

Infinite Stage Markov Programming

A cable repair truck has a power reel which when full carries 400m of cable, each length occurring with equal probability. Repairs are carried out by taking new cable from the reel unless the length remaining on the reel is too short. In this case the cable on the reel is removed and scrapped, a new 400m length is put on the reel and the repair then carried out. Determine the mean length of cable scrapped per repair.

Answer: 400/9m

Um caminhão de conserto de cabos, um carretel de energia que, quando cheio, carrega 400 m de cabo, ocorrendo cada comprimento com a mesma probabilidade. Os reparos são executados removendo um novo cabo do carretel, a menos que o comprimento restante do carretel seja muito curto. Neste caso, o cabo da bobina é removido e descartado, um novo comprimento de 400m é colocado na bobina e o reparo é realizado. Determine o comprimento médio do cabo descartado por reparo.

Resposta: 400/9m

caractel Q4.2 (livro)

Problema - Reparo de cabos -

Objetivo - determinar perdas médias por reparo.

Condições - Caminando levava bobinas de 400m de cabo.

os reparos podem ser:

100 m, 200 m ou 300 m com iguais probabilidades.

A política - caso o reparo seja menor do que o remanescente no caminho, substituir o pedaço remanescente e adquirir a bobina com 400 metros.

- ESTÁGIO - $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

REPAROS

- ESTADO - quantidade de cabo nas bobinas

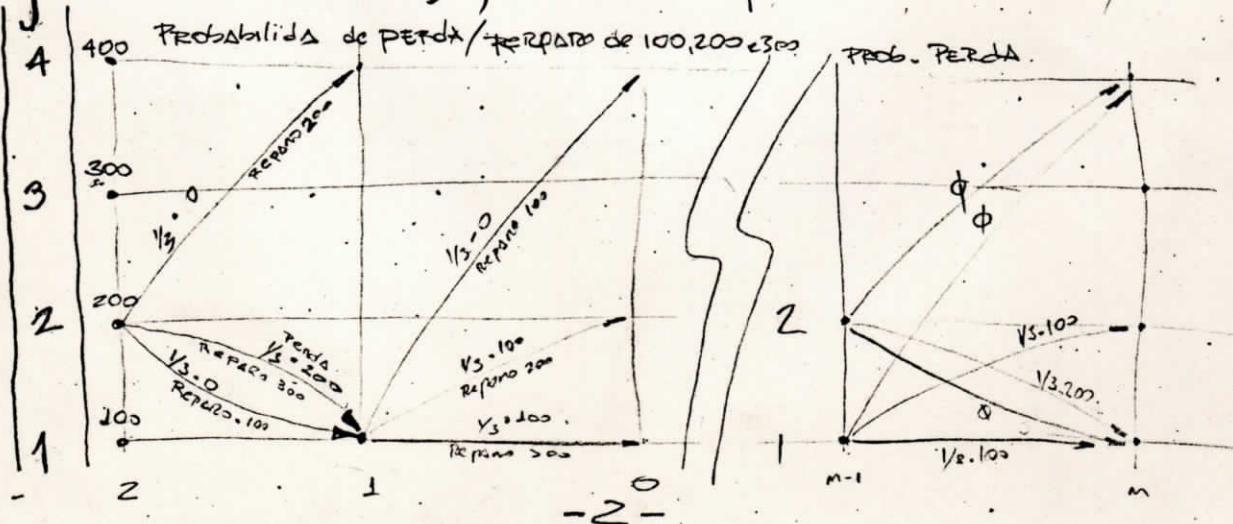
$$i = \{1, 2, 3, 4\} \quad \begin{matrix} 1=100, 2=200, 3=300m \\ 4=400m \end{matrix}$$

- AÇÃO - política única - fazer reparo.

$$K = \{1, 2, 3\} \quad \begin{matrix} 1=100m \\ 2=200m \\ 3=300m \end{matrix}$$

- FUNÇÃO RETORNO - (retorno = perda de cabo portanto depende da quantidade de cabo nas bobinas e do reparo aí ser feito)

$$r(j), \quad \text{NOTA - para } i > 2 \Rightarrow r = \emptyset$$



$$r(1) = \frac{1}{3}(0) + \frac{1}{3}(100) + \frac{1}{3}(100) = \frac{200}{3}$$

$$r(2) = \frac{1}{3}(0) + \frac{1}{3}(200) + \frac{1}{3}(0) = \frac{200}{3}$$

$$r(3) = \frac{1}{3}(0) + \frac{1}{3}(0) + \frac{1}{3}(0) = 0$$

$$r(4) = \frac{1}{3}(0) + \frac{1}{3}(0) + \frac{1}{3}(0) = 0$$

$$r(j) = \begin{bmatrix} \frac{200}{3} \\ \frac{200}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

TRANSIÇÃO DE ESTADO - A TRANSIÇÃO do estado $i \rightarrow j$, é dada segundo a seguinte MATRIZ de probabilidades.

$i \backslash j$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	—	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{2}{3}$	—	—	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	—	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	—

POR EXEMPLO: se o caminhão ENCONTRA-SE com 200m. de cabos disponivel;

- PARA um reparo de 100m ele PASSA para o estado 1 ($200 - 100 = 100$)
- Para um reparo de 200 metros PASSA para o estado 4, pois o caminhão é recarregado à PÓS o REPARO.

1/3 • E. Põe um deósito de 300m,
ele passa para o estado 1 (100),
ou seja, é suspenso 200m, recor-
dejando o rolo com 400m e feito
o repon de 300m, restando 100m.

Portanto a probabilidade de cair
200m ir para 100m é igual
a $2/3$, como demonstra a Tabela
anterior.

No encontro a probabilidade de
no estágio n o sistema se
encontrar no Estado j, é dada
pela seguinte matriz calculada
através de:

$$P(i, j)^n = P(i, j, n)$$

$$P(i, j, 1) = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P(i, j, 2) = \begin{bmatrix} 4/9 & 2/9 & 1/9 & 2/9 \\ 3/9 & 3/9 & 1/9 & 2/9 \\ 4/9 & 2/9 & 1/9 & 2/9 \\ 4/9 & 2/9 & 0 & 3/9 \end{bmatrix}$$

$$P(i, j, 3) = \begin{bmatrix} 11/27 & 7/27 & 2/27 & 7/27 \\ 12/27 & 6/27 & 2/27 & 7/27 \\ 11/27 & 7/27 & 2/27 & 7/27 \\ 11/27 & 7/27 & 3/27 & 4/27 \end{bmatrix}$$

$$P(i, j, 4) = \begin{bmatrix} 34/81 & 20/81 & 7/81 & 20/81 \\ 33/81 & 20/81 & 7/81 & 20/81 \\ 34/81 & 20/81 & 7/81 & 20/81 \\ 34/81 & 20/81 & 6/81 & 21/81 \end{bmatrix}$$

FUNÇÃO de RECORRÊNCIA

$$f(n, i) = f(n-1, j) + \sum_{j=1}^4 P(i, j, n) \cdot r(j)$$

$$f(i,i) \quad f(n,i) = f(n-1,j) + \sum_{j=1}^4 p(i,j,n) \cdot r(j)$$

$$f(1,1) = f(0,j) + \sum_{j=1}^4 p(1,j,1) \cdot r(j)$$

$$f(1,1) = 200/3 + 1/3 \cdot 200/3 + 1/3 \cdot 200/3 + 0 + 0$$

$$f(1,1) = 1000/9$$

$$f(1,2) = 200/3 + 2/3 \cdot 200/3 + 0 + 0 + 0$$

$$f(1,2) = 1000/9$$

$$f(1,3) = 0 + 1/3 \cdot 200/3 + 1/3 \cdot 200/3 + 0 + 0$$

$$f(1,i) = \begin{bmatrix} 1000/9 \\ 1000/9 \\ 400/9 \\ 400/9 \end{bmatrix}$$

$$f(2,i) = f(1,i) + \sum_{j=1}^4 p(i,j,2) \cdot r(j)$$

$$f(2,1) = f(1,1) + \sum_{j=1}^4 p(1,j,2) \cdot r(j)$$

$$f(2,1) = 1000/9 + 4/9 \cdot 200/3 + 2/9 \cdot 200/3 + 0 + 0$$

$$f(2,1) = 1400/9$$

$$f(2,2) = f(1,2) + \sum_{j=1}^4 p(2,j,2) \cdot r(j)$$

$$f(2,2) = 1000/9 + 3/9 \cdot 200/3 + 3/9 \cdot 200/3 + 0 + 0$$

$$f(2,2) = 1400/9$$

$$f(2,i) = \begin{bmatrix} 1400/9 \\ 1400/9 \\ 800/9 \\ 800/9 \end{bmatrix}$$

$$f(2,3) = f(1,3) + \sum_{j=1}^4 p(3,j,2) \cdot r(j)$$

$$f(2,3) = 400/9 + 4/9 \cdot 200/3 + 2/9 \cdot 200/3 + 0 + 0$$

$$f(2,3) = 800/9$$

$$f(2,4) = f(1,4) + \sum_{j=1}^4 p(4,j,2) \cdot r(j)$$

$$f(2,4) = 400/9 + 4/9 \cdot 200/3 + 2/9 \cdot 200/3 + 0 + 0$$

$$f(2,4) = 800/9.$$

$$f(3,1) = f(2,1) + \sum_{j=1}^4 p(1,j,3) \cdot r(j)$$

$$f(3,1) = f(2,1) + \sum_{j=1}^4 p(1,j,3) \cdot r(j)$$

$$f(3,1) = 1400/9 + 1/27 \cdot 200/3 + 7/27 \cdot 200/3 + 0 + 0$$

$$f(3,1) = 1800/9$$

$$f(3,2) = f(2,2) + \sum_{j=1}^4 p(2,j,3) \cdot r(j)$$

$$f(3,2) = 1400/9 + 1/27 \cdot 200/3 + 6/27 \cdot 200/3 + 0 + 0$$

$$f(3,2) = 1800/9$$

$$f(3,3) = f(2,3) + \sum_{j=1}^4 p(3,j,3) \cdot r(j)$$

$$f(3,3) = 800/9 + 1/27 \cdot 200/3 + 7/27 \cdot 200/3 + 0 + 0$$

$$f(3,3) = 1200/9$$

$$f(3,4) = f(2,4) + \sum_{j=1}^4 p(4,j,3) \cdot r(j)$$

$$f(3,4) = 800/9 + 1/27 \cdot 200/3 + 7/27 \cdot 200/3 + 0 + 0$$

$$f(3,4) = 1200$$

$$f(3, i) = \begin{bmatrix} 1800/9 \\ 1800/9 \\ 1200/9 \\ 1200/9 \end{bmatrix}$$

CONCLUSÃO — A medida que o estagio evoluí no sistema, o acrescimo no valor esperado de perdas por reparos torna-se constante ($400/9$)

ANEXO ÚNICO

m	i	K	j	$F(j,i)$	$p(m,i,j)$	$f(m-i,j)$	$f(m,i)$	$[f(m,i)] - [f(m-1,i)]$
1	1	1	4	0	0			
		2	2	200/3	1/3			
		3	1	200/3	1/3	200/3	100/9	400/9
2	1	1	1	200/3	1/3			
		2	4	0	0			
		3	1	200/3	1/3	200/3	100/9	400/9
3	1	2	2	200/3	1/3			
		2	1	200/3	1/3			
		3	4	0	0	0	400/9	400/9
4	1	3	0	0				
		2	2	200/3	1/3			
		3	1	200/3	1/3	0	400/9	400/9
2	1	1	4	0	2/9			
		2	2	200/3	2/9			
		3	1	200/3	4/9	100/9	1400/9	400/9
2	1	1	200/3	3/9				
		2	4	0	2/9			
		3	1	200/3	3/9	100/9	1400/9	400/9
3	1	2	200/3	2/9				
		2	1	200/3	4/9			
		3	4	0	2/9	400/9	800/9	400/9
4	1	3	0	0				
		2	2	200/3	2/9			
		3	1	200/3	4/9	400/9	800/9	400/9
3	1	1	4	0	7/27			
		2	2	200/3	7/27			
		3	1	200/3	11/27	1400/9	1.800/9	400/9
2	1	1	200/3	32/27				
		2	4	0	7/27			
		3	1	200/3	61/27	1400/9	1.800/9	400/9
3	1	2	200/3	7/27				
		2	1	200/3	11/27			
		3	4	0	7/27	800/9	1200/9	400/9
4	1	3	0	3/27				
		2	2	200/3	7/27			
		3	1	200/3	11/27	800/9	1200/9	400/9