inúteis, por serem completamente identificados com algumas faces de outros simplexos.

DEFINIÇÃO 3.4.4. Seja X um espaço topológico. Um *representante de uma estrutura de Δ -complexo* em X é um par (Δ, φ) , formado por um Δ -complexo $\Delta = (X^\Delta, \{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{F_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ e um homeomorfismo $\varphi: X^\Delta \rightarrow X$. \diamond

Como o espaço X^Δ é o quociente da união disjunta dos simplexos de partida por uma adequada relação de equivalência, para todo simplexo $\Delta_\alpha^n \in S_n$, qualquer seja n , fica definida a *função característica*

$$(75) \quad \Sigma_\alpha^n: \Delta_\alpha^n \rightarrow X,$$

que consiste na seguinte composição:

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_\alpha^n & \xrightarrow{\iota} & \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}, \beta \in I_m} \Delta_\beta^m & \xrightarrow{\pi} & X^\Delta & \xrightarrow{\varphi} & X, \\ & & & & & \searrow & \\ & & & & & \Sigma_\alpha^n & \end{array}$$

sendo ι o mergulho natural e π a projeção ao quociente.

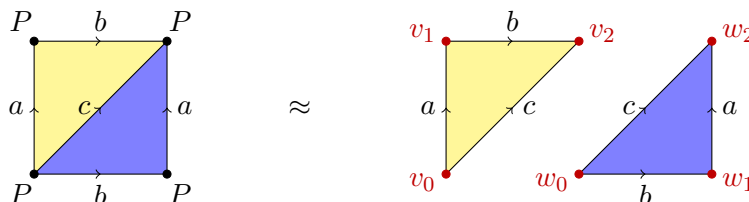
O homeomorfismo φ é importante pois cobre o espaço X através das imagens dos simplexos, mas não é importante o seu comportamento no interior de cada simplexo. Por isso, damos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 3.4.5. Sejam (Δ, φ) e (Δ', φ') , sendo $\Delta := (X^\Delta, \{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{F_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ e $\Delta' := (X^{\Delta'}, \{S'_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{F'_n\}_{n \in \mathbb{N}})$, dois representantes de estruturas de Δ -complexo em X . Sejam $S_n = \{\Delta_\alpha^n\}_{\alpha \in I_n}$ e $S'_n = \{\Delta'_\beta^n\}_{\beta \in I'_n}$. Os representantes (Δ, φ) e (Δ', φ') são *equivalentes* se, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe uma bijeção $\phi_n: I_n \rightarrow I'_n$ (que mostraremos ser necessariamente única) tal que $\Sigma_{\phi_n(\alpha)}^n(\Delta_{\phi_n(\alpha)}^n) = \Sigma_\alpha^n(\Delta_\alpha^n)$ para todo $\alpha \in I_n$. \diamond

DEFINIÇÃO 3.4.6. Seja X um espaço topológico. Uma *estrutura de Δ -complexo* em X é uma classe de equivalência de representantes de estruturas de Δ -complexos em X . \diamond

OBSERVAÇÃO 3.4.7. Daqui em diante, quando diremos que “ X é um Δ -complexo”, entenderemos que é um espaço topológico com uma estrutura de Δ -complexo fixada, ou seja, um par $(X, [\Delta, \varphi])$. \diamond

EXEMPLO 3.4.8. O toro \mathbb{T}^2 pode ser obtido considerando dois 2-simplexos que dividem o retângulo $aba^{-1}b^{-1}$ em dois triângulos, cortando o retângulo ao longo da diagonal.



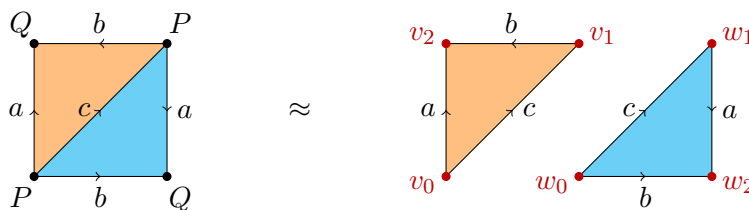
Neste caso os conjuntos que definem a estrutura de Δ -complexo, conforme a definição 3.4.3, são

$$S_2 = \{[v_0, v_1, v_2], [w_0, w_1, w_2]\}$$

$$F_1 = \{\{[v_0, v_1], [w_1, w_2]\}, \{[v_1, v_2], [w_0, w_1]\}, \{[v_0, v_2], [w_0, w_2]\}\}.$$

Observamos que, fixando os vértices v_0, v_1 e v_2 do primeiro 2-simplexo, só temos uma escolha possível para os vértices w_0, w_1 e w_2 do segundo. De fato, orientamos os lados a, b e c do simplexo $[v_0, v_1, v_2]$ de modo que sejam percorridos conforme a ordem dos vértices. Dessa maneira, o bordo corresponde a abc^{-1} . No segundo 2-simplexo, os lados são determinados pela posição no toro, portanto o bordo corresponde a bac^{-1} . Como os lados têm que ser identificados respeitando a ordem dos vértices, só podemos ordená-los de modo que $b = [w_0, w_1]$, $a = [w_1, w_2]$ e $c = [w_0, w_2]$. \diamond

EXEMPLO 3.4.9. O plano projetivo \mathbb{RP}^2 pode também ser construído com dois 2-simplexos da seguinte maneira. Consideremos o polígono cc que o representa. Pondo $c := ab^{-1}$, obtemos a representação através do retângulo $ab^{-1}ab^{-1}$, no qual a e b não são ciclos, e cortamos ao longo da diagonal.

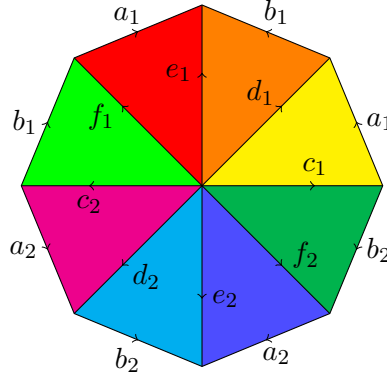


Neste caso os conjuntos envolvidos são:

$$S_2 = \{[v_0, v_1, v_2], [w_0, w_1, w_2]\}$$

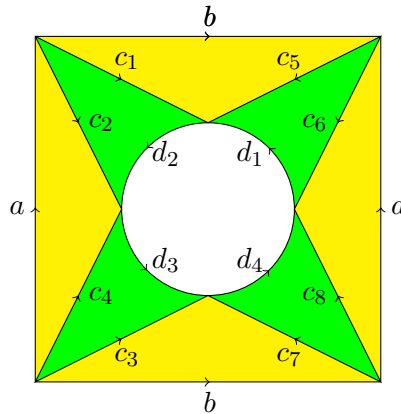
$$F_1 = \{ \{[v_0, v_1], [w_0, w_1]\}, \{[v_1, v_2], [w_0, w_2]\}, \{[v_0, v_2], [w_1, w_2]\} \}. \quad \diamond$$

EXEMPLO 3.4.10. Podemos mostrar que toda superfície topológica compacta admite uma estrutura de Δ -complexo. Por exemplo, o seguinte desenho mostra uma possível estrutura no bi-toro:



Uma construção parecida pode ser aplicada a qualquer polígono, levando a uma estrutura de Δ -complexo em toda superfície compacta sem bordo. Observamos que, no caso do toro e do projetivo, se obtém uma estrutura diferente das mostradas nos exemplos 3.4.8 e 3.4.9.

O seguinte exemplo mostra uma possível estrutura de Δ -complexo na superfície $\Sigma_{1,1}$.



Uma construção análoga leva a uma estrutura de Δ -complexo em toda superfície compacta com bordo não vazio. \diamond

EXEMPLO 3.4.11. O círculo S^1 pode ser construído a partir de um 1-simplexo, identificando os vértices.



Neste caso os conjuntos envolvidos são:

$$S_1 = \{[v_0, v_1]\} \quad F_0 = \{ \{[v_0], [v_1]\} \}. \quad \diamond$$

EXEMPLO 3.4.12. A esfera S^n , para todo n , pode ser construída a partir de dois n -simplexos, identificando os lados correspondentes. Dessa maneira, os dois n -simplexos

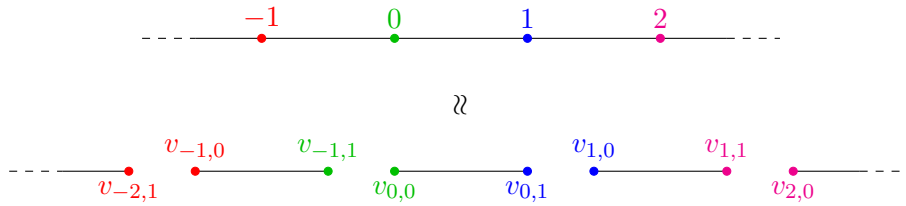
correspondem aos dois hemisférios e os dois bordos, identificados entre si, ao equador. Os conjuntos envolvidos são:

$$S_n = \{[v_0, \dots, v_n], [w_0, \dots, w_n]\}$$

$$F_{n-1} = \{ \{ [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n], [w_0, \dots, \hat{w}_i, \dots, w_n] \} \}_{i \in \{0, \dots, n\}}.$$

Para $n = 2$, o leitor pode verificar que obtemos a mesma estrutura do exemplo 3.4.10, relativamente ao polígono aa . Para $n = 1$, obtemos uma estrutura diferente da do exemplo 3.4.11. \diamond

EXEMPLO 3.4.13. A reta \mathbb{R} pode ser construída a partir de uma família enumerável de 1-simplexos.



Neste caso os conjuntos envolvidos são:

$$S_1 = \{[v_{n,0}, v_{n,1}]\}_{n \in \mathbb{Z}} \quad F_0 = \{ \{ [v_{n,1}], [v_{n+1,0}] \} \}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Através de uma construção análoga se pode construir \mathbb{R}^n a partir de uma família enumerável de n -simplexos. \diamond

EXEMPLO 3.4.14. O ponto $\{*\}$ pode ser construído a partir de um único 0-simplexo. Nesse caso o único conjunto não vazio envolvido é $S_0 = \{[v_0]\}$. \diamond

Uma propriedade fundamental de um Δ -complexo consiste no fato que, como conjunto, coincide com a união disjunta dos simplexos abertos que o cobrem, conforme a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 3.4.15. Um n -simplexo aberto é definido analogamente a um n -simplexo (def. 3.4.1), só substituindo o mínimo subconjunto convexo de \mathbb{R}^m que contém os vértices pelo complementar da união das faces de dimensão menor que n . Em particular, o n -simplexo aberto canônico é o espaço:

$$\Delta^n := \{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i > 0; x_0 + \dots + x_n = 1 \}$$

com a topologia euclidiana e a ordem dos vértices dada pela ordem usual da base canônica de \mathbb{R}^{n+1} . \diamond

Observamos que tirar as faces de dimensão menor que n equivale a tirar o bordo do n -simplexo como variedade topológica. Também equivale a considerar o interior do simplexo no subespaço afim de \mathbb{R}^m gerado pelos vértices.

OBSERVAÇÃO 3.4.16. Podemos chamar um n -simplexo também de n -simplexo fechado. Fica definida uma bijeção entre n -simplexos abertos e fechados, que associa a um n -simplexo aberto, contido em \mathbb{R}^m , o fecho dele em \mathbb{R}^m . \diamond

OBSERVAÇÃO 3.4.17. Para $n = 0$, as definições de 0-simplexo aberto e de 0-simplexo fechado coincidem. De fato, não existem faces de dimensão menor que 0. Equivalentemente, um ponto é uma variedade topológica com bordo vazio, ou

também podemos observar que o subespaço afim gerado por um ponto é o ponto mesmo, que coincide com o próprio interior. \diamond

Dado um espaço X , com um representante de uma estrutura de Δ -complexo (Δ, φ) , obtido a partir dos conjuntos $S_n = \{\Delta_\alpha^n\}_{\alpha \in I_n}$, podemos considerar a família dos simplexos abertos $\{e_\alpha^n\}_{n \in \mathbb{N}, \alpha \in H_n}$, sendo e_α^n o interior de uma n -face de um simplexo Δ_β^m (por isso a família dos índices H_n é maior que I_n em geral). Fixemos um simplexo aberto e_α^n , o qual é uma face de Δ_β^m : podemos restringir a e_α^n a função característica (75) de Δ_β^m , obtendo a *função característica do simplexo aberto*

$$(76) \quad \sigma_\alpha^n: e_\alpha^n \rightarrow X.$$

Dados dois n -simplexos abertos e_α^n e $e_{\alpha'}^n$, inclusos em dois simplexos Δ_β^m e $\Delta_{\beta'}^m$, temos as duas seguintes alternativas.

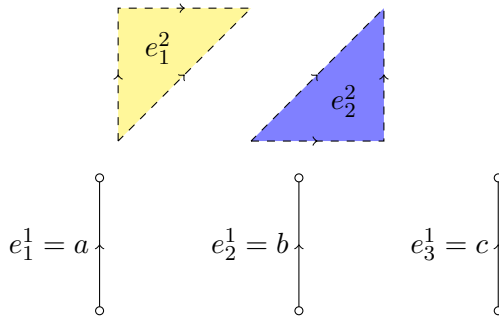
- Se ambos os fechos $\overline{e_\alpha^n}$ e $\overline{e_{\alpha'}^n}$ pertencerem a uma família $\mathcal{F}_\beta^n \in F_n$, então, em particular, e_α^n e $e_{\alpha'}^n$ ficam identificados, ou seja, $\sigma_\alpha^n(x) = \sigma_{\alpha'}^n(\varphi(x))$ para todo x , sendo $\varphi: \overline{e_\alpha^n} \rightarrow \overline{e_{\alpha'}^n}$ o homeomorfismo canônico.
- Se os fechos $\overline{e_\alpha^n}$ e $\overline{e_{\alpha'}^n}$ não forem identificados entre si, as imagens $\sigma_\alpha^n(e_\alpha^n)$ e $\sigma_{\alpha'}^n(e_{\alpha'}^n)$ são *disjuntas* em X . De fato, se um ponto de $\overline{e_\alpha^n}$ e um ponto de $\overline{e_{\alpha'}^n}$ tiverem a mesma imagem por causa de outra identificação, pelo menos um dos dois pontos tem que pertencer à interseção com a outra face envolvida na identificação. A interseção está contida no bordo, portanto, como o homeomorfismo canônico manda o bordo no bordo, ambos os pontos pertencem ao bordo do simplexo correspondente. Logo, os pontos dos interiores não ficam envolvidos em nenhuma identificação.

Por isso, podemos reduzir a família $\{e_\alpha^n\}_{n \in \mathbb{N}, \alpha \in H_n}$ considerando só um representante por cada classe de simplexos abertos identificados em X . Denotamos por $L_n \subset H_n$ a subfamília formada pelos índices correspondentes aos simplexos abertos escolhidos. Temos que $I_n \subset L_n \subset H_n$. O resultado é o seguinte:

$$(77) \quad X = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}, \alpha \in L_n} \sigma_\alpha^n(e_\alpha^n),$$

ou seja, X , como conjunto (não como espaço topológico), é união disjunta das imagens dos simplexos abertos.

EXEMPLO 3.4.18. No exemplo 3.4.8 o toro fica decomposto na união disjunta de dois 2-simplexos abertos, três 1-simplexos abertos e um 0-simplexo (aberto).



$$\bullet e_1^0$$

Por isso, $|L_2| = 2$, $|L_1| = 3$ e $|L_0| = 1$. Se considerássemos as famílias H_n de índices correspondentes a todos os simplexos abertos, sem quocientar pelas identificações correspondentes, teríamos que $|H_2| = 2$, $|H_1| = 6$ e $|H_0| = 6$. O leitor pode verificar a decomposição correspondente aos demais exemplos que mostramos. \diamond

A decomposição (77) é a propriedade fundamental dos Δ -complexos, que usaremos para definir e calcular a homologia simplicial. Por isso, queremos que dois representantes de estruturas de Δ -complexo, no mesmo espaço X , sejam equivalentes se, e somente se, levam à mesma decomposição (77). De fato, vale o seguinte lema.

LEMA 3.4.19. *Sejam (Δ, φ) e (Δ', φ') , sendo $\Delta := (X^\Delta, \{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{F_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ e $\Delta' := (X^{\Delta'}, \{S'_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{F'_n\}_{n \in \mathbb{N}})$, dois representantes de estruturas de Δ -complexo em X . Consideremos as duas decomposições correspondentes:*

$$X = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}, \alpha \in L_n} \sigma_\alpha^n(e_\alpha^n) \qquad X = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}, \beta \in L'_n} \sigma_\beta^n(e_\beta^n).$$

Os representantes (Δ, φ) e (Δ', φ') são equivalentes se, e somente se, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe uma bijeção $\psi_n: L_n \rightarrow L'_n$, necessariamente única, tal que $\sigma_{\psi_n(\alpha)}^n(e_{\psi_n(\alpha)}^n) = \sigma_\alpha^n(e_\alpha^n)$ para todo $\alpha \in L_n$.

DEMONSTRAÇÃO. (\Leftarrow) Como $I_n \subset L_n$ e $I'_n \subset L'_n$, a bijeção $\psi_n: L_n \rightarrow L'_n$ se restringe à bijeção $\phi_n: I_n \rightarrow I'_n$. Por continuidade, o fato que $\sigma_{\psi_n(\alpha)}^n(e_{\psi_n(\alpha)}^n) = \sigma_\alpha^n(e_\alpha^n)$, para todo $\alpha \in L_n$, implica que $\Sigma_{\phi_n(\alpha)}^n(\Delta_{\phi_n(\alpha)}^n) = \Sigma_\alpha^n(\Delta_\alpha^n)$ para todo $\alpha \in I_n$. (\Rightarrow) A imagem de cada simplexo aberto e_α^n fica determinada por restrição a partir do fato que $\Sigma_{\phi_n(\alpha)}^n(\Delta_{\phi_n(\alpha)}^n) = \Sigma_\alpha^n(\Delta_\alpha^n)$. Por isso, obtemos uma função $\psi_n: L_n \rightarrow L'_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que $\sigma_{\psi_n(\alpha)}^n(e_{\psi_n(\alpha)}^n) = \sigma_\alpha^n(e_\alpha^n)$ para todo $\alpha \in L_n$. Por causa da decomposição (77), as funções ψ_n são necessariamente bijetoras. \square

OBSERVAÇÃO 3.4.20. O fato que a bijeção $\psi_n: L_n \rightarrow L'_n$ seja única é consequência da decomposição (77). Como, na definição 3.4.5, a bijeção $\phi_n: I_n \rightarrow I'_n$ é completamente determinada por ψ_n , segue que ϕ_n é também única, como tínhamos antecipado. \diamond

EXEMPLO 3.4.21. No exemplo 3.4.11 mostramos um representante de uma estrutura de Δ -complexo de S^1 . Se mudamos o homeomorfismo φ no interior do único 1-simplexo, obtemos um representante equivalente. Pelo contrário, se mudarmos a imagem do único 0-simplexo em S^1 (e, coerentemente, as dos 1-simplexos), obtemos outro representante não equivalente.





Todavia, mostraremos que estes dois Δ -complexos são isomorfos na categoria correspondente.

Podemos também considerar o seguinte representante, o qual não é equivalente aos dois precedentes, nem define um Δ -complexo isomorfo.

$$(78) \quad S_1 = \{[v_0, v_1], [w_0, w_1]\} \quad F_0 = \{\{[v_0, w_0], [v_1, w_1]\}\}.$$

Neste caso S^1 fica decomposto em dois 0-simplexos abertos e dois 1-simplexos abertos. O leitor pode construir vários exemplos parecidos em outros espaços. \diamond

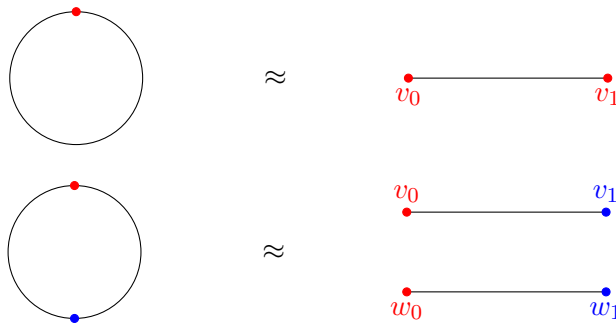
Vamos agora definir a noção de *sub- Δ -complexo*. Dados um espaço topológico X e um subespaço $A \subset X$, ambos dotados de uma estrutura de Δ -complexo, dizemos que A é um sub- Δ -complexo de X se a decomposição (77) de A é formada por um subconjunto dos simplexos abertos que formam a decomposição (77) de X . Mais precisamente, damos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 3.4.22. Sejam $(X, [\Delta, \varphi])$ e $(A, [\Delta', \varphi'])$ dois Δ -complexos tais que $A \subset X$ (como sub-espaço topológico). Sejam

$$X = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}, \alpha \in L_n} \sigma_\alpha^n(e_\alpha^n) \quad A = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}, \beta \in L'_n} \sigma_\beta^n(e_\beta^n)$$

as decomposições correspondentes. Dizemos que $(A, [\Delta', \varphi'])$ é um *sub- Δ -complexo* de $(X, [\Delta, \varphi])$ se, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe uma função $\phi_n: L'_n \rightarrow L_n$, necessariamente injetora, tal que $\sigma_\beta^n(e_\beta^n) = \sigma_{\phi_n(\beta)}^n(e_{\phi_n(\beta)}^n)$ para todo $\beta \in L'_n$. \diamond

EXEMPLO 3.4.23. Consideremos as seguintes estruturas de Δ -complexo em S^1 , já mostradas no exemplo (78):



Sejam $X = S^1$ e $A = \{(0, -1)\} \subset S^1$, sendo $(0, -1)$ o ponto (azul) correspondente aos vértices w_0 e w_1 na segunda estrutura mostrada. Dotamos A da única estrutura possível de Δ -complexo, com um 0-simplexo. Escolhendo a segunda estrutura em X , temos que A

é um sub- Δ -complexo, enquanto, escolhendo a primeira, não o é. O leitor pode construir vários exemplos parecidos, considerando outros espaços. \diamond

Vamos dar uma estrutura categorial aos Δ -complexos. Como a propriedade essencial, que usaremos para definir a homologia simplicial, é a decomposição (77), é natural pedir que um morfismo de Δ -complexos mande simplexes abertos de dimensão k homeomorficamente em simplexes abertos da mesma dimensão.

DEFINIÇÃO 3.4.24. Sejam $(X, [\Delta, \varphi])$ e $(Y, [\Delta', \varphi'])$ dois Δ -complexos, cujas decomposições correspondentes são:

$$X = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}, \alpha \in L_n} \sigma_\alpha^n(e_\alpha^n) \quad Y = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}, \beta \in L'_n} \sigma_\beta^n(e_\beta^n).$$

Um *morfismo de Δ -complexos* ou *Δ -função* de $(X, [\Delta, \varphi])$ a $(Y, [\Delta', \varphi'])$ é uma função contínua $f: Y \rightarrow X$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe uma função $\phi_n: L'_n \rightarrow L_n$, necessariamente única, tal que $f(\sigma_\beta^n(e_\beta^n)) = \sigma_{\phi_n(\beta)}^n(e_{\phi_n(\beta)}^n)$ e $f|_{\sigma_\beta^n(e_\beta^n)}: \sigma_\beta^n(e_\beta^n) \rightarrow \sigma_{\phi_n(\beta)}^n(e_{\phi_n(\beta)}^n)$ é um homeomorfismo. \diamond

EXEMPLO 3.4.25. Seja $(X, [\Delta, \varphi])$ um Δ -complexo, sendo $\Delta = (X^\Delta, \{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{F_n\}_{n \in \mathbb{N}})$, e seja $f: Y \rightarrow X$ um homeomorfismo. Fica induzida em Y a estrutura de Δ -complexo $(Y, [\Delta, f^{-1} \circ \varphi])$. A função f , em relação a essas estruturas, é uma Δ -função. \diamond

EXEMPLO 3.4.26. Um mergulho de um sub- Δ -complexo no Δ -complexo maior é uma Δ -função. \diamond

EXEMPLO 3.4.27. Consideremos o espaço \mathbb{R} , com a estrutura do exemplo 3.4.13, e o espaço S^1 , com a estrutura do exemplo 3.4.11. Identificamos o ponto $1 \in S^1 \subset \mathbb{C}$ com o único 0-simplexo de S^1 . O recobrimento $\exp: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ é uma Δ -função. \diamond

EXEMPLO 3.4.28. Consideremos o intervalo I formado por dois 0-simplexos (os pontos do bordo) e um 1-simplexo aberto. O quociente $I/\partial I$, homeomorfo a S^1 , tem a estrutura de Δ -complexo do exemplo 3.4.11. A projeção $\pi: I \rightarrow S^1$ é uma Δ -função. \diamond

Desta maneira fica definida a seguinte categoria:

- *Categoria ΔComp :* Objetos: Δ -complexos. Morfismos: Δ -funções.

Em particular, dados dois Δ -complexos $(X, [\Delta, \varphi])$ e $(Y, [\Delta', \varphi'])$, um *isomorfismo* entre eles é um homeomorfismo $f: X \rightarrow Y$ que é também uma Δ -função. Por isso, as primeiras duas estruturas de Δ -complexo em S^1 são isomorfas na categoria ΔComp . O exemplo 3.4.25 mostra que, dados um Δ -complexo $(X, [\Delta, \varphi])$ e um homeomorfismo $f: X \rightarrow Y$, o espaço Y herda uma estrutura de Δ -complexo, que o torna isomorfo a $(X, [\Delta, \varphi])$ na categoria ΔComp .

Fica definido o seguinte functor:

$$\begin{aligned} \Pi: \Delta\text{Comp} &\rightarrow \text{Top} \\ (X, [\Delta, \varphi]) &\mapsto X \\ f &\mapsto f. \end{aligned}$$

Como o mesmo espaço X pode admitir várias estruturas de Δ -complexo, não se trata de um mergulho de categorias, pois não é injetor entre os objetos. Nem a função induzida entre classes de isomorfismo de Δ -complexos e classes de homeomorfismo de

espaços topológicos é injetora, pois o mesmo espaço pode admitir várias estruturas não isomorfas em ΔComp .

Podemos também considerar os pares de Δ -complexos, ou seja, os pares formados por um Δ -complexo X e um sub- Δ -complexo A . Um morfismo $f: (Y, B) \rightarrow (X, A)$ é uma Δ -função $f: Y \rightarrow X$ tal que $f(B) \subset A$. Isso implica necessariamente que $f|_B: B \rightarrow A$ é uma Δ -função. Ficam definidas a categoria ΔComp_2 e, de modo análogo, ΔComp_n para todo $n \geq 1$. Também podemos definir um Δ -complexo com ponto marcado como um Δ -complexo $(X, [\Delta, \varphi])$, com um ponto marcado $x_0 \in X$ escolhido entre os 0-simplexos. Obviamente, um morfismo tem que respeitar os pontos marcados. Dessa maneira, obtemos uma sequência de categorias análoga à (1):

$$(79) \quad \Delta\text{Comp} \hookrightarrow \Delta\text{Comp}_+ \hookrightarrow \Delta\text{Comp}_2 \hookrightarrow \Delta\text{Comp}_{2+} \hookrightarrow \dots$$

Também podemos construir as categorias $\text{Hom}(\Delta\text{Comp})$ e $\text{Hom}(\Delta\text{Comp}_+)$, das quais ΔComp_2 e ΔComp_{2+} são sub-categorias cheias.

OBSERVAÇÃO 3.4.29. Podemos definir sequências análogas à (79) considerando Δ -complexos finitos, de dimensão finita ou enumeráveis. \diamond

Veremos que os Δ -complexos são uma ferramenta muito útil para calcular concretamente os grupos de homologia de alguns espaços. Todavia, a estrutura categorial que acabamos de descrever é demasiado rígida, pois existem poucas Δ -funções. Por exemplo, se $f: Y \rightarrow X$ for uma Δ -função, então $\dim Y \leq \dim X$, pois todo n -simplexo aberto tem que ser mandado homeomorficamente em um da mesma dimensão. Por isso, a função $p: X \rightarrow \{pt\}$ não é uma Δ -função se $\dim X \geq 1$. Mesmo quando $\dim Y \leq \dim X$, a condição que uma Δ -função se restrinja a um homeomorfismo em todo simplexo aberto é muito forte. Por outro lado, é fácil calcular os grupos de homologia de um Δ -complexo precisamente por terem uma estrutura tão rígida.

CAPÍTULO 4

Grupo fundamental e recobrimentos

Como afirmamos na introdução, a topologia algébrica consiste essencialmente em encontrar funtores interessantes de uma categoria relacionada à noção de espaço topológico a uma categoria de estruturas algébricas. Desta maneira podemos traduzir problemas topológicos em problemas algébricos, esperando que a versão algébrica seja mais simples. O primeiro exemplo significativo é constituído pelo grupo fundamental, o qual é uma maneira functorial de associar um grupo a cada espaço topológico com ponto marcado. Graças a esta ferramenta poderemos mostrar que dois espaços não são homotopicamente equivalentes (em particular, que não são homeomorfos) mostrando que os grupos fundamentais correspondentes não são isomorfos. Analogamente, poderemos provar que um subespaço A não é retrato de um espaço X mostrando que não existe um morfismo sobrejetor do grupo fundamental de X ao de A e assim em diante. Além disso, neste capítulo apresentaremos a teoria dos espaços de recobrimento, que é estritamente ligada à do grupo fundamental e é também rica de aplicações significativas em todas as áreas da matemática.

4.1. Definição e propriedades fundamentais

Vamos lembrar a definição de caminho.

DEFINIÇÃO 4.1.1. Seja X um espaço topológico.

- Um *caminho* em X é uma função contínua $\varphi: I \rightarrow X$; os pontos $\varphi(0)$ e $\varphi(1)$ são chamados de *extremos* de φ .
- O caminho φ é dito *fechado* se $\varphi(0) = \varphi(1)$; neste caso $\varphi(0)$ é chamado de *ponto base* do caminho fechado.
- Para $x \in X$, chamamos de $\mathbf{c}_x: I \rightarrow X$ o caminho (fechado) constante $\mathbf{c}_x(t) = x$ para todo $t \in I$. \diamond

OBSERVAÇÃO 4.1.2. Um caminho fechado $\varphi: I \rightarrow X$ pode ser pensado também como uma função contínua $\varphi: S^1 \rightarrow X$. Em particular, fixando um ponto marcado $*$ em S^1 , os caminhos com ponto base x_0 correspondem aos morfismos em Top_+ entre $(S^1, *)$ e (X, x_0) . \diamond

DEFINIÇÃO 4.1.3. Dado um espaço com ponto marcado (X, x_0) , o *loop space* de (X, x_0) é o conjunto dos caminhos fechados em X com ponto base x_0 (pensados indiferentemente como funções de I a X ou de S^1 a X), dotado da topologia compacto-aberto. O denotamos por $\Omega_{x_0}(X)$. \diamond

Fica definido o functor:

$$\begin{aligned}\Omega: \text{Top}_+ &\rightarrow \text{Top}_+ \\ (X, x_0) &\mapsto (\Omega_{x_0}X, \mathbf{c}_{x_0}) \\ f &\mapsto (\varphi \mapsto f \circ \varphi).\end{aligned}$$

O functor Ω é adjunto à direita ao functor Σ , ou seja, o functor loop space é adjunto à direita ao functor suspensão reduzida. De fato, subentendendo os pontos marcados, temos que

$$\text{Hom}_{\text{Top}_+}(\Sigma X, Y) \approx \text{Hom}_{\text{Top}_+}(X, \Omega Y).$$

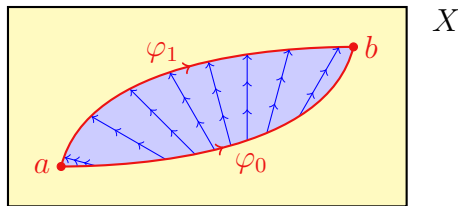
A correspondência é definida associando ao morfismo $f: \Sigma X \rightarrow Y$ o morfismo $g: X \rightarrow \Omega Y$ tal que $g(x)(t) = f([x, 2t - 1])$. Para mostrar que se trata de um homeomorfismo, observamos que

$$\text{Hom}(\Sigma X, Y) \approx \text{Hom}(X \wedge S^1, Y) \approx \text{Hom}(X, \text{Hom}(S^1, Y)) = \text{Hom}(X, \Omega Y).$$

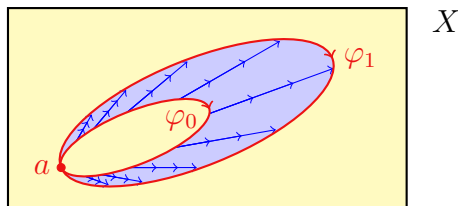
Como S^1 é (localmente) compacto, essa relação vale para espaços topológicos genéricos, mesmo que não sejam k -espaços.

DEFINIÇÃO 4.1.4. Dados dois caminhos $\varphi_0, \varphi_1: I \rightarrow X$ tais que $\varphi_0(0) = \varphi_1(0) = a$ e $\varphi_0(1) = \varphi_1(1) = b$, uma *homotopia de caminhos* entre φ_0 e φ_1 é uma homotopia $F: I \times I \rightarrow X$ entre φ_0 e φ_1 relativa a $\{0, 1\}$. Em particular, $F(t, 0) = \varphi_0(t)$, $F(t, 1) = \varphi_1(t)$, $F(0, u) = a$ e $F(1, u) = b$. \diamond

A seguinte figura mostra a *imagem* de dois caminhos homotópicos (portanto devemos lembrar que, em geral, os dois caminhos e a homotopia entre eles não serão funções injetoras):



Conforme a definição, dois caminhos são homotópicos se existe uma homotopia entre eles que deixe fixos os extremos, ou seja, se as duas funções $\varphi_0, \varphi_1: (I, \partial I) \rightarrow (X, X)$ são equivalentes na categoria TopHR . Por isso a homotopia de caminhos é uma relação de equivalência. Em particular, para caminhos fechados a homotopia tem que fixar o ponto base. A seguinte figura mostra a *imagem* de dois caminhos fechados homotópicos:



Sendo a homotopia de caminhos uma relação de equivalência, podemos definir o conjunto:

$$(80) \quad \pi_1(X, x_0) := \Omega_{x_0}(X)/\text{homotopia}.$$

O conjunto $\Omega_{x_0}(X)$ coincide com $\text{Hom}_{\text{Top}_2}((I, \partial I), (X, \{x_0\}))$, enquanto $\pi_1(X, x_0)$ é o conjunto $\text{Hom}_{\text{TopHR}}((I, \partial I), (X, \{x_0\}))$ ou também $\text{Hom}_{\text{TopH}_2}((I, \partial I), (X, \{x_0\}))$. Equivalentemente, conforme a observação 4.1.2, o conjunto $\Omega_{x_0}(X)$ coincide com $\text{Hom}_{\text{Top}_+}((S^1, *), (X, \{x_0\}))$ e $\pi_1(X, x_0)$ é o conjunto $\text{Hom}_{\text{TopH}_+}((S^1, *), (X, \{x_0\}))$. Mostremos agora que $\pi_1(X, x_0)$ admite uma estrutura natural de grupo. Dados dois caminhos $\varphi_0, \varphi_1 : I \rightarrow X$ tais que $\varphi_0(1) = \varphi_1(0)$ definimos a *composição* $\varphi_1 * \varphi_0$ da seguinte maneira:¹

$$(81) \quad (\varphi_1 * \varphi_0)(t) := \begin{cases} \varphi_0(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \varphi_1(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Esta composição define uma operação em $\Omega_{x_0}(X)$. Ademais, vale o seguinte lema:

LEMA 4.1.5. *A composição de caminhos está bem definida a menos de homotopia, isto é, dados dois pares de caminhos homotópicos $\varphi_0 \sim \varphi'_0$ e $\varphi_1 \sim \varphi'_1$, tais que $\varphi_0(1) = \varphi_1(0) = \varphi'_0(1) = \varphi'_1(0)$, as composições $\varphi_1 * \varphi_0$ e $\varphi'_1 * \varphi'_0$ são homotópicas.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam Φ_0 uma homotopia entre φ_0 e φ'_0 e Φ_1 uma homotopia entre φ_1 e φ'_1 . Podemos definir a seguinte homotopia entre $\varphi_1 * \varphi_0$ e $\varphi'_1 * \varphi'_0$:

$$(\Phi_1 * \Phi_0)(t, u) := \begin{cases} \Phi_0(2t, u) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \Phi_1(2t - 1, u) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Esta função é contínua pelo lema 1.1.19, pois, para $t = \frac{1}{2}$, temos que $\Phi_0(1, u)$ e $\Phi_1(0, u)$ são constantes em u com valor $\varphi_0(1) = \varphi'_0(1) = \varphi_1(0) = \varphi'_1(0)$. \square

Portanto, obtemos uma operação bem definida em $\pi_1(X, x_0)$.

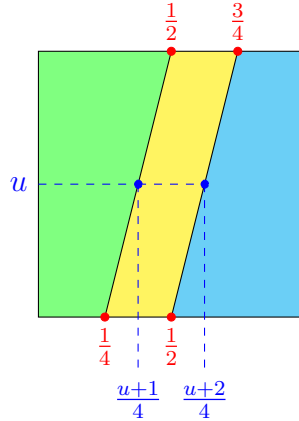
LEMA 4.1.6. *Valem as seguintes propriedades:*

- *Sejam $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ caminhos em X tais que $\varphi_0(1) = \varphi_1(0)$ e $\varphi_1(1) = \varphi_2(0)$. Então os caminhos $\varphi_2 * (\varphi_1 * \varphi_0)$ e $(\varphi_2 * \varphi_1) * \varphi_0$ são homotópicos.*
- *Seja φ um caminho em X e, para $i = 0, 1$, seja $\mathbf{c}_{\varphi(i)}$ o caminho constante com valor $\varphi(i)$. Então $\mathbf{c}_{\varphi(1)} * \varphi$ e $\varphi * \mathbf{c}_{\varphi(0)}$ são homotópicos a φ .*
- *Seja φ um caminho em X e seja $\bar{\varphi}$ o caminho definido por $\bar{\varphi}(t) := \varphi(1 - t)$. Então o caminho $\bar{\varphi} * \varphi$ é homotópico ao caminho constante $\mathbf{c}_{\varphi(0)}$ e o caminho $\varphi * \bar{\varphi}$ é homotópico ao caminho constante $\mathbf{c}_{\varphi(1)}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Em relação à primeira propriedade, a composição $\varphi_2 * (\varphi_1 * \varphi_0)$ consiste no caminho φ_0 , reparametrizado no intervalo $t \in [0, \frac{1}{4}]$, no caminho φ_1 , reparametrizado no intervalo $t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, e no caminho φ_2 , reparametrizado no intervalo $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. A composição $(\varphi_2 * \varphi_1) * \varphi_0$ consiste no caminho φ_0 , reparametrizado no intervalo $t \in [0, \frac{1}{2}]$, no caminho φ_1 , reparametrizado no intervalo $t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$. e no

¹A composição de caminhos não é a composição na categoria Top, pois está definida entre dois morfismos cujo domínio é I , enquanto a composição em uma categoria é definida entre $\text{Hom}(X, Y)$ e $\text{Hom}(Y, Z)$. Trata-se de uma lei de composição definida dentro do conjunto dos morfismos de I a X , para cada X fixado. O mesmo acontecerá com o quociente por homotopia.

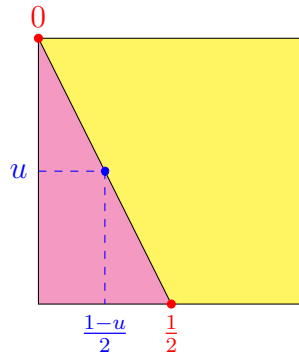
caminho φ_2 , reparametrizado no intervalo $t \in [\frac{3}{4}, 1]$. Então, no quadrado $I \times I$, parametrizado por (t, u) , onde t representa a variável dos caminhos e u a da homotopia entre eles, consideramos o segmento que une o ponto $(\frac{1}{4}, 0)$ ao ponto $(\frac{1}{2}, 1)$ e o segmento que une o ponto $(\frac{1}{2}, 0)$ ao ponto $(\frac{3}{4}, 1)$. Trata-se de segmentos contidos nas retas $u = 4t - 1$ e $u = 4t - 2$, ou, equivalentemente, $t = \frac{u+1}{4}$ e $t = \frac{u+2}{4}$.



Portanto, na homotopia que vamos construir, temos que considerar o caminho φ_0 , reparametrizado no intervalo $t \in [0, \frac{u+1}{4}]$, o caminho φ_1 , reparametrizado no intervalo $t \in [\frac{u+1}{4}, \frac{u+2}{4}]$ e o caminho φ_2 , reparametrizado no intervalo $t \in [\frac{u+2}{4}, 1]$. Afinal fica definida a seguinte homotopia:

$$H(t, u) = \begin{cases} \varphi_0(t \frac{4}{u+1}) & 0 \leq t \leq \frac{u+1}{4} \\ \varphi_1(4(t - \frac{u+1}{4})) & \frac{u+1}{4} \leq t \leq \frac{u+2}{4} \\ \varphi_2(\frac{4}{2-u}(t - \frac{u+2}{4})) & \frac{u+2}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Em relação à segunda propriedade, o caminho $\varphi * \mathbf{c}_{\varphi(0)}$ é representado pelo caminho constante $\mathbf{c}_{\varphi(0)}$, reparametrizado no intervalo $t \in [0, \frac{1}{2}]$, e pelo caminho φ , reparametrizado no intervalo $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. O caminho final da homotopia é φ . Então, consideremos o segmento que une $(\frac{1}{2}, 0)$ a $(0, 1)$, que está contido na reta $u = -2t + 1$ ou, equivalentemente, $t = \frac{1-u}{2}$.



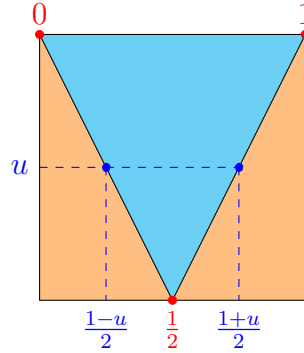
Na homotopia que estamos procurando temos que considerar o caminho $\mathbf{c}_{\varphi(0)}$, reparametrizado no intervalo $t \in [0, \frac{1-u}{2}]$, e o caminho φ , reparametrizado no intervalo

$t \in [\frac{1-u}{2}, 1]$. Afinal obtemos a seguinte homotopia:

$$H(t, u) = \begin{cases} \varphi(0) & 0 \leq t \leq \frac{1-u}{2} \\ \varphi(\frac{2}{1+u}(t - \frac{1-u}{2})) & \frac{1-u}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Uma prova análoga é válida para $\mathbf{c}_{\varphi(1)} * \varphi$.

Enfim, para $\bar{\varphi} * \varphi$, a ideia intuitiva é a seguinte. No começo percorremos o caminho φ e voltamos, mas depois de um tempo u podemos parar um pouco antes de $\varphi(1)$, em $\varphi(1-u)$, e voltar. Continuamos assim com continuidade para u crescente até ficarmos parados em $\varphi(0)$ para $u = 1$. Formalmente consideramos os segmentos que unem $(\frac{1}{2}, 0)$ a $(0, 1)$ e $(1, 1)$, que são parte das retas $u = -2t + 1$ e $u = 2t - 1$, ou, equivalentemente, $t = \frac{1-u}{2}$ e $t = \frac{1+u}{2}$.



Para $u = 0$ temos $\bar{\varphi} * \varphi$, que corresponde a $\varphi(2t)$ no intervalo $t \in [0, \frac{1}{2}]$ e a $\bar{\varphi}(2(t - \frac{1}{2})) = \varphi(2 - 2t)$ no intervalo $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. Para u genérico, consideramos o caminho $\varphi(2t)$ sem reparametrizá-lo até $t = \frac{1-u}{2}$, ficamos parados naquele ponto até $t = \frac{u+1}{2}$ e voltamos percorrendo $\varphi(2 - 2t)$. Afinal obtemos a homotopia:

$$H(t, u) = \begin{cases} \varphi(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1-u}{2} \\ \varphi(1-u) & \frac{1-u}{2} \leq t \leq \frac{u+1}{2} \\ \varphi(2-2t) & \frac{u+1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Uma prova análoga é válida para $\varphi * \bar{\varphi}$. □

COROLÁRIO 4.1.7. $\pi_1(X, x_0)$, com a operação $[\varphi] \cdot [\psi] := [\psi * \varphi]$, é um grupo.

DEMONSTRAÇÃO. A operação está bem definida pelo lema 4.1.5. O primeiro item do lema 4.1.6 implica que a composição em $\pi_1(X, x_0)$ é associativa, o segundo que $[\mathbf{c}_{x_0}]$ é o elemento neutro e o terceiro que $[\bar{\varphi}] = [\varphi]^{-1}$. □

OBSERVAÇÃO 4.1.8. Definimos $[\varphi] \cdot [\psi] := [\psi * \varphi]$, ao invés de $[\varphi * \psi]$, para que o primeiro fator do produto seja o primeiro caminho a ser percorrido. Trata-se de uma convenção, que poderia ser invertida sem problemas. ◇

4.1.1. Propriedades functoriais. Por enquanto definimos a ação de π_1 nos objetos da categoria Top_+ . Vamos defini-la nos morfismos, para construir um functor de Top_+ a Grp . Dado um morfismo $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, fica bem definida a seguinte

função, que já mostramos para construir o functor Ω :

$$(82) \quad \begin{aligned} f_{\#} &: \Omega_{x_0}(X) \rightarrow \Omega_{y_0}(Y) \\ \varphi &\mapsto f \circ \varphi. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que a seguinte projeção ao quociente está bem definida e é um homomorfismo de grupos:

$$(83) \quad \begin{aligned} f_* &: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0) \\ [\varphi] &\mapsto [f_{\#}\varphi]. \end{aligned}$$

Se φ_0 e φ_1 forem homotópicos, então $f_{\#}(\varphi_0)$ e $f_{\#}(\varphi_1)$ o são também. De fato, seja Φ uma homotopia entre os dois: é fácil conferir que $f \circ \Phi$ é uma homotopia entre $f_{\#}(\varphi_0)$ e $f_{\#}(\varphi_1)$. Isso mostra que f_* está bem definida.

TEOREMA 4.1.9. *Dado um morfismo $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ na categoria Top_+ , a função f_* é um morfismo de grupos. Ademais, dadas $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ e $g: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$, temos que:*

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* \quad (\text{id}_{(X, x_0)})_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}.$$

DEMONSTRAÇÃO. É imediato verificar que $f_{\#}(\varphi_1 * \varphi_0) = f_{\#}(\varphi_1) * f_{\#}(\varphi_0)$, portanto $f_*([\varphi_0][\varphi_1]) = f_*[\varphi_1 * \varphi_0] = [f_{\#}(\varphi_1 * \varphi_0)] = [f_{\#}(\varphi_1) * f_{\#}(\varphi_0)] = f_*[\varphi_0]f_*[\varphi_1]$. O fato que $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ e $\text{id}_* = \text{id}$ é consequência direta da definição. \square

Acabamos de construir o functor:

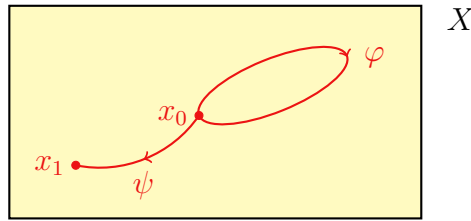
$$(84) \quad \begin{aligned} \pi_1 &: \text{Top}_+ \rightarrow \text{Grp} \\ (X, x_0) &\mapsto \pi_1(X, x_0) \\ f &\mapsto f_*. \end{aligned}$$

O morfismo f_* poderia também ser denotado por $\pi_1(f)$, conforme a definição 2.2.1, mas é mais comum e mais prático usar a notação f_* . Obviamente, o fato que π_1 seja um functor implica que, se f for um homeomorfismo, então f_* é um isomorfismo pelo lema 0–2.2.6.

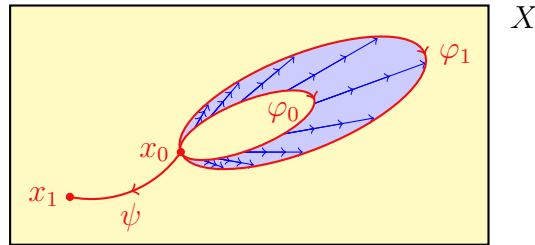
4.1.2. Dependência do ponto base. Vamos mostrar o que acontece mudando o ponto base. Antes de tudo temos que fazer uma observação: dado um caminho fechado φ com ponto base $x_0 \in X$, toda a imagem do caminho está contida na componente conexa por caminhos de x_0 : de fato, para qualquer $t \in I$, a restrição $\varphi|_{[0, t]}$, reparametrizada em $[0, 1]$, é um caminho que une x_0 a $\varphi(t)$. Por este motivo, dado um espaço X que não seja conexo por caminhos e dados dois pontos $x_0, x_1 \in X$, pertencentes a duas componentes distintas, não pode haver nenhuma relação entre os grupos $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$. Por isso, faz sentido considerar o problema da eventual independência do ponto base somente para espaços conexos por caminhos (ou escolhendo os pontos marcados na mesma componente de um espaço qualquer).

Sejam $x_0, x_1 \in X$ e seja $\psi: I \rightarrow X$ um caminho tal que $\psi(0) = x_0$ e $\psi(1) = x_1$. Definimos a seguinte função:

$$\begin{aligned} \psi_{!!} &: \Omega_{x_0}(X) \rightarrow \Omega_{x_1}(X) \\ \varphi &\mapsto \psi * (\varphi * \bar{\psi}). \end{aligned}$$



Mostremos que, se $\varphi_0, \varphi_1 \in \Omega_{x_0}(X)$ forem homotópicos, então também $\psi_{!!}(\varphi_0)$ e $\psi_{!!}(\varphi_1)$ o são. De fato, seja Φ uma homotopia entre os dois e seja $\Phi_u(t) = \Phi(t, u)$. Podemos facilmente construir uma homotopia Φ' entre $\psi_{!!}(\varphi_0)$ e $\psi_{!!}(\varphi_1)$ tal que $\Phi'_u = \psi_{!!}(\Phi_u)$.



Em particular:

$$(85) \quad \Phi'(t, u) = \begin{cases} \bar{\psi}(4t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \Phi(4t - 1, u) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \psi(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

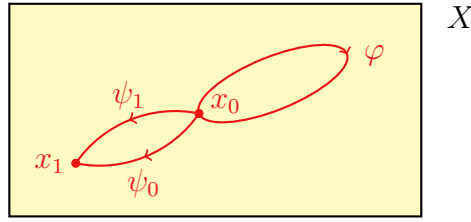
Por isso fica bem definida a função:

$$(86) \quad \begin{aligned} \psi_! : \pi_1(X, x_0) &\rightarrow \pi_1(X, x_1) \\ [\varphi] &\mapsto [\psi_{!!}(\varphi)]. \end{aligned}$$

TEOREMA 4.1.10. *Sejam $x_0, x_1 \in X$ e seja $\psi : I \rightarrow X$ um caminho tal que $\psi(0) = x_0$ e $\psi(1) = x_1$. A função $\psi_! : \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(X, x_1)$ é um isomorfismo de grupos.*

DEMONSTRAÇÃO. A função $\psi_!$ é um morfismo de grupos, pois $\psi_!([\varphi_0][\varphi_1]) = \psi_![\varphi_1 * \varphi_0] = [\psi * \varphi_1 * \varphi_0 * \bar{\psi}] = [\psi * \varphi_1 * \bar{\psi} * \psi * \varphi_0 * \bar{\psi}] = \psi_![\varphi_0] \cdot \psi_![\varphi_1]$. Ademais, é fácil conferir que o morfismo $\bar{\psi}_! : \pi(X, x_1) \rightarrow \pi(X, x_0)$ é o inverso de $\psi_!$. \square

Agora é natural perguntar-se se o isomorfismo $\psi_!$ depende de ψ . Infelizmente em geral depende. Mais precisamente, depende da classe de homotopia de ψ . De fato, sejam ψ_0 e ψ_1 dois caminhos homotópicos entre x_0 e x_1 e seja $\Psi : \psi_0 \sim \psi_1$ uma homotopia. Podemos facilmente construir uma homotopia Ψ' entre $(\psi_0)_{!!}(\varphi)$ e $(\psi_1)_{!!}(\varphi)$ tal que $\Psi'_u = (\Psi_u)_{!!}(\varphi)$.



Em particular:

$$(87) \quad \Psi'(t, u) = \begin{cases} \Psi(1 - 4t, u) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \varphi(4t - 1) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \Psi(2t - 1, u) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Por isso, combinando as homotopias (87) e (85), poderíamos escrever $[\psi]_![\varphi]$ ao invés de $\psi_![\varphi]$. O leitor pode conferir que, dados um caminho ψ_0 de x_0 a x_1 e um caminho ψ_1 de x_1 a x_2 , temos:

$$(88) \quad [\psi_1 * \psi_0]_! = [\psi_1]_! \circ [\psi_0]_!.$$

Os dois termos da igualdade são isomorfismos entre $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_2)$. Em particular, dados dois caminhos ψ_0 e ψ_1 de x_0 a x_1 , temos que:

$$[\psi_1]_![\varphi] = [\psi_0]_! \circ [\bar{\psi}_0 * \psi_1]_![\varphi]$$

portanto os dois isomorfismos $[\psi_0]_!$ e $[\psi_1]_!$ diferem pelo automorfismo $[\bar{\psi}_0 * \psi_1]_!$ de $\pi_1(X, x_0)$, o qual é um automorfismo *interno*, pois coincide com a conjugação por $[\bar{\psi}_0 * \psi_1]$. Se ψ_0 e ψ_1 forem homotópicos, então $[\bar{\psi}_0 * \psi_1] = 1$ e o automorfismo interno se torna a identidade. Em geral, a conjugação por $[\bar{\psi}_0 * \psi_1]$ é a identidade se, e somente se, $[\bar{\psi}_0 * \psi_1]$ for um elemento do centro de $\pi_1(X, x_0)$. Por isso, se $\pi_1(X, x_0)$ não for abeliano, o isomorfismo $[\psi]_!$ depende de $[\psi]$. Mais precisamente, acabamos de verificar que *o grupo fundamental de um espaço conexo por caminhos é independente do ponto base a menos de automorfismo interno não-canônico*. Graças a esta propriedade, se pensarmos no grupo a menos de isomorfismo, então podemos escrever por simplicidade $\pi_1(X)$, mas temos que prestar atenção aos morfismos. De fato, uma função $f: X \rightarrow Y$ define um morfismo $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ para qualquer $x_0 \in X$ marcado, enquanto o morfismo $f_*: \pi(X) \rightarrow \pi(Y)$ só faz sentido a menos de automorfismos internos do domínio e do contra-domínio. Consideremos duas funções contínuas $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$ entre espaços conexos por caminhos: estas funções definem os morfismos $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ e $g_*: \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(Z, g(y_0))$, mas, se $y_0 \neq f(x_0)$, então a composição $g_* \circ f_*$ não é definida de modo nenhum. Se $\psi: I \rightarrow Y$ for um caminho entre $f(x_0)$ e y_0 , então só fica bem definida a composição $g_* \circ [\psi]_! \circ f_*$, mas, como $[\psi]_!$ fica no meio da composição, não é suficiente quocientar por automorfismos do domínio e do contra-domínio. A única possibilidade consiste em fixar x_0 , marcar $f(x_0)$ em Y e $g(f(x_0))$ em Z , e só afinal quocientar por automorfismos. Por isso *o grupo fundamental não pode ser pensado como um functor de Top ao invés de Top₊, nem restringindo-o à subcategoria cheia dos espaços conexos por caminhos*. Só há uma exceção, que já mencionamos: se o grupo fundamental for abeliano, então os automorfismos internos são todos triviais, portanto o isomorfismo $[\psi]_!$ é único. Neste caso podemos definir um grupo fundamental canônico para X

conexo por caminhos.² De fato mostraremos que, se o grupo fundamental for abeliano, coincide com o primeiro grupo de homologia, o qual é definido para um espaço topológico sem ponto marcado.

Enfim, vamos fazer mais um comentário em relação à não canonicidade do isomorfismo $[\psi]_!$. Vimos no primeiro capítulo que um isomorfismo canônico é, por definição, um isomorfismo de funtores. Então, em que sentido $[\psi]_!$ não é canônico? Significa o seguinte. Consideremos a categoria Top_{++} , formada por espaços topológicos com dois pontos marcados. Consideremos os dois funtores $\pi'_1: \text{Top}_{++} \rightarrow \text{Grp}$, $(X, x_0, x_1) \mapsto \pi_1(X, x_0)$, e $\pi''_1: \text{Top}_{++} \rightarrow \text{Grp}$, $(X, x_0, x_1) \mapsto \pi_1(X, x_1)$. Se restringimos Top_{++} à sub-categoria cheia formada pelos espaços conexos por caminhos, então, para todo objeto (X, x_0, x_1) fixado, há um isomorfismo de grupos $[\psi_{x_0, x_1}]_!$ entre as duas imagens, sendo ψ_{x_0, x_1} um caminho em X entre x_0 e x_1 . Todavia, não é possível escolher um isomorfismo entre os dois grupos fundamentais, para cada objeto (X, x_0, x_1) , de modo que fique definido um isomorfismo de funtores entre π'_1 e π''_1 . Em particular, dado um morfismo $f: (X, x_0, x_1) \rightarrow (Y, y_0, y_1)$, que induz os morfismos $f_{*'}: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ e $f_{*''}: \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(Y, y_1)$, em geral não vale a igualdade $f_{*''} \circ [\psi_{x_0, x_1}]_! = [\psi_{y_0, y_1}]_! \circ f_{*'}$.

4.1.3. Grupo fundamental e equivalência homotópica. Vamos mostrar o comportamento do grupo fundamental em relação à homotopia de funções e à equivalência homotópica de espaços.

LEMA 4.1.11. *Dadas duas funções $f, g: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, se f e g forem homotópicas em Top_+ , então $f_* = g_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $F: X \times I \rightarrow Y$ uma homotopia entre f e g que respeita os pontos marcados. Então, dado $[\varphi] \in \pi_1(X, x_0)$, consideramos a homotopia entre $f \circ \varphi$ e $g \circ \varphi$ definida por $\Phi: I \times I \rightarrow Y$, $(t, u) \mapsto F(\varphi(t), u)$. Temos que $\Phi(0, u) = F(x_0, u) = y_0$ e $\Phi(1, u) = F(x_0, u) = y_0$, portanto Φ é relativa a ∂I . Então $f_*[\varphi] = g_*[\varphi]$. \square

Isso mostra que o functor π_1 passa ao quociente a respeito da equivalência homotópica na categoria Top_+ e portanto define o functor:

$$(89) \quad \pi_1: \text{TopH}_+ \rightarrow \text{Grp}$$

que associa a um objeto (X, x_0) o grupo $\pi_1(X, x_0)$ e a um morfismo $[f]: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ o morfismo de grupos $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$.

OBSERVAÇÃO 4.1.12. A demonstração do lema 4.1.11 mostra que a função $f_{\#}: \Omega_x(X) \rightarrow \Omega_y(Y)$, $\varphi \mapsto f \circ \varphi$, passa ao quociente a respeito da classe de homotopia de f . Já provamos que passa ao quociente a respeito da classe de homotopia de φ , sendo este o motivo pelo qual define uma função entre os grupos fundamentais. Os

²Formalmente, uma definição pode ser a seguinte:

$$\pi_1(X) := \bigoplus_{x_0 \in X} \pi_1(X, x_0) / \sim, \quad [\varphi]_{x_0} \sim [\psi * (\varphi * \bar{\psi})]_{y_0}.$$

dois resultados se completam, definindo uma função entre os grupos fundamentais que só depende da classe de homotopia de f . \diamond

COROLÁRIO 4.1.13. *Seja $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ uma equivalência homotópica. Então $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ é um isomorfismo.*

DEMONSTRAÇÃO. É consequência direta dos lemas 4.1.11 e 2.2.6. \square

Esse resultado vale na categoria TopH_+ . Todavia, pode ser generalizado a funções entre espaços sem ponto marcado. De fato, consideremos duas funções $f, g: X \rightarrow Y$. Para qualquer ponto marcado $x_0 \in X$, ficam definidos os morfismos $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ e $g_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, g(x_0))$. Seja $F: f \sim g$ uma homotopia. Vale o seguinte resultado: os morfismos f_* e g_* diferem por um isomorfismo $\Psi: \pi_1(Y, f(x_0)) \rightarrow \pi_1(Y, g(x_0))$, isto é, $g_* = \Psi \circ f_*$. Em particular, temos que $\Psi = [\psi]_!$, sendo ψ o caminho percorrido pela imagem de x_0 ao longo da homotopia, ou seja, $\psi(t) = F(x_0, t)$. Desta maneira $\psi(0) = f(x_0)$ e $\psi(1) = g(x_0)$, logo $[\psi]_!: \pi_1(Y, f(x_0)) \rightarrow \pi_1(Y, g(x_0))$. O seguinte lema, que generaliza o 4.1.11, formaliza o argumento que acabamos de esboçar.

LEMA 4.1.14. *Sejam $f, g: X \rightarrow Y$ e $F: f \sim g$. Para qualquer $x_0 \in X$ fixado, seja $\psi: I \rightarrow Y$ o caminho percorrido pela imagem de x_0 durante a homotopia, ou seja, $\psi(t) := F(x_0, t)$. Temos que $g_* = [\psi]_! \circ f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, g(x_0))$, sendo $[\psi]_!: \pi_1(Y, f(x_0)) \rightarrow \pi_1(Y, g(x_0))$ o isomorfismo (86).*

DEMONSTRAÇÃO. Dado $t \in I$, seja $\psi_t: I \rightarrow Y$ o caminho percorrido pela imagem de x_0 no intervalo $[1-t, 1]$ durante a homotopia, reparametrizado oportunamente, isto é, $\psi_t(u) = \psi(tu + 1 - t)$. Fixado $\varphi \in \Omega_{x_0}(X)$, consideremos a homotopia $\Phi: I \times I \rightarrow Y$, $(t, u) \mapsto \psi_t * ((F_{1-t})_{\#}(\varphi) * \bar{\psi}_t)$. É claro que $\Phi(1, u) = \psi * (f_{\#}(\varphi) * \bar{\psi}) = (\psi)_{!!} \circ f_{\#}(\varphi)$, enquanto $\Phi(0, u) = \mathbf{c}_{g(x)} * g_{\#}(\varphi) * \bar{\mathbf{c}}_{g(x)} \sim g_{\#}(\varphi)$. Por isso, $g_*[\varphi] = [\psi]_! \circ f_*[\varphi]$, isto é, $g_* = [\psi]_! \circ f_*$. \square

Em particular, pode acontecer que $f(x_0) = g(x_0) = y_0$. Neste caso $f, g: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ são morfismos em Top_+ , mas a homotopia $F: f \sim g$ pode não respeitar o ponto marcado. Conforme o lema 4.1.14, temos que f_* e g_* , ambos definidos de $\pi_1(X, x_0)$ a $\pi_1(Y, y_0)$, diferem por um *automorfismo interno* de $\pi_1(Y, y_0)$. Enfim, a partir do lema 4.1.14, é fácil demonstrar o seguinte teorema, que generaliza o 4.1.13.

TEOREMA 4.1.15. *Seja $f: X \rightarrow Y$ uma equivalência homotópica. Então, para qualquer ponto marcado $x_0 \in X$, temos que $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ é um isomorfismo.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $g: Y \rightarrow X$ uma equivalência homotópica inversa a f . Então, pelo lema 4.1.14, $g_* \circ f_* = [\psi]_! \circ (\text{id}_X)_* = [\psi]_!$, sendo ψ o caminho percorrido pela imagem de x_0 ao longo da homotopia $\Phi: g \circ f \sim \text{id}_X$. Isso mostra que $g_* \circ f_*$ é um isomorfismo, portanto f_* é injetora e g_* é sobrejetora. Da mesma maneira, considerando $f_* \circ g_*$, demonstramos que g_* é injetora e f_* é sobrejetora. \square

Isso mostra que, se trabalharmos com espaços conexos por caminhos, assim como a classe de isomorfismo do grupo fundamental não depende do ponto base, analogamente o morfismo f_* fica bem definido, a menos de automorfismos do domínio

e do contradomínio, independentemente do ponto base. Em particular, o fato que uma equivalência homotópica induza um isomorfismo vale mesmo desconsiderando os pontos marcados. Todavia, continuam ficando válidas as observações que fizemos na seção 4.1.2, a respeito do fato que π_1 não pode ser pensado como um functor cujo domínio é uma subcategoria cheia de TopH.

4.1.4. Espaços simplesmente conexos. Um espaço é conexo por caminhos quando $\pi_0(X)$ é um conjunto de só um elemento. Analogamente, podemos dar a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 4.1.16. Um espaço topológico X é dito *simplesmente conexo* quando for conexo por caminhos e $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ para qualquer ponto $x_0 \in X$. \diamond

É claro que, sendo X conexo por caminhos, se a condição $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ valer para um ponto $x_0 \in X$, então vale para todos os pontos. Como o grupo fundamental de um ponto é trivial, *qualquer espaço contrátil é simplesmente conexo*. Mostraremos em seguida que $\pi_1(S^n) = \{1\}$ para $n \geq 2$, portanto as esferas de dimensão maior ou igual a 2 são exemplos de espaços simplesmente conexos que não são contráteis. Às vezes, na definição de espaço simplesmente conexo, não se pede que X seja conexo por caminhos; neste caso, a união disjunta de dois espaços simplesmente conexos (e.g. duas cópias de S^2) é um exemplo de espaço simplesmente conexo mas não conexo. Todavia, a definição 4.1.16 é a mais comum. Enfim, vale o seguinte lema.

LEMA 4.1.17. *Um espaço X é simplesmente conexo se, e somente se, para cada par de pontos $x_0, x_1 \in X$, existe uma única classe de homotopia de caminhos entre x_0 e x_1 .*

DEMONSTRAÇÃO. (\Leftarrow) Seja $x_1 = x_0$. Então o enunciado é equivalente ao fato que $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$. (\Rightarrow) Sejam φ, φ' dois caminhos entre x_0 e x_1 . Então $\varphi' * \bar{\varphi} \in \Omega_{x_1}(X)$, portanto, sendo $\pi_1(X, x_1) = \{1\}$, temos que $\varphi' * \bar{\varphi} \sim \mathbf{c}_{x_1}$. Isso implica que $\varphi' \sim \varphi' * \mathbf{c}_{x_0} \sim \varphi' * \bar{\varphi} * \varphi \sim \mathbf{c}_{x_1} * \varphi \sim \varphi$. \square

4.2. Grupo fundamental do círculo e aplicações

Vamos calcular o primeiro exemplo não trivial de grupo fundamental, ou seja, $\pi_1(S^1)$. Para isso, vamos precisar de uma construção que de fato introduz o conceito de recobrimento, que trataremos em detalhe em seguida.

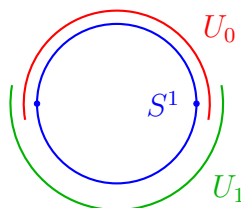
4.2.1. A função exponencial como recobrimento. Consideremos a seguinte função contínua sobrejetora:

$$(90) \quad \begin{aligned} \exp: \mathbb{R} &\rightarrow S^1 \\ x &\mapsto e^{2\pi i x}. \end{aligned}$$

É claro que $\exp(x) = \exp(y)$ se, e somente se, $y - x \in \mathbb{Z}$. Vamos agora introduzir uma propriedade fundamental da função \exp . Consideremos a seguinte cobertura aberta de S^1 :

$$(91) \quad \mathfrak{U} = \{U_0, U_1\}, \quad U_0 = (\exp(-\varepsilon), \exp(\frac{1}{2} + \varepsilon)), \quad U_1 = (\exp(\frac{1}{2} - \varepsilon), \exp(1 + \varepsilon))$$

sendo $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$.



LEMA 4.2.1. Para $i = 0, 1$, a imagem inversa $\exp^{-1}(U_i)$ é a união disjunta de uma quantidade enumerável de intervalos abertos $\{J_i^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, sendo $J_i^n \subset \mathbb{R}$, tais que a restrição $\exp|_{J_i^n}: J_i^n \rightarrow U_i$ é um homeomorfismo para todo n .

DEMONSTRAÇÃO. Por definição de \exp , a imagem inversa de U_0 é $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n - \varepsilon, n + \frac{1}{2} + \varepsilon)$, que é uma união disjunta. Ademais, $\exp|_{(-\varepsilon + n, \frac{1}{2} + \varepsilon + n)}: (-\varepsilon + n, \frac{1}{2} + \varepsilon + n) \rightarrow U_0$ é:

- injetora, pois o comprimento do intervalo é menor que 1;
- sobrejetora, pois por construção U_0 é a imagem;
- contínua, pois \exp o é;
- aberta, pois a imagem de um intervalo aberto (a, b) é o intervalo aberto $(\exp(a), \exp(b))$ em S^1 .

Isso prova que a restrição de \exp a cada componente conexa de U_0 é um homeomorfismo. Uma demonstração análoga vale para U_1 . \square

Intuitivamente, a função \exp dobra infinitas vezes a reta dos números reais percorrendo um círculo para cada intervalo $[n, n + 1]$, onde $n \in \mathbb{Z}$. Agora imaginemos um caminho $\varphi: I \rightarrow S^1$. Sendo \exp sobrejetora, podemos fixar um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\exp(x_0) = \varphi(0)$. Intuitivamente, podemos imaginar de construir um caminho em \mathbb{R} que levante o caminho φ a partir do ponto x_0 . Este caminho tem que ser único, pois localmente \mathbb{R} e S^1 são homeomorfos através de \exp , então é sempre possível prosseguir de modo único com o levantamento ao longo de mais um trecho, até completar o levantamento. Este será o conteúdo do lema 4.2.3, a partir do qual poderemos enunciar o teorema 4.2.4, que é mais geral e se reduz ao levantamento de um caminho para $X = \{*\}$.

LEMA 4.2.2. Seja $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in \Lambda}$ uma cobertura aberta do intervalo I . É possível encontrar $n \in \mathbb{N}$, uma partição $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$ e uma função $\phi: \{0, \dots, n - 1\} \rightarrow \Lambda$ tais que $[t_j, t_{j+1}] \subset A_{\phi(j)}$ para todo $j \in \{0, \dots, n - 1\}$.

DEMONSTRAÇÃO. Para todo $x \in I$, existe $i \in \Lambda$ tal que $x \in A_i$. Sendo A_i aberto em I , podemos achar um intervalo fechado $J_x := [a_x, b_x]$ tal que $0 \leq a_x < b_x \leq 1$ e, denotando por J'_x o interior de J_x em I , valha $x \in J'_x \subset J_x \subset A_i$. A família $\{J'_x\}_{x \in I}$ é uma cobertura aberta de I , logo, sendo I compacto, existe uma subcobertura finita $\{J'_{x_0}, \dots, J'_{x_m}\}$, sendo $J_{x_j} = [a_{x_j}, b_{x_j}]$. Seja $S = \{a_{x_0}, \dots, a_{x_m}, b_{x_0}, \dots, b_{x_m}\}$. Enfim, seja $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$ o conjunto S ordenado de modo estritamente crescente. Para $j \in \{0, \dots, n - 1\}$, seja $t_j \in J'_{x_h}$, logo $t_j < b_{x_h}$. Necessariamente $a_{x_h} \leq t_j$ e $t_{j+1} \leq b_{x_h}$, logo $[t_j, t_{j+1}] \subset J_{x_h} \subset A_i$ para algum i . \square

LEMA 4.2.3. *Sejam X um espaço topológico e $\varphi: I \rightarrow S^1$ um caminho. Seja $x_0 \in \mathbb{R}$ um ponto tal que $\exp(x_0) = \varphi(0)$. Então existe um único caminho $\Phi: I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Phi(0) = x_0$ e $\exp \circ \Phi = \varphi$.*

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos a cobertura (91) de S^1 . Seja $t \in I$ e seja $\varphi(t) \in U_i$, sendo $i \in \{0, 1\}$. Como φ é contínuo, $\varphi^{-1}(U_i)$ é aberto, logo existe uma vizinhança $A_t \subset I$ de t tal que $\varphi(A_t) \subset U_i$. Obtemos uma cobertura $\{A_t\}_{t \in I}$ de I . Aplicando o lema 4.2.2, seja $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$ uma partição de I tal que $[t_j, t_{j+1}] \subset A_{\varphi(t_j)}$. Obtemos que $\varphi([t_j, t_{j+1}]) \subset U_i$, onde i depende de j .

Por indução, assumamos que exista um levantamento Φ de $\varphi|_{[0, t_j]}$ a \mathbb{R} , sendo $0 \leq j < n$. No caso inicial $j = 0$, trata-se do ponto x_0 . Como $\varphi(t_j) \in \varphi([t_j, t_{j+1}]) \subset U_i$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\Phi(t_j) \in J_i^k$. Podemos definir Φ em $[t_j, t_{j+1}]$ compondo φ com $\exp^{-1}: U_i \rightarrow J_i^k$. Obtemos uma função contínua, pois $\{[0, t_j], [t_j, t_{j+1}]\}$ é uma cobertura fechada finita de $[0, t_{j+1}]$.

Isso demonstra que existe um levantamento Φ de φ . Vamos demonstrar que é único. Sejam $\Phi, \Phi': I \rightarrow \mathbb{R}$ dois levantamentos de $\varphi: I \rightarrow S^1$ tais que $\Phi(0) = \Phi'(0)$. Assumamos por indução que $\Phi|_{[0, t_j]} = \Phi'|_{[0, t_j]}$. Como $[t_j, t_{j+1}]$ é conexo e Φ e Φ' são contínuos, necessariamente $\Phi([t_j, t_{j+1}])$ e $\Phi'([t_j, t_{j+1}])$ estão contidos no mesmo intervalo J_i^k que contém $\Phi(t_j) = \Phi'(t_j)$. Como $\exp \circ \Phi = \exp \circ \Phi'$ e $\exp|_{J_i^k}$ é um homeomorfismo, temos que $\Phi|_{[t_j, t_{j+1}]} = \Phi'|_{[t_j, t_{j+1}]}$. Por indução isso demonstra a unicidade. \square

TEOREMA 4.2.4. *A função (90) é uma fibração. Explicitamente, sejam X um espaço topológico e $f: X \times I \rightarrow S^1$ uma função contínua. Seja $F_0: X \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $\exp \circ F_0 = f|_{X \times \{0\}}$. Então existe uma única função contínua $F: X \times I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F|_{X \times \{0\}} = F_0$ e $\exp \circ F = f$.*

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos a cobertura (91) de S^1 . Seja $(x, t) \in X \times I$ e seja $f(x, t) \in U_i$, sendo $i \in \{0, 1\}$. Como f é contínua, $f^{-1}(U_i)$ é aberto, logo existe uma vizinhança $V_{x,t} \times A_{x,t} \subset X \times I$ de (x, t) tal que $f(V_{x,t} \times A_{x,t}) \subset U_i$. Fixando x e variando t , obtemos uma cobertura $\{A_{x,t}\}_{t \in I}$ de I . Aplicando o lema 4.2.2, seja $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$ uma partição de I tal que $[t_j, t_{j+1}] \subset A_{x, \varphi(t_j)}$. Seja $V_x := V_{x, \varphi(0)} \cap \dots \cap V_{x, \varphi(t_n)}$. Obtemos que $f(V_x \times [t_j, t_{j+1}]) \subset U_i$, onde i depende de x e j e a partição $\{t_0, \dots, t_n\}$ depende de x .

Por indução, assumamos que exista um levantamento F_x de f a \mathbb{R} no domínio $V_x \times [0, t_j]$, sendo $0 \leq j < n$. No caso inicial $j = 0$, trata-se de $F_0|_{V_x}$. Mostremos que F_x pode ser estendida a $W_x \times [0, t_{j+1}]$, sendo $W_x \subset V_x$ uma vizinhança de x . De fato, como $f(V_x \times \{t_j\}) \subset f(V_x \times [t_j, t_{j+1}]) \subset U_i$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $F_x(x, t_j) \in J_i^k$. Seja $W_x := V_x \cap (F_x|_{V_x \times \{t_j\}})^{-1}(J_i^k)$. Podemos definir F_x em $W_x \times [t_j, t_{j+1}]$ compondo f com $\exp^{-1}: U_i \rightarrow J_i^k$. Obtemos uma função contínua, pois $\{W_x \times [0, t_j], W_x \times [t_j, t_{j+1}]\}$ é uma cobertura fechada finita de $W_x \times [0, t_{j+1}]$.

Isso prova que para qualquer ponto $x \in X$ existem uma vizinhança W_x de x (obtida restringindo n vezes V_x) e um levantamento F_x de f em $W_x \times I$. Pelo lema 4.2.3, o levantamento é único restrito a $\{y\} \times I$ para todo $y \in X$, portanto as funções F_x e $F_{x'}$ têm que coincidir na interseção $(W_x \cap W_{x'}) \times I$, logo a família $\{F_x\}_{x \in X}$ se cola a um levantamento global $F: X \times I \rightarrow \mathbb{R}$ de f . Este levantamento é necessariamente

contínuo, pois o é na vizinhança $W_x \times I$ de cada ponto (x, t) . Enfim, pelo lema 4.2.3, F é único em $\{x\} \times I$ para todo $x \in X$, logo é único globalmente. \square

4.2.2. Cálculo do grupo fundamental. Agora temos as ferramentas necessárias para calcular o grupo fundamental do círculo. De fato, seja $\varphi: I \rightarrow S^1$ um caminho fechado tal que $\varphi(0) = \varphi(1) = 1$, ou seja, um elemento de $\Omega_1(S^1)$. Pelo lema precedente, com $X = \{*\}$, existe um único levantamento $\Phi: I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Phi(0) = 0$. Sendo $\exp(\Phi(1)) = 1$, necessariamente $\Phi(1) \in \mathbb{Z}$. Então fica bem definida a função:

$$(92) \quad \begin{aligned} \psi: \Omega_1(S^1) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ \varphi &\mapsto \Phi(1). \end{aligned}$$

Seja $h: I \times I \rightarrow S^1$ uma homotopia entre $\varphi_0, \varphi_1 \in \Omega_1(S^1)$ (relativa a ∂I por definição). Por coerência com o enunciado do lema 4.2.4, consideramos a primeira variável de $h(u, t)$ como a variável u da homotopia e a segunda como a variável t dos caminhos. Pelo lema 4.2.4, com $X = I$, existe um único levantamento $H: I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ de h tal que $H|_{I \times \{0\}} = 0$. Pela unicidade do levantamento temos que $H|_{\{0\} \times I} = \Phi_0$ e $H|_{\{1\} \times I} = \Phi_1$. Sendo $\exp \circ H|_{I \times \{1\}} = h|_{I \times \{1\}} = 1$, necessariamente a imagem de $H|_{I \times \{1\}}$ está contida em \mathbb{Z} , portanto, sendo I conexo e \mathbb{Z} discreto, é um ponto. Em particular, $\Phi_0(1) = \Phi_1(1)$. Isso prova que a função (92) não depende da classe de homotopia do caminho, portanto fica bem definida a função

$$(93) \quad \begin{aligned} \Psi: \pi_1(S^1, 1) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ [\varphi] &\mapsto \Phi(1). \end{aligned}$$

Só falta provar que Ψ é um isomorfismo de grupos.

- É um homomorfismo de grupos. De fato, sejam $\varphi_0, \varphi_1 \in \Omega_1(S^1)$ e consideremos $\varphi_1 * \varphi_0$. Seja Φ_0 o levantamento de φ_0 e sejam $n = \Phi_0(1) = \Psi[\varphi_0]$ e $m = \Phi_1(1) = \Psi[\varphi_1]$. Existem um único levantamento Φ_1 de φ_1 tal que $\Phi_1(0) = 0$ e um único levantamento Φ'_1 ainda de φ_1 tal que $\Phi'_1(0) = n$. Seja $T_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a translação $T_n(x) = x + n$. Como $\exp \circ T_n = \exp$ e $T_n(0) = n$, vemos que $T_n \circ \Phi_1$ é um levantamento de φ_1 tal que $T_n \circ \Phi_1(0) = n$, logo $T_n \circ \Phi_1 = \Phi'_1$. Seja agora Φ o levantamento de $\varphi_1 * \varphi_0$ tal que $\Phi(0) = 0$. Pela unicidade, necessariamente $\Phi = \Phi'_1 * \Phi_0$, portanto $\Phi(1) = \Phi'(1) = T_n \circ \Phi_1(1) = n + m$, isto é, $\Psi[\varphi_1 * \varphi_0] = \Psi[\varphi_0] + \Psi[\varphi_1]$.
- É injetor. De fato, seja $\Psi[\varphi] = 0$. Então o levantamento Φ de φ tal que $\Phi(0) = 0$ satisfaz $\Phi(1) = 0$, portanto Φ é um caminho fechado em \mathbb{R} . Seja $H: I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ a função $H(t, u) = (1 - u)\Phi(t)$: é claro que H é uma homotopia entre Φ e o caminho trivial. Por isso, $h = \exp \circ H$ é uma homotopia entre φ e o caminho trivial, logo $[\varphi] = 0$.
- É sobrejetor. De fato, seja $n \in \mathbb{Z}$ e seja $\Phi: I \rightarrow \mathbb{R}$ a função $\Phi(t) = nt$. É claro que $\varphi = \exp \circ \Phi$ é um caminho fechado em S^1 tal que, por construção, $\Psi[\varphi] = n$.

Como isso provamos que $\pi_1(S^1, 1) \simeq \mathbb{Z}$. Como S^1 é conexo por caminhos podemos escrever $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$. Isso mostra em particular que S^1 é um exemplo de espaço não simplesmente conexo.

4.2.3. Algumas aplicações relevantes. Uma primeira aplicação significativa do isomorfismo (93) é a seguinte.

TEOREMA 4.2.5. $S^1 = \partial D^2$ não é retrato de D^2 .

DEMONSTRAÇÃO. Seja por absurdo $r: D^2 \rightarrow S^1$ uma retração e seja $i: S^1 \hookrightarrow D^2$ o mergulho. Marcamos um ponto $x_0 \in S^1$ qualquer, obtendo os morfismos $r: (D^2, x_0) \rightarrow (S^1, x_0)$ e $i: (S^1, x_0) \hookrightarrow (D^2, x_0)$ em Top_+ . Como $r \circ i = \text{id}_{S^1}$, a respeito dos grupos fundamentais temos que $r_* \circ i_* = \text{id}_{\mathbb{Z}}$, logo $i_*: \mathbb{Z} \rightarrow 0$ é injetor, o que é impossível (equivalentemente, $r_*: 0 \rightarrow \mathbb{Z}$ é sobrejetor, o que é impossível). \square

OBSERVAÇÃO 4.2.6. O teorema 4.2.5 é uma aplicação direta do lema 2.2.6: se $i: (S^1, x_0) \hookrightarrow (D^2, x_0)$ fosse invertível à esquerda, então $i_*: \pi_1(S^1, x_0) \hookrightarrow \pi_1(D^2, x_0)$ o seria também, em particular seria injetor, o que é impossível. Isso não vale para um mergulho genérico $i: A \hookrightarrow X$, pois, como já vimos, o fato de ser um mergulho não é suficiente para ser invertível à esquerda. Por isso, um mergulho pode induzir um morfismo não injetor entre os grupos fundamentais: por exemplo, os mergulhos $S^1 \hookrightarrow D^2$ (como bordo) e $S^1 \hookrightarrow S^2$ (como equador) não induzem morfismos injetores. O motivo é claro: dado um caminho fechado $\varphi: I \rightarrow A$, pode acontecer que não existe nenhuma homotopia entre φ e o caminho trivial em A , mas que exista em X saindo de A . Neste caso, φ representa uma classe não trivial no grupo fundamental de A , cuja imagem em X é trivial. Analogamente, uma função contínua sobrejetora pode não ser invertível à direita, logo pode induzir um morfismo não sobrejetor entre os grupos fundamentais: por exemplo, pode-se considerar a função exponencial $\exp: \mathbb{R} \rightarrow S^1$. Para ser invertível à direita, uma função tem que ser uma retração a menos de homeomorfismo. \diamond

OBSERVAÇÃO 4.2.7. Seria fácil mudar levemente a demonstração do teorema 4.2.5, para provar que nem existe uma retração fraca $r: D^2 \rightarrow S^1$. Todavia, como o par (D^2, S^1) é uma cofibração, isso segue diretamente do teorema 4.2.5. \diamond

Parece óbvio que \mathbb{R}^n não seja homeomorfo a \mathbb{R}^m para $n \neq m$, mas é bem complicado demonstrá-lo usando somente a linguagem da topologia geral. Pode-se provar facilmente que \mathbb{R} não é homeomorfo a \mathbb{R}^n para $n > 1$: de fato, por absurdo, seja $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ um homeomorfismo. Então, tirando a origem, obtemos um homeomorfismo $\varphi|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{\varphi(0)\}$, o que é absurdo, pois $\mathbb{R}^n \setminus \{\varphi(0)\}$ é conexo enquanto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ não o é. Graças ao grupo fundamental podemos demonstrar o mesmo resultado em relação a \mathbb{R}^2 . Na seguinte demonstração usaremos o fato que $\pi_1(S^n) = 0$ para $n \geq 2$, que será provado rigorosamente em seguida.

TEOREMA 4.2.8. \mathbb{R}^2 não é homeomorfo a \mathbb{R}^n para $n > 2$.

DEMONSTRAÇÃO. Por absurdo, seja $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ um homeomorfismo. Então, tirando a origem, obtemos um homeomorfismo $\varphi|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{\varphi(0)\}$. Isso é absurdo, pois $\mathbb{R}^n \setminus \{\varphi(0)\}$ é simplesmente conexo, dado que tem o mesmo

tipo de homotopia de S^{n-1} e $n - 1 \geq 2$, enquanto $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ não o é, dado que tem o mesmo tipo de homotopia de S^1 . \square

Vamos agora demonstrar o teorema do ponto fixo de Brouwer, que, do ponto de vista histórico, constitui uma das primeiras aplicações significativas da topologia algébrica. Originalmente foi provado usando a definição de grau de uma função entre esferas, onde o grau era definido de modo puramente geométrico, sem utilizar ferramentas algébricas. Todavia, graças à noção de grupo fundamental, podemos mostrar uma prova bem mais breve e elegante.

TEOREMA 4.2.9 (Teorema do ponto fixo de Brouwer). *Uma função contínua $f: D^2 \rightarrow D^2$ admite um ponto fixo, isto é, existe $x \in D^2$ tal que $f(x) = x$.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos por absurdo que não exista um ponto fixo. Neste caso é possível definir a seguinte função $r: D^2 \rightarrow S^1$. Dado $x \in D^2$, seja $R \subset \mathbb{R}^2$ a reta que contém x e $f(x)$, a qual está bem definida, pois $x \neq f(x)$. Definimos $r(x)$ como o ponto y de interseção entre a reta R e $S^1 = \partial D^2$, de modo que x fique incluso entre $f(x)$ e $r(x)$. É claro por construção que r é contínua, mas vamos prová-lo rigorosamente. Esta função é definida (usando a soma em \mathbb{R}^2) por $r(x) = f(x) + t(x - f(x))$, onde $t > 0$ é tal que $\|r(x)\| = 1$, isto é, $\|tx + (1 - t)f(x)\|^2 = 1$. A condição $\|tx + (1 - t)f(x)\|^2 = 1$ se traduz em uma equação de segundo grau em t , cuja solução é contínua nos coeficientes (por causa da fórmula resolutive das equações de segundo grau), portanto r é uma função contínua em x . Se $x \in S^1$, é claro que $r(x) = x$, portanto r é uma retração de D^2 em S^1 , o que é absurdo pelo teorema 4.2.5. \square

Outra aplicação significativa é o teorema de Borsuk-Ulam, o qual afirma que, dada uma função contínua $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, existe pelos menos em um par de pontos antipodais $(x, -x)$ em S^2 tal que $f(x) = f(-x)$. Como lembrado em [1], isso implica por exemplo que, na superfície da Terra, em cada instante existem pelo menos dois pontos antipodais com a mesma temperatura e a mesma pressão, o que não parece óbvio a priori.

TEOREMA 4.2.10 (Borsuk-Ulam). *Seja $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ contínua. Então existe $x \in S^2$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos por absurdo que não exista $x \in S^2$ tal que $f(x) = f(-x)$. Então fica bem definida a função $g: S^2 \rightarrow S^1$, $x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$. Vamos considerar o caminho fechado $\varphi: I \rightarrow S^2$ definido pelo equador, ou seja $\varphi(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0)$, e a composição $\psi := g \circ \varphi: I \rightarrow S^1$. Como $g(-x) = -g(x)$, para $t \in [0, \frac{1}{2}]$ temos que $\psi(t + \frac{1}{2}) = -\psi(t)$. Seja $\tilde{\psi}: I \rightarrow \mathbb{R}$ o levantamento de ψ tal que $\tilde{\psi}(0) = 0$. Temos que:

$$(94) \quad \tilde{\psi}(t + \frac{1}{2}) = \tilde{\psi}(t) + \frac{2k+1}{2},$$

para $k \in \mathbb{Z}$. A priori k depende de t , mas, como pode-se verificar achando explicitamente $k(t)$ a partir de (94), a dependência é contínua, portanto k é constante. Ademais, aplicando duas vezes (94) obtemos $\tilde{\psi}(1) = \tilde{\psi}(\frac{1}{2}) + \frac{2k+1}{2} = \tilde{\psi}(0) + 2k + 1$,

portanto a imagem de $[\psi]$ através do isomorfismo (93) é $2k + 1$, logo não pode ser 0. Isso implica que ψ não é um caminho trivial, o que é absurdo, pois $[\psi] = g_*[\varphi]$ e φ é trivial em S^2 .³ \square

Através do grupo fundamental do círculo é também possível provar o teorema fundamental da álgebra, ou seja, um polinômio complexo não constante de uma variável tem uma raiz (v. [1, Theorem 1.8 p. 31]).

4.3. Grupo fundamental do produto de dois espaços

Por enquanto sabemos calcular o grupo fundamental de poucos espaços. O seguinte teorema ajuda em parte a estender os resultados obtidos, mostrando que o grupo fundamental de um produto cartesiano é o produto cartesiano dos grupos fundamentais dos fatores, quando os dois forem conexos por caminhos.

TEOREMA 4.3.1. *Sejam X e Y espaços conexos por caminhos. Então $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Pela propriedade fundamental do espaço produto, uma função contínua $\varphi: I \rightarrow X \times Y$ é equivalente a um par de funções contínuas $\varphi_1: I \rightarrow X$ e $\varphi_2: I \rightarrow Y$. Sendo o ponto marcado de $X \times Y$ igual ao produto dos pontos marcados, obtemos uma bijeção canônica $\Omega_{(x_0, y_0)}(X \times Y) \simeq \Omega_{x_0}(X) \times \Omega_{y_0}(Y)$. Também uma homotopia de caminhos é equivalente a um par de homotopias, portanto obtemos uma bijeção canônica (entre conjuntos) $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$. É fácil verificar que o caminho $\psi * \varphi$ corresponde, através desta bijeção, ao par $(\psi_1 * \varphi_1, \psi_2 * \varphi_2)$, portanto trata-se também de um morfismo de grupos. Isso prova que se trata de um isomorfismo $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$. \square

Assim podemos calcular por exemplo o grupo fundamental do toro $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$, obtendo $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Geometricamente, pensando no toro mergulhado em \mathbb{R}^3 de modo canônico, os dois geradores são um caminho fechado horizontal e um caminho fechado vertical passantes pelo ponto marcado. Mais em geral, o grupo fundamental de $\mathbb{T}^n = S^1 \times \dots \times S^1$ é $\mathbb{Z}^{\oplus n}$.

4.4. Teorema de Seifert-Van Kampen e aplicações

Mesmo com o teorema 4.3.1 sabemos calcular o grupo fundamental de poucos espaços. Vamos agora introduzir um teorema muito significativo, o qual permite calcular o grupo fundamental de um espaço “complicado”, a partir de uma cobertura aberta formada por subespaços mais “simples”, supondo de conhecer os grupos fundamentais dos elementos da cobertura e das interseções deles. Isso permite ampliar decididamente a família de espaços cujo grupo fundamental seja de algum modo conhecido. Para enunciar e demonstrar este teorema, precisamos da noção de produto amalgamado de grupos, introduzida na seção 0–3.7.2. Ademais, precisamos do seguinte lema, que é a versão do 4.2.2 em duas dimensões.

³O fato que φ seja trivial é consequência direta do fato que $\pi_1(S^2) = 0$, que provaremos em seguida. Todavia, pode-se facilmente imaginar que o equador de S^2 possa ser deformado a um ponto marcado qualquer (fixando o ponto), mexendo o caminho dentro de um hemisfério até contrai-lo.

LEMA 4.4.1. *Seja $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in \Lambda}$ uma cobertura aberta de $I^2 := I \times I$. É possível encontrar $n \in \mathbb{N}$, uma partição $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$ e uma função $\phi: \{0, \dots, n-1\} \times \{0, \dots, n-1\} \rightarrow \Lambda$ tais que $[t_j, t_{j+1}] \times [t_h, t_{h+1}] \subset A_{\phi(j,h)}$ para todos $j, h \in \{0, \dots, n-1\}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Para todo $(x, y) \in I^2$, existe $i \in \Lambda$ tal que $(x, y) \in A_i$. Sendo A_i aberto em I^2 , podemos achar um retângulo $R_{x,y} := [a_{x,y}, b_{x,y}] \times [c_{x,y}, d_{x,y}]$ tal que $0 \leq a_x < b_x \leq 1$, $0 \leq c_x < d_x \leq 1$ e, denotando por $R'_{x,y}$ o interior de $R_{x,y}$ em I^2 , vale $(x, y) \in R'_{x,y} \subset R_{x,y} \subset A_i$. A família $\{R'_{x,y}\}_{(x,y) \in I^2}$ é uma cobertura aberta de I^2 , logo, sendo I^2 compacto, existe uma subcobertura finita $\{R'_{x_0,y_0}, \dots, R'_{x_m,y_m}\}$. Seja $S = \{a_{x_0,y_0}, \dots, a_{x_m,y_m}, b_{x_0,y_0}, \dots, b_{x_m,y_m}, c_{x_0,y_0}, \dots, c_{x_m,y_m}, d_{x_0,y_0}, \dots, d_{x_m,y_m}\}$. Enfim, seja $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$ o conjunto S ordenado de modo estritamente crescente. Para $j, h \in \{0, \dots, n-1\}$, seja $(t_j, t_h) \in R'_{x_l,y_l}$, logo $t_j < b_{x_l,y_l}$ e $t_h < d_{x_l,y_l}$. Necessariamente $a_{x_l,y_l} \leq t_j$ e $t_{j+1} \leq b_{x_l,y_l}$, assim como $c_{x_l,y_l} \leq t_h$ e $t_{h+1} \leq d_{x_l,y_l}$, logo $[t_j, t_{j+1}] \times [t_h, t_{h+1}] \subset R_{x_l,y_l} \subset A_i$ para algum i . \square

4.4.1. Teorema de Seifert-Van Kampen. Consideremos os seguintes dados.

- (X, x_0) é um espaço topológico com ponto marcado e $X = \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$, onde cada A_{α} é aberto e $x_0 \in \bigcap_{\alpha} A_{\alpha}$.
- Os mergulhos $i_{\alpha}: (A_{\alpha}, x_0) \hookrightarrow (X, x_0)$ induzem os morfismos

$$(95) \quad (i_{\alpha})_*: \pi_1(A_{\alpha}, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0).$$

Pela propriedade universal do coproduto, estes morfismos se estendem de modo único ao morfismo

$$(96) \quad \begin{aligned} \xi: *_{\alpha} \pi_1(A_{\alpha}, x_0) &\rightarrow \pi_1(X, x_0) \\ [\varphi_1] \cdots [\varphi_n] &\mapsto [\varphi_n * \cdots * \varphi_1]. \end{aligned}$$

De fato, supondo que $[\varphi_i] \in \pi_1(A_{\alpha_i}, x_0)$ e aplicando a fórmula 0–(13), temos que $\xi([\varphi_1] \cdots [\varphi_n]) = (i_{\alpha_1})_*[\varphi_1] \cdots (i_{\alpha_n})_*[\varphi_n] = [\varphi_1] \cdots [\varphi_n] = [\varphi_n * \cdots * \varphi_1]$.

- Os mergulhos $i_{\alpha\beta}: (A_{\alpha\beta}, x_0) \hookrightarrow (A_{\alpha}, x_0)$ induzem os morfismos

$$(i_{\alpha\beta})_*: \pi_1(A_{\alpha\beta}, x_0) \rightarrow \pi_1(A_{\alpha}, x_0).$$

Como $i_{\alpha} \circ i_{\alpha\beta} = i_{\beta} \circ i_{\beta\alpha}$, pois os dois termos da igualdade coincidem com o mergulho de $A_{\alpha\beta}$ em X , temos que $(i_{\alpha})_* \circ (i_{\alpha\beta})_* = (i_{\beta})_* \circ (i_{\beta\alpha})_*$, logo, aplicando a fórmula 0–(15), fica definido o morfismo

$$(97) \quad \bar{\xi}: *_{\alpha} \pi_1(A_{\alpha}, x_0) / \{(i_{\alpha\beta})_*\} \rightarrow \pi_1(X, x_0).$$

OBSERVAÇÃO 4.4.2. Em particular, seja $j_{\alpha}: \pi_1(A_{\alpha}, x_0) \hookrightarrow *_{\beta} \pi_1(A_{\beta}, x_0)$ a inclusão natural e seja N o subgrupo normal de $*_{\alpha} \pi_1(A_{\alpha}, x_0)$ definido em 0–3.7.7, ou seja, o gerado pelos elementos da forma $(j_{\alpha} \circ \varphi_{\alpha\beta})[\varphi] \cdot (j_{\beta} \circ \varphi_{\beta\alpha})[\varphi]^{-1}$, sendo $[\varphi] \in \pi_1(A_{\alpha\beta}, x_0)$. Pela fórmula 0–(16) temos que $N \subset \text{Ker}(\xi)$ e $\bar{\xi}$ é o morfismo induzido por ξ quotientando o domínio por N . \diamond

TEOREMA 4.4.3 (Seifert-Van Kampen). *A partir dos dados precedentes, temos que:*

- (1) se cada interseção $A_{\alpha\beta}$ (em particular, para $\alpha = \beta$, cada aberto A_α) é conexa por caminhos, o morfismo (96) é sobrejetor, logo o morfismo (97) o é também;
- (2) se cada interseção tripla $A_{\alpha\beta\gamma}$ (em particular, cada interseção e cada aberto) é conexa por caminhos, o morfismo (97) é também injetor, logo é um isomorfismo.

DEMONSTRAÇÃO. (1) Seja $[\varphi] \in \pi_1(X, x_0)$. Como cada A_α é aberto em X , aplicando o lema 4.2.2 à cobertura $\{\varphi^{-1}(A_\alpha)\}$ de I , podemos escolher uma partição $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$ tal que $\varphi([t_i, t_{i+1}]) \subset A_{\alpha(i)}$. Reparametrizamos cada trecho $\varphi|_{[t_i, t_{i+1}]}$, obtendo um caminho $\varphi_i: I \rightarrow A_{\alpha(i)}$. Isso implica que $[\varphi] = [\varphi_{n-1} * \dots * \varphi_1]$. Como cada interseção $A_{\alpha(i-1)} \cap A_{\alpha(i)}$ é conexa por caminhos, podemos escolher um caminho ψ_i que une x_0 a $\varphi(t_i)$ em $A_{\alpha(i-1)} \cap A_{\alpha(i)}$. Obtemos a decomposição $[\varphi] = [(\varphi_{n-1} * \psi_{n-1}) * (\bar{\psi}_{n-1} * \varphi_{n-2} * \psi_{n-2}) * \dots * (\bar{\psi}_2 * \varphi_1 * \psi_1) * (\bar{\psi}_1 * \varphi_0)]$, sendo $[\bar{\psi}_{i+1} * \varphi_i * \psi_i] \in \pi_1(A_{\alpha(i)}, x_0)$. Logo $[\varphi] = \xi([\bar{\psi}_1 * \varphi_0][\bar{\psi}_2 * \varphi_1 * \psi_1] \dots [\bar{\psi}_{n-1} * \varphi_{n-2} * \psi_{n-2}][\varphi_{n-1} * \psi_{n-1}])$. Isso demonstra que o morfismo (96) é sobrejetor.

(2) Os morfismos (95) se colam a uma função $\xi_0: \sqcup_\alpha \pi_1(A_\alpha, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$. Pela propriedade universal do monoide livre, ξ_0 se estende de modo único ao morfismo de monoides

$$\tilde{\xi}: \langle \sqcup_\alpha \pi_1(A_\alpha, x_0) \rangle_m \rightarrow \pi_1(X, x_0).$$

Considerando a relação de equivalência gerada pelas condições (i), (ii) e (iii), introduzidas na seção 0–3.7.4, é fácil verificar que, se duas palavras em $\langle \sqcup_\alpha \pi_1(A_\alpha, x_0) \rangle_m$ forem equivalentes, então têm a mesma imagem através de $\tilde{\xi}$, portanto fica definido o morfismo de grupos (97).⁴ Agora devemos demonstrar que, se as interseções triplas forem conexas por caminhos, então vale a volta, isto é, se $\tilde{\xi}([\varphi_0] \dots [\varphi_n]) = \tilde{\xi}([\psi_0] \dots [\psi_m])$, então $[\varphi_0] \dots [\varphi_n] \sim_{(i),(ii),(iii)} [\psi_0] \dots [\psi_m]$ em $\langle \sqcup_\alpha \pi_1(A_\alpha, x_0) \rangle_m$. Isso demonstra que (97) é injetora, logo bijetora.

Suponhamos que $\tilde{\xi}([\varphi_0] \dots [\varphi_n]) = \tilde{\xi}([\psi_0] \dots [\psi_m])$, ou seja, suponhamos que exista uma homotopia de caminhos $\Phi: \varphi_n * \dots * \varphi_0 \sim \psi_m * \dots * \psi_0$ em X , sendo $\varphi_i \in \Omega_{x_0}(A_{\alpha(i)})$ e $\psi_j \in \Omega_{x_0}(A_{\alpha(j)})$. Aplicando o lema 4.4.1 à cobertura $\{\Phi^{-1}(A_\alpha)\}$ de $I \times I$, podemos escolher uma partição $0 = t_0 < \dots < t_k = 1$ de I tal que a imagem do retângulo $R_{ij} = [t_i, t_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]$ através de Φ fique contida em $A_{\alpha(i,j)}$. Ademais, podemos assumir que esta partição refine as partições de I correspondentes às decomposições $\varphi_n * \dots * \varphi_0$ e $\psi_m * \dots * \psi_0$. Por isso cada fator das duas composições fica dividido em sub-caminhos (não fechados em geral). Podemos deslocar levemente os segmentos verticais para que nenhum vértice fique contido em mais de 3 retângulos distintos (os vértices no bordo ficarão contidos em 2 retângulos e os demais em 3). Para isso devemos supor que a partição de I contenha pelo menos 3 elementos. Sejam R_1, R_2, \dots os retângulos R_{ij} ordenados a respeito de j e, quando j for o mesmo, a respeito de i . Seja γ_h o caminho em $I \times I$ que divide os retângulos R_1, \dots, R_h dos demais: em particular, a imagem de γ_0 é $I \times \{0\}$ e a de γ_{k^2} é $I \times \{1\}$. Ademais, $\Phi \circ \gamma_h \in \Omega_{x_0}(X)$, pois $\Phi(\{0\} \times I) = \Phi(\{1\} \times I) = \{x_0\}$. Aplicamos as seguintes operações aos caminhos $\Phi \circ \gamma_h$:

⁴Quocientando somente por (i) e (ii), fica definido o morfismo de grupos (96).

- para cada vértice v , interno a $I \times I$, escolhemos um caminho ψ_v que une x_0 a $\Phi(v)$ na interseção $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ dos abertos correspondentes aos três retângulos que contém v . Isso é possível pois a interseção é conexa por caminhos por hipótese. Desta maneira, inserindo $\psi_v * \bar{\psi}_v$ para cada vértice, o caminho $\Phi \circ \gamma_k$ se torna fatorado em sub-caminhos fechados, cada um com imagem contida no aberto A_α associado ao retângulo correspondente. Obtemos caminhos Γ_h em X , com a fatoração determinada pelos lados dos retângulos R_{ij} percorridos.
- Para os vértices acrescentados à partição inicial de $I \times \{0\}$, determinada pela fatoração $\varphi_n * \cdots * \varphi_0$, internos ao caminho φ_i (os quais não são mandados em x_0 por φ_i), podemos escolher o caminho ψ_v na interseção dos abertos correspondentes aos dois retângulos que contém v e ao aberto $A_{\alpha(i)}$ que contém a imagem de φ_i ; dessa maneira cada fator φ_i se torna fatorado em um produto de caminhos fechados contidos na mesma componente $A_{\alpha(i)}$, portanto obtemos uma fatoração $[\varphi'_0] \cdots [\varphi'_k]$ equivalente à $[\varphi_0] \cdots [\varphi_n]$ através de (i) e (ii). O mesmo vale em relação à fatoração $\psi_m * \cdots * \psi_0$, obtendo a fatoração, $[\psi'_0] \cdots [\psi'_k]$, equivalente à $[\psi_0] \cdots [\psi_m]$.

Vamos provar que $[\varphi'_0] \cdots [\varphi'_k] \sim [\psi'_0] \cdots [\psi'_k]$, sendo $[\varphi'_0] \cdots [\varphi'_k] = \Gamma_0$ e $[\psi'_0] \cdots [\psi'_k] = \Gamma_{k^2}$. Fixadas as fatorações Γ_h e Γ_{h+1} , pensamos nos sub-caminhos correspondentes aos lados de R_{h+1} como pertencentes ao mesmo aberto $A_{\alpha(h+1)}$ para as duas. Obtemos duas fatorações Γ'_h e Γ'_{h+1} , equivalentes respetivamente a Γ_h e Γ_{h+1} através de (iii). Enfim, a fatoração Γ'_{h+1} se obtém de Γ'_h atravessando R_{h+1} , o que corresponde à substituição de um caminho por outro homotópico dentro do mesmo aberto A_α ; a fatoração não muda, pois cada componente é uma classe de homotopia, portanto $\Gamma'_h = \Gamma'_{h+1}$, logo $\Gamma_h \sim \Gamma_{h+1}$. Afinal, obtemos que $[\varphi'_0] \cdots [\varphi'_k] = \Gamma_0 \sim \cdots \sim \Gamma_{k^2} = [\psi'_0] \cdots [\psi'_k]$. \square

Naturalmente o segundo enunciado do teorema é o mais útil, pois permite descrever o grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$, a menos de isomorfismo, a partir dos grupos fundamentais dos abertos A_α e das interseções $A_\alpha \cap A_\beta$.

EXEMPLO 4.4.4. $\pi_1(S^1 \vee S^1) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Isso significa que um elemento genérico é dado por $a^{n_1} b^{m_1} \cdots a^{n_k} b^{m_k}$ para $n_i, m_i \in \mathbb{Z}$, sendo a e b os geradores correspondentes às duas cópias de S^1 (os termos a^{n_1} e b^{m_k} podem faltar). Para provar isso, vamos considerar dois abertos $A, B \subset S^1 \vee S^1$ formados por uma cópia de S^1 e uma vizinhança contrátil do ponto marcado na outra cópia. É claro que $A \cap B$ é conexo por caminhos e que não há triplas interseções, portanto as hipóteses do teorema são satisfeitas. Como A e B são homotopicamente equivalentes a S^1 , temos que $\pi_1(A) \simeq \langle a \rangle$ e $\pi_1(B) \simeq \langle b \rangle$. Enfim $\pi_1(A \cap B) = \langle \emptyset \rangle$. Portanto, pelo teorema de Seifert-Van Kampen e pelo isomorfismo (18), temos que $\pi_1(X) \simeq \langle a, b \rangle \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. \diamond

EXEMPLO 4.4.5. $\pi_1(\bigvee_\alpha S^1) = *_\alpha \mathbb{Z}$, ou seja o grupo fundamental da união a um ponto de uma família de círculos é o produto livre de uma quantidade correspondente de cópias de \mathbb{Z} . A prova é parecida com a do exemplo precedente. \diamond

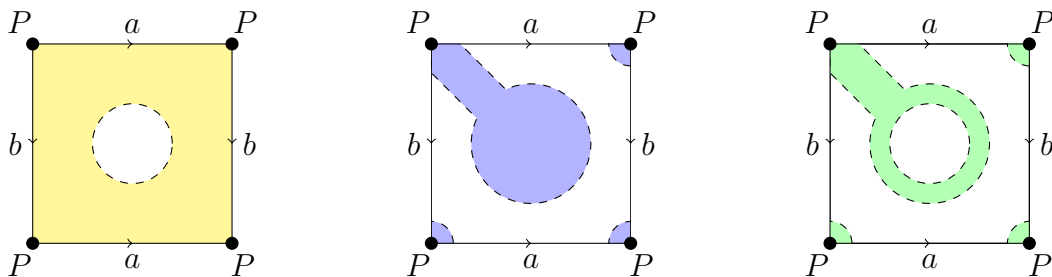
EXEMPLO 4.4.6. $\pi_1(S^n) = 0$ para $n \geq 2$. De fato, escolhemos um ponto do equador como ponto marcado e duas vizinhanças A e B dos hemisférios norte e sul, tais que os hemisférios sejam retrato por deformação de A e B . Neste caso $\pi_1(A) = \pi_1(B) = 0$, pois

os hemisférios são contráteis, portanto $\pi_1(S^n) = 0$ pelo teorema de Seifert-Van Kampen, independentemente de $\pi_1(A \cap B)$. De fato, pelo isomorfismo (18), os geradores de $\pi_1(S^n)$ se obtém unindo os geradores de $\pi_1(A)$ e $\pi_1(B)$, portanto $\pi_1(S^n)$ é gerado pelo conjunto vazio. Isso implica que as relações sejam também vazias e que o grupo seja trivial. \diamond

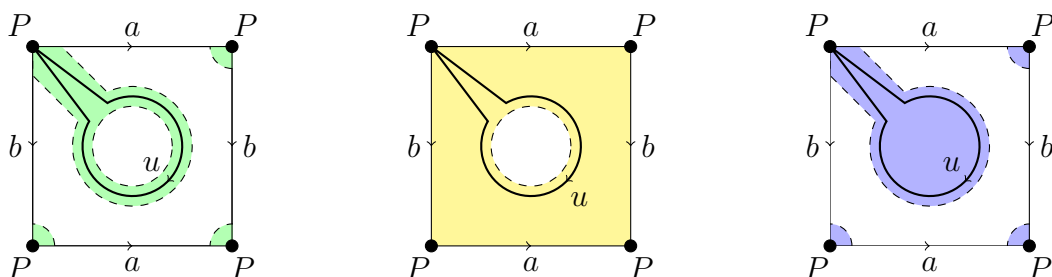
EXEMPLO 4.4.7. Considerando a união a um ponto de várias esferas de dimensões diferentes, só os círculos contribuem. Por exemplo, $\pi_1(S^1 \vee S^2) \simeq \mathbb{Z}$, $\pi_1(S^1 \vee S^1 \vee S^2 \vee S^3) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ e assim em diante. A prova é parecida com a precedente, considerando que $\pi_1(S^n) = 0$ para $n \geq 2$. \diamond

OBSERVAÇÃO 4.4.8. O fato que, por hipótese, $x_0 \in \bigcap_{\alpha} A_{\alpha}$, não concerne somente a escolha correta do ponto marcado, e sim impõe que a interseção $\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}$ não seja vazia. Por exemplo, \diamond

4.4.2. Grupo fundamental das superfícies topológicas. Podemos mostrar uma apresentação livre do grupo fundamental de cada superfície topológica compacta, graças ao teorema de Seifert-Van Kampen. Começemos pelo caso sem bordo, partindo do toro. Temos um retângulo com lados identificados na forma $aba^{-1}b^{-1}$. Podemos considerar a seguinte cobertura de dois abertos e a interseção correspondente.



O primeiro aberto é uma vizinhança A do bordo do retângulo, que se retrai por deformação no bordo mesmo; o segundo aberto B é uma bola aberta interna ao retângulo, à qual foi acrescentada uma vizinhança de P , de modo que B fique contrátil; enfim, $A \cap B$ é homotopicamente equivalente a S^1 . Escolhemos P como ponto marcado. Como A se retrai por deformação no bordo, temos que $A \simeq a \vee b \simeq S^1 \vee S^1$, logo $\pi_1(A, P) \simeq \langle a, b \rangle \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Claramente $\pi_1(B, P) \simeq 0$ e $\pi_1(A \cap B) \simeq \langle u \rangle \simeq \mathbb{Z}$, sendo u o seguinte gerador:



As hipóteses do teorema são verificadas, portanto $\pi_1(\mathbb{T}^2, P)$ é isomorfo ao produto amalgamado entre $\pi_1(A, P)$ e $\pi_1(B, P)$. Vimos que:

$$\pi_1(A, P) \simeq \langle a, b \mid \emptyset \rangle \quad \pi_1(B, P) \simeq \langle \emptyset \mid \emptyset \rangle \quad \pi_1(A \cap B, P) \simeq \langle u \mid \emptyset \rangle.$$

A união das relações de $\pi_1(A, P)$ e $\pi_1(B, P)$ é o conjunto vazio, portanto só devemos impor que as duas imagens de u em $\pi_1(A, P)$ e em $\pi_1(B, P)$ fiquem identificadas. Sejam $i_{AB}: A \cap B \hookrightarrow A$ e $i_{BA}: A \cap B \hookrightarrow B$ as duas inclusões. Obviamente $(i_{BA})_*(u) = 0$, enquanto $(i_{AB})_*(u) = aba^{-1}b^{-1}$, pois, em A , o caminho u é equivalente a uma volta completa do bordo. Por isso, no produto amalgamado, $aba^{-1}b^{-1} = 1$. Afinal obtemos:

$$\pi_1(\mathbb{T}^2) \simeq \langle a, b | aba^{-1}b^{-1} \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Já conhecíamos este resultado graças ao teorema 4.3.1, mas esta técnica pode ser aplicada a qualquer polígono, portanto a qualquer superfície compacta, conforme a classificação enunciada pelo teorema 3.2.6. Em particular:

- $\pi_1(\Sigma_g) \simeq \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g | a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle$;
- $\pi_1(\Sigma_g \# \mathbb{R}P^2) \simeq \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, c | a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} c^2 \rangle$;
- $\pi_1(\Sigma_g \# K) \simeq \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, c, d | a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} c d c^{-1} d \rangle$.

Dois grupos quaisquer entre estes não são isomorfos. De fato, consideremos os abelianizados deles. Lembramos que o abelianizado de um grupo é o quociente pelo subgrupo normal gerado pelos comutadores, ou seja, pelos elementos da forma $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$. Em uma apresentação livre, é suficiente acrescentar às relações os comutadores dos geradores. Nos grupos fundamentais que consideramos, é claro que, na primeira família, a única relação se torna trivial, portanto o abelianizado de $\pi_1(\Sigma_g)$ é \mathbb{Z}^{2g} . Na segunda família a relação se torna $c^2 = 1$, portanto o abelianizado de $\pi_1(\Sigma_g \# \mathbb{R}P^2)$ é $\mathbb{Z}^{2g} \oplus \mathbb{Z}_2$. Na terceira família a relação se torna $d^2 = 1$, portanto o abelianizado de $\pi_1(\Sigma_g \# K)$ é $\mathbb{Z}^{2g+1} \oplus \mathbb{Z}_2$. É claro que, se dois grupos fossem isomorfos, então os abelianizados correspondentes o seriam também, portanto duas superfícies não homeomorfas têm grupos fundamentais não isomorfos. Isso implica que a classificação das superfícies que estamos considerando é também a classificação a menos de equivalência homotópica.

OBSERVAÇÕES 4.4.9. Observamos os seguintes fatos em relação aos grupos fundamentais das superfícies.

- No grupo $\{\Sigma_g \# \mathbb{R}P^2\}$, para $g = 0$, obtemos em particular $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \simeq \langle c | c^2 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$. Observando o polígono que representa $\mathbb{R}P^2$ deduzimos que o ciclo não trivial é representado por um semicírculo no bordo de D^2 , que se torna um caminho fechado em $\mathbb{R}P^2$. Equivalentemente, podemos considerar um caminho no disco que une dois pontos antipodais do bordo (portanto o mesmo ponto de $\mathbb{R}P^2$) passando pelo interior do disco. Por exemplo, um diâmetro do disco representa um caminho não trivial. O mesmo caminho percorrido duas vezes se torna trivial.
- No grupo $\{\Sigma_g\}$, para $g = 0$ obtemos $\pi_1(S^2) = 1$ como já sabíamos. Observando o polígono que representa a esfera, já destacamos que os dois vértices não são identificados, portanto os grupos fundamentais dos abertos A e B são ambos triviais (a borda, com dois lados identificados na mesma direção, se torna um intervalo, portanto A é contrátil).

- A superfície $\Sigma_g \# \mathbb{R}\mathbb{P}^2$ é homeomorfa a P_{2g+1} , portanto o grupo fundamental pode também ser descrito na forma $\pi_1(P_{2g+1}) \simeq \langle a_1, \dots, a_{2g+1} \mid a_1^2 \cdots a_{2g+1}^2 \rangle$. Este grupo é isomorfo ao precedente, mesmo não sendo evidente confrontando as apresentações livres. A prova do homeomorfismo entre $\Sigma_g \# \mathbb{R}\mathbb{P}^2$ e P_{2g+1} pode ser adaptada para mostrar algebricamente o isomorfismo entre os dois grupos. Da mesma maneira, $\Sigma_g \# K$ é homeomorfa a P_{2g+2} , portanto o grupo fundamental pode também ser descrito por $\pi_1(P_{2g+2}) \simeq \langle a_1, \dots, a_{2g+2} \mid a_1^2 \cdots a_{2g+2}^2 \rangle$. \diamond

Enfim, o grupo fundamental das superfícies com bordo *não vazio* pode ser calculado imediatamente a partir da classificação (68) e do exemplo 4.4.5. Obtemos que, para $g \geq 0$ and $k \geq 1$:

$$(98) \quad \begin{aligned} \pi_1(\Sigma_{g,k}) &\simeq \mathbb{Z}^{*(2g+k-1)} & \pi_1(\Sigma_{g,k} \# \mathbb{R}\mathbb{P}^2) &\simeq \mathbb{Z}^{*(2g+k)} \\ \pi_1(\Sigma_{g,k} \# K) &\simeq \mathbb{Z}^{*(2g+k+1)}. \end{aligned}$$

4.4.3. Problema inverso. Aplicando o teorema de Seifert-Van Kampen podemos responder à seguinte pergunta: dado um grupo G genérico, existe um espaço topológico X (conexo por caminhos) tal que $\pi_1(X) \simeq G$? A resposta é positiva. Começemos por um grupo livre $G \simeq \langle A \rangle$. Neste caso é suficiente considerar a união a um ponto de uma cópia de S^1 para cada gerador, ou seja $X := \bigvee_{\alpha \in A} S^1$. Seja agora G genérico e escolhamos uma apresentação livre $G \simeq \langle A \mid R \rangle$. Partamos de $X' := \bigvee_{\alpha \in A} S^1$. Para cada sequência $a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n} \in R$, consideramos um disco D com a borda dividida em $k_1 + \cdots + k_n$ segmentos e identificamos os lados na forma $a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n}$. Agora escolhemos uma direção para cada cópia de S^1 em X' e consideramos a união disjunta entre X' e D , quocientada pela relação que identifica cada lado de ∂D com a cópia correspondente em X' , percorrida na direção escolhida se o expoente é positivo ou na direção oposta se é negativo. O grupo fundamental do espaço X assim obtido é isomorfo a G . De fato, aplicamos o teorema de Seifer-Van Kampen à seguinte cobertura: um aberto A é X' unido a uma vizinhança contrátil de ∂D em cada disco. Os demais abertos são abertos contráteis contidos no interior de cada disco, cuja interseção com A é homotopicamente equivalente a S^1 . Desta maneira os abertos e as interseções são conexos por caminhos, enquanto não há triplas interseções. Pelo teorema, temos um gerador para cada cópia de S^1 e as relações que tornam triviais as bordas dos discos, logo o grupo obtido é isomorfo a G .

4.5. Recobrimentos

Vamos agora estudar a noção de recobrimento. Este conceito, mesmo se não foi definido explicitamente, já foi introduzido para calcular o grupo fundamental do círculo, pois a função $\exp: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ é um recobrimento. De fato, a seguinte definição generaliza a propriedade enunciada no lema 4.2.1.

DEFINIÇÃO 4.5.1. Seja X um espaço topológico. Uma função contínua sobrejetora $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$, sendo \tilde{X} outro espaço topológico, é dita *recobrimento* de X se

existe uma cobertura aberta $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de X tal que $\pi^{-1}(U_\alpha) = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \tilde{U}_\alpha^\lambda$ (união *disjunta*), onde \tilde{U}_α^λ é aberto em \tilde{X} e $\pi|_{\tilde{U}_\alpha^\lambda}: \tilde{U}_\alpha^\lambda \rightarrow U_\alpha$ é um homeomorfismo para cada $\lambda \in \Lambda$ e $\alpha \in I$. Chamamos:

- X de *espaço base* do recobrimento π ;
- \tilde{X} de *espaço total* do recobrimento π ;
- \mathfrak{U} de *cobertura associada* ao recobrimento π . ◇

Às vezes se diz que \tilde{X} é um recobrimento, subentendendo a projeção π , mas o mesmo espaço \tilde{X} pode ser o espaço total de vários recobrimentos de X através de projeções diferentes (e *não equivalentes* no sentido que precisaremos). Observamos que várias coberturas de X podem ser associadas ao mesmo recobrimento; o fato significativo é que exista pelo menos uma.

EXEMPLO 4.5.2. O lema 4.2.1 demonstra que $\exp: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ é um recobrimento de S^1 , sendo (91) uma cobertura de S^1 associada a \exp . Outros recobrimentos de S^1 são definidos por $p_n: S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n$, sendo $n \in \mathbb{N}^*$. A cobertura (91) de S^1 é associada também a todo recobrimento p_n . A imagem inversa de U_0 e U_1 através de p_n é formada por n abertos, enquanto, no caso de \exp , é formada por uma família infinita enumerável de abertos. Para $n \neq m$, mostraremos que p_n e p_m são recobrimentos *não equivalentes* de S^1 , mesmo se o espaço total $\tilde{X} = S^1$ é o mesmo. Observamos que, para $n = 1$, obtemos a identidade de S^1 , a qual é um recobrimento; nesse caso a cobertura $\mathfrak{V} = \{S^1\}$ é associada a p_1 . ◇

EXEMPLO 4.5.3. A identidade $\text{id}_X: X \rightarrow X$ é um recobrimento para qualquer espaço X ; uma cobertura associada a id_X é $\{X\}$. Mais em geral, seja Y um espaço com a topologia discreta. A projeção $\pi_X: X \times Y \rightarrow X$ é um recobrimento, sendo $\{X\}$ uma cobertura associada a π_X . ◇

EXEMPLO 4.5.4. Seja $\tilde{X} = S^2$ a esfera e seja $X = \mathbb{RP}^2$ o plano projetivo, definido por $\mathbb{RP}^2 := S^2 / \sim$, sendo \sim a identificação de pontos antipodais. A projeção ao quociente $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ é um recobrimento. De fato, para todo $[x] \in \mathbb{RP}^2$, considerando x como polo norte e $-x$ como polo sul, podemos achar uma vizinhança aberta U de x contida no hemisfério norte aberto (pode ser o hemisfério aberto mesmo). Seja $-U = \{-y : y \in U\}$. Dado que U e $-U$ contêm um representante para cada classe de equivalência, as projeções $\pi|_U: U \rightarrow \pi(U)$ e $\pi|_{-U}: -U \rightarrow \pi(U)$ são homeomorfismos, sendo $\pi(U)$ uma vizinhança aberta de $[x]$. Ademais, $\pi^{-1}(U) = U \sqcup -U$. Aplicando esta construção a cada ponto $[x] \in \mathbb{RP}^2$, obtemos uma cobertura associada a π , logo π é um recobrimento. ◇

4.5.1. Fibras e número de folhas. Observamos que, nos exemplos precedentes, a imagem inversa de um ponto $x \in X$, em relação a π , contém um número de elementos fixado, não dependente do ponto x escolhido. Ademais, essa imagem inversa é formada por um subespaço de \tilde{X} dotado da topologia discreta. Vamos analisar estes fatos em detalhe.

DEFINIÇÃO 4.5.5. Sejam $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ um recobrimento e $x \in X$. O espaço $\pi^{-1}(x)$ é dito *fibra* de π em x . ◇

Às vezes a fibra em x é denotada por \tilde{X}_x , subentendendo π .

LEMA 4.5.6. *Seja $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ um recobrimento. Para todo $x \in X$, a fibra $\pi^{-1}(x)$ é dotada da topologia discreta. Ademais, a cardinalidade de $\pi^{-1}(x)$ é uma função localmente constante em x , portanto é constante nas componentes conexas de X .*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ um recobrimento de X associado a π . Fixemos um ponto $x \in X$ e seja $x \in U_\alpha$. Por definição temos que $\pi^{-1}(U_\alpha) = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \tilde{U}_\alpha^\lambda$, sendo \tilde{U}_α^λ aberto em \tilde{X} . Como $\pi|_{\tilde{U}_\alpha^\lambda}: \tilde{U}_\alpha^\lambda \rightarrow U_\alpha$ é um homeomorfismo, $\pi^{-1}(x)$ contém um ponto para cada aberto \tilde{U}_α^λ , logo todo ponto de $\pi^{-1}(x)$ é aberto na topologia induzida por \tilde{X} . Isso prova que a topologia de $\pi^{-1}(x)$ é a discreta. Enfim, para qualquer ponto $y \in U_\alpha$ temos que $\pi^{-1}(y)$ contém um ponto para cada aberto \tilde{U}_α^λ , logo $|\pi^{-1}(y)| = |\pi^{-1}(x)|$ para todo $y \in U_\alpha$. Isso prova que a cardinalidade de uma fibra é constante em U_α , logo é localmente constante em X . \square

Graças ao lema precedente podemos dar a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 4.5.7. Seja $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ um recobrimento, sendo X conexo. O *grau* ou *número de folhas* de π é a cardinalidade da fibra $\pi^{-1}(x)$, para qualquer $x \in X$. O denotamos por $\deg(\pi)$. \diamond

EXEMPLO 4.5.8. No exemplo 4.5.2 temos que $\deg(p_n) = n$ e $\deg(\exp) = \aleph_0$. No exemplo 4.5.3 temos que $\deg(\text{id}_X) = 1$ e $\deg(\pi_X) = |Y|$. No exemplo 4.5.4 temos que $\deg(\pi) = 2$. \diamond

4.5.2. Morfismos. Vamos agora considerar os morfismos entre recobrimentos.

DEFINIÇÃO 4.5.9. Sejam $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ e $\pi': \tilde{Y} \rightarrow Y$ dois recobrimentos.

- Um *morfismo de recobrimentos* de π a π' é um par de funções contínuas $(f: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}, g: X \rightarrow Y)$ tal que $\pi' \circ f = g \circ \pi$ (equivalentemente $f(\tilde{X}_x) \subset \tilde{Y}_{g(x)}$ para todo $x \in X$). Isso significa que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{f} & \tilde{Y} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ X & \xrightarrow{g} & Y. \end{array}$$

- Para $X = Y$, um *morfismo de recobrimentos sobre X* de \tilde{X} a \tilde{Y} é um morfismo de recobrimentos da forma (f, id_X) , isto é, uma função contínua $f: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ tal que $\pi' \circ f = \pi$ (equivalentemente $f(\tilde{X}_x) \subset \tilde{Y}_x$ para cada $x \in X$). Isso significa que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{f} & \tilde{Y} \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi' \\ & X & \end{array}$$

Em ambos os casos um *isomorfismo* é um morfismo invertível. \diamond

EXEMPLO 4.5.10. Consideremos os dois recobrimentos $p_4, p_2: S^1 \rightarrow S^1$. A função $f = p_2: S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^2$, é um morfismo de recobrimentos sobre S^1 de p_4 a p_2 :

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{p_2} & S^1 \\ & \searrow p_4 & \swarrow p_2 \\ & S^1 & \end{array}$$

Se considerarmos $p_{-n}: S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^{-n}$, sendo $n \in \mathbb{N}^*$, a função $\tau: S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^{-1}$, é um isomorfismo de recobrimentos entre p_n e p_{-n} :

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow[\cong]{\tau} & S^1 \\ & \searrow p_{-n} & \swarrow p_n \\ & S^1 & \end{array}$$

Por isso, considerando os recobrimentos p_n de S^1 , não é restritivo supor $n \in \mathbb{N}^*$, ao invés de $n \in \mathbb{Z}^*$. Enfim, o par de funções (id, p_2) , ambas de S^1 a S^1 , é um morfismo de recobrimentos de $p_1 = \text{id}$ a p_2 , mas não é um morfismo sobre S^1 :

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{\text{id}} & S^1 \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow p_2 \\ S^1 & \xrightarrow{p_2} & S^1 \end{array} \quad \diamond$$

EXEMPLO 4.5.11. Consideremos a função $\exp': \mathbb{R} \rightarrow S^1, x \mapsto e^{4\pi i x}$. Trata-se de um recobrimento, sendo $\exp'(x) = \exp'(y)$ se, e somente se, $x - y \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x$, é um isomorfismo de recobrimentos sobre S^1 entre \exp' e \exp :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow[\cong]{x \mapsto 2x} & \mathbb{R} \\ \exp' \searrow & & \swarrow \exp \\ & S^1 & \end{array} \quad \diamond$$

Dessa maneira ficam definidas as seguintes categorias:

- Recob , cujos objetos são os recobrimentos e cujos morfismos são os morfismos de recobrimentos;
- Recob_X , sendo X um espaço topológico fixado, cujos objetos são os recobrimentos de X e cujos morfismos são os morfismos de recobrimentos sobre X .

Valem os seguintes fatos:

- Recob_X é uma sub-categoria de Recob , que *não* é cheia, pois um morfismo de recobrimentos com o mesmo espaço base X pode não ser um morfismo sobre X (v. exemplo 4.5.10);
- Recob é uma sub-categoria *cheia* de $\text{Hom}(\text{Top})$, pois a definição de morfismo de recobrimentos coincide com a restrição da de morfismo em $\text{Hom}(\text{Top})$ (representando π e π' como flechas horizontais ao invés de verticais, que obviamente é equivalente).

DEFINIÇÃO 4.5.12. Dois recobrimentos de X são *equivalentes* quando forem isomorfos *sobre* X , ou seja, na categoria Recob_X . \diamond

Sejam π e π' dois recobrimentos de X , sendo X conexo. Se π e π' são equivalentes, em particular têm o mesmo grau, pois um isomorfismo induz uma bijeção entre as duas fibras de cada ponto $x \in X$.

EXEMPLO 4.5.13. Consideremos os dois seguintes recobrimentos do toro:

$$(\exp, \text{id}): \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1 \quad (\text{id}, \exp): S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times S^1.$$

Consideremos as duas funções $\tau: S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$, $(z, w) \mapsto (w, z)$ e $\tilde{\tau}: \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$, $(x, w) \mapsto (w, x)$. O par (τ', τ) é um *isomorfismo* na categoria Recob :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times S^1 & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & S^1 \times \mathbb{R} \\ (\exp, \text{id}) \downarrow & & \downarrow (\text{id}, \exp) \\ S^1 \times S^1 & \xrightarrow{\tau} & S^1 \times S^1. \end{array}$$

Todavia, não existem isomorfismos entre (\exp, id) e (id, \exp) na categoria $\text{Recob}_{S^1 \times S^1}$, portanto os dois recobrimentos *não* são equivalentes. De fato, suponhamos por absurdo que exista o seguinte isomorfismo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times S^1 & \xrightarrow[\simeq]{\varphi} & S^1 \times \mathbb{R} \\ & \searrow (\exp, \text{id}) & \swarrow (\text{id}, \exp) \\ & S^1 \times S^1 & \end{array}$$

Seja $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, sendo $\varphi_1: \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow S^1$ e $\varphi_2: \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$. Temos que $\exp \circ \varphi_2 = \text{id}$, logo, considerando os morfismos induzidos entre os grupos fundamentais, $\exp_* \circ (\varphi_2)_* = \text{id}_{\mathbb{Z}}$, o que é absurdo, pois $\exp_*: 0 \rightarrow \mathbb{Z}$ não pode ser sobrejetora. Este exemplo mostra que dois recobrimentos podem ser isomorfos na categoria Recob mas não equivalentes. \diamond

EXEMPLO 4.5.14. Se $n \neq m$, os recobrimentos p_n e p_m de S^1 não são equivalentes, pois têm graus diferentes. Analogamente, p_n não é equivalente a \exp . Mostraremos que estes são *todos* os recobrimentos de S^1 , a menos de equivalência, cujo espaço total é conexo. \diamond

4.5.3. Pull-back. Vamos analisar o comportamento dos recobrimentos em relação ao pull-back.

LEMA 4.5.15. *Sejam $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ um recobrimento e $f: Y \rightarrow X$ uma função contínua. O pull-back $\pi_Y: \tilde{X} \times_X Y \rightarrow Y$ é um recobrimento, cuja fibra em y é canonicamente homeomorfa à fibra de π em $f(y)$:*

$$(99) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{X} \times_X Y & \xrightarrow{\pi_{\tilde{X}}} & \tilde{X} \\ \pi_Y \downarrow & & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{f} & X. \end{array}$$

O par $(\pi_{\tilde{X}}, f)$ é um morfismo de recobrimentos.

Ademais, dados outro recobrimento $\pi': \tilde{X}' \rightarrow X$ e um morfismo $\varphi: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$ de recobrimentos sobre X , a função $(\varphi, \text{id}): \tilde{X} \times_X Y \rightarrow \tilde{X}' \times_X Y$ é um morfismo de recobrimentos sobre Y , portanto fica definido o seguinte functor:

$$f^*: \text{Recob}_X \rightarrow \text{Recob}_Y.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma cobertura de X associada a π e mostremos que a cobertura $f^{-1}\mathfrak{U} := \{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ é associada a π_Y , o qual, por isso, é um recobrimento. Seja $\pi^{-1}(U_\alpha) = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \tilde{U}_\alpha^\lambda$. Temos que:

$$(100) \quad \pi_Y^{-1}(f^{-1}U_\alpha) = \pi_{\tilde{X}}^{-1}(\pi^{-1}U_\alpha) = \pi_{\tilde{X}}^{-1}\left(\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \tilde{U}_\alpha^\lambda\right) = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \pi_{\tilde{X}}^{-1}(\tilde{U}_\alpha^\lambda).$$

Pomos $V_\alpha := f^{-1}(U_\alpha)$ e $\tilde{V}_\alpha^\lambda := \pi_{\tilde{X}}^{-1}(\tilde{U}_\alpha^\lambda)$, portanto a equação (100) se torna a seguinte:

$$(101) \quad \pi_Y^{-1}(V_\alpha) = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \tilde{V}_\alpha^\lambda.$$

Cada sub-conjunto \tilde{V}_α^λ é aberto em $\tilde{X} \times_X Y$, pois \tilde{U}_α^λ é aberto em \tilde{X} , e $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ é uma cobertura de Y , portanto falta provar que a restrição de π_Y a \tilde{V}_α^λ é um homeomorfismo. Fixando $\lambda \in \Lambda$, a partir de $\pi^{-1}: U_\alpha \rightarrow \tilde{U}_\alpha^\lambda$ vamos construir $\pi_Y^{-1}: V_\alpha \rightarrow \tilde{V}_\alpha^\lambda$:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V}_\alpha^\lambda & \xrightarrow{\pi_{\tilde{X}}} & \tilde{U}_\alpha^\lambda \\ \pi_Y^{-1} \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \pi_Y \end{array} \right) & & \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \pi \end{array} \right) \pi^{-1} \\ V_\alpha & \xrightarrow{f} & U_\alpha. \end{array}$$

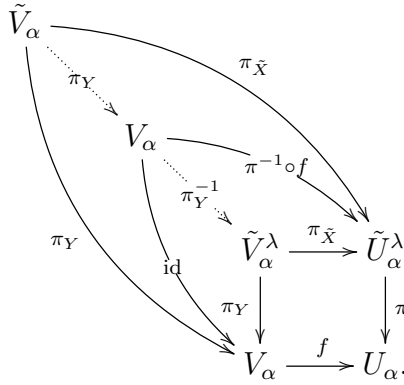
Temos que $\tilde{V}_\alpha^\lambda = \tilde{U}_\alpha^\lambda \times_{U_\alpha} V_\alpha$, portanto o quadrado central do diagrama precedente é um produto fibrado. De fato:

- se $(y, \tilde{x}) \in \tilde{V}_\alpha^\lambda = \tilde{U}_\alpha^\lambda \times_{U_\alpha} V_\alpha$, então $\tilde{x} = \pi_{\tilde{X}}(y, \tilde{x}) \in \tilde{U}_\alpha^\lambda$ e, pela equação (101), $y = \pi_Y(y, \tilde{x}) \in V_\alpha$, logo $(y, \tilde{x}) \in \tilde{U}_\alpha^\lambda \times_{U_\alpha} V_\alpha$;
- reciprocamente, se $(y, \tilde{x}) \in \tilde{U}_\alpha^\lambda \times_{U_\alpha} V_\alpha$, então $\pi_{\tilde{X}}(y, \tilde{x}) = \tilde{x} \in \tilde{U}_\alpha^\lambda$, portanto $(y, \tilde{x}) \in \pi_{\tilde{X}}^{-1}(\tilde{U}_\alpha^\lambda) = \tilde{V}_\alpha^\lambda$.

Definimos $\pi_Y^{-1}(y) := (\pi^{-1} \circ f(y), y)$. O leitor pode verificar que π_Y^{-1} é efetivamente a inversa de π_Y . Podemos construir π_Y^{-1} também aplicando a propriedade universal do produto fibrado, conforme o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} V_\alpha & & & & \\ & \searrow^{\pi^{-1} \circ f} & & & \\ & \pi_Y^{-1} \swarrow & & & \\ & \tilde{V}_\alpha^\lambda & \xrightarrow{\pi_{\tilde{X}}} & \tilde{U}_\alpha^\lambda & \\ & \downarrow \pi_Y & & \downarrow \pi & \\ V_\alpha & \xrightarrow{f} & U_\alpha & & \end{array}$$

Por causa do triângulo esquerdo do diagrama temos que $\pi_Y^{-1} \circ \pi_Y = \text{id}$. Ademais, podemos aplicar de novo a propriedade universal da seguinte maneira:



A função $\pi_Y \circ \pi_Y^{-1}$ torna comutativo o diagrama, assim como a identidade de \tilde{V}_α . Pela unicidade da função induzida, $\pi_Y \circ \pi_Y^{-1} = \text{id}$.

O fato que o par (π_X, f) seja um morfismo de recobrimentos segue imediatamente da comutatividade do diagrama (99). Ademais, a fibra de π_Y em Y é $\pi_Y^{-1}(y) = \{(\tilde{x}, y) : \pi(\tilde{x}) = f(y)\}$, a qual é homeomorfa $\{\tilde{x} : \pi(\tilde{x}) = f(y)\} = \pi^{-1}(x)$. Enfim, dados outro recobrimento $\pi' : \tilde{X}' \rightarrow X$ e um morfismo $\varphi : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$ de recobrimentos sobre X , temos que $\pi_Y'((\varphi, \text{id})(\tilde{x}, y)) = y = \pi_Y(\tilde{x}, y)$, portanto (φ, id) é um morfismo de recobrimentos sobre Y . É imediato verificar que f^* respeita a composição de morfismos e manda a identidade na identidade, portanto é um functor. \square

Em particular, o fato que f^* seja um functor implica que os pull-backs de dois recobrimentos equivalentes de X são recobrimentos equivalentes de Y .

OBSERVAÇÃO 4.5.16. Consideremos o functor $\Pi : \text{Recob} \rightarrow \text{Top}$ que manda o objeto $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ no espaço base X e o morfismo de recobrimentos (f, g) no morfismo g . Fixado um objeto $X \in \text{Ob}(\text{Top})$, a imagem inversa de X e do morfismo id_X , através de Π , é a sub-categoria Recob_X . Dado um morfismo $f : Y \rightarrow X$, o pull-back define um functor $f^* : \Pi^{-1}(X) \rightarrow \Pi^{-1}(Y)$; pode-se verificar que, dados dois morfismos $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, os funtores $g^* f^*, (f \circ g)^* : \Pi^{-1}(X) \rightarrow \Pi^{-1}(Z)$ são isomorfos, sendo os isomorfismos desse tipo compatíveis com as composições de três pull-backs, e que $\text{id}_X^* = \text{id}_{\text{Recob}_X}$. Por esta estrutura, o functor Π torna Recob uma *categoria fibrada*, sendo a fibra de X a sub-categoria $\Pi^{-1}(X) = \text{Recob}_X$. \diamond

TEOREMA 4.5.17. *Seja $f : Y \rightarrow X$ uma função contínua e sejam $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ e $\pi' : \tilde{Y} \rightarrow Y$ dois recobrimentos. Um morfismo $(f : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}, g : Y \rightarrow X)$ na categoria Recob é equivalente a um morfismo $f' : \tilde{Y} \rightarrow f^* \tilde{X}$ na categoria Recob_Y . Mais precisamente, há uma bijeção canônica $\text{Hom}_{\text{Recob}}(\tilde{Y}, \tilde{X}) \simeq \text{Hom}_{\text{Recob}_Y}(\tilde{Y}, f^* \tilde{X})$, que associa ao morfismo $(f : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}, g : Y \rightarrow X)$ o morfismo $f' : \tilde{Y} \rightarrow f^* \tilde{X}$ definido por $f'(\tilde{y}) := (f(\tilde{y}), g(\pi'(\tilde{y})))$.*

DEMONSTRAÇÃO. Ao morfismo $f' : \tilde{Y} \rightarrow f^* \tilde{X}$ associamos o morfismo (f, g) definido por $f(\tilde{y}) := \pi_X(f'(\tilde{y}))$ e $g(y) := f(\pi_Y(f'(\tilde{y})))$. O leitor pode verificar que as funções $f \mapsto f'$ e $f' \mapsto f$ estão bem definidas e são inversas entre si. \square

4.5.4. Recobrimentos com ponto marcado. Um recobrimento com ponto marcado é um morfismo $\pi: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ na categoria Top_+ tal que a função $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ é um recobrimento. Claramente $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}_{x_0}$. Os morfismos de recobrimentos (sobre X) são definidos da mesma maneira, sendo morfismos entre espaços com ponto marcado. Ficam definidas as seguintes categorias:

- Recob_+ , cujos objetos são os recobrimentos com ponto marcado e cujos morfismos são os morfismos de recobrimentos com ponto marcado;
- $\text{Recob}_{(X, x_0)}$, sendo (X, x_0) um espaço topológico fixado com ponto marcado, cujos objetos são os recobrimentos de (X, x_0) e cujos morfismos são os morfismos de recobrimentos com ponto marcado sobre X .

Estas categorias satisfazem propriedades análogas às de Recob e Recob_X . Observamos que, dados dois recobrimentos com ponto marcado $\pi: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ e $\pi': (\tilde{X}', \tilde{x}'_0) \rightarrow (X, x_0)$, pode acontecer que π e π' sejam equivalentes em Recob_X mas não em $\text{Recob}_{(X, x_0)}$. Mostraremos exemplos em seguida.

4.5.5. Propriedade de levantamento da homotopia. O lema 4.2.4 vale para qualquer recobrimento com a mesma demonstração, logo pode ser generalizado da seguinte maneira.

LEMA 4.5.18. *Um recobrimento $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ é uma fibração. Explicitamente, sejam Y um espaço topológico e $f: Y \times I \rightarrow X$ uma função contínua. Seja $F_0: Y \times \{0\} \rightarrow \tilde{X}$ uma função tal que $\pi \circ F_0 = f|_{Y \times \{0\}}$. Então existe uma única função $F: Y \times I \rightarrow \tilde{X}$ tal que $F|_{Y \times \{0\}} = F_0$ e $\pi \circ F = f$.*

DEFINIÇÃO 4.5.19. Dados um recobrimento $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ e uma função $f: Y \rightarrow X$, uma função $F: Y \rightarrow \tilde{X}$, tal que $\pi \circ F = f$, é chamada de *levantamento* de f a respeito de π . \diamond

Como no caso do círculo, para $Y = \{*\}$ o lema 4.5.18 implica que, dados um caminho $\varphi: I \rightarrow X$ e um ponto $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ tal que $\pi(\tilde{x}_0) = \varphi(0)$, existe um único levantamento $\tilde{\varphi}: I \rightarrow \tilde{X}$ tal que $\pi \circ \tilde{\varphi} = \varphi$ e $\tilde{\varphi}(0) = \tilde{x}_0$ (é claro que um caminho fechado não se levanta em geral a um caminho fechado, como já verificamos no caso do círculo). Ademais, sejam $\varphi_0, \varphi_1: I \rightarrow X$ dois caminhos entre x_0 e x_1 e seja $\Phi: I \times I \rightarrow X$ uma homotopia de caminhos. Marquemos um ponto $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ tal que $\pi(\tilde{x}_0) = x_0$. Pelo lema 4.5.18, com $Y = I$, existe um único levantamento $\tilde{\Phi}: I \times I \rightarrow \tilde{X}$ tal que $\tilde{\Phi}|_{\{0\} \times I} = \tilde{x}_0$. Pela unicidade do levantamento, os caminhos $\tilde{\Phi}(t, 0)$ e $\tilde{\Phi}(t, 1)$ são os levantamentos de φ_0 e φ_1 a partir de \tilde{x}_0 , que chamamos de $\tilde{\varphi}_0$ e $\tilde{\varphi}_1$. Ademais, temos que $\pi(\tilde{\Phi}(1, u)) = x_1$ para todo $u \in I$. Isso implica que $\tilde{\Phi}(1, u)$ é constante, o que pode ser provado de duas maneiras equivalentes:

- o caminho $\tilde{\Phi}(1, u)$ levanta o caminho constante x_1 a partir de $\tilde{\Phi}(1, 0)$: pela unicidade do levantamento, só pode ser o caminho constante;
- pelo lema 4.5.6, a fibra $\pi^{-1}\{x_1\}$ tem a topologia discreta, o que implica que uma função contínua de I a $\pi^{-1}\{x_1\}$ seja constante.⁵

⁵No caso do círculo usamos o fato que \mathbb{Z} é discreto em \mathbb{R} , esta é a generalização do mesmo conceito.

Isso demonstra o seguinte teorema.

TEOREMA 4.5.20. *Seja $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ um recobrimento e sejam $\varphi_0, \varphi_1: I \rightarrow X$ dois caminhos homotópicos.*

- *Dois levantamentos Φ_0 e Φ_1 , respectivamente de φ_0 e φ_1 , tais que $\Phi_0(0) = \Phi_1(0)$, terminam no mesmo ponto de \tilde{X} , ou seja, $\Phi_0(1) = \Phi_1(1)$.*
- *Há uma bijeção canônica entre o conjunto das homotopias de caminhos entre φ_0 e φ_1 e o conjunto das homotopias de caminhos entre Φ_0 e Φ_1 . Essa bijeção associa à homotopia $H: \Phi_0 \sim \Phi_1$ a homotopia $h = \pi \circ H: \varphi_0 \sim \varphi_1$ e à homotopia $h: \varphi_0 \sim \varphi_1$ o único levantamento H de h tal que $H(\{0\} \times I) = \Phi_0(0) = \Phi_1(0)$.*

4.5.6. Recobrimentos e grupo fundamental. Vamos agora considerar recobrimentos com ponto marcado de (X, x_0) . Voltaremos em seguida aos recobrimentos na categoria Recob. Consideremos dois caminhos homotópicos $\varphi, \psi \in \Omega_{x_0}(X)$ (portanto $[\varphi] = [\psi]$ em $\pi_1(X, x_0)$). Pelo que acabamos de provar, os dois levantamentos $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{\psi}$ a partir de \tilde{x}_0 não são necessariamente fechados, mas têm o mesmo ponto de chegada $\tilde{x}_1 \in \pi^{-1}(x_0)$ e são homotópicos. Portanto, em particular, ou são ambos fechados (se $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_0$) ou são ambos não fechados. Isso significa que o fato de levantar-se a um caminho fechado é uma propriedade da classe $[\varphi] \in \pi_1(X, x_0)$, não do representante φ . Quando esta propriedade for satisfeita, fica bem definida a classe $[\tilde{\varphi}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. A partir desta observação podemos enunciar o seguinte teorema.

TEOREMA 4.5.21. *Seja $\pi: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ um recobrimento. O morfismo $\pi_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ é injetor e a sua imagem é o subgrupo de $\pi_1(X, x_0)$ formado pelas classes de caminhos que se levantam a caminhos fechados.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $[\tilde{\varphi}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ tal que $\pi_*[\tilde{\varphi}] = 1$. Isso significa que o caminho $\varphi := \pi_{\#}\tilde{\varphi}$ é trivial, portanto existe uma homotopia $\tilde{\Phi}: I \times I \rightarrow \tilde{X}$ entre $\tilde{\varphi}$ e $c_{\tilde{x}_0}$. Seja $\tilde{\Phi}$ o levantamento de $\tilde{\Phi}$ tal que $\tilde{\Phi}(0, u) = \tilde{x}_0$. Pela unicidade do levantamento temos que $\tilde{\Phi}(t, 1) = \tilde{\varphi}(t)$ e $\tilde{\Phi}(t, 0) = \tilde{x}_0$. Ademais sabemos que $\tilde{\Phi}(1, u)$ é constante e portanto igual a \tilde{x}_0 . Isso mostra que $\tilde{\Phi}$ é uma homotopia entre $\tilde{\varphi}$ e $c_{\tilde{x}_0}$, portanto $[\tilde{\varphi}] = 0$, logo π_* é injetor. É claro que, se $\varphi \in \Omega_{x_0}(X)$ se levanta a um caminho fechado $\tilde{\varphi} \in \Omega_{\tilde{x}_0}(\tilde{X})$, então $[\varphi] = \pi_*[\tilde{\varphi}] \in \text{Im}(\pi_*)$. Reciprocamente, se $[\varphi] \in \text{Im}(\pi_*)$, então existe $\tilde{\varphi} \in \Omega_{\tilde{x}_0}(\tilde{X})$ tal que $[\varphi] = \pi_*[\tilde{\varphi}]$, portanto $\varphi \sim \pi_{\#}\tilde{\varphi}$. Como $\pi_{\#}\tilde{\varphi}$ se levanta a $\tilde{\varphi}$, que é fechado por construção, todo caminho na classe $[\varphi]$ se levanta a um caminho fechado. \square

Graças ao teorema 4.5.21 podemos caracterizar algebricamente o número de folhas de π quando X e \tilde{X} são conexos por caminhos.

TEOREMA 4.5.22. *Seja $\pi: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ um recobrimento, sendo X e \tilde{X} conexos por caminhos. O número de folhas de π é igual ao índice do subgrupo $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ em $\pi_1(X, x_0)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $H = \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Vamos definir uma bijeção χ entre os laterais direitos de H e $\pi^{-1}(x_0)$ da seguinte maneira: associamos a $H[\varphi]$ o ponto $\tilde{\varphi}(1)$, sendo $\tilde{\varphi}$ o levantamento de φ a partir de \tilde{x}_0 . A função χ é:

- bem definida pois, para $[\psi] \in H$, o levantamento $\tilde{\psi}$ é um caminho fechado e claramente $\tilde{\varphi} * \tilde{\psi}(1) = \tilde{\varphi}(1)$;
- sobrejetora, pois, para $\tilde{x}_1 \in \pi^{-1}(x_0)$, como \tilde{X} é conexo por caminhos podemos achar um caminho $\tilde{\varphi}$ que une \tilde{x}_0 a \tilde{x}_1 ; a projeção $\varphi := \pi \circ \tilde{\varphi}$ é um caminho fechado tal que $\chi(H[\varphi]) = \tilde{x}_1$;
- injetora, pois $\chi(H[\varphi]) = \chi(H[\psi])$ se, e somente se, $\tilde{\varphi}(1) = \tilde{\psi}(1)$, ou seja, se, e somente se, $\tilde{\varphi} * \tilde{\psi}$ é um caminho fechado; pelo teorema 4.5.21 isso é equivalente ao fato que $[\tilde{\varphi} * \tilde{\psi}] \in H$, ou seja, $[\psi][\varphi]^{-1} \in H$, ou seja, $H[\varphi] = H[\psi]$. \square

Por enquanto consideramos levantamentos de homotopias a partir de um levantamento fixado da função de partida. O seguinte teorema mostra quais são as condições para que exista um levantamento de uma função genérica que respeite os pontos marcados, desde que sejam satisfeitas algumas hipóteses em relação ao domínio. Lembramos que uma propriedade vale *localmente* quando vale em um sistema fundamental de vizinhanças de cada ponto.

TEOREMA 4.5.23. *Seja $f: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ uma função contínua, com Y conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos. Seja $\pi: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ um recobrimento. Existe um levantamento $F: (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ de f se, e somente se, $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Neste caso o levantamento é único.*

DEMONSTRAÇÃO. Uma direção é trivial: se existe um levantamento F , por definição $f = \pi \circ F$, portanto $f_* = \pi_* \circ F_*$, logo $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Reciprocamente, suponhamos que valha a inclusão $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Definimos F da seguinte maneira: dado $y \in Y$, consideramos um caminho $\varphi: I \rightarrow Y$ entre y_0 e y , consideramos a imagem $\varphi' := f \circ \varphi: I \rightarrow X$ e a levantamos (do único modo possível) a um caminho $\tilde{\varphi}': I \rightarrow \tilde{X}$ a partir de \tilde{x}_0 . Definimos $F(y) := \tilde{\varphi}'(1)$. Devemos mostrar que F está bem definida e é contínua. Seja $\psi: I \rightarrow Y$ outro caminho entre y_0 e y e seja $\psi' := f \circ \psi$. Isso implica que $\tilde{\psi} * \varphi$ é um caminho fechado, portanto $\tilde{\psi}' * \tilde{\varphi}'$ é um caminho fechado cuja classe pertence a $f_*(\pi_1(Y, y_0))$, logo a $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Pelo teorema 4.5.21 este caminho se levanta a um caminho fechado, o qual tem que coincidir com $\tilde{\psi}' * \tilde{\varphi}'$, logo $\tilde{\psi}'(1) = \tilde{\varphi}'(1)$. Isso prova que F está bem definida.

A respeito da continuidade, fixado $y \in Y$, seja U uma vizinhança de $f(y)$ em X que verifica a definição de recobrimento e seja \tilde{U} a componente da imagem inversa que contém $F(y)$. Seja V uma vizinhança conexa por caminhos de y tal que $V \subset f^{-1}(U)$ (é possível escolher V desta maneira, pois Y é localmente conexo por caminhos). Vamos mostrar que $F|_V$ é contínua, o que prova que F é contínua em uma vizinhança de cada ponto, portanto é contínua. Para provar isso, só temos de mostrar que $F(V) \subset \tilde{U}$, assim temos que $F|_V = \pi^{-1} \circ f$, portanto F é contínua. Para provar isso, fixamos um caminho φ de y_0 a y e, para cada $y' \in V$, escolhemos

um caminho ψ de y a y' . Desta maneira

$$F(y') = (\widetilde{\psi * \varphi})'(1) = (\tilde{\psi}') * (\tilde{\varphi}')(1) = \tilde{\psi}'(1).$$

Como o único levantamento de ψ' é $\tilde{\psi}' = \pi^{-1} \circ \psi'$, o ponto de chegada $\tilde{\psi}'(1)$ pertence a \tilde{U} .

A respeito da unicidade, seja $y \in Y$ e seja U uma vizinhança de $f(y)$ em X que verifica a definição de recobrimento. Suponhamos que haja dois levantamentos F_0 e F_1 de f e sejam \tilde{U}_0 e \tilde{U}_1 as imagens inversas de U que contêm $F_0(y)$ e $F_1(y)$. Por continuidade existe uma vizinhança V de y tal que $F_0(V) \subset \tilde{U}_0$ e $F_1(V) \subset \tilde{U}_1$. Se $F_0(y) \neq F_1(y)$, então $\tilde{U}_0 \cap \tilde{U}_1 = \emptyset$, portanto F_0 e F_1 são diferentes em V todo. Se $F_0(y) = F_1(y)$, então $\tilde{U}_0 = \tilde{U}_1$, portanto $F_0|_V = F_1|_V = \pi^{-1}|_U \circ f$, sendo $\pi^{-1}|_U: U \rightarrow \tilde{U}_0$. Portanto o conjunto dos pontos em que $F_0 = F_1$ é aberto e fechado em Y . Como Y é conexo e como este conjunto contém pelo menos y_0 , temos que $F_0 = F_1$. \square

OBSERVAÇÃO 4.5.24. O enunciado da unicidade no teorema precedente pode ser também formulado da seguinte maneira, considerando recobrimentos sem ponto marcado. Seja $f: Y \rightarrow X$ uma função contínua, com Y conexo por caminhos (neste caso não é necessário que o seja também localmente, pois isso não foi usado na demonstração da unicidade, e sim só para provar a existência). Seja $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ um recobrimento. Se dois levantamentos $F_0, F_1: Y \rightarrow \tilde{X}$ de f coincidem em um ponto de Y , então $F_0 = F_1$. Logo, se π tem κ folhas e f pode ser levantada, então o número máximo de levantamentos possíveis é κ , um para cada escolha do levantamento de um ponto y_0 . Todavia, dados $y_0 \in Y$ e dois pontos $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in \pi^{-1}(f(y_0))$, pode acontecer que exista um levantamento tal que $F(y_0) = \tilde{x}_0$ mas não um tal que $F(y_0) = \tilde{x}_1$. Isso é devido ao fato que, em geral, os dois mergulhos $\pi_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \hookrightarrow \pi_1(\tilde{X}, f(y_0))$ e $\pi_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1) \hookrightarrow \pi_1(\tilde{X}, f(y_0))$ são diferentes, portanto $f_*(\pi_1(Y, y_0))$ pode estar contido somente em uma das duas. Veremos exemplos em seguida. \diamond

OBSERVAÇÃO 4.5.25. A observação precedente implica que, no lema 4.5.18, se existe um levantamento F_0 de $f|_{Y \times \{0\}}$, é suficiente fixar o valor de F_0 em um ponto $y \in Y$. Com isso fica determinada a função F_0 toda e, portanto, a única extensão F . \diamond

4.5.7. Problema da classificação. Vamos agora considerar o problema de classificar todos os recobrimentos conexos de um espaço X , que verifique algumas hipóteses razoáveis, a menos de equivalência. Por causa do teorema 4.5.21, fica definida a seguinte função:

$$\Xi: \left\{ \begin{array}{l} \text{Recobrimentos conexos de} \\ (X, x_0) \text{ com ponto marcado} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Subgrupos} \\ \text{de } \pi_1(X, x_0) \end{array} \right\}$$

$$(\pi: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)) \mapsto (\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))).$$

Vamos demonstrar que Ξ é sobrejetora e que $\Xi(\pi) = \Xi(\pi')$ se, e somente se, π é equivalente a π' . Isso implica que, quocientando o domínio de Ξ por equivalência de recobrimentos com ponto marcado, obtemos uma bijeção, portanto a teoria do grupo fundamental e a teoria dos recobrimentos são bem ligadas entre si.

4.5.8. Construção do recobrimento universal. Se Ξ for sobrejetora (sendo isso o que queremos provar), em particular a imagem contém o subgrupo trivial de $\pi_1(X, x_0)$. Isso significa que deve existir um recobrimento de (X, x_0) com espaço total simplesmente conexo.⁶ Vamos agora construir este recobrimento; em seguida mostraremos que os demais recobrimentos podem ser construídos como quociente do simplesmente conexo. Antes de tudo, precisamos de uma hipótese a respeito de espaço X , além do fato de ser conexo por caminhos globalmente e localmente. Vamos supor que exista um recobrimento $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ tal que \tilde{X} é simplesmente conexo. Dado um ponto $x \in X$, seja U uma vizinhança que verifica a definição de recobrimento. Dado um caminho fechado $\varphi \in \Omega_x(U)$, seja $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$ e seja \tilde{U} a componente de $\pi^{-1}(U)$ que contém \tilde{x} . Como $\pi|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow U$ é um homeomorfismo, temos que $\tilde{\varphi} := \pi|_{\tilde{U}}^{-1} \circ \varphi \in \Omega_{\tilde{x}}(\tilde{U})$, ou seja, φ se levanta a um caminho fechado em \tilde{U} . Como $\pi_1(\tilde{X}) = 0$, o caminho $\tilde{\varphi}$ é contrátil em \tilde{X} (não necessariamente em \tilde{U}), portanto, projetando uma homotopia, temos que também φ é trivial em X . Isso significa que, considerando o mergulho $i: U \hookrightarrow X$, o push-forward $i_*: \pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ é a função nula. Por isso, é natural dar a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 4.5.26. Um espaço X é dito *semi-localmente simplesmente conexo* se, para todo $x \in X$, existe uma vizinhança U tal que o morfismo $i_*: \pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$, induzido pelo mergulho $i: U \hookrightarrow X$, é o morfismo nulo. \diamond

É claro que essa definição é satisfeita por um espaço X localmente simplesmente conexo, mas isso não é necessário, pois só pedimos que um caminho em U seja contrátil em X (ou seja, uma homotopia com o caminho constante \mathbf{c}_x pode sair de U).

EXEMPLO 4.5.27. Seja $X \subset \mathbb{R}^2$ o *Hawaiian earring*, ou seja, a união dos círculos de centro $(\frac{1}{n}, 0)$ e raio $\frac{1}{n}$ para $n \in \mathbb{N}^*$. Nenhuma vizinhança de $(0, 0)$ verifica a definição 4.5.26, portanto X não é semi-localmente simplesmente conexo. \diamond

EXEMPLO 4.5.28. Seja $X \subset \mathbb{R}^2$ o *Hawaiian earring*. O cone CX é contrátil, portanto simplesmente conexo, portanto semi-localmente simplesmente conexo. Todavia, não é localmente simplesmente conexo, pois o ponto $(0, 0, 0)$ (sendo a última coordenada a altura do cone) não possui um sistema fundamental de vizinhanças que verificam a definição 4.5.26. \diamond

OBSERVAÇÃO 4.5.29. Se U verifica a definição 4.5.26 no ponto x e é conexo por caminhos, então $i_*: \pi_1(U, y) \rightarrow \pi_1(X, y)$ é nulo para *qualquer* $y \in U$: de fato, sejam $i_x: (U, x) \rightarrow (X, x)$ e $i_y: (U, y) \rightarrow (X, y)$ os dois mergulhos. Seja $\psi: I \rightarrow U$ um caminho entre x e y . Então $(i_y)_* = [\psi]_! \circ (i_x)_* \circ [\bar{\psi}]_!$, portanto $(i_y)_* = 0$. \diamond

Podemos agora construir um recobrimento simplesmente conexo $\pi: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ de um espaço (X, x_0) *conexo por caminhos, localmente conexo por caminhos e semi-localmente simplesmente conexo*. O fato fundamental é o seguinte:

⁶Como assumiremos que a base X seja conexa por caminhos, o fato que o espaço total de um recobrimento seja conexo implica que seja conexo por caminhos. O leitor pode verificar isso a partir da definição de recobrimento.

- como conjunto, \tilde{X} é formado pelas classes de homotopia de caminhos em X que partem de x_0 .

Para chegar a esta definição, raciocinamos da seguinte maneira. Como \tilde{X} deve ser simplesmente conexo, o lema 4.1.17 implica que, para cada $\tilde{x} \in \tilde{X}$, existe uma única classe de homotopia de caminhos entre \tilde{x}_0 e \tilde{x} em \tilde{X} . Por isso, podemos identificar os pontos de \tilde{X} com as classes de homotopia de caminhos em \tilde{X} a partir de \tilde{x}_0 . Além do mais, pelo teorema 4.5.20, fixado um ponto $x \in X$, o recobrimento π induz uma bijeção entre as classes de homotopia de caminhos de \tilde{x}_0 a um ponto da fibra $\pi^{-1}(x) \subset \tilde{X}$ e as classes de homotopia de caminhos de x_0 a x em X . Variando x , obtemos uma bijeção entre as classes de homotopia de caminhos em \tilde{X} que partem de \tilde{x}_0 e as em X que partem de x_0 . Resumindo, temos que:

- um ponto $\tilde{x} \in \tilde{X}$ corresponde, a menos de uma bijeção canônica, à única classe de homotopia de caminhos de \tilde{x}_0 a \tilde{x} em \tilde{X} ;
- essa classe de homotopia em \tilde{X} corresponde, a menos de uma bijeção canônica, a uma classe de homotopia de caminhos de x_0 a $x := \pi(\tilde{x})$ em X .

Compondo as duas bijeções, podemos identificar os pontos de \tilde{X} com as classes de homotopia de caminhos em X que partem de x_0 . Voltando a supor de não conhecer \tilde{X} , essa bijeção se torna uma definição:

$$\tilde{X} := \{[\varphi: I \rightarrow X] : \varphi(0) = x_0\}.$$

Como ponto marcado escolhemos $\tilde{x}_0 := [\mathbf{c}_{x_0}]$ e definimos $\pi: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ por $[\varphi] \mapsto \varphi(1)$. A projeção π assim definida é sobrejetora, pois X é conexo por caminhos. Agora precisamos dar uma topologia a \tilde{X} e mostrar que a projeção π é um recobrimento simplesmente conexo de X .

Passo I: Topologia de \tilde{X} . Vamos partir de uma base adequada da topologia de X e vamos usá-la para definir a topologia de \tilde{X} , conforme os seguintes enunciados.

- Seja $\mathfrak{U} := \{U \subset X : U \text{ é aberto, conexo por caminhos e } i_*: \pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x) \text{ é o morfismo nulo para } x \in U\}$. Por causa da observação 4.5.29, não é importante qual ponto $x \in U$ escolhemos na definição. Temos que \mathfrak{U} é uma base da topologia de X .
- Para $U \in \mathfrak{U}$, sejam $x \in U$ e $\varphi: I \rightarrow X$ um caminho entre x_0 e x . Definimos:

$$U_{[\varphi]} := \{[\psi * \varphi] \in \tilde{X} : \psi: I \rightarrow U, \psi(0) = x\}.$$

A família $\tilde{\mathfrak{U}} := \{U_{[\varphi]}\}$, variando U e φ , é uma base de uma topologia em \tilde{X} . Vamos demonstrar (i) e (ii). Verificaremos a seguir que \mathfrak{U} é uma cobertura de X associada ao recobrimento π .

OBSERVAÇÃO 4.5.30. Dado $U \in \mathfrak{U}$, qualquer subconjunto aberto conexo por caminhos $V \subset U$ pertence também a \mathfrak{U} : de fato, o morfismo $\pi_1(V, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ coincide com a composição $\pi_1(V, x) \rightarrow \pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$, logo é nulo. \diamond

Os elementos de \mathfrak{U} são abertos de X por construção. Dados um subconjunto aberto $U \subset X$ e um ponto $x \in U$, mostremos que existe $W \in \mathfrak{U}$ tal que $x \in W \subset U$.

Seja $V \in \mathfrak{U}$ uma vizinhança de x , a qual existe pois X é semi-localmente simplesmente conexo. Como X é localmente conexo por caminhos, existe uma vizinhança W de x conexa por caminhos tal que $W \subset U \cap V$; como $W \subset V \in \mathfrak{U}$, temos que $W \in \mathfrak{U}$ pela observação 4.5.30, logo $x \in W \subset U$ e $W \in \mathfrak{U}$. Isso demonstra (i).

Antes de demonstrar (ii), queremos deixar claro que X já tinha uma topologia, portanto devíamos verificar que \mathfrak{U} fosse uma base da topologia já dada, enquanto em \tilde{X} estamos *definindo* uma topologia, portanto devemos verificar que $\tilde{\mathfrak{U}}$ satisfaça os axiomas para ser uma base de uma nova topologia.

OBSERVAÇÃO 4.5.31. Seja $[\varphi'] \in U_{[\varphi]}$. Então $U_{[\varphi']} = U_{[\varphi]}$. De fato, seja $[\varphi'] = [\eta * \varphi]$: temos que $[\psi * \varphi'] = [(\psi * \eta) * \varphi] \in U_{[\varphi]}$, logo $U_{[\varphi']} \subset U_{[\varphi]}$. Reciprocamente, $[\psi * \varphi] = [(\psi * \bar{\eta}) * (\eta * \varphi)] = [(\psi * \bar{\eta}) * \varphi'] \in U_{[\varphi']}$, logo $U_{[\varphi]} \subset U_{[\varphi']}$. \diamond

Seja $\varphi'' \in U_{[\varphi]} \cap V_{[\varphi']}$. Pela observação 4.5.31, temos que $U_{[\varphi]} = U_{[\varphi']}$ e $V_{[\varphi']} = V_{[\varphi']}$, portanto, para um aberto $W \in \mathfrak{U}$ tal que $\varphi''(1) \in W \subset U \cap V$, temos que $W_{[\varphi']} \subset U_{[\varphi']} \cap V_{[\varphi']}$ e $\varphi'' \in W_{[\varphi']}$. Isso demonstra (ii).

Passo II: A projeção $\pi: U_{[\varphi]} \rightarrow U$, $[\psi * \varphi] \mapsto \psi(1)$, é um homeomorfismo. De fato, é uma função sobrejetora, pois U é conexo por caminhos. Ademais, seja $\pi[\psi * \varphi] = \pi[\psi' * \varphi]$, isto é, $\psi, \psi': I \rightarrow U$ chegam ao mesmo ponto x' . Como $U \in \mathfrak{U}$, temos $\psi' \sim (\psi' * \psi) * \psi \sim \psi$. logo $[\psi * \varphi] = [\psi' * \varphi]$, portanto π é injetora. Enfim, vamos demonstrar que π induz uma bijeção entre os elementos de $\tilde{\mathfrak{U}}$ contidos em $U_{[\varphi]}$ e os de \mathfrak{U} contidos em U , associando a $V_{[\varphi]}$ o aberto V . Isso demonstra em particular que π e π^{-1} mandam abertos-base em abertos-base, logo π é um homeomorfismo. De fato, seja $V_{[\varphi']} \subset U_{[\varphi]}$. Em particular $[\varphi'] \in U_{[\varphi]}$, logo existe $\psi': I \rightarrow U$ tal que $[\varphi'] = [\psi' * \varphi]$ e $V_{[\varphi']} = V_{[\psi' * \varphi]}$. Dado $[\eta * \psi' * \varphi] \in V_{[\psi' * \varphi]}$, temos que $\pi([\eta * \psi' * \varphi]) = \eta(1) \in V$, portanto $\pi(V_{[\psi' * \varphi]}) \subset V$. Reciprocamente, fixado $x \in V$, existe um caminho $\eta: I \rightarrow V$ que une $\psi'(1)$ a x , logo $[\eta * \psi' * \varphi] \in V_{[\psi' * \varphi]}$ e $\pi([\eta * \psi' * \varphi]) = \eta(1) = x$, portanto $\pi(V_{[\psi' * \varphi]}) = V$. Sendo π bijetora, isso implica que $\pi^{-1}(V) = V_{[\psi' * \varphi]}$.

Passo III: $\pi: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ é contínua e é um recobrimento. Vimos no passo precedente que π é localmente contínua, dado que é contínua em todo aberto-base $U_{[\varphi]}$, portanto é contínua. Verifiquemos que \mathfrak{U} é uma cobertura de X que verifica a definição de recobrimento. Já mostramos que $\pi: U_{[\varphi]} \rightarrow U$ é um homeomorfismo, portanto só falta provar que $U_{[\varphi]} \cap U_{[\varphi']} = \emptyset$ se $U_{[\varphi]} \neq U_{[\varphi']}$. Seja $[\varphi''] \in U_{[\varphi]} \cap U_{[\varphi']}$. Pela observação 4.5.31 temos que $U_{[\varphi'']} = U_{[\varphi]}$ e $U_{[\varphi'']} = U_{[\varphi']}$, logo $U_{[\varphi]} = U_{[\varphi']}$.

Passo IV: \tilde{X} é simplesmente conexo. Uma demonstração intuitiva (mas formalizável) pode ser a seguinte. Um caminho fechado $\tilde{\varphi} \in \Omega_{\tilde{x}_0}(\tilde{X})$ é um caminho de classes de homotopia de caminhos de X , portanto pode ser levantado a um caminho de caminhos (ou seja, de representantes) $\tilde{\varphi}': I \times I \rightarrow X$, tal que $\tilde{\varphi}(t) = [\tilde{\varphi}'|_{\{t\} \times I}]$. Isso implica que $\tilde{\varphi}'(t, 0) = \tilde{\varphi}'(0, u) = \tilde{\varphi}'(1, u) = x_0$. Os pontos finais percorrem o caminho fechado $t \mapsto \tilde{\varphi}'(t, 1)$ em X , mas cada ponto final leva consigo o caminho completo que parte de x_0 ; trata-se de um “meio-cone” em X que une o caminho

percorrido pelos pontos finais com x_0 . Percorrendo o meio-cone até o vértice, se obtém uma homotopia com o caminho constante, ou seja, é possível percorrer em sentido contrário cada um dos caminhos $\tilde{\varphi}'|_{\{t\} \times I}$, obtendo uma homotopia entre $\tilde{\varphi}'$ e o caminho de caminhos constante \mathbf{c}_{x_0} . Projetando esta homotopia ao quociente, vemos que $\tilde{\varphi}$ é trivial em \tilde{X} .

O problema desta demonstração está no fato que devemos demonstrar a existência do levantamento contínuo $\tilde{\varphi}'$. Isso é possível, mas a seguinte demonstração formal é mais direta. Começamos verificando que \tilde{X} é conexo por caminhos. Seja $[\varphi] \in \tilde{X}$. Seja φ_t o caminho obtido reparametrizando $\varphi|_{[0,t]}$ e seja $\Phi: I \rightarrow \tilde{X}$ definido por $\Phi(t) := [\varphi_t]$: se Φ é contínuo, trata-se de um caminho em \tilde{X} que une $\tilde{x}_0 = [\mathbf{c}_{x_0}]$ a $[\varphi]$. Para provar a continuidade, mostremos que $\Phi^{-1}(U_{[\psi]}) \subset I$ é aberto para qualquer aberto-base $U_{[\psi]}$. Seja $\Phi(t) \in U_{[\psi]}$, ou seja $[\varphi_t] \in U_{[\psi]}$: pela observação 4.5.31, temos que $U_{[\psi]} = U_{[\varphi_t]}$. Para qualquer $u \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subset \varphi^{-1}(U)$, temos que φ_u é homotópico à composição de φ_t com $\varphi|_{[t,u]}$ ou $\varphi|_{[u,t]}$ reparametrizado, portanto $\Phi(u) \in U_{[\varphi_t]} = U_{[\psi]}$. Isso mostra que $\Phi(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subset U_{[\psi]}$, logo $\Phi^{-1}(U_{[\psi]})$ é aberto.

Dado $\tilde{\varphi} \in \Omega_{\tilde{x}_0}(\tilde{X})$, seja $\varphi \in \Omega_{x_0}(X)$ a projeção $\varphi(t) := \pi(\tilde{\varphi}(t))$, ou seja $\varphi(t)$ é o ponto de chegada de qualquer representante de $\tilde{\varphi}(t)$ (corresponde a $\tilde{\varphi}'(t, 1)$ na prova precedente). Seja φ_t o caminho $\varphi|_{[0,t]}$ reparametrizado. Temos que $t \rightarrow [\varphi_t]$ é um caminho em \tilde{X} (contínuo pelo motivo que já mostramos no começo deste parágrafo) que parte de \tilde{x}_0 e levanta φ , portanto coincide com $\tilde{\varphi}$, ou seja $\tilde{\varphi}(t) = [\varphi_t]$. Por isso temos que $[\varphi] = [\varphi_1] = \tilde{\varphi}(1) = \tilde{x}_0 = [\mathbf{c}_{x_0}]$, portanto φ é trivial. Isso implica que $\pi_*[\tilde{\varphi}] = 1$, logo, sendo π_* injetor, $[\tilde{\varphi}] = 1$.

4.5.9. Classificação dos recobrimentos. Vamos agora mostrar que, dado um subgrupo $H \leq \pi_1(X, x_0)$, podemos construir um recobrimento cujo grupo fundamental é H . De fato, consideremos o recobrimento simplesmente conexo $\pi: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ que acabamos de construir. Definimos \tilde{X}_H como o quociente de \tilde{X} através da seguinte relação de equivalência:

$$(102) \quad [\varphi] \sim_H [\varphi'] \iff \varphi(1) = \varphi'(1), [\tilde{\varphi}' * \varphi] \in H.$$

A projeção $\pi_H: \tilde{X}_H \rightarrow X$ é definida por $\pi_H[[\varphi]] := \pi[\varphi] = \varphi(1)$, sendo $[[\varphi]]$ a classe de $[\varphi]$ a menos de (102). O ponto marcado é $\tilde{x}_{0,H} := [\tilde{x}_0] = [[\mathbf{c}_{x_0}]]$. É claro que, se $[\varphi] \sim_H [\varphi']$, então, para qualquer caminho ψ que parta de $\varphi(1) = \varphi'(1)$, temos que $[\psi * \varphi] \sim_H [\psi * \varphi']$. Isso implica que, se $[\varphi] \sim_H [\varphi']$, então os abertos $U_{[\varphi]}$ e $U_{[\varphi']}$ são identificados; em caso contrário, as duas projeções ao quociente por \sim_H ficam disjuntas: por isso, para $U \in \mathfrak{U}$, $\pi_H^{-1}(U)$ continua sendo a união disjunta de algumas cópias de U a menos de homeomorfismo, logo a projeção π_H é um recobrimento. Enfim, temos de mostrar que $(\pi_H)_*(\pi_1(\tilde{X}_H, \tilde{x}_{0,H})) = H$. Isso é devido ao fato que $[\varphi] \in \pi_1(X, x_0)$ é também um ponto $[\varphi] \in \tilde{X}$ e o levantamento de um representante φ é dado por $t \rightarrow [\varphi_t]$, o qual parte de $\tilde{x}_0 = [\mathbf{c}_{x_0}]$ e chega a $[\varphi]$. Passando ao quociente \tilde{X}_H , isso implica que o levantamento é fechado se, e somente se, $[[\mathbf{c}_{x_0}]] = [[\varphi]]$, ou seja se, e somente se, $[\mathbf{c}_{x_0}^{-1} * \varphi] = [\varphi] \in H$. Pelo teorema 4.5.21 temos que $(\pi_H)_*(\pi_1(\tilde{X}_H, \tilde{x}_{0,H})) = H$. A mesma observação mostra que a projeção $\pi'_H: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X_H, \tilde{x}_{0,H})$ definida por $\pi'_H[[\varphi]] := [[\varphi]]$ é um recobrimento. De fato,

seja $[U_{[\varphi]}] := \pi_H(U_{[\varphi]})$. Temos que $\pi'_H{}^{-1}[U_{[\varphi]}]$ é a união disjunta dos abertos $U_{[\varphi']}$ tais que $[U_{[\varphi']}] = [U_{[\varphi]}]$, os quais são homeomorfos a $U_{[\varphi]}$ mesmo. Pelo teorema 4.5.22, o número de folhas de π_H é o índice de H em $\pi_1(X, x_0)$, enquanto o número de folhas de π'_H é $|H|$, sendo o índice de $\{1\}$ em H .

TEOREMA 4.5.32. *Seja (X, x_0) conexo por caminhos, localmente conexo por caminhos e semi-localmente simplesmente conexo. Há uma bijeção natural entre o conjunto dos recobrimentos conexos com ponto base de (X, x_0) , a menos de equivalência, e o conjunto dos subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$. A bijeção é definida associando a um recobrimento $\pi: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ o subgrupo $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.*

DEMONSTRAÇÃO. Já provamos que a função dos recobrimentos aos subgrupos é sobrejetora, pois construímos o recobrimento $\pi_H: (\tilde{X}_H, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ para um subgrupo genérico $H \leq \pi_1(X, x_0)$. Só temos de provar que dois recobrimentos $\pi: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ e $\pi': (\tilde{X}', \tilde{x}'_0) \rightarrow (X, x_0)$ são equivalentes se, e somente se, $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = \pi'_*(\pi_1(\tilde{X}', \tilde{x}'_0))$. Uma direção é óbvia: se $f: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\tilde{X}', \tilde{x}'_0)$ for um isomorfismo, então $\pi_* = \pi'_* \circ f_*$ e $\pi'_* = \pi_* \circ f_*^{-1}$, portanto as duas imagens coincidem. Reciprocamente, suponhamos que as imagens de π_* e π'_* sejam iguais. Pelo teorema 4.5.23, a função π (que corresponde à função f do teorema) se levanta, a respeito do recobrimento π' , a $\Pi: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\tilde{X}', \tilde{x}'_0)$. Analogamente, a função π' se levanta, a respeito do recobrimento π , a $\Pi': (\tilde{X}', \tilde{x}'_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} (\tilde{X}, \tilde{x}_0) & \xrightarrow{\Pi} & (\tilde{X}', \tilde{x}'_0) & \xrightarrow{\Pi'} & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \\ & \searrow \pi & \downarrow \pi' & \swarrow \pi & \\ & & (X, x_0) & & \end{array}$$

Isso mostra que $\Pi' \circ \Pi$ levanta, a respeito do recobrimento π , a função π mesma. Pela unicidade do levantamento, temos que $\Pi' \circ \Pi = \text{id}_{\tilde{X}}$. Da mesma maneira $\Pi \circ \Pi' = \text{id}_{\tilde{X}'}$. Isso mostra que Π e Π' são equivalências de recobrimentos. \square

Isso completa a classificação dos recobrimentos conexos por caminhos com ponto base. Como o subgrupo de $\pi_1(X, x_0)$ classifica completamente o recobrimento, temos em particular que os recobrimentos simplesmente conexos de X são isomorfos entre si (logo são isomorfos ao que construímos explicitamente). Isso justifica a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 4.5.33. *Seja (X, x_0) conexo por caminhos, localmente conexo por caminhos e semi-localmente simplesmente conexo. Um recobrimento simplesmente conexo de (X, x_0) , único a menos de isomorfismo, é dito *recobrimento universal* de (X, x_0) .* \diamond

Na verdade, no enunciado do teorema 4.5.32 temos mais que uma bijeção, temos um isomorfismo de retículos. De fato, já observamos que, para $H \leq \pi_1(X, x_0)$ e $\pi: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ o recobrimento universal, além de $\pi_H: (\tilde{X}_H, \tilde{x}_{0,H}) \rightarrow (X, x_0)$, também $\pi'_H: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\tilde{X}_H, \tilde{x}_{0,H})$ é um recobrimento. Em geral, dados dois subgrupos $H \leq K \leq \pi_1(X, x_0)$, temos que π_K e π_H são recobrimentos de (X, x_0) ,

mas há também um recobrimento $\pi'_{H,K} : (\tilde{X}_K, \tilde{x}_{0,K}) \rightarrow (\tilde{X}_H, \tilde{x}_{0,H})$ definido por $\pi'_{H,K}[[\varphi]]_K = [[\varphi]]_H$. O número de folhas é o índice de H em K . Como o subgrupo $\{1\}$ está contido em todos os demais subgrupos, temos que *o recobrimento universal, com a projeção adequada, se torna o recobrimento universal de todos os recobrimentos de (X, x_0) .*

Por enquanto só classificamos os recobrimentos com ponto base, ou seja na categoria Top_+ : isso era necessário para os teoremas que enunciamos por enquanto, pois envolvem o grupo fundamental. Considerando recobrimentos na categoria Top , ou seja sem marcar um ponto base, só podemos acrescentar o seguinte fato: pode acontecer que dois recobrimentos com ponto base $\pi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ e $\pi' : (\tilde{X}', \tilde{x}'_0) \rightarrow (X, x_0)$ não sejam isomorfos, mas se tornem isomorfos esquecendo o ponto-base. Ou seja, pode existir um homeomorfismo $f : X \rightarrow X'$ tal que $\pi' \circ f = \pi$, mas pode ser impossível escolher f de modo que $f(\tilde{x}_0) = \tilde{x}'_0$ (neste caso $f(\tilde{x}_0)$ é outro ponto de $\pi'^{-1}(x_0)$). Isso pode também ser interpretado da seguinte maneira. Dois recobrimentos com ponto base que só são isomorfos esquecendo o ponto base, são equivalentes a duas cópias do mesmo recobrimento com dois pontos marcados diferentes, ou seja $\pi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ e $\pi : (\tilde{X}, \tilde{x}'_0) \rightarrow (X, x_0)$. Portanto, pensando na segunda interpretação, o fato que não sejam isomorfos significa que não existe nenhum automorfismo de $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ que manda \tilde{x}_0 em \tilde{x}'_0 . Como a classe de isomorfismo com ponto marcado é determinada pelo grupo fundamental, isso significa que $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \neq \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'_0))$: isso pode acontecer pois a imagem do grupo fundamental *depende do ponto marcado escolhido* dentro de $\pi^{-1}\{x_0\}$. Quando for a mesma existe um automorfismo que manda \tilde{x}_0 em \tilde{x}'_0 , quando for diferente não existe; como mostra o seguinte teorema, em geral os dois subgrupos são conjugados, portanto são isomorfos como grupos abstratos, mas nem sempre coincidem como subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$. Por isso, a classificação dos recobrimentos sem ponto base é em geral mais fraca do que a com ponto base.

TEOREMA 4.5.34. *Seja X conexo por caminhos, localmente conexo por caminhos e semilocalmente simplesmente conexo. Há uma bijeção natural entre o conjunto dos recobrimentos conexos por caminhos de X a menos de isomorfismo e o conjunto das classes de conjugação de subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$ para qualquer $x_0 \in X$. A bijeção é definida associando a um recobrimento $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ a classe de conjugação do subgrupo $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ para qualquer $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Escolhemos $x_0 \in X$ e mostramos que, marcando dois pontos $\tilde{x}_0, \tilde{x}'_0 \in \pi^{-1}(x_0)$, os dois subgrupos $H := \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ e $H' := \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'_0))$ são conjugados e viceversa. Seja $\tilde{\varphi}$ um caminho em \tilde{X} entre \tilde{x}_0 e \tilde{x}'_0 : a projeção $\varphi := \pi \circ \tilde{\varphi}$ pertence a $\Omega_{x_0}(X)$. É claro que se um caminho $\psi \in \Omega_{x_0}(X)$ se levanta a um caminho fechado $\tilde{\psi}$, então o caminho $\varphi * \psi * \varphi^{-1} \in \Omega_{x_0}(X)$ se levanta ao caminho fechado $\tilde{\varphi} * \tilde{\psi} * \tilde{\varphi}^{-1} \in \Omega_{\tilde{x}'_0}(\tilde{X})$, portanto $[\varphi]^{-1}H[\varphi] \leq H'$, ou seja $H \leq [\varphi]H'[\varphi]^{-1}$. A mesma prova com φ^{-1} mostra que $[\varphi]H'[\varphi]^{-1} \leq H$, portanto $H = [\varphi]H'[\varphi]^{-1}$. Viceversa, para $H := \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ e $[\varphi] \in \pi_1(X, x_0)$, seja $H' := [\varphi]^{-1}H[\varphi]$. Escolhendo um levantamento $\tilde{\varphi}$ de φ e pondo $\tilde{x}'_0 := \tilde{\varphi}(1)$ temos que $H' = \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'_0))$. \square

OBSERVAÇÃO 4.5.35. Como a classe de conjugação do subgrupo trivial só contém um elemento, o teorema mostra que *o recobrimento universal é único a menos de isomorfismo também sem marcar um ponto.* \diamond

4.5.10. Automorfismos de um recobrimento. Considerando as observações precedentes ao teorema 4.5.34, podemos mostrar uma caracterização algébrica dos automorfismos de um recobrimento.

DEFINIÇÃO 4.5.36. Seja $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ um recobrimento. Um automorfismo $f: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ de π é chamado de *transformação de recobrimento* ou *deck transformation*. Denotamos por $G(\pi)$ o grupo das transformações de recobrimento. \diamond

Observamos que, como um automorfismo $f \in G(\pi)$ satisfaz por definição $\pi \circ f = \pi$, trata-se de um levantamento da função $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ a respeito do recobrimento $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$. Pelo teorema 4.5.23 o automorfismo é completamente determinado pela imagem de um ponto: isso significa em particular que o único automorfismo que fixa um ponto \tilde{x}_0 é a identidade, logo *os automorfismos de um recobrimento com ponto marcado são triviais.*

DEFINIÇÃO 4.5.37. Um recobrimento $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ é dito *normal* se dados dois pontos \tilde{x}, \tilde{x}' tais que $\pi(\tilde{x}) = \pi(\tilde{x}')$ existe um automorfismo $f \in G(\pi)$ tal que $f(\tilde{x}) = \tilde{x}'$. \diamond

O seguinte teorema caracteriza algebricamente os automorfismos de um recobrimento e os recobrimentos normais. Lembramos que, dado um subgrupo $H \leq G$, o *normalizador* de H em G é o subgrupo $N(H) = \{g \in G : gHg^{-1} \subset H\}$. Trata-se do máximo subgrupo que contém H e no qual H é normal. É claro que H é normal em G se, e somente se, $N(H) = G$. Denotamos por $H \triangleleft G$ o fato que H seja normal em G .

TEOREMA 4.5.38. *Seja X conexo por caminhos, localmente conexo por caminhos e semilocalmente simplesmente conexo. Seja $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ um recobrimento conexo por caminhos. Para $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ um ponto marcado qualquer, seja $H := \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Temos que:*

- π é normal se, e somente se, $H \triangleleft \pi_1(X, x_0)$;
- $G(\pi)$ é isomorfo ao quociente $N(H)/H$, sendo $N(H)$ o normalizador de H em $\pi_1(X, x_0)$.

Em particular, se π é normal, então $G(\pi) \simeq \pi_1(X, x_0)/H$ e, se π é o recobrimento universal, então $G(\pi) \simeq \pi_1(X, x_0)$.

DEMONSTRAÇÃO. Na demonstração do teorema 4.5.34 mostramos que mudar o ponto base do recobrimento de $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ a $\tilde{x}_1 \in \pi^{-1}(x_0)$ é equivalente a conjugar H por uma classe $[\varphi] \in \pi_1(X, x_0)$ tal que o levantamento $\tilde{\varphi}$ parta de \tilde{x}_0 chegue a \tilde{x}_1 . Isso implica que $[\varphi] \in N(H)$ se e somente se $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$. Pelo teorema 4.5.32, isso é equivalente à existência de um automorfismo de π que manda \tilde{x}_0 em \tilde{x}_1 . Logo o recobrimento é normal se e somente se $N(H) = \pi_1(X, x_0)$, ou seja se e somente se $H \triangleleft \pi_1(X, x_0)$. Seja $\rho: N(H) \rightarrow G(\pi)$ a função que manda $[\varphi] \in N(H)$ no automorfismo f tal que $f(\tilde{x}_0) = \tilde{\varphi}(1)$, sendo $\tilde{\varphi}$ o de φ a partir

de \tilde{x}_0 . Temos que ρ é um homomorfismo: de fato, o caminho $[\varphi][\psi] = [\psi * \varphi]$ se levanta a $\tilde{\psi} * \tilde{\varphi}$, sendo $\tilde{\psi}$ o levantamento que parte de $\tilde{\varphi}(1)$. Portanto $\rho([\psi * \varphi])$ é o automorfismo que manda \tilde{x}_0 em $\tilde{\psi}(1)$, o qual pela unicidade coincide com a composição do que manda \tilde{x}_0 em $\tilde{\varphi}(1) = \tilde{\psi}(0)$ com o que manda $\tilde{\varphi}(1) = \tilde{\psi}(0)$ em $\tilde{\psi}(1)$. Logo $\rho([\varphi][\psi]) = \rho([\psi]) \circ \rho([\varphi]) = \rho([\varphi])\rho([\psi])$ (consideramos como produto de automorfismos fg a composição $g \circ f$). Pela primeira parte da prova ρ é sobrejetor, pois provamos que $[\varphi] \in N(H)$ se e somente se induz um automorfismo. Enfim, o kernel de ρ contém as classes que se levantam a caminhos fechados, pois neste caso obtemos o automorfismo identidade: isso significa que $\text{Ker } \rho = \pi_1(X, x_0)$, portanto $G(\pi) \simeq N(H)/H$. \square

4.5.11. Recobrimentos e ação do grupo fundamental nas fibras. Enfim, só introduzimos brevemente um tópico importante. Na classificação dos recobrimentos só consideramos os conexos por caminhos. Os recobrimentos genéricos são união disjunta de diferentes componentes, portanto não acrescentam nenhuma informação significativa. Todavia, é possível estudar os recobrimentos de um ponto de vista diferente, que não parte dos conexos. De fato, seja $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ um recobrimento. Dado um caminho $\varphi: I \rightarrow X$ entre x_0 e x_1 , temos uma ação natural $L_\varphi: \pi^{-1}(x_0) \rightarrow \pi^{-1}(x_1)$ definida da seguinte maneira: dado $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$, consideramos o levantamento $\tilde{\varphi}$ de φ que parte de \tilde{x}_0 e definimos $L_\varphi(\tilde{x}_0) := \tilde{\varphi}(1)$. Esta ação só depende da classe de homotopia de φ . Ademais, é uma bijeção pois $L_{\varphi^{-1}} = L_\varphi^{-1}$, como é fácil verificar. Enfim $L_{\psi * \varphi} = L_\psi \circ L_\varphi$. Isso significa que, considerando φ fechado, temos uma ação $L: \pi_1(X, x_0) \rightarrow S_{\pi^{-1}(x_0)}$, sendo S_A o grupo das permutações do conjunto A . Como $[\varphi][\psi] = [\psi * \varphi]$, esta ação se torna um morfismo de grupos pondo $L[\varphi] := L_\varphi^{-1}$. Pode-se mostrar que, para X conexo por caminhos, localmente conexo por caminhos e semilocalmente simplesmente conexo, *esta ação classifica o recobrimento a menos de isomorfismo*. Por exemplo, consideremos $X = S^1$ e os recobrimentos com 3 folhas. Temos três recobrimentos a menos de isomorfismo, ou seja: (1) três cópias do recobrimento trivial; (2) uma cópia do trivial e uma de $p_2: S^1 \rightarrow S^1$; (3) $p_3: S^1 \rightarrow S^1$. Um morfismo $L: \pi_1(S^1, 1) \rightarrow S_{\pi^{-1}\{1\}}$, ou seja $L: \mathbb{Z} \rightarrow S_3$, é determinado por $L(1)$, o qual tem os valores seguintes: (1) a identidade; (2) a troca de dois elementos (12); (3) a permutação cíclica (123). Isso mostra como a ação classifica o recobrimento. Em geral, temos que *as classes de isomorfismo de recobrimentos com n folhas de X correspondem às classes de equivalência de homomorfismos $\pi_1(X, x_0) \rightarrow S_n$, sendo S_n o grupo simétrico sobre n elementos e sendo dois homomorfismos equivalentes a menos da conjugação por um elemento de S_n* [1, pp. 68-70].

4.6. Grupos de homotopia de ordem superior e relativos

Vamos dar uma breve introdução aos grupos de homotopia de ordem superior, os quais não serão estudados em detalhe neste curso. Por enquanto definimos os funtores $\pi_0: \text{TopH}_+ \rightarrow \text{Sets}_+$ e $\pi_1: \text{TopH}_+ \rightarrow \text{Grp}$. Claramente π_1 pode também ser pensado como um functor em Sets_+ , sendo um grupo um conjunto com o ponto marcado correspondente à identidade, portanto temos dois funtores π_0 e π_1 em

Sets_+ , entre os quais o segundo pode ser refinado a um functor em Grp . Essa construção pode ser generalizada, definindo os funtores:

$$\pi_n: \text{TopH}_+ \rightarrow \text{GrpAb}, \quad n \geq 2.$$

Isso significa que, para todo $n \geq 0$, fica definido o functor π_n em Sets_+ , o qual pode ser refinado a um functor em Grp para todo $n \geq 1$, cuja imagem está contida em GrpAb para todo $n \geq 2$.

A definição é a seguinte. O grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ foi definido da seguinte maneira: partimos do loop space $\Omega_{x_0}(X)$, formado pelas funções $\varphi: (I, \partial I) \rightarrow (X, x_0)$, e o quocientamos por homotopia relativa a ∂I . Da mesma maneira, consideramos o espaço dos n -caminhos fechados, dito também n -loop space,

$$\Omega_{n, x_0}(X) := \{\varphi: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)\}$$

com a topologia compacto-aberto. Uma *homotopia de n -caminhos fechados* é uma homotopia relativa a ∂I^n . Afinal definimos:

$$\pi_n(X, x_0) := \Omega_{n, x_0}(X)/\text{homotopia}.$$

Definimos a *composição de n -caminhos fechados* da maneira seguinte, para $\varphi_0, \varphi_1 \in \Omega_{n, x_0}(X)$:

$$(103) \quad \varphi_1 * \varphi_0(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} \varphi_0(2t_1, t_2, \dots, t_n) & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ \varphi_1(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

Mostraremos daqui a pouco que a escolha da primeira coordenada na composição não é significativa. A composição (103) define uma operação em $\Omega_{n, x_0}(X)$. No caso $n = 1$ vimos que a composição de caminhos (fechados) é bem definida a menos de homotopia. O seguinte lema mostra que vale o mesmo resultado para todo $n \in \mathbb{N}$.

LEMA 4.6.1. *A composição de n -caminhos fechados é bem definida a menos de homotopia, isto é, se $\varphi_0 \sim \varphi'_0$ e $\varphi_1 \sim \varphi'_1$ em $\Omega_{n, x_0}(X)$, então as composições $\varphi_1 * \varphi_0$ e $\varphi'_1 * \varphi'_0$ são homotópicas.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam Φ_0 uma homotopia entre φ_0 e φ'_0 e Φ_1 uma homotopia entre φ_1 e φ'_1 . Podemos definir a seguinte homotopia entre $\varphi_1 * \varphi_0$ e $\varphi'_1 * \varphi'_0$:

$$\Phi_1 * \Phi_0(t, u) = \begin{cases} \Phi_0(2t_1, t_2, \dots, t_n, u) & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ \Phi_1(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n, u) & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

Esta função é contínua pois, para $t_1 = \frac{1}{2}$, as duas funções $\Phi_0(1, t_2, \dots, t_n, u)$ e $\Phi_1(0, t_2, \dots, t_n, u)$ são constantes com valor x_0 . \square

Graças ao lema precedente, obtemos uma operação bem definida em $\pi_n(X, x_0)$.

LEMA 4.6.2. *Valem as seguintes propriedades.*

- Sejam $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \in \Omega_{n, x_0}(X)$. Então os caminhos $\varphi_2 * (\varphi_1 * \varphi_0)$ e $(\varphi_2 * \varphi_1) * \varphi_0$ são homotópicos.
- Seja $\varphi \in \Omega_{n, x_0}(X)$ e seja c_{x_0} o n -caminho constante com valor x_0 . Então $c_{x_0} * \varphi$ e $\varphi * c_{x_0}$ são homotópicos a φ .

- Seja $\varphi \in \Omega_{n,x_0}(X)$ e seja $\bar{\varphi}$ o caminho definido por $\bar{\varphi}(t_1, t_2, \dots, t_n) := \varphi(1 - t_1, t_2, \dots, t_n)$. Então os caminhos $\bar{\varphi} * \varphi$ e $\varphi * \bar{\varphi}$ são homotópicos ao caminho constante c_{x_0} .

DEMONSTRAÇÃO. A prova é análoga ao caso $n = 1$, pois só a coordenada t_1 fica envolvida nas composições. \square

O lema 4.6.2 implica imediatamente o seguinte teorema.

TEOREMA 4.6.3. $\pi_n(X, x_0)$, com a operação definida pela composição de n -caminhos fechados a menos de homotopia, é um grupo.

DEMONSTRAÇÃO. A primeira propriedade do lema 4.6.2 implica que a composição em $\pi_n(X, x_0)$ é associativa, a segunda que $[c_{x_0}]$ é o elemento neutro e a terceira que $[\bar{\varphi}] = [\varphi]^{-1}$. \square

Agora trabalhamos na categoria Top_+ e vamos definir π_n sobre os morfismos, para obter um functor de Top_+ a Grp . Dado um morfismo $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, fica bem definida a seguinte função:

$$\begin{aligned} f_{\#}: \Omega_{n,x_0}(X) &\rightarrow \Omega_{n,y_0}(Y) \\ \varphi &\mapsto f \circ \varphi. \end{aligned}$$

Como para $n = 1$, a função $f_{\#}$ induz um morfismo de grupos $f_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$. De fato, seja Φ uma homotopia entre φ_0 e φ_1 . É fácil conferir que $f \circ \Phi$ é uma homotopia entre $f_{\#}(\varphi_0)$ e $f_{\#}(\varphi_1)$. Por isso fica bem definida:

$$\begin{aligned} f_*: \pi_n(X, x_0) &\rightarrow \pi_n(Y, y_0) \\ [\varphi] &\mapsto [f_{\#}\varphi]. \end{aligned}$$

TEOREMA 4.6.4. Dada uma função contínua $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, a função f_* é um morfismo de grupos. Ademais, dadas $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ e $g: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$, temos que:

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* \quad (\text{id}_{(X,x_0)})_* = \text{id}_{\pi(X,x_0)}.$$

Portanto, se f for um homeomorfismo, então f_* é um isomorfismo.

DEMONSTRAÇÃO. A prova é análoga ao caso $n = 1$. \square

Por enquanto generalizamos de modo direto a definição e as primeiras propriedades do grupo fundamental aos grupos π_n . O seguinte teorema é específico para o caso $n \geq 2$.

TEOREMA 4.6.5. O grupo $\pi_n(X, x_0)$ é abeliano para $n \geq 2$.

DEMONSTRAÇÃO. Dados $\varphi, \psi \in \Omega_{n,x_0}(X)$, consideremos a composição $\psi * \varphi$. Podemos contrair homotopicamente os retângulos $[0, \frac{1}{2}] \times I^{n-1}$ e $[\frac{1}{2}, 1] \times I^{n-1}$ mantendo em x_0 os pontos ao redor deles. Feito isso, em I^n é possível deslocar homotopicamente os retângulos contraídos invertendo-os. Agora aplicamos a inversa da homotopia precedente, contraindo no bordo os pontos externos aos retângulos. Desta maneira obtemos $\varphi * \psi$. \square

Com a mesma técnica usada na prova do teorema podemos mostrar que a escolha da primeira componente no produto não é significativa: de fato, contraindo o domínio como vimos podemos rodeá-lo e aplicar a homotopia inversa à contração, portanto a troca de coordenadas de I^n não muda a classe de homotopia do n -caminho. Dado que a escolha de outra coordenada na composição equivale à aplicação de uma troca de coordenadas, afinal obtemos o mesmo grupo (não somente a menos de automorfismo).

Com a construção precedente, acabamos de definir uma sequência de funtores:

$$\pi_n: \text{Top}_+ \rightarrow \text{GrpAb}, \quad n \geq 2$$

onde π_n associa a um objeto (X, x_0) o grupo abeliano $\pi_n(X, x_0)$ e a um morfismo $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ o morfismo de grupos $f_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$.

Também para n genérico podemos mostrar que, se X for conexo por caminhos, o grupo $\pi_n(X, x_0)$ não depende de x_0 a menos de isomorfismo não canônico (não necessariamente interno). Por isso, neste caso podemos escrever $\pi_n(X)$ quando estivermos interessados na classe de isomorfismo. De fato, sejam $x_0, x_1 \in X$ e seja $\psi: I \rightarrow X$ um caminho entre x_0 e x_1 . Definimos:

$$\psi_{!!}: \Omega_{n, x_0}(X) \rightarrow \Omega_{n, x_1}(X)$$

da seguinte maneira. Dado $\varphi \in \Omega_{n, x_0}(X)$, contraímos homotopicamente I^n a $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]^n$, mandando em x_0 os demais pontos. Consideramos o feixe de segmentos radiais, ou seja que pertencem cada um a uma semirreta que parte do centro $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$, que unem ∂I^n a $\partial[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]^n$ e tornamos cada um o caminho $\bar{\psi}$ reparametrizado. Deste modo obtemos um caminho $\psi_{!!}(\varphi) \in \Omega_{n, x_1}(X)$. Como no caso $n = 1$ é fácil provar que, se $\varphi_0 \sim \varphi_1$, então $\psi_{!!}(\varphi_0) \sim \psi_{!!}(\varphi_1)$ (é suficiente aplicar a homotopia reparametrizada no retângulo $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]^n$), portanto obtemos uma função bem definida:

$$\psi_{!}: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_1).$$

O fato que seja um morfismo de grupos pode ser provado da seguinte maneira: dado $\psi_{!}(\varphi_1 * \varphi_0)$, deslocamos os domínios contraídos de φ_0 e φ_1 até ficarem em $[\frac{1}{6}, \frac{2}{6}] \times [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]^{n-1}$ e $[\frac{4}{6}, \frac{5}{6}] \times [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]^{n-1}$, mandando os pontos $[\frac{2}{6}, \frac{4}{6}] \times [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]^{n-1}$ em x_0 . Em seguida, consideramos os caminhos radiais que unem as bordas dos dois domínios às dos semi-retângulos $[0, \frac{1}{2}] \times I^{n-1}$ e $[\frac{1}{2}, 1] \times I^{n-1}$ e os mudamos de modo contínuo até torna-los ψ reparametrizado. Desta maneira obtemos $\psi_{!}(\varphi_1) * \psi_{!}(\varphi_0)$. Como para $n = 1$, temos que $\psi_{!}$ só depende da classe de homotopia de φ (a verificação é imediata) e que $(\psi_{!} * \psi_0)_{!} = (\psi_{!})_{!} \circ (\psi_0)_{!}$. O isomorfismo *não* é canônico pois depende da escolha de $[\psi]$. Enfim, observamos que, se ψ for um caminho fechado em x_0 , o isomorfismo $\psi_{!}$ define uma ação de $\pi_1(X, x_0)$ em $\pi_n(X, x_0)$.

Mostramos agora o comportamento dos grupo de homotopia em relação à equivalência homotópica.

LEMA 4.6.6. *Dadas duas funções $f, g: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, se f e g são homotópicas em Top_+ então $f_* = g_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\Phi: X \times I \rightarrow Y$ uma homotopia entre f e g que respeita os pontos marcados. Então, para $[\varphi] \in \pi_n(X, x_0)$, consideramos a homotopia entre $f \circ \varphi$ e $g \circ \varphi$ definida por $\Psi: I^{n+1} \rightarrow Y$, $\Psi(t_1, t_2, \dots, t_n, u) = \Phi(\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n), u)$. Temos que $\Psi(\partial I, u) = \Phi(x_0, u) = y_0$, portanto Ψ é relativa a ∂I . Então $f_*[\varphi] = g_*[\varphi]$. \square

Isso mostra que os funtores π_n passam ao quociente a respeito da equivalência homotópica na categoria Top_+ e portanto definem uma sequência de funtores:

$$\pi_n: \text{TopH}_+ \rightarrow \text{GrpAb}, \quad n \geq 2$$

onde π_n associa a um objeto (X, x_0) o grupo abeliano $\pi_n(X, x_0)$ e a um morfismo $[f]: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ o morfismo de grupos $f_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$.

TEOREMA 4.6.7. *Seja $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ uma equivalência homotópica. Então $f_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ é um isomorfismo.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $g: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ uma equivalência homotópica inversa a f . Pelo lema 4.6.6 temos que $g_* \circ f_* = \text{id}_{\pi_n(X, x_0)}$ e $f_* \circ g_* = \text{id}_{\pi_n(Y, y_0)}$. \square

Esse resultado vale na categoria TopH_+ . Todavia, pode ser generalizado para funções entre espaços sem ponto marcado, ou seja o lema 4.1.14 e o teorema 4.1.15 podem ser generalizados a qualquer $n \in \mathbb{N}$ [1].

Podemos também definir a versão *relativa* do grupos de homotopia π_n para $n \geq 1$. Para isso, precisamos trabalhar na categoria Top_{2+} . Dado I^n , consideramos I^{n-1} mergulhado em I^n como o subespaço $\{(t_1, \dots, t_{n-1}, 0)\}$. Ademais, denotamos por J^{n-1} a união das demais faces, ou seja, o fecho de $(\partial I^n) \setminus I^{n-1}$. Dado um objeto (X, A, x_0) de Top_2 , definimos o conjunto dos *n-caminhos fechados relativos* $\Omega_{x_0}(X, A) := \{\varphi: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)\}$, ou seja das funções que mandam I^{n-1} em A e J^{n-1} em x_0 (portanto ∂I^n todo é mandado em A , pois $x_0 \in A$). De fato trata-se de funções na categoria Top_3 , através do mergulho canônico $\text{Top}_{2+} \hookrightarrow \text{Top}_3$ aplicado a (X, A, x_0) . Uma *homotopia de n-caminhos relativos* é uma homotopia em Top_3 , ou seja uma homotopia $\Phi: (I^{n+1}, (\partial I^n) \times I, J^{n-1} \times I) \rightarrow (X, A, x_0)$. Isso significa que a homotopia é relativa a x_0 mas não é relativa a A , pois I^{n-1} pode mover-se dentro de A . Enfim, definimos:

$$\pi_n(X, A, x_0) := \Omega_{n, x_0}(X, A) / \text{homotopia}.$$

Esta definição é válida para $n \geq 1$. Ademais, podemos definir uma composição análoga à (103), que se torna um produto a menos de homotopia, mas não podemos escolher a última coordenada na composição, pois não seria bem definida (para $t_n = \frac{1}{2}$ teríamos que o primeiro caminho manda $I^{n-1} \times \{\frac{1}{2}\}$ em x_0 enquanto o segundo manda $I^{n-1} \times \{\frac{1}{2}\}$ em A , portanto não se poderiam colar). Isso implica que a composição não é definida para $n = 1$. Podemos também definir o push-forward analogamente ao caso absoluto, portanto ficam definidos os funtores:

$$\pi_n: \text{Top}_{2+} \rightarrow \text{Sets}_+, \quad n \geq 1$$

que podem ser refinados a:

$$\pi_n: \text{Top}_{2+} \rightarrow \text{Grp}, \quad n \geq 2$$

e a:

$$\pi_n: \text{Top}_{2+} \rightarrow \text{GrpAb}, \quad n \geq 3.$$

Em particular $\pi_1(X, A, x_0)$ contém as classes de caminhos que partem de x_0 e chegam a um ponto qualquer de A , a menos de homotopia que fixe x_0 e mantenha o outro extremo dentro de A . Não existe uma estrutura natural de grupo neste conjunto. Observamos que $\pi_n(X, \{x_0\}, x_0)$ coincide com $\pi_n(X, x_0)$, portanto os grupos absolutos se tornam um caso particular dos grupos relativos através do mergulho de categorias (3).

Um fato muito significativo é a existência da *sequência exata longa* associada a um par (X, A) com ponto marcado.⁷ De fato, dado um objeto (X, A, x_0) de Top_{2+} , é possível definir a seguinte sequência de funções entre conjuntos com ponto marcado, alguns dos quais são grupos (abelianos):

$$\begin{aligned} \cdots \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \\ \xrightarrow{i_*} \cdots \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X, x_0). \end{aligned}$$

Os morfismos i_* são induzidos pelo mergulho $i: (A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0)$, os morfismos j_* por $j: (X, \{x_0\}, x_0) \hookrightarrow (X, A, x_0)$ e os morfismos ∂ são definidos restringindo uma classe $[\varphi: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)]$ a $[\varphi|_{I^{n-1}}: (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \rightarrow (A, x_0)]$. Até $\pi_1(X, x_0)$ trata-se de morfismos de grupos, entre os últimos elementos trata-se de funções entre conjuntos com ponto marcado. O fato significativo é que esta sequência é *exata*, ou seja, a imagem de uma flecha é igual ao kernel da sucessiva; no caso de morfismos de grupos temos a definição usual de kernel, enquanto, para uma função entre conjuntos com ponto marcado $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, definimos o kernel como o conjunto dos pontos de X mandados em y_0 .

Observamos que podemos definir π_n através de S^n em vez que I^n . De fato, para todo $n \geq 0$, podemos pensar em um n -caminho fechado $\varphi: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ como em uma função $\varphi: (S^n, *) \rightarrow (X, x_0)$, sendo $I^n/\partial I^n$ homeomorfo a S^n . Podemos escolher um ponto marcado qualquer em S^n , que denotamos por ‘*’, por exemplo, pensando no mergulho canônico $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, podemos marcar $(0, \dots, 0, 1)$. Neste caso a composição $\psi * \varphi$ se define da seguinte maneira: dada a esfera S^n , contraímos a um ponto o equador $S^n \cap \{x_1 = 0\}$, obtendo a união a um ponto de duas esferas. Aplicamos φ à esfera esquerda ($x_1 \leq 0$) e ψ à direita ($x_1 \geq 0$): o levantamento a S^n desta função é $\psi * \varphi$. Um elemento de $\pi_n(X, x_0)$ é uma classe de n -caminhos fechados a menos de homotopia relativa ao ponto marcado *, ou seja a menos de homotopia na categoria Top_+ : isso significa que um elemento de $\pi_n(X, x_0)$ é um morfismo em TopH_+ . No caso relativo, pensamos em um n -caminho $\varphi: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ como em uma função $\varphi: (D^n, \partial D^n, *) \rightarrow (X, A, x_0)$ e definimos a composição de modo análogo. Um elemento de $\pi_n(X, A, x_0)$ é um

⁷Introduziremos no próximo capítulo a noção de *sequência exata* no contexto adequado, mas já podemos discutir os fatos fundamentais em relação aos grupos de homotopia.

morfismo em TopH_{2+} .

Calcular os grupos de homotopia em geral é muito complicado. Isso é devido ao fato que não temos um resultado análogo ao teorema de Seifert-Van Kampen (não com hipóteses tão fracas), portanto não podemos calcular os grupos de um espaço X através de uma cobertura cujos elementos sejam mais simples que X mesmo. Por exemplo, calcular os grupos de homotopia das esferas é um problema muito complicado e ainda não completamente resolvido. Um resultado que permite calcular alguns grupos de homotopia é o seguinte.

TEOREMA 4.6.8. *Seja $\pi: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ um recobrimento. Os morfismos $\pi_*: \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$ são isomorfismos para todo $n \geq 2$.*

DEMONSTRAÇÃO. Pelo teorema 4.5.23 uma função $(S^n, *) \rightarrow (X, x_0)$ se levanta a $(S^n, *) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, pois $\pi_1(S^n) = 1$ para $n \geq 2$. Isso prova que π_* é sobrejetor. Seja $\pi_*[\tilde{\varphi}] = 0$. Então existe uma homotopia $\Phi: (S^n \times I, \{*\} \times I) \rightarrow (X, x_0)$ entre c_{x_0} e $\pi \circ \tilde{\varphi}$. Pelo lema 4.5.18 esta homotopia se levanta a uma única função $\tilde{\Phi}: S^n \times I \rightarrow \tilde{X}$ tal que $\tilde{\Phi}(t, 0) = \tilde{x}_0$. O caminho $\tilde{\Phi}(*, u)$ é um levantamento do caminho constante $\Phi(*, u) = c_{x_0}$ que parte de $\tilde{\Phi}(*, 0) = \tilde{x}_0$, portanto, pela unicidade, é o caminho constante $c_{\tilde{x}_0}$. Temos portanto que $\tilde{\Phi}(*, u) = \tilde{x}_0$, em particular $\tilde{\Phi}(*, 1) = \tilde{x}_0$. Isso implica que $\tilde{\Phi}(t, 1)$ é o levantamento de $\Phi(t, 1) = \pi \circ \tilde{\varphi}(t, 1)$ tal que $\tilde{\Phi}(*, 1) = \tilde{x}_0$, portanto, pela unicidade, $\tilde{\Phi}(t, 1) = \tilde{\varphi}(t)$. Isso mostra que $\tilde{\Phi}$ é uma homotopia de n -caminhos fechados entre $\tilde{\varphi}$ e $c_{\tilde{x}_0}$, portanto $[\tilde{\varphi}] = 0$. \square

Como $\exp: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ é um recobrimento, o teorema implica que $\pi_n(S^1) = 0$ para todo $n \geq 2$. Ademais, para $\mathbb{T}^k = (S^1)^k$, como $\exp^k: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{T}^k$ é um recobrimento, temos também $\pi_n(\mathbb{T}^k) = 0$ para todo $n \geq 2$, enquanto mostraremos que os grupos de homologia de \mathbb{T}^k são não triviais para todo $n \leq k$.

Já dissemos que é complicado calcular os grupos de homotopia das esferas. Pode-se provar que $\pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ e que $\pi_k(S^n) = 0$ para $k < n$. Isso pode ser usado para provar que \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m não são homeomorfos para $n \neq m$. De fato, se $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ fosse um homomorfismo, tirando a origem de \mathbb{R}^n obteríamos um homeomorfismo $\varphi|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{\varphi(0)\}$. Isso é absurdo, pois $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tem o mesmo tipo de homotopia de S^{n-1} , enquanto $\mathbb{R}^m \setminus \{\varphi(0)\}$ tem o mesmo tipo de homotopia de S^{m-1} : supondo $n < m$ temos que $\pi_{m-1}(S^{n-1}) = 0$ e $\pi_{m-1}(S^{m-1}) \simeq \mathbb{Z}$, portanto não pode existir φ . Esta prova é baseada no cálculo de $\pi_k(S^n)$, para $k \leq n$, que não justificamos, todavia mostraremos em seguida uma prova parecida a partir dos grupo de homologia das esferas, os quais são bem mais simples e serão calculados explicitamente.

CAPÍTULO 5

Noções básicas de álgebra homológica

Antes de estudar a homologia e a cohomologia, vamos introduzir as ferramentas de álgebra homológica das quais precisaremos. Apresentar esses tópicos de maneira puramente algébrica, como vamos fazer neste capítulo, pode aparecer muito técnico e bastante entediante, mas acreditamos que é melhor fazer este trabalho no começo, para que possamos discutir as noções sucessivas nos concentrando no seu significado topológico, já tendo familiaridade com a linguagem necessária para exprimi-lo.

5.1. Complexos de (co)cadeias e (co)homologia

DEFINIÇÃO 5.1.1. Um *complexo de cadeias* é uma sequência de morfismos de grupos abelianos da seguinte forma:

$$(104) \quad \cdots \xleftarrow{\partial_{i-1}} A_{i-1} \xleftarrow{\partial_i} A_i \xleftarrow{\partial_{i+1}} A_{i+1} \xleftarrow{\partial_{i+2}} \cdots$$

tal que

$$\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$. Os morfismos ∂_i são chamados de *morfismos de bordo* e os elementos do grupo A_i são chamados de *cadeias de grau i* . \diamond

A condição $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ pode também ser expressa da seguinte forma:

$$\text{Im}(\partial_{i+1}) \subset \text{Ker}(\partial_i).$$

Por isso, podemos dar a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 5.1.2. Os *grupos de homologia* do complexo de cadeias (104) são os seguintes grupos abelianos:

$$(105) \quad H_i(A_\bullet) := \frac{\text{Ker}(\partial_i)}{\text{Im}(\partial_{i+1})}.$$

Às vezes usaremos também a seguinte notação:

$$Z_i(A_\bullet) := \text{Ker}(\partial_i) \quad B_i(A_\bullet) := \text{Im}(\partial_{i+1}) \quad H_i(A_\bullet) := \frac{Z_i(A_\bullet)}{B_i(A_\bullet)}.$$

Os elementos do grupo $Z_i(A_\bullet)$ são chamados de *ciclos de grau i* , os do grupo $B_i(A_\bullet)$ de *bordos de grau i* e os do grupo $H_i(A_\bullet)$ de *classes de homologia de grau i* . \diamond

Observamos que, conforme a definição precedente, todo bordo de grau i é um ciclo do mesmo grau e, analogamente, todo ciclo de grau i é uma cadeia do mesmo grau. De fato, $B_i(A_\bullet) \subset Z_i(A_\bullet) \subset A_i$. Uma classe de homologia $[a] \in H_i(A_\bullet)$ é

representada por um ciclo a , ou seja, por uma cadeia $a \in A_i$ tal que $\partial_i a = 0$, sendo $[a] = [a']$ se, e somente se, existe uma cadeia $b \in A_{i+1}$ tal que $a' = a + \partial_{i+1} b$.

Vamos agora definir os *morfismos* entre complexos de cadeias. Dessa maneira ficará definida a categoria correspondente.

DEFINIÇÃO 5.1.3. Dados dois complexos de cadeias $(A_\bullet, \partial_\bullet^A)$ e $(B_\bullet, \partial_\bullet^B)$, um *morfismo* $\varphi_\bullet: (A_\bullet, \partial_\bullet^A) \rightarrow (B_\bullet, \partial_\bullet^B)$ é uma seqüência de morfismos de grupos abelianos $\varphi_i: A_i \rightarrow B_i$ tal que o seguinte diagrama seja comutativo:

$$(106) \quad \begin{array}{ccccccc} \cdots & \xleftarrow{\partial_{i-1}^A} & A_{i-1} & \xleftarrow{\partial_i^A} & A_i & \xleftarrow{\partial_{i+1}^A} & A_{i+1} & \xleftarrow{\partial_{i+2}^A} & \cdots \\ & & \downarrow \varphi_{i-1} & & \downarrow \varphi_i & & \downarrow \varphi_{i+1} & & \\ \cdots & \xleftarrow{\partial_{i-1}^B} & B_{i-1} & \xleftarrow{\partial_i^B} & B_i & \xleftarrow{\partial_{i+1}^B} & B_{i+1} & \xleftarrow{\partial_{i+2}^B} & \cdots \end{array}$$

◇

Agora podemos definir a seguinte categoria:

- *Categoria* CompCad: Objetos: complexos de cadeias. Morfismos: morfismos de complexos de cadeias.

O grupo de homologia H_i é definido a partir de um objeto da categoria CompCad. Podemos definir a ação correspondente sobre os morfismos, obtendo a seguinte seqüência de funtores (um para cada $i \in \mathbb{Z}$):

$$H_i: \text{CompCad} \rightarrow \text{GrpAb}.$$

Em particular, dado um morfismo $\varphi_\bullet: (A_\bullet, \partial_\bullet^A) \rightarrow (B_\bullet, \partial_\bullet^B)$, definimos o morfismo de grupos abelianos $H_i(\varphi)$, que denotamos também por $\varphi_{*,i}$, da seguinte maneira natural:

$$(107) \quad \begin{aligned} \varphi_{*,i}: H_i(A_\bullet) &\rightarrow H_i(B_\bullet) \\ [a] &\mapsto [\varphi_i(a)]. \end{aligned}$$

É fácil verificar que o morfismo (107) é bem definido: de fato, considerando a definição (105), devemos provar que $\varphi_{*,i}$ manda ciclos em ciclos e bordos em bordos. Isso acontece graças à comutatividade de (106), pois:

- se $\partial_i a = 0$, então $\partial_i^B(\varphi_i(a)) = \varphi_{i-1}(\partial_i^A a) = \varphi_{i-1}(0) = 0$, logo $\varphi_i(a) \in Z_i(B_\bullet)$;
- se $a = \partial_{i+1}^A(a')$, então $\varphi_i(a) = \varphi_i(\partial_{i+1}^A(a')) = \partial_{i+1}^B(\varphi_{i+1}(a')) \in B_i(B_\bullet)$.

Para evitar de fixar o grau i , podemos também considerar a categoria das seqüências de grupos abelianos com índice em \mathbb{Z} :

- *Categoria* SeqGrAb: Objetos: seqüências de grupos abelianos $\{G_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$. Morfismos: seqüências de morfismos $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$.

Observamos que se trata de uma subcategoria cheia de CompCad, pois uma seqüência pode ser pensada como um complexo de cadeias cujos morfismos de bordo são todos nulos. Os grupos de homologia definem o seguinte functor:

$$H_\bullet: \text{CompCad} \rightarrow \text{SeqGrAb}.$$

Considerando tudo o que vimos nesta seção e invertendo a direção das flechas, obtemos a noção dual de cohomologia.

DEFINIÇÃO 5.1.4. Um *complexo de cocadeias* é uma sequência de morfismos de grupos abelianos da seguinte forma:

$$(108) \quad \dots \xrightarrow{\delta^{i-2}} A^{i-1} \xrightarrow{\delta^{i-1}} A^i \xrightarrow{\delta^i} A^{i+1} \xrightarrow{\delta^{i+1}} \dots$$

tal que

$$\delta^{i+1} \circ \delta^i = 0$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$. Os morfismos δ^i são chamados de *morfismos de cobordo*, os elementos do grupo A^i de *cocadeias de grau i* . \diamond

Da maneira análoga definimos os cociclos, os cobordos e os grupos de *cohomologia*:

$$(109) \quad H^i(A^\bullet) := \frac{\text{Ker}(\delta^i)}{\text{Im}(\delta^{i-1})}.$$

Às vezes usaremos também a seguinte notação:

$$Z^i(A^\bullet) := \text{Ker}(\delta^i) \quad B^i(A_\bullet) := \text{Im}(\delta^{i-1}) \quad H^i(A^\bullet) := \frac{Z^i(A^\bullet)}{B^i(A^\bullet)}.$$

Os morfismos de complexos de cocadeias são definidos analogamente aos entre complexos de cadeias, portanto ficam definidos a categoria CompCocad e o functor:

$$H^\bullet: \text{CompCocad} \rightarrow \text{SeqGrAb}.$$

Observamos que, a este nível, a cohomologia é também um functor covariante (será contravariante a partir dos espaços topológicos, pois as cocadeias formarão um functor contravariante). Ademais, *há um isomorfismo de categorias*:

$$(110) \quad \mathcal{I}: \text{CompCad} \xrightarrow{\sim} \text{CompCocad}$$

definido da seguinte maneira:

- em relação aos objetos, $\mathcal{I}(A_\bullet, \partial_\bullet^A) := (A^\bullet, \delta_\bullet^A)$, sendo $A^n := A_{-n}$ e $\delta_\bullet^A := \partial_{-n}^A$;
- em relação aos morfismos, $\mathcal{I}(\varphi_\bullet) := \varphi^\bullet$, sendo $\varphi^n := \varphi_{-n}$.

Temos que

$$H^\bullet = \mathcal{I} \circ H_\bullet \circ \mathcal{I}^{-1}.$$

Por isso, as linguagens da homologia e da cohomologia são equivalentes.

Veremos que, do ponto de vista topológico, a homologia e a cohomologia *não* são equivalentes. Isso é devido ao fato que, ao invés de aplicar (110), usaremos o functor

$$(111) \quad \mathcal{H}: \text{CompCad}^{\text{op}} \rightarrow \text{CompCocad}$$

definido da seguinte maneira:

- em relação aos objetos, $\mathcal{H}(A_\bullet, \partial_\bullet^A) := (A^\bullet, \delta_\bullet^A)$, sendo $A^n := \text{Hom}(A_n, \mathbb{Z})$ e, para $\rho \in A^n$, $(\delta^n \rho)(a) := \rho(\partial_n a)$;
- em relação aos morfismos, dado $\varphi_\bullet: (A_\bullet, \partial_\bullet^A) \rightarrow (B_\bullet, \partial_\bullet^B)$, definimos $\mathcal{H}(\varphi_\bullet) := \varphi^\bullet$, sendo, para $\rho \in B^n$, $(\varphi^n(\rho))(a) = \rho(\varphi_n(a))$.

Neste caso, em geral, os grupos de cohomologia não são isomorfos aos de homologia do complexo de partida. Podemos definir do mesmo modo o functor contravariante $\mathcal{H}' : \text{CompCocad}^{op} \rightarrow \text{CompCad}$, todavia, aplicando os dois funtores em sequência, não obtemos a identidade. Por exemplo, partindo de A_\bullet tal que $A_n = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$, aplicando \mathcal{H} obtemos $A^n = \mathbb{Z}$ e, aplicando \mathcal{H}' , obtemos $A_n = \mathbb{Z}$. Outras aplicações dos funtores continuam dando \mathbb{Z} , mas isso acontece pois partimos de um grupo finitamente gerado; em caso contrário, como acontecerá em seguida, também iterações sucessivas podem dar grupos diferentes.

5.2. Sequências exatas

Nesta seção consideraremos sequências de morfismos grupos abelianos, que podem ser de uma das seguintes formas:

- finitas, ou seja, da forma:

$$(112) \quad A^0 \xrightarrow{\varphi^0} A^1 \xrightarrow{\varphi^1} \dots \xrightarrow{\varphi^{n-2}} A^{n-1} \xrightarrow{\varphi^{n-1}} A^n;$$

- infinitas de um lado, ou seja, da forma:

$$(113) \quad A^0 \xrightarrow{\varphi^0} A^1 \xrightarrow{\varphi^1} A^2 \xrightarrow{\varphi^2} \dots,$$

ou da forma

$$(114) \quad \dots \xrightarrow{\varphi^{-3}} A^{-2} \xrightarrow{\varphi^{-2}} A^{-1} \xrightarrow{\varphi^{-1}} A^0;$$

- infinitas de ambos os lados, ou seja, da forma:

$$(115) \quad \dots \xrightarrow{\varphi^{i-2}} A^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} A^i \xrightarrow{\varphi^i} A^{i+1} \xrightarrow{\varphi^{i+1}} \dots, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

É claro que os índices de (112), (113) e (114) podem ser transladados. Ademais, nos três casos é possível inverter a direção das flechas.

DEFINIÇÃO 5.2.1. Uma sequência de grupos abelianos da forma (112), (113), (114) ou (115) é dita *exata* se $\text{Ker}(\varphi^i) = \text{Im}(\varphi^{i-1})$ para todo i , sendo $i \in \{1, \dots, n-1\}$ para (112), $i \geq 1$ para (113), $i \leq -1$ para (114) e $i \in \mathbb{Z}$ para (115). \diamond

DEFINIÇÃO 5.2.2. Uma sequência exata da forma (115) é dita *sequência exata longa*. \diamond

Uma sequência exata longa é um caso particular de complexo de (co)cadeias, no qual os grupos de (co)homologia são todos nulos. Isso significa que, dado um complexo de (co)cadeias, *os grupos de (co)homologia medem a obstrução à exatidão*. A noção de morfismo de complexos se restringe à de morfismo de sequências exatas longas, definindo a categoria:

- *Categoria SeqExL*: Objetos: sequências exatas longas de grupos abelianos.
Morfismos: morfismos de sequências exatas longas.

Trata-se de uma sub-categoria cheia de CompCocad ou de CompCad , dependendo da direção das flechas.

DEFINIÇÃO 5.2.3. Uma *sequência exata curta* é uma sequência exata finita da seguinte forma:

$$(116) \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow 0.$$

◇

É fácil verificar que (116) pode ser pensada como um caso particular de sequência exata longa, estendendo-a à direita e à esquerda com grupos nulos. A informação proporcionada por uma sequência deste tipo é a seguinte:

- o morfismo i é injetor: de fato, por exatidão, o kernel de i é a imagem do morfismo nulo, ou seja 0;
- o morfismo π é sobrejetor: de fato, por exatidão, a imagem de π é o kernel do morfismo nulo, ou seja C todo;
- π induz um isomorfismo $C \simeq B/i(A)$: de fato, sendo $\text{Im } \pi \simeq B/\text{Ker } \pi$, o resultado segue do fato que $\text{Ker } \pi = \text{Im } i$ e $\text{Im } \pi = C$ por exatidão.

Portanto uma sequência exata curta é um modo equivalente de descrever um quociente de grupos abelianos, a menos de isomorfismo. A noção de morfismo de sequências exatas longas se restringe à de morfismo de sequências exatas curtas, definindo a categoria:

- *Categoria* SeqExC: Objetos: sequências exatas curtas de grupos abelianos. Morfismos: morfismos de sequências exatas curtas.

Trata-se de uma sub-categoria cheia de SeqExL através do mergulho que descrevemos (extensão à direita e à esquerda por grupos nulos). O exemplo mais trivial de sequência exata curta é o seguinte:

$$(117) \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i_A} A \oplus C \xrightarrow{\pi_C} C \longrightarrow 0,$$

onde obviamente $i_A(a) := (a, 0)$ e $\pi_C(a, c) := c$. Todavia, nem todas as sequências exatas são isomorfas a uma deste tipo. Por exemplo, a seguinte sequência:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

é exata mas não há nenhum isomorfismo entre \mathbb{Z} e $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$, pois $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ contém elementos de torção.

DEFINIÇÃO 5.2.4. Uma sequência exata curta, ou seja, da forma (116), *cinde* se for isomorfa a uma da forma (117) na categoria SeqExC. ◇

LEMA 5.2.5. *Os seguintes fatos são equivalentes:*

- (1) (116) *cinde*;
- (2) *existe um morfismo* $p: B \rightarrow A$ *tal que* $p \circ i = \text{id}_A$;
- (3) *existe um morfismo* $j: C \rightarrow B$ *tal que* $\pi \circ j = \text{id}_C$.

DEMONSTRAÇÃO. É óbvio que (1) \Rightarrow (2), (3). Provemos que (2) \Rightarrow (1). Consideremos o morfismo $\varphi: B \rightarrow A \oplus C$ definido por $\varphi(b) := (p(b), \pi(b))$ e provemos que é um isomorfismo.

- É injetor. Seja $\varphi(b) = 0$. Isso implica $\pi(b) = 0$, logo, por exatidão, existe um único $a \in A$ tal que $i(a) = b$. Logo $p(b) = p(i(a)) = a$, portanto $a = 0$, o que implica $b = 0$.
- É sobrejetor. Seja $(a, c) \in A \oplus C$. Por exatidão existe $b \in B$ tal que $\pi(b) = c$. Seja $b' = b - i(p(b) - a)$. Temos que $\pi(b') = c - \pi \circ i(p(b) - a) = c$ e $p(b') = p(b) - p \circ i(p(b) - a) = p(b) - (p(b) - a) = a$.

É fácil verificar que φ comuta com os demais morfismos, definindo um isomorfismo de seqüências exatas. O fato que (3) \Rightarrow (1) se prova de modo análogo, considerando o isomorfismo $\varphi : A \oplus C \rightarrow B$ definido por $\varphi(a, c) := i(a) + j(c)$. \square

Enfim, podemos considerar seqüências exatas de comprimento fixado, ou seja da forma (112). Estendendo da maneira óbvia a definição de morfismo obtemos a categoria:

- *Categoria* SeqEx_n : Objetos: seqüências exatas de n grupos abelianos. Morfismos: morfismos de seqüências exatas.

Podemos também mergulhar SeqEx_n em SeqExL acrescentando $0 \rightarrow \text{Ker } \varphi^0 \rightarrow$ à esquerda e $\rightarrow \text{Coker } \varphi^{n-1} \rightarrow 0$ à direita. Uma consideração análoga vale para as seqüências infinitas de um lado.

5.3. Categorias abelianas

Por enquanto sempre trabalhamos com grupos abelianos, mas as definições precedentes podem ser facilmente generalizadas a anéis comutativos, R -módulos e várias estruturas parecidas. De fato, podemos definir as ferramentas introduzidas nas seções precedentes a partir de uma categoria que compartilhe algumas propriedades significativas com a dos grupos abelianos. Em particular, observamos que, na categoria dos grupos abelianos, valem os seguintes fatos.

- (1) Os morfismos entre dois objetos fixados podem ser pensados de modo natural como os elementos de um grupo abeliano (o qual, portanto, é um objeto da mesma categoria que estamos analisando). De fato, fixando dois objetos G e H , se $f, g: G \rightarrow H$ forem morfismos, podemos definir o morfismo $f+g: G \rightarrow H$ por $(f+g)(a) := f(a)+g(a)$. O elemento neutro é o morfismo nulo, que manda todo elemento de G no elemento nulo de H . Ademais, a composição, quando for definida, é bi-aditiva, ou seja $(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h$ e $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$.
- (2) Existe um objeto 0 na categoria (o grupo abeliano trivial) tal que $\text{Hom}(0, 0) = 0$.
- (3) Dados dois objetos da categoria, existem a soma direta e o produto direto e, como objetos, são canonicamente isomorfos.

As categorias que satisfazem estas propriedades são chamadas de *categorias aditivas*. Mais precisamente, uma categoria aditiva \mathcal{C} é definida por:

- uma categoria \mathcal{C} ;
- uma estrutura de grupo abeliano no conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ para todo par de objetos $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$

de modo que:

- (1) a composição seja bi-aditiva;
- (2) exista um objeto $0 \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, dito *objeto nulo*, tal que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(0, 0)$ seja o grupo abeliano trivial;
- (3) dados dois objetos quaisquer $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, existam o coproduto $(X \amalg Y, i_X, i_Y)$ e o produto $(X \times Y, \pi_X, \pi_Y)$ e $X \amalg Y \simeq X \times Y$ canonicamente.

Na verdade a terceira propriedade é consequência de um axioma mais completo, mas não precisaremos dos detalhes técnicos. Observamos que, em geral, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ não é um objeto de \mathcal{C} , pois isso só acontece na categoria $\mathcal{C} = \text{GrpAb}$.

OBSERVAÇÃO 5.3.1. Pode-se provar, a partir dos axiomas, que o objeto nulo é único a menos de isomorfismo canônico e que, para qualquer objeto $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, temos que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, 0) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(0, X) = 0$. \diamond

EXEMPLO 5.3.2. As seguintes categorias são aditivas, definindo da maneira natural a estrutura de grupo abeliano nos conjuntos de morfismos: categoria dos grupos abelianos, dos anéis comutativos, dos R -módulos, dos \mathbb{K} -espaços vetoriais, das \mathbb{K} -álgebras (sendo R um anel e \mathbb{K} um corpo fixados). Observamos que, em todos estes exemplos, os objetos têm uma estrutura de grupo abeliano enriquecida por outras operações, internas ou externas. Isso não ocorre sempre: por exemplo, a categoria dos feixes de grupos abelianos em um espaço topológico X é aditiva, mas não se obtém acrescentando algumas operações a um grupo abeliano. \diamond

Dado um morfismo em uma categoria aditiva, é possível dar uma definição categorial de kernel e de cokernel, portanto também de imagem e de coimagem. Não precisaremos em seguida da definição categorial, portanto é suficiente pensar na definição usual, que concerne morfismos entre conjuntos com estruturas adicionais. Isso pressupõe que, na categoria aditiva \mathcal{C} considerada, valham os seguintes fatos:

- todo objeto de \mathcal{C} é um conjunto, com outras operações e estruturas, que possui um elemento nulo;
- todo morfismo de \mathcal{C} é uma função entre conjuntos, que respeita as operações e as estruturas adicionais (em particular, manda o elemento nulo no elemento nulo).

Uma categoria desse tipo é chamada de *categoria concreta* (estamos assumindo que seja também aditiva; em caso contrário, os objetos não possuiriam um elemento nulo em geral). Dessa maneira ficam definidas de modo simples as seguintes noções.

- *Sub-objeto* de um objeto X (sub-grupo abeliano, sub-espaço vetorial, e assim em diante): Y é um sub-objeto de X se for um objeto de \mathcal{C} tal que, como conjunto, $Y \subset X$ e a inclusão $i: Y \hookrightarrow X$ é um morfismo em \mathcal{C} . Isso implica que o elemento nulo de Y coincide com o de X .
- *Kernel* de um morfismo $f: X \rightarrow Y$: se existe um sub-objeto de X que, como conjunto, é formado pelos elementos mandados por φ no elemento nulo, o chamamos de kernel de φ e o denotamos por $\text{Ker}\varphi$.
- *Imagem* de um morfismo $f: X \rightarrow Y$: se existe um sub-objeto de Y que, como conjunto, coincide com a imagem da função φ , o chamamos de imagem de φ e o denotamos por $\text{Im}\varphi$.

- *Quociente* de um objeto X por um sub-objeto Y : se for definido, se trata de um objeto X/Y , o qual, como conjunto, é o quociente de X por uma relação de equivalência induzida por Y , de modo que a projeção $\pi: X \rightarrow X/\sim$ seja um morfismo (necessariamente sobrejetor) em \mathcal{C} cujo kernel é Y .
- *Cokernel* de um morfismo $f: X \rightarrow Y$: se for definido, é o quociente $Y/\text{Im}f$.
- *Coimagem* de um morfismo $f: X \rightarrow Y$: se for definida, é o quociente $X/\text{Ker}f$.

As categorias aditivas que vimos são todas concretas (um exemplo de categoria não concreta é TopH, por causa dos morfismos, mas nem é aditiva). Em geral, em uma categoria aditiva, *não* todo morfismo admite kernel e imagem, portanto nem cokernel e coimagem. Veremos exemplos daqui a pouco (em particular, mostraremos que a categoria das seqüências exatas de grupos abelianos é aditiva, mas não todo morfismo admite kernel e imagem). Todavia, na categoria dos grupos abelianos acontece o seguinte:

- (4) qualquer morfismo admite kernel, imagem, cokernel e coimagem;
- (5) um morfismo φ induz um isomorfismo entre imagem e coimagem (teorema de homomorfismo).

As categorias aditivas que satisfazem estas propriedades (mais precisamente, um axioma específico que implica estas duas propriedades) são chamadas de *categorias abelianas*. As categorias que consideramos precedentemente (grupos abelianos, anéis, R -módulos, \mathbb{K} -espaços vetoriais, \mathbb{K} -álgebras) são todas abelianas.

Consideremos uma categoria abeliana \mathcal{A} . Podemos construir as categorias

$$(118) \quad \text{CompCad}_{\mathcal{A}} \quad \text{CompCocad}_{\mathcal{A}} \quad \text{SeqExL}_{\mathcal{A}} \quad \text{SeqExC}_{\mathcal{A}} \quad \text{SeqEx}_{n,\mathcal{A}}$$

como fizemos a respeito dos grupos abelianos, só considerando os objetos de \mathcal{A} ao invés dos de GrpAb. Por exemplo, se \mathcal{A} for a categoria dos espaços vetoriais sobre o corpo \mathbb{K} , que denotamos por $\text{Vect}_{\mathbb{K}}$, um objeto de $\text{CompCad}_{\text{Vect}_{\mathbb{K}}}$ é um complexo de cadeias em que cada entrada é um \mathbb{K} -espaço vetorial e cada morfismo de bordo é uma função linear. Os grupos de homologia, sendo quocientes de \mathbb{K} -espaços vetoriais, são \mathbb{K} -espaços vetoriais também. Em geral, fica definido o seguinte functor homologia:

$$H_{\bullet}: \text{CompCad}_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Seq}\mathcal{A},$$

sendo $\text{Seq}\mathcal{A}$ a categoria das seqüências de objetos de \mathcal{A} com índice em \mathbb{Z} .

Observamos o seguinte fato fundamental: dada uma categoria abeliana \mathcal{A} , as categorias $\text{CompCad}_{\mathcal{A}}$ e $\text{CompCocad}_{\mathcal{A}}$ são também abelianas. De fato, dados dois morfismos $\varphi_{\bullet}, \psi_{\bullet}: (A_{\bullet}, \partial_{\bullet}^A) \rightarrow (B_{\bullet}, \partial_{\bullet}^B)$, o morfismo soma $\varphi_{\bullet} + \psi_{\bullet}$ pode ser definido somando φ_n e ψ_n em cada grau n . É fácil verificar que se trata de um morfismo de complexos:

$$\begin{aligned} (\varphi_n + \psi_n) \circ \partial_{n+1}^A &= \varphi_n \circ \partial_{n+1}^A + \psi_n \circ \partial_{n+1}^A \\ &= \partial_{n+1}^B \circ \varphi_{n+1} + \partial_{n+1}^B \circ \psi_{n+1} = \partial_{n+1}^B \circ (\varphi_{n+1} + \psi_{n+1}). \end{aligned}$$

O leitor pode verificar que a composição de morfismos é bi-aditiva e que a seqüência nula é o elemento 0 da categoria. Ademais, a soma direta e o produto direto de dois complexos são definidos da maneira natural, aplicando a soma direta e o produto

direto na categoria \mathcal{A} em cada grau. Como os dois são isomorfos em \mathcal{A} , o leitor pode verificar que o mesmo vale em $\text{CompCad}_{\mathcal{A}}$. Isso mostra que $\text{CompCad}_{\mathcal{A}}$ é uma categoria aditiva. Ademais, seja $\varphi_{\bullet}: (A_{\bullet}, \partial_{\bullet}^A) \rightarrow (B_{\bullet}, \partial_{\bullet}^B)$ um morfismo. Podemos definir o kernel por $(\text{Ker } \varphi)_n := \text{Ker}(\varphi_n)$, restringindo os bordos. A restrição fica bem definida, ou seja, se $a \in \text{Ker}(\varphi_{n+1})$, então $\partial_{n+1}^A a \in \text{Ker}(\varphi_n)$: de fato, $\varphi_n(\partial_{n+1}^A a) = \partial_{n+1}^B(\varphi_{n+1}(a)) = \partial_{n+1}^B(0) = 0$. Uma definição análoga vale para a imagem, portanto ficam definidos o cokernel e a coimagem.

Observamos que *as categorias de seqüências exatas são aditivas mas não abelianas*, pois o kernel e o cokernel de um morfismo de seqüências exatas podem não ser exatos. Por exemplo, consideremos o seguinte morfismo de seqüências exatas curtas de grupos abelianos:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 2} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \cdot 2 & & \downarrow \cdot 2 & & \downarrow \cdot 2 & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 2} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

O kernel na categoria dos complexos de cadeias (a menos do mergulho canônico) é a seqüência $0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$, que não é exata, e a imagem é $0 \rightarrow 2\mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow 0$, sendo o morfismo não trivial a multiplicação por 2, a qual tampouco é exata.

Como $\text{CompCad}_{\mathcal{A}}$ e $\text{CompCocad}_{\mathcal{A}}$ são abelianas, podemos iterar as construções mostradas obtendo categorias do tipo $\text{CompCad}_{\text{CompCad}_{\mathcal{A}}}$, $\text{SeqExC}_{\text{CompCad}_{\mathcal{A}}}$ e assim em diante. A categoria $\text{SeqExC}_{\text{CompCad}_{\mathcal{A}}}$ é particularmente importante. Um objeto dela é uma seqüência exata curta:

$$(119) \quad 0 \longrightarrow A_{\bullet} \xrightarrow{i_{\bullet}} B_{\bullet} \xrightarrow{\pi_{\bullet}} C_{\bullet} \longrightarrow 0,$$

onde cada elemento é um complexo de cadeias em \mathcal{A} . Portanto, de fato, trata-se de um diagrama comutativo da seguinte forma:

$$(120) \quad \begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{i_{n+1}} & B_{n+1} & \xrightarrow{\pi_{n+1}} & C_{n+1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial_{n+1}^A & & \downarrow \partial_{n+1}^B & & \downarrow \partial_{n+1}^C \\ 0 & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{i_n} & B_n & \xrightarrow{\pi_n} & C_n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial_n^A & & \downarrow \partial_n^B & & \downarrow \partial_n^C \\ 0 & \longrightarrow & A_{n-1} & \xrightarrow{i_{n-1}} & B_{n-1} & \xrightarrow{\pi_{n-1}} & C_{n-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Um morfismo na categoria é definido por um morfismo em cada posição do diagrama de modo que todos os possíveis sub-diagramas comutem, portanto pode ser representado por um diagrama tridimensional.

NOTAÇÃO 5.3.3. Quando a categoria abeliana \mathcal{A} é a dos grupos abelianos, vamos subentendê-la. Por exemplo, a categoria $\text{SeqExC}_{\text{CompCad}_{\text{GrpAb}}}$ pode ser denotada por $\text{SeqExC}_{\text{CompCad}}$. \diamond

OBSERVAÇÃO 5.3.4. As categorias (118) não estão sendo tratadas como categorias concretas, mesmo se \mathcal{A} o for, pois os objetos são sequências de conjuntos e de funções, não conjuntos. Por isso, definimos o kernel e a imagem atuando em cada grau, portanto globalmente não se trata de sub-conjuntos de um único conjunto fixado. Mesmo assim, tendo um conjunto para cada grau, as noções de sub-objeto, quociente e assim em diante ficam definidas de modo natural. Na verdade, as categorias (118) são concretas quando \mathcal{A} o é, mas é mais natural pensá-las como fizemos. Para associar um conjunto a cada objeto de $\text{CompCad}_{\mathcal{A}}$, podemos associar a um complexo $(A_{\bullet}, \partial_{\bullet}^A)$ o conjunto $\{(a_i, \partial_i a_i)\}_{i \in \mathbb{Z}} : a_i \in A_i\}$, ou seja, o conjunto que contém as sequências de pares formados por um elemento de cada conjunto A_i e a sua imagem através do bordo. Isso define univocamente os objetos do complexo e os morfismos de bordo. O elemento nulo é $\{(0, 0)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ e o kernel e a imagem de um morfismo, definidos dessa maneira, coincidem com as que introduzimos nesta seção. \diamond

5.4. Morfismo de Bockstein

Vamos considerar mais em detalhe a categoria $\text{SeqExC}_{\text{CompCad}_{\mathcal{A}}}$. Uma propriedade importante, graças à qual poderemos formular um axioma fundamental da homologia e da cohomologia de um espaço topológico, consiste no fato que, dado um objeto desta categoria, podemos construir uma sequência exata longa formada pelos grupos de homologia dos complexos envolvidos, os quais são elementos de \mathcal{A} (por exemplo grupos abelianos, anéis e assim em diante). Mais precisamente, existe um functor:

$$(121) \quad \mathcal{B}: \text{SeqExC}_{\text{CompCad}_{\mathcal{A}}} \rightarrow \text{SeqExL}_{\mathcal{A}}$$

definido da seguinte maneira. Consideremos a sequência exata curta de complexos de cadeias (119). A imagem dela através de \mathcal{B} é a sequência:

$$(122) \quad \cdots \xrightarrow{i_{*,n}} H_n(B_{\bullet}) \xrightarrow{\pi_{*,n}} H_n(C_{\bullet}) \xrightarrow{\beta_n} H_{n-1}(A_{\bullet}) \xrightarrow{i_{*,n-1}} H_{n-1}(B_{\bullet}) \xrightarrow{\pi_{*,n-1}} \cdots,$$

onde $\beta_n: H_n(C_{\bullet}) \rightarrow H_{n-1}(A_{\bullet})$ é o morfismo de complexos que agora vamos definir, chamado de *morfismo de Bockstein*. O leitor pode olhar o diagrama (120) enquanto acompanha a seguinte definição.

- Dada uma classe $[c] \in H_n(C_{\bullet})$, sendo π_n sobrejetor, existe um levantamento $b \in B_n$ tal que $\pi_n(b) = c$. Seja $b_1 = \partial_n^B b \in B_{n-1}$. Temos que $\pi_{n-1}(b_1) = \pi_{n-1}(\partial_n^B b) = \partial_{n-1}^C(\pi_n(b)) = \partial_{n-1}^C(c) = 0$, pois c é um ciclo. Portanto, por exatidão, existe $a \in A_{n-1}$ tal que $i_{n-1}(a) = b_1$. Ademais $i_{n-2}(\partial_{n-1}^A(a)) = \partial_{n-1}^B(i_{n-1}(a)) = \partial_{n-1}^B(b_1) = \partial_{n-1}^B(\partial_n^B b) = 0$, portanto, sendo i_{n-2} injetora, $\partial_{n-1}^A(a) = 0$. Definimos então $\beta_n[c] := [a]$.

Vamos verificar que β_n é bem definido. Suponhamos de escolher outro representante $c' \in C_n$ tal que $[c] = [c']$ e um levantamento $b' \in B_n$ tal que $\pi_n(b') = c'$. Temos que

$c' = c + \partial_{n+1}^C \tilde{c}$. Como π_{n+1} é sobrejetor, existe $\tilde{b} \in B_{n+1}$ tal que $\pi_{n+1}(\tilde{b}) = \tilde{c}$, logo $\pi_n(b') = \pi_n(b) + \partial_{n+1}^C \pi_{n+1}(\tilde{b}) = \pi_n(b) + \pi_n \partial_{n+1}^B(\tilde{b})$, ou seja $\pi_n(b' - b - \partial_{n+1}^B(\tilde{b})) = 0$. Por exatidão existe $\tilde{a} \in A_n$ tal que $i_n(\tilde{a}) = b' - b - \partial_{n+1}^B(\tilde{b})$, ou seja $b' = b + \partial_{n+1}^B(\tilde{b}) + i_n(\tilde{a})$. Por isso, como $\partial_n^B \circ \partial_{n+1}^B = 0$, temos $b'_1 := \partial_n^B b' = b_1 + \partial_n^B i_n(\tilde{a}) = b_1 + i_{n-1} \partial_n^A(\tilde{a})$. Temos que escolher a' tal que $i_{n-1}(a') = b'_1$: como i_{n-1} é injetora, a' é único, portanto tem que coincidir com $a + \partial_n^A(\tilde{a})$. Isso prova que $[a] = [a']$.

Enfim, verifiquemos que (122) é exata:

- *Exatidão em $H_n(A_\bullet)$.* Seja $[a] = \beta_{n+1}[c] \in H_n(A_\bullet)$. Isso significa que $i_n(a) = b_1 = \partial_{n+1}^B b$ conforme a construção do morfismo de Bockstein. Por isso $(i_n)_*[a] = 0$. Isso prova que $(i_n)_* \circ \beta_{n+1} = 0$. Seja agora $[a] \in H_n(A_\bullet)$ tal que $(i_n)_*[a] = 0$. Isso significa que existe $b \in B_{n+1}$ tal que $i_n(a) = \partial_{n+1}^B b$. Seja $c := \pi_{n+1}(b) \in C_{n+1}$. Temos que $\partial_{n+1}^C(c) = \partial_{n+1}^C(\pi_{n+1}(b)) = \pi_n(\partial_{n+1}^B(b)) = \pi_n(i_n(a)) = 0$, logo c é um ciclo. Por construção temos que $\beta_{n+1}[c] = [a]$.
- *Exatidão em $H_n(B_\bullet)$.* Temos que $(\pi_n)_* \circ (i_n)_* = (\pi_n \circ i_n)_* = 0$. Seja agora $[b] \in H_n(B_\bullet)$ tal que $(\pi_n)_*[b] = 0$. Isso significa que $\pi_n(b) = \partial_{n+1}^C(\tilde{c})$. Como π_{n+1} é sobrejetora, temos que $\tilde{c} = \pi_{n+1}(\tilde{b})$, portanto $\pi_n(b) = \partial_{n+1}^C(\pi_{n+1}(\tilde{b})) = \pi_n(\partial_{n+1}^B(\tilde{b}))$, ou seja $\pi_n(b - \partial_{n+1}^B(\tilde{b})) = 0$. Por exatidão de (119) temos que $b - \partial_{n+1}^B(\tilde{b}) = i_n(a)$. Ademais $i_{n-1}(\partial_n^A(a)) = \partial_n^B(i_n(a)) = \partial_n^B(b - \partial_{n+1}^B(\tilde{b})) = 0$, logo, sendo i_{n-1} injetora, $\partial_n^A(a) = 0$. Portanto $(i_n)_*[a] = [b - \partial_{n+1}^B(\tilde{b})] = [b]$.
- *Exatidão em $H_n(C_\bullet)$.* Seja $[c] = (\pi_n)_*[b] \in H_n(C_\bullet)$. Isso significa que $c = \pi_n(b) + \partial_{n+1}^C \tilde{c}$, onde b é um ciclo. Como π_{n+1} é sobrejetora, temos que $\tilde{c} = \pi_{n+1}(\tilde{b})$, logo $c = \pi_n(b + \partial_{n+1}^B \tilde{b})$. Por isso, na construção do morfismo de Bockstein, podemos escolher como imagem inversa de c o ciclo $b + \partial_{n+1}^B \tilde{b}$, assim $b_1 = 0$, logo $a = 0$. Isso prova que $\beta_n[c] = 0$. Seja agora $[c] \in H_n(C_\bullet)$ tal que $\beta_n[c] = 0$. Isso significa que $c = \pi_n(b)$ tal que $\partial_n^B b = i_{n-1}(\partial_n^A a')$, logo $\partial_n^B b = \partial_n^B(i_n(a'))$, ou seja $\partial_n^B(b - i_n(a')) = 0$. Por exatidão temos que $\pi_n(b - i_n(a')) = \pi_n(b) = c$, portanto $[c] = \pi_*[b - i_n(a')]$.

Desta maneira construímos a ação de \mathcal{B} sobre os objetos. Seja agora Φ um morfismo na categoria $\text{SeqExC}_{\text{CompCad}_{\mathcal{A}}}$. Isso significa que Φ é uma tripla de morfismos $(\Phi_\bullet^A, \Phi_\bullet^B, \Phi_\bullet^C)$ na categoria $\text{CompCad}_{\mathcal{A}}$ que torna o seguinte diagrama comutativo:

$$(123) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_\bullet & \xrightarrow{i_\bullet} & B_\bullet & \xrightarrow{\pi_\bullet} & C_\bullet \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \Phi_\bullet^A & & \downarrow \Phi_\bullet^B & & \downarrow \Phi_\bullet^C \\ 0 & \longrightarrow & A'_\bullet & \xrightarrow{i'_\bullet} & B'_\bullet & \xrightarrow{\pi'_\bullet} & C'_\bullet \longrightarrow 0. \end{array}$$

Cada uma das três componentes de Φ é uma sequência de morfismos em \mathcal{A} que comutam com os bordos dos complexos correspondentes. A imagem de Φ através

de \mathcal{B} é o seguinte morfismo de seqüências exatas:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \xrightarrow{i_{*,n}} & H_n(B_\bullet) & \xrightarrow{\pi_{*,n}} & H_n(C_\bullet) & \xrightarrow{\beta_n} & H_{n-1}(A_\bullet) & \xrightarrow{i_{*,n-1}} & H_{n-1}(B_\bullet) & \xrightarrow{\pi_{*,n-1}} & \dots \\ & & \downarrow \Phi_{*,n}^B & & \downarrow \Phi_{*,n}^C & & \downarrow \Phi_{*,n-1}^A & & \downarrow \Phi_{*,n-1}^B & & \\ \dots & \xrightarrow{i'_{*,n}} & H_n(B_\bullet) & \xrightarrow{\pi'_{*,n}} & H_n(C_\bullet) & \xrightarrow{\beta'_n} & H_{n-1}(A_\bullet) & \xrightarrow{i'_{n-1,*}} & H_{n-1}(B_\bullet) & \xrightarrow{\pi'_{n-1,*}} & \dots \end{array}$$

O leitor pode verificar que o diagrama é comutativo, logo é um morfismo de seqüências exatas longas.

5.5. Homotopia de morfismos de complexos de (co)cadeias

Vamos agora introduzir a noção algébrica de *homotopia* entre morfismos de complexos de (co)cadeias, cujo nome deriva do fato que, nos vários exemplos topológicos que construiremos em seguida, será induzida naturalmente por uma homotopia de funções contínuas.

DEFINIÇÃO 5.5.1. Sejam $\varphi_\bullet, \psi_\bullet: (A_\bullet, \partial_\bullet^A) \rightarrow (B_\bullet, \partial_\bullet^B)$ morfismos de complexos de cadeias. Uma *homotopia* entre φ_\bullet e ψ_\bullet é uma seqüência de morfismos de grupos abelianos $P_n: A_n \rightarrow B_{n+1}$ tal que:

$$\varphi_n - \psi_n = \partial_{n+1}^B \circ P_n + P_{n-1} \circ \partial_n^A.$$

Se existir uma homotopia, os morfismos φ_\bullet e ψ_\bullet são ditos *homotópicos*. ◇

O diagrama que representa os morfismos envolvidos é o seguinte:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \xleftarrow{\partial_{n-1}^A} & A_{n-1} & \xleftarrow{\partial_n^A} & A_n & \xleftarrow{\partial_{n+1}^A} & A_{n+1} & \xleftarrow{\partial_{n+2}^A} & \dots \\ & \searrow P_{n-2} & \downarrow \varphi_{n-1} - \psi_{n-1} & \searrow P_{n-1} & \downarrow \varphi_n - \psi_n & \searrow P_n & \downarrow \varphi_{n+1} - \psi_{n+1} & \searrow P_{n+1} & \\ \dots & \xleftarrow{\partial_{n-1}^B} & B_{n-1} & \xleftarrow{\partial_n^B} & B_n & \xleftarrow{\partial_{n+1}^B} & B_{n+1} & \xleftarrow{\partial_{n+2}^B} & \dots \end{array}$$

É muito fácil verificar que se trata de uma relação de equivalência, portanto podemos quocientar os morfismos por homotopia obtendo a seguinte categoria:

- *Categoria* CompCadH_A : Objetos: complexos de cadeias. Morfismos: classes de equivalência de morfismos de complexos de cadeias a menos de homotopia.

O seguinte lema será fundamental para mostrar a invariância da homologia e da cohomologia por homotopia.

LEMA 5.5.2. Sejam $\varphi_\bullet, \psi_\bullet: (A_\bullet, \partial_\bullet^A) \rightarrow (B_\bullet, \partial_\bullet^B)$ morfismos homotópicos. Os morfismos induzidos em homologia coincidem, ou seja, $\varphi_* = \psi_*$.

DEMONSTRAÇÃO. Dado $[a] \in H_n(A_\bullet)$, temos que $\varphi_{*,n}[a] - \psi_{*,n}[a] = [\varphi_n(a) - \psi_n(a)] = [\partial_{n+1}^B(P_n(a)) + P_{n-1}(\partial_n^A(a))] = [\partial_{n+1}^B(P_n(a))] = 0$. A penúltima igualdade é devida ao fato que a é um ciclo, portanto $\partial_n^A(a) = 0$, e a última é devida ao fato que a classe de homologia de um bordo é nula por definição. □

Isso significa que o functor homologia passa ao quociente por homotopia, tornando-se o seguinte functor:

$$H_{\bullet}: \text{CompCadH}_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Seq}\mathcal{A}.$$

A seguinte definição é análoga à que demos em relação aos espaços topológicos.

DEFINIÇÃO 5.5.3. Dois complexos de cadeias $(A_{\bullet}, \partial_{\bullet}^A)$ e $(B_{\bullet}, \partial_{\bullet}^B)$ são *homotopicamente equivalentes* ou *têm o mesmo tipo de homotopia* quando são isomorfos na categoria CompCadH . \diamond

Isso significa que existem dois morfismos $\varphi_{\bullet}: (A_{\bullet}, \partial_{\bullet}^A) \rightarrow (B_{\bullet}, \partial_{\bullet}^B)$ e $\psi_{\bullet}: (B_{\bullet}, \partial_{\bullet}^B) \rightarrow (A_{\bullet}, \partial_{\bullet}^A)$ tais que $\psi_{\bullet} \circ \varphi_{\bullet} \simeq \text{id}_{A_{\bullet}}$ e $\varphi_{\bullet} \circ \psi_{\bullet} \simeq \text{id}_{B_{\bullet}}$. Segue do lema 5.5.2 que dois complexos homotopicamente equivalentes têm grupos de homologia isomorfos.

OBSERVAÇÃO 5.5.4. Tudo o que mostramos nesta seção vale de modo análogo para complexos de cocadeias, construindo a categoria $\text{CompCocadH}_{\mathcal{A}}$. \diamond

5.6. Lema dos cinco

O seguinte lema é uma ferramenta muito útil de álgebra homológica, que aplicaremos em várias situações.

LEMA 5.6.1 (Lema dos cinco). *Seja \mathcal{A} uma categoria abeliana. Dado um morfismo em $\text{SeqEx}_{5,\mathcal{A}}$ da seguinte forma:*

$$\begin{array}{ccccccccc} A^1 & \xrightarrow{\varphi^1} & A^2 & \xrightarrow{\varphi^2} & A^3 & \xrightarrow{\varphi^3} & A^4 & \xrightarrow{\varphi^4} & A^5 \\ \downarrow \Phi^1 & & \downarrow \Phi^2 & & \downarrow \Phi^3 & & \downarrow \Phi^4 & & \downarrow \Phi^5 \\ B^1 & \xrightarrow{\psi^1} & B^2 & \xrightarrow{\psi^2} & B^3 & \xrightarrow{\psi^3} & B^4 & \xrightarrow{\psi^4} & B^5, \end{array}$$

se Φ^2 e Φ^4 forem isomorfismos, Φ^1 for sobrejetor e Φ^5 for injetor (em particular, se $\Phi^1, \Phi^2, \Phi^4, \Phi^5$ forem isomorfismos) então também Φ^3 é um isomorfismo.

DEMONSTRAÇÃO. Provemos que Φ^3 é injetor. Seja $a \in A^3$ tal que $\Phi^3(a) = 0$. Como $\psi^3(\Phi^3(a)) = \psi^3(0) = 0$ e como $\psi^3 \circ \Phi^3 = \Phi^4 \circ \varphi^3$, temos que $\Phi^4(\varphi^3(a)) = 0$, logo, sendo Φ^4 um isomorfismo, $\varphi^3(a) = 0$. Por exatidão da linha acima, existe $a' \in A^2$ tal que $\varphi^2(a') = a$, logo $\Phi^3(\varphi^2(a')) = 0$. Como $\Phi^3 \circ \varphi^2 = \psi^2 \circ \Phi^2$, temos que $\psi^2(\Phi^2(a')) = 0$, logo, por exatidão da linha abaixo, existe $b' \in B^1$ tal que $\Phi^2(a') = \psi^1(b')$. Como Φ^1 é sobrejetor, existe $a'' \in A^1$ tal que $b' = \Phi^1(a'')$. Temos que $\Phi^2(\varphi^1(a'')) = \psi^1(\Phi^1(a'')) = \psi^1(b') = \Phi^2(a')$, portanto, sendo Φ^2 um isomorfismo, $\varphi^1(a'') = a'$. Logo, $a = \varphi^2(a') = \varphi^2(\varphi^1(a'')) = 0$ por exatidão da linha acima.

Só falta provar que Φ^3 é sobrejetor. Seja $b \in B^3$. Começemos supondo que $\psi^3(b) = 0$. Nesse caso, por exatidão da linha abaixo, existe $b' \in B^2$ tal que $\psi^2(b') = b$. Como Φ^2 é um isomorfismo, existe $a' \in A^2$ tal que $\Phi^2(a') = b'$, logo $\psi^2(\Phi^2(a')) = b$, portanto $\Phi^3(\varphi^2(a')) = b$. Isso mostra que b pertence à imagem de Φ^3 .

Consideremos agora $b \in B^3$ genérico. Seja $b' = \psi^3(b)$. Como Φ^4 é um isomorfismo, existe $a' \in A^4$ tal que $\Phi^4(a') = b'$, logo $\psi^4(\Phi^4(a')) = \psi^4(\psi^3(b)) = 0$ por exatidão da linha abaixo. Pela comutatividade do diagrama, $\Phi^5(\varphi^4(a')) = 0$. Sendo Φ^5 injetor, temos que $\varphi^4(a') = 0$, logo, por exatidão, existe $a'' \in A^3$ tal que

$\varphi^3(a'') = a'$. Temos que $\psi^3(\Phi^3(a'')) = \Phi^4(\varphi^3(a'')) = \Phi^4(a') = b' = \psi^3(b)$, logo $\psi^3(\Phi^3(a'') - b) = 0$. Já provamos que o kernel de ψ^3 está contido na imagem de Φ^3 , portanto existe $a''' \in A^3$ tal que $\Phi^3(a'') - b = \Phi^3(a''')$, logo $b = \Phi^3(a'' - a''')$. \square

COROLÁRIO 5.6.2. *Seja \mathcal{A} uma categoria abeliana. Dado um morfismo em $\text{SeqExC}_{\mathcal{A}}$ da seguinte forma:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\pi} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \Phi_A & & \downarrow \Phi_B & & \downarrow \Phi_C & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{\pi'} & C' & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

se Φ_A e Φ_C forem isomorfismos, então também Φ_B é um isomorfismo.

DEMONSTRAÇÃO. Segue imediatamente do lema dos cinco, completando o diagrama com os morfismos verticais nulos à direita e à esquerda. \square

OBSERVAÇÃO 5.6.3. Na demonstração do lema supusemos que \mathcal{A} fosse uma categoria concreta, pois tomamos um elemento genérico e mostramos o comportamento em relação aos morfismos envolvidos. Pode-se provar que esta suposição não faz perder de generalidade, pois, embora uma categoria abeliana possa não ser concreta, qualquer sub-categoria suficientemente pequena (ou seja, tal que a classe dos objetos é um conjunto) o é, portanto, analisando um diagrama, podemos atuar como se a categoria toda fosse concreta. Contudo, se poderia formular a mesma demonstração usando somente a linguagem categorial. \diamond

CAPÍTULO 6

Homologia

O grupo fundamental pode ser calculado para espaços não elementares graças ao teorema de Seifert-Van Kampen, mas, sendo não abeliano, pode ter uma estrutura bastante complicada. Só para provar que os grupos das superfícies compactas sem bordo não são isomorfos entre si, passamos aos abelianizados, bem mais simples a serem tratados. Por isso, a versão abeliana do grupo fundamental pode ser suficiente e mais prática. Pelo contrário, os grupos de homotopia de ordem superior são abelianos, mas em geral é bem difícil calculá-los, pois não temos uma ferramenta parecida com o teorema de Seifert-Van Kampen, ou seja, uma ferramenta que nos permita calcular os grupos de homotopia de espaços complicados a partir de uma cobertura adequada. Por estas razões a teoria dos grupos de homotopia não é suficientemente manejável para ser usada como ferramenta básica no estudo dos espaços topológicos. A teoria da *homologia*, sobretudo na sua versão *singular*, resolve ao mesmo tempo os dois problemas que acabamos de destacar. De fato, o primeiro grupo de homologia singular de um espaço é isomorfo ao abelianizado do grupo fundamental; ademais, a sequência de Mayer-Vietoris desempenha um papel análogo ao do teorema de Seifert-Van Kampen em qualquer grau, não somente em grau 1. Por estes motivos os grupos de homologia são mais fáceis a serem calculados e ao mesmo tempo proporcionam uma informação suficientemente ampla para ser interessante. Contudo, queremos deixar claro que a homologia *não* é uma versão mais fraca da homotopia, e sim dá uma informação independente. Só em grau 1 o grupo de homologia fica completamente determinado pelo de homotopia, sendo o seu abelianizado. Em grau genérico, dois espaços podem ter os mesmos grupos de homotopia, mas grupos de homologia diferentes, e vice-versa. Por isso, ambas as teorias são interessantes.

6.1. Homologia simplicial

A primeira versão da homologia que apresentamos é a simplicial, a qual se aplica aos Δ -complexos. Trata-se de uma versão intuitiva do ponto de vista geométrico e bastante simples a ser calculada explicitamente, mas com a desvantagem de ser definida em um contexto categorial demasiado rígido, como já observamos no capítulo 3. Em particular, temos poucos morfismos na categoria dos Δ -complexos, portanto não é simples provar as propriedades fundamentais, como a independência da estrutura simplicial escolhida, a invariância por homotopia, a sequência de Mayer-Vietoris e assim em diante. Por isso, usaremos a versão singular para demonstrar essas propriedades, mas usaremos a versão simplicial para calcular concretamente os grupos de homologia de alguns espaços simples. Obviamente isso pressupõe que, quando

as duas forem definidas, sejam canonicamente isomorfas, o que será provado em seguida.

DEFINIÇÃO 6.1.1. Seja $(X, [\Delta, \varphi])$ um Δ -complexo. Para $n \geq 0$, o grupo das n -cadeias simpliciais de $(X, [\Delta, \varphi])$ é o grupo abeliano livre gerado pelos simplexes abertos de dimensão n , ou seja:

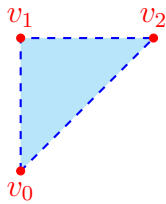
$$(124) \quad C_n^\Delta(X) := \bigoplus_{\alpha \in L_n} \mathbb{Z},$$

sendo L_n a família de índices que aparece na decomposição (77). Para $n < 0$ definimos $C_n^\Delta(X) := 0$. \diamond

Vamos agora definir os morfismos de bordo, que tornam $C_n^\Delta(X)$ um complexo de cadeias. Usamos a seguinte convenção: na definição (124), identificamos a unidade $1 \in \mathbb{Z}$ correspondente a $\alpha \in L_n$ com e_α^n mesmo e com $\sigma_\alpha^n(e_\alpha^n)$. Em particular, a segunda identificação nos permite considerar as faces de e_α^n (ou seja, os interiores das faces do fecho) subentendendo que, quando for necessário, serão substituídas pelo representante equivalente escolhido na decomposição (77). Podemos portanto definir:

$$(125) \quad \begin{aligned} \partial_n : C_n^\Delta(X) &\rightarrow C_{n-1}^\Delta(X) \\ \partial_n[v_0, \dots, v_n] &:= \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n], \end{aligned}$$

onde \hat{v}_i indica que o vértice i -ésimo não aparece. Claramente a definição de ∂_n se estende por aditividade ao grupo todo. Do ponto de vista geométrico, o bordo de um n -simplexo é a soma das $(n-1)$ -faces, com sinal alternado:

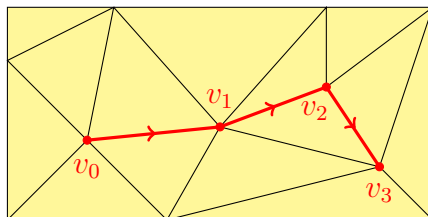


$$\partial_2[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1].$$

DEFINIÇÃO 6.1.2. Dada uma n -cadeia $\alpha = n_1 e_1^n + \dots + n_k e_k^n$ em um Δ -complexo X , o suporte de α é o fecho do sub-conjunto $\bigcup_{i=1, \dots, k} \sigma_i^n(e_i^n)$. \diamond

A figura precedente mostra que, pensando em Δ^n como em um Δ -complexo formado por um único n -simplexo, o suporte da cadeia $\partial \Delta^n$ coincide com o bordo de Δ^n como variedade topológica. Ademais, o suporte do bordo é uma variedade topológica sem bordo, o que sugere que $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$. Verificaremos isso formalmente daqui a pouco.

Consideremos a seguinte 1-cadeia $\alpha = [v_0, v_1] + [v_1, v_2] + [v_2, v_3]$, representando o suporte correspondente:

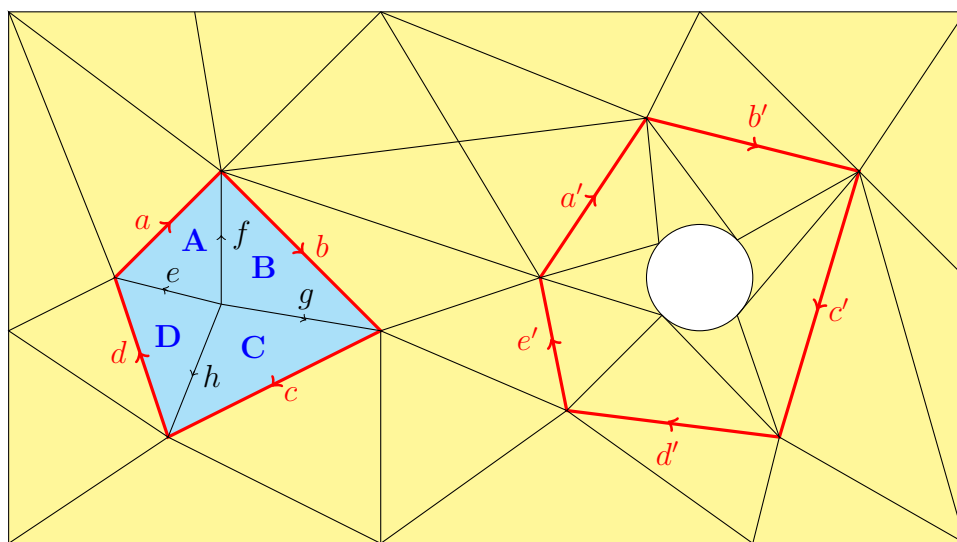


Temos que

$$\partial\alpha = v_1 - v_0 + v_2 - v_1 + v_3 - v_2 = v_3 - v_0.$$

O suporte de α é uma variedade topológica com bordo e o suporte do bordo coincide com bordo da variedade topológica. Obviamente isso vale quando o suporte for suficientemente regular. Em geral, pode não ser uma sub-variedade topológica; ademais, em uma cadeia genérica, cada simplexo aberto tem um coeficiente inteiro, que pode ser diferente de 1, e o bordo depende destes coeficientes. Mostraremos exemplos daqui a pouco.

Consideremos agora as duas seguintes cadeias $\alpha = a + b + c + d$ e $\alpha' = a' + b' + c' + d' + e'$:

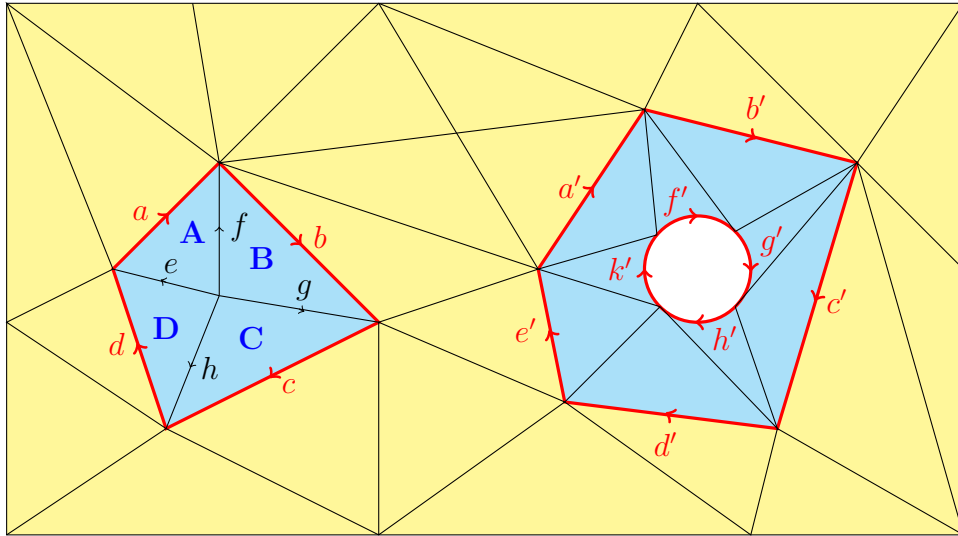


Neste caso $\partial\alpha = 0$ e $\partial\alpha' = 0$, portanto α e α' são ciclos. O ciclo α é um bordo, pois:

$$\partial(A+B+C+D) = (e+a-f) + (f+b-g) + (g+c-h) + (h+d-e) = a+b+c+d = \alpha.$$

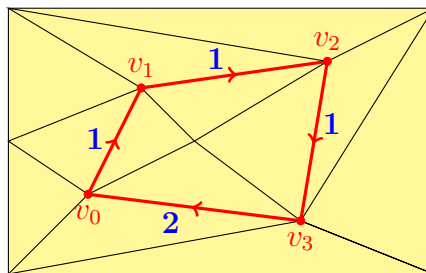
Pelo contrário, não existe nenhuma 2-cadeia cujo bordo seja α' , portanto α' representa uma classe de homologia não trivial. Observamos que, em ambos os casos, os suportes são variedades topológicas sem bordo. De novo, isso só vale em alguns casos particulares. O leitor, a partir da figura precedente, pode facilmente construir 1-ciclos que possuem auto-interseções, cujo suporte não é uma curva topológica.

Consideremos também o 1-ciclo $\alpha'' = f' + g' + h' + k'$, cujo suporte é a circunferência interna:



Nem α' nem α'' são bordos, mas $\alpha' - \alpha''$ o é, portanto, em homologia, $[\alpha' - \alpha''] = 0$, logo $[\alpha'] = [\alpha'']$.

O leitor pode imaginar geometricamente o que ocorre em dimensão maior. Por exemplo, o caso mais regular de 2-cadeia que se pode imaginar é uma cadeia cujo suporte é uma superfície topológica, cujo bordo coincide com o suporte do bordo da cadeia. Se a cadeia for um ciclo, pode ser imaginada como uma superfície sem bordo, por exemplo, uma esfera. Se o interior da esfera estiver mergulhado no espaço, se trata de uma 3-cadeia cujo bordo é a esfera mesma, portanto, nesse caso, a esfera é o suporte de um bordo. Se, pelo contrário, a esfera envolver alguns “buracos”, então se trata de um ciclo que representa uma classe de homologia não trivial. Obviamente essa representação vale somente em alguns casos particularmente regulares. Em geral, uma cadeia é somente a soma formal de vários simplexes abertos, cada um com um coeficiente, e o suporte pode estar bem longe de ser uma variedade topológica. Em particular, vamos dar um exemplo em que os coeficientes são significativos. Consideremos a seguinte 1-cadeia $\alpha = [v_0, v_1] + [v_1, v_2] + [v_2, v_3] + 2[v_3, v_0]$.



O suporte de α é uma curva topológica sem bordo, mas

$$\partial\alpha = (v_1 - v_0) + (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + 2(v_0 - v_3) = v_0 - v_3.$$

Por isso, o bordo não é nulo, independentemente do suporte.

Agora podemos verificar formalmente que os morfismos ∂_\bullet são efetivamente morfismos de bordo. De fato:

$$\begin{aligned}
\partial_{n-1} \circ \partial_n[v_0, \dots, v_n] &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_{n-1}[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] \\
&= \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=i+1}^n (-1)^{i+j-1} [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n] \right) \\
&= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] \\
&\quad + \sum_{i > j} (-1)^{i+j-1} [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois, trocando os papéis de i e j na soma a respeito de $i > j$, obtemos os mesmos termos da soma a respeito de $i < j$ com sinal invertido. Desta maneira obtemos o complexo de cadeias $(C_\bullet^\Delta(X), \partial_\bullet)$.

DEFINIÇÃO 6.1.3. Dado um Δ -complexo $(X, [\Delta, \varphi])$, os grupos de homologia do complexo de cadeia $(C_\bullet^\Delta(X), \partial_\bullet)$ são chamados de *grupos de homologia simplicial* de $(X, [\Delta, \varphi])$ e se denotam por $H_\bullet^\Delta(X)$. \diamond

OBSERVAÇÃO 6.1.4. Mostraremos que esses grupos *não dependem da estrutura de Δ -complexo* $[\Delta, \varphi]$, e sim somente do espaço X , mas não podemos provar isso agora. \diamond

EXEMPLO 6.1.5. Seja $X = \{pt\}$, ou seja, um espaço formado somente por um ponto. Temos uma estrutura natural de Δ -complexo com só um 0-simplexo, ou seja, $S_0 = \{\Delta^0\}$ é o único conjunto não trivial. Isso implica que:

$$C_n^\Delta(\{pt\}) \simeq \mathbb{Z} \quad C_n^\Delta(\{pt\}) = 0 \quad \forall n \neq 0.$$

Os morfismos de bordo são todos nulos, logo:

$$H_0^\Delta(\{pt\}) \simeq \mathbb{Z} \quad H_n^\Delta(\{pt\}) = 0 \quad \forall n \neq 0.$$

Obviamente um gerador de $H_0^\Delta(\{pt\})$ é a classe do único 0-simplexo. \diamond

EXEMPLO 6.1.6. Seja $X = S^1$ e consideremos a estrutura de Δ -complexo mostrada no exemplo 3.4.11.



Temos que:

$$C_0^\Delta(S^1) = \langle e^0 \rangle \simeq \mathbb{Z} \quad C_1^\Delta(S^1) = \langle e^1 \rangle \simeq \mathbb{Z} \quad C_n^\Delta(S^1) = 0 \quad \forall n \neq 0, 1.$$

Os morfismos de bordo são todos nulos, pois

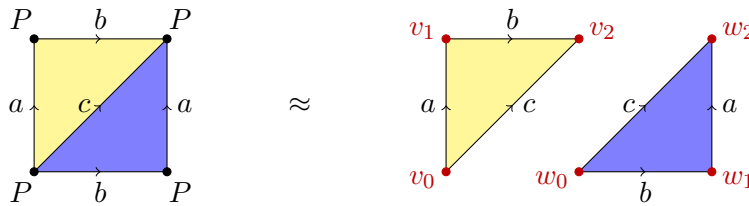
$$\partial_1(e^1) = e^0 - e^0 = 0.$$

Logo:

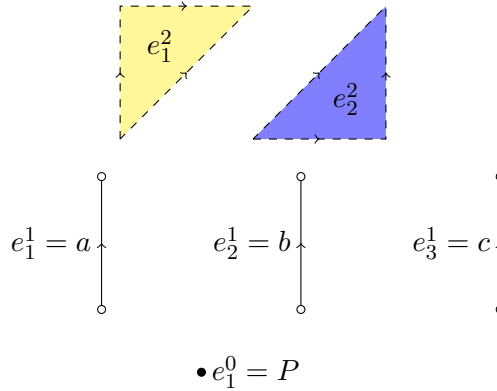
$$H_0^\Delta(S^1) \simeq \mathbb{Z} \quad H_1^\Delta(S^1) \simeq \mathbb{Z} \quad H_n^\Delta(S^1) = 0 \quad \forall n \neq 0, 1.$$

Obviamente um gerador de $H_0^\Delta(\{pt\})$ é $[e^0]$ e um gerador de $H_1^\Delta(\{pt\})$ é $[e^1]$. \diamond

EXEMPLO 6.1.7. Para calcular os grupos de homologia do toro, podemos considerar a estrutura de Δ -complexo descrita no exemplo 3.4.8:



Obtemos a seguinte decomposição em simplexos abertos:



Por isso:

$$\begin{aligned} C_0^\Delta(\mathbb{T}^2) &= \langle e_1^0 \rangle \simeq \mathbb{Z} \\ C_1^\Delta(\mathbb{T}^2) &= \langle e_1^1, e_2^1, e_3^1 \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ C_2^\Delta(\mathbb{T}^2) &= \langle e_1^2, e_2^2 \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ C_n^\Delta(\mathbb{T}^2) &= 0 \quad \forall n \neq 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Os bordos são os seguintes:

$$\begin{aligned} \partial_2(e_1^2) &= [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1] = b - c + a \\ \partial_2(e_2^2) &= [w_1, w_2] - [w_0, w_2] + [w_0, w_1] = a - c + b. \end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$\partial_2(1, 0) = \partial_2(0, 1) = (1, 1, -1)$$

logo

$$(126) \quad \partial_2(n, m) = (n + m, n + m, -n - m).$$

Ademais:

$$\partial_1(a) = \partial_1(b) = \partial_1(c) = P - P = 0.$$

Portanto o único bordo não nulo é ∂_2 . Agora podemos calcular os grupos de homologia:

- como $\text{Im}(\partial_1) = 0$, temos que $H_0^\Delta(\mathbb{T}^2) \simeq \mathbb{Z}/0 \simeq \mathbb{Z}$; um gerador de $H_0^\Delta(\mathbb{T}^2)$ é $[P]$;
- como $\text{Ker}(\partial_1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e, por causa de (126), $\text{Im}(\partial_2) = \langle (1, 1, -1) \rangle$, temos que

$$H_1^\Delta(\mathbb{T}^2) \simeq \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (1, 1, -1) \rangle} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

sendo o segundo isomorfismo definido por $[(n, m, k)] \mapsto (n + k, m + k)$; os dois geradores $(1, 0)$ e $(0, 1)$ de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ correspondem a $[a]$ e $[b]$, pois $[a] = [(1, 0, 0)] \mapsto (1, 0)$ e $[b] = [(0, 1, 0)] \mapsto (0, 1)$;

- por causa de (126), $\text{Ker}(\partial_2) = \{(n, -n)\} = \langle (1, -1) \rangle$, logo

$$H_2^\Delta(\mathbb{T}^2) \simeq \langle (1, -1) \rangle \simeq \mathbb{Z};$$

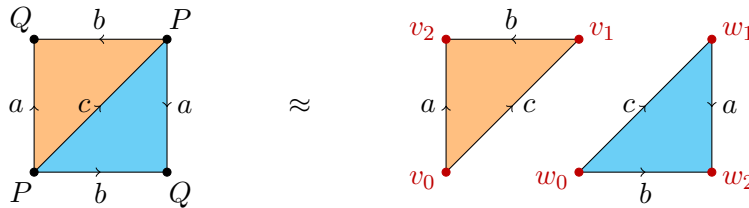
um gerador de $H_2^\Delta(\mathbb{T}^2)$ é $[e_1^2 - e_2^2]$.

Afinal:

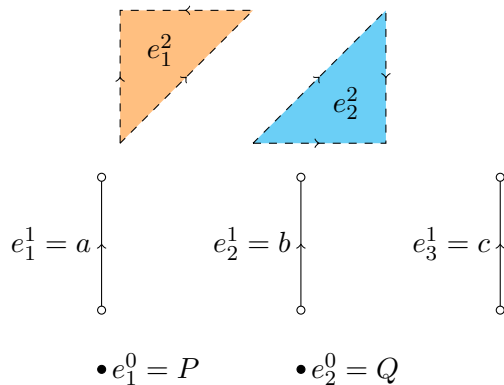
$$H_0^\Delta(\mathbb{T}^2) \simeq \mathbb{Z} \quad H_1^\Delta(\mathbb{T}^2) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \quad H_2^\Delta(\mathbb{T}^2) \simeq \mathbb{Z} \quad H_n^\Delta(\mathbb{T}^2) = 0 \quad \forall n \neq 0, 1, 2.$$

◇

EXEMPLO 6.1.8. Para calcular os grupos de homologia de \mathbb{RP}^2 , podemos considerar a estrutura de Δ -complexo descrita no exemplo 3.4.9:



Obtemos a seguinte decomposição em simplexes abertos:



Por isso:

$$\begin{aligned} C_0^\Delta(\mathbb{RP}^2) &= \langle e_1^0, e_2^0 \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ C_1^\Delta(\mathbb{RP}^2) &= \langle e_1^1, e_2^1, e_3^1 \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ C_2^\Delta(\mathbb{RP}^2) &= \langle e_1^2, e_2^2 \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ C_n^\Delta(\mathbb{RP}^2) &= 0 \quad \forall n \neq 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Os bordos são os seguintes:

$$\partial_2(e_1^2) = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1] = b - a + c$$

$$\partial_2(e_2^2) = [w_1, w_2] - [w_0, w_2] + [w_0, w_1] = a - b + c.$$

Equivalentemente:

$$(127) \quad \partial_2(1, 0) = (-1, 1, 1) \quad \partial_2(0, 1) = (1, -1, 1)$$

logo

$$(128) \quad \partial_2(n, m) = (-n + m, n - m, n + m).$$

Ademais:

$$(129) \quad \partial_1(a) = \partial_1(b) = Q - P \quad \partial_1(c) = P - P = 0$$

logo

$$(130) \quad \partial_1(n, m, k) = (-n - m, n + m).$$

Agora podemos calcular os grupos de homologia:

- por causa de (129), temos que $\text{Im}(\partial_1) = (-1, 1)$, portanto

$$H_0^\Delta(\mathbb{RP}^2) \simeq \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (-1, 1) \rangle} \simeq \mathbb{Z},$$

sendo o segundo isomorfismo definido por $[(n, m)] \mapsto n + m$. Um gerador de $H_0^\Delta(\mathbb{RP}^2)$ é $[P]$, pois $[P] = [(1, 0)] \mapsto 1$; analogamente, podemos escolher $[Q]$.

- Por causa de (130), $\text{Ker}(\partial_1) = \{(n, -n, k)\} = \langle (1, -1, 0), (0, 0, 1) \rangle$ e, por causa de (127), $\text{Im}(\partial_2) = \langle (-1, 1, 1), (1, -1, 1) \rangle$, portanto

$$\begin{aligned} H_1^\Delta(\mathbb{RP}^2) &\simeq \frac{\langle (1, -1, 0), (0, 0, 1) \rangle}{\langle (-1, 1, 1), (1, -1, 1) \rangle} \stackrel{(*)}{\simeq} \frac{\langle (-1, 1, 1), (0, 0, 1) \rangle}{\langle (-1, 1, 1), (0, 0, 2) \rangle} \\ &\simeq \frac{\langle (0, 0, 1) \rangle}{\langle (0, 0, 2) \rangle} \simeq \mathbb{Z}_2, \end{aligned}$$

sendo o último isomorfismo definido por $[(0, 0, k)] \mapsto [k]$. Podemos descrever o isomorfismo $(*)$ da seguinte maneira. Ao numerador, pondo $\alpha := (1, -1, 0)$ e $\beta := (0, 0, 1)$, temos que $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta - \alpha, \beta \rangle$. De fato, é claro que $\beta - \alpha, \beta \in \langle \alpha, \beta \rangle$, logo $\langle \beta - \alpha, \beta \rangle \subset \langle \alpha, \beta \rangle$. Por outro lado, $\alpha, \beta \in \langle \beta - \alpha, \beta \rangle$, sendo $\alpha = \beta - (\beta - \alpha)$, logo $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle \beta - \alpha, \beta \rangle$. Afinal, vale a igualdade. Ao denominador aplicamos um raciocínio parecido: pondo $\gamma := (-1, 1, 1)$ e $\delta := (1, -1, 1)$, temos que $\langle \gamma, \delta \rangle = \langle \gamma, \gamma + \delta \rangle$.

Um gerador de $H_1^\Delta(\mathbb{RP}^2)$ é $[c]$, pois $[c] = [(0, 0, 1)] \mapsto 1$.

- Por causa de (128), $\text{Ker}(\partial_2) = \{(n, m) : n - m = n + m = 0\} = 0$, logo

$$H_2^\Delta(\mathbb{RP}^2) = 0.$$

Afinal:

$$H_0^\Delta(\mathbb{RP}^2) \simeq \mathbb{Z} \quad H_1^\Delta(\mathbb{RP}^2) \simeq \mathbb{Z}_2 \quad H_n^\Delta(\mathbb{RP}^2) = 0 \quad \forall n \neq 0, 1.$$

◇

Sejam $(X, [\Delta, \varphi])$ e $(Y, [\Delta', \varphi'])$ dois Δ -complexos e seja $f: X \rightarrow Y$ uma Δ -função. Podemos definir os morfismos

$$f_{\#,n}: C_n^\Delta(X) \rightarrow C_n^\Delta(Y)$$

mandando um gerador $\sigma_\alpha^n(e_\alpha^n)$ na imagem $f(\sigma_\alpha^n(e_\alpha^n))$ e estendendo essa função por aditividade. É imediato verificar, a partir de (125), que $f_\# : C_\bullet^\Delta(X) \rightarrow C_\bullet^\Delta(Y)$ é um morfismo de complexos de cadeias. Ademais, $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$ e $\text{id}_\# = \text{id}$, portanto obtemos o seguinte functor:

$$C_\bullet^\Delta : \Delta\text{Comp} \rightarrow \text{CompCad}.$$

Compondo o functor C_\bullet^Δ com o functor homologia $H_\bullet : \text{CompCad} \rightarrow \text{SeqGrAb}$, obtemos o functor homologia simplicial:

$$H_\bullet^\Delta := H_\bullet \circ C_\bullet^\Delta : \Delta\text{Comp} \rightarrow \text{SeqGrAb}.$$

Dada uma Δ -função $f : X \rightarrow Y$, denotamos $H_\bullet^\Delta(f)$ também por f_* . Em particular, temos que

$$\begin{aligned} f_* : H_\bullet^\Delta(X) &\rightarrow H_\bullet^\Delta(Y) \\ [a] &\mapsto [f_\#(a)]. \end{aligned}$$

Em particular, a existência do functor H_\bullet^Δ mostra que Δ -complexos isomorfos têm grupos de homologia isomorfos. Mostraremos que vale muito mais, ou seja, os grupos de homologia simplicial só dependem do espaço subjacente X a menos de equivalência homotópica, mas ainda não temos as ferramentas necessárias para provar isso.

Podemos definir a versão *relativa* da homologia simplicial. Dado um par (X, A) de Δ -complexos, definimos o complexo de cadeias

$$C_\bullet^\Delta(X, A) := C_\bullet^\Delta(X) / C_\bullet^\Delta(A).$$

É claro que o bordo ∂_\bullet de $C_\bullet^\Delta(X)$ fica bem definido passando ao quociente, pois o bordo de um simplexo contido em A está também contido em A . Dado um morfismo de pares $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, fica bem definido o morfismo de complexos de cadeias $f_\# : C_\bullet^\Delta(X, A) \rightarrow C_\bullet^\Delta(Y, B)$, sendo $f_\#[e_\alpha^n] := [f_\#(e_\alpha^n)]$, onde, do lado direito, $f_\#$ é o morfismo induzido por $f : X \rightarrow Y$. Obtemos o functor:

$$C_\bullet^\Delta : \Delta\text{Comp}_2 \rightarrow \text{CompCad}.$$

Logo podemos definir os *grupos de homologia simplicial relativa* $H_\bullet^\Delta(X, A)$ como os grupos de homologia do complexo $(C_\bullet^\Delta(X, A), \partial_\bullet)$. Mais precisamente, compondo com o functor homologia H_\bullet , obtemos o functor:

$$H_\bullet^\Delta := H_\bullet \circ C_\bullet^\Delta : \Delta\text{Comp}_2 \rightarrow \text{SeqGrAb}.$$

Continuamos denotando o morfismo induzido em homologia por $f_* : H_\bullet^\Delta(X, A) \rightarrow H_\bullet^\Delta(Y, B)$.

OBSERVAÇÃO 6.1.9. É claro que, para $A = \emptyset$, obtemos a homologia de X , portanto a homologia de um espaço pode ser pensada com um caso particular da homologia relativa através do mergulho de categorias (2). \diamond

Podemos associar a um par de Δ -complexos (X, A) a seguinte sequência exata curta de complexos de cadeias:

$$0 \longrightarrow C_\bullet^\Delta(A) \xrightarrow{i_\#} C_\bullet^\Delta(X) \xrightarrow{\pi_\#} C_\bullet^\Delta(X, A) \longrightarrow 0.$$

O morfismo $i_{\#}$ é a inclusão de $C_{\bullet}^{\Delta}(A)$ em $C_{\bullet}^{\Delta}(X)$ e coincide com o push-forward induzido pelo mergulho $i: A \hookrightarrow X$. O morfismo $\pi_{\#}$ é a projeção ao quociente de $C_{\bullet}^{\Delta}(X)$ a $C_{\bullet}^{\Delta}(X, A)$ e coincide com o push-forward induzido pelo morfismo de pares $\pi: (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$, o qual atua como a identidade em X . Definindo da maneira natural a ação entre os morfismos, obtemos um functor de ΔComp_2 a $\text{SeqExC}_{\text{CompCad}}$. Composto esse functor o functor Bockstein (121), associamos a um par de Δ -complexos (X, A) a seguinte sequência exata longa:

$$\dots \xrightarrow{i_{*,n}} H_n^{\Delta}(X) \xrightarrow{\pi_{*,n}} H_n^{\Delta}(X, A) \xrightarrow{\beta_n} H_{n-1}^{\Delta}(A) \xrightarrow{i_{*,n-1}} H_{n-1}^{\Delta}(X) \xrightarrow{\pi_{*,n-1}} \dots,$$

sendo i_* induzido pela imersão $i: C_{\bullet}^{\Delta}(A) \rightarrow C_{\bullet}^{\Delta}(X)$ e π_* pela projeção $\pi: C_{\bullet}^{\Delta}(X) \rightarrow C_{\bullet}^{\Delta}(X, A)$. Afinal, obtemos o seguinte functor:

$$\mathcal{B}^{\Delta}: \Delta\text{Comp}_2 \rightarrow \text{SeqExL}.$$

O morfismo de Bockstein β_n fica definido da seguinte maneira, conforme a construção mostrada na seção 5.4.

- Seja $[[\alpha]] \in H_n^{\Delta}(X, A)$, onde $\alpha \in C_n^{\Delta}(X)$ e $[\alpha]$ indica a classe em relação ao quociente $C_n^{\Delta}(X, A) = C_n^{\Delta}(X)/C_n^{\Delta}(A)$. O representante $[\alpha] \in Z_n^{\Delta}(X, A) \subset C_n^{\Delta}(X, A)$ da classe de homologia $[[\alpha]]$ corresponde ao que chamamos de c na seção 5.4 (observamos que $Z_n^{\Delta}(X, A)$ é diferente do quociente $Z_n^{\Delta}(X)/Z_n^{\Delta}(A)$).
- Levantamos $[\alpha]$ ao representante $\alpha \in Z_n^{\Delta}(X)$, que corresponde ao que chamamos de b na seção 5.4.
- Aplicamos o bordo de $C_n^{\Delta}(X)$ e obtemos $\partial_n \alpha \in Z_{n-1}^{\Delta}(A)$, que corresponde ao que chamamos de a na seção 5.4. O fato que seja um ciclo depende do fato que, claramente, $\partial_{n-1} \partial_n \alpha = 0$. Esse ciclo é trivial como ciclo de X (sendo um bordo), mas não necessariamente como ciclo de A . Por isso obtemos uma $(n-1)$ -classe de homologia $[\partial_n \alpha] \in H_{n-1}^{\Delta}(A)$, não trivial em geral, e podemos pôr $\beta[[\alpha]] := [\partial_n \alpha]$.

Explicaremos na próxima seção, analisando a sequência exata longa em homologia singular, o significado topológico da exatidão em cada posição.

6.2. Homologia singular

Já ressaltamos várias vezes que o problema da homologia simplicial consiste no fato que a noção de Δ -complexo é demasiado rígida, pois os morfismos na categoria ΔComp são poucos demais. Vamos explicar mais em detalhe porque foi necessário definir os morfismos dessa maneira. Para definir a homologia simplicial, partimos da decomposição (77) e usamos os n -simplexos abertos, mergulhados no espaço X , como geradores do grupo $C_n^{\Delta}(X)$. A partir disso foi fácil definir os morfismos de bordo. Para que um morfismo $f: X \rightarrow Y$, sendo X e Y dotados de uma estrutura de Δ -complexo, defina o push-forward correspondente em homologia, temos que definir o push-forward de cadeias $f_{\#}: C_n^{\Delta}(X) \rightarrow C_n^{\Delta}(Y)$, sendo $f_{\#}(e_{\alpha}^n) = f(e_{\alpha}^n)$. Para que essa definição faça sentido, é necessário que $f(e_{\alpha}^n)$ seja um simplexo aberto mergulhado em Y , portanto um morfismo de Δ -complexos tem que mandar simplexos abertos em simplexos abertos da mesma dimensão. Talvez pudéssemos evitar de pedir que a restrição de f a cada simplexo aberto fosse um homeomorfismo com a imagem,

mas, dado que f tem que mandar as faces do bordo de cada simplexo nas faces da imagem, mesmo sem esta restrição não teríamos muita liberdade na escolha de f .

Por este motivo, precisamos construir uma teoria homológica mais flexível que a simplicial. A ideia fundamental é a seguinte: o fato que os simplexos abertos sejam *mergulhados* no Δ -complexo X é o que torna simples calcular concretamente os grupos de homologia, mas, ao mesmo tempo, é a causa da rigidez da estrutura de Δ -complexo. Suponhamos de fixar um n -simplexo Δ^n , que supomos ser o canônico, e de considerar uma função contínua $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$, sem pedir que a restrição ao interior seja um mergulho. Neste caso, dada uma função contínua $f: X \rightarrow Y$, é muito simples definir o push-forward $f_{\#}(\sigma) := f \circ \sigma: \Delta^n \rightarrow Y$. Portanto, podemos considerar como n -cadeias de X *todas* as funções contínuas de Δ^n a X . É claro que isso torna bem maiores os grupos de cadeias, sendo estes infinitamente gerados em todo grau para qualquer espaço que contenha infinitos pontos, logo também os grupos de ciclos e bordos são bem maiores. Todavia, podemos esperar que, passando ao quociente, ou seja, considerando os grupos de homologia, o resultado seja de uma complexidade comparável com a dos grupos de homologia simplicial. Na verdade, vale um resultado bem mais forte: quando o espaço X admite uma estrutura de Δ -complexo, os grupos assim obtidos são canonicamente isomorfos aos de homologia simplicial. Desta maneira obtemos uma nova teoria, dita *homologia singular*, com uma estrutura functorial bem mais flexível.

6.2.1. Definição de homologia singular. Lembramos que Δ^n denota o n -simplexo canônico, conforme a definição 3.4.1.

DEFINIÇÃO 6.2.1. Seja X um espaço topológico. Para $n \geq 0$, o grupo das *n -cadeias singulares* de X é o grupo abeliano livre gerado pelas funções contínuas de Δ^n a X , ou seja:

$$(131) \quad C_n^{\text{sing}}(X) := \bigoplus_{\sigma: \Delta^n \rightarrow X} \mathbb{Z}.$$

Para $n < 0$ definimos $C_n(X) := 0$. Chamamos um gerador $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ de *n -simplexo singular*. \diamond

O nome “singular” é devido ao fato que a restrição ao interior não é tão regular como no caso simplicial, e sim pode ter muitas “singularidades”.

Podemos identificar uma k -face fixada de Δ^n com Δ^k , através do homeomorfismo canônico. Ademais, identificamos a unidade $1 \in \mathbb{Z}$ correspondente a $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ com σ mesmo, portanto denotamos o elemento $n \in \mathbb{Z}$ por $n\sigma$. Com essa identificação, chamando de v_0, \dots, v_n os vértices de Δ^n , a restrição de σ a uma face $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ fica identificada com o simplexo singular correspondente $\sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}: \Delta^{n-1} \rightarrow X$. Por isso, podemos definir os morfismos de bordo da seguinte maneira:

$$(132) \quad \begin{aligned} \partial_n: C_n^{\text{sing}}(X) &\rightarrow C_{n-1}^{\text{sing}}(X) \\ \partial_n \sigma &:= \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}. \end{aligned}$$

A mesma demonstração relativa ao bordo simplicial (125), modificada de modo óbvio, mostra que $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, portanto obtemos o complexo de cadeias $(C_{\bullet}^{\text{sing}}(X), \partial_{\bullet})$.

DEFINIÇÃO 6.2.2. Dado um espaço topológico X , os grupos de homologia do complexo de cadeias $(C_{\bullet}^{\text{sing}}(X), \partial_{\bullet})$ são ditos *grupos de homologia singular* de X e se denotam por $H_{\bullet}^{\text{sing}}(X)$. \diamond

Segue da definição que um representante de uma classe de homologia é uma soma formal $n_1 \sigma_1 + \dots + n_p \sigma_p$, sendo $n_i \in \mathbb{Z}$ e $\sigma_i: \Delta^n \rightarrow X$, tal que o bordo seja nulo.

OBSERVAÇÃO 6.2.3. A homologia singular é definida para *qualquer* espaço topológico, sem hipóteses sobre o espaço nem estruturas adicionais. \diamond

Seja $f: X \rightarrow Y$ uma função contínua. Ficam definidos os morfismos

$$\begin{aligned} f_{\#,n}: C_n^{\text{sing}}(X) &\rightarrow C_n^{\text{sing}}(Y) \\ \sigma &\mapsto f \circ \sigma, \end{aligned}$$

sendo $f_{\#,n}$ estendido a $C_n^{\text{sing}}(X)$ todo por aditividade. É imediato verificar, a partir de (132), que $f_{\#}: C_{\bullet}^{\text{sing}}(X) \rightarrow C_{\bullet}^{\text{sing}}(Y)$ é um morfismo de complexos de cadeias, portanto obtemos o seguinte functor:

$$C_{\bullet}^{\text{sing}}: \text{Top} \rightarrow \text{CompCad}.$$

Compondo $C_{\bullet}^{\text{sing}}$ com o functor homologia H_{\bullet} , obtemos o functor homologia singular:

$$H_{\bullet}^{\text{sing}} := H_{\bullet} \circ C_{\bullet}^{\text{sing}}: \text{Top} \rightarrow \text{SeqGrAb}.$$

Em particular, dada uma função contínua $f: X \rightarrow Y$, o push-forward fica definido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f_*: H_{\bullet}^{\text{sing}}(X) &\rightarrow H_{\bullet}^{\text{sing}}(Y) \\ [a] &\mapsto [f_{\#}(a)]. \end{aligned}$$

Sendo a homologia singular um functor, dois espaços homeomorfos têm grupos de homologia isomorfos. Mostraremos daqui a pouco que a homologia singular é invariante por homotopia.

6.2.2. Versão relativa. Podemos agora estender a definição ao caso relativo. Dado um par de espaços topológicos (X, A) , construímos o complexo de cadeias

$$C_{\bullet}^{\text{sing}}(X, A) := \frac{C_{\bullet}^{\text{sing}}(X)}{C_{\bullet}^{\text{sing}}(A)}.$$

Um elemento de $C_{\bullet}^{\text{sing}}(X, A)$ é uma classe $[\alpha]$, tal que $\alpha \in C_{\bullet}^{\text{sing}}(X)$. Isso não tem que ser confundido com a classe de homologia de um ciclo.

OBSERVAÇÃO 6.2.4. Observamos que $C_{\bullet}^{\text{sing}}(X, A)$ é canonicamente isomorfo à soma direta de uma cópia de \mathbb{Z} para cada simplexo singular $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ cuja imagem não esteja *completamente* contida em A :

$$C_n^{\text{sing}}(X, A) \simeq \bigoplus_{\substack{\sigma: \Delta^n \rightarrow X \\ \sigma(\Delta^n) \not\subset A}} \mathbb{Z}. \quad \diamond$$

Os bordos ∂_\bullet de $C_\bullet^{\text{sing}}(X)$ ficam bem definidos passando ao quociente, pois o bordo de um simplexo pertencente a $C_\bullet^{\text{sing}}(A)$ pertence também a $C_\bullet(A)$. Indicamos por $\partial_\bullet: C_\bullet(X, A) \rightarrow C_{\bullet-1}(X, A)$ o bordo relativo, usando o mesmo símbolo que usamos no caso absoluto, logo $\partial_n[\alpha] := [\partial_n\alpha]$, sendo $\alpha \in C_n^{\text{sing}}(X)$.

Dado um morfismo de pares $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$, fica bem definido o morfismo de complexos de cadeias $f_\#: C_\bullet^{\text{sing}}(X, A) \rightarrow C_\bullet^{\text{sing}}(Y, B)$, sendo $f_\#[\sigma] := [f \circ \sigma]$, portanto obtemos o functor

$$C_\bullet^{\text{sing}}: \text{Top}_2 \rightarrow \text{CompCad}.$$

Ficam definidos os *grupos de homologia singular relativa* $H_\bullet^{\text{sing}}(X, A)$, como os grupos de homologia do complexo $(C_\bullet^{\text{sing}}(X, A), \partial_\bullet)$. Mais precisamente, temos o functor

$$(133) \quad H_\bullet^{\text{sing}} := H_\bullet \circ C_\bullet^{\text{sing}}: \text{Top}_2 \rightarrow \text{SeqGrAb}.$$

Um elemento de $H_n^{\text{sing}}(X, A)$ é uma classe $[[\alpha]]$, sendo $\alpha \in C_n(X)$, $[\alpha] \in Z_n(X, A)$ e $[[\alpha]] \in H_n(X, A)$. O morfismo $f_*: H_\bullet^{\text{sing}}(X, A) \rightarrow H_\bullet^{\text{sing}}(Y, B)$ fica definido por $f_*[[\alpha]] = [f_\#[\alpha]]$.

Para $A = \emptyset$ temos que $H_\bullet^{\text{sing}}(X, \emptyset) \simeq H_\bullet^{\text{sing}}(X)$ canonicamente, portanto a homologia de um espaço pode ser pensada com um caso particular da homologia relativa através do mergulho de categorias (2). É natural perguntar-se se há uma relação entre os grupos relativos $H_\bullet^{\text{sing}}(X, A)$ e os grupos do quociente $H_\bullet^{\text{sing}}(X/A)$. Responderemos a esta pergunta em seguida.

NOTAÇÃO 6.2.5. Daqui em diante, denotaremos os grupos $H_\bullet^{\text{sing}}(X)$ e $H_\bullet^{\text{sing}}(X, A)$ por $H_\bullet(X)$ e $H_\bullet(X, A)$, subentendendo que se trata da homologia singular. O mesmo vale em relação às cadeias, aos ciclos e aos bordos. \diamond

6.2.3. Axiomas da homologia singular. O functor homologia singular é caracterizado por seis propriedades fundamentais, que são as seguintes.

(1) **Invariância por homotopia.** Se $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ forem morfismos homotópicos em Top_2 , então $f_* = g_*: H_\bullet(X, A) \rightarrow H_\bullet(Y, B)$, portanto H_\bullet se projeta ao functor $H_\bullet: \text{TopH}_2 \rightarrow \text{SeqGrAb}$. Isso implica que dois pares (em particular, dois espaços) com o mesmo tipo de homotopia têm grupos de homologia isomorfos.

(2) **Sequência exata longa associada a um par de espaços.** Fica definido um functor $\mathcal{B}: \text{TopH}_2 \rightarrow \text{SeqExL}$, que associa a um par de espaços (X, A) a seguinte sequência exata longa em homologia:

$$\cdots \xrightarrow{i_{*,n}} H_n(X) \xrightarrow{\pi_{*,n}} H_n(X, A) \xrightarrow{\beta_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_{*,n-1}} H_{n-1}(X) \xrightarrow{\pi_{*,n-1}} \cdots,$$

sendo i_* o push-forward induzido pelo mergulho $i: A \hookrightarrow X$, π_* induzido pelo morfismo de pares $\pi: (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$ e β_\bullet um morfismo de funtores que definiremos com precisão em seguida.

(3) **Excisão.** Veremos que, quando o mergulho $i: A \hookrightarrow X$ for uma cofibração ou um bom par, então há uma relação muito estrita entre os grupos de homologia relativos $H_\bullet(X, A)$ e os absolutos do quociente $H_\bullet(X/A)$. Se $Z \subset A$ for um subespaço, então é claro que $X/A \approx (X \setminus Z)/(A \setminus Z)$, logo, quando também o mergulho $j: A \setminus Z \hookrightarrow X \setminus Z$ for uma cofibração, temos o isomorfismo $H_\bullet(X, A) \simeq$

$H_\bullet(X \setminus Z, A \setminus Z)$. A propriedade da excisão afirma que, mesmo sem hipóteses de regularidade em relação aos mergulhos, vale um resultado análogo, desde que Z esteja “bem dentro” de A . Mais precisamente, se o fecho de Z estiver contido no interior de A , então o mergulho de pares $\iota: (X \setminus Z, A \setminus Z) \hookrightarrow (X, A)$ induz o *isomorfismo* $\iota_*: H_\bullet(X \setminus Z, A \setminus Z) \rightarrow H_\bullet(X, A)$.

Esta propriedade é a que realmente distingue os grupos de homologia dos de homotopia. De fato, também os grupos de homotopia são invariantes por homotopia de morfismos e associam uma sequência exata longa a um par de espaços, mas não vale a excisão. Veremos que, precisamente por causa da excisão, ficará definida a sequência de Mayer-Vietoris, que, como antecipamos na introdução, torna mais fácil o cálculo explícito dos grupos de homologia.

(4) **Aditividade.** Seja $X = \bigsqcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ a decomposição de X em componentes conexas por caminhos. Temos que $H_\bullet(X) \simeq \bigoplus_{\alpha \in I} H_\bullet(X_\alpha)$, sendo o isomorfismo induzido pelos mergulhos das componentes X_α em X . Analogamente, no caso relativo, se $A \subset X$ e $A_\alpha := X_\alpha \cap A$,¹ então $H_\bullet(X, A) \simeq \bigoplus_{\alpha \in I} H_\bullet(X_\alpha, A_\alpha)$. Contudo, a versão relativa pode ser deduzida a partir da versão absoluta, portanto é suficiente enunciar a versão absoluta como axioma. Enfim, a aditividade pode ser deduzida a partir dos axiomas precedentes quando I for finito, mas, em geral, é uma propriedade independente.

(5) **Axioma da dimensão.** A homologia de um espaço formado somente por um ponto é trivial em todos os graus não nulos, ou seja, $H_n(\{pt\}) = 0$ para todo $n \neq 0$. Observamos que, conforme este enunciado, $H_0(\{pt\})$ pode ser um grupo abeliano qualquer. A partir da definição que demos de homologia singular, veremos que $H_0(\{pt\}) \simeq \mathbb{Z}$. Todavia, mostraremos em seguida a definição de homologia singular *com coeficientes* em um grupo abeliano genérico G . Nesse caso $H_0(\{pt\}) \simeq G$.

(6) **Axioma da equivalência homotópica fraca.** Sejam X e Y conexas por caminhos. Uma função $f: X \rightarrow Y$ é dita *equivalência homotópica fraca* se o push-forward $f_*: \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$ for um isomorfismo para todo $n \in \mathbb{N}$. Quando existir uma função $f: X \rightarrow Y$ ou $f: Y \rightarrow X$ com esta propriedade, X e Y são ditos *fracamente homotopicamente equivalentes*.² O axioma afirma que, se $f: X \rightarrow Y$ for uma equivalência homotópica fraca, então $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ é um isomorfismo para todo n . O mesmo vale no caso relativo, mas a versão relativa pode ser deduzida a partir da versão absoluta, portanto é suficiente enunciar a versão absoluta como axioma.

Os axiomas (1)–(3) e (5) são chamados de *axiomas de Eilenberg-Steenrod*. Sucessivamente foram introduzidos os axiomas (4) (por Milnor) e (6). Observamos que, partindo da definição de homologia singular relativa que demos na seção 6.2.2, todos estes axiomas se tornam teoremas. Contudo, é possível impor (1)–(6) como axiomas e mostrar que a homologia singular, como foi definida na seção 6.2.2, é o

¹Observamos que A_α pode não ser conexo por caminhos, enquanto X_α é uma componente conexa por caminhos por definição.

²A existência de uma equivalência homotópica fraca é mais forte que a existência de um isomorfismo $\pi_n(X) \simeq \pi_n(Y)$ para todo n . De fato, a mesma função f deve induzir o isomorfismo f_* para todo n .

único functor de Top_2 a SeqGrAb que satisfaz estas propriedades, a menos de uma noção natural de equivalência. Mais precisamente, trabalhando na categoria dos pares de espaços com o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo finito, é suficiente impor (1)–(3) e (5). Considerando todos os CW-complexos (não somente os finitos), temos que acrescentar (4). Enfim, para abranger todos os pares de espaços topológicos, é necessário impor (6).³

OBSERVAÇÃO 6.2.6. Se tirarmos o axioma (5), podemos achar vários funtores que satisfazem os outros, não equivalentes entre si. Estes funtores são chamados de *teorias homológicas generalizadas* e são muito importantes em várias áreas da matemática. \diamond

Há outras propriedades importantes da homologia singular, as quais podem ser provadas diretamente da definição ou axiomáticamente a partir de (1)–(6). As duas seguintes são particularmente relevantes (principalmente a primeira).

Sequência de Mayer-Vietoris. Sejam $A, B \subset X$ subespaços topológicos tais que X é a união do interior de A e do de B . Fica definida a seguinte sequência exata longa, cujos morfismos serão descritos mais adiante:

$$\dots \xrightarrow{\beta_{n-1}} H_n(A \cap B) \xrightarrow{(\varphi_*)^n} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{(\psi_*)^n} H_n(X) \xrightarrow{\beta_n} H_{n-1}(A \cap B) \xrightarrow{(\varphi_*)^{n-1}} \dots$$

Frequentemente essa sequência nos permitirá calcular os grupos de homologia de X a partir dos de A e B , portanto poderemos decompor um espaço complicado em espaços mais simples.

Sequência exata longa associada a uma tripla de espaços. Fica definido um functor de TopH_3 a SeqExL , que associa a uma tripla de espaços (X, A, B) a seguinte sequência:

$$\dots \xrightarrow{(i_n)_*} H_n(X, B) \xrightarrow{(\pi_n)_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\beta_n} H_{n-1}(A, B) \xrightarrow{(i_{n-1})_*} H_{n-1}(X, B) \xrightarrow{(\pi_{n-1})_*} \dots$$

sendo i_* o push-forward induzido pelo morfismo de pares $i: (A, B) \hookrightarrow (X, B)$, π_* induzido pelo morfismo de pares $\pi: (X, B) \rightarrow (X, A)$ e β_\bullet um morfismo de funtores que definiremos com precisão em seguida.

6.3. Propriedades fundamentais

Agora vamos demonstrar os axiomas (1)–(5) a partir da definição. Por enquanto vamos adiar a demonstração do (6). Não seguiremos a mesma ordem com a qual foram enunciados os axiomas.

³Pode-se demonstrar que todo espaço topológico é fracamente homotopicamente equivalente a um CW-complexo, portanto o axioma (6) afirma que, se considerarmos todos os espaços topológicos, o functor homologia não conseguirá medir a diferença entre um espaço genérico e um CW-complexo fracamente equivalente. Por isso, apesar de estar definida para todo espaço, a homologia dá informações interessantes somente em relação aos CW-complexos (a menos de equivalência homotópica).

6.3.1. Axioma (5). Vamos calcular a homologia singular de um ponto. É claro que $C_n(\{pt\}) \simeq \mathbb{Z}$ para todo $n \geq 0$, pois só há uma função (constante) de Δ^n ao ponto. Ademais, $\partial_{2n+1}: C_{2n+1}(\{pt\}) \rightarrow C_{2n}(\{pt\})$ é o morfismo nulo, pois, aplicando ∂_{2n+1} ao único $(2n+1)$ -simplexo, obtemos a soma de um número par de cópias do único $2n$ -simplexo (uma cópia para cada $2n$ -face de Δ^{2n+1}), com sinal alternado, logo a soma é $(-1)^0 + (-1)^1 + \dots + (-1)^{2n} + (-1)^{2n+1} = 0$. Pelo contrário, $\partial_{2n}: C_{2n}(\{pt\}) \rightarrow C_{2n-1}(\{pt\})$, para $n \geq 2$, é a identidade de \mathbb{Z} a \mathbb{Z} , pois Δ^{2n} contém um número ímpar de $(2n-1)$ -faces, logo a soma é $(-1)^0 + (-1)^1 + \dots + (-1)^{2n} = 1$. Afinal obtemos o seguinte complexo de cadeias:

$$C_\bullet(\{pt\}) = \dots \longleftarrow 0 \longleftarrow 0 \longleftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{\text{id}} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{\text{id}} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{\text{id}} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \dots$$

Para $n > 0$, temos que $Z_{2n}(pt) = 0$, portanto $H_{2n}(pt) = 0$. Ademais, $Z_{2n+1}(pt) = B_{2n+1}(pt) = \mathbb{Z}$, logo $H_{2n+1}(pt) = 0$. Enfim, $Z_0(pt) = \mathbb{Z}$ e $B_0(pt) = 0$, logo $H_0(pt) \simeq \mathbb{Z}$. Afinal:

$$(134) \quad H_0(\{pt\}) \simeq \mathbb{Z} \quad H_n(\{pt\}) = 0 \quad \forall n \neq 0.$$

6.3.2. Axioma (4) e homologia de grau 0. O seguinte lema coincide com o axioma da aditividade.

LEMA 6.3.1. *Seja $X = \bigsqcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ a decomposição de X em componentes conexas por caminhos. Os mergulhos $\iota_\alpha: X_\alpha \hookrightarrow X$ induzem o seguinte isomorfismo canônico:*

$$\begin{aligned} \iota_*: \bigoplus_{\alpha \in I} H_\bullet(X_\alpha) &\xrightarrow{\simeq} H_\bullet(X) \\ [a] \in H_\bullet(X_\alpha) &\mapsto (\iota_\alpha)_*[a]. \end{aligned}$$

Analogamente, no caso relativo, sejam $A \subset X$ e $A_\alpha := A \cap X_\alpha$ (observamos que A_α não é necessariamente conexo por caminhos). Os mergulhos $\iota_\alpha: (X_\alpha, A_\alpha) \hookrightarrow (X, A)$ induzem o seguinte isomorfismo canônico:

$$\begin{aligned} \iota_*: \bigoplus_{\alpha \in I} H_\bullet(X_\alpha, A_\alpha) &\xrightarrow{\simeq} H_\bullet(X, A) \\ [[a]] \in H_\bullet(X_\alpha, A_\alpha) &\mapsto (\iota_\alpha)_*[[a]]. \end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO. Como Δ^n é conexo por caminhos, a imagem de um simplexo singular está toda contida em uma componente, portanto temos a decomposição $C_\bullet(X) \simeq \bigoplus_\alpha C_\bullet(X_\alpha)$, que se obtém separando os geradores de $C_\bullet(X)$ conforme a componente conexa à qual pertencem. Como as faces de um simplexo singular estão contidas na mesma componente, temos que $\text{Ker}(\partial_n) \simeq \bigoplus_\alpha \text{Ker}(\partial_n|_{C_n(X_\alpha)})$ e $\text{Im}(\partial_{n+1}) \simeq \bigoplus_\alpha \text{Im}(\partial_{n+1}|_{C_{n+1}(X_\alpha)})$, logo os grupos de homologia se decompõem da mesma maneira. Isso prova que $H_\bullet(X) \simeq \bigoplus_{\alpha \in I} H_\bullet(X_\alpha)$. O isomorfismo fica definido pelos mergulhos das componentes no espaço X , pois, na decomposição $C_\bullet(X) \simeq \bigoplus_\alpha C_\bullet(X_\alpha)$, o termo $C_\bullet(X_\alpha)$ é a imagem de $(\iota_\alpha)_\#$. O mesmo vale para ciclos e bordos, portanto, na decomposição $H_\bullet(X) \simeq \bigoplus_\alpha H_\bullet(X_\alpha)$, o termo $H_\bullet(X_\alpha)$ é a imagem de $(\iota_\alpha)_*$.

No caso relativo, a partir da decomposição $C_\bullet(X) \simeq \bigoplus_\alpha C_\bullet(X_\alpha)$, observamos que $C_\bullet(A_\alpha) \subset C_\bullet(X_\alpha)$ para todo α , portanto, ao quociente, obtemos a decomposição

$C_\bullet(X, A) \simeq \bigoplus_\alpha C_\bullet(X_\alpha, A_\alpha)$. Essa decomposição é respeitada pelo bordo, portanto $H_\bullet(X, A) \simeq \bigoplus_\alpha H_\bullet(X_\alpha, A_\alpha)$. \square

A partir do lema precedente, podemos deduzir a estrutura do grupo de homologia de grau 0 de qualquer espaço ou par de espaços.

LEMA 6.3.2. *Seja $X = \bigsqcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ a decomposição de X em componentes conexas por caminhos. Temos que:*

$$H_0(X) \simeq \bigoplus_{\alpha \in I} \mathbb{Z}.$$

No caso relativo, sejam $A \subset X$ e $A_\alpha := A \cap X_\alpha$. Seja $J \subset I$ tal que $\alpha \in J$ se, e somente se, $A_\alpha = \emptyset$. Temos que:

$$H_0(X, A) \simeq \bigoplus_{\alpha \in J} \mathbb{Z}.$$

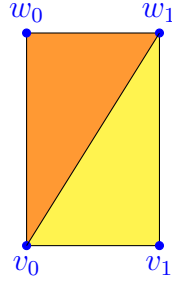
DEMONSTRAÇÃO. Por causa do lema 6.3.1, temos que $H_0(X) \simeq \bigoplus_{\alpha \in I} H_0(X_\alpha)$, portanto podemos supor que X seja conexo por caminhos e provar que $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$. Como Δ^0 é um ponto, temos que $C_0(X)$ é o grupo abeliano livre gerado pelos pontos de X . Como $C_{-1}(X) = 0$ por definição, temos que $\partial_0 = 0$, logo $\text{Ker}(\partial_0) = C_0(X)$. Se $p, q \in X$ forem distintos, por hipótese existe um caminho $\varphi: I \rightarrow X$ que une p e q , portanto, identificando Δ^1 com I , temos que $\partial\varphi = q - p$, logo $[p] = [q]$ em homologia. Por isso, fixando um ponto $p \in X$, cada elemento de $H_0(X)$ pode ser escrito na forma $n[p]$, sendo $n \in \mathbb{Z}$. Dada uma 1-cadeia $\alpha = n_1\varphi_1 + \dots + n_k\varphi_k$, sendo φ_i um caminho que une p_i a q_i , temos que $\partial\alpha = n_1(q_1 - p_1) + \dots + n_k(q_k - p_k)$, portanto a soma dos coeficientes de $\partial\alpha$ é $n_1 - n_1 + \dots + n_k - n_k = 0$. Por isso, se $n[p] = m[p]$, isto é, $(n - m)[p] = 0$, então $n - m = 0$, logo $n = m$. Isso prova que $H_0(X) = \langle [p] \rangle \simeq \mathbb{Z}$.

No caso relativo, por causa do lema 6.3.1 temos que $H_0(X, A) \simeq \bigoplus_{\alpha \in I} H_0(X_\alpha, A_\alpha)$, portanto podemos supor que X seja conexo por caminhos e calcular $H_0(X, A)$, nos dois casos $A = \emptyset$ e $A \neq \emptyset$. No primeiro caso temos que $H_0(X, A) \simeq H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$. No segundo caso, $C_0(X, A)$ é o grupo abeliano livre gerado pelos pontos de X que não pertencem a A . Dado um ponto $p \in X$, podemos fixar $a \in A$ e um caminho $\varphi: I \rightarrow X$ que une a a p . Temos que, em homologia, $[[p]] = [[\partial\varphi] + [a]] = 0$, sendo $[[\partial\varphi]] = 0$ por ser um bordo e $[[a]] = 0$ por ser uma cadeia de A , logo $H_0(X, A) = 0$. \square

6.3.3. Axioma (1). Vamos demonstrar que duas funções homotópicas induzem o mesmo push-forward em homologia. Isso implica que dois espaços com o mesmo tipo de homotopia têm grupos de homologia isomorfos. Para obter este resultado, vamos mostrar que uma homotopia entre f e g induz uma homotopia entre os morfismos $f_\#, g_\#: C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(Y)$, conforme a definição 5.5.1. Isso implica que $f_* = g_*$.

Seja $F: X \times I \rightarrow Y$ uma homotopia entre f e g . Dado um n -simplexo singular $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$, podemos considerar a função contínua $\sigma \times \text{id}_I: \Delta^n \times I \rightarrow X \times I$: para torná-la uma cadeia singular, temos que decompor $\Delta^n \times I$ em $(n + 1)$ -simplexos. Sejam $\Delta^n \times \{0\} = [v_0, \dots, v_n]$ e $\Delta^n \times \{1\} = [w_0, \dots, w_n]$. O produto $\Delta^n \times I$ é a

união dos simplexes $[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$, cada um dos quais intersepta o sucessivo em uma n -face.



Definimos o *operador prisma* associado à homotopia $F: X \times I \rightarrow Y$ da seguinte maneira:

$$(135) \quad P_{\bullet}: C_{\bullet}(X) \rightarrow C_{\bullet+1}(Y)$$

$$P_n(\sigma) := \sum_{i=0}^n (-1)^i F \circ (\sigma \times \text{id})|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]}.$$

EXEMPLO 6.3.3. Observando a figura precedente, no caso $n = 1$, temos que $P_1(\sigma) = F \circ (\sigma \times \text{id})|_{[v_0, w_0, w_1]} - F \circ (\sigma \times \text{id})|_{[v_0, v_1, w_1]}$, que podemos também escrever na forma $P_1(\sigma) = F \circ (\sigma \times \text{id}) \circ [v_0, w_0, w_1] - F \circ (\sigma \times \text{id}) \circ [v_0, v_1, w_1]$, sendo $[v_0, w_0, w_1], [v_0, v_1, w_1]: \Delta^2 \rightarrow \Delta^1 \times I$. Aplicando o bordo, obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} \partial_2^Y \circ P_1(\sigma) &= F \circ (\sigma \times \text{id}) \circ (\partial[v_0, w_0, w_1] - \partial[v_0, v_1, w_1]) \\ &= F \circ (\sigma \times \text{id}) \circ ([w_0, w_1] - [v_0, w_1] + [v_0, w_0] - [v_1, w_1] + [v_0, w_1] - [v_0, v_1]) \\ &= F \circ (\sigma \times \text{id}) \circ ([v_0, w_0] - [v_1, w_1] + [w_0, w_1] - [v_0, v_1]). \end{aligned}$$

As duas componentes verticais do bordo, ou seja, $[v_0, w_0]$ e $[v_1, w_1]$, são precisamente as componentes do prisma de $\partial[v_0, v_1] = v_1 - v_0$, com sinal trocado, enquanto as duas componentes horizontais, ou seja, $[v_0, v_1]$ e $[w_0, w_1]$, coincidem com $f_{\#}[v_0, v_1]$ e $g_{\#}[w_0, w_1]$. Por isso:

$$(136) \quad \partial_2^Y \circ P_1 = -P_0 \circ \partial_1^X + g_{\#} - f_{\#}.$$

A ideia geométrica é a seguinte: por causa do sinal alternado na soma, o bordo do prisma corta os n -simplexos “internos” ao cilindro (na figura só há um, ou seja, $[v_0, w_1]$), portanto coincide com $F \circ (\sigma \times \text{id})$ aplicado às duas bases e aos n -simplexos “verticais”. Na figura se trata do bordo topológico do retângulo. As duas bases correspondem a $f_{\#}(\sigma)$ e $g_{\#}(\sigma)$, enquanto os n -simplexos verticais correspondem ao prisma do bordo de σ , portanto obtemos a fórmula (136). \diamond

Vamos mostrar que a fórmula (136) vale em todo grau, portanto P_{\bullet} é uma homotopia entre $f_{\#}$ e $g_{\#}$.

$$\begin{aligned} \partial_{n+1}^Y \circ P_n(\sigma) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_{n+1}^Y (F \circ (\sigma \times \text{id})|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]}) \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i (-1)^{i+j} F \circ (\sigma \times \text{id})|_{[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n (-1)^{i+j+1} F \circ (\sigma \times \text{id})|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_n]} \\
& \stackrel{(**)}{=} \sum_{j < i} (-1)^{i+j} F \circ (\sigma \times \text{id})|_{[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} \\
& + \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} F \circ (\sigma \times \text{id})|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_n]} \\
& + \sum_{i=0}^n \left(F \circ (\sigma \times \text{id})|_{[v_0, \dots, v_{i-1}, w_i, \dots, w_n]} - F \circ (\sigma \times \text{id})|_{[v_0, \dots, v_i, w_{i+1}, \dots, w_n]} \right) \\
& = -P_{n-1} \circ \partial_n^X(\sigma) + g_{\#}(\sigma) - f_{\#}(\sigma).
\end{aligned}$$

Na igualdade (*), aplicamos o bordo ∂_{n+1}^Y a cada termo da soma que define o prisma. Quando $j \leq i$, o vértice pulado pelo bordo é v_j , portanto o sinal correspondente é $(-1)^j$. Quando $j \geq i$, pulamos o vértice w_j , o qual ocupa a posição $j+1$, pois, antes dele, há dois vértices com o mesmo índice i (ou seja, v_i e w_i). Por isso o sinal do termo todo se torna $(-1)^{i+j+1}$ ao invés de $(-1)^{i+j}$. Na igualdade (**), só separamos os termos com $i \neq j$ (termos azuis) e os com $i = j$ (termos vermelhos). A soma dos azuis coincide com $-P_{n-1} \circ \partial_n^X(\sigma)$, pois:

- na soma para $j < i$, o operador ∂_n^X pula v_j , com sinal $(-1)^j$. O operador P_{n-1} , aplicado a $\partial_n^X(\sigma)$, atua passando de v_i a w_i , mas v_i ocupa a posição $i-1$, pois v_j foi pulado antes dele. Por isso, o sinal deveria ser $(-1)^{i-1}$, enquanto na soma temos $(-1)^i$: isso justifica o sinal menos na expressão $-P_{n-1} \circ \partial_n^X(\sigma)$, em relação aos termos tais que $j < i$.
- Na soma para $i < j$, o operador ∂_n^X pula v_j , portanto também w_j acima do cilindro, com sinal $(-1)^j$. O operador P_{n-1} , aplicado a $\partial_n^X(\sigma)$, atua passando de v_i a w_i com sinal $(-1)^i$, pois o vértice w_j ainda não foi pulado, portanto v_i ocupa corretamente a posição i -ésima. Por isso, na soma deveria aparecer $(-1)^{i+j}$, enquanto aparece $(-1)^{i+j+1}$: isso justifica o sinal menos na expressão $-P_{n-1} \circ \partial_n^X(\sigma)$, em relação aos termos tais que $i < j$.

Na soma dos termos vermelhos, vemos que o termo com índice i na primeira componente coincide com o termo de índice $i-1$ na segunda, mas com sinal oposto. Por isso, todos os termos se cortam, exceto o termo $i=0$ da segunda componente, pois o correspondente na primeira não existe, e o termo $i=n$ na primeira, pois o correspondente na segunda não existe. Os dois termos que não se cortam coincidem precisamente com $g_{\#}(\sigma) - f_{\#}(\sigma)$. Isso prova a fórmula (136).

No caso relativo, consideremos dois morfismos $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ em Top_2 . Por definição, uma homotopia entre f e g em Top_2 é um morfismo $F: (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$. Consideremos o operador P_{\bullet} , associado à homotopia $F: X \times I \rightarrow Y$: se $\sigma \in C_n(A)$, então $P_n(\sigma) \in C_{n+1}(B)$, pois, na definição (135), a imagem de $F \circ (\sigma \times \text{id})|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]}$ está contida na imagem de $F(A \times I)$, a qual está contida em B . Por isso, fica bem definido o operador prisma

$$P_{\bullet}: C_{\bullet}(X, A) \rightarrow C_{\bullet+1}(Y, B),$$

o qual é uma homotopia entre $f_{\#}, g_{\#}: C_{\bullet}(X, A) \rightarrow C_{\bullet}(Y, B)$. Isso implica que $f_{*} = g_{*}$, portanto a homologia singular pode ser refinada ao functor

$$(137) \quad H_{\bullet}^{\text{sing}}: \text{TopH}_2 \rightarrow \text{SeqGrAb}.$$

Mais precisamente, por causa do operador prisma fica definido o functor:

$$C_{\bullet}^{\text{sing}}: \text{TopH}_2 \rightarrow \text{CompCadH},$$

o qual, composto com o functor homologia H_{\bullet} , define (137). Isso implica que dois pares de espaços (em particular, dois espaços) com o mesmo tipo de homotopia têm grupos de homologia isomorfos.

6.3.4. Axioma (2). Seja (X, A) um par de espaços topológicos. Como, por definição, $C_{\bullet}(X, A) = C_{\bullet}(X)/C_{\bullet}(A)$, fica definida a seguinte sequência exata curta de complexos de cadeias:

$$0 \longrightarrow C_{\bullet}(A) \xrightarrow{i_{\#}} C_{\bullet}(X) \xrightarrow{\pi_{\#}} C_{\bullet}(X, A) \longrightarrow 0.$$

O morfismo $i_{\#}$ é a inclusão de $C_{\bullet}(A)$ em $C_{\bullet}(X)$ e coincide com o push-forward induzido pelo mergulho $i: A \hookrightarrow X$. O morfismo $\pi_{\#}$ é a projeção ao quociente de $C_{\bullet}(X)$ a $C_{\bullet}(X, A)$ e coincide com o push-forward induzido pelo morfismo de pares $\pi: (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$.

Dado um morfismo de pares $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$, fica definido o seguinte morfismo de sequências exatas curtas:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_{\bullet}(A) & \xrightarrow{i_{\#}} & C_{\bullet}(X) & \xrightarrow{\pi_{\#}} & C_{\bullet}(X, A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow (f|_A)_{\#} & & \downarrow f_{\#} & & \downarrow f_{\#} \\ 0 & \longrightarrow & C_{\bullet}(B) & \xrightarrow{i'_{\#}} & C_{\bullet}(Y) & \xrightarrow{\pi'_{\#}} & C_{\bullet}(Y, B) \longrightarrow 0 \end{array}$$

sendo $i': B \hookrightarrow Y$ e $\pi': (Y, \emptyset) \rightarrow (Y, B)$. Dessa maneira, obtemos um functor de Top_2 a $\text{SeqExC}_{\text{CompCad}}$. Composto esse functor o functor Bockstein (121), associamos a um par de espaços (X, A) a seguinte sequência exata longa:

$$(138) \quad \dots \xrightarrow{i_{*,n}} H_n(X) \xrightarrow{\pi_{*,n}} H_n(X, A) \xrightarrow{\beta_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_{*,n-1}} H_{n-1}(X) \xrightarrow{\pi_{*,n-1}} \dots$$

Afinal, obtemos o seguinte functor:

$$\mathcal{B}: \text{Top}_2 \rightarrow \text{SeqExL}.$$

Seja $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ um morfismo de pares. A ação de \mathcal{B} sobre o morfismo f produz o seguinte morfismo de sequências exatas longas:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \xrightarrow{i_{*,n}} & H_n(X) & \xrightarrow{\pi_{*,n}} & H_n(X, A) & \xrightarrow{\beta_n} & H_{n-1}(A) & \xrightarrow{i_{*,n-1}} & H_{n-1}(X) & \xrightarrow{\pi_{*,n-1}} & \dots \\ & & \downarrow f_{*,n} & & \downarrow f_{*,n} & & \downarrow (f|_A)_{*,n-1} & & \downarrow f_{*,n-1} & & \\ \dots & \xrightarrow{i'_{*,n}} & H_n(Y) & \xrightarrow{\pi'_{*,n}} & H_n(Y, B) & \xrightarrow{\beta'_n} & H_{n-1}(B) & \xrightarrow{i'_{*,n-1}} & H_{n-1}(Y) & \xrightarrow{\pi'_{*,n-1}} & \dots \end{array}$$

É claro que esse morfismo só depende da classe de homotopia de f , pois cada flecha vertical é um push-forward em homologia, portanto \mathcal{B} pode ser refinado ao seguinte functor:

$$\mathcal{B}: \text{TopH}_2 \rightarrow \text{SeqExL}.$$

Como já observamos em relação à homologia simplicial, o morfismo de Bockstein β_n fica definido da seguinte maneira, conforme a construção mostrada na seção 5.4.

- Seja $[[\alpha]] \in H_n(X, A)$, onde $\alpha \in C_n(X)$ e $[\alpha] \in C_n(X, A)$. O representante $[\alpha] \in Z_n(X, A)$ da classe de homologia $[[\alpha]]$ corresponde ao que chamamos de c na seção 5.4 (observamos que $Z_n(X, A)$ é diferente do quociente $Z_n(X)/Z_n(A)$).
- Levantamos $[\alpha]$ ao representante $\alpha \in Z_n(X)$, que corresponde ao que chamamos de b na seção 5.4.
- Aplicamos o bordo de $C_n(X)$ e obtemos $\partial_n \alpha \in Z_{n-1}(A)$, que corresponde ao que chamamos de a na seção 5.4. O fato que seja um ciclo depende do fato que, claramente, $\partial_{n-1} \partial_n \alpha = 0$. Esse ciclo é trivial como ciclo de X (sendo um bordo), mas não necessariamente como ciclo de A . Por isso obtemos uma $(n-1)$ -classe de homologia $[\partial_n \alpha] \in H_{n-1}(A)$, não trivial em geral, e podemos definir $\beta[[\alpha]] := [\partial_n \alpha]$.

Vamos entender o significado topológico da exatidão em cada posição.

Exatidão em $H_n(X)$. (i) Provemos que $\pi_{*,n} \circ i_{*,n} = 0$. Seja $[a] \in H_n(A)$. A classe $i_*[a]$ fica representada por $i_{\#}(a) = a \in C_n(X)$. Como $[a] = 0 \in C_n(X, A)$, temos que $\pi_{*,n} i_{*,n}[a] = [[a]] = [0] = 0 \in H_n(X, A)$. (ii) Suponhamos que $\pi_{*,n}[a] = 0$ e provemos que $[a] \in \text{Im}(i_*, n)$. Como $\pi_{*,n}[a] = 0$, existem uma cadeia $b \in C_{n+1}(X)$ e uma cadeia $c \in C_n(A)$ tais que $a = \partial_{n+1} b + c$. Por isso, $a - c = \partial_{n+1} b$, logo $[a] = [c]$ em $H_n(X)$, ou seja, $[a] = i_{*,n}[c]$.

Exatidão em $H_n(X, A)$. (i) Provemos que $\beta_n \circ \pi_{*,n} = 0$. Seja $[b] \in H_n(X)$. Temos que $\pi_{*,n}[b] = [[b]]$, sendo b um ciclo em X , portanto, aplicando o Bockstein, obtemos $[\partial b] = [0] = 0$. (ii) Suponhamos que $\beta_n[[a]] = 0$ e provemos que $[[a]] \in \text{Im}(\pi_{*,n})$. Como $\beta_n[[a]] = 0$, temos que $[\partial_n a] = 0 \in H_{n-1}(A)$, portanto existe $b \in C_n(A)$ tal que $\partial_n a = \partial_n b$, logo $\partial_n(a - i_{\#,n} b) = 0$. Como $a - i_{\#,n} b$ é uma cadeia de X , fica definida a classe $[a - i_{\#,n} b] \in H_n(X)$. Temos que $\pi_{*,n}[a - i_{\#,n} b] = [\pi_{\#,n} a] = [[a]]$.

Exatidão em $H_n(A)$. (i) Provemos que $i_{*,n} \circ \beta_n = 0$. Seja $[[b]] \in H_{n+1}(X, A)$. Temos que $\beta_{n+1}[[b]] = [\partial_{n+1}(b)]$, portanto, aplicando $i_{*,n}$, obtemos a classe $[\partial_{n+1} b] = 0 \in H_n(X)$. (ii) Suponhamos que $i_{*,n}[a] = 0$ e provemos que $[a] \in \text{Im}(\beta_n)$. Como $i_{*,n}[a] = 0$, existe uma cadeia $b \in C_{n+1}(X)$ tal que $\partial b = a$, logo $\beta_n[[b]] = [a]$.

OBSERVAÇÃO 6.3.4. Partindo de Top_2 , podemos pensar nos morfismos de Bockstein da seguinte maneira. Seja $\Pi_2: \text{Top}_2 \rightarrow \text{Top}$ o functor tal que $\Pi_2(X, A) = A$ e, dado um morfismo $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$, $\Pi_2(f) := f|_A$. O leitor pode verificar que, a partir do functor homologia $H_\bullet: \text{TopH}_2 \rightarrow \text{SeqGrAb}$, ficam definidos o seguinte morfismo de funtores:

$$(139) \quad \beta_\bullet: H_\bullet \rightarrow H_{\bullet-1} \circ \Pi_2.$$

Este morfismo de funtores é parte do axioma (2). \diamond

6.3.5. Axioma (3). Antes de discutir a excisão, precisamos introduzir a noção de *subdivisão baricêntrica* de um n -simplexo. Antes de tudo, vamos definir a noção de *baricentro*.

DEFINIÇÃO 6.3.5. O *baricentro* do n -simplexo $[v_0, \dots, v_n] \subset \mathbb{R}^m$ é o ponto

$$b([v_0, \dots, v_n]) := \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n v_i. \quad \diamond$$

No caso de um 0-simplexo, o baricentro coincide com o simplexo mesmo. No caso de um 1-simplexo, se trata do ponto médio. No caso de um 2-simplexo, coincide com o baricentro do triângulo correspondente.

Intuitivamente, a *subdivisão baricêntrica* de $[v_0, \dots, v_n]$ é a n -cadeia singular de $[v_0, \dots, v_n]$ mesmo, definida pelos simplexos cujos vértices são os baricentros das faces de $[v_0, \dots, v_n]$. Vamos mostrar alguns exemplos; em seguida, mostraremos a definição formal.

OBSERVAÇÃO 6.3.6. Dados um n -simplexo $[v_0, \dots, v_n]$ e uma k -face $[v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$, sendo $0 \leq i_0 < \dots < i_k \leq n$, o homeomorfismo canônico $\varphi_{v_{i_0}, \dots, v_{i_k}} : \Delta^k \rightarrow [v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$, composto com o mergulho $\iota : [v_{i_0}, \dots, v_{i_k}] \hookrightarrow [v_0, \dots, v_n]$, é um simplexo singular de $[v_0, \dots, v_n]$, que denotamos por $\sigma_{v_{i_0}, \dots, v_{i_k}}$:

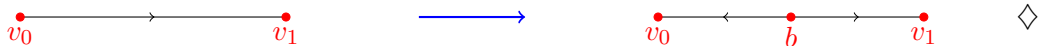
$$\sigma_{v_{i_0}, \dots, v_{i_k}} := \iota \circ \varphi_{v_{i_0}, \dots, v_{i_k}} \in C_k([v_0, \dots, v_n]).$$

Considerando a única n -face $[v_0, \dots, v_n]$, o mergulho ι se torna a identidade e obtemos o simplexo singular $\sigma_{v_0, \dots, v_n} = \varphi_{v_0, \dots, v_n} : \Delta^n \rightarrow [v_0, \dots, v_n]$. \diamond

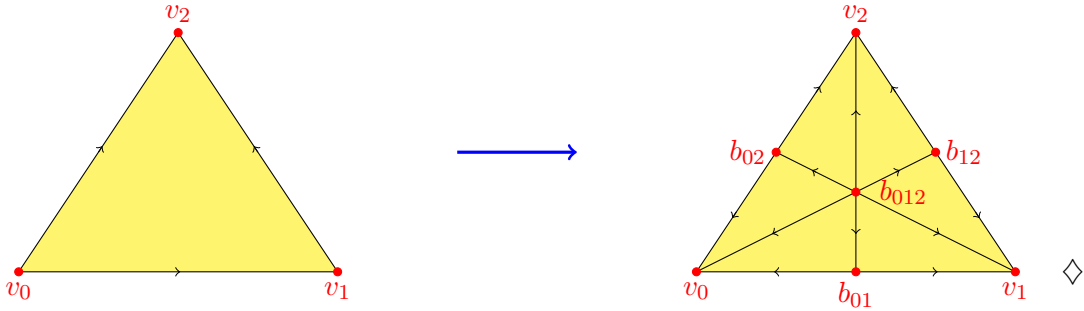
EXEMPLO 6.3.7. Seja $[v_0]$ um 0-simplexo. A subdivisão baricêntrica de $[v_0]$ é o homeomorfismo canônico $\sigma_{[v_0]} : \Delta^0 \rightarrow [v_0]$. O suporte é $[v_0]$ mesmo.



EXEMPLO 6.3.8. Seja $[v_0, v_1]$ um 1-simplexo. Para calcular a subdivisão baricêntrica de $[v_0, v_1]$, temos que calcular os baricentros de todas as faces. Em particular, os das 0-faces v_0 e v_1 coincidem com as 0-faces mesmas, enquanto o da única 1-face $[v_0, v_1]$ é $b = \frac{1}{2}(v_0 + v_1)$. Por isso, a subdivisão baricêntrica de $[v_0, v_1]$ é a 1-cadeia singular $\sigma_{[b, v_0]} + \sigma_{[v_0, b]} \in C_1([v_0, v_1])$.



EXEMPLO 6.3.9. Seja $[v_0, v_1, v_2]$ um 2-simplexo. Para calcular a subdivisão baricêntrica de $[v_0, v_1, v_2]$, temos que calcular os baricentros de todas as faces. Em particular, os das 0-faces v_0 , v_1 e v_2 coincidem com as 0-faces mesmas. Os das 1-faces são $b_{01} = \frac{1}{2}(v_0 + v_1)$, $b_{12} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$ e $b_{02} = \frac{1}{2}(v_0 + v_2)$. Enfim, o da 2-face $[v_0, v_1, v_2]$ é $b_{012} = \frac{1}{3}(v_0 + v_1 + v_2)$. Por isso, a subdivisão baricêntrica de $[v_0, v_1, v_2]$ é a 2-cadeia singular $\sigma_{[b_{012}, b_{01}, v_0]} + \sigma_{[b_{012}, b_{01}, v_1]} + \sigma_{[b_{012}, b_{12}, v_1]} + \sigma_{[b_{012}, b_{12}, v_2]} + \sigma_{[b_{012}, b_{02}, v_0]} + \sigma_{[b_{012}, b_{02}, v_2]}$.



Vamos dar a definição formal de subdivisão baricêntrica.

DEFINIÇÃO 6.3.10. Dado um n -simplexo $[v_0, \dots, v_n]$, uma *sequência crescente de faces* de $[v_0, \dots, v_n]$ é uma família de faces $S = \{F_0, \dots, F_n\}$ tal que:

- F_k é uma k -face, ou seja, $F_k = [v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$, sendo $0 \leq v_{i_0} < \dots < v_{i_k} \leq n$;
- $F_k \subset F_{k+1}$ para todo k .

Em particular, $F_n = [v_0, \dots, v_n]$ e F_0 só contém um vértice. \diamond

DEFINIÇÃO 6.3.11. A *subdivisão baricêntrica* de um n -simplexo $[v_0, \dots, v_n]$ é a n -cadeia singular

$$B([v_0, \dots, v_n]) \in C_n([v_0, \dots, v_n])$$

definida da seguinte maneira. Seja \mathcal{S} o conjunto das sequências crescentes de faces de $[v_0, \dots, v_n]$. Dado um elemento $S = \{F_0, \dots, F_n\} \in \mathcal{S}$, denotamos por $b(F_i)$ o baricentro de F_i . Definimos:

$$(140) \quad B([v_0, \dots, v_n]) := \sum_{S=\{F_0, \dots, F_n\} \in \mathcal{S}} \sigma_{b(F_n) \cdots b(F_0)}. \quad \diamond$$

Observamos que, em todos os termos da soma (140), o vértice de partida é o baricentro de $[v_0, \dots, v_n]$, pois $F_n = [v_0, \dots, v_n]$ para todo $S \in \mathcal{S}$.

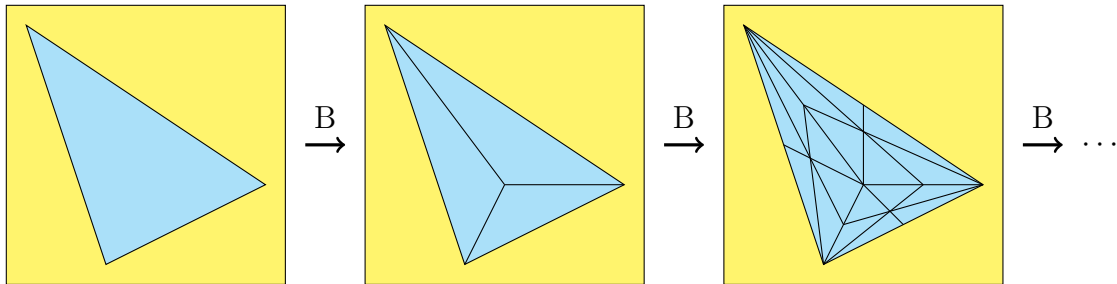
A definição de subdivisão baricêntrica vale para qualquer n -simplexo $[v_0, \dots, v_n]$, portanto, em particular, vale para o n -simplexo canônico Δ^n :

$$B(\Delta^n) \in C_n(\Delta^n).$$

Dados um espaço genérico X e um simplexo singular $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$, podemos aplicar à cadeia $B(\Delta^n)$ o push-forward $\sigma_{\#,n}: C_n(\Delta^n) \rightarrow C_n(X)$ e obtemos uma cadeia singular de X . Por isso, fica definido o seguinte operador, que denotamos também por B :

$$(141) \quad \begin{aligned} B: C_\bullet(X) &\rightarrow C_\bullet(X) \\ \sigma &\mapsto \sigma_{\#}(B(\Delta^\bullet)). \end{aligned}$$

Como o domínio e o contra-domínio do operador B coincidem, podemos aplicá-lo iterativamente, obtendo o operador $B^k: C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(X)$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$.



Toda vez que se aplica o operador B , o tamanho do suporte de cada simplexo se reduz. Uma propriedade essencial do operador (141) é a seguinte, que será provada no apêndice ??.

TEOREMA 6.3.12. *O operador (141) é um morfismo de complexos de cadeias, homotópico à identidade de $C_\bullet(X)$.*

O fato que B seja homotópico à identidade implica que o push-forward em homologia $B_*: H_\bullet(X) \rightarrow H_\bullet(X)$ é a identidade, ou seja, $B_*[\alpha] = [\alpha]$ para todo $[\alpha] \in H_\bullet(X)$. Equivalentemente, se α for um ciclo, então $B(\alpha)$ é um ciclo também e $[\alpha] = [B(\alpha)]$. É fácil provar por indução que o mesmo vale para qualquer iteração B^k , portanto, dada uma classe de homologia $[\alpha] \in H_\bullet(X)$, podemos escolher o representante $B^k(\alpha)$, o qual, para k suficientemente grande, é uma combinação inteira de simplexos cujos suportes são “pequenos” quanto queremos. Este fato, que formalizaremos rigorosamente, será a chave para provar a excisão. Observamos que isso não pode valer para a homologia simplicial, pois os simplexos são fixados pela estrutura de Δ -complexo, portanto não podem ser reduzidos além de um certo limite.

Agora voltamos a considerar a excisão. Há duas formulações equivalentes.

TEOREMA 6.3.13 (Excisão, versão 1). *Seja (X, A) um par de espaços e seja $Z \subset A$ um subespaço tal que $\bar{Z} \subset \text{int}(A)$, sendo \bar{Z} o fecho de Z e $\text{int}(A)$ o interior de A . O mergulho $i: (X \setminus Z, A \setminus Z) \rightarrow (X, A)$ induz o isomorfismo*

$$i_*: H_\bullet(X \setminus Z, A \setminus Z) \xrightarrow{\cong} H_\bullet(X, A).$$

TEOREMA 6.3.14 (Excisão, versão 2). *Seja X um espaço topológico e sejam $A, B \subset X$ tais que $\text{int}(A) \cup \text{int}(B) = X$. O mergulho $i: (B, A \cap B) \rightarrow (X, A)$ induz o isomorfismo*

$$i_*: H_\bullet(B, A \cap B) \xrightarrow{\cong} H_\bullet(X, A).$$

As duas versões são equivalentes pondo $B = X \setminus Z$ e $Z = X \setminus B$. Provaremos a segunda versão. Como os detalhes da demonstração são bastante técnicos e não ajudam a entender o significado topológico da excisão, vamos mostrá-los com precisão no apêndice ??. Por enquanto, vamos mostrar a ideia fundamental subjacente e só vamos resumir os passos necessários para completar a demonstração.

A ideia é a seguinte. Seja $X = \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$. Vamos considerar as cadeias singulares de X geradas pelos simplexos de A e pelos de B , ou seja, pelos simplexos

de X cuja imagem está inteiramente contida em A ou inteiramente contida em B :

$$(142) \quad C_n(A+B) := \bigoplus_{\sigma(\Delta^n) \subset A \text{ ou } \sigma(\Delta^n) \subset B} \mathbb{Z}.$$

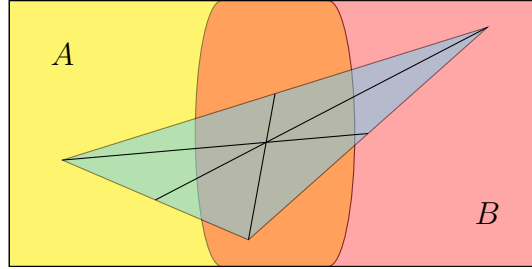
Obviamente $C_n(A+B)$ é diferente de $C_n(A) \oplus C_n(B)$, pois os simplexos da interseção $A \cap B$ são contados somente uma vez em $C_n(A+B)$. Por definição $C_n(A+B) \subset C_n(X)$. O bordo ∂_\bullet de $C_\bullet(X)$ se restringe a $C_\bullet(A+B)$, pois o bordo de um simplexo de A (de B) é uma cadeia de A (de B). Logo, fica definido o complexo de cadeias $(C_\bullet(A+B), \partial_\bullet)$, o qual é um sub-complexo de $(C_\bullet(X), \partial_\bullet)$. Consideremos o mergulho

$$(143) \quad \iota_\bullet: C_\bullet(A+B) \hookrightarrow C_\bullet(X).$$

O fato fundamental, em relação à excisão, é o seguinte.

TEOREMA 6.3.15. *O mergulho (143) é uma equivalência homotópica de complexos de cadeias, portanto o push-forward correspondente $\iota_*: H_\bullet(A+B) \rightarrow H_\bullet(X)$ é um isomorfismo.*

O teorema precedente implica que toda classe de homologia de X pode ser representada por um ciclo, o qual é uma combinação inteira de simplexos de A e de B . Isso é consequência direta da subdivisão baricêntrica: de fato, dada uma classe de homologia $[\alpha] \in H_\bullet(X)$, podemos aplicar iterativamente o operador (141) a α , obtendo um representante $B^k(\alpha)$ formado por simplexos cujo suporte é suficientemente pequeno para estar contido em A ou em B . A seguinte figura mostra um simplexo *não* pertencente a $C_\bullet(A+B)$, cuja subdivisão baricêntrica pertence a $C_\bullet(A+B)$.



Mais precisamente, aplicando a subdivisão baricêntrica várias vezes, podemos obter um morfismo inverso a (143) na categoria CompCadH , que denotamos por

$$(144) \quad \rho: C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(A+B).$$

Intuitivamente, podemos pensar que $\rho = B^k$ para k suficientemente grande. Todavia, os detalhes técnicos são mais complicados, pelo seguinte motivo. Fixado um simplexo singular $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$, podemos achar k tal que $B^k(\sigma) \in C_n(A+B)$, mas esse número k depende de σ , logo não podemos aplicar B^k a qualquer elemento de $C_\bullet(X)$. Por isso, será necessário achar uma definição correta de ρ , independente do simplexo singular fixado no domínio.

A partir das equivalências homotópicas (143) e (144), inversas entre si, podemos facilmente provar a excisão. De fato, quocientando por $C_\bullet(A)$, fica bem definido o

seguinte morfismo de complexos de cadeias:

$$\bar{\iota}: \frac{C_\bullet(A+B)}{C_\bullet(A)} \rightarrow \frac{C_\bullet(X)}{C_\bullet(A)}.$$

Como ρ consiste basicamente na aplicação da subdivisão baricêntrica, provaremos que $\rho(C_\bullet(A)) \subset C_\bullet(A)$, pois a subdivisão baricêntrica de uma cadeia de A é uma cadeia de A . Por isso, fica bem definido o seguinte morfismo de complexos de cadeias:

$$\bar{\rho}: \frac{C_\bullet(X)}{C_\bullet(A)} \rightarrow \frac{C_\bullet(A+B)}{C_\bullet(A)}.$$

Os morfismos $\bar{\iota}$ e $\bar{\rho}$ são equivalências homotópicas, inversas entre si. Observamos que:

- o contra-domínio de $\bar{\iota}$ (e domínio de $\bar{\rho}$) é $C_\bullet(X, A)$;
- o domínio de $\bar{\iota}$ (e contra-domínio de $\bar{\rho}$) é canonicamente isomorfo a $C_\bullet(B, A \cap B)$. De fato, o numerador $C_\bullet(A+B)$ é gerado pelos simplexos com suporte contido em A ou em B . Quocientando pelos simplexos de A , só restam os de B , quocientados pelos de $A \cap B$.

Afinal, sendo $\bar{\iota}$ uma equivalência homotópica, fica definido o seguinte *isomorfismo*:

$$\bar{\iota}_*: H_\bullet(B, A \cap B) \xrightarrow{\cong} H_\bullet(X, A).$$

A ação de $\bar{\iota}$ entre as cadeias é a inclusão, portanto o isomorfismo $\bar{\iota}_*$ coincide com i_* , sendo $i: (B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ o mergulho de pares. Isso demonstra a excisão.

6.4. Homologia reduzida

Vamos introduzir a noção de homologia reduzida, que é muito útil em várias aplicações e também muito significativa do ponto de vista teórico. A diferença entre a homologia singular reduzida e a ordinária consiste somente em um fator \mathbb{Z} a menos no grupo de grau 0, mas isso é suficiente para tornar bem mais elegantes e rápidas algumas construções. Há duas maneiras de definir a homologia reduzida: podemos partir de um espaço com ponto marcado o somente de um espaço.

6.4.1. Homologia reduzida com ponto marcado.

DEFINIÇÃO 6.4.1. Seja (X, x_0) um espaço com ponto marcado. Definimos os *grupos de homologia reduzida* de (X, x_0) da seguinte maneira:

$$\tilde{H}_\bullet(X, x_0) := H_\bullet(X, \{x_0\}). \quad \diamond$$

Isso significa que consideramos o ponto marcado como subespaço e calculamos a homologia relativa. Vamos estudar mais em detalhe a estrutura do grupo $\tilde{H}_\bullet(X, x_0)$. Consideremos a sequência exata longa correspondente:

$$(145) \quad \cdots \longrightarrow H_n(\{x_0\}) \xrightarrow{i_{n,*}} H_n(X) \xrightarrow{\pi_{n,*}} \tilde{H}_n(X, x_0) \xrightarrow{\beta_n} H_{n-1}(\{x_0\}) \longrightarrow \cdots$$

Distinguimos três casos.

- Para $n \geq 2$, temos que $H_n(\{x_0\}) = H_{n-1}(\{x_0\}) = 0$ pelo axioma (5), logo obtemos o trecho $0 \rightarrow H_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(X, x_0) \rightarrow 0$. Isso implica que $H_n(X) \simeq \tilde{H}_n(X, x_0)$ canonicamente.

- O morfismo $i_{0,*}: H_0(\{x_0\}) \rightarrow H_0(X)$ é injetor: de fato, se $p: X \rightarrow \{x_0\}$ for a projeção, $p_{0,*} \circ i_{0,*} = (p \circ i)_{0,*} = \text{id}$. Em particular, $i_{0,*}$ consiste na imersão da cópia de \mathbb{Z} correspondente à componente de x_0 em $H_0(X)$, conforme o lema 6.3.1. Por exatidão $\text{Im}(\beta_1) = \text{Ker}(i_{0,*}) = 0$, ou seja, $\beta_1 = 0$. Por isso obtemos o trecho $0 \rightarrow H_1(X) \rightarrow \tilde{H}_1(X, x_0) \rightarrow \text{Im}(\beta_1) = 0$, logo $H_1(X) \simeq \tilde{H}_1(X, x_0)$ canonicamente.
- Enfim, como $H_{-1}(\{x_0\}) = 0$, temos o trecho $H_0(\{x_0\}) \simeq \mathbb{Z} \rightarrow H_0(X) \rightarrow \tilde{H}_0(X, x_0) \rightarrow 0$. Isso mostra que $\pi_{0,*}$ é sobrejetor, logo $\tilde{H}_0(X, x_0) \simeq H_0(X)/\text{Ker}(\pi_{0,*}) = H_0(X)/\text{Im}(i_{0,*})$. Vimos no item precedente que $i_{0,*}$ é injetor e sua imagem é a cópia de \mathbb{Z} em $H_0(X)$ correspondente à componente de x_0 , portanto $\tilde{H}_0(X, x_0) \simeq H_0(X)/\mathbb{Z}$. Tendo cortado uma cópia de \mathbb{Z} na soma direta, temos a decomposição canônica

$$(146) \quad H_0(X) \simeq \tilde{H}_0(X, x_0) \oplus \mathbb{Z}.$$

Esta decomposição corresponde à cisão da sequência $0 \rightarrow H_0(\{x_0\}) \simeq \mathbb{Z} \rightarrow H_0(X) \rightarrow \tilde{H}_0(X, x_0) \rightarrow 0$ induzida por $p_*: H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$, sendo $p: X \rightarrow \{x_0\}$.

Resumindo, a homologia reduzida difere da ordinária somente em grau 0, conforme a fórmula (146). A cópia de \mathbb{Z} na soma direta (146) corresponde à imagem de $i_{*,0}$, portanto $\tilde{H}_0(X, x_0) \simeq H_0(X)/\text{Im}(i_{*,0})$, como vimos também a partir da exatidão de (145). Dado que $i_{*,n} = 0$ para $n \neq 0$, quocientar por $\text{Im}(i_*)$ só tem efeito em grau 0, logo podemos estender (146) a todo grau:

$$(147) \quad \tilde{H}_\bullet(X, x_0) \simeq H_\bullet(X)/\text{Im}(i_*) = \text{Coker}(i_*).$$

Observamos que (147) poderia ser usada também como definição de $\tilde{H}_\bullet(X, x_0)$. Neste caso, a definição 6.4.1 se tornaria o isomorfismo canônico $\tilde{H}_\bullet(X, x_0) \simeq H_\bullet(X, \{x_0\})$.

OBSERVAÇÃO 6.4.2. Escolhendo dois pontos marcados x_0 e x_1 na mesma componente conexa por caminhos de X , temos que $\tilde{H}_\bullet(X, x_0) = \tilde{H}_\bullet(X, x_1)$, dado que a cópia de \mathbb{Z} , que forma a imagem de $i_{0,*}$, é a mesma. Por isso, poderíamos também dizer “homologia reduzida com componente conexa marcada”. Em particular, se X for conexo por caminhos, então fica definida canonicamente a homologia reduzida $\tilde{H}_\bullet(X)$, escolhendo um ponto marcado qualquer, mas neste caso temos trivialmente $\tilde{H}_0(X) = 0$. \diamond

OBSERVAÇÃO 6.4.3. Seja X um espaço contrátil (em particular, um ponto). Então, para qualquer ponto marcado, $\tilde{H}_\bullet(X) = 0$ em todo grau. Esta propriedade torna particularmente prático o uso da homologia reduzida nas sequências exatas longas, como veremos em várias ocasiões. \diamond

Dado um morfismo $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ na categoria Top_+ , já está definido o push-forward $f_*: \tilde{H}_\bullet(X, x_0) \rightarrow \tilde{H}_\bullet(Y, y_0)$, pois, pela definição 6.4.1, trata-se de um caso particular de push-forward em homologia relativa. Equivalentemente, poderíamos considerar a definição (147) e observar que o push-forward $f_*: H_\bullet(X) \rightarrow$

$H_\bullet(Y)$ se projeta ao quociente. Portanto, fica definido o functor

$$(148) \quad \tilde{H}_\bullet: \text{Top}_+ \rightarrow \text{SeqGrAb},$$

o qual coincide com a composição do functor $\tilde{C}_\bullet: \text{Top}_+ \rightarrow \text{CompCad}$, que associa a (X, x_0) o complexo $C_\bullet(X)/C_\bullet(\{x_0\})$, com o functor homologia $H_\bullet: \text{CompCad} \rightarrow \text{SeqGrAb}$.

OBSERVAÇÃO 6.4.4. A definição 6.4.1 mostra como definir a homologia reduzida a partir da homologia relativa, portanto o functor $H_\bullet: \text{Top}_2 \rightarrow \text{SeqGrAb}$ determina completamente o functor $\tilde{H}_\bullet: \text{Top}_+ \rightarrow \text{SeqGrAb}$. Mostraremos que vale também a volta (lema 6.5.1), por causa do seguinte isomorfismo canônico:

$$(149) \quad H_\bullet(X, A) \simeq \tilde{H}_\bullet(C(X, A)),$$

considerando o vértice como ponto marcado do cone. Podemos imaginar que, sendo CA contrátil, no espaço $C(X, A)$ o subespaço A fica “trivializado”, portanto a homologia correspondente coincide com a relativa de (X, A) . \diamond

Por causa da observação precedente, a homologia reduzida é uma maneira equivalente de definir a homologia, a qual será bastante prática em várias ocasiões. Ademais, a partir da relação (149) deduziremos que, se o mergulho $i: A \hookrightarrow X$ for uma cofibração (ou um bom par), então $H_\bullet(X, A) \simeq \tilde{H}_\bullet(X/A)$, sendo A/A o ponto marcado de X/A . Esta é uma característica fundamental da homologia reduzida.

6.4.2. Axiomas da homologia singular reduzida. Vimos que a homologia singular, definida para pares de espaços, satisfaz algumas propriedades fundamentais, que a caracterizam axiomáticamente. O mesmo vale para a homologia reduzida. Para enunciar essas propriedades, temos que restringir a categoria Top_+ à Top'_+ , cujos objetos são os espaços com um *bom ponto marcado*, ou seja, tais que o mergulho $\{x_0\} \hookrightarrow X$ é uma cofibração. O functor homologia singular reduzida $\tilde{H}_\bullet: \text{Top}'_+ \rightarrow \text{SeqGrAb}$ é caracterizado por seis propriedades fundamentais, que são as seguintes (algumas valem também em Top_+ toda).

(1') **Invariância por homotopia.** Se $f, g: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ forem morfismos homotópicos em Top_+ , então $f_* = g_*: \tilde{H}_\bullet(X, x_0) \rightarrow \tilde{H}_\bullet(Y, y_0)$, portanto \tilde{H}_\bullet se projeta ao functor $\tilde{H}_\bullet: \text{TopH}_+ \rightarrow \text{SeqGrAb}$.

(2') **Exatidão.** Lembramos que Top'_{2+} é a sub-categoria cheia de Top_{2+} cujos objetos são os pares de espaços com ponto marcado (X, A, x_0) , tais que as inclusões $\{x_0\} \hookrightarrow A$ e $i: A \hookrightarrow X$ são cofibrações (portanto também $\{x_0\} \hookrightarrow X$). Fica definido o functor $\mathcal{S}: \text{TopH}'_{2+} \rightarrow \text{SeqEx}_3$, que associa ao objeto (X, A, x_0) a seguinte sequência exata (a exatidão concerne o termo central em cada grau):

$$\tilde{H}_\bullet(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_\bullet(X, x_0) \xrightarrow{\pi_*} \tilde{H}_\bullet(X/A),$$

sendo i_* o push-forward induzido pelo mergulho $i: A \hookrightarrow X$ e π_* induzido pela projeção $\pi: X \rightarrow X/A$.

(3') **Isomorfismo de suspensão.** Para todo objeto $(X, x_0) \in \text{Top}'_+$, existe um isomorfismo canônico:

$$(150) \quad \tilde{H}_\bullet(X, x_0) \simeq \tilde{H}_{\bullet+1}(\Sigma X),$$

sendo ΣX a suspensão reduzida de (X, x_0) , com o ponto marcado natural.

(4') **Aditividade.** Seja $\{(X_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in I} \subset \text{Ob}(\text{Top}'_+)$. Seja $(X, x_0) = \bigvee_{\alpha \in I} X_\alpha$ a união a um ponto, com o ponto marcado canônico. Temos que $\tilde{H}_\bullet(X, x_0) \simeq \bigoplus_{\alpha \in I} \tilde{H}_\bullet(X_\alpha, x_\alpha)$, sendo o isomorfismo induzido pelos mergulhos das componentes (X_α, x_α) em (X, x_0) . Esta propriedade pode ser deduzida a partir das precedentes quando I for finito, mas, em geral, é uma propriedade independente.

(5') **Axioma da dimensão.** Consideremos a 0-esfera $S^0 = \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$ e escolhamos 1 como ponto marcado (o fato essencial é que S^0 é a união disjunta de dois pontos, um dos quais vai ser escolhido como ponto marcado). O axioma afirma que $\tilde{H}_n(S^0, 1) = 0$ para todo $n \neq 0$. Conforme este enunciado, $\tilde{H}_0(S^0, 1)$ pode ser um grupo abeliano qualquer. A partir da definição que demos, veremos que $\tilde{H}_0(S^0, 1) \simeq \mathbb{Z}$. Mostraremos em seguida a definição de homologia reduzida *com coeficientes* em um grupo abeliano genérico G . Nesse caso $\tilde{H}_0(S^0, 1) \simeq G$.

(6') **Axioma da equivalência homotópica fraca.** Se $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ for uma equivalência homotópica fraca, então $f_*: \tilde{H}_\bullet(X, x_0) \rightarrow \tilde{H}_\bullet(Y, y_0)$ é um isomorfismo para todo n .

Como no caso relativo, considerando CW-complexos finitos, a menos de equivalência homotópica, são suficientes os axiomas (1')–(3') e (5'). Considerando todos os CW-complexos, temos que acrescentar (4'). Enfim, para abranger todos os espaços topológicos, temos que acrescentar (6'). Mostraremos em seguida que a definição 6.4.1 satisfaz estes axiomas.

6.4.3. Homologia reduzida sem ponto marcado. Existe também um modo de definir a homologia reduzida sem marcar um ponto. Dado um espaço X , consideramos a única função $p: X \rightarrow \{pt\}$ e definimos

$$(151) \quad \tilde{H}_\bullet(X) := \text{Ker}(p_*), \quad p_*: H_\bullet(X) \rightarrow H_\bullet(\{pt\}).$$

É claro que $\tilde{H}_n(X) \simeq H_n(X)$ para todo $n \neq 0$. Para $n = 0$, seja $[\sum_{i=0}^k n_i \sigma_i] \in H_0(X)$. Como $p \circ \sigma_i$ é o único 0-simplexo do ponto, o qual é um ciclo e corresponde a $1 \in \mathbb{Z} \simeq H_0(\{pt\})$, temos que

$$(152) \quad p_* \left[\sum_{i=0}^k n_i \sigma_i \right] = \sum_{i=0}^k n_i.$$

Por isso, $\tilde{H}_0(X)$ é o subgrupo de $H_0(X)$ formado pelas classes $[\sum_{i=0}^k n_i \sigma_i]$ tais que $\sum_{i=0}^k n_i = 0$. É fácil verificar que os grupos assim definidos correspondem aos grupos de homologia do seguinte complexo de cadeias, dito *complexo singular aumentado*:

$$(153) \quad \tilde{C}_\bullet(X) := \cdots \longleftarrow 0 \longleftarrow 0 \longleftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{p_\#} C_0(X) \xleftarrow{\partial_1} C_1(X) \xleftarrow{\partial_2} \cdots$$

O morfismo $p_\#$ é o (152), sendo $\tilde{C}_{-1}(X) := \mathbb{Z}$ identificado com $C_0(\{pt\})$.

Pela definição (151), temos a seguinte seqüência exata curta:

$$(154) \quad 0 \longrightarrow \tilde{H}_0(X) \longrightarrow H_0(X) \xrightarrow{p_*} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Essa sequência cinde, mas de modo não canônico. Em particular, uma função $i: \{pt\} \rightarrow X$ determina uma cisão da sequência pelo lema 5.2.5, pois fica definido o morfismo $i_*: \mathbb{Z} \rightarrow H_0(X)$ tal que $p_*i_* = \text{id}_{\mathbb{Z}}$. Essa função equivale a marcar uma componente conexa de X , ou seja, a que contém a imagem de i . Obtemos o seguinte diagrama:

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_0(X) \longrightarrow H_0(X) \xrightarrow{p_*} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

$$\begin{array}{ccc} & \longleftarrow \pi & \longleftarrow i_* \\ & & \end{array}$$

sendo $\pi[\alpha] = [\alpha] - i_*p_*[\alpha]$, logo fica definido o isomorfismo $H_0(X) \simeq \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$ por $[\alpha] \mapsto (\pi[\alpha], p_*[\alpha])$. O morfismo π atua da seguinte maneira: dada uma classe $[\alpha] = [\sum_{i=0}^k n_i \sigma_i] \in H_0(X)$, seja $\tilde{n} = \sum_{i=0}^k n_i$. Temos que $\pi[\alpha] = [\alpha] - \tilde{n}[x_0]$. Ademais, π é sobrejetora e $\text{Ker}(\pi) = \text{Im}(i_*)$, portanto, quotientando pelo kernel, obtemos o seguinte isomorfismo:

$$\bar{\pi}: \tilde{H}_0(X, x_0) \xrightarrow{\simeq} \tilde{H}_0(X).$$

O morfismo $\bar{\pi}$ atua como π , mas somente nas classes tais que o coeficiente de $[x_0]$ é 0: dada uma classe $[\alpha] = [\sum_{i=0}^k n_i \sigma_i] \in \tilde{H}_0(X, x_0)$, temos que $\bar{\pi}[\alpha] = [\alpha] - \tilde{n}[x_0]$, sendo $\tilde{n} = \sum_{i=0}^k n_i$. O morfismo inverso $\bar{\pi}^{-1}$ é mais simples, pois só zera o coeficiente de $[x_0]$.

É fácil estender o isomorfismo $\bar{\pi}$ a todos os graus. Em particular, a sequência (154) é um caso particular da seguinte:

$$(155) \quad 0 \longrightarrow \tilde{H}_\bullet(X) \longrightarrow H_\bullet(X) \xrightarrow{p_*} H_\bullet(\{pt\}) \longrightarrow 0.$$

Fixando $i: \{pt\} \rightarrow X$, obtemos uma cisão de (155), a partir da qual fica definido o isomorfismo:

$$\bar{\pi}: \tilde{H}_\bullet(X, x_0) \xrightarrow{\simeq} \tilde{H}_\bullet(X).$$

Em todos os graus diferentes de 0 o isomorfismo $\bar{\pi}$ é trivial, pois as duas versões da homologia reduzida coincidem canonicamente com $H_\bullet(X)$. Se X for conexo por caminhos, então é trivial também em grau 0, pois $\tilde{H}_\bullet(X, x_0) = \tilde{H}_\bullet(X) = 0$.

OBSERVAÇÃO 6.4.5. Nas seções precedentes enunciamos os axiomas que caracterizam a homologia singular, definida para pares de espaços, e a homologia singular reduzida, definida para espaços com ponto marcado. É possível também caracterizar axiomáticamente a homologia definida somente para um espaço (não necessariamente um par) e a homologia reduzida sem ponto marcado. Se trata de construções equivalentes, pois cada uma determina univocamente as demais. Não vamos aprofundar o assunto, pois se trata de um fato técnico não particularmente relevante neste contexto. \diamond

6.5. Outras propriedades significativas – Parte I

Nesta seção vamos enunciar várias outras propriedades significativas da homologia singular, demonstrando-as a partir da definição e axiomáticamente.

6.5.1. Sequência exata longa em homologia reduzida. A partir da definição (153) de complexo aumentado, é fácil verificar que, dado um par de espaços (X, A) , temos que $\tilde{C}_\bullet(X)/\tilde{C}_\bullet(A) \simeq C_\bullet(X, A)$ canonicamente. De fato, ambos os complexos $\tilde{C}_\bullet(X)$ e $\tilde{C}_\bullet(A)$ contêm um grupo \mathbb{Z} a mais de grau -1 , portanto, ao quociente, as duas cópias de \mathbb{Z} se cortam. Obtemos a seguinte sequência exata curta:

$$0 \rightarrow \tilde{C}_\bullet(A) \rightarrow \tilde{C}_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(X, A) \rightarrow 0.$$

Aplicando o functor Bockstein, obtemos a seguinte sequência exata longa em homologia:

$$(156) \quad \cdots \xrightarrow{i_{*,n}} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{\pi_{*,n}} H_n(X, A) \xrightarrow{\beta_n} \tilde{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{i_{*,n-1}} \tilde{H}_{n-1}(X) \xrightarrow{\pi_{*,n-1}} \cdots$$

Mais precisamente, obtemos um functor $\tilde{\mathcal{B}}: \text{TopH}_2 \rightarrow \text{SeqExL}$.

A mesma construção vale em relação à homologia reduzida com ponto marcado. De fato, dado um objeto (X, A, x_0) de Top_{2+} , é fácil verificar que $C_\bullet(X, \{x_0\})/C_\bullet(A, \{x_0\}) \simeq C_\bullet(X, A)$ canonicamente. De fato, ambos os complexos $C_\bullet(X, \{x_0\})$ e $C_\bullet(A, \{x_0\})$ contêm um fator \mathbb{Z} a menos no grupo de grau 0, mas, ao quociente, as duas cópias de \mathbb{Z} se cortam, pois $x_0 \in A$. Por isso, obtemos a seguinte sequência exata curta:

$$0 \rightarrow C_\bullet(A, \{x_0\}) \rightarrow C_\bullet(X, \{x_0\}) \rightarrow C_\bullet(X, A) \rightarrow 0.$$

Aplicando o functor Bockstein, obtemos a seguinte sequência exata longa em homologia:

$$(157) \quad \cdots \xrightarrow{i_{*,n}} \tilde{H}_n(X, x_0) \xrightarrow{\pi_{n,*}} H_n(X, A) \xrightarrow{\beta_n} \tilde{H}_{n-1}(A, x_0) \\ \xrightarrow{i_{n-1,*}} \tilde{H}_{n-1}(X, x_0) \xrightarrow{\pi_{n-1,*}} \cdots$$

Mais precisamente, obtemos um functor $\tilde{\mathcal{B}}: \text{TopH}_{2+} \rightarrow \text{SeqExL}$.

6.5.2. Homologia relativa e cone. Agora podemos provar o isomorfismo canônico (149), mostrando que a homologia reduzida e a homologia relativa são deduzíveis uma a partir da outra.

LEMA 6.5.1. *Seja (X, A) um par de espaços topológicos. Há um isomorfismo natural:*

$$H_\bullet(X, A) \simeq \tilde{H}_\bullet(C(X, A)),$$

sendo o ponto marcado do cone o vértice.

DEMONSTRAÇÃO. Seja v o vértice do cone e consideremos a sequência exata longa (157) associada ao objeto $(C(X, A), CA, v)$ de Top_{2+} . Como CA é contrátil, obtemos os seguintes trechos:

$$(158) \quad 0 \longrightarrow \tilde{H}_n(C(X, A), v) \xrightarrow{\pi_*} \tilde{H}_n(C(X, A), CA) \longrightarrow 0,$$

sendo $\pi: (C(X, A), \{v\}) \rightarrow (C(X, A), CA)$. Por isso, π_* é um isomorfismo. Por excisão, temos que $H_n(C(X, A), CA) \simeq H_n(C(X, A) \setminus \{v\}, CA \setminus \{v\})$. Como A é retrato por deformação de $CA \setminus \{v\}$, o par $(C(X, A) \setminus \{v\}, CA \setminus \{v\})$ tem o mesmo tipo de homotopia do par (X, A) , logo $H_n(C(X, A) \setminus \{v\}, CA \setminus \{v\}) \simeq H_n(X, A)$. \square

6.5.3. Sequência exata longa da tripla. Podemos generalizar a sequência exata longa associada a um par de espaços da seguinte maneira. Seja (X, A, B) um objeto de Top_3 , logo $B \subset A \subset X$. Temos a seguinte sequência exata curta:

$$0 \rightarrow C_\bullet(A, B) \rightarrow C_\bullet(X, B) \rightarrow C_\bullet(X, A) \rightarrow 0$$

a qual induz a seguinte sequência exata longa:

$$(159) \quad \begin{aligned} \dots \xrightarrow{i_{*,n}} H_n(X, B) \xrightarrow{\pi_{*,n}} H_n(X, A) \xrightarrow{\beta_n} H_{n-1}(A, B) \\ \xrightarrow{i_{*,n-1}} H_{n-1}(X, B) \xrightarrow{\pi_{*,n-1}} \dots, \end{aligned}$$

sendo $i: (A, B) \rightarrow (X, B)$ e $\pi: (X, B) \rightarrow (X, A)$. Dessa maneira fica definido o functor

$$(160) \quad \mathcal{B}: \text{Top}_3 \rightarrow \text{SeqExL}.$$

Para $B = \emptyset$ obtemos a sequência (138) e para $B = \{x_0\}$ obtemos a sequência (157).

6.5.4. Sequência de Mayer-Vietoris. Já afirmamos na introdução sobre a homologia que a sequência de Mayer-Vietoris desempenha um papel análogo ao do teorema de Seifert-Van Kampen (a partir de uma cobertura de dois abertos), mas vale em qualquer grau. Sejam $A, B \subset X$ tais que $X = \text{int}A \cup \text{int}B$ (ou seja, valem as mesmas hipóteses da excisão). Consideremos a seguinte sequência exata curta de complexos de cadeias:

$$0 \rightarrow C_\bullet(A \cap B) \xrightarrow{\varphi_\bullet} C_\bullet(A) \oplus C_\bullet(B) \xrightarrow{\psi_\bullet} C_\bullet(A + B) \rightarrow 0,$$

onde:

- $C_\bullet(A + B)$ é o complexo (142), gerado pela cadeias com suporte contido em A ou em B ;
- $\varphi_n(\sigma) := (\sigma, -\sigma)$;
- $\psi_n(\sigma, \rho) := \sigma + \rho$.

É imediato provar a exatidão. Demonstrando a excisão, verificamos que, graças à hipótese $X = \text{int}A \cup \text{int}B$, a cohomologia do complexo $C_\bullet(A + B)$ é isomorfa à do espaço X , portanto obtemos a seguinte sequência exata longa:

$$(161) \quad \begin{aligned} \dots \xrightarrow{\beta_{n-1}} H_n(A \cap B) \xrightarrow{\varphi_{*,n}} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\psi_{*,n}} H_n(X) \\ \xrightarrow{\beta_n} H_{n-1}(A \cap B) \xrightarrow{\varphi_{*,n-1}} \dots \end{aligned}$$

O morfismo de Bockstein pode ser descrito da seguinte maneira: como $H_\bullet(A + B) \simeq H_\bullet(X)$, dada uma classe $[c] \in H_n(X)$, existem $a \in C_n(A)$ e $b \in C_n(B)$ tais que $[c] = [a + b]$. Como $\partial c = 0$, temos que $\partial a = -\partial b$. Conforme a definição do morfismo de Bockstein, levantamos a cadeia $a + b$ à cadeia $(a, b) \in C_n(A) \oplus C_n(B)$, aplicamos o bordo e obtemos $(\partial a, \partial b) = (\partial a, -\partial a) = \varphi(\partial a)$, logo $\beta_n[c] = [\partial a]$. Vamos entender o significado topológico da exatidão em cada posição.

Exatidão em $H_n(A) \oplus H_n(B)$. (i) É claro que $\psi_{*,n} \circ \varphi_{*,n} = 0$, pois $\psi_{*,n}(\varphi_{*,n}[c]) = \psi_{*,n}([c], [c]) = [c - c] = 0$. (ii) Suponhamos que $\psi_{*,n}([a], [b]) = 0$ e provemos que $([a], [b]) \in \text{Im}(\varphi_{*,n})$. Como $[a + b] = 0$, conseguimos achar $[c] \in H_n(A + B)$ tal que $\partial a = -\partial b = c$.

Exatidão em $H_n(X)$. (i) Mostremos que $\beta_n \circ \psi_{*,n} = 0$. Seja $([a], [b]) \in H_n(A) \oplus H_n(B)$. Temos que $\psi_{*,n}([a], [b]) = [a + b]$, sendo $a \in C_n(A)$, $b \in C_n(B)$ e $\partial a = -\partial b = 0$, portanto $\beta_n([a + b]) = [0] = 0$. (ii) $\beta_n([a + b]) = 0$. Então $\partial a = -\partial b = 0$, portanto a e b são ciclos respectivamente em A e em B , logo $\psi_{*,n}([a], [b]) = [a + b]$.

Exatidão em $H_n(A \cap B)$. (i) Provemos que $\psi_{*,n} \circ \beta_n = 0$. Seja $[a + b] \in H_{n+1}(X)$. Temos que $\beta_n[a + b] = [\partial_{n+1}(a)] = -[\partial_{n+1}(b)]$, portanto, aplicando $\psi_{*,n}$, obtemos a classe $([\partial_{n+1}(a)], [\partial_{n+1}(b)]) = (0, 0) \in H_n(A) \oplus H_n(B)$. (ii) Suponhamos que $\psi_{*,n}[c] = 0$ e provemos que $[a] \in \text{Im}(\beta_{n+1})$. Como $([c], [-c]) = (0, 0)$, temos que $c = \partial a$ e $c = -\partial b$, logo $a + b$ é um ciclo de X e $\beta_n([a + b]) = [c]$.

Podemos refinar a sequência de Mayer-Vietoris da seguinte maneira. Seja $C \subset A \cap B$. Temos a seguinte sequência exata curta:

$$0 \longrightarrow C_\bullet(A \cap B, C) \xrightarrow{\varphi_\bullet} C_\bullet(A, C) \oplus C_\bullet(B, C) \xrightarrow{\psi_\bullet} C_\bullet(A + B, C) \longrightarrow 0,$$

a qual induz a seguinte sequência exata longa:

$$(162) \quad \begin{aligned} \dots \xrightarrow{\beta_{n-1}} H_n(A \cap B, C) \xrightarrow{\varphi_{*,n}} H_n(A, C) \oplus H_n(B, C) \xrightarrow{\psi_{*,n}} H_n(X, C) \\ \xrightarrow{\beta_n} H_{n-1}(A \cap B, C) \xrightarrow{\varphi_{*,n-1}} \dots \end{aligned}$$

Para $C = \{x_0\}$ obtemos a sequência de Mayer-Vietoris em homologia reduzida com ponto marcado:

$$(163) \quad \begin{aligned} \dots \xrightarrow{\beta_{n-1}} \tilde{H}_n(A \cap B, x_0) \xrightarrow{\varphi_{*,n}} \tilde{H}_n(A, x_0) \oplus \tilde{H}_n(B, x_0) \xrightarrow{\psi_{*,n}} \tilde{H}_n(X, x_0) \\ \xrightarrow{\beta_n} \tilde{H}_{n-1}(A \cap B, x_0) \xrightarrow{\varphi_{*,n-1}} \dots \end{aligned}$$

Podemos também obter a sequência de Mayer-Vietoris em homologia reduzida sem ponto marcado, considerando a sequência curta dos complexos de cadeias aumentados:

$$0 \longrightarrow \tilde{C}_\bullet(A \cap B) \xrightarrow{\varphi_\bullet} \tilde{C}_\bullet(A) \oplus \tilde{C}_\bullet(B) \xrightarrow{\psi_\bullet} \tilde{C}_\bullet(A + B) \longrightarrow 0.$$

A definição de φ_\bullet e ψ_\bullet no grau -1 é a natural, ou seja, $\varphi_{-1}(n) := (n, -n)$ e $\psi_{-1}(n, m) := n + m$ para $n, m \in \mathbb{Z}$. Obtemos a seguinte sequência:

$$(164) \quad \begin{aligned} \dots \xrightarrow{\beta_{n-1}} \tilde{H}_n(A \cap B) \xrightarrow{\varphi_{*,n}} \tilde{H}_n(A) \oplus \tilde{H}_n(B) \xrightarrow{\psi_{*,n}} \tilde{H}_n(X) \\ \xrightarrow{\beta_n} \tilde{H}_{n-1}(A \cap B) \xrightarrow{\varphi_{*,n-1}} \dots \end{aligned}$$

6.6. Aplicações – Parte I

Agora chegou o momento de calcular concretamente alguns grupos de homologia singular, além de mostrar várias aplicações relevantes desta teoria.

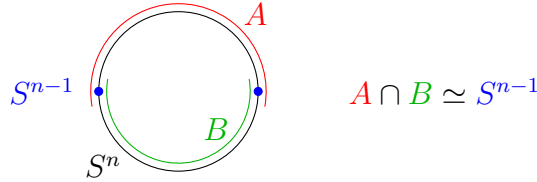
6.6.1. Homologia das esferas. Graças à sequência de Mayer-Vietoris podemos calcular os grupos de homologia das esferas. É fácil calcular a homologia de $S^0 = \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$. De fato, pelo lema 6.3.2 temos que $H_\bullet(S^0) \simeq H_\bullet(\{pt\}) \oplus H_\bullet(\{pt\})$, portanto, aplicando a fórmula (134), obtemos que $H_0(S^0) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $H_n(S^0) = 0$ para

todo $n \neq 0$. Em homologia reduzida, para $n \neq 0$ temos que $\tilde{H}_n(S^0) \simeq H_n(S^0) = 0$ e, para $n = 0$, $\tilde{H}_0(S^0) = \{(n, -n)\} \subset \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, logo $\tilde{H}_0(S^0) \simeq \mathbb{Z}$. Resumindo:

$$(165) \quad \tilde{H}_k(S^0) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \\ 0 & k \neq 0. \end{cases}$$

OBSERVAÇÃO 6.6.1. Como a homologia reduzida com ponto marcado é isomorfa à sem ponto marcado, a fórmula (165) demonstra o axioma da dimensão em homologia reduzida. Explicitamente, para $n \neq 0$ não há nenhuma variação, enquanto, para $n = 0$, temos que $\tilde{H}_0(S^0, 1) = \{(n, 0)\} \subset \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (a primeira componente corresponde ao ponto -1 e a segunda ao ponto 1), logo $\tilde{H}_0(S^0, 1) \simeq \mathbb{Z}$. \diamond

Em S^n , para $n \geq 1$, podemos considerar os dois abertos A e B , formados por uma vizinhança para cada hemisfério, de modo que $A \cap B$ se retrai por deformação no equador S^{n-1} e A e B se retraem por deformação no hemisfério correspondente.



Para $n = 0$, escolhemos os abertos $A = \{-1\}$ e $B = \{1\}$. Desta maneira, na sequência de Mayer-Vietoris reduzida, temos que $\tilde{H}_k(A) \oplus \tilde{H}_k(B) = 0$, pois os hemisférios são contráteis, logo obtemos os seguintes trechos:

$$(166) \quad 0 \longrightarrow \tilde{H}_k(S^n) \xrightarrow{\beta_k} \tilde{H}_{k-1}(S^n) \longrightarrow 0.$$

Isso prova que $\tilde{H}_k(S^n) \simeq \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1})$, portanto $\tilde{H}_k(S^n) \simeq \tilde{H}_{k-n}(S^0)$. Pela fórmula (165) temos que:

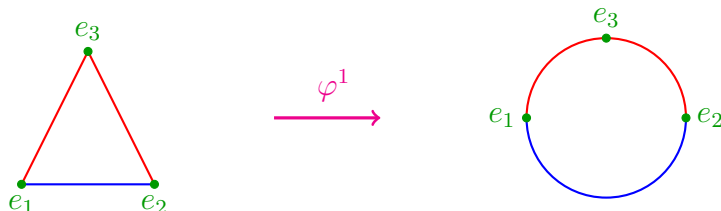
$$(167) \quad \tilde{H}_k(S^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & k = n \\ 0 & k \neq n. \end{cases}$$

Vamos mostrar explicitamente um gerador de $\tilde{H}_n(S^n)$. Seja $\partial\Delta^{n+1}$ o bordo de Δ^n como variedade topológica. O simplexo Δ^{n+1} é homeomorfo ao disco D^{n+1} . Fixando um homeomorfismo $\Phi^n: \Delta^{n+1} \rightarrow D^{n+1}$, fica definido por restrição o homeomorfismo $\varphi^n = \Phi^n|_{\partial\Delta^{n+1}}: \partial\Delta^{n+1} \rightarrow S^n$. A partir da identidade $\text{id}_{\Delta^{n+1}}$, que é um $(n+1)$ -simplexo singular de Δ^{n+1} , podemos definir a cadeia singular

$$\alpha_n = \varphi_{\#}^n(\partial_{n+1}\text{id}_{\Delta^{n+1}}) \in C_n(S^n).$$

Se pensássemos em α_n como em uma cadeia de D^{n+1} , por construção seria um bordo, pois coincidiria com $\partial_{n+1}\varphi_{\#}^n(\text{id}_{\Delta^{n+1}})$. Considerando somente o bordo S^n , a cadeia $\varphi_{\#}^n(\text{id}_{\Delta^{n+1}})$ não está definida, portanto α_n pode não ser mais um bordo (de fato, não o é). Todavia, continua sendo um ciclo, pois a identidade $\partial_n\alpha_n = 0$ vale também em S^n . Vamos provar que $[\alpha_n] \in \tilde{H}_n(S^n)$ é um gerador. Antes de tudo o fato que seja um gerador não depende do homeomorfismo φ^n . De fato, se escolhêssemos outro, obteríamos o mesmo ciclo a menos do push-forward através

de um homeomorfismo de S^n em si mesma, o qual manda geradores em geradores. Vamos escolher o seguinte homeomorfismo φ^n : a imagem da face $[e_1, \dots, e_{n+1}, \hat{e}_{n+2}]$ é o hemisfério inferior e as imagens das demais faces cobrem o hemisfério superior. A seguinte figura mostra o homeomorfismo φ^1 :



Construímos φ^n indutivamente dessa maneira, de modo que $\varphi^n|_{\partial[e_1, \dots, e_{n+1}, \hat{e}_{n+2}]}$ coincida com φ^{n-1} , identificando canonicamente $[e_1, \dots, e_{n+1}, \hat{e}_{n+2}]$ com Δ^n . Isso significa que a restrição de $(\varphi^n)^{-1}$ ao equador coincide com φ^{n-1} . Dessa maneira, podemos provar que o morfismo β_n na sequência (166) satisfaz $\beta_n(\alpha_n) = \alpha_{n-1}$. De fato, pela definição de β_n , separamos α_n no simplexo a correspondente à face $[e_1, \dots, e_{n+1}, \hat{e}_{n+2}]$, cujo suporte está contido em B , e na soma b dos simplexos correspondentes às demais faces, cujo suporte está contido em B . Pela definição de β_n , a imagem é a classe $[\partial a] = -[\partial b]$, a qual é precisamente a restrição ao equador de a . Por construção, essa restrição é α_{n-1} . Agora podemos provar por indução que α_n é um gerador de $\tilde{H}_n(S^n)$: como β_n é um isomorfismo, manda geradores em geradores, portanto só temos que provar que α_0 é um gerador de $\tilde{H}_0(S^0)$. Isso pode ser verificado facilmente por construção, pois $\alpha_0 = (1, -1)$.

A partir de (167), é fácil calcular a homologia não reduzida. Temos que:

$$n > 0 : H_k(S^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & k = n \\ 0 & k \neq n, 0 \\ \mathbb{Z} & k = 0. \end{cases} \quad H_k(S^0) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & k = 0 \\ 0 & k \neq 0. \end{cases}$$

6.6.2. Aplicações da homologia das esferas. Quando calculamos o grupo fundamental de S^1 , provamos vários resultados a partir disso. Agora podemos generalizar esses resultados a todo n .

LEMA 6.6.2. \mathbb{R}^n não é homeomorfo a \mathbb{R}^m para $n \neq m$.

DEMONSTRAÇÃO. Se $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ for um homeomorfismo, então $\varphi|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{\varphi(0)\}$ o é também. Como $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1}$ e $\mathbb{R}^m \setminus \{\varphi(0)\} \simeq S^{m-1}$, calculando os grupos \tilde{H}_{n-1} dos dois espaços deduzimos que $n = m$. \square

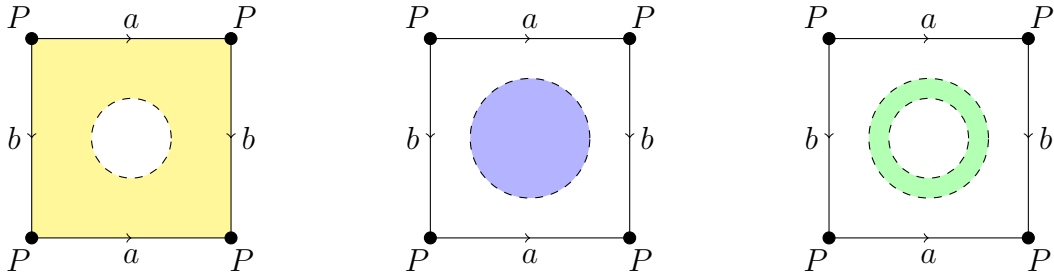
LEMA 6.6.3. $S^{n-1} = \partial D^n$ não é retrato de D^n .

DEMONSTRAÇÃO. Seja por absurdo $r: D^n \rightarrow S^{n-1}$ uma retração e seja $i: S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ o mergulho. Como $r \circ i = \text{id}_{S^{n-1}}$, considerando o grupo $\tilde{H}^{n-1}(S^{n-1}) \simeq \mathbb{Z}$ temos que $r_{*,n} \circ i_{*,n} = \text{id}_{\mathbb{Z}}$, logo $r_{*,n}: 0 \rightarrow \mathbb{Z}$ é sobrejetor, o que é impossível. \square

TEOREMA 6.6.4 (Teorema do ponto fixo de Brouwer). *Uma função contínua $f: D^n \rightarrow D^n$ admite um ponto fixo, isto é, existe $x \in D^n$ tal que $f(x) = x$.*

DEMONSTRAÇÃO. A prova é análoga à que mostramos para $n = 2$, aplicando o lema 6.6.3. \square

6.6.3. Homologia das superfícies. Podemos também calcular os grupos de homologia das superfícies topológicas compactas. De fato, consideremos a superfície Σ_g e escolhamos dois abertos A e B análogos aos que escolhemos para aplicar o teorema de Seifert-Van Kampen, mas sem a necessidade de acrescentar uma vizinhança dos vértices. A seguinte figura mostra os abertos A e B e a interseção $A \cap B$ para o toro:



Como $A \cap B \simeq S^1$, temos que $\tilde{H}_1(A \cap B) \simeq \mathbb{Z}$ e os demais grupos não nulos. Como A tem o mesmo tipo de homotopia da união a um ponto de $2g$ cópias de S^1 , pelo axioma de aditividade em homologia reduzida (que ainda devemos provar), temos que $\tilde{H}_1(A) \simeq \mathbb{Z}^{\oplus 2g}$ e os demais grupos são nulos. Enfim, sendo B contrátil, $\tilde{H}_\bullet(B) = 0$. Na sequência de Mayer-Vietoris reduzida, para $n \geq 3$ temos os seguintes trechos, a partir de $H_n(A \cap B)$:

$$0 \xrightarrow{\varphi_{*,n}} 0 \xrightarrow{\psi_{*,n}} \tilde{H}_n(\Sigma_g) \xrightarrow{\beta_n} 0,$$

logo $\tilde{H}_n(\Sigma_g) = 0$ para $n \geq 3$. A partir de $H_2(A \cap B)$ temos o seguinte trecho:

$$0 \xrightarrow{\varphi_{*,2}} 0 \xrightarrow{\psi_{*,2}} \tilde{H}_2(\Sigma_g) \xrightarrow{\beta_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_{*,1}} \mathbb{Z}^{\oplus 2g}.$$

O homomorfismo $\varphi_{*,1}$ manda o gerador de $\tilde{H}_1(A \cap B) \simeq \mathbb{Z}$ na imagem em $\tilde{H}_1(A)$, portanto $\varphi_{*,1}(1)$

$$\tilde{H}_1(A \cap B) \xrightarrow{(\varphi)_{*,1}} \tilde{H}_1(A) \oplus \tilde{H}_1(B) \xrightarrow{(\psi)_{*,1}} \tilde{H}_1(\Sigma_2) \xrightarrow{\beta_1} \tilde{H}_0(A \cap B).$$

Como B é contrátil, $\tilde{H}_\bullet(B) = 0$. Como $A \simeq S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1$ e $A \cap B \simeq S^1$, a menos de isomorfismo $(\varphi)_{*,1} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. O gerador c de $\tilde{H}_1(A \cap B)$ se retrai na borda de A , logo $(\varphi)_{*,1}(c) = a_1 + b_1 - a_1 - b_1 + a_2 + b_2 - a_2 - b_2 = 0$, portanto $(\varphi)_{*,1} = 0$. Isso implica que $(\psi)_{*,1}$ seja injetor. Como o grupo a direita é nulo, $(\psi)_{*,1}$ é também sobrejetor, logo $\tilde{H}_1(\Sigma_2) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Consideremos agora o trecho:

$$\tilde{H}_n(A) \oplus \tilde{H}_n(B) \xrightarrow{(\psi)_{*,n}} \tilde{H}_n(\Sigma_2) \xrightarrow{\beta_n} \tilde{H}_{n-1}(A \cap B) \xrightarrow{(\varphi)_{*,n}} \tilde{H}_{n-1}(A) \oplus \tilde{H}_{n-1}(B).$$

Temos as seguintes possibilidades:

- $n = 0$: os grupos externos são nulos, logo $\tilde{H}_0(\Sigma_2) \simeq \tilde{H}_{-1}(S^1) = 0$, portanto $H_0(\Sigma_2) \simeq \mathbb{Z}$. Isso é obvio pois Σ_2 é conexo por caminhos.
- $n = 2$: o grupo a esquerda é nulo, logo β_2 é injetor. Já provamos que $(\varphi)_{*,1} = 0$, portanto β_2 é também sobrejetor. Logo, $H_2(\Sigma_2) \simeq \mathbb{Z}$.

- $n \geq 3$: os grupos externos são nulos, logo $H_n(\Sigma_2) \simeq H_{n-1}(A \cap B) = 0$.

Com a mesma técnica podemos calcular os grupos de homologia de todas as superfícies compactas, obtendo, para superfícies sem borda:

- $H_0(\Sigma_g) \simeq \mathbb{Z}$ e $H_1(\Sigma_g) \simeq \mathbb{Z}^{\oplus 2g}$ e os demais são nulos;
- $H_0(\Sigma_g \# \mathbb{R}P^2) \simeq \mathbb{Z}$, $H_1(\Sigma_g \# \mathbb{R}P^2) \simeq \mathbb{Z}^{\oplus 2g} \oplus \mathbb{Z}_2$ e os demais são nulos;
- $H_0(\Sigma_g \# K) \simeq \mathbb{Z}$, $H_1(\Sigma_g \# K) \simeq \mathbb{Z}^{\oplus 2g+1} \oplus \mathbb{Z}_2$ e os demais são nulos.

Enfim, para superfícies com borda:

- $H_0(\Sigma_{g,k}) \simeq \mathbb{Z}$, $H_1(\Sigma_{g,k}) \simeq \mathbb{Z}^{\oplus 2g+k-1}$, $H_2(\Sigma_{g,k}) \simeq \mathbb{Z}$ e os demais são nulos;
- $H_0(\Sigma_{g,k} \# \mathbb{R}P^2) \simeq \mathbb{Z}$, $H_1(\Sigma_{g,k} \# \mathbb{R}P^2) \simeq \mathbb{Z}^{\oplus 2g+k}$ e os demais são nulos;
- $H_0(\Sigma_{g,k} \# K) \simeq \mathbb{Z}$, $H_1(\Sigma_{g,k} \# K) \simeq \mathbb{Z}^{\oplus 2g+k+1}$ e os demais são nulos.

O mesmo resultado podia ser obtido através da homologia simplicial.

6.7. Outras propriedades significativas – Parte II

Vamos continuar mostrando propriedades relevantes da homologia singular.

6.7.1. Extensão da invariância por homotopia. Por causa da invariância por homotopia, se $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ for uma equivalência homotópica de pares, ou seja, um isomorfismo em TopH_2 , então $f_*: H_\bullet(X, A) \rightarrow H_\bullet(Y, B)$ é um isomorfismo. Existe também uma versão mais geral deste resultado: é suficiente pedir que $f: X \rightarrow Y$ e $f|_A: A \rightarrow B$ sejam equivalências homotópicas, sem que isso ocorra para f como morfismo de pares

EXEMPLO 6.7.1. Consideremos o morfismo $i: (D^n, \partial D^n) \rightarrow (D^n, D^n \setminus \{0\})$ induzido pela identidade de D^n . As funções $i: D^n \rightarrow D^n$ e $i|_{\partial D^n}: \partial D^n \rightarrow D^n \setminus \{0\}$ são equivalências homotópicas, todavia isso não vale para i como morfismo de pares. De fato, seja por absurdo $r: (D^n, D^n \setminus \{0\}) \rightarrow (D^n, \partial D^n)$ uma inversa em TopH_2 . Como $r(D^n \setminus \{0\}) \subset \partial D^n$, por continuidade $r(D^n) \subset \partial D^n$. Seja $\iota: \partial D^n \hookrightarrow D^n$ o mergulho. Temos que $r \circ \iota = (r|_{D^n \setminus \{0\}}) \circ (i|_{\partial D^n}) \simeq \text{id}_{\partial D^n}$, portanto r é uma retração fraca de D^n em ∂D^n , o que é absurdo. \diamond

O seguinte lema mostra que, mesmo em casos como o exemplo precedente, f induz um isomorfismo em homologia relativa.

LEMA 6.7.2. *Seja $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ um morfismo de pares tal que $f: X \rightarrow Y$ e $f|_A: A \rightarrow B$ são equivalências homotópicas. Então $f_*: H_\bullet(X, A) \rightarrow H_\bullet(Y, B)$ é um isomorfismo.*

DEMONSTRAÇÃO. Chamamos de $f|_X: X \rightarrow Y$ o morfismo entre os espaços maiores. Consideremos o morfismo, induzido por f , entre as sequências exatas longas associadas a (X, A) e (Y, B) :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, A) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow (f|_A)_* & & \downarrow (f|_X)_* & & \downarrow f_* & & \downarrow (f|_A)_* & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_n(B) & \longrightarrow & H_n(Y) & \longrightarrow & H_n(Y, B) & \longrightarrow & H_{n-1}(B) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Os morfismos $(f|_A)_*$ e $(f|_X)_*$ são isomorfismos, logo, pelo lema dos cinco, também f_* é um isomorfismo. \square

Ressaltamos que, dados dois pares (X, A) e (Y, B) , para aplicar o lema 6.7.2 não é suficiente que $X \simeq Y$ e $A \simeq B$, ou seja, que existam duas equivalências homotópicas $f: X \rightarrow Y$ e $g: A \rightarrow B$. Deve ser possível escolher $g = f|_A$, ou seja, é necessário que exista uma função $f: X \rightarrow Y$ tal que f e $f|_A$ são equivalências homotópicas.

EXEMPLO 6.7.3. Seja S_ε^1 o círculo de raio ε e centro 0 em \mathbb{R}^2 . Consideremos os pares

$$(X, A) = (D^2 \setminus \{(\frac{1}{2}, 0)\}, \partial D^2) \quad (Y, B) = (D^2 \setminus \{(\frac{1}{2}, 0)\}, S_{\frac{1}{4}}^1).$$

Neste caso $X \simeq Y$ e $A \simeq B$, mas os grupos de homologia relativa correspondentes não são isomorfos. \diamond

6.7.2. Homologia relativa e homologia do quociente. Graças à excisão podemos mostrar a ligação entre homologia relativa e homologia do quociente. Vamos mostrar a demonstração no caso de um bom par e no caso de uma cofibração. É claro que, para espaços suficientemente regulares, uma das duas seria suficiente.

TEOREMA 6.7.4. *Seja (X, A) um bom par. A projeção $\pi: (X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$ induz o isomorfismo canônico $\pi_*: H_\bullet(X, A) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_\bullet(X/A)$, sendo A/A o ponto marcado de X/A .*

DEMONSTRAÇÃO. Sendo (X, A) um bom par, A é fechado em X e existe uma vizinhança aberta V de A tal que A é um retrato por deformação de V . Consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X, A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X, V) & \xleftarrow{j_*} & H_n(X \setminus A, V \setminus A) \\ \pi_* \downarrow & & \pi'_* \downarrow & & \pi''_* \downarrow \\ H_n(X/A, A/A) & \xrightarrow{i'_*} & H_n(X/A, V/A) & \xleftarrow{j'_*} & H_n(X/A \setminus A/A, V/A \setminus A/A), \end{array}$$

induzido pelos mergulhos e pelas projeções de pares correspondentes. Temos que i_* é um isomorfismo pelo lema 6.7.2.⁴ Uma retração por deformação $r: V \rightarrow A$ se projeta a uma retração por deformação $r': V/A \rightarrow A/A$, logo também i'_* é um isomorfismo. Também j_* e j'_* são isomorfismos, pela excisão. Enfim, π''_* é um isomorfismo, pois π'' é a identidade. Isso prova que também π_* é um isomorfismo, pois coincide com a composição de isomorfismos $(i'_*)^{-1} \circ j'_* \circ \pi''_* \circ j_*^{-1} \circ i_*$ (o mesmo vale para π'_*). \square

A partir disso podemos calcular de outra maneira a homologia das esferas. De fato, podemos considerar a sequência exata longa reduzida do par $(D^n, \partial D^n)$. Sendo D^n contrátil e sendo $(D^n, \partial D^n)$ um bom par, obtemos os seguintes trechos:

$$(168) \quad 0 \longrightarrow \tilde{H}_k(D^n/\partial D^n) \xrightarrow{\beta_k} \tilde{H}_{k-1}(\partial D^n) \longrightarrow 0.$$

Como $D^n/\partial D^n \approx S^n$ e $\partial D^n \approx S^{n-1}$, obtemos as sequências (166), portanto podemos calcular $\tilde{H}_\bullet(S^n)$, a partir de $\tilde{H}_\bullet(S^0)$, como já fizemos. Usando as sequências

⁴Pode-se provar que i_* é um isomorfismo também da seguinte maneira. Como o mergulho $A \hookrightarrow V$ é uma equivalência homotópica, na sequência exata longa associada ao par (V, A) o morfismo $H_\bullet(A) \rightarrow H_\bullet(V)$ é um isomorfismo, portanto, por exatidão, $H_\bullet(V, A) = 0$. Por isso, na sequência exata longa da tripla (X, V, A) , o morfismo $H_\bullet(X, A) \rightarrow H_\bullet(X, V)$ é um isomorfismo.

(168), podemos construir de outra maneira um gerador de $\tilde{H}_n(S^n)$. De fato, consideremos um homeomorfismo $\Phi^n: \Delta^n \rightarrow D^n$. Como $\Phi^n(\partial\Delta^n) \subset \partial D^n$, trata-se de um ciclo relativo $[\Phi^n] \in Z_n(D^n, \partial D^n)$. A imagem de $[[\Phi^n]] \in H_n(D^n, \partial D^n) \simeq \tilde{H}_n(D^n/\partial D^n)$, através do morfismo de Bockstein no trecho (168), é precisamente $[\partial_n \Phi^n] \in H_{n-1}(S^{n-1})$, que vimos ser um gerador. Por isso, $[[\Phi^n]]$ é um gerador de $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$. Aplicando o isomorfismo $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \simeq \tilde{H}_n(D^n/\partial D^n)$, induzido por $\pi: (D^n, \partial D^n) \rightarrow (D^n/\partial D^n, \partial D^n/\partial D^n)$, obtemos a classe $[\pi_\#[\Phi^n]]$, sendo $\pi_\#[\Phi^n]$ o simplexo que identifica Δ^n com D^n e colapsa o bordo. Trata-se de um ciclo relativo em $(S^n, *)$. Se n for ímpar, se trata também de um ciclo de S^n , se não o bordo dele é o ponto marcado, o qual é o bordo do simplexo constante. Nesse caso, tirando o simplexo constante, obtemos um ciclo.

6.7.3. Axiomas (2') e (4'). A partir do lema 6.7.4, é imediato provar o axioma (2'), pois corresponde a um trecho da sequência exata longa associada ao par (X, A) . Podemos também provar o axioma (4'), a partir do axioma (4). Seja $\{(X_\alpha, x_{0,\alpha})\}_{\alpha \in I}$ uma família de espaços com ponto marcado, tais que $(X_\alpha, \{x_{0,\alpha}\})$ é um bom par para cada $\alpha \in I$. Isso implica que também $(\sqcup_{\alpha \in I} X_\alpha, \sqcup_{\alpha \in I} \{x_{0,\alpha}\})$ é um bom par. Logo, pelo teorema 6.7.4 e pelo lema 6.3.1, temos:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_\bullet(\vee_{\alpha \in I} X_\alpha) &= \tilde{H}_\bullet((\sqcup_{\alpha \in I} X_\alpha)/(\sqcup_{\alpha \in I} \{x_{0,\alpha}\})) \simeq H_\bullet(\sqcup_{\alpha \in I} X_\alpha, \sqcup_{\alpha \in I} \{x_{0,\alpha}\}) \\ &\simeq \bigoplus_{\alpha \in I} H_\bullet(X_\alpha, \{x_{0,\alpha}\}) = \bigoplus_{\alpha \in I} \tilde{H}_\bullet(X_\alpha, x_{0,\alpha}). \end{aligned}$$

6.7.4. Homologia local. Podemos refinar o corolário 6.6.2, mostrando que um aberto de \mathbb{R}^n e um aberto de \mathbb{R}^m não podem ser homeomorfos se $n \neq m$. Para isso, precisamos da seguinte definição.

DEFINIÇÃO 6.7.5. Os *grupos de homologia local* de um espaço X em um ponto $x \in X$ são os grupos $H_\bullet(X, X \setminus \{x\})$. \diamond

O fato que se chamem de grupos locais é devido ao seguinte motivo. Seja $U \subset X$ uma vizinhança aberta de x e suponhamos que X seja pelo menos T_1 (ou seja, um ponto é fechado). Pela excisão, tirando $Z = X \setminus U$, obtemos

$$(169) \quad H_\bullet(X, X \setminus \{x\}) \simeq H_\bullet(U, U \setminus \{x\}).$$

Isso mostra que os grupos de homologia local só dependem de uma vizinhança de x , por isso são locais. É claro que são invariantes por homeomorfismo; o que acabamos de observar mostra que são invariantes também por homeomorfismo local.

LEMA 6.7.6. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Temos que:*

$$H_k(U, U \setminus \{x\}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & k = n \\ 0 & k \neq n. \end{cases}$$

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos uma bola $B_\varepsilon^n \subset U$. Pela fórmula (169), temos que $H_\bullet(U, U \setminus \{x\}) \simeq H_\bullet(B_\varepsilon^n, B_\varepsilon^n \setminus \{x\})$. O par $(B_\varepsilon^n, B_\varepsilon^n \setminus \{x\})$ é homotopicamente equivalente ao par $(D_{\varepsilon/2}^n, D_{\varepsilon/2}^n \setminus \{x\})$. Pelos lemas 6.7.2 e 6.7.4, temos que $H_\bullet(D_{\varepsilon/2}^n, D_{\varepsilon/2}^n \setminus \{x\}) \simeq H_\bullet(D_{\varepsilon/2}^n, \partial D_{\varepsilon/2}^n) \simeq \tilde{H}_\bullet(S^n)$. \square

COROLÁRIO 6.7.7. *Sejam $V \subset \mathbb{R}^n$ e $W \subset \mathbb{R}^m$ abertos. Se V é homeomorfo a W , então $n = m$.*

O leitor pode provar facilmente que o lema precedente continua a valer substituindo U por uma variedade topológica, portanto o corolário vale em relação a dois abertos $U \subset X$ e $W \subset Y$, sendo X e Y variedades topológicas de dimensão respetivamente n e m .

6.7.5. Homologia de um morfismo. O cone proporciona um modo alternativo de definir a homologia relativa, que pode ser generalizado da seguinte maneira. Um par (X, A) é equivalente a um mergulho $i : A \hookrightarrow X$. Podemos definir os grupos de homologia relativos associados a uma genérica função contínua $f : A \rightarrow X$, mesmo não sendo um mergulho. De fato, podemos definir o *cone de f* identificando $A \subset X$ e a base de CA através de f . Mais precisamente:

$$(170) \quad C(f) := (X \cup CA) / \sim, \quad [(a, 0)] \sim f(a) \quad \forall a \in A.$$

Assim podemos definir:

$$(171) \quad H_{\bullet}(f) := \tilde{H}_{\bullet}(C(f))_{*}.$$

Mostraremos em seguida que é possível definir morfismos de Bockstein que tornem exata a seguinte sequência longa:

$$(172) \quad \cdots \xrightarrow{(f^{*})_n} H_n(X) \xrightarrow{(j^{*})_n} H_n(f) \xrightarrow{\beta_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{(f^{*})_{n-1}} H_{n-1}(X) \xrightarrow{(j^{*})_{n-1}} \cdots,$$

sendo $j : X \hookrightarrow C(f)$ o mergulho natural. Na verdade é possível também definir $H_n(f)$ através dos complexos de cadeias singulares de A de X , mas não vamos mostrar os detalhes.

6.7.6. Axioma (3').

TEOREMA 6.7.8. *Temos o seguinte isomorfismo canônico, dito isomorfismo de suspensão:*

$$\tilde{H}_{\bullet}(X, x_0) \simeq \tilde{H}_{\bullet+1}(\Sigma X),$$

sendo o ponto marcado de ΣX o natural.

DEMONSTRAÇÃO. Consideramos o cone CX e quocientamos pelo segmento que junta o ponto marcado ao vértice, o qual coincide com o cone do ponto marcado. Obtemos CX/Cx_0 , que é contrátil como CX . De fato, a contração de CX no vértice ao longo do segmentos se projeta a uma contração de CX/Cx_0 . Consideramos a sequência exata longa reduzida associada ao par com ponto marcado $(CX/Cx_0, X, x_0)$, sendo X mergulhado no cone como base. O quociente $(CX/Cx_0)/X$ é homeomorfo à suspensão SX . Ademais, como CX/Cx_0 é contrátil, obtemos o isomorfismo de suspensão. \square

6.7.7. Equivalência entre homologia singular e simplicial. Podemos agora provar que, para um Δ -complexo, a homologia singular é canonicamente isomorfa à homologia simplicial. Isso implica em particular que a homologia simplicial não dependa da estrutura de Δ -complexo e que seja invariante por tipo de homotopia. Dado um Δ -complexo X , chamamos de X^k o k -esqueleto, ou seja, o subespaço de X que se obtém considerando simplexes de dimensão menor ou igual a k . Ademais, observamos que existe um morfismo natural $\xi'_X : C_n^\Delta(X) \rightarrow C_n(X)$, que manda um simplexo de X na função característica correspondente $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$, a qual é um simplexo singular. No caso de um par (X, A) , obtemos um morfismo análogo $\xi'_{(X,A)} : C_n^\Delta(X, A) \rightarrow C_n(X, A)$, ou seja, $\xi'_{(X,A)} : C_n^\Delta(X)/C_n^\Delta(A) \rightarrow C_n(X)/C_n(A)$, obtido projetando ao quociente ξ'_X . A projeção é bem definida pois ξ'_X um simplexo de A em um simplexo singular de A . É fácil provar que trata-se de um morfismo de complexos de cadais, portanto induz um morfismo em homologia $\xi_{(X,A)} : H_n^\Delta(X, A) \rightarrow H_n(X, A)$, functorial a respeito das sequências exatas longas. Considerando o par (X^k, X^{k-1}) , obtemos um morfismo de sequências exatas longas:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{n+1}^\Delta(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^k) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \xi_{(X^k, X^{k-1})} & & \downarrow \xi_{X^{k-1}} & & \downarrow \xi_{X^k} & & \downarrow \xi_{(X^k, X^{k-1})} & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_{n+1}(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n(X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n(X^k) & \longrightarrow & H_n(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Os morfismos $\xi_{(X^k, X^{k-1})}$ são isomorfismos. De fato, para $k \neq n$ temos que $H_n^\Delta(X^k, X^{k-1})$ é nulo, enquanto para $k = n$ é abeliano livre gerado pelos n -simplexos. O mesmo acontece para $H_n(X^k, X^{k-1})$, sendo (X^k, X^{k-1}) um bom par e sendo X^k/X^{k-1} a união a um ponto de uma esfera para cada k -simplexo. Em particular, para $k = n$ o morfismo $\xi_{(X^k, X^{k-1})}$ manda um gerador de $H_n(X^n, X^{n-1})$ no gerador correspondente de $\tilde{H}_n(X^n/X^{n-1})$, logo é um isomorfismo. Considerando o esqueleto X^{k-1} , podemos assumir por indução que o $\xi_{X^{k-1}}$ seja um isomorfismo. O fato que seja para $k = 0$ é obvio, pois X^0 é um espaço discreto. Logo, pelo lema dos cinco, também ξ_{X^k} é um isomorfismo.

Isso conclui a prova para X finito. Se for infinito, raciocinamos da seguinte maneira. Um subconjunto compacto $K \subset X$ só pode intersestar um número finito de células, sendo uma célula o interior de um simplexo. De fato, se intersestasse um número infinito, poderíamos escolher um ponto x_i para cada uma. Os conjuntos $U_i = X \setminus \bigcup_{j \neq i} \{x_j\}$ seriam abertos, pois a pre-imagem a respeito da função característica de um simplexo qualquer é aberta. Por isso, as interseções destes conjuntos com K seriam uma cobertura aberta de K que não admite sub-coberturas finitas, absurdo sendo K compacto. Consideremos agora um n -ciclo singular $a \in C_n(X)$. Como o ciclo é combinação de um número finito de geradores, a imagem dele é compacta, logo intersesta um número finito de células. Por isso, existe k tal que $a \in C_n(X^k)$. Como o morfismo ξ_{X^k} é um isomorfismo (em particular é sobrejetor), o ciclo a é homólogo a um ciclo simplicial em X^k , logo também em X . Isso mostra que o morfismo ξ_X é sobrejetor. Analogamente, seja $a \in C_n^\Delta(X)$ um ciclo simplicial tal que $\xi_X([a]) = 0$. Isso significa que $a = \partial b$ em X , mas, como a imagem de b é compacta, b está contido em um k -esqueleto. Logo $\xi_{X^k}([a]) = 0$. Como ξ_{X^k} é um isomorfismo (em particular

é injetor), temos que a é a borda de uma cadeia simplicial de X^k , a qual é também uma cadeia simplicial de X . Isso mostra ξ_X é injetor.

Enfim, temos que considerar um par (X, A) . O fato que $\xi_{(X,A)}$ seja um isomorfismo é consequência trivial do lema dos cinco, aplicado às duas sequências longas associadas ao par (uma para a homologia simplicial e uma para a homologia singular).

OBSERVAÇÃO 6.7.9. O isomorfismo que acabamos de provar implica em particular que, se um espaço admite uma estrutura de Δ -complexo finito, então os grupos de homologia singular são finitamente gerados. \diamond

6.8. Aplicações – Parte II

6.8.1. Grau de uma função entre esferas. Uma função $f : S^n \rightarrow S^n$ induz um morfismo $f_* : \tilde{H}_n(S^n) \rightarrow \tilde{H}_n(S^n)$. Como $H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$, temos que $f_*(a) = na$ para $n \in \mathbb{Z}$. O número n é dito *grau* de f e se denota por $\deg(f)$. Valem as seguintes propriedades:

- $\deg(\text{id}) = 1$.
- Se f não for sobrejetora, então $\deg(f) = 0$. De fato, seja $p \in S^n \setminus f(S^n)$. Temos que f fatora na composição entre uma função $\tilde{f} : S^n \rightarrow S^n \setminus \{p\}$ e o mergulho $S^n \setminus \{p\} \hookrightarrow S^n$. Como $S^n \setminus \{p\}$ é contrátil, $\tilde{f}_* = 0$, logo $f_* = 0$.
-

Existe também uma definição de grau do ponto de vista diferencial. Se $f : S^n \rightarrow S^n$ for diferenciável, seja $p \in S^n$ um valor regular de f , ou seja, um ponto tal que $f^{-1}(p)$ só contém pontos nos quais o diferencial df é invertível. É fácil provar que, neste caso, $f^{-1}(p)$ só contém um número finito de pontos (de fato, $f^{-1}(p)$ é compacto pois é fechado e S^n é compacta, ademais é discreto pelo teorema da função inversa). Neste caso, para cada ponto $q \in f^{-1}(p)$, definimos $\deg_q(f) = \pm 1$, sendo positivo se df_q respeita a orientação e negativo em caso contrário. O grau de f é definido como $\deg(f) := \sum_{q \in f^{-1}(p)} \deg_q(f)$.

Pode-se dar uma definição análoga do ponto de vista topológico, desde que exista um ponto $p \in S^n$ tal que $f^{-1}(p)$ seja finito. De fato, seja $f^{-1}(p) = \{q_1, \dots, q_m\}$.

6.9. Homologia celular

Vamos mostrar que é possível definir uma teoria homológica específica para CW-complexos, a qual é isomorfa à homologia singular, mas mais simples a ser calculada em vários casos. O ponto de partida é o seguinte lema, que vamos introduzir brevemente. Consideremos um CW-complexo X . Podemos intuir geometricamente que os grupos de homologia singular de grau k de X dependam do k -esqueleto X^k e das $(k+1)$ -células: de fato, imaginando por exemplo $k=1$, o 1-esqueleto é formado colando 1-células, portanto pode formar 1-ciclos não triviais, e as 2-células podem “tampar” alguns 1-ciclos, tornando-os triviais (já vimos isso em relação ao grupo fundamental). Por isso, é razoável pensar que os grupos de homologia singular de grau k de todos os esqueletos X^n , com $n \geq k+1$, coincidam entre si e com os do espaço X todo. Ademais, os grupos de grau k de todos os esqueletos X^n , com

$n \leq k - 1$, são nulos, pois faltam as k -células que podem criar k -ciclos não triviais. Resumindo, $H_k(X^n)$ é nulo para $n \leq k - 1$ e coincide com $H_k(X)$ para $n \geq k + 1$. O grupo $H_n(X^n)$ depende do espaço e não temos um resultado geral em relação a isso. Todavia, podemos considerar o grupo relativo $H_n(X^n, X^{n-1})$: nesse caso, imaginando de colapsar a um ponto o $(n - 1)$ -esqueleto, obtemos a união a um ponto de uma família de n -esferas, uma para cada n -célula, pois os bordos de cada n -disco colapsam. Por isso, obtemos uma cópia de \mathbb{Z} para cada n -célula. Este é o conteúdo do seguinte lema.

LEMA 6.9.1. *Seja X um CW-complexo:*

- (1) $H_k(X^n, X^{n-1})$ é trivial para $k \neq n$ e é isomorfo a \mathbb{Z}^m para $k = n$, sendo m o número de n -células (ou seja, conforme a notação da definição 3.3.1, $m = |I_n|$);
- (2) $H_k(X^n) = 0$ para $k > n$ (em particular, se $\dim X = n$, temos que $H_k(X) = 0$ para $k > n$);
- (3) $H_k(X^n) \simeq H_k(X)$ para $k < n$, sendo o isomorfismo induzido pelo mergulho $j_n : X^n \hookrightarrow X$.

DEMONSTRAÇÃO.

- (1). (X^n, X^{n-1}) é um bom par, pois podemos escolher uma vizinhança de X^{n-1} em X^n obtida acrescentando uma vizinhança da borda em cada n -disco. Ademais, $X^n/X^{n-1} \approx \bigvee_{\alpha \in I_n} S^n$, sendo I_n o conjunto dos n -discos (v. def. 3.3.1).
- (2). Na sequência exata longa do par (X^n, X^{n-1}) , consideremos o trecho

$$H_{k+1}(X^n, X^{n-1}) \rightarrow H_k(X^{n-1}) \rightarrow H_k(X^n) \rightarrow H_k(X^n, X^{n-1}).$$

Para $k > n$, o ponto precedente implica que os grupos relativos sejam nulos, logo $H_k(X^n) \simeq H_k(X^{n-1})$. Iterando o isomorfismo, chegamos a $H_k(X^0)$, o qual é nulo para $k > 0$, pois X^0 é um espaço discreto.

(3). Considerando o mesmo trecho da sequência exata, para $k < n - 1$ temos que $H_k(X^{n-1}) \simeq H_k(X^n)$. Substituindo n por $n + 1$, temos que, para $k < n$, $H_k(X^n) \simeq H_k(X^{n+1})$. Se $\dim X = m$, iterando o isomorfismo temos que $H_k(X^n) \simeq H_k(X^m) = H_k(X)$, logo obtemos a tese. Se X não for de dimensão finita, o resultado segue do fato que a imagem de um conjunto compacto (em particular, de uma cadeia singular) pode interseccionar um número finito de células, logo está contida em um m -esqueleto. Por isso, dada uma classe $[a] \in H_k(X)$, temos que o ciclo a representa uma classe em $H_k(X^m)$ com $m > n$, logo, por (3) no caso de dimensão finita, é homólogo a um ciclo de $H_k(X^n)$. Isso mostra que o morfismo $H_k(X^n) \rightarrow H_k(X)$ é sobrejetor. Enfim, se $a = \partial b$, temos que b também está contida em um m -esqueleto, logo $[a] = 0$ em $H_k(X^m)$, logo, por (3) no caso de dimensão finita, temos que $[a] = 0$ em $H_k(X^n)$. \square

Pelo lema precedente, os grupos $H_n(X^n, X^{n-1})$ são livres, gerados pelas n -células de X , e podem ser pensados como cadeias de um complexo $C_n^{CW}(X) := H_n(X^n, X^{n-1})$. O bordo:

$$\partial_n : H_n(X^n, X^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$$

é definido da seguinte maneira: consideramos o morfismo de Bockstein $\beta_n : H_n(X^n, X^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(X^{n-1})$ e o compomos com o push-forward $(\pi_{n-1})_{*,n-1}$ induzido pelo mergulho de pares $\pi_{n-1} : (X^{n-1}, \emptyset) \rightarrow (X^{n-1}, X^{n-2})$. Temos que $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, pois a composição $\beta_{n-1} \circ (\pi_{n-1})_{*,n-1}$ é um trecho da sequência exata longa do par (X^{n-1}, X^{n-2}) , logo é nula. Obtemos assim um complexo de cadeias, que chamamos de $(C_\bullet^{CW}(X), \partial_\bullet)$, cujos grupos de homologia são chamados de *grupos de homologia celular* de X e se indicam por $H_\bullet^{CW}(X)$.

TEOREMA 6.9.2. $H_\bullet^{CW}(X) \simeq H_\bullet(X)$ *canonicamente*.

DEMONSTRAÇÃO. Vamos considerar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & H_n(X^{n+1}, X^n) = 0 \\
 & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & H_n(X^{n+1}) \simeq H_n(X) \\
 & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & H_n(X^n) \\
 & & & & & & \nearrow \quad \downarrow \\
 & & & & & & H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \xrightarrow{\partial_{n+1}^{CW}} H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\partial_n^{CW}} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \\
 & & & & & & \nearrow \quad \downarrow \\
 & & & & & & H_{n-1}(X_{n-1}) \\
 & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & H_{n-1}(X_{n-2}) = 0
 \end{array}$$

Já mostramos que $\partial_n^{CW} \circ \partial_{n+1}^{CW} = 0$ pois $\beta'_n \circ (\pi_n)_{*,n}$ é a composição de dois morfismos sucessivos na sequência exata longa do par (X^n, X^{n-1}) . Ademais:

- como $(i_n)_{*,n}$ é sobrejetora, temos que $H_n(X) \simeq H_n(X^n)/\text{Ker}((i_n)_{*,n}) = H_n(X^n)/\text{Im}(\beta_{n+1})$. Logo, temos de mostrar que $\text{Ker}(\partial_n^{CW})/\text{Im}(\partial_{n+1}^{CW})$ é isomorfo a $H_n(X^n)/\text{Im}(\beta_{n+1})$.
- Como $(\pi_n)_{*,n}$ é injetor, se restringe a dois isomorfismos $H_n(X^n) \simeq \text{Im}((\pi_n)_{*,n})$ e $\text{Im}(\beta_{n+1}) \simeq \text{Im}((\pi_n)_{*,n}) \circ \beta_{n+1} = \text{Im}(\partial_{n+1}^{CW})$, portanto induz um isomorfismo entre os quocientes $H_n(X^n)/\text{Im}(\beta_{n+1}) \simeq \text{Im}((\pi_n)_{*,n})/\text{Im}(\partial_{n+1}^{CW})$, sendo o último grupo igual a $\text{Ker}(\beta'_n)/\text{Im}(\partial_{n+1}^{CW})$ por exatidão.
- Como $(\pi_{n-1})_{*,n-1}$ é injetor, $\text{Ker}(\beta'_n) = \text{Ker}((\pi_{n-1})_{*,n-1} \circ \beta'_n) = \text{Ker}(\partial_n^{CW})$.

Afinal, obtemos $H_n(X) \simeq \text{Ker}(\partial_n^{CW})/\text{Im}(\partial_{n+1}^{CW})$. \square

Enfim, podemos caracterizar mais explicitamente o bordo ∂_n^{CW} . Dada uma célula e_α^n , vamos considerar a função de colamento $\varphi_\alpha : \partial D_\alpha^n \rightarrow X^{n-1}$. Dada outra célula e_β^{n-1} , temos que a célula mesma fica mergulhada em X^{n-1} , logo há um homeomorfismo $D_\beta^{n-1}/\partial D_\beta^{n-1} \approx X^{n-1}/(X^{n-1} \setminus e_\beta^{n-1})$, sendo os dois termos homeomorfos a S^{n-1} . O homeomorfismo é a projeção ao quociente da função $\Phi_\beta : D_\beta^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$, portanto o denotamos por Φ'_β . Podemos definir um homeomorfismo canônico:

$$(173) \quad \Delta_{\alpha\beta} : \partial D_\alpha^n \xrightarrow{\varphi_\alpha} X^{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}'} X^{n-1}/(X^{n-1} \setminus e_\beta^{n-1}) \xrightarrow{(\Phi'_\beta)^{-1}} D_\beta^{n-1}/\partial D_\beta^{n-1} =: S_\beta^{n-1}.$$

TEOREMA 6.9.3. *Seja $d_{\alpha\beta} := \deg(\Delta_{\alpha\beta})$. Temos:*

$$(174) \quad \partial_n^{CW}(e_\alpha^n) = \sum_{\beta \in I_{n-1}} d_{\alpha\beta} e_\beta^{n-1}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} H_n(D_\alpha^n, \partial D_\alpha^n) & \xrightarrow{\beta_n} & \tilde{H}_{n-1}(\partial D_\alpha^n) & \xrightarrow{(\Delta_{\alpha\beta})_{*,n-1}} & \tilde{H}_{n-1}(S_\beta^{n-1}) \\ \downarrow (\Phi_\alpha)_{*,n} & & \downarrow (\varphi_\alpha)_{*,n} & & \simeq \downarrow (\Phi'_\beta)_{*,n} \\ H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{\beta'_n} & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}) & \xrightarrow{(\pi_{n-1})_{*,n-1}} & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/(X^{n-1} \setminus e_\beta^{n-1})) \\ & \searrow \partial_n^{CW} & \downarrow (\pi'_{n-1})_{*,n-1} & & \uparrow (j_\beta)_* \\ & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) & \xrightarrow{\simeq} & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}). \end{array}$$

O retângulo acima à direita comuta por definição de $\Delta_{\alpha\beta}$. O retângulo abaixo à direita comuta pois comutam as funções contínuas que induzem os morfismos envolvidos. O retângulo acima à esquerda comuta pois $\Phi_\alpha|_{\partial D_\alpha^n} = \varphi_\alpha$ e o morfismo de Bockstein é uma transformação natural. Enfim, o triângulo abaixo à esquerda comuta por definição de ∂_n^{CW} . Consideremos $1 \in H_n(D_\alpha^n, \partial D_\alpha^n) \simeq \mathbb{Z}$. Aplicando $(\Phi_\alpha)_{*,n}$ obtemos o gerador $e_\alpha^n \in H_n(X^n, X^{n-1})$, logo, aplicando ∂_n^{CW} , obtemos a imagem $\sum_{\gamma \in I_{n-1}} d_{\alpha\gamma} e_\gamma^{n-1}$ (por enquanto $d_{\alpha\gamma}$ é um coeficiente genérico que temos de calcular). Aplicando o isomorfismo na última linha obtemos o elemento de $\oplus_{\gamma \in I_{n-1}} \mathbb{Z}$ correspondente a $d_{\alpha\gamma}$ para cada $\gamma \in I_{n-1}$. Como $(j_\beta)_*$ reduz ao ponto marcado todas as esferas correspondentes a um índice diferente de β , obtemos $d_{\alpha\beta} \in \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/(X^{n-1} \setminus e_\beta^{n-1})) \simeq \mathbb{Z}$. Enfim, aplicando $(\Phi'_\beta)_{*,n}^{-1}$, obtemos $d_{\alpha\beta} \in \tilde{H}_{n-1}(S_\beta^{n-1}) \simeq \mathbb{Z}$. Voltando ao começo, $\beta_n(1) = 1 \in \tilde{H}_{n-1}(\partial D_\alpha^n) \simeq \mathbb{Z}$. Aplicando $(\Delta_{\alpha\beta})_{*,n-1}$ a 1, por definição obtemos $\deg(\Delta_{\alpha\beta})$. Logo, pela comutatividade do diagrama, $d_{\alpha\beta} = \deg(\Delta_{\alpha\beta})$. \square

Podemos agora calcular a homologia dos espaços projetivos reais e complexos. De fato, já mostramos que $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ tem uma estrutura de CW-complexo com uma célula para cada dimensão par entre 0 e $2n$. Por isso, o complexo celular é o seguinte:

$$\cdots \leftarrow 0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow 0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow 0 \leftarrow \cdots \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow 0 \leftarrow \cdots,$$

sendo o primeiro \mathbb{Z} de grau 0 e o último de grau $2n$. É claro que os morfismos de bordo são triviais, logo os grupos de homologia são isomorfos aos grupos de cadeias. Por isso obtemos:

$$H_k(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, 2, \dots, 2n \\ 0 & \text{demais } k. \end{cases}$$

Podemos nos perguntar qual é um ciclo singular que representa um gerador de $H_{2k}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$. Seja a um ciclo deste tipo e seja X^{2k} o $2k$ -esqueleto de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Considerando a prova do teorema 6.9.2, temos que $[a] \in H_{2k}(X^{2k})$ é mandado por $(i_n)_{*,n}$ no gerador $[a] \in H_{2k}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ do qual partimos. Ademais, é mandado por $(\pi_n)_{*,n}$ no gerador $[(\pi_n)_{\#,n}(a)] \in H_{2k}^{CW}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$, o qual corresponde à célula e^{2k} . Como $X^{2k}/X^{2k-1} \approx S^{2k}$, pois só há uma $2k$ -célula, a é um ciclo tal que, aplicando $(\pi_n)_{\#,n}$,

obtemos um gerador da homologia da esfera X^{2k}/X^{2k-1} . Temos que X^{2k} é uma cópia de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ dentro de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, logo é a imagem de um ciclo cuja projeção satisfaz a propriedade pedida. Por isso, a classe de homologia singular que gera $H_{2k}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ é representada por um ciclo cuja imagem é a cópia de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ mergulhada em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ como $2k$ -esqueleto.

Analisemos agora os espaços projetivos reais. Já mostramos que $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ tem uma estrutura de CW-complexo com uma célula para cada dimensão entre 0 e n . Neste caso os morfismos de bordo podem não ser triviais. Para calculá-los, vamos usar a fórmula (174). Considerando a única célula e^k e a fórmula (173), temos uma única função $\Delta : S^{k-1} \rightarrow S^{k-1}$ definida da seguinte maneira. O domínio é a borda ∂D^k e a função de colamento $\varphi : \partial D^k \rightarrow X^{k-1}$ é a projeção ao quociente $\varphi : S^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{k-1}$. O complementar de e^{k-1} em X^{k-1} é a cópia de $\mathbb{R}\mathbb{P}^{k-2}$ mergulhada em $\mathbb{R}\mathbb{P}^{k-1}$ como equador, logo o quociente $X^{k-1}/(X^{k-1} \setminus e^{k-1})$ se identifica com $\mathbb{R}\mathbb{P}^{k-1}/\mathbb{R}\mathbb{P}^{k-2}$. Isso é equivalente a considerar o hemisfério norte do domínio S^{k-1} e colapsar o equador a um ponto, pois o hemisfério sul fica identificado com o norte por reflexão a respeito do centro. Portanto, φ pode ser descrita da seguinte maneira:

- partimos de S^{k-1} e quocientamos pelo equador;
- desta maneira obtemos a união a um ponto de duas $(k-1)$ -esferas, que chamamos norte e sul;
- a restrição à esfera norte de φ é a identidade;
- a restrição à esfera sul de φ é a composição entre a reflexão a respeito do centro e a identidade.

Podemos agora calcular o grau de φ . Seja p um ponto do contra-domínio cuja preimagem seja diferente do equador. Neste caso $\varphi^{-1}(p)$ contém dois pontos $\{q, q'\}$, um para cada hemisfério. Como φ coincide com a identidade em uma vizinhança de q , temos que $\deg_q \varphi = 1$. Ademais, como φ é a composição entre a reflexão e a identidade em uma vizinhança de q' , temos que $\deg_{q'} \varphi = (-1)^{(k-1)+1} = (-1)^k$. Afinal, temos $\deg(\varphi) = 1 + (-1)^k$, ou seja, 2 para k par e 0 para k ímpar. Por isso, o complexo celular é o seguinte:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\mathbb{P}^{2n} : & \quad \dots \leftarrow 0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \dots \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \leftarrow 0 \leftarrow \dots \\ \mathbb{R}\mathbb{P}^{2n+1} : & \quad \dots \leftarrow 0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \dots \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \leftarrow 0 \leftarrow \dots, \end{aligned}$$

sendo o primeiro \mathbb{Z} de grau 0 e o último de grau $2n$ e $2n+1$. Por isso obtemos:

$$H_k(\mathbb{R}\mathbb{P}^{2n}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & k = 1, 3, \dots, 2n-1 \\ 0 & \text{demais } k \end{cases} \quad H_k(\mathbb{R}\mathbb{P}^{2n+1}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, 2n+1 \\ \mathbb{Z}_2 & k = 1, 3, \dots, 2n-1 \\ 0 & \text{demais } k. \end{cases}$$

Como mostramos no caso complexo, a classe de homologia singular que gera $H_{2k}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ é representada por um ciclo cuja imagem é a cópia de $\mathbb{R}\mathbb{P}^k$ mergulhada em $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ como k -esqueleto. Para k par não nulo, temos que o espaço $\mathbb{R}\mathbb{P}^k$ não é orientável, por isso não pode ser a imagem de um ciclo de homologia.

Por isso, dada uma função contínua entre CW-complexos, podemos definir o push-forward f_* em homologia celular como o push-forward relativo a uma qualquer função celular homotópica a f .

Também a homologia celular é definida para uma dada estrutura de CW-complexo, mas é claro que duas estruturas no mesmo espaço determinam grupos de homologia isomorfos, pois a homologia celular é isomorfa à singular do espaço subjacente. Para definir a homologia celular na categoria \mathcal{HCW} , podemos raciocinar da seguinte maneira. É claro que, dado um espaço que seja um objeto de \mathcal{HCW} , trata-se de escolher um CW-complexo homotópico ao espaço dado e considerar sua homologia celular. Todavia, este argumento só é válido a menos de isomorfismo, logo não define um functor \mathcal{HCW} a SeqGrAb (em particular, desta maneira não podemos definir o push-forward a respeito de um morfismo). Uma definição formal pode ser a seguinte. Dado $X \in \mathcal{HCW}$, consideremos o conjunto \mathcal{I}_X que contém os pares (X', φ') , onde X' é um CW-complexo e $\varphi' : X' \rightarrow X$ uma função contínua invertível a menos de homotopia. Fica bem definida a homologia celular $H_\bullet^{CW}(X')$. Definimos:

$$H_\bullet^{CW}(X) := \bigoplus_{\mathcal{I}_X} H_\bullet^{CW}(X') / \sim,$$

onde \sim é definida da seguinte maneira. Dados $(X', \varphi'), (X'', \varphi'') \in \mathcal{I}_X$, seja $\bar{\varphi}' : X \rightarrow X'$ uma inversa de φ' a menos de homotopia. Temos que $(\bar{\varphi}' \circ \varphi'')_* : H_\bullet^{CW}(X'') \rightarrow H_\bullet^{CW}(X')$ é um isomorfismo. Declaramos $a \sim (\bar{\varphi}' \circ \varphi'')_*(a)$ para todo a . Desta maneira dois grupos quaisquer na soma direta ficam identificados, portanto o quociente é isomorfo a cada um dos grupos envolvidos na soma. Todavia, com esta definição temos um grupo canonicamente associado ao espaço X , não somente a menos de isomorfismo. Enfim, consideremos uma função contínua $f : X \rightarrow Y$. Dados $(X', \varphi') \in \mathcal{I}_X$ e $(Y', \psi') \in \mathcal{I}_Y$, seja $\bar{\psi}' : Y \rightarrow Y'$ uma inversa a menos de homotopia de ψ' . Temos um morfismo $(\bar{\psi}' \circ f \circ \varphi')_* : H_\bullet^{CW}(X') \rightarrow H_\bullet^{CW}(Y')$. Considerando outros elementos $(X'', \varphi'') \in \mathcal{I}_X$ e $(Y'', \psi'') \in \mathcal{I}_Y$, o morfismo correspondente é $(\bar{\psi}'' \circ f \circ \varphi'')_* = (\bar{\psi}'' \circ \psi' \circ \bar{\psi}' \circ f \circ \varphi' \circ \bar{\varphi}' \circ \varphi'')_* = (\bar{\psi}' \circ \psi'')^{-1} (\bar{\psi}' \circ f \circ \varphi')_* (\bar{\varphi}' \circ \varphi'')_*$, logo obtemos o morfismo precedente a menos de equivalência. Por isso fica bem definida $f_* : H_\bullet^{CW}(X) \rightarrow H_\bullet^{CW}(Y)$. Isso completa a construção da homologia celular como um functor da categoria \mathcal{HCW} , o qual se restringe a um functor de \mathcal{HCW}_f .

Podemos também definir a homologia celular reduzida como functor $\mathcal{CW}_+ \rightarrow \text{SeqGrAb}$, sendo:

$$(175) \quad \tilde{H}_\bullet^{CW}(X)_{x_0} := \text{Coker}(i_* : H_\bullet^{CW}(\{x_0\}) \rightarrow H_\bullet^{CW}(X)).$$

No caso sem ponto marcado, $\tilde{H}_\bullet^{CW}(X) := \text{Ker}(p_* : H_\bullet^{CW}(X) \rightarrow H_\bullet^{CW}(\{*\}))$. Ademais, podemos definir a homologia celular relativa como functor $\mathcal{CW}_2 \rightarrow \text{SeqGrAb}$, sendo:

$$(176) \quad H_\bullet^{CW}(X, A) := \tilde{H}_\bullet^{CW}(X/A).$$

Por isso, considerando o par $(C(X, A), CA)$, obtemos o isomorfismo $\tilde{H}_\bullet^{CW}(C(X, A))_* \simeq \tilde{H}_\bullet^{CW}(C(X, A)/CA, CA/CA) \simeq \tilde{H}_\bullet^{CW}(X/A, A/A)$.

É possível definir a homologia celular de um par deste tipo, pois podemos definir a homologia de uma genérica função $f : A \rightarrow X$ entre espaços com o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo. Por isso, dado um par (X, A) , definimos a homologia relativa como a do mergulho. Para definir a homologia de f a menos de isomorfismo operamos da seguinte maneira:

- consideramos duas equivalências homotópicas $\varphi': A' \rightarrow A$ e $\psi: X \rightarrow X'$, sendo A' e X' CW-complexos;
- consideramos uma função celular $f': A' \rightarrow X'$ homotópica a $\psi \circ f \circ \varphi'$;
- calculamos $\tilde{H}_\bullet^{CW}(C(f'))_*$, o que é possível pois, sendo f' celular, o cone $C(f')$ é um CW-complexo.

A escolha de f' não influencia o resultado pois, como mostraremos em seguida, se A' e X' são CW-complexos e $f', g': X' \rightarrow A'$ são homotópicas (mesmo não sendo celulares), então os cones $C(f')$ e $C(g')$ têm o mesmo tipo de homotopia. Na verdade, como já definimos a homologia celular para um espaço com o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo, poderíamos considerar diretamente $\tilde{H}_\bullet^{CW}(C(\psi \circ f \circ \varphi'))_*$, sem passar por f' . Podemos dar também uma definição formal de $H_\bullet^{CW}(f)$, não somente a menos de isomorfismo, mostrando que é functorial; deixamos os detalhes ao leitor.

Assim podemos definir:

$$(177) \quad H_\bullet^{CW}(f) := \tilde{H}_\bullet^{CW}(C(f))_*.$$

Quando f for um mergulho, a definição (177) se reconduz à (176). Isso pode ser provado passando através do isomorfismo com a homologia singular, mas não é necessário. De fato, mostraremos em seguida que, dado um CW-par (X, A) , se A for contrátil a projeção $X \rightarrow X/A$ é uma equivalência homotópica.

Uma função celular determina uma função $f_n: (X^n, X^{n-1}) \rightarrow (Y^n, Y^{n-1})$ para todo n , logo induz um morfismo de complexos de cadeias $f_\#: C_\bullet^{CW}(X) \rightarrow C_\bullet^{CW}(Y)$, sendo $(f_\#)_n$ o push-forward em homologia singular $(f_n)_*: H_n(X^n, X^{n-1}) \rightarrow H_n(Y^n, Y^{n-1})$. É fácil verificar que comuta com o bordo ∂_\bullet^{CW} , pois o bordo é definido como a composição de um morfismo de Bockstein e um push-forward:

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X_n, X_{n-1}) & \xrightarrow{\beta_n^X} & H_{n-1}(X_{n-1}) & \xrightarrow{(\pi_{n-1}^X)_{*,n-1}} & H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) \\ (f_n)_{*,n} \downarrow & & (f_n|_{X_{n-1}})_{*,n-1} \downarrow & & \downarrow (f_{n-1})_{*,n-1} \\ H_n(Y_n, Y_{n-1}) & \xrightarrow{\beta_n^Y} & H_{n-1}(Y_{n-1}) & \xrightarrow{(\pi_{n-1}^Y)_{*,n-1}} & H_{n-1}(Y_{n-1}, Y_{n-2}). \end{array}$$

Podemos calcular explicitamente $f_\#$. Consideremos um gerador $e_\alpha^n \in C_n^{CW}(X)$. Consideremos a seguinte função:

$$f_{\alpha\beta}: S_\alpha^n := D_\alpha^n / \partial D_\alpha^n \xrightarrow{\Phi_\alpha^n} X^n / X^{n-1} \xrightarrow{f_n} Y^n / Y^{n-1} \xrightarrow{j_\beta} Y^n / (Y^n \setminus e_\beta^n) =: S_\beta^n.$$

Temos que $(f_\#)_n(e_\alpha^n) = \sum_\beta d_{\alpha\beta} e_\beta^n$, sendo $d_{\alpha\beta} = \deg(f_{\alpha\beta})$. De fato, $(\Phi_\alpha^n)_*(1) = e_\alpha^n$, logo, aplicando $(f_n)_*$, obtemos $\sum_\gamma d_{\alpha\gamma} e_\gamma^n$. Como j_β reduz ao ponto marcado todas as esferas correspondentes a um índice diferente de β , aplicando $(j_\beta)_*$ obtemos $d_{\alpha\beta}$. Logo, $d_{\alpha\beta} = \deg(f_{\alpha\beta})$.

A partir de $f_\#$ fica definido o push-forward $f_*: H_\bullet^{CW}(X) \rightarrow H_\bullet^{CW}(Y)$. O morfismo f_* coincide com o push-forward em homologia singular a menos do isomorfismo canônico $H_\bullet^{CW}(X) \simeq H_\bullet(X)$. De fato, considerando a prova do teorema 6.9.2, isso

segue do fato que o diagrama seguinte é comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_n(X) & \xleftarrow{\simeq} & H_n(X^{n+1}) & \xrightarrow{\simeq} & \frac{H_n(X^n)}{\text{Ker}((i_n^X)_{*,n})} & \xrightarrow{\simeq} & H_n^{CW}(X) \\
 \downarrow f_{*,n} & & \downarrow (f|_{X^{n+1}})_{*,n} & & \downarrow (f|_{X^n})_{*,n} & & \downarrow f_{*,n} \\
 H_n(Y) & \xleftarrow{\simeq} & H_n(Y^{n+1}) & \xrightarrow{\simeq} & \frac{H_n(Y^n)}{\text{Ker}((i_n^Y)_{*,n})} & \xrightarrow{\simeq} & H_n^{CW}(Y).
 \end{array}$$

Isso prova em particular que $f_* : H_n^{CW}(X) \rightarrow H_n^{CW}(Y)$ é invariante por homotopia, mesmo quando a homotopia não é uma função celular.

Desta maneira, a homologia celular se torna um functor $H_n^{CW} : \mathcal{CW} \rightarrow \text{SeqGrAb}$, o qual é composição do functor $C_n^{CW} : \mathcal{CW} \rightarrow \text{CompCad}$ com o functor homologia.

6.9.1. Característica de Euler. (cfr. genus, com cross-caps ...)

EXEMPLO 6.9.4. Vamos calcular a homologia de $X = S^n / \{p, q\}$, sendo $p, q \in S^n$ dois pontos distintos. Podemos considerar o espaço Y obtido acrescentando a S^n uma cópia de I , identificando 0 com p e 1 com q . É claro que $X \approx Y/I$. Como I é contrátil e (Y, I) pode tornar-se um CW-par com uma adequada estrutura de CW-complexo sobre Y , temos que $Y \simeq Y/I$. Portanto, a homologia de X coincide com a de Y , o qual é homotopicamente equivalente a $S^n \vee S^1$. Podemos provar esta equivalência homotópica com métodos elementares, mas também através do teorema precedente: podemos considerar um disco D em S^n que contenha p e q . Temos que $Y/D \approx S^n \vee S^1$ e $Y \simeq Y/D$. \diamond

6.10. Homologia com coeficientes

Consideremos a definição (131) de cadeias singulares. Dado um grupo abeliano G , podemos considerar a seguinte definição:

$$(178) \quad C_n(X; G) := \bigoplus_{\sigma: \Delta^n \rightarrow X} G,$$

ou seja, substituímos \mathbb{Z} por G . Equivalentemente $C_n(X; G) = C_n(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G$, logo podemos definir o bordo como $\partial_n \otimes 1$. Desta maneira obtemos os *grupos de homologia singular com coeficientes em G* , denotados por $H_n(X; G)$; é claro que os grupos $H_n(X)$ que consideramos por enquanto coincidem com $H_n(X; \mathbb{Z})$. A mesma generalização pode ser aplicada aos grupos relativos e à homologia simplicial e celular. Todas as propriedades fundamentais que provamos continuam a valer: invariância por homotopia, excisão, sequência exata longa do par e da tripla, sequência de Mayer-Vietoris, aditividade a respeito das componentes conexas por caminhos e, no caso reduzido, por soma conexa; relação entre homologia relativa e homologia do quociente para cofibrações. De fato, para provarmos estas propriedades só usamos o fato que \mathbb{Z} seja um grupo abeliano. Ademais, com a mesma técnica podemos mostrar que $H_0(\{*\}; G) \simeq G$ e $H_n(\{*\}; G) = 0$ para $n \neq 0$. Também:

$$(179) \quad \tilde{H}_k(S^n; G) \simeq \begin{cases} G & k = n \\ 0 & k \neq n. \end{cases}$$

Um caso particularmente interessante é $G = \mathbb{Z}_2$, por questões que mostraremos em seguida relativas à orientabilidade.

Seja $\varphi: H \rightarrow G$ um morfismo de grupos. É claro que induz um morfismo $\varphi_\# : C_\bullet(X; H) \rightarrow C_\bullet(X; G)$, o qual se projeta a um morfismo $\varphi_* : H_\bullet(X; H) \rightarrow H_\bullet(X; G)$. Desta maneira, dado um espaço X , ou um par (X, A) , obtemos um functor da categoria dos grupos abelianos à das seqüências exatas longas de grupos abelianos. Se não fixarmos o par, obtemos um functor:

$$H_\bullet : \text{Top}_2 \times \text{GrpAb} \rightarrow \text{SeqGrAb}.$$

Uma consideração análoga vale para a homologia reduzida. Enfim, vale o seguinte resultado:

LEMA 6.10.1. *Seja $f : S^n \rightarrow S^n$ uma função de grau k . Então $f_* : \tilde{H}_n(S^n; G) \rightarrow \tilde{H}_n(S^n; G)$ (ou seja, a menos de isomorfismo, $f_* : G \rightarrow G$) é dada por $f_*(g) = kg$.*

DEMONSTRAÇÃO. Dado $g \in G$, seja $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow G$ o morfismo tal que $\varphi(1) = g$. O seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow{f_*} & \tilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z} \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi_* & & \downarrow \varphi_* & & \downarrow \varphi \\ G & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_n(S^n; G) & \xrightarrow{f_*^G} & \tilde{H}_n(S^n; G) & \xrightarrow{\cong} & G \end{array}$$

Portanto, a menos dos isomorfismos externos, $f_*^G(g) = f_*^G \varphi_*(1) = \varphi_* f_*(1) = \varphi_*(k) = kg$. \square

É natural perguntar-se qual é a relação entre os grupos de homologia do mesmo espaço com coeficientes diferentes. Em geral $H_\bullet(X; G) \neq H_\bullet(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G$; todavia, mostraremos que a igualdade em alguns casos particulares, por exemplo $G = \mathbb{Q}$ ou $G = \mathbb{R}$. Antes de tudo podemos considerar uma seqüência exata curta de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow K \longrightarrow 0.$$

A correspondente seqüência curta de complexos de cadeias é também exata:

$$0 \longrightarrow C_\bullet(X; H) \longrightarrow C_\bullet(X; G) \longrightarrow C_\bullet(X; K) \longrightarrow 0.$$

A prova da exatidão é imediata considerando o fato que uma cadeia $\sum_{i=1}^k \sigma_i \otimes g_i \in C_n(X; G)$ é nula se e somente se $\sigma_i \otimes g_i = 0$ para todo i , o que equivale a $g_i = 0$ para todo i . Por isso, obtemos uma seqüência exata longa em homologia:

(180)

$$\cdots \longrightarrow H_n(X; G) \longrightarrow H_n(X; K) \longrightarrow H_{n-1}(X; H) \longrightarrow H_{n-1}(X; G) \longrightarrow \cdots$$

É fácil descrever o morfismo de Bockstein a partir da definição geral. Uma aplicação significativa da homologia com coeficientes é o seguinte teorema, a partir do qual poderemos provar o teorema de Borsuk-Ulam em dimensão genérica.

TEOREMA 6.10.2. *Seja $f : S^n \rightarrow S^n$ uma função ímpar, ou seja, tal que $f(-x) = -f(x)$. O grau de f é ímpar.*

DEMONSTRAÇÃO. Vamos considerar a seguinte sequência exata curta:

$$0 \longrightarrow C_\bullet(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\tau} C_\bullet(S^n; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\pi\#} C_\bullet(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow 0,$$

sendo $\pi: S^n \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ a projeção e τ definida da seguinte maneira. Dado um simplexo singular $\sigma: \Delta^k \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$, como Δ^k é simplesmente conexo e π é um recobrimento de duas folhas, existem dois levantamentos distintos $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2: \Delta^k \rightarrow S^n$. Definimos $\tau(\sigma) := \tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2$. É claro que τ é injetora e que sua imagem é o kernel de $\pi\#$.

A função $f: S^n \rightarrow S^n$, sendo ímpar, induz uma função $\bar{f}: \mathbb{R}\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$. As duas funções induzem o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_\bullet(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\tau} & C_\bullet(S^n; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\pi\#} & C_\bullet(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \bar{f}\# & & \downarrow f\# & & \downarrow \bar{f}\# \\ 0 & \longrightarrow & C_\bullet(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\tau} & C_\bullet(S^n; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\pi\#} & C_\bullet(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow 0. \end{array}$$

A comutatividade do quadrado à direita é óbvia pois $\pi \circ f = \bar{f} \circ \pi$. A respeito do quadrado à esquerda, reparamos que, dado $\sigma: \Delta^k \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$, temos que $f\#(\tau(\sigma)) = f \circ \tilde{\sigma}_1 + f \circ \tilde{\sigma}_2$. Para calcular $\tau(\bar{f}\#(\sigma)) = \tau(\bar{f} \circ \sigma)$, observamos que os dois levantamentos de $\bar{f} \circ \sigma$ são $f \circ \tilde{\sigma}_1$ e $f \circ \tilde{\sigma}_2$, pois $\pi \circ f \circ \tilde{\sigma}_i = \bar{f} \circ \pi \circ \tilde{\sigma}_i = \bar{f} \circ \sigma$, logo o quadrado comuta.

Por isso, obtemos um morfismo de sequências exatas longas. Para $2 \leq k \leq n-1$ temos:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H_k(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\beta_k} & H_{k-1}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \\ & & & & \downarrow \bar{f}_{*,k} & & \downarrow \bar{f}_{*,k-1} \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H_k(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\beta_k} & H_{k-1}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Assumindo por indução que $\bar{f}_{*,k-1}$ seja um isomorfismo, temos que $\bar{f}_{*,k} = \beta_k^{-1} \circ \bar{f}_{*,k-1} \circ \beta_k$ é um isomorfismo também. Para começar com a indução, consideramos a parte final do morfismo:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\beta_k} & H_0(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \cdots \\ & & & & \downarrow \bar{f}_{*,k} & & \downarrow \bar{f}_{*,k-1} \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\beta_k} & H_0(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

□

TEOREMA 6.10.3 (Borsuk-Ulam). *Seja $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua. Então existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

DEMONSTRAÇÃO.

□

6.10.1. Retrato. Para A retrato de X , $H(X) \simeq H(A) \oplus H(X, A)$.

6.10.2. H_1 e π_1 .

6.10.3. Fórmula de Kunnet.

6.10.4. Homologia das variedades, orientabilidade topológica.

6.10.5. Suporte não compacto.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge university press
- [2] E. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill
- [3] W. S. Massey, *A basic course in algebraic topology*, Springer-Verlag
- [4] A. Dold, *Lectures on Algebraic topology*, Springer-Verlag
- [5] M. Greenberg and J. Harper, *Algebraic topology - A First Course*, The Benjamin/Cummings Publishing Company
- [6] S. Eilenberg and N. Steenrod, *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton University Press
- [7] J. Vick, *Homology theory - An Introduction to Algebraic Topology*, Springer-Verlag