Parte 4

MATRIZES DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES

Capítulo 13

Matrizes e Determinantes

13.1 Matrizes

Em muitas situações, particularmente em Economia, as idéias envolvidas costumam ser expressas por uma ou mais equações. Quando tais equações são numerosas, a representação com matrizes constitui uma forma adequada e simples de representá-las e de resolvê-las. A teoria de matrizes foi introduzida em meados do século XIX, sendo o matemático inglês Arthur Cayley (1821–1895) um dos pioneiros neste estudo.

Chamamos de matriz toda tabela de números dispostos em filas horizontais (ou linhas) e verticais (ou colunas). Se a tabela tiver m linhas e n colunas, dizemos que a matriz é retangular do tipo (ou de ordem) $m \times n$ (lê-se m por n). As linhas são numeradas de cima para baixo e as colunas, da esquerda para a direita. Os elementos de uma matriz são geralmente representados entre colchetes, e a indicação de uma matriz é feita por uma letra maiúscula do alfabeto.

Exemplo 13.1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{1}{2} & 4 \end{bmatrix} \text{ é matriz do tipo } 2 \times 3,$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \\ 6 & -6 \end{bmatrix} \text{ é matriz do tipo } 3 \times 2,$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ é matriz do tipo } 2 \times 2.$$

Os elementos de uma matriz costumam ser representados por meio de uma letra minúscula do alfabeto afetada de dois índices: o primeiro indicando a linha, e o segundo, a coluna à qual pertence o elemento.

Assim, na matriz $\begin{bmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ temos:

$$\begin{array}{lll} a_{11} = 2, & a_{12} = 7, & a_{13} = -1, \\ a_{21} = 6, & a_{22} = 4, & a_{23} = 0. \end{array}$$

Observação

No lugar dos colchetes para a representação de uma matriz, podemos utilizar os parênteses ou duas barras verticais de cada lado da tabela. Assim, são válidas as representações:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{Vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 6 \end{Vmatrix}.$$

Matriz Quadrada

Chamamos de matriz quadrada toda matriz em que o número de linhas é igual ao número de colunas. Ao número de linhas (ou de colunas) damos o nome de ordem da matriz.

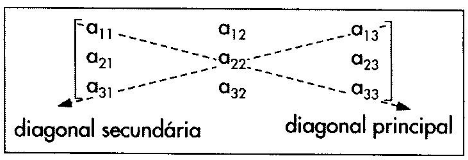
Por exemplo, uma matriz de ordem 3 pode ser indicada por

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Em uma matriz quadrada, os elementos a_{ij} tais que $i = j$ são chamados elementos da diagonal principal. No exemplo citado, tais elementos são a_{11}, a_{22} e a_{33}.

Os elementos a_{ij} tais que $i + j = n + 1$ (em que n é a ordem da matriz) são chamados elementos da diagonal secundária. No exemplo estudado, tais elementos são: a_{13}, a_{22} e a_{31}. (Figura 13.1.)

Figura 13.1: Diagonal principal e secundária de uma matriz.



Matriz Nula

É aquela em que os elementos são todos nulos. Assim,

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é matriz nula tipo 2×3, e

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é matriz nula de ordem 2.

Igualdade de Matrizes

Duas matrizes A e B do mesmo tipo são iguais quando seus elementos correspondentes (aqueles com o mesmo par ordenado de índices) são iguais. Isto é, se A e B são do tipo $m \times n$, então

$$A = B \text{ se, e só se, } a_{rs} = b_{rs}\ \forall r,\ \forall s,$$

em que a_{rs} é um elemento genérico de A, e b_{rs} é um elemento genérico de B.

Exemplo 13.2

$$\begin{bmatrix} 3^0 & 3^1 \\ 3^2 & 3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 27 \end{bmatrix}.$$

Matriz Simétrica e Anti-Simétrica

Chamamos de matriz simétrica aquela na qual os elementos dispostos simetricamente em relação à diagonal principal são iguais. Isto é, A é uma matriz simétrica se $a_{ij} = a_{ji}\ \forall i,\ \forall j$.

Exemplo 13.3

$$\text{A matriz} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 10 \\ 2 & 4 & -7 \\ 10 & -7 & 9 \end{bmatrix} \text{ é simétrica.}$$

Chamamos de matriz anti-simétrica aquela na qual são nulos os elementos da diagonal principal, e opostos os elementos dispostos simetricamente em relação a ela.

Exemplo 13.4

$$\text{A matriz} \begin{bmatrix} 0 & -5 & 6 \\ 5 & 0 & 10 \\ -6 & -10 & 0 \end{bmatrix} \text{ é anti-simétrica.}$$

Matriz Diagonal

Chamamos de matriz diagonal toda matriz quadrada cujos elementos que não pertencem à diagonal principal valem zero. Isto é, uma matriz A é diagonal se $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

Exemplo 13.5. São diagonais as matrizes

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriz Identidade

Chamamos de matriz identidade toda matriz quadrada cujos elementos da diagonal principal valem 1 e os elementos restantes valem 0. Uma matriz identidade de ordem n é indicada por I_n.

Exemplo 13.6. As matrizes identidade de ordem 2 e 3 são dadas por:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Transposta de uma Matriz

Seja A uma matriz do tipo $m \times n$. Chamamos de transposta de A, e indicamos por A^t, a matriz cujas colunas são ordenadamente iguais às linhas de A, isto é, se a_{ij} é um elemento genérico de A, e b_{ij} é um elemento genérico de B, então $b_{ij} = a_{ji}$ $\forall i$, $\forall j$.

Exemplo 13.7

A matriz transposta de $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ é a matriz $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$.

Observemos que, se uma matriz A é simétrica, então $A = A^t$.

Exercícios

1. Escreva em forma de tabela a matriz do tipo 3×2 tal que $a_{ij} = i + j$.

2. Escreva em forma de tabela a matriz A de ordem 4 tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

3. Escreva em forma de tabela a matriz A de ordem 4 tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i > j \\ 0, & \text{se } i = j \\ -1, & \text{se } i < j \end{cases}$$

4. Obtenha a, b, x e y de modo que

$$\begin{bmatrix} a + 2b & a \\ x + y & 2x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 12 & 18 \end{bmatrix}$$

5. Obtenha os reais x e y de modo que

$$\begin{bmatrix} x^2 - y \\ y^2 - x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6. Qual é a matriz I_4? e I_5?

7. Obtenha as transpostas das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 7 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 8 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

13.2 Operações com Matrizes

Adição

Dadas duas matrizes A e B, de mesmo tipo $m \times n$, chamamos de soma de A com B (e indicamos por $A + B$) a matriz C do tipo $m \times n$ cujos elementos são as somas dos elementos correspondentes de A e B. Isto é:

se a_{rs} é um elemento genérico de A,
b_{rs} é um elemento genérico de B e
c_{rs} é um elemento genérico de C,

então

$$c_{rs} = a_{rs} + b_{rs}, \ \forall r, \forall s.$$

Exemplo 13.8

$$\begin{bmatrix} -6 & 1 & 5 \\ -6 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 7 \\ -6 & 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Matriz Oposta

Dada a matriz A do tipo $m \times n$ e elemento genérico a_{ij}, chamamos de matriz oposta de A (e indicamos por $-A$) a matriz B do tipo $m \times n$ e elemento genérico b_{ij} tal que:

$$b_{ij} = -a_{ij}, \ \forall i, \forall j.$$

Exemplo 13.9. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$. A matriz oposta de A é $-A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$.

Propriedades da Adição de Matrizes

Sejam A, B e C matrizes quaisquer de mesmo tipo $m \times n$. São válidas as seguintes propriedades:

A_1) Comutativa: $A + B = B + A$.
A_2) Associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$.
A_3) Existência do elemento neutro: $A + 0 = A$ (0 é a matriz nula do tipo $m \times n$).
A_4) Existência do elemento oposto: $A + (-A) = 0$ (0 é a matriz nula do tipo $m \times n$).
A_5) $(A + B)^t = A^t + B^t$.

Subtração de Matrizes

Dadas duas matrizes A e B do mesmo tipo, chamamos de diferença entre A e B (e indicamos por $A - B$) a soma da matriz A com a oposta de B. Isto é:

$$A - B = A + (-B).$$

Exemplo 13.10

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 6 & -12 \end{bmatrix}.$$

Multiplicação de Número por Matriz

Dada a matriz A e o número α, o produto de α por A é a matriz que se obtém multiplicando-se todos os elementos de A por α. Indicamos tal produto por $\alpha \cdot A$.

Exemplo 13.11

$$5 \cdot \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 5 & 10 \\ -25 & 0 & 30 \end{bmatrix}.$$

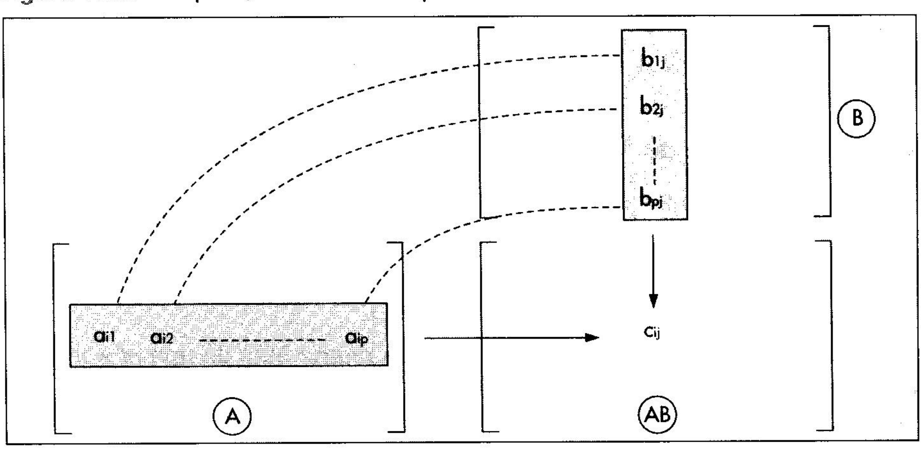
Multiplicação de Matrizes

Sejam A e B matrizes do tipo $m \times p$ e $p \times n$, respectivamente, com elementos genéricos a_{ik} e b_{kj}. Chama-se produto de A por B (e indica-se por AB) a matriz do tipo $m \times n$ cujo elemento genérico c_{ij} é dado por:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \ldots + a_{ip} \cdot b_{pj}.$$

Isto é, o elemento da *i-ésima* linha e *j-ésima* coluna de AB é obtido multiplicando-se a linha i de A pela coluna j de B ordenadamente, elemento por elemento, somando-se os produtos em seguida (Figura 13.2).

Figura 13.2: Multiplicação da matriz A pela matriz B.



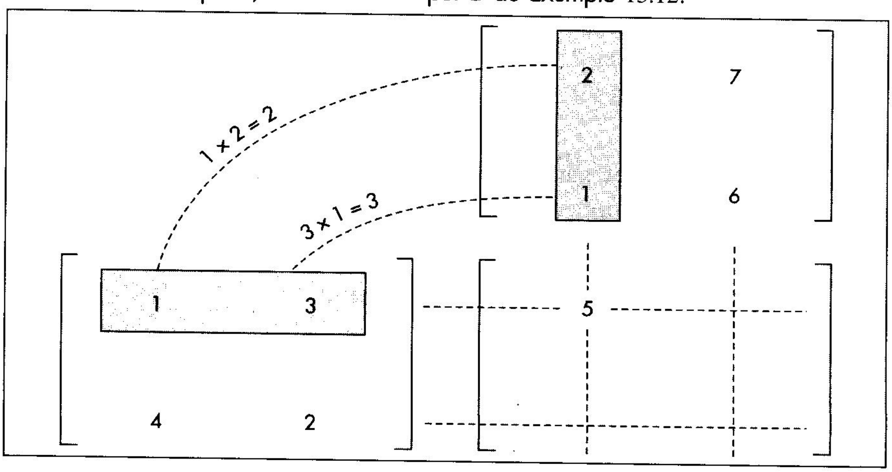
Exemplo 13.12. Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ e calculemos o produto AB.

Primeiro, usamos a disposição

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}. \end{array}$$

O elemento c_{11} da matriz AB é obtido multiplicando-se a 1ª linha de A pela 1ª coluna de B, como se segue (Figura 13.3), e somando-se os produtos obtidos.

Figura 13.3: Multiplicação da matriz A por B do Exemplo 13.12.



Procedendo de forma análoga com os outros elementos, obtemos:

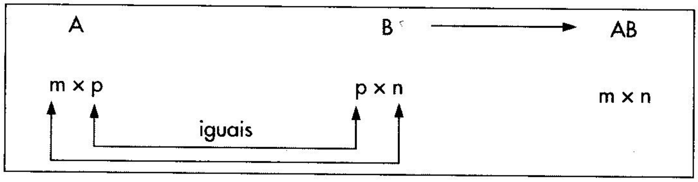
$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & 25 \\ 10 & 40 \end{bmatrix}. \end{array}$$

Portanto, $AB = \begin{bmatrix} 5 & 25 \\ 10 & 40 \end{bmatrix}$.

Observações

a) Notamos que, de acordo com a definição, exigia-se que A fosse do tipo $m \times p$ e B do tipo $p \times n$, ou seja, o produto AB só é definido se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B. Além disso, a matriz AB é do tipo $m \times n$ (Figura 13.4).

Figura 13.4: Relação entre número de linhas e colunas de A e B para AB ser definido.



Exemplo 13.13. Produto AB para matrizes A e B de diversos tipos:

A	B	AB
2×5	5×3	2×3
1×7	7×2	1×2
3×3	3×3	3×3
3×4	3×4	Não existe

b) A multiplicação de matrizes não goza da propriedade comutativa, isto é, nem sempre $AB = BA$. Isso pode ser comprovado pelo exemplo abaixo.

Exemplo 13.14. Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, teremos:

- $AB = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$
- $BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 13 & 8 \end{bmatrix}$
- portanto, $AB \neq BA$.

Propriedades da Multiplicação de Matrizes

Sejam A, B e C matrizes de tipos convenientes de modo que existam os produtos e as somas indicados. São válidas as seguintes propriedades:

M_1) Associativa: $(AB) \cdot C = A \cdot (BC)$.

M_2) Distributiva pela esquerda: $A \cdot (B + C) = AB + AC$.

M_3) Distributiva pela direita: $(B + C) \cdot A = BA + CA$.

M_4) Se k é um número, então: $(kA) \cdot B = A \cdot (kB) = k \cdot (AB)$.

M_5) Se A e B são do tipo $m \times n$, então: $A \cdot I_n = A$ e $I_m \cdot B = B$ em que I_n e I_m são matrizes identidade de ordem m e n.
(A demonstração dessa propriedade encontra-se nos exercícios a seguir.)

M_6) $(AB)^t = B^t \cdot A^t$.

Exercícios

8. Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

calcule

a) $A + B$
b) $B - C$
c) $2A$
d) $A + B + C$
e) $2A + 3B$
f) $A - B - C$
g) $4A + 2B + 3C$
h) $4A - C$
i) $C - 2B - 3A$

9. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) Obtenha: A^t; B^t; $A + B$; $(A + B)^t$; $A^t + B^t$.
b) Verifique que $(A + B)^t = A^t + B^t$.

10. Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

obtenha a matriz X tal que:

a) $X - A = B$
b) $X - A + C = 0$
c) $2X = B + C$

11. Efetue as multiplicações

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

12. Obtenha a matriz $X = [a \quad b]$ tal que

$$X \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = [7 \quad 0]$$

13. Obtenha a matriz X tal que

$$X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = I_2$$

14. Obtenha o número k tal que

$$[1 \quad -1] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = k \cdot [1 \quad -1]$$

15. Calcule a e b sabendo-se que $AB = 0$ (matriz nula), sendo

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 \\ b \end{bmatrix}$$

16. Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

verifique que:

a) $A \cdot I_3 = A$

b) $I_3 \cdot B = B$

c) $I_2 \cdot A = A$

d) $B \cdot I_2 = B$

17. Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$

a) Calcule A^t, B^t, AB, $(AB)^t$ e B^tA^t.

b) Verifique que $(AB)^t = B^tA^t$.

18. Mostre que, se A é uma matriz do tipo $m \times p$, então $A \cdot I_p = A$.

Resolução

Seja a_{ij} um elemento genérico de A, b_{ij} um elemento genérico de I_p e c_{ij} um elemento genérico de $A \cdot I_p$. Temos:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ij}b_{jj} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$$

como $\begin{cases} b_{ij} = 1 & \text{se} \quad i = j \\ b_{ij} = 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$

segue-se que $c_{ij} = a_{ij}$. Como o raciocínio vale para todo i e todo j, concluímos que $A \cdot I_p = A$.

19. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. Calcule

a) A^2

b) A^3

c) A^{25}

d) A^{26}

20. Um investidor em um certo país aplica seu dinheiro em 3 tipos de aplicação: a juros, em imóveis e em ações. Haverá uma eleição. Se ganhar o partido I, o dinheiro a juros renderá 8% ao ano, os imóveis renderão 20% ao ano, e as ações cairão 15% ao ano. Se ganhar o partido II, o dinheiro a juros renderá 8% ao ano, os imóveis cairão 10% ao ano, e as ações subirão 12% ao ano. Seja A a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1{,}20 & 0{,}90 \\ 1{,}08 & 1{,}08 \\ 0{,}85 & 1{,}12 \end{bmatrix}$$

em que cada elemento da 1ª coluna representa o montante de \$ 1,00 aplicado em imóveis, a juros e em ações respectivamente se ganhar o partido I, e a 2ª coluna representa o montante de \$ 1,00 aplicado em imóveis, a juros e em ações respectivamente se ganhar o partido II.

a) Se o investidor aplicar \$ 5.000,00 em imóveis, \$ 8.000,00 a juros e \$ 15.000,00 em ações, qual seu montante caso ganhe o partido I? E se ganhar o partido II? Resolva usando multiplicação de matrizes.

b) Se ele investir de acordo com a matriz $[0 \quad 28.000 \quad 0]$, em que o 1º elemento representa o valor aplicado em imóveis, o 2º, o valor aplicado a juros, e o 3º, em ações, mostre que o montante independe de quem ganhar a eleição.

c) Se ele tomar emprestado a juros (a taxa de 8% ao ano) uma quantia X e aplicar metade em imóveis e metade em ações, ele conseguirá ter um ganho positivo caso ganhe o partido I? E se for o II?

21. Resolva o exercício anterior supondo que haja 3 partidos I, II e III e a matriz A seja dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1{,}05 & 1{,}3 & 1{,}1 \\ 1{,}1 & 1{,}1 & 1{,}1 \\ 0{,}8 & 1{,}15 & 1{,}1 \end{bmatrix}$$

22. Escreva na forma matricial o sistema de equações: $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 4x + 5y = 2 \end{cases}$

Resolução

Fazendo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

o sistema pode ser escrito na forma $AX = B$, ou seja, $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$.

23. Escreva na forma matricial os sistemas:

a) $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 6 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ x - y + 5z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y = 0 \\ x - y + z = -3 \end{cases}$

13.3 Determinantes

Os primeiros estudos sobre os determinantes tiveram origem na China e posteriormente no Japão, com os trabalhos do matemático japonês Seki Kowa (1642–1708). Tais estudos visavam elaborar processos de resolução de sistemas de equações lineares; a teoria se consolidou por volta do século XVIII quando Cramer (Gabriel Cramer, matemático suíço, 1704–1752) publicou um processo de resolução de sistemas de equações com o uso de determinantes, conhecido como Regra de Cramer. Hoje em dia, os determinantes são usados em outras aplicações além da resolução de sistemas de equações (vimos algumas nos capítulos anteriores). Todavia, a Regra de Cramer só é aplicada na prática em sistemas com poucas equações e incógnitas, já que para sistemas com grande número de equações e de incógnitas são usados métodos mais simples e rápidos.

Definição de Determinante — Casos Particulares

Seja M uma matriz quadrada de ordem n. Chamamos de determinante de M (e indicamos por *det M*) um número que podemos obter operando com os elementos da matriz M. Veremos inicialmente como obter tal número em matrizes de ordem 1, 2 e 3, e em seguida daremos a definição geral.

a) Determinante de matriz de ordem 1:

Seja $M = [a_{11}]$. Definimos determinante de M como sendo o próprio número a_{11}, isto é,

$$\det M = a_{11}.$$

Uma outra forma de indicarmos o determinante de uma matriz é escrevendo os elementos de M entre duas barras verticais, uma de cada lado. Assim:

$$\det M = | a_{11} | = a_{11}.$$

b) Determinante de matriz de ordem 2:

Seja $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ uma matriz de ordem 2. Definimos o determinante de M da seguinte forma:

$$\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Isto é, o determinante de uma matriz de ordem 2 é a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

Exemplo 13.15

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 7 = 5;$

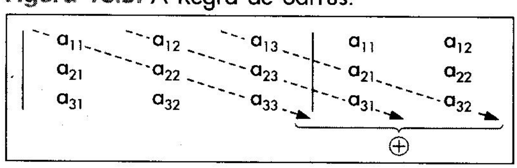
b) $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -15 - (-8) = -7.$

c) Determinante de matriz de ordem 3:

Nesse caso, a definição é extensa e difícil de ser memorizada; contudo, ela pode ser facilitada por meio de uma regra prática conhecida como Regra de Sarrus (devida ao matemático francês J. P. Sarrus, 1789–1861), que passaremos a descrever.

i) Escrevemos a matriz e repetimos à direita as duas primeiras colunas (Figura 13.5):

Figura 13.5: A Regra de Sarrus.



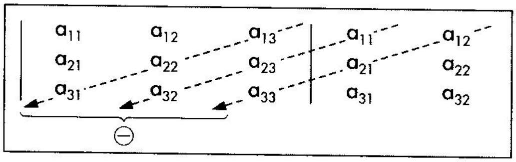
Seguindo as setas da Figura 13.5, obtemos os termos precedidos do sinal +:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}.$$

ii) Seguindo as setas da Figura 13.6, obtemos os termos precedidos do sinal –:

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Figura 13.6: A Regra de Sarrus.

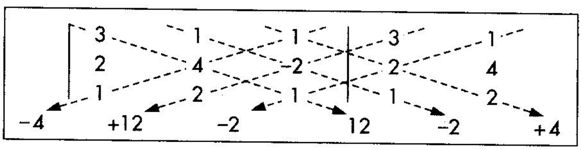


Somando os termos precedidos do sinal + com os precedidos do sinal – obtemos o determinante de ordem 3.

Exemplo 13.16

Calculemos o determinante $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Temos:



Logo, $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 12 - 2 + 12 - 2 + 4 = 20.$

Exercícios

24. Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

25. Resolva as equações

a) $\begin{vmatrix} 2x & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = .6$

b) $x \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 16$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ x & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 0$

Co-fator ou Complemento Algébrico

Até agora, vimos qual a definição de determinante para matrizes de ordem 1, 2 e 3. Para podermos dar uma definição geral válida para matrizes de ordem n, vamos introduzir o conceito de co-fator ou complemento algébrico.

Seja M uma matriz quadrada de ordem n ($n \geqslant 2$) e a_{ij} um elemento dela. Chamamos de co-fator de a_{ij}, e indicamos por A_{ij} o produto de $(-1)^{i+j}$ pelo determinante da matriz que se obtém suprimindo-se a linha i e a coluna j de M.

Exemplo 13.17. Seja a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$. O co-fator de 5 ($a_{21}$) é igual a $(-1)^{2+1}$ vezes o determinante da matriz $M = \begin{bmatrix} \cancel{2} & 4 \\ \cancel{5} & \cancel{3} \end{bmatrix}$. Isto é:

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot |4| = -4.$$

Exemplo 13.18

Seja a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$. O co-fator de 4 ($a_{32}$) é igual a $(-1)^{3+2}$ vezes o determinante da matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & \cancel{1} & 4 \\ 3 & \cancel{2} & 7 \\ \cancel{0} & \cancel{4} & \cancel{6} \end{bmatrix}$. Isto é:

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -1 \cdot (14 - 12) = -2.$$

Observemos que o co-fator de um elemento de uma matriz de ordem n é um determinante de ordem $(n-1)$, multiplicado por 1 ou -1 dependendo da soma dos índices do elemento ser par ou ímpar.

Definição de Determinante por Recorrência

Seja M uma matriz quadrada de ordem n. Definimos determinante de M ($det\ M$) da seguinte forma:

a) Se M for de ordem 1, ou seja, $M = [a_{11}]$, então $det\ M = a_{11}$.

b) Se M for de ordem n ($n \geqslant 2$), o determinante de M ($det\ M$) é a soma dos produtos dos elementos da 1ª coluna pelos respectivos co-fatores.

Exemplo 13.19. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot A_{11} + c \cdot A_{21} = a \cdot (-1)^2 \cdot |d| + c \cdot (-1)^3 \cdot |b| = ad - bc.$

Tal resultado coincide com a definição particular dada anteriormente.

Exemplo 13.20

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & x & m \\ b & y & n \\ c & z & p \end{vmatrix} &= a \cdot A_{11} + b \cdot A_{21} + c \cdot A_{31} \\
&= a \cdot \begin{vmatrix} y & n \\ z & p \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} x & m \\ z & p \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} x & m \\ y & n \end{vmatrix} \\
&= ayp - azn - bxp + bzm + cxn - cmy \\
&= ayp + cxn + bzm - cmy - azn - bxp.
\end{aligned}$$

Tal resultado coincide com o obtido pela Regra de Sarrus.

Exemplo 13.21

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41} = 3 \cdot A_{11}.$$

Como

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2,$$

segue-se que

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 = 6.$$

Exemplo 13.22

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} &= 1 \cdot A_{11} + 2 \cdot A_{21} + 3 \cdot A_{31} + 4 \cdot A_{41} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 20 - 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-48) - 4 \cdot (14) = -176.
\end{aligned}$$

Observações

a) A definição dada chama-se por recorrência, pois ela define precisamente o que é determinante de matriz de ordem 1 e, em seguida, por meio de co-fatores, define determinante de matriz de ordem n, em função de determinantes de matrizes de ordem $(n - 1)$.

Assim, sabendo-se calcular determinantes de matrizes de ordem 1, podem-se calcular determinantes de matrizes de ordem 2; sabendo-se calcular determinantes de matrizes de ordem 2, podem-se calcular determinantes de matrizes de ordem 3, e assim por diante.

b) Notemos que, no determinante do Exemplo 13.22, o cálculo foi trabalhoso em virtude de não existirem zeros na 1ª coluna da matriz. Tal trabalho pode ser atenuado com o importante teorema que veremos a seguir.

Teorema 13.1 (Laplace, Pierre–Simon, matemático francês, 1749–1827)

O determinante de uma matriz de ordem n ($n \geqslant 2$) é igual à soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos respectivos co-fatores.

Exemplo 13.23. Para calcularmos o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 6 & 7 \end{vmatrix},$$

podemos escolher a 3ª linha para o desenvolvimento (é a que tem mais zeros). De acordo com o Teorema de Laplace, o valor do determinante é

$$2 \cdot A_{31} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 0 \\ 6 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot (26) = 52.$$

Portanto, só tivemos de calcular um co-fator em vez de quatro se usássemos a definição.

Exercícios

26. Calcule os co-fatores A_{23} e A_{32} da matriz $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 9 \end{bmatrix}$.

27. Calcule os co-fatores de todos os elementos da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 6 \\ 7 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

28. Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & -1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 6 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

Capítulo 14

Sistemas de Equações Lineares

14.1 Definição e Resolução

Consideremos um produto cuja equação de demanda em certo mercado seja $p + 2x = 110$; suponhamos que a equação de oferta seja $p - x = 20$. Cada uma dessas equações é representada por uma reta. O ponto de equilíbrio de mercado é o ponto de intersecção dessas retas e é dado pela solução do sistema formado pelas duas equações, isto é:

$$\begin{cases} p + 2x = 110 \\ p - x = 20. \end{cases}$$

Observemos que cada uma dessas equações é caracterizada por ter cada termo uma única incógnita elevada a expoente um, e o segundo membro é um termo numérico. Equações com essas características costumam aparecer em diversas aplicações na área de Economia e Administração. Dessa forma, passaremos a estudar, neste item, os sistemas de equações com as referidas características.

Equação Linear

Chamamos de equação linear nas incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ toda equação do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

em que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números quaisquer chamados coeficientes e b é um número chamado termo independente.

Sistema Linear

É um conjunto de equações lineares nas mesmas incógnitas.

Exemplo 14.1

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ x - 2y + z = 1 \\ 3x + 4y - z = 7 \end{cases}$$

é um sistema linear de três equações com três incógnitas.

Exemplo 14.2

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$$

é um sistema linear de duas equações com três incógnitas.

Exemplo 14.3

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - y = 0 \\ 5x + 6y = 11 \end{cases}$$

é um sistema linear de três equações com duas incógnitas.

Chamamos de sistema linear homogêneo aquele cujos termos independentes são todos nulos. É o caso do sistema do Exemplo 14.2.

Solução de um Sistema Linear

Chamamos de solução de um sistema linear toda seqüência de números $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ que, colocados respectivamente nos lugares de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, fazem com que todas as equações fiquem sentenças verdadeiras (isto é, igualdades numéricas).

Exemplo 14.4

No sistema

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

o par ordenado (5, 2) é solução, pois

$$5 + 2 = 7 \text{ é sentença verdadeira}$$

e

$$5 - 2 = 3 \text{ é sentença verdadeira.}$$

Porém o par ordenado (3, 4) não é solução, pois

$$3 + 4 = 7 \text{ é sentença verdadeira}$$

e

$$3 - 4 = 3 \text{ é sentença falsa.}$$

Classificação de um Sistema Linear

Dado um sistema linear, se ele tiver pelo menos uma solução, diremos que é possível; caso contrário, diremos que é impossível (ou que suas equações são incompatíveis).

Se o sistema for possível e tiver uma só solução, chamaremos o sistema de determinado. Se o sistema for possível e tiver mais de uma solução, chamaremos o sistema de indeterminado

Em resumo:

- **Sistema**
  - **Possível**
    - **Determinado**
    - **Indeterminado**
  - **Impossível**

Exemplo 14.5. O sistema

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 2y = 6 \end{cases}$$

é possível e determinado, pois só admite a solução (7, 3).

Exemplo 14.6. O sistema

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

é possível e indeterminado, pois admite as soluções (0, 0), (6, 6), (–10, –10), $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$..., (α, α), em que α é um número qualquer.

Exemplo 14.7. O sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

é claramente impossível, pois não é possível encontrarmos dois números cuja soma seja 1 e 2 ao mesmo tempo.

Exemplo 14.8. O sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 1 \end{cases}$$

é impossível, pois a última equação nunca é satisfeita.

Observação

Todo sistema linear homogêneo é possível, pois admite sempre a solução nula (0, 0, ..., 0).

Exemplo 14.9. O sistema homogêneo

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 0 \\ x + 6y - z = 0 \end{cases}$$

admite a solução (0, 0, 0).

Regra de Cramer

Consideremos o sistema linear de duas equações e duas incógnitas x e y:

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n. \end{cases}$$

Vamos resolver esse sistema pelo método da adição; multiplicamos a 1ª equação por d e a 2ª por $(-b)$. Obteremos:

$$\begin{cases} adx + bdy = md \\ -bcx - bdy = -bn. \end{cases}$$

Somando membro a membro essas equações, temos:

$$x(ad - bc) = md - bn.$$

Supondo $ad - bc \neq 0$, teremos $x = \dfrac{md - bn}{ad - bc}$. Levando esse valor de x na 1ª equação, obteremos para y o valor $y = \dfrac{an - mc}{ad - bc}$.

Lembrando a definição de determinante de ordem 2, podemos escrever que

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad \text{e} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

Assim, observamos que:

- o denominador das frações é o determinante da matriz dos coeficientes $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, simbolicamente indicado por D;
- o numerador da fração do valor de x é o determinante da matriz dos coeficientes substituindo-se a coluna dos coeficientes de x pela coluna dos termos independentes. Esse determinante é indicado por D_x. Assim:

$$D_x = \begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad x = \frac{D_x}{D}, \text{ em que } D \neq 0;$$

- o numerador da fração do valor de y é o determinante da matriz dos coeficientes substituindo-se a coluna dos coeficientes de y pela coluna dos termos independentes. Esse determinante é indicado por D_y. Assim:

$$D_y = \begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad y = \frac{D_y}{D}, \text{ em que } D \neq 0.$$

O resultado que vimos é, na verdade, uma propriedade geral, e é conhecida como Regra de Cramer (em homenagem ao matemático suíço Gabriel Cramer, 1704–1752). Tal regra está estabelecida no seguinte teorema:

Teorema 14.1 (Cramer)

Consideremos um sistema linear de n equações com n incógnitas e seja D o determinante da matriz dos coeficientes. Se $D \neq 0$, então o sistema será determinado, e o valor de cada incógnita é dado por uma fração que tem D no denominador e, no numerador, o determinante da matriz dos coeficientes, substituindo-se a coluna dos coeficientes dessa incógnita pela coluna dos termos independentes do sistema.

Seja o sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ x + 2y + z = 8 \\ 2x + y + z = 7. \end{cases}$$

Temos

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0. \text{ Portanto o sistema é determinado. Além disso:}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 1 & 8 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -8,$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -12.$$

Portanto:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-4}{-4} = 1,$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-8}{-4} = 2,$$

e

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-12}{-4} = 3.$$

Conseqüentemente, a solução (única) do sistema é (1, 2, 3).

Exercícios

1. Resolva os sistemas a seguir pela Regra de Cramer:

a) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 7y = 11 \\ 2x + 8y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = 4 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 3z = 10 \\ x + 4y + 9z = 8 \end{cases}$

2. Para que valores de m o sistema abaixo é determinado?

$$\begin{cases} x + y + 2z = 6 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

Sistemas Escalonados

A Regra de Cramer, embora simples na resolução de sistemas de duas equações com duas incógnitas ou três equações com três incógnitas, não é recomendável a sistemas maiores, dada a complexidade dos cálculos envolvidos (por exemplo, um sistema de quatro equações com quatro incógnitas demandaria o cálculo de cinco determinantes de ordem quatro). O método do escalonamento, que veremos a seguir, é operacionalmente mais simples e é mais fácil de ser programado em computadores.

O método do escalonamento foi desenvolvido pelo matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777–1855) e posteriormente foi aperfeiçoado por Wilhem Jordan (1842–1899).

Consideremos um sistema linear em que, em cada equação, há pelo menos um coeficiente não nulo. Diremos que o sistema está na forma escalonada (ou é escalonado) se o número de coeficientes nulos antes do primeiro coeficiente não nulo aumenta de equação para equação.

Exemplo 14.10. O sistema linear

$$\begin{cases} x + 3y + z = 6 \\ y - z = 7 \\ 2z = 5 \end{cases}$$

está na forma escalonada.

Exemplo 14.11. O sistema linear

$$\begin{cases} 4x - y + z - t + w = 6 \\ z + 2t - w = 0 \\ t + w = 1 \end{cases}$$

está na forma escalonada.