Demonstração: As inclusões $I_n \supset I_{n+1}$ significam que

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1.$$

O conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ é, portanto, limitado superiormente. Seja $c = \sup A$. Evidentemente, $a_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, como cada b_n é cota superior de A, temos $c \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto $c \in I_n$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. □

Teorema 5. *O conjunto dos números reais não é enumerável.*

Demonstração: Mostraremos que nenhuma função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ pode ser sobrejetiva. Para isto, supondo f dada, construiremos uma seqüência decrescente $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ de intervalos limitados e fechados tais que $f(n) \notin I_n$. Então, se c é um número real pertencente a todos os I_n, nenhum dos valores $f(n)$ pode ser igual a c, logo f não é sobrejetiva. Para obter os intervalos, começamos tomando $I_1 = [a_1, b_1]$ tal que $f(1) < a_1$ e, supondo obtidos $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n$ tais que $f(j) \notin I_j$, olhamos para $I_n = [a_n, b_n]$. Se $f(n+1) \notin I_n$, podemos simplesmente tomar $I_{n+1} = I_n$. Se, porém, $f(n+1) \in I_n$, pelo menos um dos extremos, digamos a_n, é diferente de $f(n+1)$, isto é, $a_n < f(n+1)$. Neste caso, tomamos $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$, com $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = (a_n + f(n+1))/2$. □

Um número real chama-se *irracional* quando não é racional. Como o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável, resulta do teorema acima que existem números irracionais e, mais ainda, sendo $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$, os irracionais constituem um conjunto não-enumerável (portanto formam a maioria dos reais) porque a reunião de dois conjuntos enumeráveis seria enumerável. Evidentemente, números irracionais podem ser exibidos explicitamente. No Capítulo 3, Exemplo 15, veremos que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, dada por $f(x) = x^2$, é sobrejetiva. Logo existe um número real positivo, indicado por $\sqrt{2}$, cujo quadrado é igual a 2. Pitágoras e seus discípulos mostraram que o quadrado de nenhum número racional pode ser 2. (Com efeito, de $(p/q)^2 = 2$ resulta $2q^2 = p^2$, com p, q inteiros, um absurdo porque o fator primo 2 aparece um número par de vezes na decomposição de p^2 em fatores primos e um número ímpar de vezes em $2q^2$.)

Corolário. *Todo intervalo não-degenerado é não-enumerável.*

Com efeito, todo intervalo não degenerado contém um intervalo aberto (a, b). Como a função $f: (-1, 1) \to (a, b)$ definida por $f(x) = \frac{1}{2}[(b-a)x + a + b]$

é uma bijeção, basta mostrar que o intervalo aberto $(-1, 1)$ é não-enumerável. Ora, a função $\varphi: \mathbb{R} \to (-1, 1)$, dada por $\varphi(x) = x/(1 + |x|)$, é uma bijeção cuja inversa é $\psi: (-1, 1) \to \mathbb{R}$, definida por $\psi(y) = y/(1 - |y|)$, pois $\varphi(\psi(y)) = y$ e $\psi(\varphi(x)) = x$ para quaisquer $y \in (-1, 1)$ e $x \in \mathbb{R}$, como se pode verificar facilmente. □

Teorema 6. *Todo intervalo não-degenerado I contém números racionais e irracionais.*

Demonstração: Certamente I contém números irracionais pois do contrário seria enumerável. Para provar que I contém números racionais, tomamos $[a, b] \subset I$, onde $a < b$ podem ser supostos irracionais. Fixemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < b - a$. Os intervalos $I_m = [m/n, (m+1)/n]$, $m \in \mathbb{Z}$, cobrem a reta, isto é $\mathbb{R} = \cup_{m \in \mathbb{Z}} I_m$. Portanto existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $a \in I_m$. Como a é irracional, temos $m/n < a < (m+1)/n$. Sendo o comprimento $1/n$ do intervalo I_m menor do que $b - a$, segue-se que $(m+1)/n < b$. Logo o número racional $(m+1)/n$ pertence ao intervalo $[a, b]$ e portanto ao intervalo I. □

4. Exercícios

Seção 1: $\mathbb{R}$ é um corpo

1. Prove as seguintes unicidades:

   (a) Se $x + \theta = x$ para algum $x \in \mathbb{R}$ então $\theta = 0$;

   (b) Se $x.u = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ então $u = 1$;

   (c) Se $x + y = 0$ então $y = -x$;

   (d) Se $x.y = 1$ então $y = x^{-1}$.

2. Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, se $b \neq 0$ e $d \neq 0$ prove que $a/b + c/d = (ad + bc)/bd$ e $(a/b)(c/d) = ac/bd$

3. Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ em $\mathbb{R}$, prove que $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ e conclua que $(a/b)^{-1} = b/a$.

4. Prove que $(1 - x^{n+1})/(1 - x) = 1 + x + \cdots + x^n$ para todo $x \neq 1$.

Seção 2: $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado

1. Para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$, prove que $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$.

2. Prove que $|| x | - | y || \leq | x - y |$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.
3. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, se $x^2 + y^2 = 0$ prove que $x = y = 0$
4. Prove por indução que $(1 + x)^n \geq 1 + nx + [n(n-1)/2]x^2$ se $x \geq 0$.
5. Para todo $x \neq 0$ em $\mathbb{R}$, prove que $(1 + x)^{2n} > 1 + 2nx$.
6. Prove que $| a - b | < \varepsilon \Rightarrow | a | < | b | + \varepsilon$.
7. Use o fato de que o trinômio do segundo grau $f(\lambda) = \sum_{i=1}^{n}(x_i + \lambda y_i)^2$ é ≥ 0 para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ para provar a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i^2).$$

Prove ainda que vale a igualdade se, e somente se, existe λ tal que $x_i = \lambda y_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, ou $y_1 = \cdots = y_n = 0$.

8. Se $a_1/b_1, \ldots, a_n/b_n$ pertencem ao intervalo (α, β) e $b_1, \ldots, b_n$ são positivos, prove que $(a_1 + \cdots + a_n)/(b_1 + \cdots + b_n)$ pertence a (α, β). Nas mesmas condições, se $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^+$, prove que $(t_1 a_1 + \cdots + t_n a_n)/(t_1 b_1 + \cdots + t_n b_n)$ também pertence ao intervalo (α, β).

Seção 3: $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo

1. Diz-se que uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ é *limitada superiormente* quando sua imagem $f(X) = \{f(x); x \in X\}$ é um conjunto limitado superiormente. Então põe-se $\sup f = \sup\{f(x); x \in X\}$. Prove que se $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ são limitadas superiormente o mesmo ocorre com a soma $f + g\colon X \to \mathbb{R}$ e tem-se $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$. Dê um exemplo com $\sup(f + g) < \sup f + \sup g$. Enuncie e prove um resultado análogo para inf.
2. Dadas as funções $f, g\colon X \to \mathbb{R}^+$ limitadas superiormente, prove que o produto $f.g\colon X \to \mathbb{R}^+$ é uma função limitada (superior e inferiormente) com $\sup(f.g) \leq \sup f. \sup g$ e $\inf(f.g) \geq \inf f. \inf g$. Dê exemplos onde se tenha $<$ e não $=$.
3. Nas condições do exercício anterior mostre que $\sup(f^2) = (\sup f)^2$ e $\inf(f^2) = (\inf f)^2$.
4. Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$ com $a^2 < 2 < b^2$, tome $x, y \in \mathbb{R}^+$ tais que $x < 1$, $x < (2 - a^2)/(2a + 1)$ e $y < (b^2 - 2)/2b$. Prove que $(a + x)^2 < 2 < (b - y)^2$ e $b - y > 0$. Em seguida, considere o conjunto limitado $X = \{a \in \mathbb{R}^+; a^2 < 2\}$ e conclua que o número real $c = \sup X$ cumpre $c^2 = 2$.

5. Prove que o conjunto dos polinômios com coeficientes inteiros é enumerável. Um número real chama-se *algébrico* quando é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros. Prove que o conjunto dos números algébricos é enumerável. Um número real chama-se *transcendente* quando não é algébrico. Prove que existem números transcendentes.
6. Prove que um conjunto $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo se, e somente se, $a < x < b$, $a, b \in I \Rightarrow x \in I$.

3

Seqüências de números reais

Neste capítulo será apresentada a noção de limite sob sua forma mais simples, o limite de uma seqüência. A partir daqui, todos os conceitos importantes da Análise, de uma forma ou de outra, reduzir-se-ão a algum tipo de limite.

1. Limite de uma seqüência.

Uma *seqüência* de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real x_n, chamado o *n-ésimo termo* da seqüência.

Escreve-se $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente (x_n), para indicar a seqüência cujo n-ésimo termo é x_n.

Não se confunda a seqüência (x_n) com o conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ dos seus termos. Por exemplo, a seqüência $(1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ não é o mesmo que o conjunto $\{1\}$. Ou então: as seqüências $(0, 1, 0, 1, \ldots)$ e $(0, 0, 1, 0, 0, 1, \ldots)$ são diferentes mas o conjunto dos seus termos é o mesmo, igual a $\{0, 1\}$.

Uma seqüência (x_n) diz-se *limitada superiormente* (respectivamente *inferiormente*) quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq c$ (respectivamente $x_n \geq c$) para todo $n \in \mathbb{N}$. Diz-se que a seqüência (x_n) é *limitada* quando ela é limitada superior e inferiormente. Isto equivale a dizer que existe $k > 0$ tal que $| x_n | \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1. Se $a > 1$ então a seqüência $(a, a^2, \ldots, a^n, \ldots)$ é limitada inferiormente porém não superiormente. Com efeito, multiplicando ambos os membros da desigualdade $1 < a$ por a^n obtemos $a^n < a^{n+1}$. Segue-se que $a < a^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo (a^n) é limitada inferiormente por a. Por outro lado, temos $a = 1 + d$, com $d > 0$. Pela desigualdade de Bernoulli,

para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $a^n > 1 + nd$. Portanto, dado qualquer $c \in \mathbb{R}$ podemos obter $a^n > c$ desde que tomemos $1 + nd > c$, isto é, $n > (c-1)/d$.

Dada uma seqüência $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, uma *subseqüência* de x é a restrição da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$ de $\mathbb{N}$. Escreve-se $x' = (x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ ou $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$, ou $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ para indicar a subseqüência $x' = x \mid \mathbb{N}'$. A notação $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mostra como uma subseqüência pode ser considerada como uma seqüência, isto é, uma função cujo domínio é $\mathbb{N}$.

Lembremos que $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ é infinito se, e somente se, é ilimitado, isto é, para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}'$ com $n_k > n_0$.

Exemplo 2. Dado o número real $a < -1$, formemos a seqüência $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Se $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ é o conjunto dos números pares e $\mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}$ é o conjunto dos números ímpares então a subseqüência $(a^n)_{n\in\mathbb{N}'}$ é limitada apenas inferiormente enquanto a subseqüência $(a^n)_{n\in\mathbb{N}''}$ é limitada apenas superiormente.

Diz-se que o número real a é *limite* da seqüência (x_n) quando, para todo número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n com índice $n > n_0$ cumprem a condição $| x_n - a | < \varepsilon$. Escreve-se então $a = \lim x_n$.

Esta importante definição significa que, para valores muito grandes de n, os termos x_n tornam-se e se mantêm tão próximos de a quanto se deseje. Mais precisamente, estipulando-se uma margem de erro $\varepsilon > 0$, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n da seqüência com índice $n > n_0$ são valores aproximados de a com erro menor do que ε.

Simbolicamente, escreve-se:

$$a = \lim x_n \quad .\equiv. \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ ;\ n > n_0 \ \Rightarrow\ |x_n - a| < \varepsilon.$$

Acima, o símbolo $.\equiv.$ significa que o que vem depois é a definição do que vem antes. $\forall$ significa "para todo"ou "qualquer que seja". $\exists$ significa "existe". O ponto-e-vírgula quer dizer "tal que" e a seta $\Rightarrow$ significa "implica".

Convém lembrar que $| x_n - a | < \varepsilon$ é o mesmo que $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, isto é, x_n pertence ao intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Assim, dizer que $a = \lim x_n$ significa afirmar que qualquer intervalo aberto de centro a contém todos os termos x_n da seqüência, salvo para um número finito de índices n (a saber, os índices $n \leq n_0$, onde n_0 é escolhido em função do raio ε do intervalo dado).

Em vez de $a = \lim x_n$, escreve-se também $a = \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n$, $a = \lim_{n \to \infty} x_n$ ou $x_n \to a$. Esta última expressão lê-se "x_n tende para a" ou "converge para a". Uma seqüência que possui limite diz-se *convergente* . Caso contrário, ela se chama *divergente* .

Teorema 1. **(Unicidade do limite.)** *Uma seqüência não pode convergir para dois limites distintos.*

Demonstração: Seja $\lim x_n = a$. Dado $b \neq a$ podemos tomar $\varepsilon > 0$ tal que os intervalos abertos $I = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ e $J = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ sejam disjuntos. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n \in I$. Então, para todo $n > n_0$, temos $x_n \notin J$. Logo não é $\lim x_n = b$. □

Teorema 2. *Se $\lim x_n = a$ então toda subseqüência de (x_n) converge para o limite a.*

Demonstração: Seja $(x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$ a subseqüência. Dado qualquer intervalo aberto I de centro a, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n, com $n > n_0$, pertencem a I. Em particular, todos os termos x_{n_k}, com $n_k > n_0$ também pertencem a I. Logo $\lim x_{n_k} = a$. □

Teorema 3. *Toda seqüência convergente é limitada.*

Demonstração: Seja $a = \lim x_n$. Tomando $\varepsilon = 1$, vemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a-1, a+1)$. Sejam b o menor e c o maior elemento do conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_{n_0}, a-1, a+1\}$. Todos os termos x_n da seqüência estão contidos no intervalo $[b, c]$, logo ela é limitada. □

Exemplo 3. A seqüência $(2, 0, 2, 0, \ldots)$, cujo n-ésimo termo é $x_n = 1 + (-1)^{n+1}$, é limitada mas não é convergente porque possui duas subseqüências constantes, $x_{2n-1} = 2$ e $x_{2n} = 0$, com limites distintos.

Exemplo 4. A seqüência $(1, 2, 3, \ldots)$, com $x_n = n$, não converge porque não é limitada.

Uma seqüência (x_n) chama-se *monótona* quando se tem $x_n \leq x_{n+1}$ para

monótona não-decrescente e, no segundo, que (x_n) é *monótona não-crescente*. Se, mais precisamente, tivermos $x_n < x_{n+1}$ (respect. $x_n > x_{n+1}$) para todo $n \in \mathbb{N}$, diremos que a seqüência é *crescente* (respectivamente, *decrescente*).

Toda seqüência monótona não-decrescente (respect. não-crescente) é limitada inferiormente (respect. superiormente) pelo seu primeiro termo. A fim de que ela seja limitada é suficiente que possua uma subseqüência limitada. Com efeito, seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ uma subseqüência limitada da seqüência monótona (digamos, não-decrescente) (x_n). Temos $x_{n'} \leq c$ para todo $n' \in \mathbb{N}'$. Dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe $n' \in \mathbb{N}'$ tal que $n < n'$. Então $x_n \leq x_{n'} \leq c$.

O teorema seguinte dá uma condição suficiente para que uma seqüência convirja. Foi tentando demonstrá-lo ao preparar suas aulas, na metade do século 19, que R. Dedekind percebeu a necessidade de uma conceituação precisa de número real.

Teorema 4. *Toda seqüência monótona limitada é convergente.*

Demonstração: Seja (x_n) monótona, digamos não decrescente, limitada. Escrevamos $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ e $a = \sup X$. Afirmamos que $a = \lim x_n$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, o número $a - \varepsilon$ não é cota superior de X. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a$. Assim, $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n < a + \varepsilon$ e daí $\lim x_n = a$. □

Semelhantemente, se (x_n) é não-crescente, limitada então $\lim x_n$ é o ínfimo do conjunto dos valores x_n.

Corolário. **(Teorema de Bolzano-Weierstrass.)** *Toda seqüência limitada de números reais possui uma subseqüência convergente.*

Com efeito, basta mostrar que toda seqüência (x_n) possui uma subseqüência monótona. Digamos que um termo x_n da seqüência dada é *destacado* quando $x_n \geq x_p$ para todo $p > n$. Seja $D \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos índices n tais que x_n é um termo destacado. Se D for um conjunto infinito, $D = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$, então a subseqüência $(x_n)_{n \in D}$ será monótona não-crescente. Se, entretanto, D for finito seja $n_1 \in \mathbb{N}$ maior do que todos os $n \in D$. Então x_{n_1} não é destacado, logo existe $n_2 > n_1$ com $x_{n_1} < x_{n_2}$. Por sua vez, x_{n_2} não é destacado, logo existe $n_3 > n_2$ com $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3}$. Prosseguindo, obtemos

$x_n/y_n > c.A/c = A$ e daí $\lim(x_n/y_n) = +\infty$.

(4) Existe $c > 0$ tal que $|x_n| \le c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow y_n > c/\varepsilon$. Então $n > n_0 \Rightarrow |x_n/y_n| < c.\varepsilon/c = \varepsilon$, logo $\lim(x_n/y_n) = 0$. □

As hipóteses feitas nas diversas partes do teorema anterior têm por objetivo evitar algumas das chamadas "expressões indeterminadas". No item (1) procura-se evitar a expressão $+\infty - \infty$. De fato, se $\lim x_n = +\infty$ e $\lim y_n = -\infty$ nenhuma afirmação geral pode ser feita sobre $\lim(x_n + y_n)$. Este limite pode não existir (como no caso em que $x_n = n + (-1)^n$ e $y_n = -n$), pode ser igual a $+\infty$ (se $x_n = 2n$ e $y_n = -n$), pode ser $-\infty$ (tome $x_n = n$ e $y_n = -2n$) ou pode assumir um valor arbitrário $c \in \mathbb{R}$ (por exemplo, se $x_n = n + c$ e $y_n = -n$). Por causa desse comportamento errático, diz-se que $+\infty - \infty$ é uma expressão indeterminada. Nos ítens (2), (3) e (4), as hipóteses feitas excluem os limites do tipo $0 \times \infty$ (também evitado no Teorema 7), $0/0$ e ∞/∞, respectivamente, os quais constituem expressões indeterminadas no sentido que acabamos de explicar. Outras expressões freqüentemente encontradas são ∞^0, 1^∞ e 0^0.

Os limites mais importantes da Análise quase sempre se apresentam sob forma de uma expressão indeterminada. Por exemplo, o número $e = \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$ é da forma 1^∞. E, como veremos mais adiante, a derivada é um limite do tipo $0/0$.

Agora, uma observação sobre ordem de grandeza. Se $k \in \mathbb{N}$ e a é um número real > 1 então $\lim_{n\to\infty} n^k = \lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} n! = \lim_{n\to\infty} n^n$. Todas estas seqüências têm limite infinito. Mas o Exemplo 9 nos diz que, para valores muito grandes de n temos $n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n$, onde o símbolo $\ll$ quer dizer "é uma fração muito pequena de" ou "é insignificante diante de". Por isso diz-se que o crescimento exponencial supera o polinomial, o crescimento fatorial supera o exponencial com base constante mas é superado pelo crescimento exponencial com base crescente. Por outro lado, o crescimento de n^k (mesmo quando $k = 1$) supera o crescimento logarítmico, como mostraremos agora.

No Capítulo 11 provaremos a existência de uma função crescente $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, tal que $\log(xy) = \log x + \log y$ e $\log x < x$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$. Daí resulta que $\log x = \log(\sqrt{x}.\sqrt{x}) = 2\log\sqrt{x}$, donde $\log\sqrt{x} = (\log x)/2$. Além disso, $\log x = \log(1.x) = \log 1 + \log x$, donde $\log 1 = 0$. Como log é crescente, tem-se $\log x > 0$ para todo $x > 1$. Vale também $\log(2^n) = n.\log 2$, portanto $\lim_{n\to\infty}\log(2^n) = +\infty$. Como log é crescente, segue-se $\lim_{n\to\infty}\log n = +\infty$.

Provaremos agora que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{n} = 0$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $\log\sqrt{n} < \sqrt{n}$. Como $\log\sqrt{n} = \frac{1}{2}\log n$, segue-se que $\log n < 2\sqrt{n}$. Dividindo por n resulta que $0 < \log n/n < 2/\sqrt{n}$. Fazendo $n \to \infty$, vem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{n} = 0$.

5. Exercícios

Seção 1: Limite de uma seqüência

1. Uma seqüência (x_n) diz-se *periódica* quando existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n+p} = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que toda seqüência periódica convergente é constante.

2. Dadas as seqüências (x_n) e (y_n), defina (z_n) pondo $z_{2n-1} = x_n$ e $z_{2n} = y_n$. Se $\lim x_n = \lim y_n = a$, prove que $\lim z_n = a$.

3. Se $\lim x_n = a$, prove que $\lim |x_n| = |a|$.

4. Se uma seqüência monótona tem uma subseqüência convergente, prove que a seqüência é, ela própria, convergente.

5. Um número a chama-se *valor de aderência* da seqüência (x_n) quando é limite de uma subseqüência de (x_n). Para cada um dos conjuntos A, B e C abaixo ache uma seqüência que o tenha como conjunto dos seus valores de aderência. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \mathbb{N}$, $C = [0, 1]$.

6. A fim de que o número real a seja valor de aderência de (x_n) é necessário e suficiente que, para todo $\varepsilon > 0$ e todo $k \in \mathbb{N}$ dados, exista $n > k$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$.

7. A fim de que o número real b não seja valor de aderência da seqüência (x_n) é necessário e suficiente que existam $n_0 \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ tais que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - b| \ge \varepsilon$.

Seção 2: Limites e desigualdades

1. Se $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ e $|x_n - y_n| \ge \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$, prove que $|a - b| \ge \varepsilon$.

2. Sejam $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$. Se $a < b$, prove que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n < y_n$.

3. Se o número real a não é o limite da seqüência limitada (x_n), prove que alguma subseqüência de (x_n) converge para um limite $b \neq a$.

4. Prove que uma seqüência limitada converge se, e somente se, possui um único valor de aderência.

5. Quais são os valores de aderência da seqüência (x_n) tal que $x_{2n-1} = n$ e $x_{2n} = 1/n$? Esta seqüência converge?

6. Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, defina indutivamente as seqüências (x_n) e (y_n) pondo $x_1 = \sqrt{ab}$, $y_1 = (a+b)/2$ e $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, $y_{n+1} = (x_n + y_n)/2$. Prove que (x_n) e (y_n) convergem para o mesmo limite.

7. Diz-se que (x_n) é uma *seqüência de Cauchy* quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$.

   (a) Prove que toda seqüência de Cauchy é limitada.

   (b) Prove que uma seqüência de Cauchy não pode ter dois valores de aderência distintos.

   (c) Prove que uma seqüência (x_n) é convergente se, e somente se, é de Cauchy.

Seção 3: Operações com limites

1. Prove que, para todo $p \in \mathbb{N}$, tem-se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n+p]{n} = 1$.

2. Se existem $\varepsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que $\varepsilon \le x_n \le n^k$ para todo n suficientemente grande, prove que $\lim \sqrt[n]{x_n} = 1$. Use este fato para calcular $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+k}$, $\lim \sqrt[n]{n+\sqrt{n}}$, $\lim \sqrt[n]{\log n}$ e $\lim \sqrt[n]{n \log n}$.

3. Dado $a > 0$, defina indutivamente a seqüência (x_n) pondo $x_1 = \sqrt{a}$ e $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$. Prove que (x_n) é convergente e calcule seu limite

$$L = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots}}}$$

4. Seja $e_n = (x_n - \sqrt{a})/\sqrt{a}$ o *erro relativo* na n-ésima etapa do cálculo de $\sqrt{a}$. Prove que $e_{n+1} = e_n^2/2(1+e_n)$. Conclua que $e_n \le 0,01 \Rightarrow e_{n+1} \le 0,00005 \Rightarrow e_{n+2} \le 0,00000000125$ e observe a rapidez de convergência do método.

5. Dado $a > 0$, defina indutivamente a seqüência (x_n) pondo $x_1 = 1/a$ e $x_{n+1} = 1/(a + x_n)$. Considere o número c, raiz positiva da equação $x^2 + ax - 1 = 0$, único número positivo tal que $c = 1/(a+c)$. Prove que

$$x_2 < x_4 < \cdots < x_{2n} < \cdots < c < \cdots < x_{2n-1} < \cdots < x_3 < x_1,$$

e que $\lim x_n = c$. O número c pode ser considerado como a soma da *fração contínua*

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cdots}}}}$$

6. Dado $a > 0$, defina indutivamente a seqüência (y_n), pondo $y_1 = a$ e $y_{n+1} = a + 1/y_n$. Mostre que $\lim y_n = a + c$, onde c é como no exercício anterior.

7. Defina a seqüência (a_n) indutivamente, pondo $a_1 = a_2 = 1$ e $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Escreva $x_n = a_n/a_{n+1}$ e prove que $\lim x_n = c$, onde c é único número positivo tal que $1/(c+1) = c$. O termo a_n chama-se o n-ésimo *número de Fibonacci* e $c = (-1+\sqrt{5})/2$ é o *número de ouro* da Geometria Clássica.

Seção 4: Limites infinitos

1. Prove que $\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

2. Se $\lim x_n = +\infty$ e $a \in \mathbb{R}$, prove: $\lim_{n\to\infty}[\sqrt{\log(x_n + a)} - \sqrt{\log x_n}] = 0$.

3. Dados $k \in \mathbb{N}$ e $a > 0$, determine o limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^k . a^n}.$$

Supondo $a > 0$ e $a \neq e$ calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n . n!}{n^n} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^k . a^n . n!}{n^n}.$$

(Para o caso $a = e$, ver exercício 9, seção 1, capítulo 11.)

4. Mostre que $\lim_{n\to+\infty} \log(n+1)/\log n = 1$.

5. Sejam (x_n) uma seqüência arbitrária e (y_n) uma seqüência crescente, com $\lim y_n = +\infty$. Supondo que $\lim(x_{n+1} - x_n)/(y_{n+1} - y_n) = a$, prove que $\lim x_n/y_n = a$. Conclua que se $\lim(x_{n+1} - x_n) = a$ então $\lim x_n/n = a$. Em particular, de $\lim \log(1 + 1/n) = 0$, conclua que $\lim(\log n)/n = 0$.

6. Se $\lim x_n = a$ e (t_n) é uma seqüência de números positivos com
$$\lim(t_1 + \cdots + t_n) = +\infty,$$
prove que
$$\lim \frac{t_1x_1 + \cdots + t_nx_n}{t_1 + \cdots + t_n} = a.$$
Em particular, se $y_n = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$, tem-se ainda $\lim y_n = a$.

4

Séries numéricas

Uma série é uma soma $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ com um número infinito de parcelas. Para que isto faça sentido, poremos $s = \lim_{n\to\infty}(a_1 + \cdots + a_n)$. Como todo limite, este pode existir ou não. Por isso há séries convergentes e séries divergentes. Aprender a distinguir umas das outras é a principal finalidade deste capítulo.

1. Séries convergentes

Dada uma seqüência (a_n) de números reais, a partir dela formamos uma nova seqüência (s_n) onde
$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad \ldots, \quad s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \text{ etc.}$$

Os números s_n chamam-se as *reduzidas* ou *somas parciais* da *série* $\sum a_n$. A parcela a_n é o *n-ésimo termo* ou *termo geral* da série.

Se existir o limite $s = \lim_{n\to\infty} s_n$, diremos que a série $\sum a_n$ é *convergente* e $s = \sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ será chamado a *soma* da série. Se $\lim s_n$ não existir, diremos que $\sum a_n$ é uma série *divergente*.

Às vezes é conveniente considerar séries do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, que começam com a_0 em vez de a_1.

Exemplo 1. Como já vimos (Exemplos 11 e 12, Capítulo 3), quando $|a| < 1$ a *série geométrica* $1 + a + a^2 + \cdots + a^n + \cdots$ é convergente, com soma igual a $1/(1-a)$, e a série $1 + 1 + 1/2! + \cdots + 1/n! + \cdots$ também converge, com soma igual a e.

Exemplo 2. A série $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, de termo geral $(-1)^{n+1}$, é divergente pois a soma parcial s_n é igual a zero quando n é par, e igual a

1 quando n é ímpar. Portanto não existe $\lim s_n$.

Exemplo 3. A série $\sum 1/n(n+1)$, cujo termo geral é $a_n = 1/n(n+1) = 1/n - 1/(n+1)$, tem n-ésima soma parcial

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Portanto $\lim s_n = 1$, isto é, $\sum 1/n(n+1) = 1$.

Se $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, as reduzidas da série $\sum a_n$ formam uma seqüência não-decrescente. Portanto uma série $\sum a_n$, de termos não-negativos, converge se, e somente se, existe uma constante k tal que $a_1 + \cdots + a_n \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por isso usaremos a notação $\sum a_n < +\infty$ para significar que a série $\sum a_n$, com $a_n \geq 0$, é convergente.

Se $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e (a'_n) é uma subseqüência de (a_n) então $\sum a_n < +\infty$ implica $\sum a'_n < +\infty$.

Exemplo 4. (*A série harmônica.*) A série $\sum 1/n$ é divergente. De fato, se $\sum 1/n = s$ fosse convergente então $\sum 1/2n = t$ e $\sum 1/(2n-1) = u$ também seriam convergentes. Além disso, como $s_{2n} = t_n + u_n$, fazendo $n \to \infty$ teríamos $s = t + u$. Mas $t = \sum 1/2n = (1/2)\sum 1/n = s/2$, portanto $u = t = s/2$. Por outro lado

$$u - t = \lim_{n\to\infty}(u_n - t_n) = \lim_{n\to\infty}\left[(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n})\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n}\right) > 0,$$

logo $u > t$. Contradição.

Teorema 1. **(Critério de comparação.)** *Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos não-negativos. Se existem $c > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $a_n \leq cb_n$ para todo $n > n_0$ então a convergência de $\sum b_n$ implica a de $\sum a_n$ enquanto a divergência de $\sum a_n$ implica a de $\sum b_n$.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, podemos supor $a_n \leq cb_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então as reduzidas s_n e t_n, de $\sum a_n$ e $\sum b_n$ respectivamente, formam seqüências não-decrescentes tais que $s_n \leq ct_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $c > 0$, (t_n) limitada implica (s_n) limitada e (s_n) ilimitada implica (t_n) ilimitada, pois $t_n \geq s_n/c$. □

Exemplo 5. Se $r > 1$, a série $\sum 1/n^r$ converge. Com efeito, seja c a soma da série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty}(2/2^r)^n$. Mostraremos que toda reduzida s_m da série $\sum 1/n^r$ é $< c$. Seja n tal que $m \leq 2^n - 1$. Então

$$s_m \leq 1 + \left(\frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r}\right) + \left(\frac{1}{4^r} + \frac{1}{5^r} + \frac{1}{6^r} + \frac{1}{7^r}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^r} + \cdots + \frac{1}{(2^n - 1)^r}\right),$$

$$s_m < 1 + \frac{2}{2^r} + \frac{4}{4^r} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^{(n-1)r}} = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{2}{2^r}\right)^i < c.$$

Como a série harmônica diverge, resulta do critério de comparação que $\sum 1/n^r$ diverge quando $r < 1$ pois, neste caso, $1/n^r > 1/n$.

Teorema 2. *O termo geral de uma série convergente tem limite zero.*

Demonstração: Se a série $\sum a_n$ é convergente então, pondo $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, existe $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Consideremos a seqüência (t_n), com $t_1 = 0$ e $t_n = s_{n-1}$ quando $n > 1$. Evidentemente, $\lim t_n = s$ e $s_n - t_n = a_n$. Portanto $\lim a_n = \lim(s_n - t_n) = \lim s_n - \lim t_n = s - s = 0$. □

O critério contido no Teorema 2 constitui a primeira coisa a verificar quando se quer saber se uma série é ou não convergente. Se o termo geral não tende a zero, a série diverge. A série harmônica mostra que a condição $\lim a_n = 0$ não é suficiente para a convergência de $\sum a_n$. □

2. Séries absolutamente convergentes

Uma série $\sum a_n$ diz-se *absolutamente convergente* quando $\sum |a_n|$ converge.

Exemplo 6. Uma série convergente cujos termos não mudam de sinal é absolutamente convergente. Quando $-1 < a < 1$, a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ é absolutamente convergente, pois $|a^n| = |a|^n$, com $0 \leq |a| < 1$.

O exemplo clássico de uma série convergente $\sum a_n$ tal que $\sum |a_n| = +\infty$ é dado por $\sum(-1)^{n+1}/n = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \cdots$. Quando tomamos a soma dos valores absolutos, obtemos a série harmônica, que diverge. A convergência da série dada segue-se do grande e daí resulta que o termo geral a_n não tende para zero. Se $L = 1$, o teste é inconclusivo. A série pode convergir (como no caso $\sum 1/n^2$) ou divergir (como no caso $\sum 1/n$).

Exemplo 8. Seja $a_n = 1/(n^2 - 3n + 1)$. Considerando a série convergente $\sum(1/n^2)$, como $\lim[n^2/(n^2 - 3n + 1)] = \lim[1/(1 - 3/n + 1/n^2)] = 1$, concluímos que $\sum a_n$ é convergente.

Exemplo 9. Segue-se do Exemplo 9 do Capítulo 3 e do teste de d'Alembert que as séries $\sum(a^n/n!)$, $\sum(n!/n^n)$ e $\sum(n^k/a^n)$, esta última com $a > 1$, são convergentes.

Teorema 6. **(Teste de Cauchy.)** *Quando existe um número real c tal que $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande (em particular, quando $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$), a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.*

Demonstração: Se $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c < 1$ então $|a_n| \leq c^n$ para todo n suficientemente grande. Como a série geométrica $\sum c^n$ é convergente, segue-se do critério de comparação que $\sum a_n$ converge absolutamente. No caso particular de existir $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, escolhemos c tal que $L < c < 1$ e teremos $\sqrt[n]{|a_n|} < c$ para todo n suficientemente grande (Teorema 5, Capítulo 3), recaindo assim no caso anterior. □

Observação. Também no teste de Cauchy, tenta-se calcular $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$. Se $L > 1$, a série $\sum a_n$ diverge. Com efeito, neste caso, tem-se $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ para todo n suficientemente grande, donde $|a_n| > 1$, logo a série $\sum a_n$ diverge pois seu termo geral não tende a zero. Quando $L = 1$, a série pode divergir (como no caso $\sum(1/n)$) ou convergir (como $\sum(1/n^2)$).

Exemplo 10. Seja $a_n = (\log n/n)^n$. Como $\sqrt[n]{a_n} = \log n/n$ tende a zero, a série $\sum a_n$ é convergente.

O teorema seguinte relaciona os testes de d'Alembert e Cauchy.

Teorema 7. *Seja (a_n) uma seqüência cujos termos são diferentes de zero. Se $\lim |a_{n+1}|/|a_n| = L$ então $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$.*

Demonstração: Para simplificar a notação, suporemos que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, fixemos K, M tais que $L - \epsilon < K <$

$L < M < L + \varepsilon$. Existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq p \Rightarrow K < a_{n+1}/a_n < M$. Multiplicando membro a membro as $n - p$ desigualdades $K < a_{p+i}/a_{p+i-1} < M$, $i = 1, \ldots, n - p$, obtemos $K^{n-p} < a_n/a_p < M^{n-p}$ para todo $n > p$. Ponhamos $\alpha = a_p/K^p$ e $\beta = a_p/M^p$. Então $K^n\alpha < a_n < M^n\beta$. Extraindo raízes, vem $K\sqrt[n]{\alpha} < \sqrt[n]{a_n} < M\sqrt[n]{\beta}$ para todo $n > p$. Levando em conta que $L - \varepsilon < K, M < L + \varepsilon, \lim \sqrt[n]{\alpha} = 1$ e $\lim \sqrt[n]{\beta} = 1$, concluímos que existe $n_0 > p$ tal que $n > n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < K\sqrt[n]{\alpha}$ e $M\sqrt[n]{\beta} < L + \varepsilon$. Então $n > n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon$, o que prova o teorema quando $L > 0$. Se $L = 0$, basta considerar M em vez de K e M. □

Exemplo 10. Resulta do Teorema 7 que $\lim n/\sqrt[n]{n!} = e$. Com efeito, pondo $a_n = n^n/n!$ vem $n/\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{a_n}$. Ora

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)\cdot n!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n,$$

logo $\lim(a_{n+1}/a_n) = e$, e daí $\lim \sqrt[n]{a_n} = e$.

4. Comutatividade

Uma série $\sum a_n$ diz-se *comutativamente convergente* quando, para qualquer bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, pondo $b_n = a_{\varphi(n)}$, a série $\sum b_n$ é convergente. (Em particular, tomando $\varphi(n) = n$, vemos que $\sum a_n$ é convergente.) Resulta do que mostraremos a seguir que se $\sum a_n$ é comutativamente convergente então $\sum b_n = \sum a_n$ qualquer que seja a bijeção φ. Esta é a maneira precisa de afirmar que a soma $\sum a_n$ não depende da ordem das parcelas. Mas isto nem sempre ocorre.

Exemplo 11. A série

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

converge, mas não comutativamente. Com efeito, temos

$$\frac{s}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$$

Podemos então escrever

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

$$\frac{s}{2} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \cdots$$

Somando termo a termo vem

$$\frac{3s}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

A série acima, cuja soma é $3s/2$, tem os mesmos termos da série inicial, cuja soma é s, apenas com uma mudança na sua ordem.

Teorema 8. *Se $\sum a_n$ é absolutamente convergente então para toda bijeção $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, pondo $b_n = a_{\varphi(n)}$, tem-se $\sum b_n = \sum a_n$.*

Demonstração: Supomos inicialmente $a_n \geq 0$ para todo n. Escrevamos $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ e $t_n = b_1 + \cdots + b_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, os números $\varphi(1), \ldots, \varphi(n)$ pertencem todos ao conjunto $\{1, 2, \ldots, m\}$, onde m é o maior dos $\varphi(i)$. Então

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} a_{\varphi(i)} \leq \sum_{j=1}^{m} a_j = s_m.$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \leq s_m$. Reciprocamente, (considerando-se φ^{-1} em vez de φ) para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $s_m \leq t_n$. Segue-se que $\lim t_n = \lim s_n$, isto é, $\sum b_n = \sum a_n$. No caso geral, temos $\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$, onde p_n é a parte positiva e q_n a parte negativa de a_n. Toda reordenação (b_n) dos termos a_n determina uma reordenação (u_n) para os p_n e uma reordenação (v_n) dos q_n, de modo que u_n é a parte positiva e v_n a parte negativa de b_n. Pelo que acabamos de ver, $\sum u_n = \sum p_n$ e $\sum v_n = \sum q_n$. Logo $\sum a_n = \sum u_n - \sum v_n = \sum b_n$. □

O teorema seguinte implica que somente as séries absolutamente convergentes são comutativamente convergentes.

Teorema 9. **(Riemann.)** *Alterando-se convenientemente a ordem dos termos de uma série condicionalmente convergente, pode-se fazer com que sua soma fique igual a qualquer número real pré-fixado.*

Demonstração: Seja $\sum a_n$ a série dada. Fixado o número c, começamos a somar os termos positivos de $\sum a_n$, na sua ordem natural, um a um, parando quando, ao somar a_{n_1}, a soma pela primeira vez ultrapasse c. (Isto é possível porque a soma dos termos positivos de $\sum a_n$ é $+\infty$.) A esta soma acrescentamos os termos negativos, também na sua ordem natural, um a um, parando logo que, ao somar $a_{n_2} (< 0)$, o total resulte inferior a c (o que é possível porque a soma dos termos negativos é $-\infty$). Prosseguindo analogamente, obtemos uma

nova série, cujos termos são os mesmos de $\sum a_n$, numa ordem diferente. As reduzidas desta nova série oscilam em torno do valor c de tal modo que (a partir da ordem n_1) a diferença entre cada uma delas e c é inferior, em valor absoluto, ao termo a_{n_k} onde houve a última mudança de sinal. Ora, $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = 0$ porque a série $\sum a_n$ converge. Logo as reduzidas da nova série convergem para c. □

5. Exercícios

Seção 1: Séries convergentes

1. Dadas as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$, com $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ e $b_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, mostre que $\lim a_n = \lim b_n = 0$. Calcule explicitamente as n-ésimas reduzidas s_n e t_n destas séries e mostre que $\lim s_n = \lim t_n = +\infty$, logo as séries dadas são divergentes.

2. Use o critério de comparação para provar que $\sum 1/n^2$ é convergente, a partir da convergência de $\sum 2/n(n+1)$.

3. Seja s_n a n-ésima reduzida da série harmônica. Prove que para $n = 2^m$ tem-se $s_n > 1 + \frac{m}{2}$ e conclua daí que a série harmônica é divergente.

4. Mostre que a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ diverge.

5. Mostre que se $r > 1$ a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^r}$ converge .

6. Prove que a série $\sum \frac{\log n}{n^2}$ converge.

7. Prove: se $a_1 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$ e $\sum a_n$ converge então $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$.

Seção 2: Séries absolutamente convergentes

1. Se $\sum a_n$ é convergente e $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então a série $\sum a_n x^n$ é absolutamente convergente para todo $x \in [-1, 1]$ e

$$\sum a_n \operatorname{sen}(nx), \qquad \sum a_n \cos(nx)$$

são absolutamente convergentes para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. A série $1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} + \cdots$ tem termos alternadamente positivos e negativos e seu termo geral tende para zero. Entretanto é divergente. Por que isto não contradiz o Teorema de Leibniz?

3. Dê exemplo de uma série convergente $\sum a_n$ e de uma seqüência limitada

(x_n) tais que a série $\sum a_n x_n$ seja divergente. Examine o que ocorre se uma das hipóteses seguintes for verificada: (a) (x_n) é convergente; (b) $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

4. Prove que é convergente a série obtida alterando-se os sinais dos termos da série harmônica, de modo que fiquem p termos positivos ($p \in \mathbb{N}$ fixado) seguidos de p termos negativos, alternadamente.

5. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente e $\lim b_n = 0$, ponha $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$ e prove que $\lim c_n = 0$.

6. Se $\sum a_n$ é absolutamente convergente, prove que $\sum a_n^2$ converge.

7. Se $\sum a_n^2$ e $\sum b_n^2$ convergem, prove que $\sum a_n b_n$ converge absolutamente.

8. Prove: uma série $\sum a_n$ é absolutamente convergente se, e somente se, é limitado o conjunto de todas as somas finitas formadas com os termos a_n.

Seção 3: Testes de convergência

1. Prove que se existir uma infinidade de índices n tais que $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ então a série $\sum a_n$ diverge. Se $a_n \neq 0$ para todo n e $|a_{n+1}/a_n| \geq 1$ para todo $n > n_0$ então $\sum a_n$ diverge. Por outro lado, a série $1/2 + 1/2 + 1/2^2 + 1/2^2 + 1/2^3 + 1/2^3 + \cdots$ converge mas se tem $a_{n+1}/a_n = 1$ para todo n ímpar.

2. Se $0 < a < b < 1$, a série $a+b+a^2+b^2+a^3+b^3+\cdots$ é convergente. Mostre que o teste de Cauchy conduz a este resultado mas o teste de d'Alembert é inconclusivo.

3. Determine se a série $\sum(\log n/n)^n$ é convergente usando ambos os testes, de d'Alembert e Cauchy.

4. Dada uma seqüência de números positivos x_n, com $\lim x_n = a$, prove que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = a$.

5. Determine para quais valores de x cada uma das séries abaixo é convergente:

$$\sum n^k x^n, \quad \sum n^n x^n, \quad \sum x^n/n^n, \quad \sum n! x^n, \quad \sum x^n/n^2.$$

Seção 4: Comutatividade

1. Se uma série é condicionalmente convergente, prove que existem alterações da ordem dos seus termos de modo a tornar sua soma igual a $+\infty$ e a $-\infty$.

2. Efetue explicitamente uma reordenação dos termos da série $1-1/2+1/3-1/4+1/5-\cdots$ de modo que sua soma se torne igual a zero.

3. Diz-se que a seqüência (a_n) é *somável*, com soma s, quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe um subconjunto finito $J_0 \subset \mathbb{N}$ tal que, para todo J finito com $J_0 \subset J \subset \mathbb{N}$, tem-se $|s - \sum_{n\in J} a_n| < \varepsilon$. Prove:

(a) Se a seqüência (a_n) é somável então, para toda bijeção $\varphi\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, a seqüência (b_n), definida por $b_n = a_{\varphi(n)}$, é somável, com a mesma soma.

(b) Se a seqüência (a_n) é somável, com soma s, então a série $\sum a_n = s$ é absolutamente convergente.

(c) Reciprocamente, se $\sum a_n$ é uma série absolutamente convergente, então a seqüência (a_n) é somável.

5

Algumas Noções Topológicas

A Topologia é um ramo da Matemática no qual são estudadas, com grande generalidade, as noções de limite, de continuidade e as idéias com elas relacionadas. Neste capítulo, abordaremos alguns conceitos topológicos elementares referentes a subconjuntos de $\mathbb{R}$, visando estabelecer a base adequada para desenvolver os capítulos seguintes. Adotaremos uma linguagem geométrica, dizendo "ponto" em vez de "número real", "a reta" em vez de "o conjunto $\mathbb{R}$".

1. Conjuntos abertos

Diz-se que o ponto a é *interior* ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando existe um número $\varepsilon > 0$ tal que o intervalo aberto $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ está contido em X. O conjunto dos pontos interiores a X chama-se o *interior* do conjunto X e representa-se pela notação $\operatorname{int} X$. Quando $a \in \operatorname{int} X$ diz-se que o conjunto X é uma *vizinhança* do ponto a. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ chama-se *aberto* quando $A = \operatorname{int} A$, isto é, quando todos os pontos de A são interiores a A.

Exemplo 1. Todo ponto c do intervalo aberto (a, b) é um ponto interior a (a, b). Os pontos a e b, extremos do intervalo fechado $[a, b]$ não são interiores a $[a, b]$. O interior do conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é vazio. Por outro lado, $\operatorname{int}[a, b] = (a, b)$. O intervalo fechado $[a, b]$ não é uma vizinhança de a nem de b. Um intervalo aberto é um conjunto aberto. O conjunto vazio é aberto. Todo intervalo aberto (limitado ou não) é um conjunto aberto.

O limite de uma seqüência pode ser reformulado em termos de conjuntos abertos: tem-se $a = \lim x_n$ se, e somente se, para todo aberto A contendo a existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Longrightarrow x_n \in A$.

Teorema 1.

a) *Se A_1 e A_2 são conjuntos abertos então a interseção $A_1 \cap A_2$ é um conjunto aberto.*

b) *Se $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família qualquer de conjuntos abertos, a reunião $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um conjunto aberto.*

Demonstração: a) Se $x \in A_1 \cap A_2$ então $x \in A_1$ e $x \in A_2$. Como A_1 e A_2 são abertos, existem $\varepsilon_1 > 0$ e $\varepsilon_2 > 0$ tais que $(x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1) \subset A_1$ e $(x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2) \subset A_2$. Seja ε o menor dos dois números $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Então $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A_1$ e $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A_2$ logo $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A_1 \cap A_2$. Assim todo ponto $x \in A_1 \cap A_2$ é um ponto interior, ou seja, o conjunto $A_1 \cap A_2$ é aberto.

b) Se $x \in A$ então existe $\lambda \in L$ tal que $x \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A_\lambda \subset A$, logo todo ponto $x \in A$ é interior, isto é, A é aberto. □

Exemplo 2. Resulta imediatamente de a) no Teorema 1 que a interseção $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto. Mas, embora por b) a reunião de uma infinidade de conjuntos abertos seja ainda aberta, a interseção de um número infinito de abertos pode não ser aberta. Por exemplo, se $A_1 = (-1, 1), A_2 = (-1/2, 1/2), \ldots, A_n = (-1/n, 1/n), \ldots$ então $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots = \{0\}$. Com efeito, se $x \neq 0$ então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|x| > 1/n$ logo $x \notin A_n$, donde $x \notin A$.

2. Conjuntos fechados

Diz-se que um ponto a é *aderente* ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando a é limite de alguma seqüência de pontos $x_n \in X$. Evidentemente, todo ponto $a \in X$ é aderente a X: basta tomar todos os $x_n = a$.

Chama-se *fecho* de um conjunto X ao conjunto $\overline{X}$ formado por todos os pontos aderentes a X. Tem-se $X \subset \overline{X}$. Se $X \subset Y$ então $\overline{X} \subset \overline{Y}$. Um conjunto X diz-se *fechado* quando $X = \overline{X}$, isto é, quando todo ponto aderente a X pertence a X. Seja $X \subset Y$. Diz-se que X é *denso* em Y quando $Y \subset \overline{X}$, isto é, quando todo $b \in Y$ é aderente a X. Por exemplo, $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Teorema 2. *Um ponto a é aderente ao conjunto X se, e somente se, toda vizinhança de a contém algum ponto de X.*

Demonstração: Seja a aderente a X. Então $a = \lim x_n$, onde $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dada uma vizinhança qualquer $V \ni a$ temos