

20. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 9) - \ln(1 - x^2 - y^2)$

21. $f(x, y) = \operatorname{sen}^{-1}(x + y) + \ln(xy)$

22. $f(x, y) = \operatorname{sen}^{-1}(xy)$

23. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x + y)}{x + y} & \text{se } x + y \neq 0 \\ 1 & \text{se } x + y = 0 \end{cases}$

24. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x - y} & \text{se } x \neq y \\ x - y & \text{se } x = y \end{cases}$

Nos Exercícios de 25 a 31, a função é descontínua na origem, pois $f(0, 0)$ não existe. Determine se a descontinuidade é removível ou essencial. Se a descontinuidade for removível, redefina $f(0, 0)$, de tal forma que a nova função seja contínua em $(0, 0)$.

25. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + xy + y^2}$

26. $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$

27. $f(x, y) = (x + y) \operatorname{sen} \frac{x}{x^2 + y^2}$

28. $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$

29. $f(x, y) = \frac{x^3 y^2}{x^6 + y^4}$

30. $f(x, y) = \frac{2y^2 - 3xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

31. $f(x, y) = \frac{x^3 - 4xy^2}{x^2 + y^2}$

32. A função F é definida por

$$F(x, y) = \begin{cases} x^2 - 3y^2 & \text{se } x^2 - 3y^2 \leq 1 \\ 2 & \text{se } x^2 - 3y^2 > 1 \end{cases}$$

Mostre que a região de continuidade de F consiste em todos os pontos de R^2 , exceto aqueles sobre a hipérbole $x^2 - 3y^2 = 1$.

33. A função G é definida por

$$G(x, y) = \begin{cases} x^2 + 4y^2 & \text{se } x^2 + 4y^2 \leq 5 \\ 3 & \text{se } x^2 + 4y^2 > 5 \end{cases}$$

Mostre que a região de continuidade de G consiste em todos os pontos de R^2 , exceto aqueles sobre a elipse $x^2 + 4y^2 = 5$.

34. (a) Dê uma definição de continuidade em um ponto para uma função de três variáveis, similar à Definição 16.3.2. (b) Enuncie teoremas para funções de três variáveis, similares aos Teoremas 16.3.3 e 16.3.7.

Nos Exercícios de 35 a 38, use as definições e teoremas do Exercício 34 para discutir a continuidade da função dada.

35. $f(x, y, z) = \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 1}$

36. $f(x, y, z) = \ln(36 - 4x^2 - y^2 - 9z^2)$

37. $f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{3xyz}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$

38. $f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xz - y^2}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$

16.4 DERIVADAS PARCIAIS

A discussão sobre derivação de uma função de n variáveis com valores reais reduz-se ao caso unidimensional, se tratarmos uma função de n variáveis como uma função de uma variável de cada vez, mantendo fixas as demais variáveis. Isso nos leva ao conceito de *derivada parcial*. Vamos definir primeiro a derivada parcial de uma função de duas variáveis.

16.4.1 DEFINIÇÃO

Seja f uma função de duas variáveis, x e y . A **derivada parcial de f em relação a x** é aquela função, denotada por $D_1 f$, tal que seus valores funcionais em qualquer ponto (x, y) no domínio de f sejam dados por

$$D_1 f(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

se o limite existir. Da mesma forma, a **derivada parcial de f em relação a y** é aquela função, denotada por $D_2 f$, tal que seus valores funcionais em qualquer ponto (x, y) no domínio de f sejam dados por

$$D_2 f(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

se o limite existir.

O processo de encontrar uma derivada parcial é chamado de **derivação parcial**.

$D_1 f$ é lido como “ D sub 1 de f ” (sub é abreviatura de subíndice), e isso denota a função que é a derivada parcial de f em relação à primeira variável.

$D_1f(x, y)$ é lido como “ D sub 1 de f de x e y ”, e isso denota o valor funcional de D_1f no ponto (x, y) . Outras notações para D_1f são f_1, f_x e $\frac{\partial f}{\partial x}$. Outras notações para $D_1f(x, y)$ são $f_1(x, y), f_x(x, y)$ e $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$. Da mesma forma, outras notações para D_2f são f_2, f_y e $\frac{\partial f}{\partial y}$, ou ainda, para $D_2f(x, y), f_2(x, y), f_y(x, y)$ e $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$. Se $z = f(x, y)$, podemos escrever $\frac{\partial z}{\partial x}$ para $D_1f(x, y)$. Uma derivada parcial não pode ser considerada como uma razão entre ∂z e ∂x , pois nenhum desses símbolos têm significado separado. A notação $\frac{dy}{dx}$ pode representar o quociente de duas diferenciais quando y é uma função de uma única variável x , mas não há uma interpretação similar para $\frac{\partial z}{\partial x}$.

EXEMPLO 1 Aplique a Definição 16.4.1 para achar $D_1f(x, y)$ e $D_2f(x, y)$ se

$$f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2$$

Solução

$$\begin{aligned} D_1f(x, y) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x)y + y^2 - (3x^2 - 2xy + y^2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6x \Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2xy - 2y \Delta x + y^2 - 3x^2 + 2xy - y^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6x \Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2y \Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x + 3 \Delta x - 2y) \\ &= 6x - 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2f(x, y) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2x(y + \Delta y) + (y + \Delta y)^2 - (3x^2 - 2xy + y^2)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2xy - 2x \Delta y + y^2 + 2y \Delta y + (\Delta y)^2 - 3x^2 + 2xy - y^2}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-2x \Delta y + 2y \Delta y + (\Delta y)^2}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} (-2x + 2y + \Delta y) \\ &= -2x + 2y \end{aligned}$$

Se (x_0, y_0) for um determinado ponto no domínio de f , então

$$D_1 f(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

se esse limite existir, e

$$D_2 f(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \quad (2)$$

se esse limite existir.

► **ILUSTRAÇÃO 1** Vamos aplicar a fórmula (1) para encontrar $D_1 f(3, -2)$ para a função f do Exemplo 1.

$$\begin{aligned} D_1 f(3, -2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(3 + \Delta x, -2) - f(3, -2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(3 + \Delta x)^2 - 2(3 + \Delta x)(-2) + (-2)^2 - (27 + 12 + 4)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{27 + 18 \Delta x + 3(\Delta x)^2 + 12 + 4 \Delta x + 4 - 43}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (18 + 3 \Delta x + 4) \\ &= 22 \end{aligned}$$

Fórmulas alternativas de (1) e (2) para $D_1 f(x_0, y_0)$ e $D_2 f(x_0, y_0)$ são dadas por

$$D_1 f(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \quad (3)$$

se o limite existir, e

$$D_2 f(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} \quad (4)$$

se o limite existir.

► **ILUSTRAÇÃO 2** Vamos aplicar a fórmula (3) para encontrar $D_1 f(3, -2)$ para a função f do Exemplo 1.

$$\begin{aligned} D_1 f(3, -2) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x, -2) - f(3, -2)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 + 4x + 4 - 43}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 + 4x - 39}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3x + 13)(x - 3)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (3x + 13) \\ &= 22 \end{aligned}$$

► **ILUSTRAÇÃO 3** No Exemplo 1 mostramos que

$$D_1 f(x, y) = 6x - 2y$$

Logo,

$$\begin{aligned} D_1 f(3, -2) &= 18 + 4 \\ &= 22 \end{aligned}$$

Esse resultado está de acordo com o que foi obtido nas Ilustrações 1 e 2. ◀

Comparando a Definição 16.4.1 com a definição de derivada ordinária (3.1.3), vemos que $D_1 f(x, y)$ é a derivada ordinária de f quando f for considerada função de uma variável x (isto é, se y for mantido constante); e $D_2 f(x, y)$ é a derivada ordinária de f , se f for considerada como função de uma variável y (isto é, se x for mantido constante). Assim sendo, os resultados do Exemplo 1 podem ser obtidos mais facilmente, se aplicarmos os teoremas para derivação ordinária, com y considerado constante ao calcularmos $D_1 f(x, y)$ e com x considerado constante, ao calcularmos $D_2 f(x, y)$. O exemplo a seguir ilustrará isso.

EXEMPLO 2 Ache $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ se

$$f(x, y) = 3x^3 - 4x^2y + 3xy^2 + \text{sen } xy^2$$

Solução Tratando f como uma função de x e mantendo y constante, temos

$$f_x(x, y) = 9x^2 - 8xy + 3y^2 + y^2 \cos xy^2$$

Considerando f como uma função de y e mantendo x constante, temos

$$f_y(x, y) = -4x^2 + 6xy + 2xy \cos xy^2$$

EXEMPLO 3 Dada

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Mostre que (a) $f_1(0, y) = -y$ para todo y e (b) $f_2(x, 0) = x$ para todo x .

Solução

(a) Se $y \neq 0$, de (3)

$$\begin{aligned} f_1(0, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \\ &= -\frac{y^3}{y^2} \\ &= -y \end{aligned}$$

Se $y = 0$, de (3)

$$\begin{aligned} f_1(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como $f_1(0, y) = -y$ se $y \neq 0$ e $f_1(0, 0) = 0$, podemos concluir que $f_1(0, y) = -y$ para todo y .

(b) Se $x \neq 0$, de (4)

Se $x = 0$, de (4)

$$\begin{aligned} f_2(x, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y - 0} & f_2(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - 0}{y} & &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & &= \lim_{y \rightarrow 0} 0 \\ &= \frac{x^3}{x^2} & &= 0 \\ &= x \end{aligned}$$

Como $f_2(x, 0) = x$ se $x \neq 0$ e $f_2(0, 0) = 0$, então $f_2(x, 0) = x$ para todo x .

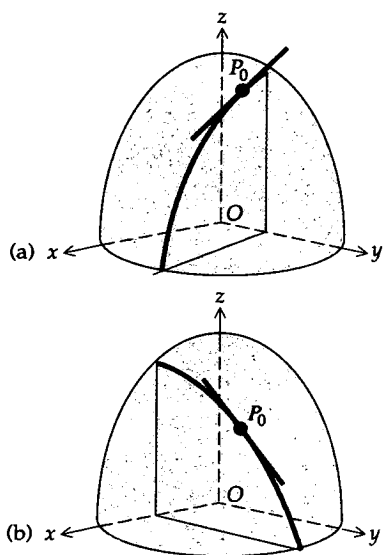


FIGURA 1

Interpretações geométricas das derivadas parciais de uma função de duas variáveis são similares àquelas dadas para funções de uma variável. O gráfico de uma função f de duas variáveis é uma superfície cuja equação é $z = f(x, y)$. Se y for mantida constante (digamos, $y = y_0$), então $z = f(x, y_0)$ será uma equação do traço dessa superfície no plano $y = y_0$. A curva pode ser representada pelas equações

$$y = y_0 \quad \text{e} \quad z = f(x, y) \quad (5)$$

pois ela é a intersecção dessas duas superfícies.

Então, $D_1 f(x_0, y_0)$ é a inclinação da reta tangente à curva dada pelas equações (5) no ponto $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, no plano $y = y_0$. Analogamente, $D_2 f(x_0, y_0)$ representa a inclinação da reta tangente à curva cujas equações são

$$x = x_0 \quad \text{e} \quad z = f(x, y)$$

no ponto P_0 , no plano $x = x_0$. A Figura 1(a) e (b) mostra partes das curvas e das retas tangentes.

EXEMPLO 4 Ache a inclinação da reta tangente à curva de intersecção das superfícies

$$z = \frac{1}{2} \sqrt{24 - x^2 - 2y^2}$$

com o plano $y = 2$, no ponto $(2, 2, \sqrt{3})$.

Solução A inclinação pedida é o valor de $\frac{\partial z}{\partial x}$ no ponto $(2, 2, \sqrt{3})$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{2\sqrt{24 - x^2 - 2y^2}}$$

Assim, em $(2, 2, \sqrt{3})$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{-2}{2\sqrt{12}} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Como toda derivada é uma medida de uma taxa de variação, uma derivada parcial pode ser assim interpretada. Se f for uma função de duas variáveis x e y , a derivada parcial de f em relação a x no ponto $P_0(x_0, y_0)$ dará a taxa de variação instantânea, em P_0 , de $f(x, y)$, por unidade de variação em x (apenas x varia, enquanto y é mantido fixo em y_0). Analogamente, a derivada parcial de f em relação a y em P_0 dará a taxa de variação instantânea, em P_0 , de $f(x, y)$, por unidade de variação em y , com x fixado.

EXEMPLO 5 De acordo com a *lei dos gases ideais* para um gás confinado, se P newtons por metros quadrados for a pressão, V metros cúbicos for o volume e T graus for a temperatura, teremos a fórmula

$$PV = kT \tag{6}$$

onde k é uma constante de proporcionalidade. Suponha que o volume de um gás em certo recipiente seja 100 m^3 e que a temperatura seja 90° e $k = 8$. (a) Ache a taxa de variação de P por unidade de variação de T se V permanece fixo em 100 m^3 . (b) Use o resultado da parte (a) para aproximar a taxa de variação na pressão, se a temperatura for aumentada para 92° . (c) Ache a taxa de variação de V por unidade de variação em P se T permanece fixa em 90° . (d) Suponha que a temperatura seja mantida constante. Use o resultado da parte (c) para encontrar a variação aproximada no volume, necessária para produzir a mesma variação na pressão que foi obtida na parte (b).

Solução Substituindo $V = 100$, $T = 90$ e $k = 8$ na equação (6), obtemos $P = 7,2$.

(a) Resolvendo (6) para P com $k = 8$, obtemos

$$P = \frac{8T}{V}$$

A taxa de variação instantânea de P por variação unitária em T , se V permanece fixo, é $\frac{\partial P}{\partial T}$, e

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{8}{V}$$

Quando $T = 90$ e $V = 100$, $\frac{\partial P}{\partial T} = 0,08$, que é a resposta pedida.

(b) Do resultado da parte (a), quando T for acrescido de 2° (e V permanecer fixo), o aumento aproximado em P será $2(0,08) = 0,16$. Concluímos, então, que se a temperatura for aumentada de 90° para 92° , o aumento na pressão será de aproximadamente $0,16 \text{ N/m}^2$.

(c) Resolvendo (6) para V quando $k = 8$, obtemos

$$V = \frac{8T}{P}$$

A taxa de variação instantânea de V por unidade de variação em P , se T permanece fixa, é $\frac{\partial V}{\partial P}$, e

$$\frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{8T}{P^2}$$

Quando $T = 90$ e $P = 7,2$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial P} &= -\frac{8(90)}{(7,2)^2} \\ &= -\frac{125}{9} \end{aligned}$$

que é a taxa de variação instantânea de V por unidade de variação em P quando $T = 90$ e $P = 7,2$, se T permanecer fixa em 90° .

(d) Se P for acrescido de $0,16$ e T for mantida fixa, então, do resultado da parte (c), a variação em V deve ser de $(0,16)\left(-\frac{125}{9}\right) = -\frac{20}{9}$. Logo, devemos diminuir o volume em $\frac{20}{9}$ m³, se a pressão for aumentada de $7,2$ para $7,36$ N/m².

Vamos estender o conceito de derivada parcial para funções de n variáveis.

16.4.2 DEFINIÇÃO

Seja $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ um ponto em R^n e seja f uma função de n variáveis x_1, x_2, \dots, x_n . Então a derivada parcial de f em relação a x_k é a função, denotada por $D_k f$, tal que seu valor funcional em qualquer ponto P do domínio de f seja dado por

$$\begin{aligned} &D_k f(x_1, x_2, \dots, x_k) \\ &= \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_k} \end{aligned}$$

se esse limite existir.

Em particular, se f for uma função de três variáveis x, y e z , então as derivadas parciais de f serão dadas por

$$D_1 f(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$D_2 f(x, y, z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$D_3 f(x, y, z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

se esses limites existirem.

EXEMPLO 6 Dada $f(x, y, z) = x^2y + yz^2 + z^3$, verificamos que

$$xf_1(x, y, z) + yf_2(x, y, z) + zf_3(x, y, z) = 3f(x, y, z)$$

Solução Mantidos y e z constantes, obtemos

$$f_1(x, y, z) = 2xy$$

Mantidos x e z constantes, obtemos

$$f_2(x, y, z) = x^2 + z^2$$

Mantidos x e y constantes, obtemos

$$f_3(x, y, z) = 2yz + 3z^2$$

Logo,

$$\begin{aligned} xf_1(x, y, z) + yf_2(x, y, z) + zf_3(x, y, z) &= x(2xy) + y(x^2 + z^2) + z(2yz + 3z^2) \\ &= 2x^2y + x^2y + yz^2 + 2yz^2 + 3z^3 \\ &= 3(x^2y + yz^2 + z^3) \\ &= 3f(x, y, z) \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 16.4

Nos Exercícios de 1 a 6, aplique a Definição 16.4.1 para encontrar as derivadas parciais indicadas.

- $f(x, y) = 6x + 3y - 7$; $D_1f(x, y)$
- $f(x, y) = 4x^2 - 3xy$; $D_1f(x, y)$
- $f(x, y) = 3xy + 6x - y^2$; $D_2f(x, y)$
- $f(x, y) = xy^2 - 5y + 6$; $D_2f(x, y)$
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; $f_x(x, y)$
- $f(x, y) = \frac{x + 2y}{x^2 - y}$; $f_y(x, y)$

Nos Exercícios de 7 a 10, aplique a Definição 16.4.2 para encontrar as derivadas parciais indicadas.

- $f(x, y, z) = x^2y - 3xy^2 + 2yz$; $D_2f(x, y, z)$
- $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$; $D_1f(x, y, z)$
- $f(x, y, z, r, t) = xyr + yzt + yrt + zrt$; $f_r(x, y, z, r, t)$
- $f(r, s, t, u, v, w) = 3r^2st + st^2v - 2tuv^2 - tvw + 3uw^2$; $f_v(r, s, t, u, v, w)$
- Dada $f(x, y) = x^2 - 9y^2$, encontre $D_1f(2, 1)$, (a) aplicando a fórmula (1); (b) aplicando a fórmula (3); (c) aplicando a Definição 16.4.1 e então substituindo x e y por 2 e 1, respectivamente.
- Para a função do Exercício 11, ache $D_2f(2, 1)$, (a) aplicando a fórmula (2); (b) aplicando a fórmula (4); (c) aplicando a Definição 16.4.1 e então substituindo x e y por 2 e 1, respectivamente.

Nos Exercícios de 13 a 24, ache a derivada parcial indicada, mantendo todas as variáveis constantes menos uma, e aplicando os teoremas para derivação ordinária.

- $f(x, y) = 4y^3 + \sqrt{x^2 + y^2}$; $D_1f(x, y)$
- $f(x, y) = \frac{x + y}{\sqrt{y^2 - x^2}}$; $D_2f(x, y)$

$$15. f(\theta, \phi) = \sin 3\theta \cos 2\phi; f_\phi(\theta, \phi)$$

$$16. f(r, \theta) = r^2 \cos \theta - 2r \operatorname{tg} \theta; f_\theta(r, \theta)$$

$$17. z = e^{y/x} \ln \frac{x^2}{y}; \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$18. r = e^{-\theta} \cos(\theta + \phi); \frac{\partial r}{\partial \theta}$$

$$19. u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}; \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$20. u = \operatorname{tg}^{-1}(xyzw); \frac{\partial u}{\partial w}$$

$$21. f(x, y, z) = 4xyz + \ln(2xyz); f_3(x, y, z)$$

$$22. f(x, y, z) = e^{xy} \sinh 2z - e^{xy} \cosh 2z; f_z(x, y, z)$$

$$23. f(x, y, z) = e^{xyz} + \operatorname{tg}^{-1} \frac{3xy}{z^2}; f_y(x, y, z)$$

$$24. f(r, \theta, \phi) = 4r^2 \sin \theta + 5e^r \cos \theta \sin \phi - 2 \cos \phi; f_2(r, \theta, \phi)$$

$$25. \text{If } f(r, \theta) = r \operatorname{tg} \theta - r^2 \sin \theta, \text{ ache (a) } f_1(\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi); \text{ (b) } f_2(3, \pi).$$

$$26. \text{If } f(x, y, z) = e^{xy^2} + \ln(y + z), \text{ ache (a) } f_1(3, 0, 17); \text{ (b) } f_2(1, 0, 2); \text{ (c) } f_3(0, 0, 1).$$

Nos Exercícios 27 e 28, ache $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$.

$$27. f(x, y) = \int_x^y \ln \sin t \, dt$$

$$28. f(x, y) = \int_x^y e^{\cos t} \, dt$$

$$29. \text{Dada } u = \sin \frac{r}{t} + \ln \frac{t}{r}. \text{ Verifique } t \frac{\partial u}{\partial t} + r \frac{\partial u}{\partial r} = 0.$$

30. Dada $w = x^2y + y^2z + z^2x$. Prove que

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = (x + y + z)^2$$

$$31. \text{Dada } f(x, y) = \begin{cases} x^3 + y^3 & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ x^2 + y^2 & \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ache (a) $f_1(0, 0)$; (b) $f_2(0, 0)$.

$$32. \text{ Dada } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - xy}{x + y} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ache (a) $f_1(0, y)$ se $y \neq 0$; (b) $f_1(0, 0)$.

33. Para a função do Exercício 32, ache (a) $f_2(x, 0)$ se $x \neq 0$; (b) $f_2(0, 0)$.

34. Ache a inclinação da reta tangente à curva de intersecção da superfície $36x^2 - 9y^2 + 4z^2 + 36 = 0$ com o plano $x = 1$, no ponto $(1, \sqrt{12}, -3)$. Interprete essa inclinação como uma derivada parcial.

35. Ache a inclinação da reta tangente à curva de intersecção da superfície $z = x^2 + y^2$ com o plano $y = 1$, no ponto $(2, 1, 5)$. Faça um esboço. Interprete essa inclinação como uma derivada parcial.

36. Ache as equações da reta tangente à curva de intersecção da superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ com o plano $y = 2$, no ponto $(1, 2, 2)$.

37. A temperatura em qualquer ponto de uma placa plana é T graus e $T = 54 - \frac{2}{3}x^2 - 4y^2$. Se a distância for medida em centímetros, ache a taxa de variação da temperatura em relação à distância movida ao longo da placa nas direções dos eixos positivos x e y , respectivamente, no ponto $(3, 1)$.

38. Use a lei dos gases ideais para um gás confinado (veja o Exemplo 5) e mostre que

$$\frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial V} = -1$$

39. Se V for o valor atual de uma anuidade ordinária de pagamentos iguais de \$ 100,00 ao ano, por t anos, a uma taxa de juros de $100i\%$ ao ano, então

$$V = 100 \left[\frac{1 - (1 + i)^{-t}}{i} \right]$$

(a) Ache a taxa de variação de V por unidade de variação em i , se t permanecer fixo em 8. (b) Use o resultado de (a) para encontrar a variação aproximada no valor atual, se a taxa de juros mudar de 6 para 7% e o tempo permanecer fixo em 8 anos. (c) Ache a taxa de variação instantânea de V por unidade de variação em t , se i permanecer fixo em 0,06. (d) Use o resultado da parte (a) para encontrar a variação aproximada do valor atual, se o tempo for diminuído de 8 para 7 anos e taxa de juros estiver fixa em 6%.

40. Suponha que $10.000x$ da unidade monetária seja o inventário feito numa loja, y seja o número de balconistas na loja, P seja o lucro semanal da loja e

$$P = 3.000 + 240y + 20y(x - 2y) - 10(x - 12)^2$$

onde $15 \leq x \leq 25$ e $5 \leq y \leq 12$. No momento, o inventário é de \$ 180.000,00 e existem 8 balconistas. (a) Ache a taxa de variação instantânea de P por unidade de variação em x , se y permanece fixo em 8. (b) Use o resultado da parte (a) para encontrar a variação aproximada no lucro semanal, se o inventário mudar de \$ 180.000,00 para \$ 200.000,00 e o número de balconistas permanecer fixo em 8. (c) Ache a taxa de variação instantânea de P por unidade de variação em y , se x permanece fixo em 18. (d) Use o resultado da parte (c) para encontrar a variação aproximada no lucro semanal, se o número de balconistas for aumentado de 8 para 10 e o inventário permanecer fixo em \$ 180.000,00.

41. Se S for a área da superfície em metros quadrados do corpo de uma pessoa, então a fórmula que dá um valor aproximado para S será

$$S = 2W^{0,4}H^{0,7}$$

onde W kg e H m são o peso e a altura da pessoa. Se $W = 70$ kg e $H = 1,8$ m, ache $\frac{\partial S}{\partial W}$ e $\frac{\partial S}{\partial H}$ e interprete o resultado.

16.5 DIFERENCIABILIDADE E DIFERENCIAL TOTAL

Definiremos a *diferenciabilidade* de funções de mais de uma variável através de uma equação envolvendo o incremento de uma função. Para motivar essa definição obtemos primeiro uma representação para o incremento de uma função de uma única variável que é similar àquela que irá aparecer em nossa Definição 16.5.2 de diferenciabilidade. Discutimos o incremento de uma função de uma única variável na Secção 3.1 e lembremos que, naquela secção, se f for uma função derivável de x , e $y = f(x)$, então

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

onde Δx e Δy são incrementos de x e y e

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Quando $|\Delta x|$ for pequeno e $\Delta x \neq 0$, $\Delta y/\Delta x$ difere de $f'(x)$ por um número pequeno que depende de Δx e será denotado por ϵ . Então,

$$\epsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \quad \text{se } \Delta x \neq 0$$

onde ϵ é uma função de Δx . Dessa equação obtemos

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + \epsilon \Delta x$$

onde ϵ é uma função de Δx e $\epsilon \rightarrow 0$ se $\Delta x \rightarrow 0$.

Do exposto acima, segue que se a função f for derivável em x_0 , o incremento de f em x_0 , denotado por $\Delta f(x_0)$, será dado por

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \Delta x + \epsilon \Delta x \quad \text{onde} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \epsilon = 0$$

Para funções de duas ou mais variáveis, uma equação correspondente a esta é usada para definir a diferenciabilidade de uma função. Além disso, da definição, determinamos um critério para uma função ser diferenciável em um ponto. Os detalhes serão dados para uma função de duas variáveis e começaremos por definir o *incremento* de tal função.

16.5.1 DEFINIÇÃO

Se f for uma função de duas variáveis x e y , então o **incremento de f** no ponto (x_0, y_0) , denotado por $\Delta f(x_0, y_0)$, é dado por

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

A Figura 1 ilustra essa definição para uma função que é contínua no disco aberto contendo os pontos (x_0, y_0) e $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. A figura mostra parte da superfície $z = f(x, y)$. $\Delta f(x_0, y_0) = \overline{QR}$, onde Q é o ponto $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, f(x_0, y_0))$ e R é o ponto com as coordenadas $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y))$.

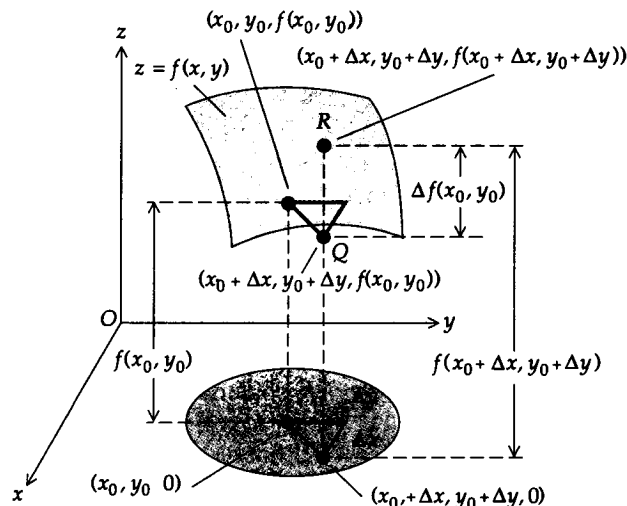


FIGURA 1

► **ILUSTRAÇÃO 1** Para a função f definida por

$$f(x, y) = 3x - xy^2$$

encontramos o incremento de f num ponto (x_0, y_0) qualquer.

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= 3(x_0 + \Delta x) - (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y)^2 - (3x_0 - x_0 y_0^2) \\ &= 3x_0 + 3 \Delta x - x_0 y_0^2 - y_0^2 \Delta x - 2x_0 y_0 \Delta y - 2y_0 \Delta x \Delta y \\ &\quad - x_0 (\Delta y)^2 - \Delta x (\Delta y)^2 - 3x_0 + x_0 y_0^2 \\ &= 3 \Delta x - y_0^2 \Delta x - 2x_0 y_0 \Delta y - 2y_0 \Delta x \Delta y - x_0 (\Delta y)^2 - \Delta x (\Delta y)^2 \end{aligned}$$

16.5.2 DEFINIÇÃO

Se f for uma função de duas variáveis x e y e o incremento de f em (x_0, y_0) puder ser escrito como

$$\Delta f(x_0, y_0) = Df(x_0, y_0)\Delta x + D_2f(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y$$

onde ϵ_1 e ϵ_2 são funções de Δx e Δy , tais que $\epsilon_1 \rightarrow 0$ e $\epsilon_2 \rightarrow 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$, então diremos que f é diferenciável em (x_0, y_0) .

► **ILUSTRAÇÃO 2** Vamos usar a Definição 16.5.2 para provar que a função da Ilustração 1 é diferenciável em todos os pontos de \mathbb{R}^2 . Precisamos mostrar que para todos os pontos (x_0, y_0) em \mathbb{R}^2 podemos encontrar um ϵ_1 e um ϵ_2 , tais que

$$\Delta f(x_0, y_0) - D_1f(x_0, y_0)\Delta x - D_2f(x_0, y_0)\Delta y = \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y$$

e $\epsilon_1 \rightarrow 0$, bem como $\epsilon_2 \rightarrow 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$.

$$\text{Como } f(x, y) = 3x - xy^2,$$

$$D_1f(x_0, y_0) = 3 - y_0^2 \quad \text{e} \quad D_2f(x_0, y_0) = -2x_0y_0$$

Com esses valores e o valor de $\Delta f(x_0, y_0)$ da Ilustração 1,

$$\Delta f(x_0, y_0) - D_1f(x_0, y_0)\Delta x - D_2f(x_0, y_0)\Delta y = -x_0(\Delta y)^2 - 2y_0\Delta x\Delta y - \Delta x(\Delta y)^2$$

O lado direito da igualdade acima pode ser escrito das seguintes formas:

$$[-2y_0\Delta y - (\Delta y)^2]\Delta x + (-x_0\Delta y)\Delta y$$

$$(-2y_0\Delta y)\Delta x + (-\Delta x\Delta y - x_0\Delta y)\Delta y$$

$$[-(\Delta y)^2]\Delta x + (-2y_0\Delta x - x_0\Delta y)\Delta y$$

$$0 \cdot \Delta x + [-2y_0\Delta x - \Delta x\Delta y - x_0\Delta y]\Delta y$$

Assim, há quatro pares possíveis de valores para ϵ_1 e ϵ_2 :

$$\epsilon_1 = -2y_0\Delta y - (\Delta y)^2 \quad \text{e} \quad \epsilon_2 = -x_0\Delta y$$

$$\epsilon_1 = -2y_0\Delta y \quad \text{e} \quad \epsilon_2 = -\Delta x\Delta y - x_0\Delta y$$

$$\epsilon_1 = -(\Delta y)^2 \quad \text{e} \quad \epsilon_2 = -2y_0\Delta x - x_0\Delta y$$

$$\epsilon_1 = 0 \quad \text{e} \quad \epsilon_2 = -2y_0\Delta x - \Delta x\Delta y - x_0\Delta y$$

Para cada par

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \epsilon_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \epsilon_2 = 0$$

Deve ser notado que é necessário encontrar apenas um par de valores para ϵ_1 e ϵ_2 . ◀

16.5.3 TEOREMA

Se uma função f de duas variáveis for diferenciável em um ponto, ela será contínua nesse ponto.

Prova Se f for diferenciável em um ponto (x_0, y_0) , segue, da Definição 16.5.2, que

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = D_1f(x_0, y_0)\Delta x + D_2f(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y$$

onde $\epsilon_1 \rightarrow 0$, bem como $\epsilon_2 \rightarrow 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$. Logo,

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + D_1f(x_0, y_0)\Delta x + D_2f(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y$$

Passando ao limite ambos os membros da igualdade acima quando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$, obtemos

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) \quad (1)$$

Se expressarmos $x_0 + \Delta x = x$ e $y_0 + \Delta y = y$, então “ $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ ” é equivalente a “ $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ ”. Assim, de (1),

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

o que prova a continuidade de f em (x_0, y_0) . ■

O Teorema 16.5.3 estabelece que para uma função de duas variáveis, *diferenciabilidade implica continuidade*. Mas a mera existência de derivadas parciais D_1f e D_2f num ponto não implica diferenciabilidade naquele ponto. O exemplo a seguir ilustra esse fato.

EXEMPLO 1 Dada

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

prove que $D_1f(0, 0)$ e $D_2f(0, 0)$ existem, mas f não é diferenciável em $(0, 0)$.

Solução

$$\begin{aligned} D_1f(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} & D_2f(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} & &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 0 & &= \lim_{y \rightarrow 0} 0 \\ &= 0 & &= 0 \end{aligned}$$

Logo, ambas $D_1f(0, 0)$ e $D_2f(0, 0)$ existem.

No Exemplo 4 da Seção 16.2 demonstramos que para essa função, $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ não existe; logo, f não é contínua em $(0, 0)$. Como f não é contínua em $(0, 0)$, segue, do Teorema 16.5.3, que f não é diferenciável em $(0, 0)$.

O teorema a seguir dá condições de garantir que uma função seja diferenciável em um ponto. É muito mais fácil do que aplicar a Definição 16.5.2. Sua prova aparece na Seção Suplementar 16.8.

16.5.4 TEOREMA

Seja f uma função de duas variáveis x e y . Suponha que D_1f e D_2f existam em um disco aberto $B(P_0; r)$, onde P_0 é o ponto (x_0, y_0) . Então, se D_1f e D_2f forem contínuas em P_0 , f será diferenciável em P_0 .

EXEMPLO 2 Use o Teorema 16.5.4 para provar que a função definida por

$$f(x, y) = x^3 + 3xy - 5y^3$$

é diferenciável em toda parte.

Solução Calculamos as derivadas parciais:

$$D_1 f(x, y) = 3x^2 + 3y \quad D_2 f(x, y) = 3x - 15y^2$$

Como $D_1 f$ e $D_2 f$ são contínuas em toda parte, segue do Teorema 16.5.4 que f é diferenciável em toda parte.

O argumento usado para a função polinomial f do Exemplo 2 pode ser aplicado a qualquer função polinomial. Assim sendo, toda função polinomial é diferenciável em toda parte.

Observe que as condições dadas no Teorema 16.5.4 são suficientes para provar a diferenciabilidade de uma função em um ponto. Mas elas não são condições necessárias. Isto é, uma função pode ser diferenciável em um ponto, mesmo que suas derivadas parciais não sejam contínuas neste ponto. Um exemplo de tal função aparece nos Exercícios de 42 até 45. Uma função satisfazendo as hipóteses do Teorema 16.5.4 será dita **continuamente diferenciável** no ponto P_0 . Assim, a diferenciabilidade contínua em um ponto é uma condição suficiente, mas não necessária, para a diferenciabilidade no ponto.*

EXEMPLO 3 Dada

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

use o Teorema 16.5.4 para provar que f é diferenciável em $(0, 0)$.

Solução Para encontrar $D_1 f$, consideremos dois casos: $(x, y) = (0, 0)$ e $(x, y) \neq (0, 0)$. Se $(x, y) = (0, 0)$, temos

$$\begin{aligned} D_1 f(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Se $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(x, y) = x^2 y^2 / (x^2 + y^2)$. A fim de encontrar $D_1 f(x, y)$, usamos o teorema para a derivada ordinária de um quociente e consideramos y como uma constante.

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= \frac{2xy^2(x^2 + y^2) - 2x(x^2 y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

* **N. do R.:** Observe que para uma função de *uma* variável a existência de derivada e a diferenciabilidade são equivalentes, o que *não* acontece para funções de várias variáveis. Por esse motivo, não é rigorosamente correto usar o termo "diferenciar" no lugar de "derivar" de forma geral, embora isso seja comum.

A função D_1f é, portanto, definida por

$$D_1f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Da mesma forma, obtemos a função D_2f , definida por

$$D_2f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^4y}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ambas, D_1f e D_2f , existem em todo disco aberto, tendo seu centro na origem. Resta mostrar que D_1f e D_2f são contínuas em $(0, 0)$.

Como $D_1f(0, 0) = 0$, D_1f será contínua em $(0, 0)$ se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} D_1f(x, y) = 0$$

Logo, precisamos mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad \text{então} \quad \left| \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \right| < \epsilon \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \right| &= \frac{2|x|y^4}{(x^2 + y^2)^2} \\ &\leq \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}(\sqrt{x^2 + y^2})^4}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= 2\sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Assim, uma escolha adequada para δ é $2\delta = \epsilon$, isto é, $\delta = \frac{1}{2}\epsilon$. Com esse δ temos o seguinte argumento:

$$\begin{aligned} 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad \text{e} \quad \delta = \frac{1}{2}\epsilon \\ \Rightarrow \quad 2\sqrt{x^2 + y^2} < 2\left(\frac{1}{2}\epsilon\right) \\ \Rightarrow \quad \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}(\sqrt{x^2 + y^2})^4}{(x^2 + y^2)^2} < \epsilon \\ \Rightarrow \quad \frac{2|x|y^4}{(x^2 + y^2)^2} < \epsilon \\ \Rightarrow \quad \left| \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \right| < \epsilon \end{aligned}$$

Mostramos, portanto, que (2) está satisfeita. Logo, D_1f é contínua em $(0, 0)$. Da mesma forma, podemos mostrar que D_2f é contínua em $(0, 0)$. Segue então, do Teorema 16.5.4, que f é diferenciável em $(0, 0)$.

A equação na Definição 16.5.2 é

$$\Delta f(x_0, y_0) = D_1f(x_0, y_0) \Delta x + D_2f(x_0, y_0) \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y \quad (3)$$

A expressão envolvendo os dois primeiros termos no segundo membro dessa equação é chamada de *parte principal* de $\Delta f(x_0, y_0)$ ou a *diferencial total* de f em (x_0, y_0) .

16.5.5 DEFINIÇÃO

Se f for uma função de duas variáveis x e y e f for diferenciável em (x, y) então a diferencial total de f será a função df tendo valores funcionais dados por

$$df(x, y, \Delta x, \Delta y) = D_1f(x, y)\Delta x + D_2f(x, y)\Delta y$$

Observe que df é uma função de quatro variáveis $x, y, \Delta x$ e Δy . Se $z = f(x, y)$, por vezes escrevemos dz em lugar de $df(x, y, \Delta x, \Delta y)$, e então escrevemos

$$dz = D_1f(x, y)\Delta x + D_2f(x, y)\Delta y \quad (4)$$

Se, em particular, $f(x, y) = x$, então $z = x$, $D_1f(x, y) = 1$ e $D_2f(x, y) = 0$; assim de (4) temos $dz = \Delta x$. Como $z = x$, para essa função $dx = \Delta x$. De forma análoga, se tomarmos $f(x, y) = y$, então $z = y$, $D_1f(x, y) = 0$ e $D_2f(x, y) = 1$; assim (4) resulta em $dz = \Delta y$. Como $z = y$, então para essa função $dy = \Delta y$. Logo, definimos diferenciais das variáveis independentes como $dx = \Delta x$ e $dy = \Delta y$. Então, (4) pode ser escrita como

$$dz = D_1f(x, y) dx + D_2f(x, y) dy \quad (5)$$

e no ponto (x_0, y_0) ,

$$dz = D_1f(x_0, y_0) dx + D_2f(x_0, y_0) dy \quad (6)$$

Em (3), seja $\Delta z = \Delta f(x_0, y_0)$, $dx = \Delta x$ e $dy = \Delta y$. Então,

$$\Delta z = D_1f(x_0, y_0) dx + D_2f(x_0, y_0) dy + \epsilon_1 dx + \epsilon_2 dy$$

Comparando essa equação e (6), observe que quando dx (isto é, Δx) e dy (isto é, Δy) estão próximos de zero, e por isto ϵ_1 e ϵ_2 estarão também próximos de zero, então dz será uma aproximação de Δz . Antes de dar um exemplo, vamos escrever (5) como a notação $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$, em vez de $D_1f(x, y)$ e $D_2f(x, y)$, respectivamente:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (7)$$

EXEMPLO 4 Um recipiente de metal, fechado, na forma de um cilindro circular reto, tem uma altura interna de 6 cm, um raio interno de 2 cm, e uma espessura de 0,1 cm. Se o custo do metal a ser usado é de \$ 10 por centímetro cúbico, ache por diferenciais o custo aproximado do metal que será empregado na produção do recipiente.

Solução A fórmula do volume de um cilindro circular reto, onde o volume é V cm³, o raio é r cm, e a altura é h cm, é

$$V = \pi r^2 h$$

O volume exato de metal no recipiente é a diferença entre os volumes de dois cilindros circulares retos para os quais $r = 2,1$, $h = 6,2$ e $r = 2$, $h = 6$, respectivamente. ΔV daria o volume exato de metal, mas como somente um valor aproximado foi pedido, vamos calcular dV . De (7),

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial h} dh \\ &= 2\pi r h dr + \pi r^2 dh \end{aligned}$$

Com $r = 2$, $h = 6$, $dr = 0,1$ e $dh = 0,2$, obtemos

$$\begin{aligned} dV &= 2\pi(2)(6)(0,1) + \pi(2)^2(0,2) \\ &= 3,2\pi \end{aligned}$$

Assim, $\Delta V \approx 3,2\pi$ e então há aproximadamente $3,2\pi \text{ cm}^3$ de metal no recipiente. Como o custo do metal é de \$ 10 por centímetro cúbico e $10 \cdot 3,2\pi = 32\pi$ e $32\pi \approx 100,53$, o custo aproximado do metal a ser usado na fabricação do recipiente é de \$ 100,53.

Os conceitos de diferenciabilidade e diferencial total serão aplicados a funções de n variáveis.

16.5.6 DEFINIÇÃO

Se f for uma função de n variáveis x_1, x_2, \dots, x_n , e \bar{P} for o ponto $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$, então o **incremento de f em \bar{P}** será dado por

$$\Delta f(\bar{P}) = f(\bar{x}_1 + \Delta x_1, \bar{x}_2 + \Delta x_2, \dots, \bar{x}_n + \Delta x_n) - f(\bar{P})$$

16.5.7 DEFINIÇÃO

Se f for uma função de n variáveis x_1, x_2, \dots, x_n e o incremento de f no ponto \bar{P} for escrito como

$$\Delta f(\bar{P}) = D_1 f(\bar{P}) \Delta x_1 + D_2 f(\bar{P}) \Delta x_2 + \dots + D_n f(\bar{P}) \Delta x_n + \epsilon_1 \Delta x_1 + \epsilon_2 \Delta x_2 + \dots + \epsilon_n \Delta x_n$$

onde $\epsilon_1 \rightarrow 0$, $\epsilon_2 \rightarrow 0$, ..., $\epsilon_n \rightarrow 0$, quando

$$(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n) \rightarrow (0, 0, \dots, 0)$$

então, f será **diferenciável em \bar{P}** .

Analogamente ao Teorema 16.5.4, pode ser provado que condições suficientes para uma função f de n variáveis ser diferenciável num ponto \bar{P} são que $D_1 f, D_2 f, \dots, D_n f$ existam todas numa bola aberta $B(\bar{P}; r)$ e que $D_1 f, D_2 f, \dots, D_n f$ sejam todas contínuas em \bar{P} . Da mesma forma que para funções de duas variáveis, segue que para funções de n variáveis a diferenciabilidade implica continuidade. No entanto, a existência de derivadas parciais $D_1 f, D_2 f, \dots, D_n f$ em um ponto não implica a diferenciabilidade da função no ponto.

16.5.8 DEFINIÇÃO

Se f for uma função de n variáveis x_1, x_2, \dots, x_n e f for diferenciável em P , então a **diferencial total de f será a função df tendo valores funcionais dados por**

$$df(P, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n) = D_1 f(P) \Delta x_1 + D_2 f(P) \Delta x_2 + \dots + D_n f(P) \Delta x_n$$

Sendo $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, definindo $dx_1 = \Delta x_1, dx_2 = \Delta x_2, \dots, dx_n = \Delta x_n$ e usando a notação $\frac{\partial w}{\partial x_i}$ em vez de $D_i f(P)$, podemos escrever a igualdade da

Definição 16.5.8 como

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial w}{\partial x_n} dx_n \quad (8)$$

EXEMPLO 5 As dimensões de uma caixa são medidas e obtemos 10 cm, 12 cm e 15 cm, e as medidas são corretas até 0,02 cm. Calcule aproximadamente o erro máximo cometido no cálculo do volume da caixa a partir das medidas dadas. Ache também o erro percentual aproximado.

Solução Seja $V \text{ cm}^3$ o volume da caixa cujas dimensões são $x \text{ cm}$, $y \text{ cm}$ e $z \text{ cm}$. Então,

$$V = xyz$$

O valor exato do erro é encontrado de ΔV ; contudo, vamos usar dV como uma aproximação a ΔV . De (8), para três variáveis independentes,

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \\ &= yz dx + xz dy + xy dz \end{aligned}$$

Da informação dada $|\Delta x| \leq 0,02$, $|\Delta y| \leq 0,02$ e $|\Delta z| \leq 0,02$. Para encontrar o erro máximo no volume, tomamos o erro máximo cometido na medida das três dimensões. Assim, tomando $dx = 0,02$, $dy = 0,02$, $dz = 0,02$ e $x = 10$, $y = 12$, $z = 15$, temos

$$\begin{aligned} dV &= (12)(15)(0,02) + (10)(15)(0,02) + (10)(12)(0,02) \\ &= 9 \end{aligned}$$

Logo, $\Delta V \approx 9$, então o máximo erro possível no cálculo do volume com as medidas dadas é de aproximadamente 9 cm^3 .

O erro relativo é encontrado ao dividirmos o erro pelo valor real. Logo, o erro relativo no cálculo do volume a partir das medidas dadas é $\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V}$. Como $\frac{dV}{V} = \frac{9}{1.800}$, $\frac{\Delta V}{V} \approx 0,005$. Assim sendo, o erro percentual aproximado é de $0,5\%$.

EXERCÍCIOS 16.5

- Se $f(x, y) = 3x^2 + 2xy - y^2$, ache:
 - $\Delta f(1,4)$, o incremento de f em $(1,4)$;
 - $\Delta f(1,4)$ quando $\Delta x = 0,03$ e $\Delta y = -0,02$;
 - $df(1, 4, \Delta x, \Delta y)$, a diferencial total de f em $(1,4)$;
 - $df(1, 4, 0,03, -0,02)$.
 - Se $f(x, y) = 2x^2 + 5xy + 4y^2$, ache:
 - $\Delta f(2, -1)$, o incremento de f em $(2, -1)$;
 - $\Delta f(2, -1)$ quando $\Delta x = -0,01$ e $\Delta y = 0,02$;
 - $df(2, -1, \Delta x, \Delta y)$, a diferencial total de f em $(2, -1)$;
 - $df(2, -1, -0,01, 0,02)$.
 - Se $g(x, y) = xye^{xy}$, ache:
 - $\Delta g(2, -4)$, o incremento de g em $(2, -4)$;
 - $\Delta g(2, -4)$ quando $\Delta x = -0,1$ e $\Delta y = 0,2$;
 - $dg(2, -4, \Delta x, \Delta y)$, a diferencial total de g em $(2, -4)$;
 - $dg(2, -4, -0,1, 0,2)$.
 - Se $h(x, y) = (x + y)/(x - y)$, ache:
 - $\Delta h(3,0)$, o incremento de h em $(3, 0)$;
 - $\Delta h(3, 0)$ quando $\Delta x = 0,04$ e $\Delta y = 0,03$;
 - $dh(3, 0, \Delta x, \Delta y)$, a diferencial total de h em $(3, 0)$;
 - $dh(3, 0, 0,04, 0,03)$.
 - Se $F(x, y, z) = xy + \ln(y, z)$, ache:
 - $\Delta F(4, 1, 5)$, o incremento de F em $(4, 1, 5)$;
 - $\Delta F(4, 1, 5)$ quando $\Delta x = 0,02$, $\Delta y = 0,04$ e $\Delta z = -0,03$;
 - $df(4, 1, 5, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$, a diferencial total de F em $(4, 1, 5)$;
 - $dF(4, 1, 5, 0,02, 0,04, -0,03)$.
 - Se $G(x, y, z) = x^2y + 2xyz - z^2$, ache:
 - $\Delta G(-3, 0, 2)$, o incremento de G em $(-3, 0, 2)$;
 - $\Delta G(-3, 0, 2)$ quando $\Delta x = 0,01$, $\Delta y = 0,03$, $\Delta z = 0,01$;
 - $dG(-3, 0, 2, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$, a diferencial total de G em $(-3, 0, 2)$;
 - $dG(-3, 0, 2, 0,01, 0,03, -0,01)$.
- Nos Exercícios de 7 a 14, ache a diferencial total dw .
- $w = 4x^3 - xy^2 + 3y - 7$
 - $w = y \operatorname{tg} x^2 - 2xy$
 - $w = x \cos y - y \operatorname{sen} x$
 - $w = xe^{2y} + e^{-y}$
 - $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$
 - $w = \frac{xyz}{x + y + z}$
 - $w = x \operatorname{tg}^{-1} z - \frac{y^2}{z}$
 - $w = e^{yz} - \cos xz$
- Nos Exercícios de 15 a 18, prove que f é diferenciável em todos os pontos de seu domínio, fazendo o seguinte: (a) ache $\Delta f(x_0, y_0)$ para a função dada; (b) ache um ϵ_1 e um ϵ_2 , tais que a equação (3) seja satisfeita; (c) mostre que ϵ_1 e ϵ_2 , encontrados em (b), tendem a zero quando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$.
- $f(x, y) = x^2y - 2xy$
 - $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$
 - $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$
 - $f(x, y) = \frac{y}{x}$

19. Dada $f(x, y) = \begin{cases} x + y - 2 & \text{se } x = 1 \text{ ou } y = 1 \\ 2 & \text{se } x \neq 1 \text{ e } y \neq 1 \end{cases}$
 Prove que $D_1f(1, 1)$ e $D_2f(1, 1)$ existem, mas f não é diferenciável em $(1, 1)$.

20. Dada $f(x, y) = \begin{cases} 3x^2y^2 & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
 Prove que $D_1f(0, 0)$ e $D_2f(0, 0)$ existem, mas f não é diferenciável em $(0, 0)$.

Nos Exercícios de 21 a 27, use o Teorema 16.5.4 para provar que a função dada é diferenciável em todos os pontos do seu domínio.

21. $g(x, y) = 2x^4 - 3x^2y^2 + x^{-2}y^{-2}$

22. $f(x, y) = \frac{3x - 4y}{x^2 + 8y}$

23. $f(x, y) = 3 \ln xy + 5 \operatorname{sen} x$

24. $g(x, y) = y \ln x - \frac{x}{y}$

25. $h(x, y) = \operatorname{tg}^{-1}(x + y) + \frac{1}{x - y}$

26. $f(x, y) = e^{2x} \operatorname{sen} y + e^{-2x} \cos y$

27. $f(x, y) = ye^{3x} - xe^{-3y}$

28. Dada $f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Essa função é contínua em $(0, 0)$ (veja o Exemplo 1, Seção 16.3). Prove que $D_1f(0, 0)$ e $D_2f(0, 0)$ existem, mas D_1f e D_2f não são contínuas em $(0, 0)$.

29. Dada $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Prove que f é diferenciável em $(0, 0)$, usando o Teorema 16.5.4.

Nos Exercícios de 30 a 32, prove que f é diferenciável em todos os pontos de \mathbb{R}^3 , das seguintes maneiras: (a) ache $\Delta f(x_0, y_0, z_0)$; (b) ache ϵ_1, ϵ_2 e ϵ_3 , tais que a igualdade da Definição 16.5.7 seja satisfeita; (c) mostre que ϵ_1, ϵ_2 e ϵ_3 , encontrados em (b), tendem a zero quando $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ tendem a $(0, 0, 0)$.

30. $f(x, y, z) = 3x + 2y - 4z$ 31. $f(x, y, z) = xy - xz + z^2$

32. $f(x, y, z) = 2x^2z - 3yz^2$

33. Dada $f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz^2}{x^4 + y^4 + z^4} & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$

(a) Mostre que $D_1f(0, 0, 0)$, $D_2f(0, 0, 0)$ e $D_3f(0, 0, 0)$ existem; (b) usando o fato de que diferenciabilidade implica continuidade, prove que f não é diferenciável em $(0, 0, 0)$.

34. Dada $f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz^2}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$

Prove que f é diferenciável em $(0, 0, 0)$.

35. Um recipiente fechado na forma de um sólido retangular deve ter um comprimento interno de 8 m, uma largura interna de 5 m, uma altura de 4 m e uma espessura de 4 cm. Use diferenciais para aproximar a quantidade de material necessário para construir o recipiente.

36. Use a diferencial total para encontrar aproximadamente o erro máximo no cálculo da área do triângulo retângulo a partir dos comprimentos dos catetos que medem 6 e 8 cm, respectivamente, com um erro possível de 0,1 cm para cada medida. Ache também o erro percentual aproximado.

37. Usando a diferencial total, ache o erro máximo aproximado no cálculo do comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo a partir das medidas do Exercício 36. Ache também o erro percentual aproximado.

38. Se a lei dos gases ideais (veja o Exemplo 5, Seção 16.4) for usada para encontrar P quando T e V são dados, mas há um erro de 0,3% na medida de T e um erro de 0,8% na medida de V , ache, aproximadamente, o erro percentual máximo em P .

39. A gravidade específica s de um objeto é dada pela fórmula

$$s = \frac{A}{A - W}$$

onde A é o número de quilogramas no peso do objeto no ar e W é o número de quilogramas no peso do objeto na água. Se o peso de um objeto no ar é de 20 quilogramas com um erro possível de 0,01 quilogramas e seu peso na água é de 12 quilogramas, com um erro possível de 0,02 quilogramas, ache, aproximadamente, o erro máximo possível no cálculo de s a partir dessas medidas. Ache também o erro máximo relativo possível.

40. Uma caixa de madeira é feita de tábuas que têm $\frac{2}{3}$ cm de espessura. O comprimento interno é de 0,6 m, a largura interna é de 0,3 m, a profundidade interna é de 0,4 m e a caixa não tem tampa. Use a diferencial total para encontrar a quantidade aproximada de madeira a ser usada na caixa.

41. Uma companhia foi contratada para fabricar 10.000 caixotes de madeira, fechados, tendo dimensões de 3 m, 4 m e 5 m. O custo da madeira a ser usada é de \$ 3 por metro quadrado. Se a máquina usada para cortar os pedaços de madeira tiver um erro possível de 0,5 cm em cada dimensão, ache, aproximadamente, usando a diferencial total, o erro máximo possível no custo estimado da madeira.

Nos Exercícios de 42 a 45, mostramos que uma função pode ser diferenciável em um ponto, mesmo que não seja continuamente diferenciável nele. Assim, as condições do Teorema 16.5.4 são suficientes, mas não necessárias, para a diferenciabilidade. A função f nesses exercícios é definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

42. Ache $\Delta f(0, 0)$.

43. Ache $D_1f(x, y)$ e $D_2f(x, y)$.

44. Prove que f é diferenciável em $(0, 0)$, usando a Definição 16.5.2 e os resultados dos Exercícios 42 e 43.

45. Prove que D_1f e D_2f não são contínuas em $(0, 0)$.

16.6 A REGRA DA CADEIA

Lembre-se de que com a notação de Leibniz, a regra da cadeia para uma função de uma única variável é a seguinte: se y for uma função de u e $\frac{dy}{du}$ existir, e u for uma função de x e $\frac{du}{dx}$ existir, então y será uma função de x e $\frac{dy}{dx}$ existe, sendo dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Vamos considerar a regra da cadeia para uma função de duas variáveis, onde cada uma delas também é função de duas variáveis.

16.6.1 TEOREMA A Regra da Cadeia

Se u for uma função diferenciável de x e y , definida por $u = f(x, y)$, onde $x = F(r, s)$, $y = G(r, s)$ e $\frac{\partial x}{\partial r}$, $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial r}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$ todas existirem, então u será uma função de r e s e

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

Prova Vamos provar a regra da cadeia para $\frac{\partial u}{\partial r}$. A demonstração de $\frac{\partial u}{\partial s}$ é análoga.

Se s for mantido fixo e r variar por uma quantidade Δr , então x variará por uma quantidade Δx e y variará por uma quantidade Δy . Assim,

$$\Delta x = F(r + \Delta r, s) - F(r, s) \quad (1)$$

e

$$\Delta y = G(r + \Delta r, s) - G(r, s) \quad (2)$$

Como f é diferenciável,

$$\Delta f(x, y) = D_1 f(x, y) \Delta x + D_2 f(x, y) \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y \quad (3)$$

onde ϵ_1 e ϵ_2 tendem a zero quando $(\Delta x, \Delta y)$ aproxima-se de $(0, 0)$. Além disso, vamos exigir que $\epsilon_1 = 0$ e $\epsilon_2 = 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) = (0, 0)$. Faremos essa exigência de tal forma que ϵ_1 e ϵ_2 , sendo funções de Δx e Δy , serão contínuas em $(\Delta x, \Delta y) = (0, 0)$.

Se em (3) substituirmos $\Delta f(x, y)$ por Δu , $D_1 f(x, y)$ por $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $D_2 f(x, y)$ por $\frac{\partial u}{\partial y}$ e dividirmos ambos os membros por Δr ($\Delta r \neq 0$), obteremos

$$\frac{\Delta u}{\Delta r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta r} + \epsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta r} + \epsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta r}$$

Tomando o limite de ambos os membros quando Δr tende a zero, obtemos

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta r} = \frac{\partial u}{\partial x} \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta r} + \frac{\partial u}{\partial y} \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta r} + \left(\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \epsilon_1\right) \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta r} + \left(\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \epsilon_2\right) \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta r} \quad (4)$$

Como u é uma função de x e y e ambas são funções de r e de s , u será uma função de r e de s . Como s é mantido fixo enquanto r varia por uma quantidade Δr ,

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta r} &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{u(r + \Delta r, s) - u(r, s)}{\Delta r} \\ &= \frac{\partial u}{\partial r}\end{aligned}\quad (5)$$

Também

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta r} = \frac{\partial x}{\partial r} \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta r} = \frac{\partial y}{\partial r}\quad (6)$$

Como $\frac{\partial x}{\partial r}$ e $\frac{\partial y}{\partial r}$ existem, F e G são, cada uma, contínuas em relação à variável r . (*Nota:* A existência de derivadas parciais não implica continuidade em relação a todas as variáveis simultaneamente, como vimos na seção anterior, mas, da mesma forma que com funções de uma única variável, ela implica a continuidade da função em relação a cada variável separadamente.) Assim, de (1),

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \Delta x &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} [F(r + \Delta r, s) - F(r, s)] \\ &= F(r, s) - F(r, s) \\ &= 0\end{aligned}$$

e de (2),

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \Delta y &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} [G(r + \Delta r, s) - G(r, s)] \\ &= G(r, s) - G(r, s) \\ &= 0\end{aligned}$$

Assim, quando Δr tende a zero, ambos Δx e Δy tendem a zero. E como ambos ϵ_1 e ϵ_2 tendem a zero quando $(\Delta x, \Delta y)$ tende a $(0, 0)$, podemos concluir que

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \epsilon_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \epsilon_2 = 0\quad (7)$$

Ainda é possível que para certos valores de Δr , $\Delta x = 0$ e $\Delta y = 0$. Como exigimos em tal caso que $\epsilon_1 = 0$ e $\epsilon_2 = 0$, os limites em (7) ainda são zero. Substituindo (5), (6) e (7) em (4), obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$

como queríamos demonstrar. ■

EXEMPLO 1 Dada

$$u = \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad x = re^s \quad y = re^{-s}$$

encontre $\frac{\partial u}{\partial r}$ e $\frac{\partial u}{\partial s}$.

Solução

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{x}{x^2 + y^2} & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{\partial x}{\partial r} &= e^s \\ \frac{\partial x}{\partial s} &= re^s & \frac{\partial y}{\partial r} &= e^{-s} & \frac{\partial y}{\partial s} &= -re^{-s} \end{aligned}$$

Da regra da cadeia obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{x}{x^2 + y^2} (e^s) + \frac{y}{x^2 + y^2} (e^{-s}) & \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{x}{x^2 + y^2} (re^s) + \frac{y}{x^2 + y^2} (-re^{-s}) \\ &= \frac{xe^s + ye^{-s}}{x^2 + y^2} & &= \frac{r(xe^s - ye^{-s})}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Conforme mencionado antes, os símbolos $\frac{\partial u}{\partial r}$, $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ etc., não devem ser considerados como frações. Os símbolos ∂u , ∂x etc., não têm significado sozinhos. Para funções de uma variável, a regra da cadeia é facilmente lembrada, se considerarmos uma derivada ordinária como o quociente de duas diferenciais; porém, não há nenhuma interpretação similar para derivadas parciais.

Outra dificuldade da notação surge quando consideramos u como uma função de x e y e então, como uma função de r e s . Se $u = f(x, y)$, $x = F(r, s)$ e $y = G(r, s)$, então $u = f(F(r, s), G(r, s))$. (É incorreto escrever $u = f(r, s)$ para denotar a função composta.)

► ILUSTRAÇÃO 1 No Exemplo 1,

$$\begin{aligned} u &= f(x, y) & x &= F(r, s) & y &= G(r, s) \\ &= \ln \sqrt{x^2 + y^2} & &= re^s & &= re^{-s} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} u &= f(F(r, s), G(r, s)) \\ &= \ln \sqrt{r^2 e^{2s} + r^2 e^{-2s}} \end{aligned}$$

Observe que

$$f(r, s) = \ln \sqrt{r^2 + s^2}$$

Assim, $f(r, s) \neq u$. ◀

Se expressarmos $f(F(r, s), G(r, s)) = h(r, s)$, então as equações do Teorema 16.6.1 podem ser escritas respectivamente como

$$h_1(r, s) = f_1(x, y)F_1(r, s) + f_2(x, y)G_1(r, s)$$

$$h_2(r, s) = f_1(x, y)F_2(r, s) + f_2(x, y)G_2(r, s)$$

No enunciado do Teorema 16.6.1, as variáveis independentes são r e s , enquanto que u é a variável dependente. As variáveis x e y podem ser chamadas de variáveis intermediárias. Vamos estender a regra da cadeia a n variáveis intermediárias e m variáveis independentes.

16.6.2 TEOREMA
A Regra da Cadeia Generalizada

Suponha que u seja uma função diferenciável de n variáveis x_1, x_2, \dots, x_n e cada uma dessas variáveis por sua vez seja uma função de m variáveis y_1, y_2, \dots, y_m .

Suponha ainda que cada uma das derivadas parciais $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$) exista. Então, u é uma função de y_1, y_2, \dots, y_m , e

$$\frac{\partial u}{\partial y_1} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\right) + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\left(\frac{\partial x_n}{\partial y_1}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_2}\right) + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\left(\frac{\partial x_n}{\partial y_2}\right)$$

⋮
⋮
⋮

$$\frac{\partial u}{\partial y_m} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_m}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_m}\right) + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\left(\frac{\partial x_n}{\partial y_m}\right)$$

A demonstração é uma extensão da prova do Teorema 16.6.1.

Observe que na regra da cadeia generalizada há tantos termos no segundo membro de cada equação quantos forem as variáveis intermediárias.

EXEMPLO 2 Dada

$$u = xy + xz + yz \quad x = r \quad y = r \cos t \quad z = r \sin t$$

ache $\frac{\partial u}{\partial r}$ e $\frac{\partial u}{\partial t}$.

Solução Da regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right) \\ &= (y + z)(1) + (x + z)(\cos t) + (x + y)(\sin t) \\ &= y + z + x \cos t + z \cos t + x \sin t + y \sin t \\ &= r \cos t + r \sin t + r \cos t + (r \sin t)(\cos t) + r \sin t + (r \cos t)(\sin t) \\ &= 2r(\cos t + \sin t) + r(2 \sin t \cos t) \\ &= 2r(\cos t + \sin t) + r \sin 2t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) \\ &= (y + z)(0) + (x + z)(-r \sin t) + (x + y)(r \cos t) \\ &= (r + r \sin t)(-r \sin t) + (r + r \cos t)(r \cos t) \\ &= -r^2 \sin t - r^2 \sin^2 t + r^2 \cos t + r^2 \cos^2 t \\ &= r^2(\cos t - \sin t) + r^2(\cos^2 t - \sin^2 t) \\ &= r^2(\cos t - \sin t) + r^2 \cos 2t \end{aligned}$$

Suponha agora que u seja uma função diferencial de duas variáveis x e y , ambas funções diferenciáveis de uma única variável t ; e assim, em vez da deri-

vada parcial de u em relação a t temos a derivada ordinária de u em relação a t , que é dada por

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) \quad (8)$$

Chamamos $\frac{du}{dt}$, dada por (8), de **derivada total** de u em relação a t .

Se u for uma função diferenciável das n variáveis x_1, x_2, \dots, x_n e cada um dos x_i for uma função diferenciável de uma única variável t , então u será uma função de t e a derivada total de u em relação a t será dada por

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\left(\frac{dx_1}{dt}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\left(\frac{dx_2}{dt}\right) + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\left(\frac{dx_n}{dt}\right)$$

EXEMPLO 3 Dada

$$u = x^2 + 2xy + y^2 \quad x = t \cos t \quad y = t \sin t$$

ache $\frac{du}{dt}$ por dois métodos: (a) Usando a regra da cadeia; (b) expressando u em termos de t antes da diferenciação.

Solução

(a) Calculamos as derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x + 2y & \frac{\partial u}{\partial y} &= 2x + 2y \\ \frac{dx}{dt} &= \cos t - t \sin t & \frac{dy}{dt} &= \sin t + t \cos t \end{aligned}$$

Assim, de (8),

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= (2x + 2y)(\cos t - t \sin t) + (2x + 2y)(\sin t + t \cos t) \\ &= 2(x + y)(\cos t - t \sin t + \sin t + t \cos t) \\ &= 2(t \cos t + t \sin t)(\cos t - t \sin t + \sin t + t \cos t) \\ &= 2t(\cos^2 t - t \sin t \cos t + \sin t \cos t + t \cos^2 t + \sin t \cos t - \\ &\quad - t \sin^2 t + \sin^2 t + t \sin t \cos t) \\ &= 2t[1 + 2 \sin t \cos t + t(\cos^2 t - \sin^2 t)] \\ &= 2t(1 + \sin 2t + t \cos 2t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } u &= (t \cos t)^2 + 2(t \cos t)(t \sin t) + (t \sin t)^2 \\ &= t^2 \cos^2 t + t^2(2 \sin t \cos t) + t^2 \sin^2 t \\ &= t^2 + t^2 \sin 2t \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{du}{dt} = 2t + 2t \sin 2t + 2t^2 \cos 2t$$

EXEMPLO 4 Se f for uma função diferenciável e a e b forem constantes, prove que $z = f(\frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{3}ay^3)$ satisfaz a equação parcial

$$ay^2 \frac{\partial z}{\partial x} + bx \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Solução Seja $u = \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{3}ay^3$. Queremos mostrar que $z(u)$ satisfaz a equação dada. Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \left(\frac{dz}{du}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) & \frac{\partial z}{\partial y} &= \left(\frac{dz}{du}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ &= f'(u)(bx) & &= f'(u)(-ay^2) \end{aligned}$$

Logo,

$$ay^2 \frac{\partial z}{\partial x} + bx \frac{\partial z}{\partial y} = ay^2[f'(u)(bx)] + bx[f'(u)(-ay^2)] = 0$$

como queríamos provar.

EXEMPLO 5 Use a lei do gás ideal (veja o Exemplo 5, Seção 16.4) com $k = 10$ para encontrar a taxa segundo a qual a temperatura está variando no instante em que o volume do gás é 120 m^3 e o gás está sob uma pressão de 8 N/m^2 se o volume está aumentando a uma taxa de $2 \text{ m}^3/\text{s}$ e a pressão está decrescendo a uma taxa de $0,1 \text{ N/m}^2$ por segundo.

Solução Seja t s o tempo decorrido desde que o volume do gás começou a crescer, T graus a temperatura, $P \text{ N/m}^2$ a pressão e $V \text{ m}^3$ o volume do gás medidos no instante t s. Da lei dos gases ideais,

$$T = \frac{PV}{10} = 0,1 PV$$

No instante dado, $P = 8$, $V = 120$, $\frac{dP}{dt} = -0,1$ e $\frac{dV}{dt} = 2$. Da regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial P} \frac{dP}{dt} + \frac{\partial T}{\partial V} \frac{dV}{dt} \\ &= 0,1V \frac{dP}{dt} + 0,1P \frac{dV}{dt} \\ &= 0,1(120)(-0,1) + 0,1(8)(2) \\ &= 0,4 \end{aligned}$$

Logo, a temperatura está aumentando a uma taxa de $0,4^\circ$ por segundo, no instante dado.

EXERCÍCIOS 16.6

Nos Exercícios de 1 a 6, ache a derivada parcial indicada por dois métodos: (a) usando a regra da cadeia; (b) fazendo as substituições de x e y antes da diferenciação.

$$1. u = x^2 - y^2; x = 3r - s; y = r + 2s; \frac{\partial u}{\partial r}; \frac{\partial u}{\partial s}$$

$$2. u = 3x - 4y^2; x = 5pq; y = 3p^2 - 2q; \frac{\partial u}{\partial p}; \frac{\partial u}{\partial q}$$

$$3. u = 3x^2 + xy - 2y^2 + 3x - y; x = 2r - 3s; y = r + s; \frac{\partial u}{\partial r}; \frac{\partial u}{\partial s}$$

$$4. u = x^2 + y^2; x = \cosh r \cos t; y = \sinh r \sin t; \frac{\partial u}{\partial r}; \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$5. u = e^{y/x}; x = 2r \cos t; y = 4r \sin t; \frac{\partial u}{\partial r}; \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$6. V = \pi x^2 y; x = \cos z \sin t; y = z^2 e^t; \frac{\partial V}{\partial z}; \frac{\partial V}{\partial t}$$

Nos Exercícios de 7 a 14, ache a derivada parcial indicada, usando a regra da cadeia.

$$7. u = x^2 + xy; x = r^2 + s^2; y = 3r - 2s; \frac{\partial u}{\partial r}; \frac{\partial u}{\partial s}$$

$$8. u = xy + xz + yz; x = rs; y = r^2 - s^2; z = (r - s)^2; \frac{\partial u}{\partial r}; \frac{\partial u}{\partial s}$$

$$9. u = \sin^{-1}(3x + y); x = r^2 e^s; y = \sin rs; \frac{\partial u}{\partial r}; \frac{\partial u}{\partial s}$$

$$10. u = \sin(xy); x = 2ze^t; y = t^2 e^{-z}; \frac{\partial u}{\partial t}; \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$11. u = \cosh \frac{y}{x}; x = 3r^2 s; y = 6se^r; \frac{\partial u}{\partial r}; \frac{\partial u}{\partial s}$$

$$12. u = xe^{-y}; x = \operatorname{tg}^{-1}(rst); y = \ln(3rs + 5st); \frac{\partial u}{\partial r}; \frac{\partial u}{\partial s}; \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$13. u = x^2 + y^2 + z^2; x = r \sin \phi \cos \theta; y = r \sin \phi \sin \theta; z = r \cos \phi; \frac{\partial u}{\partial r}; \frac{\partial u}{\partial \phi}; \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$14. u = x^2 yz; x = \frac{r}{s}; y = re^s; z = re^{-s}; \frac{\partial u}{\partial r}; \frac{\partial u}{\partial s}$$

Nos Exercícios de 15 a 18, ache a derivada total $\frac{du}{dt}$ por dois métodos: (a) usando a regra da cadeia; (b) fazendo as substituições de x , y e z antes da diferenciação.

$$15. u = ye^x + xe^y; x = \cos t; y = \sin t$$

$$16. u = \ln xy + y^2; x = e^t; y = e^{-t}$$

$$17. u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; x = \operatorname{tg} t; y = \cos t; z = \sin t; 0 < t < \frac{1}{2}\pi$$

$$18. u = \frac{t + e^x}{y - e^t}; x = 3 \sin t; y = \ln t$$

Nos Exercícios de 19 a 22, ache a derivada total $\frac{du}{dt}$ usando a regra da cadeia; não expresse u como função de t antes da diferenciação.

$$19. u = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right); x = \ln t; y = e^t$$

$$20. u = xy + xz + yz; x = t \cos t; y = t \sin t; z = t$$

$$21. u = \frac{x + t}{y + t}; x = \ln t; y = \ln \frac{1}{t}$$

$$22. u = \ln(x^2 + y^2 + t^2); x = t \sin t; y = \cos t$$

Nos Exercícios de 23 a 26, suponha que a equação dada defina z como uma função de x e y . Derive implicitamente para encontrar $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$23. 3x^2 + y^2 + z^2 - 3xy + 4xz - 15 = 0$$

$$24. z = (x^2 + y^2) \operatorname{sen} xz$$

$$25. ye^{xyz} \cos 3xz = 5$$

$$26. ze^{yz} + 2xe^{xz} - 4e^{xy} = 3$$

27. Se f for uma função diferenciável da variável u , seja $u = bx - ay$ e prove que $z = f(bx - ay)$ satisfaz a equação $a\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$, onde a e b são constantes.

28. Se f for uma função diferenciável de duas variáveis u e v , seja $u = x - y$ e $v = y - x$; prove que

$$z = f(x - y, y - x) \text{ satisfaz a equação } \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

29. Num dado instante, o comprimento de um cateto de um triângulo retângulo é 10 cm e ele está crescendo a uma taxa de 1 cm/min e o comprimento do outro cateto é 12 cm o qual está decrescendo a uma taxa de 2 cm/min. Ache a taxa de variação da medida do ângulo agudo oposto ao lado de 12 cm de comprimento, num dado instante.

30. A altura de um cone circular reto está aumentando a uma taxa de 40 cm/min e o raio decrescendo a uma taxa de 15 cm/min. Ache a taxa de variação do volume no instante em que a altura é 200 cm e o raio é 60 cm.

31. A altura de um cilindro circular reto está decrescendo a uma taxa de 10 cm/min e o raio crescendo a uma taxa de 4 cm/min. Ache a taxa de variação do volume no instante em que a altura é 50 cm e o raio é 16 cm.

32. Água está fluindo para dentro de um tanque com a forma de um cilindro circular reto, a uma taxa de $\frac{4}{5}\pi$ m³/min. O tanque está aumentando de tal forma que se mantenha cilíndrico, com o raio crescendo a uma taxa de 0,2 cm/min. Quão rápido está se elevando a superfície da água quando o raio for 2 m e o volume de água no tanque for 20 π m³?

33. Uma quantidade de gás obedece à lei dos gases ideais (veja o Exemplo 5, Secção 16.4) com $k = 1,2$, e o gás encontra-se em um recipiente que está sendo aquecido a uma taxa de 3° por segundo. Se em um dado instante quando a temperatura

é 300° , a pressão é 6 N/m^2 e descreve a uma taxa de $0,1 \text{ N/m}^2$ por segundo, ache a taxa de variação do volume naquele instante.

34. Uma parede vertical faz um ângulo de medida $\frac{2}{3}\pi$ com o solo. Uma escada de 6 m está encostada na parede e sua ponta escorrega pela parede a uma taxa de 1 m/s . Quão rápido está variando a área do triângulo formado pela escada, a parede e o chão quando a escada faz com o chão um ângulo de $\frac{1}{6}\pi \text{ rad}$?

35. Suponha que f seja uma função diferenciável de x e y e $u = f(x, y)$. Então, se $x = \cosh v \cos w$ e $y = \sinh v \sin w$, expresse $\frac{\partial u}{\partial v}$ e $\frac{\partial u}{\partial w}$ em termos de $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$.

36. Suponha que f seja uma função diferenciável de x , y e z e $u = f(x, y, z)$. Então, se $x = r \sin \phi \cos \theta$, $y = r \sin \phi \sin \theta$ e $z = r \cos \phi$, expresse $\frac{\partial u}{\partial r}$, $\frac{\partial u}{\partial \phi}$ e $\frac{\partial u}{\partial \theta}$ em termos de $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial z}$.

37. Se $u = f(x, y)$ e $v = g(x, y)$, então as equações

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

são chamadas de equações de *Cauchy-Riemann*. Mostre que as equações de Cauchy-Riemann estão satisfeitas se

$$u = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \text{ e } v = \text{tg}^{-1} \frac{y}{x}.$$

38. Suponha que f e g sejam diferenciáveis de x e y , e $u = f(x, y)$ e $v = g(x, y)$. Mostre que as equações de Cauchy-Riemann (veja o Exercício 37) estão satisfeitas e se $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, então

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \text{ e } \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

39. Se f for uma função diferenciável de x e y e $u = f(x, y)$, $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, mostre que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r}$$

16.7 DERIVADAS PARCIAIS DE ORDEM SUPERIOR

Se f for uma função de duas variáveis, então em geral D_1f e D_2f também serão funções de duas variáveis. E se as derivadas parciais dessas funções existirem, elas serão chamadas de derivadas parciais segundas de f .* Em contraste, D_1f e D_2f são chamadas de derivadas parciais primeiras de f . Existem quatro derivadas parciais segundas de uma função de duas variáveis. Se f for uma função de duas variáveis x e y , as notações

$$D_2(D_1f) \quad D_{12}f \quad f_{12} \quad f_{xy} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

todas denotarão a derivada segunda de f , obtida com o cálculo da derivada parcial primeira de f em relação a x e então derivando parcialmente o resultado em relação a y . Essa derivada parcial segunda é definida por

$$f_{12}(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f_1(x, y + \Delta y) - f_1(x, y)}{\Delta y} \quad (1)$$

se esse limite existir. As notações

$$D_1(D_1f) \quad D_{11}f \quad f_{11} \quad f_{xx} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

todas denotam a derivada parcial segunda de f , obtida ao derivarmos parcialmente duas vezes em relação a x . Temos a definição

$$f_{11}(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_1(x + \Delta x, y) - f_1(x, y)}{\Delta x} \quad (2)$$

* N. do R.: Também chamadas de derivadas de segunda ordem, assim como D_1f e D_2f são também chamadas de derivadas de primeira ordem.

se esse limite existir. As duas outras derivadas parciais segundas são definidas de forma análoga.

$$f_{21}(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_2(x + \Delta x, y) - f_2(x, y)}{\Delta x} \quad (3)$$

$$f_{22}(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f_2(x, y + \Delta y) - f_2(x, y)}{\Delta y} \quad (4)$$

se esses limites existirem.

As definições de derivadas parciais de ordem superior são similares. Novamente, existem várias notações para uma derivada específica. Por exemplo,

$$D_{112}f \quad f_{112} \quad f_{xxy} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$$

todas representam a derivada parcial terceira de f , obtida ao derivarmos parcialmente duas vezes em relação a x e então, uma vez em relação a y . Na notação com subíndice, a ordem da diferenciação parcial é da esquerda para a direita, enquanto que na notação $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x}$, a ordem é da direita para a esquerda.

EXEMPLO 1 Dada

$$f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y + \ln xy$$

Ache: (a) $D_{11}f(x, y)$; (b) $D_{12}f(x, y)$; (c) $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$.

Solução

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= e^x \operatorname{sen} y + \frac{1}{xy} (y) \\ &= e^x \operatorname{sen} y + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$(a) D_{11}f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y - \frac{1}{x^2} \quad (b) D_{12}f(x, y) = e^x \cos y$$

(c) Para encontrar $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$, derivamos parcialmente duas vezes em relação a y e uma vez em relação a x . Temos, assim

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cos y + \frac{1}{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \operatorname{sen} y - \frac{1}{y^2} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = -e^x \operatorname{sen} y$$

Derivadas parciais de ordem superior de uma função de n variáveis têm definições que são análogas às definições de derivadas parciais de ordem superior de uma função de duas variáveis. Se f for uma função de n variáveis, poderão existir n^2 derivadas parciais segundas de f em um determinado ponto. Isto é, para uma função de três variáveis, se todas as derivadas parciais de segunda ordem existirem, haverá nove delas: f_{11} , f_{12} , f_{13} , f_{21} , f_{22} , f_{23} , f_{31} , f_{32} e f_{33} .

EXEMPLO 2 Ache $D_{132}f(x, y, z)$ se

$$f(x, y, z) = \operatorname{sen}(xy + 2z)$$

Solução

$$D_1 f(x, y, z) = y \cos(xy + 2z)$$

$$D_{13} f(x, y, z) = -2y \operatorname{sen}(xy + 2z)$$

$$D_{132} f(x, y, z) = -2 \operatorname{sen}(xy + 2z) - 2xy \cos(xy + 2z)$$

EXEMPLO 3 Dada

$$f(x, y) = x^3 y - y \cosh xy$$

Ache: (a) $f_{xy}(x, y)$; (b) $f_{yx}(x, y)$.

Solução

$$(a) f_x(x, y) = 3x^2 y - y^2 \operatorname{senh} xy$$

$$f_{xy}(x, y) = 3x^2 - 2y \operatorname{senh} xy - xy^2 \cosh xy$$

$$(b) f_y(x, y) = x^3 - \cosh xy - xy \operatorname{senh} xy$$

$$\begin{aligned} f_{yx}(x, y) &= 3x^2 - y \operatorname{senh} xy - y \operatorname{senh} xy - xy^2 \cosh xy \\ &= 3x^2 - 2y \operatorname{senh} xy - xy^2 \cosh xy \end{aligned}$$

Observe, dos resultados anteriores, que para as funções do Exemplo 3 as derivadas parciais mistas $f_{xy}(x, y)$ e $f_{yx}(x, y)$, são iguais. Assim, para essa função específica, quando é efetuado o cálculo da derivada parcial segunda em relação a x e y , a ordem da derivação é irrelevante. Essa condição é válida para muitas funções. Mas, pelo exemplo a seguir, veremos que ela não é sempre verdadeira.

EXEMPLO 4 Ache $f_{12}(0, 0)$ e $f_{21}(0, 0)$ se

$$f(x, y) = \begin{cases} (xy) \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Solução No Exemplo 3, Seção 16.4, mostramos que para essa função

$$f_1(0, y) = -y \quad \text{para todo } y \tag{5}$$

e

$$f_2(x, 0) = x \quad \text{para todo } x \tag{6}$$

Da fórmula (1)

$$f_{12}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f_1(0, 0 + \Delta y) - f_1(0, 0)}{\Delta y}$$

Mas de (5), $f_1(0, \Delta y) = -\Delta y$ e $f_1(0, 0) = 0$, assim

$$\begin{aligned} f_{12}(0, 0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-\Delta y - 0}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} (-1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

De (3),

$$f_{21}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_2(0 + \Delta x, 0) - f_2(0, 0)}{\Delta x}$$

De (6), $f_2(\Delta x, 0) = \Delta x$ e $f_2(0, 0) = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} f_{21}(0, 0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Para a função do Exemplo 4, as derivadas parciais mistas $f_{12}(x, y)$ e $f_{21}(x, y)$ não são iguais em $(0, 0)$. Um conjunto de condições para que $f_{12}(x_0, y_0)$ e $f_{21}(x_0, y_0)$ sejam iguais é dado no Teorema 16.7.1, a seguir. A função do Exemplo 4 não satisfaz as hipóteses desse teorema, pois ambas, f_{12} e f_{21} , são descontínuas em $(0, 0)$. Será deixado como exercício provar isso (veja o Exercício 24).

16.7.1 TEOREMA

Suponha que f seja uma função de duas variáveis x e y , definida num disco aberto $B((x_0, y_0); r)$ e f_x, f_y, f_{xy} e f_{yx} também sejam definidas em B . Além disso, suponha que f_{xy} e f_{yx} sejam contínuas em B . Então,

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

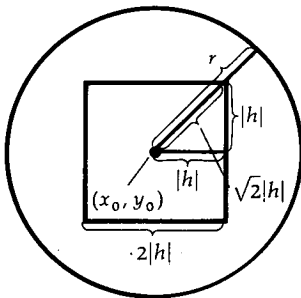


FIGURA 1

Prova Considere um quadrado tendo seu centro em (x_0, y_0) , sendo o comprimento de seu lado igual a $2|h|$, tal que $0 < \sqrt{2}|h| < r$. Então, todos os pontos no interior do quadrado e sobre os lados do quadrado estão no disco aberto B (veja a Figura 1). Assim, os pontos $(x_0 + h, y_0 + h)$, $(x_0 + h, y_0)$ e $(x_0, y_0 + h)$ estão em B . Seja Δ definido por

$$\Delta = f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + h) + f(x_0, y_0) \quad (7)$$

Considere a função G definida por

$$G(x) = f(x, y_0 + h) - f(x, y_0) \quad (8)$$

Então,

$$G(x + h) = f(x + h, y_0 + h) - f(x + h, y_0)$$

Assim, (7) pode ser escrita como

$$\Delta = G(x_0 + h) - G(x_0) \quad (9)$$

De (8),

$$G'(x) = f_x(x, y_0 + h) - f_x(x, y_0) \quad (10)$$

Agora, como $f_x(x, y_0 + h)$ e $f_x(x, y_0)$ estão definidas em B , $G'(x)$ existe se x estiver no intervalo fechado com extremidades em x_0 e $x_0 + h$. Logo, G é contínua se x estiver nesse intervalo fechado. Pelo teorema do valor médio (4.3.2), existe um número c_1 entre x_0 e $x_0 + h$, tal que

$$G(x_0 + h) - G(x_0) = hG'(c_1)$$

Substituindo essa relação em (9) obtemos

$$\Delta = hG'(c_1)$$

Dessa igualdade e substituindo x por c_1 em (10), temos

$$\Delta = h[f_x(c_1, y_0 + h) - f_x(c_1, y_0)] \quad (11)$$

Agora, se g for a função definida por

$$g(y) = f_x(c_1, y) \quad (12)$$

podemos escrever (11) como

$$\Delta = h[g(y_0 + h) - g(y_0)] \quad (13)$$

De (12),

$$g'(y) = f_{xy}(c_1, y) \quad (14)$$

Como $f_{xy}(c_1, y)$ está definida em B , $g'(y)$ existe se y estiver no intervalo fechado com pontos extremos em y_0 e $y_0 + h$; logo, g é contínua se y estiver nesse intervalo fechado. Logo, pelo teorema do valor médio, existe um número d_1 entre y_0 e $y_0 + h$, tal que

$$g(y_0 + h) - g(y_0) = hg'(d_1)$$

Substituindo essa igualdade em (13) obtemos $\Delta = h^2g'(d_1)$; assim, de (14) segue que

$$\Delta = h^2f_{xy}(c_1, d_1) \quad (15)$$

para algum ponto (c_1, d_1) no disco aberto B . Definimos uma função ϕ por

$$\phi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y) \quad (16)$$

e assim $\phi(y + h) = f(x_0 + h, y + h) - f(x_0, y + h)$, Logo, (7) pode ser escrita como

$$\Delta = \phi(y_0 + h) - \phi(y_0) \quad (17)$$

De (16),

$$\phi'(y) = f_y(x_0 + h, y) - f_y(x_0, y) \quad (18)$$

Como, por hipótese, cada termo no segundo membro de (18) existe em B , ϕ' existe se y estiver no intervalo fechado, tendo y_0 e $y_0 + h$ como pontos extremos. Logo, ϕ é contínua nesse intervalo fechado. Assim, pelo teorema do valor médio, existe um número d_2 entre y_0 e $y_0 + h$, tal que

$$\phi(y_0 + h) - \phi(y_0) = h\phi'(d_2)$$

Dessa igualdade, de (17) e (18), segue que

$$\Delta = h[f_y(x_0 + h, d_2) - f_y(x_0, d_2)] \quad (19)$$

Definimos a função χ por

$$\chi(x) = f_y(x, d_2) \quad (20)$$

e escrevemos (19) como

$$\Delta = h[\chi(x_0 + h) - \chi(x_0)] \quad (21)$$

De (20),

$$\chi'(x) = f_{yx}(x, d_2) \quad (22)$$

e pelo teorema do valor médio, existe um número c_2 entre x_0 e $x_0 + h$, tal que

$$\chi(x_0 + h) - \chi(x_0) = h\chi'(c_2)$$

Dessa igualdade, de (21) e (22),

$$\Delta = h^2 f_{yx}(c_2, d_2)$$

Com essa expressão para Δ , e (15) obtemos

$$h^2 f_{xy}(c_1, d_1) = h^2 f_{yx}(c_2, d_2)$$

e como $h \neq 0$, podemos dividir por h^2 , resultando

$$f_{xy}(c_1, d_1) = f_{yx}(c_2, d_2) \quad (23)$$

onde (c_1, d_1) e (c_2, d_2) estão em B .

Como c_1 e c_2 estão entre x_0 e $x_0 + h$, podemos escrever $c_1 = x_0 + \epsilon_1 h$, onde $0 < \epsilon_1 < 1$ e $c_2 = x_0 + \epsilon_2 h$, onde $0 < \epsilon_2 < 1$. Analogamente, como ambos, d_1 e d_2 , estão entre y_0 e $y_0 + h$, podemos escrever $d_1 = y_0 + \epsilon_3 h$, onde $0 < \epsilon_3 < 1$ e $d_2 = y_0 + \epsilon_4 h$, onde $0 < \epsilon_4 < 1$. Fazendo essas substituições em (23), obtemos

$$f_{xy}(x_0 + \epsilon_1 h, y_0 + \epsilon_3 h) = f_{yx}(x_0 + \epsilon_2 h, y_0 + \epsilon_4 h)$$

Como f_{xy} e f_{yx} são contínuas em B , tomando o limite de ambos os membros dessa equação quando h tende a zero, teremos

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0) \quad \blacksquare$$

EXEMPLO 5 Suponha $u = f(x, y)$, $x = F(r, s)$ e $y = G(r, s)$ e admita que $f_{xy} = f_{yx}$. Prove, usando a regra da cadeia, que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = & f_{xx}(x, y)[F_r(r, s)]^2 + 2f_{xy}(x, y)F_r(r, s)G_r(r, s) + f_{yy}(x, y)[G_r(r, s)]^2 \\ & + f_x(x, y)F_{rr}(r, s) + f_y(x, y)G_{rr}(r, s) \end{aligned}$$

Solução Da regra da cadeia,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = f_x(x, y)F_r(r, s) + f_y(x, y)G_r(r, s)$$

Tomando novamente a derivada parcial em relação a r , usando a fórmula para a derivada de um produto e a regra da cadeia, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = & [f_{xx}(x, y)F_r(r, s) + f_{xy}(x, y)G_r(r, s)]F_r(r, s) + f_x(x, y)F_{rr}(r, s) \\ & + [f_{yx}(x, y)F_r(r, s) + f_{yy}(x, y)G_r(r, s)]G_r(r, s) + f_y(x, y)G_{rr}(r, s) \end{aligned}$$

Multiplicando, combinando os termos e usando o fato de que $f_{xy}(x, y)$ e $f_{yx}(x, y)$ são iguais, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = & f_{xx}(x, y)[F_r(r, s)]^2 + 2f_{xy}(x, y)F_r(r, s)G_r(r, s) + f_{yy}(x, y)[G_r(r, s)]^2 \\ & + f_x(x, y)F_{rr}(r, s) + f_y(x, y)G_{rr}(r, s) \end{aligned}$$

como queríamos provar.

Como resultado do Teorema 16.7.1, se a função f de duas variáveis tiver derivadas parciais contínuas em algum disco aberto, então a ordem das derivações parciais poderá ser mudada sem afetar o resultado; isto é,

$$D_{112}f = D_{121}f = D_{211}f$$

$$D_{1122}f = D_{1212}f = D_{1221}f = D_{2112}f = D_{2121}f = D_{2211}f$$

e assim por diante. Em particular, supondo que todas as derivadas parciais sejam contínuas em algum disco aberto, podemos provar que $D_{211}f = D_{112}f$, aplicando o Teorema 16.7.1 repetidamente. Fazendo isso, temos

$$\begin{aligned} D_{211}f &= D_1(D_{21}f) = D_1(D_{12}f) = D_1[D_2(D_1f)] = D_2[D_1(D_1f)] \\ &= D_2(D_{11}f) = D_{112}f \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 16.7

Nos Exercícios de 1 a 10 (a) ache $D_{11}f(x, y)$; (b) ache $D_{22}f(x, y)$; (c) mostre que $D_{12}f(x, y) = D_{21}f(x, y)$.

1. $f(x, y) = \frac{x^2}{y} - \frac{y}{x^2}$

2. $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2y + xy^2$

3. $f(x, y) = e^{2x} \operatorname{sen} y$ 4. $f(x, y) = e^{-x/y} + \ln \frac{y}{x}$

5. $f(x, y) = (x^2 + y^2) \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x}$

6. $f(x, y) = \operatorname{sen}^{-1} \frac{3y}{x^2}$

7. $f(x, y) = 4x \operatorname{senh} y + 3y \operatorname{cosh} x$

8. $f(x, y) = x \cos y - ye^x$

9. $f(x, y) = e^x \cos y + \operatorname{tg}^{-1} x \cdot \ln y$

10. $f(x, y) = 3x \operatorname{cosh} y - y \operatorname{sen}^{-1} e^x$

Nos Exercícios de 11 a 18, ache as derivadas parciais indicadas

11. $f(x, y) = 2x^3y + 5x^2y^2 - 3xy^2$; (a) $f_{121}(x, y)$; (b) $f_{211}(x, y)$

12. $G(x, y) = 3x^3y^2 + 5x^2y^3 + 2x$; (a) $G_{yyx}(x, y)$; (b) $G_{yxy}(x, y)$

13. $f(x, y, z) = ye^x + ze^y + e^z$; (a) $f_{xz}(x, y, z)$; (b) $f_{yz}(x, y, z)$

14. $g(x, y, z) = \operatorname{sen}(xyz)$; (a) $g_{23}(x, y, z)$; (b) $g_{12}(x, y, z)$

15. $f(w, z) = w^2 \cos e^z$; (a) $f_{121}(w, z)$; (b) $f_{212}(w, z)$

16. $f(u, v) = \ln \cos(u - v)$; (a) $f_{uuu}(u, v)$; (b) $f_{vvv}(u, v)$

17. $g(r, s, t) = \ln(r^2 + 4s^2 - 5t^2)$; (a) $g_{132}(r, s, t)$; (b) $g_{122}(r, s, t)$

18. $f(x, y, z) = \operatorname{tg}^{-1}(3xyz)$; (a) $f_{113}(x, y, z)$; (b) $f_{123}(x, y, z)$

Nos Exercícios de 19 a 22, mostre que $u(x, y)$ satisfaz a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ conhecida como equação de Laplace em } \mathbb{R}^2.$$

19. $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

20. $u(x, y) = e^x \operatorname{sen} y + e^y \cos x$

21. $u(x, y) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} + \frac{x}{x^2 + y^2}$

22. $u(x, y) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{2xy}{x^2 - y^2}$

23. A equação de Laplace em \mathbb{R}^3 é

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Mostre que $u(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ satisfaz essa equação para $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

24. Para a função do Exemplo 4, mostre que f_{12} é descontínua em $(0, 0)$ e então as hipóteses do Teorema 16.7.1 não estão satisfeitas se $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Nos Exercícios de 25 a 27, ache $f_{12}(0, 0)$ e $f_{21}(0, 0)$, se existirem.

25. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

26. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

27. $f(x, y) = \begin{cases} x^2 \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} - y^2 \operatorname{tg}^{-1} \frac{x}{y} & \text{se } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{cases}$

28. Dado que $u = f(x, y)$, $x = F(t)$, e $y = G(t)$ e supondo que $f_{xy} = f_{yx}$, prove, usando a regra da cadeia, que

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} &= f_{xx}(x, y)[F'(t)]^2 + 2f_{xy}(x, y)F'(t)G'(t) + f_{yy}(x, y)[G'(t)]^2 \\ &\quad + f_x(x, y)F''(t) + f_y(x, y)G''(t) \end{aligned}$$

29. Dado que $u = f(x, y)$, $x = F(r, s)$, $y = G(r, s)$ e supondo que $f_{xy} = f_{yx}$, prove, usando a regra da cadeia, que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} &= f_{xx}(x, y)F_r(r, s)F_s(r, s) + f_{xy}(x, y)[F_r(r, s)G_s(r, s) + F_s(r, s)G_r(r, s)] \\ &\quad + f_{yy}(x, y)G_r(r, s)G_s(r, s) + f_x(x, y)F_{rs}(r, s) + f_y(x, y)G_{rs}(r, s) \end{aligned}$$

30. Dada $u = e^y \cos x$, $x = 2t$, $y = t^2$, ache $\frac{d^2u}{dt^2}$ das seguintes maneiras: (a) expressando primeiro u em termos de t ; (b) usando a fórmula do Exercício 28; (c) usando a regra da cadeia.
31. Dada $u = 3xy - 4y^2$, $x = 2se^t$, $y = re^{-s}$, ache $\frac{\partial u}{\partial r^2}$ de três formas: (a) expressando u em termos de r e de s ; (b) usando a fórmula do Exemplo 5; (c) usando a regra da cadeia.
32. Para u , x e y dadas no Exercício 31, ache $\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial r}$ de três formas: (a) expressando primeiro u em termos de r e de s ; (b) usando a fórmula do Exercício 29; (c) usando a regra da cadeia.
33. Dada $u = 9x^2 + 4y^2$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, ache $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ de três formas: (a) expressando primeiro u em termos de r e θ , (b) usando a fórmula do Exemplo 5; (c) usando a regra da cadeia.
34. Para u , x e y dadas no Exercício 33, ache $\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$ de três maneiras: (a) expressando primeiro u em termos de r e θ ; (b) usando a fórmula do Exemplo 5; (c) usando a regra da cadeia.
35. Para u , x e y dadas no Exercício 33, ache $\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}$ de três maneiras: (a) expressando primeiro u em termos de r e θ ; (b) usando a fórmula do Exercício 29; (c) usando a regra da cadeia.
36. Suponha que $u = f(x, y)$ e $v = g(x, y)$ e que f e g , bem como suas derivadas parciais primeira e segunda, sejam contínuas. Prove que se u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann (veja o Exercício 37 nos Exercícios 16.6), também satisfazem a equação de Laplace (veja os Exercícios de 19 a 22).
37. A equação diferencial parcial, unidimensional, da condução do calor, é
- $$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
- Mostre que se f for uma função de x satisfazendo a equação $\frac{d^2 f}{dx^2} + \lambda^2 f(x) = 0$ e g for uma função de t satisfazendo a equação $\frac{dg}{dt} + k^2 \lambda g(t) = 0$, então a função $u = f(x)g(t)$ será solução da equação diferencial parcial, onde k e λ são constantes.
38. A equação diferencial parcial para uma corda vibrante é
- $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
- Mostre que se f for uma função de x satisfazendo a equação $\frac{d^2 f}{dx^2} + \lambda^2 f(x) = 0$ e g for uma função de t satisfazendo a equação $\frac{d^2 g}{dt^2} + a^2 \lambda^2 g(t) = 0$, então $u = f(x)g(t)$ será a solução da equação diferencial parcial, onde a e λ são constantes.
39. Prove que se f e g forem duas funções arbitrárias de uma variável real tendo derivadas segundas contínuas e $u = f(x + at) + g(x - at)$, então u satisfaz a equação diferencial parcial da corda vibrante dada no Exercício 38. (Sugestão: seja $v = x + at$ e $w = x - at$; então u é uma função de v e w que, por sua vez, são funções de x e t .)
40. Prove que se f for uma função de duas variáveis e todas as derivadas parciais até a quarta ordem forem contínuas em algum disco aberto, então
- $$D_{1122}f = D_{2121}f$$

16.8 CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA A DIFERENCIABILIDADE (Suplementar)

A demonstração do Teorema 16.5.4, que dá condições suficientes para que uma função de duas variáveis seja diferenciável em um ponto, foi adiada até esta secção. Primeiro, daremos um teorema necessário à sua demonstração. É o teorema do valor médio para uma função de uma única variável, aplicado a uma função de duas variáveis.

16.8.1 TEOREMA

Seja f uma função de duas variáveis definida para todo x no intervalo fechado $[a, b]$ e todo y no intervalo fechado $[c, d]$.

- (i) se $D_1 f(x, y_0)$ existir para algum y_0 em $[c, d]$ e para todo x em $[a, b]$, então haverá um número ξ_1 no intervalo aberto (a, b) , tal que

$$f(b, y_0) - f(a, y_0) = (b - a)D_1 f(\xi_1, y_0) \quad (1)$$

- (ii) Se $D_2 f(x_0, y)$ existir para algum x_0 em $[a, b]$ e para todo y em $[c, d]$, então haverá um número ξ_2 no intervalo aberto (c, d) , tal que

$$f(x_0, d) - f(x_0, c) = (d - c)D_2 f(x_0, \xi_2) \quad (2)$$

Antes de provar esse teorema, vamos interpretá-lo geometricamente. Para a parte (i), consulte a Figura 1 que mostra parte da superfície $z = f(x, y)$ acima da região retangular no plano xy , limitada pelas retas $x = a, x = b, y = c$ e $y = d$. O plano $y = y_0$ intercepta a superfície na curva representada pelas equações $y = y_0$ e $z = f(x, y)$. A inclinação da reta que passa pelos pontos $A(a, y_0, f(a, y_0))$ e $B(b, y_0, f(b, y_0))$ é $[f(b, y_0) - f(a, y_0)] / (b - a)$. O Teorema 16.8.1(i) estabelece que há algum ponto $(\xi_1, y_0, f(\xi_1, y_0))$ na curva entre os pontos A e B , onde a reta tangente é paralela à reta secante que passa pelos pontos A e B ; isto é, existe algum número ξ_1 em (a, b) , tal que

$$D_1 f(\xi_1, y_0) = \frac{f(b, y_0) - f(a, y_0)}{b - a}$$

e isso está ilustrado na figura, para a qual $D_1 f(\xi_1, y_0) < 0$.

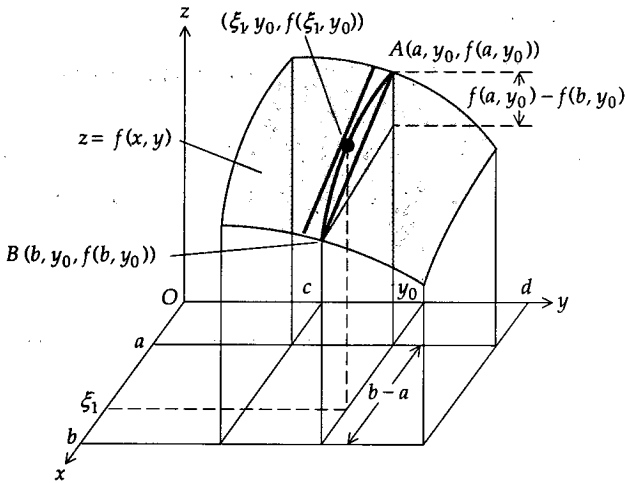


FIGURA 1

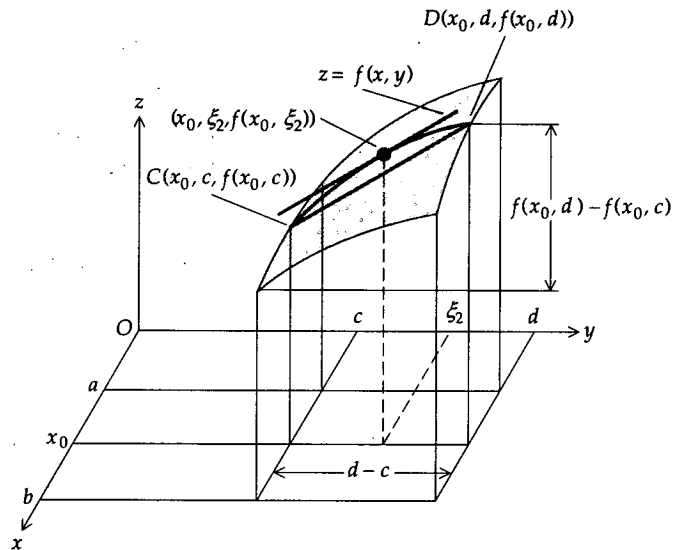


FIGURA 2

A Figura 2 ilustra a parte (ii) do Teorema 16.8.1. O plano $x = x_0$ intercepta a superfície $z = f(x, y)$ na curva representada pelas equações $x = x_0$ e $z = f(x, y)$. A inclinação da reta que passa pelos pontos $C(x_0, c, f(x_0, c))$ e $D(x_0, d, f(x_0, d))$ é $[f(x_0, d) - f(x_0, c)] / (d - c)$ e o Teorema 16.8.1(ii) estabelece que existe algum ponto $(x_0, \xi_2, f(x_0, \xi_2))$ na curva entre os pontos C e D , onde a reta tangente é paralela à reta secante por C e D ; isto é, existe algum número ξ_2 em (c, d) , tal que

$$D_2 f(x_0, \xi_2) = \frac{f(x_0, d) - f(x_0, c)}{d - c}$$

Prova do Teorema 16.8.1(i) Seja g a função de uma variável x definida por

$$g(x) = f(x, y_0)$$

Então,

$$g'(x) = D_1 f(x, y_0)$$

Como $D_1f(x, y_0)$ existe para todo x em $[a, b]$, segue que $g'(x)$ existe para todo x em $[a, b]$, e assim sendo g é contínua em $[a, b]$. Então, pelo teorema do valor médio (4.3.2) para derivadas ordinárias, existe um número ξ_1 em (a, b) , tal que

$$g'(\xi_1) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

$$\Leftrightarrow D_1f(\xi_1, y_0) = \frac{f(b, y_0) - f(a, y_0)}{b - a}$$

de onde obtemos

$$f(b, y_0) - f(a, y_0) = (b - a)D_1f(\xi_1, y_0)$$

A demonstração da parte (ii) é similar à da parte (i) e será deixada como exercício (veja o Exercício 17). ■

A equação (1) pode ser escrita na forma

$$f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) = hD_1f(\xi_1, y_0) \quad (3)$$

estando ξ_1 entre x_0 e $x_0 + h$, onde h é positivo ou negativo (veja o Exercício 1).

A equação (2) pode ser escrita na forma

$$f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = kD_2f(x_0, \xi_2) \quad (4)$$

estando ξ_2 entre y_0 e $y_0 + k$, onde k é positivo ou negativo (veja o Exercício 2).

EXEMPLO 1 Dada

$$f(x, y) = \frac{2xy}{3 + x}$$

ache um ξ_1 requerido pelo Teorema 16.8.1, se x está em $[2, 5]$ e $y = 4$.

Solução

$$D_1f(x, y) = \frac{6y}{(3 + x)^2}$$

Pelo Teorema 16.8.1(i) há um número ξ_1 no intervalo aberto $(2, 5)$, tal que

$$f(5, 4) - f(2, 4) = (5 - 2)D_1f(\xi_1, 4)$$

$$5 - \frac{16}{5} = 3 \cdot \frac{24}{(3 + \xi_1)^2}$$

$$\frac{9}{5} = \frac{72}{(3 + \xi_1)^2}$$

$$(3 + \xi_1)^2 = 40$$

$$3 + \xi_1 = \pm 2\sqrt{10}$$

Mas como $2 < \xi_1 < 5$, tomamos somente o sinal $+$ e obtemos

$$\xi_1 = 2\sqrt{10} - 3$$

EXEMPLO 2 Dada

$$f(x, y) = 3xe^y - 2ye^x$$

ache um ξ_2 requerido pelo Teorema 16.8.1, se y está em $[0, 4]$ e $x = 3$.

Solução

$$D_2f(x, y) = 3xe^y - 2e^x$$

Pelo Teorema 16.8.1(ii) há um número ξ_2 no intervalo aberto $(0, 4)$, tal que

$$f(3, 4) - f(3, 0) = (4 - 0)D_2f(3, \xi_2)$$

$$(9e^4 - 8e^3) - 9 = 4(9e^{\xi_2} - 2e^3)$$

$$9e^4 - 8e^3 - 9 = 36e^{\xi_2} - 8e^3$$

$$36e^{\xi_2} = 9e^4 - 9$$

$$e^{\xi_2} = \frac{1}{4}(e^4 - 1)$$

$$e^{\xi_2} \approx 13,40$$

$$\xi_2 \approx \ln 13,40$$

$$\xi_2 \approx 2,60$$

A seguir teremos uma reformulação do Teorema 16.5.4, acompanhada de sua demonstração.

16.5.4 TEOREMA

Seja f uma função de duas variáveis x e y . Suponha que D_1f e D_2f existam em um disco aberto $B(P_0; r)$, onde P_0 é o ponto (x_0, y_0) . Então, se D_1f e D_2f forem contínuas em P_0 , f será diferenciável em P_0 .

Prova Escolha o ponto $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ de tal forma que ele esteja em $B(P_0; r)$. Então,

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Somando e subtraindo $f(x_0 + \Delta x, y_0)$ ao segundo membro da igualdade acima, obtemos

$$\Delta f(x_0, y_0) = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)] + [f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)] \quad (5)$$

Como D_1f e D_2f existem em $B(P_0; r)$ e $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ está em $B(P_0; r)$ segue de (4) que

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) = (\Delta y)D_2f(x_0 + \Delta x, \xi_2) \quad (6)$$

onde ξ_2 está entre y_0 e $y_0 + \Delta y$.

De (3)

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = (\Delta x)D_1f(\xi_1, y_0)$$

onde ξ_1 está entre x_0 e $x_0 + \Delta x$. Substituindo essa igualdade e (6) em (5), obtemos

$$\Delta f(x_0, y_0) = (\Delta y)D_2f(x_0 + \Delta x, \xi_2) + (\Delta x)D_1f(\xi_1, y_0) \quad (7)$$

Como $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ está em $B(P_0; r)$, ξ_2 está entre y_0 e $y_0 + \Delta y$ e $D_2 f$ é contínua em P_0 , segue que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} D_2 f(x_0 + \Delta x, \xi_2) = D_2 f(x_0, y_0) \quad (8)$$

e como ξ_1 está entre x_0 e $x_0 + \Delta x$ e $D_1 f$ é contínua em P_0 ,

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} D_1 f(\xi_1, y_0) = D_1 f(x_0, y_0) \quad (9)$$

Se

$$\epsilon_1 = D_1 f(\xi_1, y_0) - D_1 f(x_0, y_0) \quad (10)$$

segue de (9) que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \epsilon_1 = 0 \quad (11)$$

e se

$$\epsilon_2 = D_2 f(x_0 + \Delta x, \xi_2) - D_2 f(x_0, y_0) \quad (12)$$

segue de (8)

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \epsilon_2 = 0 \quad (13)$$

Substituindo (10) e (12) em (7) obtemos

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0, y_0) &= \Delta y [D_2 f(x_0, y_0) + \epsilon_2] + \Delta x [D_1 f(x_0, y_0) + \epsilon_1] \\ \Leftrightarrow \Delta f(x_0, y_0) &= D_1 f(x_0, y_0) \Delta x + D_2 f(x_0, y_0) \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y \end{aligned}$$

Dessa igualdade, de (11) e (13), vemos que a Definição 16.5.2 está satisfeita; assim f é diferenciável em (x_0, y_0) . ■

EXERCÍCIOS 16.8

- Mostre que a equação (1) pode ser escrita na forma (3), onde ξ_1 está entre x_0 e $x_0 + h$.
- Mostre que a equação (2) pode ser escrita na forma (4), onde ξ_2 está entre y_0 e $y_0 + k$.

Nos Exercícios de 3 a 8, aplique o Teorema 16.8.1(i) para achar ξ_1 .

- $f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$; x está em $[1, 3]$; $y = 4$
- $f(x, y) = x^3 - y^2$; x está em $[2, 6]$; $y = 3$
- $f(x, y) = \frac{4x}{x+y}$; x está em $[0, 4]$; $y = -6$
- $f(x, y) = \frac{2x-y}{2y+x}$; x está em $[-3, 3]$; $y = 5$
- $f(x, y) = \cos x + y$; x está em $[-\pi, \pi]$; $y = 4$
- $f(x, y) = \ln(x+y)$; x está em $[0, 2]$; $y = 1$

Nos Exercícios de 9 a 14, aplique o Teorema 16.8.1(ii) para encontrar um ξ_2 .

- A função do Exercício 3; y está em $[-2, 2]$; $x = 0$
- A função do Exercício 4; y está em $[-3, -1]$; $x = 7$
- A função do Exercício 5; y está em $[-2, 2]$; $x = 4$
- A função do Exercício 6; y está em $[0, 4]$; $x = 2$
- $f(x, y) = e^y \operatorname{tg} x$; y está em $[3, 5]$; $x = \frac{1}{4}\pi$
- $f(x, y) = \cos x + \operatorname{sen} y$; y está em $[-\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi]$; $x = \frac{1}{3}\pi$

Nos Exercícios 15 e 16, use o Teorema 16.5.4 para provar que f é diferenciável em $(0, 0)$.

- $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^3}{x^4 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
- $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

17. Prove o Teorema 16.8.1(ii).

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 16

Nos Exercícios de 1 a 4, determine o domínio da função f e faça um esboço, mostrando como uma região em \mathbb{R}^3 o conjunto de pontos no domínio.

- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2 - 16}$
- $f(x, y) = \frac{6}{\sqrt{36 - x^2 - y^2}}$
- $f(x, y) = \ln(y - x^2)$
- $f(x, y) = \sin^{-1}(5 - x^2 - y^2)$

Nos Exercícios 5 e 6, determine o domínio de f e descreva a região em \mathbb{R}^3 que é o conjunto de pontos no domínio.

- $f(x, y, z) = \frac{x}{|y| - |z|}$
- $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$

Nos Exercícios 7 e 8, determine o domínio de f e trace um esboço do gráfico de f .

- $f(x, y) = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$
- $f(x, y) = 16x^2 - y^2$

- A função de produção de um certo artigo é f , onde $f(x, y) = 4x^{1/2}y$, e x e y dão as quantidades de dois componentes. Faça um esboço do mapa de contorno para f , mostrando as curvas em 16, 8, 4 e 2.
- A temperatura no ponto (x, y) de uma placa plana de metal é $t(x, y)$ graus e $t(x, y) = x^2 + 2y$. Faça o esboço das isotérmicas para t constante nos seguintes valores 0, 2, 4, 6 e 8.

Nos Exercícios de 11 a 24, ache as derivadas parciais indicadas.

- $f(x, y) = 2x^2y - 3xy^2 + 4x - 2y$; (a) $D_1f(x, y)$; (b) $D_2f(x, y)$; (c) $D_{11}f(x, y)$; (d) $D_{22}f(x, y)$; (e) $D_{12}f(x, y)$; (f) $D_{21}f(x, y)$.
- $f(x, y) = (4x^2 - 2y)^3$; (a) $f_1(x, y)$; (b) $f_2(x, y)$; (c) $f_{11}(x, y)$; (d) $f_{22}(x, y)$; (e) $f_{12}(x, y)$; (f) $f_{21}(x, y)$.
- $f(x, y) = \frac{x^2 - y}{3y^2}$; (a) $f_x(x, y)$; (b) $f_y(x, y)$; (c) $f_{xy}(x, y)$; (d) $f_{yx}(x, y)$.
- $f(r, s) = re^{2rs}$; (a) $D_rf(r, s)$; (b) $D_sf(r, s)$; (c) $D_{rs}f(r, s)$; (d) $D_{sr}f(r, s)$.
- $g(s, t) = \sin(st^2) + te^s$; (a) $D_sg(s, t)$; (b) $D_tg(s, t)$; (c) $D_{st}g(s, t)$; (d) $D_{ts}g(s, t)$.
- $h(x, y) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{x^3}{y^2}$; (a) $D_1h(x, y)$; (b) $D_2h(x, y)$; (c) $D_{11}h(x, y)$; (d) $D_{22}h(x, y)$.
- $f(x, y) = e^{x/y} + \ln \frac{x}{y}$; (a) $f_x(x, y)$; (b) $f_y(x, y)$; (c) $f_{xx}(x, y)$; (d) $f_{yy}(x, y)$.
- $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$; (a) $f_1(x, y)$; (b) $f_{11}(x, y)$; (c) $f_{12}(x, y)$; (d) $f_{121}(x, y)$.
- $f(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$; (a) $D_1f(x, y, z)$; (b) $D_2f(x, y, z)$; (c) $D_3f(x, y, z)$.
- $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + 3yz - z^2}$; (a) $f_x(x, y, z)$; (b) $f_y(x, y, z)$; (c) $f_z(x, y, z)$.

- $f(u, v, w) = \ln(u^2 + 4v^2 - 5w^2)$; (a) $f_{uvw}(u, v, w)$; (b) $f_{uvv}(u, v, w)$.
- $f(r, s, t) = t^2 e^{4rst}$; (a) $f_r(r, s, t)$; (b) $f_{rt}(r, s, t)$; (c) $f_{rts}(r, s, t)$.
- $f(r, s, t) = \frac{\ln 4rs}{t^2}$; (a) $D_1f(r, s, t)$; (b) $D_{13}f(r, s, t)$; (c) $D_{131}f(r, s, t)$.
- $f(u, v, w) = w \cos 2v + 3v \sin u - 2uv \operatorname{tg} w$; (a) $D_2f(u, v, w)$; (b) $D_1f(u, v, w)$; (c) $D_{131}f(u, v, w)$.
- Se $w = x^2y - y^2x + y^2z - z^2y + z^2x - x^2z$, mostre que

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

- Se $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$, mostre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Nos Exercícios 27 e 28, ache $\frac{\partial u}{\partial t}$ e $\frac{\partial u}{\partial s}$ por dois métodos.

- $u = y \ln(x^2 + y^2)$, $x = 2s + 3t$, $y = 3t - 2s$
- $u = e^{2x+y} \cos(2y - x)$, $x = 2s^2 - t^2$, $y = s^2 + 2t^2$
- Se $u = 3x^2y + 2xy - 3yz - 2z^2$, $x = e^{3rs}$, $y = r^3s^2$ e $z = \ln 4$, ache $\frac{\partial u}{\partial r}$ por dois métodos: (a) pela regra da cadeia; (b) fazendo as substituições de x , y e z antes de diferenciar.
- Se $u = e^{x^2 + y^2} - \frac{3x}{y} + 3z$, $x = \sin \theta$, $y = \cos \theta$ e $z = \operatorname{tg} \theta$, ache a derivada total $\frac{du}{d\theta}$ por dois métodos: (a) não expresse u em termos de θ antes da diferenciação; (b) expresse u em termos de θ antes da diferenciação.
- Se $u = xy + x^2$, $x = 4 \cos t$ e $y = 3 \sin t$, ache o valor da derivada total $\frac{du}{dt}$ em $t = \frac{1}{4}\pi$ por dois métodos: (a) não expresse u em termos de t antes da diferenciação; (b) expresse u em termos de t antes da diferenciação.
- Se $f(x, y) = x^2 + ye^x$, ache: (a) $\Delta f(0, 2)$, o incremento de f em $(0, 2)$; (b) $\Delta f(0, 2)$ quando $\Delta x = -0,1$ e $\Delta y = 0,2$; (c) $df(0, 2, \Delta x, \Delta y)$, a diferencial total de f em $(0, 2)$; (d) $df(0, 2, -0,1, 0,2)$.
- Se $f(x, y, z) = 3xy^2 - 5xz^2 - 2xyz$, ache: (a) $\Delta f(-1, 3, 2)$, o incremento de f em $(-1, 3, 2)$; (b) $\Delta f(-1, 3, 2)$ quando $\Delta x = 0,02$, $\Delta y = -0,01$ e $\Delta z = -0,02$; (c) $df(-1, 3, 2, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$, a diferencial total de f em $(-1, 3, 2)$; (d) $df(-1, 3, 2, 0,02, -0,01, -0,02)$.
- Dada $f(x) = x^2 + 1$, $g(x, y) = \frac{2x}{3y}$ e $h(x) = \frac{1}{x}$, ache: (a) $(h \circ g)(-3, 4)$; (b) $g(f(3), h(\frac{1}{4}))$; (c) $g(f(x), h(y))$; (d) $f((h \circ g)(x, y))$.

Nos Exercícios de 35 a 37, calcule os limites indicados, usando os teoremas de limite.

$$35. \lim_{(x,y) \rightarrow (e,0)} \ln \left(\frac{x^2}{y+1} \right) \quad 36. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,\pi/2)} \frac{xy^2 + e^x}{\cos x + \sin y}$$

$$37. \lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \sin^{-1} \left(\frac{3x}{2y} \right)$$

Nos Exercícios de 38 a 40, estabeleça o limite, encontrando um $\delta > 0$ correspondente a $\epsilon > 0$, de tal forma que a Definição 16.2.5 esteja satisfeita.

$$38. \lim_{(x,y) \rightarrow (4,-1)} (4x - 5y) = 21$$

$$39. \lim_{(x,y) \rightarrow (2,-2)} (3x^2 - 4y^2) = -4$$

$$40. \lim_{(x,y) \rightarrow (3,1)} (x^2 - y^2 + 2x - 4y) = 10$$

Nos Exercícios de 41 a 44, determine se o limite indicado existe.

$$41. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2} \quad 42. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4}$$

$$43. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^9 y}{(x^6 + y^2)^2} \quad 44. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^3 + 4x^2 y}{x^2 + y^2}$$

Nos Exercícios de 45 a 49, discuta a continuidade de f .

$$45. f(x, y) = \frac{x^2 + 4y^2}{x^2 - 4y^2}$$

$$46. f(x, y) = \frac{1}{\cos \frac{1}{2}\pi x} + \frac{1}{\cos \frac{1}{2}\pi y}$$

$$47. f(x, y) = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\pi x + \cos^2 \frac{1}{2}\pi y}$$

$$48. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(Sugestão: veja o Exercício 42.)

$$49. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(Sugestão: veja o Exercício 41.)

50. Suponha que α seja a medida em radianos de um ângulo de um triângulo retângulo e que $\sin \alpha$ seja determinado por a/c , onde a cm é o comprimento do lado oposto ao ângulo e c cm é o comprimento da hipotenusa. Se a medida de a for 3,52 e a de c for 7,14 e se houver um erro possível de 0,01 em cada medida, ache o erro possível no cálculo de $\sin \alpha$ com essas medidas.

51. Um pintor cobra \$ 4 por metro quadrado, para pintar as quatro paredes e o forro de um quarto. Se as dimensões do forro forem 4 e 5 m, a altura medida for 3 m, e essas medidas

forem corretas até 0,5 cm, ache aproximadamente, usando a diferencial total, o erro máximo na estimativa do custo do trabalho com essas medidas.

52. Num dado instante, o comprimento de um lado de um retângulo é 6 cm e ele está crescendo a uma taxa de 1 cm/s; o comprimento de um outro lado é 10 cm e ele está decrescendo a uma taxa de 2 cm/s. Ache a taxa de variação da área do retângulo no instante dado.
53. O raio de um cilindro circular reto está decrescendo a uma taxa de 5 cm/min e a altura está crescendo a uma taxa de 12 cm/min. Ache a taxa de variação do volume no instante em que o raio é 20 cm e a altura é 40 cm.
54. Ache a inclinação da reta tangente à curva de intersecção da superfície $25x^2 - 16y^2 + 9z^2 - 4 = 0$ com o plano $x = 4$, no ponto $(4, 9, 10)$.
55. Use a lei do gás ideal (veja o Exemplo 5, Secção 16.4), com $k = 5$ para encontrar a taxa de variação da pressão no instante em que o volume do gás é 80 m^3 e a temperatura é 75° , se o volume está aumentando a uma taxa de $3 \text{ m}^3/\text{s}$ e a temperatura está aumentando a uma taxa de $0,3^\circ$ por minuto.

Nos Exercícios 56 e 57, prove que a função f é diferenciável em todos os pontos de seu domínio, mostrando que a Definição 16.6.2 está satisfeita.

$$56. f(x, y) = 3xy^2 - 4x^2 + y^2 \quad 57. f(x, y) = \frac{2x + y}{y^2}$$

58. Se $f(x, y)$ unidades são produzidas por x trabalhadores e y máquinas, então $D_x f(x, y)$ é chamada de *produtividade marginal do trabalho* e $D_y f(x, y)$ é chamada de *produtividade marginal da maquinaria*. Suponha que

$$f(x, y) = x^2 + 6xy + 3y^2$$

onde $5 \leq x \leq 30$ e $4 \leq y \leq 12$. (a) Ache o número de unidades produzidas em um dia, quando a força de trabalho diária consiste em 15 operários, e 8 máquinas são usadas. (b) Use a produtividade marginal do trabalho para determinar o número aproximado de unidades adicionais que podem ser produzidas em 1 dia, se a força de trabalho for aumentada de 15 para 16 e o número de máquinas permanecer fixo em 8. (c) Use a produtividade marginal da maquinaria para determinar o número aproximado de unidades adicionais que podem ser produzidas em 1 dia, se o número de máquinas passar de 8 para 9, enquanto que o número de operários permanece fixo em 15.

59. Ache (a) $f_2(x, 0)$ se $x \neq 0$ e (b) $f_2(0, 0)$ se

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{12x^2 y - 3y^2}{x^2 + y} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

60. Comprove que $u(x, y) = (\sinh x)(\sin y)$ satisfaz a equação de Laplace em R^2 :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

61. Se f for uma função diferenciável da variável u , seja $u = x^2 + y^2$ e prove que $z = xy + f(x^2 + y^2)$ satisfaz a equação

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2$$

62. A equação de Laplace em coordenadas polares é

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

Comprove que $u(r, \theta) = r^n \sin n\theta$, onde n é uma constante, satisfaz essa equação.

63. Comprove que $u(x, y, z) = e^{3x+4y} \sin 5z$ satisfaz a equação de Laplace em R^3 :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

64. Comprove que $u(x, t) = A \cos(kat) \sin(kx)$, onde A e k são constantes arbitrárias, satisfaz a equação diferencial parcial da corda vibrante:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

65. Comprove que

$$u(x, t) = \sin \frac{n\pi x}{L} e^{(-n^2\pi^2 k^2/L^2)t}$$

satisfaz a equação diferencial parcial da condução de calor unidimensional:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

66. Dada

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Prove que $D_1 f(0, 0)$ e $D_2 f(0, 0)$ existem, mas f não é diferenciável em $(0, 0)$. (*Sugestão*: veja o Exemplo 5, Seção 16.2 e o Exercício 10 nos Exercícios 16.3.)

67. Dada

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2 z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

Prove que f é diferenciável em $(0, 0, 0)$.

68. Seja f a função definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-1/x^2} y}{e^{-2/x^2} + y^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Prove que f é descontínua na origem.

69. Para a função do Exercício 68, prove que $D_1 f(0, 0)$ e $D_2 f(0, 0)$ existem.

70. Se f for uma função diferenciável de x e y e $u = f(x, y)$, $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, mostre que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

DEZESSETE

Derivadas Direcionais, Gradientes e Aplicações das Derivadas Parciais

$$\vec{\nabla}f(x, y) = f_x(x, y)\vec{i} + f_y(x, y)\vec{j}$$

$$M_y(x, y) = N_x(x, y)$$

As derivadas parciais $f_1(x, y)$ e $f_2(x, y)$ medem as taxas de variação dos valores funcionais $f(x, y)$ na direção dos eixos x e y , respectivamente. As *derivadas direcionais*, introduzidas na Secção 17.1, dão as taxas de variação dessas funções em qualquer direção. O *gradiente*, também introduzido na Secção 17.1, dá a direção e o sentido em que a função tem a sua maior taxa de variação. Esse conceito é aplicado na Secção 17.2, em nossa discussão sobre *planos tangentes e normais a superfícies*.

Assim como usamos as derivadas primeira e segunda para determinar as funções máxima e mínima de funções de uma única variável, mostramos na Secção 17.3 de que modo as derivadas parciais podem ser aplicadas para encontrarmos valores extremos de funções de duas variáveis. As aplicações nessa secção incluem o *método dos mínimos quadrados*. Na Secção 17.4 introduzimos os *mul-*

tiplicadores de Lagrange, que são usados para o cálculo de extremos de uma função sujeita a um vínculo.

Os gradientes aparecem novamente na Secção 17.5, onde mostramos como obter uma função a partir de seu gradiente. Esse procedimento é útil para determinar se uma expressão diferencial é *exata* e para resolver *equações diferenciais exatas*.

17.1 DERIVADAS DIRECIONAIS E GRADIENTES

Vamos generalizar a definição de uma derivada parcial, a fim de obter a taxa de variação de uma função em relação a qualquer direção e sentido. Isso nos leva ao conceito de *derivada direcional*.

Seja f uma função de duas variáveis x e y e seja $P(x, y)$ um ponto do plano xy . Suponhamos que U seja o vetor unitário que faz com a parte positiva do eixo x um ângulo cuja medida em radianos é θ . Então,

$$U = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$$

A Figura 1 mostra a representação de U com ponto inicial em $P(x, y)$.

17.1.1 DEFINIÇÃO

Seja f uma função de duas variáveis x e y . Se U for o vetor unitário $\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$, então a **derivada direcional** de f na direção de U , denotada por $D_U f$, será dada por

$$D_U f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h \cos \theta, y + h \sin \theta) - f(x, y)}{h}$$

se o limite existir.

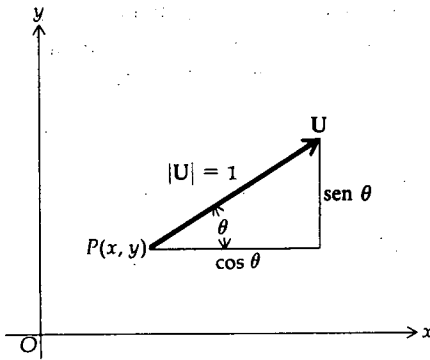


FIGURA 1

A derivada direcional dá a taxa de variação dos valores funcionais $f(x, y)$ em relação à direção e sentido do vetor unitário U .* Isso está ilustrado na Figura 2. Uma equação da superfície S na figura é $z = f(x, y)$. $P_0(x_0, y_0, z_0)$ é um ponto na superfície, e os pontos $R(x_0, y_0, 0)$ e $Q(x_0 + h \cos \theta, y_0 + h \sin \theta, 0)$ são pontos no plano xy . O plano que passa por R e Q , paralelo ao eixo z , faz um ângulo de θ rad com a direção positiva do eixo x . Esse plano intercepta a superfície S na curva C . A derivada direcional $D_U f$, calculada em P_0 , é a inclinação da reta tangente à curva C em P_0 , no plano de R, Q e P_0 .

Se $U = \mathbf{i}$, então $\cos \theta = 1$ e $\sin \theta = 0$ e, da Definição 17.1.1,

$$D_{\mathbf{i}} f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

que é a derivada parcial de f em relação a x .

Se $U = \mathbf{j}$, então $\cos \theta = 0$ e $\sin \theta = 1$ e

$$D_{\mathbf{j}} f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

que é a derivada parcial de f em relação a y .

* N. do R.: Quando dizemos "derivada de f na direção de U " fica subentendido que, não só a direção mas também o sentido está determinado por U . Observe que $-U$ tem a mesma direção de U , mas a derivada direcional de f na direção de $-U$ tem o sinal oposto da derivada de f na direção de U .

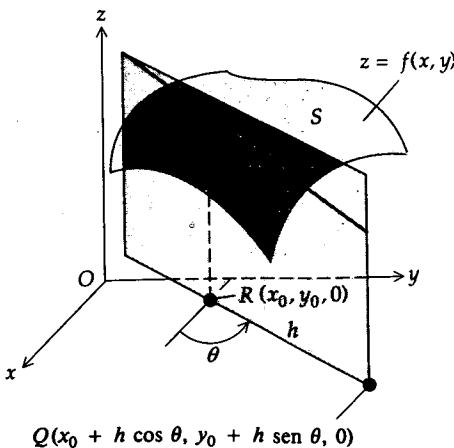


FIGURA 2

Assim sendo, f_x e f_y são casos particulares da derivada direcional nas direções dos vetores unitários \mathbf{i} e \mathbf{j} , respectivamente.

► **ILUSTRAÇÃO 1** Vamos aplicar a Definição 17.1.1 para encontrar $D_{\mathbf{U}}f$, se

$$f(x, y) = 3x^2 - y^2 + 4x$$

e \mathbf{U} é o vetor unitário na direção $\frac{1}{6}\pi$. Então, $\mathbf{U} = \cos \frac{1}{6}\pi \mathbf{i} + \sin \frac{1}{6}\pi \mathbf{j}$, isto é, $\mathbf{U} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$. Assim, da Definição 17.1.1,

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{U}}f(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + \frac{1}{2}\sqrt{3}h, y + \frac{1}{2}h) - f(x, y)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x + \frac{1}{2}\sqrt{3}h)^2 - (y + \frac{1}{2}h)^2 + 4(x + \frac{1}{2}\sqrt{3}h) - (3x^2 - y^2 + 4x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 3\sqrt{3}hx + \frac{3}{4}h^2 - y^2 - hy - \frac{1}{4}h^2 + 4x + 2\sqrt{3}h - 3x^2 + y^2 - 4x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3\sqrt{3}hx + \frac{3}{4}h^2 - hy - \frac{1}{4}h^2 + 2\sqrt{3}h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3\sqrt{3}x + \frac{3}{4}h - y - \frac{1}{4}h + 2\sqrt{3}) \\ &= 3\sqrt{3}x - y + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Seguimos agora para obter uma fórmula que nos possibilite calcular a derivada direcional de uma maneira mais rápida do que se usarmos a definição. Seja g a função de uma única variável t , com x , y e θ fixos, tal que

$$g(t) = f(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta) \quad (1)$$

e seja $\mathbf{U} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$. Então, pela definição de derivada ordinária,

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + (0 + h) \cos \theta, y + (0 + h) \sin \theta) - f(x + 0 \cos \theta, y + 0 \sin \theta)}{h}$$

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h \cos \theta, y + h \sin \theta) - f(x, y)}{h}$$

Como o segundo membro acima é $D_{\mathbf{U}}f(x, y)$,

$$g'(0) = D_{\mathbf{U}}f(x, y) \quad (2)$$

Encontramos agora $g'(t)$, aplicando a regra da cadeia ao segundo membro de (1), o que dá

$$\begin{aligned} g'(t) &= f_1(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta) \frac{\partial(x + t \cos \theta)}{\partial t} + f_2(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta) \frac{\partial(y + t \sin \theta)}{\partial t} \\ &= f_1(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta) \cos \theta + f_2(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta) \sin \theta \end{aligned}$$

Logo,

$$g'(0) = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta$$

Dessa equação e de (2) obtemos o teorema a seguir.

17.1.2 TEOREMA

Se f for uma função diferenciável de x e y e $\mathbf{U} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$, então

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y) = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta$$

► **ILUSTRAÇÃO 2** Aplicamos a Definição 17.1.2 para calcular $D_{\mathbf{U}}f$ para a função f e o vetor unitário \mathbf{U} da Ilustração 1:

$$f(x, y) = 3x^2 - y^2 + 4x \quad \mathbf{U} = \cos \frac{1}{6}\pi \mathbf{i} + \sin \frac{1}{6}\pi \mathbf{j}$$

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{U}}f(x, y) &= f_x(x, y) \cos \frac{1}{6}\pi + f_y(x, y) \sin \frac{1}{6}\pi \\ &= (6x + 4)\frac{1}{2}\sqrt{3} + (-2y)\frac{1}{2} \\ &= 3\sqrt{3}x - y + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

o que está de acordo com o resultado da Ilustração 1. ◀

A derivada direcional pode ser escrita como um produto escalar de dois vetores. Uma vez que

$$f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta = (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) \cdot [f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}]$$

segue do Teorema 17.1.2 que

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y) = (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) \cdot [f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}] \quad (3)$$

O segundo vetor do segundo membro de (3) é muito importante e é chamado de *gradiente* da função f . O símbolo usado para o gradiente de f é ∇f , onde ∇ é delta maiúsculo invertido e lê-se “del”. Algumas vezes a abreviação *grad* f é usada.

17.1.3 DEFINIÇÃO

Se f for uma função de duas variáveis x e y , e f_x e f_y existirem, então o **gradiente** de f , denotado por ∇f (leia “del f ”), será definido por

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$$

Da Definição 17.1.3, a equação (3) pode ser escrita como

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y) = \mathbf{U} \cdot \nabla f(x, y) \quad (4)$$

Assim sendo, qualquer derivada direcional de uma função diferenciável pode ser obtida se multiplicarmos escalarmente o gradiente pelo vetor unitário na direção e sentido desejados.

EXEMPLO 1 Se

$$f(x, y) = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{9}y^2$$

ache o gradiente e f no ponto $(4, 3)$. Ache também a taxa de variação de $f(x, y)$ na direção $\frac{1}{4}\pi$ em $(4, 3)$.

Solução Como $f_x(x, y) = \frac{1}{8}x$ e $f_y(x, y) = \frac{2}{9}y$,

$$\nabla f(x, y) = \frac{1}{8}x\mathbf{i} + \frac{2}{9}y\mathbf{j} \quad \nabla f(4, 3) = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j}$$

A taxa de variação de $f(x, y)$ na direção $\frac{1}{4}\pi$ em $(4, 3)$ é $D_{\mathbf{U}}f(4, 3)$, onde

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

Encontramos $D_U f(4, 3)$ multiplicando escalarmente $\nabla f(4, 3)$ por U .

$$\begin{aligned} D_U f(4, 3) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \mathbf{i} + \frac{2}{3} \mathbf{j} \right) \\ &= \frac{7}{6\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Se α for a medida em radianos do ângulo entre os dois vetores U e ∇f , então

$$U \cdot \nabla f(x, y) = \|U\| \|\nabla f(x, y)\| \cos \alpha$$

Dessa equação e de (4), segue que

$$D_U f(x, y) = \|U\| \|\nabla f(x, y)\| \cos \alpha \quad (5)$$

Vemos de (5) que $D_U f$ será máxima quando $\cos \alpha = 1$, isto é, quando U estiver na direção e sentido de ∇f ; e nesse caso $D_U f = \|\nabla f\|$. Assim sendo, o gradiente de uma função está na direção e sentido em que a função tem a taxa máxima de variação. Em particular, num mapa topográfico bidimensional de um terreno onde z unidades é a elevação num ponto (x, y) e $z = f(x, y)$, a direção e sentido em que a taxa de variação é máxima serão dados por $\nabla f(x, y)$; isto é, o vetor $\nabla f(x, y)$ aponta para cima na direção e sentido mais íngremes. Isso explica a denominação *gradiente* (a inclinação é mais acentuada na direção do gradiente).

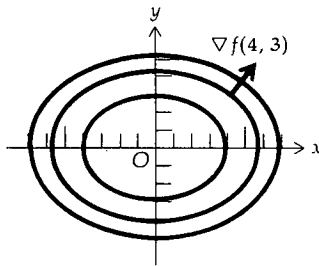


FIGURA 3

► **ILUSTRAÇÃO 3** Na Figura 3 há um mapa topográfico mostrando as curvas de nível da função do Exemplo 1 em 1, 2 e 3. As curvas de nível são elipses. A figura também mostra a representação de $\nabla f(4, 3)$, tendo $(4, 3)$ como ponto inicial. ◀

EXEMPLO 2 Dada

$$f(x, y) = 2x^2 - y^2 + 3x - y$$

ache o valor máximo de $D_U f$ no ponto onde $x = 1$ e $y = -2$.

Solução Como $f_x(x, y) = 4x + 3$ e $f_y(x, y) = -2y - 1$,

$$\nabla f(x, y) = (4x + 3)\mathbf{i} + (-2y - 1)\mathbf{j} \quad \nabla f(1, -2) = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

Assim, o valor máximo de $D_U f$ no ponto $(1, -2)$ é

$$\begin{aligned} \|\nabla f(1, -2)\| &= \sqrt{49 + 9} \\ &= \sqrt{58} \end{aligned}$$

EXEMPLO 3 A temperatura em cada ponto (x, y) de uma placa retangular situada no plano xy , é determinada por

$$T(x, y) = x^2 + y^2$$

a) Ache a taxa de variação da temperatura no ponto $(3, 4)$ na direção e sentido que fazem um ângulo de $\frac{1}{3}\pi$ rad com o eixo x positivo. (b) Ache a direção e sentido em que a taxa de variação da temperatura no ponto $(-3, 1)$ é máxima.

Solução

a) Queremos encontrar $D_U T(x, y)$ onde

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \cos \frac{1}{3}\pi \mathbf{i} + \sin \frac{1}{3}\pi \mathbf{j} & \nabla T(x, y) &= T_x(x, y)\mathbf{i} + T_y(x, y)\mathbf{j} \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{j} & &= 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} D_U T(x, y) &= \mathbf{U} \cdot \nabla T(x, y) \\ &= \left(\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{j}\right) \cdot (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}) \\ &= x + \sqrt{3}y \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} D_U T(3, 4) &= 3 + 4\sqrt{3} \\ &\approx 9,93 \end{aligned}$$

Então, em (3, 4) a temperatura está aumentando à taxa de aproximadamente 9,93 unidades por unidade de variação medido na direção e sentido de \mathbf{U} .

b) $D_U T(-3, 1)$ será um máximo quando \mathbf{U} estiver na direção e sentido de $\nabla T(-3, 1)$. Como $\nabla T(-3, 1) = -6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, a medida em radianos do ângulo que dá a direção e o sentido de $\nabla T(-3, 1)$ é θ , onde $\text{tg } \theta = \frac{1}{3}$. Assim, $\theta = \pi - \text{tg}^{-1} \frac{1}{3}$. Logo, a taxa de variação da temperatura no ponto $(-3, 1)$ é máxima quando tomada na direção e sentido que fazem um ângulo de $\pi - \text{tg}^{-1} \frac{1}{3}$ rad com o eixo x positivo.

Vamos agora estender para uma função de três variáveis a definição de derivada direcional. No espaço tridimensional a direção e o sentido de um vetor são determinados pelos seus co-senos diretores. Se $\cos \alpha$, $\cos \beta$ e $\cos \gamma$ forem os co-senos diretores do vetor unitário \mathbf{U} , então $\mathbf{U} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$.

17.1.4 DEFINIÇÃO

Suponha que f seja uma função de três variáveis x , y e z . Se \mathbf{U} for o vetor unitário $\cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$, então a **derivada direcional** de f na direção de \mathbf{U} , denotada por $D_U f$, será dada por

$$D_U f(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h \cos \alpha, y + h \cos \beta, z + h \cos \gamma) - f(x, y, z)}{h}$$

se este limite existir.

A derivada direcional de uma função de três variáveis dá a taxa de variação dos valores funcionais $f(x, y, z)$ em relação à distância no espaço tridimensional, medida na direção e sentido do vetor unitário \mathbf{U} .

O teorema a seguir, que fornece um método de cálculo da derivada direcional de uma função de três variáveis é demonstrado de forma análoga ao Teorema 17.1.12.

17.1.5 TEOREMA

Se f for uma função diferenciável de x , y e z e

$$\mathbf{U} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$$

então

$$D_U f(x, y, z) = f_x(x, y, z) \cos \alpha + f_y(x, y, z) \cos \beta + f_z(x, y, z) \cos \gamma$$

EXEMPLO 4 Dada

$$f(x, y, z) = 3x^2 + xy - 2y^2 - yz + z^2$$

ache a taxa de variação de $f(x, y, z)$ em $(1, -2, -1)$ na direção e sentido do vetor $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Solução O vetor unitário na direção e sentido de $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ é

$$\mathbf{U} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}$$

Assim, do Teorema 17.1.5

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y, z) = \frac{2}{3}(6x + y) - \frac{2}{3}(x - 4y - z) - \frac{1}{3}(-y + 2z)$$

Logo, a taxa de variação de $f(x, y, z)$ em $(1, -2, -1)$ na direção e sentido de \mathbf{U} , é dada por

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{U}}f(1, -2, -1) &= \frac{2}{3}(4) - \frac{2}{3}(10) - \frac{1}{3}(0) \\ &= -4 \end{aligned}$$

17.1.6 DEFINIÇÃO

Se f for uma função de três variáveis x , y e z e as derivadas parciais f_x , f_y e f_z existirem, então o **gradiente** de f , denotado por ∇f , será definido por

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}$$

Da mesma forma que para funções de duas variáveis, segue do Teorema 17.1.5 e da Definição 17.1.6 que se $\mathbf{U} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$, então

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y, z) = \mathbf{U} \cdot \nabla f(x, y, z)$$

Também, a derivada direcional será um máximo quando \mathbf{U} estiver na direção e sentido do gradiente e a derivada direcional máxima será o módulo do gradiente.

Aplicações do gradiente aparecem em Física, em problemas de condução do calor e eletricidade. Suponha que $w = f(x, y, z)$. A superfície de nível dessa função f para o valor constante k é dada por

$$f(x, y, z) = k \tag{6}$$

Se w for o número de graus da temperatura no ponto (x, y, z) , então todos os pontos na superfície dada pela equação (6) terão a mesma temperatura e k graus, e a superfície será chamada de **superfície isotérmica**. Se w for o número de volts do potencial elétrico no ponto (x, y, z) , então todos os pontos da superfície estarão no mesmo potencial e a superfície será chamada de **superfície equipotencial**. O vetor gradiente em um ponto dá a direção e o sentido de maior taxa de variação de w . Assim, se a superfície de nível da equação (6) for isotérmica, $\nabla f(x, y, z)$ dará a direção e sentido da maior taxa de variação da temperatura em (x, y, z) . Se (6) for a equação de uma superfície equipotencial, então $\nabla f(x, y, z)$ dará a direção e sentido da maior taxa de variação do potencial em (x, y, z) .

EXEMPLO 5 Se $V(x, y, z)$ volts for o potencial elétrico num ponto (x, y, z) do espaço tridimensional e

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

ache: (a) a taxa de variação de V no ponto $(2, 2, -1)$, na direção do vetor $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, (b) a direção e sentido em que se dá a maior taxa de variação de V em $(2, 2, -1)$.

Solução

(a) Um vetor unitário na direção e sentido de $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ é

$$\mathbf{U} = \frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}$$

Queremos encontrar $D_{\mathbf{U}}V(2, 2, -1)$.

$$\begin{aligned}\nabla V(x, y, z) &= V_x(x, y, z)\mathbf{i} + V_y(x, y, z)\mathbf{j} + V_z(x, y, z)\mathbf{k} \\ &= \frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{j} + \frac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{k}\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{U}}V(2, 2, -1) &= \mathbf{U} \cdot \nabla V(2, 2, -1) \\ &= \left(\frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{1}{7}\mathbf{k}\right) \\ &= -\frac{4}{189} + \frac{6}{189} + \frac{6}{189} \\ &= \frac{8}{189} \\ &\approx 0,042\end{aligned}$$

Assim sendo, em $(2, 2, -1)$ o potencial é crescente, a uma taxa de aproximadamente 0,042 volt por unidade de variação, na distância medida na direção e sentido de \mathbf{U} .

(b) $\nabla V(2, 2, -1) = -\frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{1}{7}\mathbf{k}$. Um vetor unitário na direção e sentido de $\nabla V(2, 2, -1)$ é

$$\begin{aligned}\frac{\nabla V(2, 2, -1)}{\|\nabla V(2, 2, -1)\|} &= \frac{-\frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{1}{7}\mathbf{k}}{\frac{3}{7}} \\ &= -\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}\end{aligned}$$

Os co-senos diretores desse vetor são $-\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{3}$, o que dá a direção e sentido da maior taxa de variação de V em $(2, 2, -1)$.

EXERCÍCIOS 17.1

Nos Exercícios de 1 a 6, ache a derivada direcional da função dada na direção e sentido do vetor unitário \mathbf{U} dado, usando a Definição 17.1.1 ou a Definição 17.1.4, e então verifique seu resultado, aplicando o Teorema 17.1.2 ou o Teorema 17.1.5, conforme o caso.

- $f(x, y) = 2x^2 + 5y^2$; $\mathbf{U} = \cos \frac{1}{4}\pi\mathbf{i} + \sin \frac{1}{4}\pi\mathbf{j}$
- $g(x, y) = 3x^2 - 4y^2$; $\mathbf{U} = \cos \frac{1}{3}\pi\mathbf{i} + \sin \frac{1}{3}\pi\mathbf{j}$
- $h(x, y, z) = 3x^2 + y^2 - 4z^2$; $\mathbf{U} = \cos \frac{1}{3}\pi\mathbf{i} + \cos \frac{1}{4}\pi\mathbf{j} + \cos \frac{2}{3}\pi\mathbf{k}$
- $f(x, y, z) = 6x^2 - 2xy + yz$; $\mathbf{U} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{2}{5}\mathbf{j} + \frac{4}{5}\mathbf{k}$

$$5. g(x, y) = \frac{1}{x-y}; \mathbf{U} = -\frac{12}{13}\mathbf{i} + \frac{5}{13}\mathbf{j}$$

$$6. f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}; \mathbf{U} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$$

Nos Exercícios de 7 a 14, ache o gradiente da função dada.

$$7. f(x, y) = 4x^2 - 3xy + y^2 \quad 8. g(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$9. g(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$10. f(x, y) = e^y \operatorname{tg} 2x$$

$$11. f(x, y, z) = \frac{x-y}{x+z}$$

$$12. f(x, y, z) = 3z \ln(x+y)$$

$$13. g(x, y, z) = xe^{-2y} \sec z$$

$$14. g(x, y, z) = e^{2z}(\sin x - \cos y)$$

Nos Exercícios de 15 a 22, ache o valor da derivada direcional no ponto P_0 para a função dada na direção e sentido de \mathbf{U} .

$$15. f(x, y) = x^2 - 2xy^2; \mathbf{U} = \cos \pi\mathbf{i} + \sin \pi\mathbf{j}; P_0 = (1, -2)$$

$$16. g(x, y) = 3x^3y + 4y^2 - xy; \mathbf{U} = \cos \frac{1}{4}\pi\mathbf{i} + \sin \frac{1}{4}\pi\mathbf{j}; P_0 = (0, 3)$$

$$17. g(x, y) = y^2 \operatorname{tg}^2 x; \mathbf{U} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}; P_0 = \left(\frac{1}{3}\pi, 2\right)$$

$$18. f(x, y) = xe^{2y}; \mathbf{U} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{j}; P_0 = (2, 0)$$

$$19. h(x, y, z) = \cos(xy) + \sin(yz); \mathbf{U} = -\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}; P_0 = (2, 0, -3)$$

$$20. f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2); \mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k};$$

$$P_0 = (1, 3, 2)$$

$$21. f(x, y) = e^{-3x} \cos 3y; \mathbf{U} = \cos(-\frac{1}{2}\pi)\mathbf{i} + \sin(-\frac{1}{2}\pi)\mathbf{j};$$

$$P_0 = (-\frac{1}{2}\pi, 0)$$

$$22. g(x, y, z) = \cos 2x \cos 3y \sinh 4z;$$

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}; P_0 = (\frac{1}{2}\pi, 0, 0)$$

Nos Exercícios de 23 a 26, ache (a) o gradiente de f em P e (b) a taxa de variação dos valores funcionais na direção de \mathbf{U} em P .

$$23. f(x, y) = x^2 - 4y; P = (-2, 2); \mathbf{U} = \cos \frac{1}{3}\pi\mathbf{i} + \sin \frac{1}{3}\pi\mathbf{j}$$

$$24. f(x, y) = e^{2xy}; P = (2, 1); \mathbf{U} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j}$$

$$25. f(x, y, z) = y^2 + z^2 - 4xz; P = (-2, 1, 3); \mathbf{U} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$$

$$26. f(x, y, z) = 2x^3 + xy^2 + xz^2; P = (1, 1, 1);$$

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$$

27. Para um mapa topográfico mostrando as curvas de nível da função do Exercício 23, em 8, 4, 0, -4 e -8. Mostre também a representação de $\nabla f(-2, 2)$, tendo seu ponto inicial em $(-2, 2)$.

28. Faça um mapa topográfico mostrando as curvas de nível da função do Exercício 24, em e^8 , e^4 , 1, e^{-4} e e^{-8} . Mostre também a representação de $\nabla f(2, 1)$, tendo seu ponto inicial em $(2, 1)$.

Nos Exercícios de 29 a 32, ache $D_{\mathbf{U}}f$ no ponto P dado, onde \mathbf{U} é o vetor unitário na direção e sentido \overrightarrow{PQ} . Também em P ache $D_{\mathbf{U}}f$, se \mathbf{U} for um vetor unitário para o qual $D_{\mathbf{U}}f$ é um máximo.

$$29. f(x, y) = e^x \operatorname{tg}^{-1} y; P(0, 1), Q(3, 5)$$

$$30. f(x, y) = e^x \cos y + e^y \sin x; P(1, 0), Q(-3, 3)$$

$$31. f(x, y, z) = x - 2y + z^2; P(3, 1, -2), Q(10, 7, 4)$$

$$32. f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4xz; P(3, 1, -2), Q(-6, 3, 4)$$

33. Ache a direção e o sentido a partir do ponto $(1, 3)$ para a qual os valores de f não mudam, sendo $f(x, y) = e^{2y} \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{3x}$.

34. A densidade é $\rho(x, y)$ kg/m² em todos os pontos de uma placa retangular no plano xy e

$$\rho(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 3}}$$

(a) Ache a taxa de variação da densidade no ponto $(3, 2)$, na direção e sentido do vetor unitário $\cos \frac{2}{3}\pi\mathbf{i} + \sin \frac{2}{3}\pi\mathbf{j}$.
(b) Ache a direção e sentido e o valor da maior taxa de variação de ρ em $(3, 2)$.

35. A temperatura é $T(x, y)$ graus em qualquer ponto de uma placa retangular situada no plano xy e $T(x, y) = 3x^2 + 2xy$. A distância é medida em metros. (a) Ache a taxa de variação máxima da temperatura no ponto $(3, -6)$ da placa. (b) Ache a direção e sentido em que a taxa de variação é máxima em $(3, -6)$.

36. A temperatura é $T(x, y, z)$ graus em qualquer ponto de um sólido no espaço tridimensional, e

$$T(x, y, z) = \frac{60}{x^2 + y^2 + z^2 + 3}$$

A distância é medida em centímetros. (a) Ache a taxa de variação da temperatura no ponto $(3, -2, 2)$, na direção e sentido do vetor $-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$. (b) Ache a direção e sentido e o valor máximo da taxa de variação de T em $(3, -2, 2)$.

37. O potencial elétrico é $V(x, y)$ volts em qualquer ponto do plano xy e $V(x, y) = e^{-2x} \cos 2y$. A distância é medida em metros. (a) Ache a taxa de variação do potencial no ponto $(0, \frac{1}{4}\pi)$, na direção do vetor unitário $\cos \frac{1}{6}\pi\mathbf{i} + \sin \frac{1}{6}\pi\mathbf{j}$. (b) Ache a direção e sentido e o valor da taxa de variação máxima de V em $(0, \frac{1}{4}\pi)$.

38. A equação da superfície de uma montanha é

$$z = 1200 - 3x^2 - 2y^2$$

onde a distância é medida em metros, o eixo x aponta para o leste e o eixo y para o norte. Uma alpinista está no ponto correspondente a $(-10, 5, 850)$. (a) Qual a direção onde a subida é mais íngreme? (b) Se a alpinista se move na direção leste, ela está subindo ou descendo, e qual a sua taxa? (c) Se a alpinista se move na direção sudoeste, ela está subindo ou descendo, e qual a sua taxa? (d) Em que direção ela estará sobre uma curva de nível?

17.2 PLANOS TANGENTES E NORMAIS A SUPERFÍCIES

Seja S a superfície tendo a equação

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

e suponha que $P_0(x_0, y_0, z_0)$ seja um ponto de S . Então, $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Suponha ainda que C seja uma curva em S que passa por P_0 e que um conjunto de equações paramétricas de C seja

$$x = f(t) \quad y = g(t) \quad z = h(t) \tag{2}$$

onde o valor do parâmetro t no ponto P_0 é t_0 . Uma equação vetorial de C é

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

Como a curva C está na superfície S , substituindo (2) em (1), temos

$$F(f(t), g(t), h(t)) = 0 \tag{3}$$

Seja $G(t) = F(f(t), g(t), h(t))$. Se F_x, F_y e F_z forem contínuas e nem todas nulas em P_0 , e se $f'(t_0), g'(t_0)$ e $h'(t_0)$ existirem, então a derivada total de F em relação a t em P_0 será dada por

$$G'(t_0) = F_x(x_0, y_0, z_0)f'(t_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)g'(t_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)h'(t_0)$$

O primeiro membro dessa igualdade pode ser escrito como

$$[F_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + F_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j} + F_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{k}] \cdot [f'(t_0)\mathbf{i} + g'(t_0)\mathbf{j} + h'(t_0)\mathbf{k}]$$

Assim,

$$G'(t_0) = \nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot D_t \mathbf{R}(t_0)$$

Uma vez que $G'(t) = 0$ para todo t em consideração (devido a (3)), $G'(t_0) = 0$; então, segue do que já foi exposto que

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot D_t \mathbf{R}(t_0) = 0 \tag{4}$$

Da Secção 15.8 sabemos que $D_t \mathbf{R}(t_0)$ tem a mesma direção que um vetor tangente à curva C em P_0 . Logo, de (4) podemos concluir que o gradiente de F em P_0 é ortogonal ao vetor tangente de qualquer curva C em S que passa pelo ponto P_0 . Somos levados, então, à definição a seguir.

17.2.1 DEFINIÇÃO

Um vetor que é ortogonal a todo vetor que seja tangente a alguma curva C da superfície S no ponto P_0 , é chamado de **vetor normal** a S no ponto P_0 .

Dessa definição e da discussão precedente temos o teorema a seguir.

17.2.2 TEOREMA

Se uma equação de uma superfície S for dada por $F(x, y, z) = 0$ e F_x, F_y e F_z forem contínuas e nem todas nulas no ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ em S , então o vetor normal a S em P_0 será $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$.

O conceito de vetor normal é usado para definir o *plano tangente* a uma superfície em um ponto.

17.2.3 DEFINIÇÃO

Se uma equação de uma superfície S for dada por $F(x, y, z) = 0$, então o **plano tangente** a S num ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ será o plano que passa por P_0 tendo $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ como vetor normal.

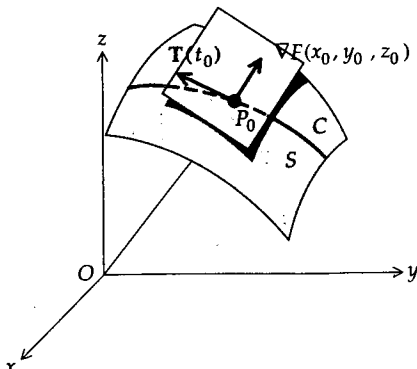


FIGURA 1

Uma equação do plano tangente da definição acima é

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0 \tag{5}$$

Consulte a Figura 1 que mostra o plano tangente à superfície S em P_0 e a representação do vetor gradiente, tendo como ponto inicial P_0 .

Uma equação vetorial do plano tangente dado por (5) é

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot [(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}] = 0 \tag{6}$$

EXEMPLO 1 Ache uma equação do plano tangente ao parabolóide elíptico

$$4x^2 + y^2 - 16z = 0$$

no ponto $(2, 4, 2)$.

Solução Seja $F(x, y, z) = 4x^2 + y^2 - 16z$. Então,

$$\nabla F(x, y, z) = 8xi + 2yj - 16k \quad \nabla F(2, 4, 2) = 16i + 8j - 16k$$

De (6), segue que uma equação do plano tangente é

$$16(x - 2) + 8(y - 4) - 16(z - 2) = 0$$

$$2x + y - 2z - 4 = 0$$

17.2.4 DEFINIÇÃO

A **reta normal** a uma superfície S no ponto P_0 de S é a reta que passa por P_0 e tem por números direcionais as componentes de qualquer vetor normal a S em P_0 .

Se uma equação da superfície S for $F(x, y, z) = 0$, as equações simétricas da reta normal a S em $P_0(x_0, y_0, z_0)$ serão

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

Essas equações simétricas seguem da Definição 17.2.4, pois os denominadores são as componentes de $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ que é um vetor normal a S em P_0 . A reta normal em um ponto de uma superfície é perpendicular ao seu plano tangente nesse ponto.

EXEMPLO 2 Ache as equações simétricas da reta normal à superfície do Exemplo 1 em $(2, 4, 2)$.

Solução Como $\nabla F(2, 4, 2) = 16i + 8j - 16k$, segue que as equações simétricas da reta normal pedida são

$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y - 4}{1} = \frac{z - 2}{-2}$$

17.2.5 DEFINIÇÃO

A **reta tangente** a uma curva C em um ponto P_0 é a reta que passa por P_0 , tendo como números direcionais as componentes do vetor tangente unitário a C em P_0 .

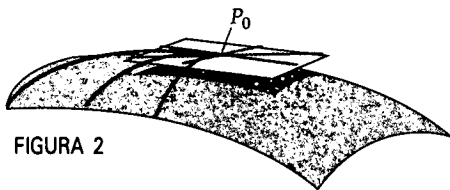


FIGURA 2

Das Definições 17.2.3 e 17.2.5, todas as retas tangentes no ponto P_0 às curvas sobre uma dada superfície estão no plano tangente à superfície em P_0 . Veja na Figura 2 esboços de uma superfície e do plano tangente em P_0 . Algumas curvas que passam por P_0 e suas retas tangentes também estão esboçadas na figura.

Considere uma curva C que seja a intersecção de duas superfícies, tendo as equações

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{e} \quad G(x, y, z) = 0$$

respectivamente. Mostraremos como obter as equações da reta tangente a C no ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Como a reta tangente está em cada um dos planos tangentes às superfícies dadas em P_0 , ela é a reta de intersecção dos planos tangentes. Seja N_1 um vetor normal à superfície $F(x, y, z) = 0$ em P_0 e N_2 um vetor normal à superfície $G(x, y, z) = 0$ em P_0 . Então,

$$N_1 = \nabla F(x_0, y_0, z_0) \quad \text{e} \quad N_2 = \nabla G(x_0, y_0, z_0)$$

Ambos, N_1 e N_2 , são ortogonais ao vetor tangente unitário a C em P_0 ; assim, se N_1 e N_2 não forem paralelos, segue do Teorema 15.5.10 que o vetor tangente unitário tem direção e sentido iguais aos de $N_1 \times N_2$. Logo, as componentes de $N_1 \times N_2$ servem como um conjunto de números direcionais da reta tangente. Desse conjunto de números direcionais e das coordenadas de P_0 podemos obter a equação pedida da reta tangente. Isso está ilustrado no exemplo a seguir.

EXEMPLO 3 Ache as equações simétricas da reta tangente à curva de intersecção das superfícies

$$3x^2 + 2y^2 + z^2 = 49 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 - 2z^2 = 10$$

no ponto $(3, -3, 2)$.

Solução Seja

$$F(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 49 \quad \text{e} \quad G(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2 - 10$$

Então, $\nabla F(x, y, z) = 6xi + 4yj + 2zk$ e $\nabla G(x, y, z) = 2xi + 2yj - 4zk$. Logo,

$$\begin{aligned} N_1 &= \nabla F(3, -3, 2) & N_2 &= \nabla G(3, -3, 2) \\ &= 18i - 12j + 4k & &= 6i - 6j - 8k \\ &= 2(9i - 6j + 2k) & &= 2(3i - 3j - 4k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_1 \times N_2 &= 4(9i - 6j + 2k) \times (3i - 3j - 4k) \\ &= 4(30i + 42j - 9k) \\ &= 12(10i + 14j - 3k) \end{aligned}$$

Portanto, um conjunto de números direcionais da reta tangente procurada é $[10, 14, -3]$. As equações simétricas da reta são, então,

$$\frac{x - 3}{10} = \frac{y + 3}{14} = \frac{z - 2}{-3}$$

Se duas superfícies tiverem um plano tangente comum em um ponto, elas serão **tangentes** naquele ponto. Segue, da Definição 17.2.3, que duas superfícies S_1 e S_2 , cujas equações são $F(x, y, z) = 0$ e $G(x, y, z) = 0$, respectivamente, são tangentes no ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ se, para alguma constante k

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = k\nabla G(x_0, y_0, z_0)$$

EXERCÍCIOS 17.2

Nos Exercícios de 1 a 12, ache uma equação do plano tangente e as equações da reta normal à superfície no ponto indicado.

- $x^2 + y^2 + z^2 = 17$; $(2, -2, 3)$
- $4x^2 + y^2 + 2z^2 = 26$; $(1, -2, 3)$
- $x^2 + y^2 - 3z = 2$; $(-2, -4, 6)$
- $x^2 + y^2 - z^2 = 6$; $(3, -1, 2)$
- $y = e^x \cos z$; $(1, e, 0)$
- $z = e^{3x} \sin 3y$; $(0, \frac{1}{6}\pi, 1)$
- $x^2 = 12y$; $(6, 3, 3)$
- $z = x^{1/2} + y^{1/2}$; $(1, 1, 2)$
- $x^{1/2} + y^{1/2} + z^{1/2} = 4$; $(4, 1, 1)$
- $zx^2 - xy^2 - yz^2 = 18$; $(0, -2, 3)$
- $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = 14$; $(-8, 27, 1)$
- $x^{1/2} + z^{1/2} = 8$; $(25, 2, 9)$

Nos Exercícios de 13 a 20, se as duas superfícies dadas interceptam-se numa curva, ache as equações da reta tangente à curva de intersecção no ponto dado; se as duas superfícies forem tangentes no ponto dado, prove isso.

- $x^2 + y^2 - z = 8$, $x - y^2 + z^2 = -2$; $(2, -2, 0)$
- $x^2 + y^2 - 2z + 1 = 0$, $x^2 + y^2 - z^2 = 0$; $(0, 1, 1)$
- $y = x^2$, $y = 16 - z^2$; $(4, 16, 0)$

- 16. $x = 2 + \cos \pi yz, y = 1 + \operatorname{sen} \pi xz; (3, 1, 2)$
- 17. $y = e^x \operatorname{sen} 2\pi z + 2, z = y^2 - \ln(x + 1) - 3; (0, 2, 1)$
- 18. $x^2 - 3xy + y^2 = z, 2x^2 + y^2 - 3z + 27 = 0; (1, -2, 11)$
- 19. $x^2 + z^2 + 4y = 0, x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 7 = 0; (0, -1, 2)$
- 20. $x^2 + y^2 + z^2 = 8, yz = 4; (0, 2, 2)$
- 21. Mostre que as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e $(x - b)^2 + y^2 + z^2 = (b - a)^2$ são tangentes no ponto $(a, 0, 0)$.
- 22. Mostre que as superfícies $xyz = 36$ e $4x^2 + y^2 + 9z^2 = 108$ são tangentes no ponto $(3, 6, 2)$.
- 23. Duas superfícies são *perpendiculares* em um ponto P_0 de intersecção se os vetores normais às superfícies em P_0 forem ortogonais. Mostre que a superfície $x^2 - 2yz + y^3 = 4$ é perpendicular a todo membro da família de superfície $x^2 + (4c - 2)y^2 - cz^2 + 1 = 0$ no ponto $(1, -1, 2)$.
- 24. Prove que toda reta normal à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ passa pelo centro da esfera.

17.3 EXTREMOS DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Uma aplicação importante da derivada de uma função de uma única variável consiste no estudo dos valores extremos de uma função que nos leva a uma variedade de problemas envolvendo máximos e mínimos. Isso foi discutido no Capítulo 4, onde provamos teoremas envolvendo as derivadas primeira e segunda, a partir dos quais os valores máximos e mínimos relativos de uma função foram determinados. Ao estender a teoria para funções de duas variáveis, você verá que ela é similar ao caso de uma variável; contudo, algumas complicações aparecem.

17.3.1 DEFINIÇÃO

A função f de duas variáveis tem um **valor máximo relativo** no ponto (x_0, y_0) se existir um disco aberto $B((x_0, y_0); r)$, tal que $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ para todo (x, y) em B .

17.3.2 DEFINIÇÃO

A função f de duas variáveis tem um **valor mínimo relativo** no ponto (x_0, y_0) se existir um disco aberto $B((x_0, y_0); r)$, tal que $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ para todo (x, y) em B .

► **ILUSTRAÇÃO 1** Na Figura 1 está o gráfico da função f definida por

$$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

Seja B qualquer disco aberto $((0, 0); r)$ onde $r \leq 5$. Da Definição 17.3.1, segue que f tem um valor máximo relativo de 5 no ponto onde $x = 0$ e $y = 0$.

Na Figura 2 aparece um esboço do gráfico da função g para a qual

$$g(x, y) = x^2 + y^2$$

Seja B qualquer disco aberto $((0, 0); r)$. Então, da Definição 17.3.2, g tem um valor mínimo relativo de 0 na origem. ◀

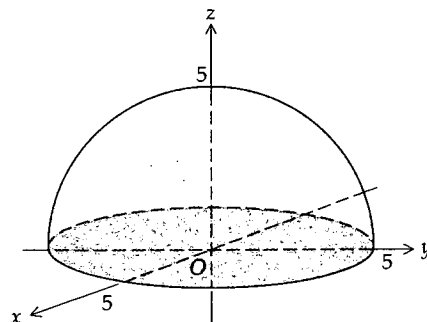


FIGURA 1

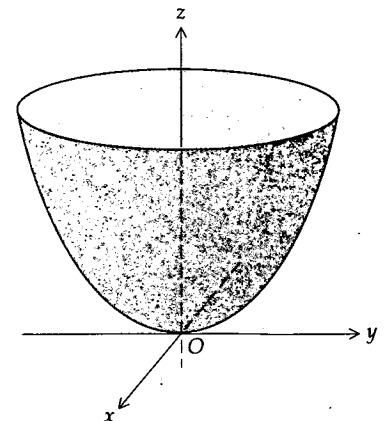


FIGURA 2

Análogo ao Teorema 4.1.3 para funções de uma variável, existe o seguinte teorema para funções de duas variáveis.

17.3.3 TEOREMA

Seja $f(x, y)$ definida em todos os pontos de algum disco aberto $B(x_0, y_0; r)$ e tendo um extremo relativo em (x_0, y_0) . Então, se existirem $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$, teremos

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

Antes de demonstrar o Teorema 17.3.3, vamos dar um argumento geométrico informal. Seja f uma função satisfazendo as hipóteses e suponha que f tenha um valor máximo relativo em (x_0, y_0) . Considere a curva de intersecção do plano $y = y_0$ com a superfície $z = f(x, y)$ (consulte a Figura 3). Essa curva é representada pelas equações

$$y = y_0 \quad \text{e} \quad z = f(x, y)$$

Como f tem um valor máximo relativo no ponto onde $x = x_0, y = y_0$, segue que essa curva tem uma reta tangente horizontal no plano $y = y_0$, em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. A inclinação dessa reta tangente $f_x(x_0, y_0)$; assim $f_x(x_0, y_0) = 0$. De uma forma similar podemos considerar a curva de intersecção do plano $x = x_0$ com a superfície $z = f(x, y)$ e obter $f_y(x_0, y_0) = 0$. Uma discussão similar pode ser feita se f tiver um valor mínimo relativo em (x_0, y_0) . A seguir está a demonstração formal.

Prova do Teorema 17.3.3 Vamos provar que se f tiver um valor máximo relativo em (x_0, y_0) e se $f_x(x_0, y_0)$ existir, então $f_x(x_0, y_0) = 0$. Pela definição da derivada parcial,

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Como f tem um valor máximo relativo em (x_0, y_0) , pela Definição 17.3.1,

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \leq 0$$

sempre que Δx for suficientemente pequeno, de tal forma que $(x_0 + \Delta x, y_0)$ esteja em B . Se Δx tender a zero pela direita, $\Delta x > 0$; logo,

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \leq 0$$

Assim, pelo Teorema 2.10.3, se $f_x(x_0, y_0)$ existir, $f_x(x_0, y_0) \leq 0$.

Analogamente, se Δx tender a zero pela esquerda, $\Delta x < 0$ e

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \geq 0$$

Logo, pelo Teorema 2.10.4, se $f_x(x_0, y_0)$ existir, $f_x(x_0, y_0) \geq 0$. Concluímos, então, que, existindo $f_x(x_0, y_0)$, ambas as desigualdades, $f_x(x_0, y_0) \leq 0$ e $f_x(x_0, y_0) \geq 0$, devem ser válidas. Conseqüentemente, $f_x(x_0, y_0) = 0$.

A demonstração de que $f_y(x_0, y_0) = 0$ se $f_y(x_0, y_0)$ existir e f tiver um valor máximo relativo em (x_0, y_0) , é análoga e será deixada como exercício (veja o Exercício 37). A demonstração do teorema quando $f(x_0, y_0)$ for um valor mínimo relativo também será deixada como exercício (veja o Exercício 38). ■

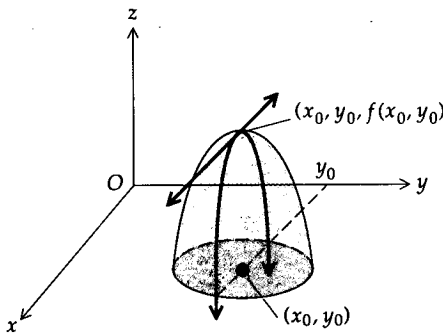


FIGURA 3

17.3.4 DEFINIÇÃO

Um ponto (x_0, y_0) para o qual temos ambas as igualdades $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$, é chamado de **ponto crítico**.

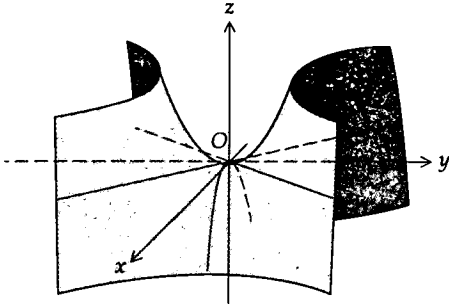


FIGURA 4

O Teorema 17.3.3 estabelece que uma condição necessária para que uma função de duas variáveis tenha um extremo relativo em um ponto, onde suas derivadas parciais primeiras existem, é que ele seja um ponto crítico. É possível, para uma função de duas variáveis, ter um extremo relativo em um ponto no qual as derivadas parciais não existem, mas não iremos considerar tal situação neste livro. Além disso, a anulação das derivadas parciais primeiras de uma função de duas variáveis não é uma condição suficiente para que a função tenha um extremo relativo no ponto. Isso ocorre na ilustração a seguir.

► **ILUSTRAÇÃO 2** Seja f a função definida por

$$f(x, y) = y^2 - x^2$$

Então,

$$f_x(x, y) = -2x \quad f_y(x, y) = 2y$$

Ambas, $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$, são nulas. Um esboço do gráfico de f aparece na Figura 4; os pontos próximos à origem dão ao gráfico uma forma de sela. É claro que f não satisfaz as Definições 17.3.1 ou 17.3.2 quando $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Na Ilustração 2, o ponto $(0, 0)$ é chamado de *ponto de sela* da função f . Há um teste da derivada segunda que dá condições que garantem a existência de extremos relativos para uma função em um ponto onde suas derivadas parciais são nulas. Contudo, algumas vezes é possível determinar os extremos de uma função pelas Definições 17.3.1 e 17.3.2, conforme está mostrado na ilustração a seguir.

► **ILUSTRAÇÃO 3** Seja f a função definida por

$$f(x, y) = 6x - 4y - x^2 - 2y^2$$

Vamos determinar se f tem algum extremo relativo.

Como f e suas derivadas parciais existem em todo (x, y) em R^2 , o Teorema 17.3.3 é aplicável. Derivados, obtemos

$$f_x(x, y) = 6 - 2x \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = -4 - 4y$$

Expressando $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ iguais a zero, obtemos $x = 3$ e $y = -1$. Veja a Figura 5 para um esboço do gráfico da equação

$$z = 6x - 4y - x^2 - 2y^2$$

É um parabolóide tendo um eixo vertical, com vértice em $(3, -1, 11)$ e abrindo para baixo. Podemos concluir que $f(x, y) \leq f(3, -1)$ para todo (x, y) ; logo, pela Definição 15.3.1, $f(3, -1) = 11$ é um valor máximo relativo da função.

O teste básico para determinar máximos e mínimos para funções de duas variáveis é o teste da derivada segunda, dado no teorema a seguir.

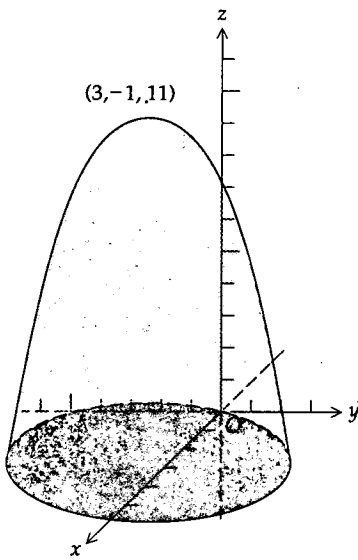


FIGURA 5

17.3.5 TEOREMA
Teste da Derivada Segunda

Seja f uma função de duas variáveis, tal que f e suas derivadas primeira e segunda sejam contínuas em algum disco aberto $B((a, b); r)$. Suponhamos, além disso, que $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$. Então,

(i) f tem um valor mínimo relativo em (a, b) se

$$f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) > 0 \quad \text{e} \quad f_{xx}(a, b) > 0 \quad (\text{ou} \quad f_{yy}(a, b) > 0)$$

(ii) f tem um valor máximo relativo em (a, b) se

$$f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) > 0 \quad \text{e} \quad f_{xx}(a, b) < 0 \quad (\text{ou} \quad f_{yy}(a, b) < 0)$$

(iii) $f(a, b)$ não é um extremo relativo se

$$f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) < 0$$

(iv) Não podemos tirar conclusão nenhuma se

$$f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) = 0.$$

Adiaremos a discussão da prova do teste da derivada segunda até o final desta secção, onde provaremos a parte (i).

EXEMPLO 1 Se

$$f(x, y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$$

determine, caso haja, os extremos relativos de f .

Solução Para aplicar o teste da derivada segunda, calculamos primeiro as derivadas primeira e segunda de f .

$$f_x(x, y) = 8x^3 - 2x \quad f_y(x, y) = 2y - 2$$

$$f_{xx}(x, y) = 24x^2 - 2 \quad f_{yy}(x, y) = 2 \quad f_{xy}(x, y) = 0$$

Resolvendo $f_x(x, y) = 0$, obtemos $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$. Resolvendo agora $f_y(x, y) = 0$, obtemos $y = 1$. Logo, f_x e f_y são ambas nulas nos pontos $(-\frac{1}{2}, 1)$, $(0, 1)$ e $(\frac{1}{2}, 1)$ e esses são os pontos críticos de f . Os resultados da aplicação do teste da derivada segunda a esses pontos estão resumidos na Tabela 1.

Tabela 1

Ponto crítico	f_{xx}	f_{yy}	f_{xy}	$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$	Conclusão
$(-\frac{1}{2}, 1)$	4	2	0	8	f tem um valor mínimo relativo
$(0, 1)$	-2	2	0	-4	f não tem um extremo relativo
$(\frac{1}{2}, 1)$	4	2	0	8	f tem um valor mínimo relativo

No ponto $(-\frac{1}{2}, 1)$, $f_{xx} > 0$ e $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$; assim, do Teorema 17.3.5 (i), f tem um valor mínimo relativo em $(-\frac{1}{2}, 1)$. Em $(0, 1)$, $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$; assim, do Teorema 17.3.5 (iii), f não tem extremo relativo em $(0, 1)$. Como $f_{xx} > 0$ e $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ em $(\frac{1}{2}, 1)$, f tem um valor mínimo relativo nesse ponto pelo Teorema 17.3.5(i).

Como $f(-\frac{1}{2}, 1) = -\frac{9}{8}$ e $f(\frac{1}{2}, 1) = -\frac{9}{8}$, concluímos que f tem um valor mínimo relativo de $-\frac{9}{8}$ em cada um dos pontos $(-\frac{1}{2}, 1)$ e $(\frac{1}{2}, 1)$.

Vamos discutir agora extremos absolutos de funções de duas variáveis.

17.3.6 DEFINIÇÃO

A função f de duas variáveis terá um **valor máximo absoluto** em seu domínio D , no plano xy , se existir algum ponto (x_0, y_0) em D , tal que $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ para todos os pontos (x, y) em D . Em tal caso, $f(x_0, y_0)$ é denominado o valor máximo absoluto de f em D .

17.3.7 DEFINIÇÃO

A função f de duas variáveis terá um **valor mínimo absoluto** em seu domínio D , no plano xy , se existir algum ponto (x_0, y_0) em D , tal que $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ para todos os pontos (x, y) em D . Em tal caso, $f(x_0, y_0)$ é denominado o valor mínimo absoluto de f em D .

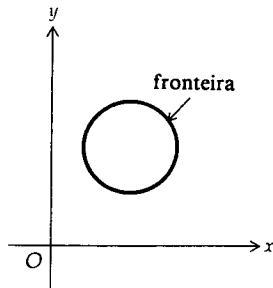


FIGURA 6

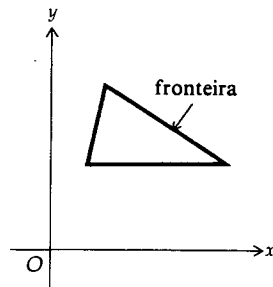


FIGURA 7

Para funções de uma única variável, tínhamos o teorema do valor extremo: Se a função f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então f terá um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em $[a, b]$. Sabemos que um extremo absoluto de uma função contínua num intervalo fechado deve ser um valor funcional extremo relativo ou um valor funcional na fronteira do intervalo. Temos uma situação correspondente para funções de duas variáveis. No enunciado do teorema do valor extremo para funções de duas variáveis, vamos nos referir a uma *região fechada*, no plano xy . Por **região fechada** entendemos aquela que inclui sua *fronteira*. Na ilustração a seguir damos algumas regiões fechadas e identificamos a fronteira de cada região.

► **ILUSTRAÇÃO 4** (a) Um disco fechado é uma região fechada. A fronteira é a circunferência do disco. Veja a Figura 6.

(b) Os lados de um triângulo, juntamente com a região contida nele, constituem uma região fechada. A fronteira consiste nos lados do triângulo. Veja a Figura 7.

(c) Os lados de um retângulo, juntamente com a região contida nele, constituem uma região fechada. A fronteira consiste nos lados do retângulo. Veja a Figura 8.*

17.3.8 TEOREMA

Teorema do Valor Extremo para Funções de Duas Variáveis

Seja R uma região fechada no plano xy , e seja f uma função de duas variáveis contínua em R . Então, existe pelo menos um ponto em R onde f tem um valor máximo absoluto, e pelo menos um ponto em R onde f tem um valor mínimo absoluto.

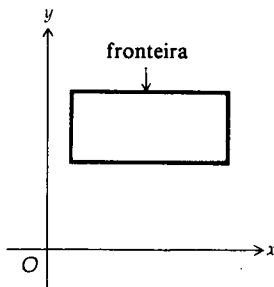


FIGURA 8

A demonstração desse teorema será omitida, pois foge ao contexto deste livro. Se f for uma função satisfazendo o Teorema 17.3.8 e se ambas $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ existirem em todos os pontos de R , então os extremos de f ocorrerão num ponto (x_0, y_0) , onde $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$, ou num ponto da fronteira de R .

EXEMPLO 2 Um fabricante que é um monopolista fabrica dois tipos de lâmpadas. De sua experiência, o fabricante determinou que se x lâmpadas do primeiro tipo e y lâmpadas do segundo tipo forem feitas, cada uma delas poderá

* **N. do R.:** Um ponto P será da fronteira de R , denotada pelo símbolo ∂R , se satisfizer a seguinte propriedade: toda bola $B(P, r)$ centrada em P , com $r > 0$, contém pontos de R e de seu complemento. O ponto Q será interior a R , denotado por $\overset{\circ}{R}$, se satisfizer a seguinte propriedade: existe uma bola $B(Q, r)$ centrada em Q , com $r > 0$, totalmente contida em R . É claro então que $R = \overset{\circ}{R} \cup \partial R$ e $\partial R \cap \overset{\circ}{R} = \emptyset$.

ser vendida pelos valores $(100 - 2x)$ e $(125 - 3y)$, respectivamente.* O custo de fabricação de x lâmpadas do primeiro tipo e y lâmpadas do segundo tipo é de $(12x + 11y + 4xy)$. Quantas lâmpadas de cada tipo devem ser produzidas para que ele obtenha o lucro máximo, e qual é o lucro máximo?

Solução A renda obtida com a venda das lâmpadas do primeiro tipo é $x(100 - 2x)$, e com as lâmpadas do segundo tipo é $y(125 - 3y)$. Logo, se $f(x, y)$ for o lucro do fabricante,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x(100 - 2x) + y(125 - 3y) - (12x + 11y + 4xy) \\ &= 88x + 114y - 2x^2 - 3y^2 - 4xy \end{aligned} \quad (1)$$

Como x e y representam o número de lâmpadas, exigimos que $x \geq 0$ e $y \geq 0$ e permitiremos que x e y sejam quaisquer números reais não-negativos. Além disso, $(100 - 2x)$ é o preço de venda de lâmpadas do primeiro tipo. Assim, exigimos que $100 - 2x \geq 0$ ou, equivalentemente, $x \leq 50$. Analogamente, como $(125 - 3y)$ é o preço de venda de lâmpadas do segundo tipo, exigimos que $y \leq \frac{125}{3}$. Logo, o domínio de f é a região fechada, definida pelo conjunto

$$\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 50 \text{ e } 0 \leq y \leq \frac{125}{3}\}$$

Essa região é retangular e aparece na Figura 9. A fronteira da região consiste nos lados do retângulo. Como f é uma função polinomial, então ela é contínua em toda parte. Logo, f é contínua em seu domínio; assim, o teorema do valor extremo pode ser aplicado. Os pontos críticos de f são encontrados, se determinarmos onde $f_x(x, y) = 0$ e $f_y(x, y) = 0$.

$$f_x(x, y) = 88 - 4x - 4y \quad f_y(x, y) = 114 - 6y - 4x$$

Expressando $f_x(x, y) = 0$ e $f_y(x, y) = 0$, temos

$$\begin{aligned} x + y &= 22 \\ 2x + 3y &= 57 \end{aligned}$$

Resolvendo essas equações simultaneamente, obtemos $x = 9$ e $y = 13$. Para aplicar o teste da derivada segunda, calculamos as derivadas parciais segundas.

$$f_{xx}(x, y) = -4 \quad f_{yy}(x, y) = -6 \quad f_{xy}(x, y) = -4$$

No ponto $(9, 13)$,

$$\begin{aligned} f_{xx}(9, 13) &= -4 < 0 \\ f_{xx}(9, 13)f_{yy}(9, 13) - f_{xy}^2(9, 13) &= (-4)(-6) - (-4)^2 \\ &= 8 > 0 \end{aligned}$$

Segue, então, pelo Teorema 17.3.5(ii), que f terá um valor máximo relativo em $(9, 13)$.

De (1),

$$f(x, y) = x(88 - 2x) + y(114 - 3y) - 4xy \quad (2)$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(9, 13) &= 9(70) + 13(75) - 468 \\ &= 1.137 \end{aligned}$$

* N. do R.: Considere uma unidade monetária básica que será denotada por \$. O valor numérico em qualquer outra moeda pode ser obtido multiplicando o original por um fator cambial determinado.

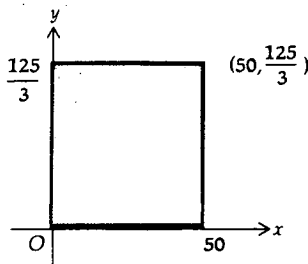


FIGURA 9

O valor máximo absoluto de f deve ocorrer em $(9, 13)$ ou na fronteira do domínio de f . Vamos comparar $f(9, 13)$ com os valores funcionais na fronteira.

Para a parte da fronteira no eixo x com $x \in [0, 50]$, calculando os valores funcionais por (2), temos:

$$f(x, 0) = 88x - 2x^2$$

Seja

$$g(x) = 88x - 2x^2 \quad x \in [0, 50]$$

Então,

$$g'(x) = 88 - 4x \quad \text{e} \quad g''(x) = -4$$

Como $g'(22) = 0$ e $g''(22) < 0$, g tem um valor máximo relativo de 968 em $x = 22$. Além disso, $g(0) = 0$ e $g(50) < 0$. Como $f(9, 13) = 1.137 > 968$, o valor máximo absoluto de f não ocorre no eixo x .

Para a parte da fronteira sobre o eixo y com $y \in [0, \frac{125}{3}]$, de (2),

$$f(0, y) = 114y - 3y^2$$

Seja

$$h(y) = 114y - 3y^2 \quad y \in [0, \frac{125}{3}]$$

Então,

$$h'(y) = 114 - 6y \quad \text{e} \quad h''(y) = -6$$

Como $h'(19) = 0$ e $h''(19) < 0$, h tem um valor máximo relativo de 1.083 em $y = 19$. Além disso, $h(0) = 0$ e $h(\frac{125}{3}) < 0$. Como $f(9, 13) = 1.137 > 1.083$, o valor máximo absoluto de f não ocorre no eixo y .

Vamos considerar agora a parte da fronteira sobre a reta $x = 50$, com $y \in [0, \frac{125}{3}]$. De (2),

$$f(50, y) = y(114 - 3y) - 600 - 200y \quad f(0, y) = y(114 - 3y)$$

Comparando essas duas equações,

$$f(50, y) < f(0, y)$$

Como $f(9, 13) > f(0, y)$ para todo y em $[0, \frac{125}{3}]$, então, da desigualdade acima,

$$f(9, 13) > f(50, y) \quad \text{para} \quad y \in [0, \frac{125}{3}]$$

Logo, o valor máximo absoluto de f não ocorre sobre a reta $x = 50$.

Finalmente, temos a parte da fronteira sobre a reta $y = \frac{125}{3}$, com $x \in [0, 50]$. De (2),

$$f(x, \frac{125}{3}) = x(88 - 2x) - \frac{1375}{3} - \frac{500}{3}x \quad f(x, 0) = x(88 - 2x)$$

Dessas duas equações segue que $f(x, \frac{125}{3}) < f(x, 0)$. Portanto, como $f(9, 13) > f(x, 0)$, para todo x em $[0, 50]$, podemos concluir que ele também é maior do que $f(x, \frac{125}{3})$ para todo x em $[0, 50]$. Assim, o valor máximo absoluto não pode ocorrer sobre a reta $y = \frac{125}{3}$.

Logo, o valor máximo absoluto de f não está sobre a fronteira, mas sim no ponto $(9, 13)$. Concluímos, então, que 9 lâmpadas do primeiro tipo e 13 lâmpadas do segundo tipo devem ser produzidas para o lucro máximo de \$ 1.137.

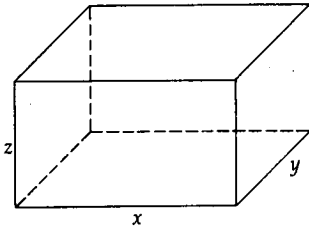


FIGURA 10

EXEMPLO 3 Determine as dimensões relativas de uma caixa retangular, sem a tampa e com um dado volume, sendo usada a menor quantidade de material possível em sua fabricação.

Solução Sejam x unidades o comprimento da base da caixa, y unidades a largura da base da caixa, z unidades a altura da caixa e S unidades a área da superfície da caixa. Sejam V unidades de volume o volume dado da caixa, onde V é uma constante. A Figura 10 mostra a caixa.

Cada uma das variáveis x , y e z está no intervalo $(0, +\infty)$. Temos as equações

$$S = xy + 2xz + 2yz \quad \text{e} \quad V = xyz$$

Resolvendo a segunda equação para z em termos de x , y e da constante V , iremos obter $z = \frac{V}{xy}$ e substituindo esse valor na primeira equação, teremos

$$S = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x} \quad (3)$$

Derivando, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x} &= y - \frac{2V}{x^2} & \frac{\partial S}{\partial y} &= x - \frac{2V}{y^2} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} &= \frac{4V}{x^3} & \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} &= 1 & \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} &= \frac{4V}{y^3} \end{aligned}$$

Expressando $\frac{\partial S}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial S}{\partial y} = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} x^2y - 2V &= 0 \\ xy^2 - 2V &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo essas duas equações simultaneamente, obtemos $x = \sqrt[3]{2V}$ e $y = \sqrt[3]{2V}$. Para esses valores de x e y ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} &= \frac{4V}{(\sqrt[3]{2V})^3} & \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} \right)^2 &= \frac{4V}{(\sqrt[3]{2V})^3} \cdot \frac{4V}{(\sqrt[3]{2V})^3} - 1 \\ &= 2 > 0 & &= 3 > 0 \end{aligned}$$

Do Teorema 17.3.5(i), segue que S tem um valor mínimo relativo quando $x = \sqrt[3]{2V}$ e $y = \sqrt[3]{2V}$. Convém lembrar que x e y estão no intervalo $(0, +\infty)$, e notar, da equação (3), que S é muito grande quando x e y estão próximos de zero ou são muito grandes. Assim sendo, concluímos que o valor mínimo relativo de S é um valor mínimo absoluto de S .

Como $z = V/(xy)$, então, quando $x = \sqrt[3]{2V}$ e $y = \sqrt[3]{2V}$,

$$\begin{aligned} z &= \frac{V}{\sqrt[3]{4V^2}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{2V}}{2} \end{aligned}$$

Logo, a caixa deve ter uma base quadrada e uma altura que é a metade do comprimento do lado da base.

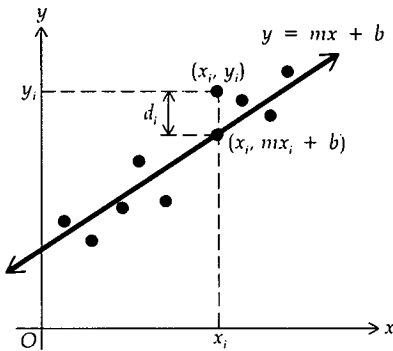


FIGURA 11

Uma aplicação de extremos de funções de duas variáveis envolve a obtenção da reta que *melhor se ajuste* a um conjunto de pontos dados. Por exemplo, suponha que queiramos encontrar um modelo matemático para alguns dados que são um conjunto de pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. Em particular, y_i poderia ser o lucro semanal de um fabricante, enquanto que x_i seria o número de unidades vendidas por semana, ou y_i poderia ser o total de vendas anuais, enquanto que x_i seria o número de anos decorridos desde o começo da empresa. O número de casos novos de uma doença epidêmica poderia ser y_i , enquanto que x_i seria o número de dias decorridos desde o aparecimento da epidemia. O modelo desejado é uma relação entre x e y que permita fazer futuras previsões. Tal relação é proporcionada por uma reta que “se ajuste” aos dados.

Para chegar a uma definição adequada de tal reta, vamos indicar primeiro em que medida uma determinada reta ajusta-se a um conjunto de pontos, medindo as distâncias verticais entre os pontos e a reta. Por exemplo, na Figura 11 existem n pontos e a reta $y = mx + b$. O ponto (x_i, y_i) é o i -ésimo ponto e, correspondendo a ele, existe na reta o ponto $(x_i, mx_i + b)$. O **desvio** (ou **erro**) entre o i -ésimo ponto e a reta é definido como d_i , onde

$$d_i = y_i - (mx_i + b)$$

A soma dos quadrados dos desvios é

$$\sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (mx_i + b)]^2$$

que nunca é negativa, sendo zero somente se cada um dos d_i for zero, quando todos os pontos estão sobre a reta. Tomaremos como a reta de melhor ajuste, aquela para a qual $\sum_{i=1}^n d_i^2$ é um mínimo absoluto. Essa reta é chamada de **reta de regressão** de y em x , e o processo de encontrá-la é chamado de **método dos mínimos quadrados**.

Agora vamos dar o procedimento para o uso do método dos mínimos quadrados, a fim de obter a reta de regressão $y = mx + b$ para um conjunto de n pontos dados. Como x_i e y_i são constantes e m e b são variáveis, $\sum_{i=1}^n d_i^2$ é uma função de m e b . Denotamos essa função por f , de modo que

$$f(m, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2$$

Queremos encontrar os valores de m e de b que tornem $f(m, b)$ um mínimo absoluto. Vamos calcular primeiro as derivadas parciais $f_m(m, b)$ e $f_b(m, b)$.

$$\begin{aligned} f_m(m, b) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial m} [(y_i - mx_i - b)^2] \\ &= \sum_{i=1}^n 2(y_i - mx_i - b)(-x_i) \\ &= 2 \sum_{i=1}^n (-x_i y_i + mx_i^2 + bx_i) \\ &= 2 \left[-\sum_{i=1}^n x_i y_i + m \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_b(m, b) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial b} [(y_i - mx_i - b)^2] \\
 &= \sum_{i=1}^n 2(y_i - mx_i - b)(-1) \\
 &= 2 \sum_{i=1}^n (-y_i + mx_i + b) \\
 &= 2 \left[-\sum_{i=1}^n y_i + m \sum_{i=1}^n x_i + nb \right]
 \end{aligned}$$

Expressando $f_m(m, b) = 0$ e $f_b(m, b) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) m + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) b &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \\
 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) m + nb &= \sum_{i=1}^n y_i
 \end{aligned} \tag{4}$$

Essas são duas equações simultâneas em m e b . Resolvendo a segunda equação para b teremos

$$b = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n y_i - m \sum_{i=1}^n x_i \right] \tag{5}$$

Substituindo b por esse valor em (4), obtemos

$$m = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \tag{6}$$

No Exercício 41 será pedido que você forneça os detalhes envolvidos na obtenção das equações (6), a partir de (4) e (5). No Exercício 42 será pedido que você use o teste da derivada segunda para mostrar que f tem um valor mínimo relativo para esses valores de m e de b , em (5) e (6). Você verá que há apenas um único extremo relativo para f . Também, m e b estão ambos no intervalo $[-\infty, +\infty)$ e $f(m, b)$ é grande quando o valor absoluto de m ou de b é grande. Assim, podemos concluir que o valor mínimo relativo de f é um valor mínimo absoluto.

Observe que aparecem nas fórmulas (5) e (6) quatro somatórios diferentes. Uma maneira de calculá-los é através de computadores ou calculadoras programáveis. Quando uma pequena quantidade de dados está envolvida, uma forma conveniente de calcular os somatórios é mostrada nos exemplos a seguir.

EXEMPLO 4 Uma antigüidade rara foi comprada em 1970 por \$ 1.200. Seu valor era \$ 1.800 em 1975, \$ 2.500 em 1980 e \$ 3.100 em 1985. Se o valor da antigüidade seguir o mesmo padrão de valorização até 1995, estime o valor dela em 1995 pelo método dos mínimos quadrados.

Solução Para encontrar a reta de regressão $y = mx + b$, supomos que x seja o número de períodos de 5 anos desde 1970 e supomos que o valor da antigüidade será y , 5x anos depois de 1970. Assim, temos os pontos dados na Tabela 2.

Tabela 2

x	0	1	2	3
y	1.200	1.800	2.500	3.100

Tabela 3

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
0	1.200	0	0
1	1.800	1	1.800
2	2.500	4	5.000
3	3.100	9	9.300
Σ 6	8.600	14	16.100

A Tabela 3 mostra o cálculo dos quatro somatórios que aparecem nas equações (5) e (6). Da tabela,

$$\sum_{i=1}^4 x_i = 6 \quad \sum_{i=1}^4 y_i = 8.600 \quad \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 14 \quad \sum_{i=1}^4 x_i y_i = 16.100$$

Com esses valores e $n = 4$ obtemos, de (6) e (5),

$$m = \frac{4(16.100) - 6(8.600)}{4(14) - 6(6)} \quad b = \frac{1}{4}[8.600 - 640(6)]$$

$$= 640 \quad = 1.190$$

Logo, a reta de regressão tem a equação

$$y = 640x + 1.190$$

Para o ano de 1995, $x = 5$. Para esse valor de x teremos

$$y = 640(5) + 1.190$$

$$= 4.390$$

Assim, em 1995 o valor estimado da antiguidade será de \$ 4.390.

Tabela 4

x	1	2	3	4	5
y	20	24	30	35	42

Tabela 5

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	20	1	20
2	24	4	48
3	30	9	90
4	35	16	140
5	42	25	210
Σ 15	151	55	508

EXEMPLO 5 Na Tabela 4, x dias decorreram desde o início do surto de uma determinada doença epidêmica e y é o número de novos casos da doença no x -ésimo dia. (a) Ache a reta de regressão para os pontos (x_i, y_i) dados. (b) Use a reta de regressão para estimar o número de casos novos da doença no sexto dia.

Solução

(a) A reta procurada tem uma equação $y = mx + b$. Para determinar m e b , calculamos primeiro os somatórios das equações (5) e (6) usando a Tabela 5.

Da tabela,

$$\sum_{i=1}^5 x_i = 15 \quad \sum_{i=1}^5 y_i = 151 \quad \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 55 \quad \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 508$$

De (6) e (5) com esses valores e $n = 5$, obtemos

$$m = \frac{5(508) - (15)(151)}{5(55) - (15)(15)} \quad b = \frac{1}{5}[151 - 5,5(15)]$$

$$= 5,5 \quad = 13,7$$

Logo, a equação da reta de regressão é

$$y = 5,5x + 13,7$$

(b) Na equação da reta de regressão, quando $x = 6$, então $y = 46,7$. Portanto, no sexto dia de epidemia 47 novos casos são estimados.

Concluiremos essa secção com a prova da primeira parte do teste da derivada segunda.

Prova do Teorema 17.3.5(i) Para simplificar a notação, vamos definir

$$\phi(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y)$$

Dado que $\phi(a, b) > 0$ e $f_{xx}(a, b) > 0$, queremos provar que $f(a, b)$ é um valor mínimo relativo da função. Como f_{xx} , f_{xy} e f_{yy} são contínuas em $B((a, b); r)$, segue que ϕ também é contínua em B . Logo, existe um disco aberto $B'((a, b); r')$, onde $r' \leq r$, tal que $\phi(x, y) > 0$ e $f_{xx}(x, y) > 0$ para todo ponto (x, y) em B' . Sejam h e k constantes, não sendo ambas nulas, tais que o ponto $(a + h, b + k)$ esteja em B' . Então as duas equações

$$x = a + ht \quad \text{e} \quad y = b + kt \quad 0 \leq t \leq 1$$

definem todos os pontos do segmento de reta de (a, b) a $(a + h, b + k)$ e todos esses pontos estão em B' . Seja F a função de uma variável definida por

$$F(t) = f(a + ht, b + kt) \quad (7)$$

Pela fórmula de Taylor (fórmula (2), Secção 11.5),

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(\xi)}{2!} t^2$$

onde ξ está entre 0 e t . Se $t = 1$ nessa equação, obtemos

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(\xi) \quad (8)$$

onde $0 < \xi < 1$. Como $F(0) = f(a, b)$ e $F(1) = f(a + h, b + k)$, segue de (8) que

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(\xi) \quad (9)$$

onde $0 < \xi < 1$.

Para encontrar $F'(t)$ e $F''(t)$ de (7), usamos a regra da cadeia e obtemos

$$F'(t) = hf_x(a + ht, b + kt) + kf_y(a + ht, b + kt) \quad (10)$$

e

$$F''(t) = h^2f_{xx} + hkf_{yx} + hkf_{xy} + k^2f_{yy}$$

onde cada derivada parcial segunda é calculada em $(a + ht, b + kt)$. Do Teorema 16.7.1, segue que $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ para todo (x, y) em B' . Assim,

$$F''(t) = h^2f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2f_{yy} \quad (11)$$

onde cada derivada parcial segunda é calculada em $(a + ht, b + kt)$. Substituindo 0 por t em (10) e ξ por t em (11), obtemos

$$\begin{aligned} F'(0) &= hf_x(a, b) + kf_y(a, b) \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$F''(\xi) = h^2f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2f_{yy}$$

onde cada derivada parcial segunda é calculada em $(a + h\xi, b + k\xi)$ e $0 < \xi < 1$. Substituindo esses valores de $F'(0)$ e $F''(\xi)$ em (9) obtemos

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = \frac{1}{2}(h^2f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2f_{yy}) \quad (12)$$

Os termos entre parênteses no segundo membro de (12) podem ser escritos como

$$h^2f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2f_{yy} = f_{xx} \left[h^2 + 2hk \frac{f_{xy}}{f_{xx}} + \left(k \frac{f_{xy}}{f_{xx}} \right)^2 - \left(k \frac{f_{xy}}{f_{xx}} \right)^2 + k^2 \frac{f_{yy}}{f_{xx}} \right]$$

Assim, de (12),

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{f_{xx}}{2} \left[\left(h + \frac{f_{xy}}{f_{xx}} k \right)^2 + \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{f_{xx}^2} k^2 \right] \quad (13)$$

Como $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$, calculada em $(a+h\xi, b+k\xi)$, é igual a $\phi(a+h\xi, b+k\xi) > 0$

segue que a expressão entre colchetes no segundo membro de (13) é positiva. Além disso, como $f_{xx}(a+h\xi, b+k\xi)$, segue de (13) que $f(a+h, b+k) - f(a, b) > 0$. Assim provamos que

$$f(a+h, b+k) > f(a, b)$$

para todo ponto $(a+h, b+k) \neq (a, b)$ em B' . Logo, pela Definição 17.3.2, $f(a, b)$ é um valor mínimo relativo de f . ■

A demonstração da parte (ii) do Teorema 17.3.5 é similar e será proposta como exercício (veja o Exercício 39). A demonstração da parte (iii) será também deixada como exercício (veja o Exercício 40). A parte (iv) foi incluída para cobrir todos os casos possíveis.

EXERCÍCIOS 17.3

Nos Exercícios de 1 a 12, determine os extremos relativos de f , se existirem.

1. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6x^2 + y - 1$
 2. $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$
 3. $f(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{64}{y} + xy$
 4. $f(x, y) = 18x^2 - 32y^2 - 36x - 128y - 110$
 5. $f(x, y) = e^{xy}$
 6. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 18xy$
 7. $f(x, y) = 4xy^2 - 2x^2y - x$
 8. $f(x, y) = \frac{2x + 2y + 1}{x^2 + y^2 + 1}$
 9. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3y^2 - 3x - 9y + 2$
 10. $f(x, y) = \sin x + \sin y; 0 \leq x \leq \pi; 0 \leq y \leq \pi$
 11. $f(x, y) = \sin(x+y) + \sin x + \sin y; 0 \leq x \leq 2\pi; 0 \leq y \leq 2\pi$
 12. $f(x, y) = e^x \sin y$
13. Ache três números positivos cuja soma é 24, de modo que o produto deles seja o maior possível.
 14. Ache três números positivos cujo produto é 24 e sua soma é a menor possível.
 15. Ache o ponto no plano $3x + 2y - z = 5$, que está mais próximo do ponto $(1, -2, 3)$, e determine a distância mínima.
 16. Ache os pontos na superfície $y^2 - xz = 4$ que estão mais próximos da origem e determine a distância mínima.
 17. Ache os pontos da curva de intersecção do elipsóide $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4$ com o plano $x - 4y - z = 0$ que estão mais próximos da origem e determine a distância mínima.
 18. Uma fábrica tem duas classificações para seus operários, A e B . Os operários da classe A recebem \$ 14 por jornada e os da classe B , \$ 13 por jornada. Para um certo lote de produção, está determinado que se x operários da classe A e y operários da classe B trabalharem, o custo do lote será de $y^3 + x^2 - 8xy + 600$. Quantos operários de cada classe devem ser empregados, de tal forma que o custo do lote seja mínimo, se pelo menos três operários de cada classe são exigidos para a sua fabricação?
 19. Uma injeção de x mg da droga A e y mg da droga B causa uma resposta de R unidades, e $R = x^2y^3(c - x - y)$, onde c é uma constante positiva. Que quantidade de cada droga causará a resposta máxima?
 20. Suponha que t horas após a injeção de x mg de adrenalina a resposta seja R unidades, e $R = te^{-(c-x)}x$, onde c é uma constante. Que valores de x e t irão causar a resposta máxima?
 21. Ache o volume do maior paralelepípedo que pode ser inscrito no elipsóide $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$, se os lados forem paralelos aos eixos coordenados.
 22. Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita a um custo de \$ 10 para o material. Se o material para a base custa \$ 0,15 por centímetro quadrado e o material dos lados custa \$ 0,30 por centímetro quadrado, ache as dimensões da caixa de maior volume que pode ser feita.
 23. Uma caixa retangular fechada, para conter 16 cm^3 , deve ser feita com três tipos de materiais. O custo do material da tampa e da base é de \$ 0,18 por cm^2 , o custo do material das partes da frente e de trás é de \$ 0,16 por cm^2 e o custo do material para os outros dois lados é de \$ 0,12 por cm^2 . Ache as dimensões da caixa, de modo que o custo do material seja um mínimo.
 24. Suponha que T graus seja a temperatura em qualquer ponto (x, y, z) da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $T = 100xy^2z$. Ache

os pontos da esfera onde a temperatura é máxima e também os pontos onde ela é menor. Ache a temperatura nesses pontos.

25. Suponha que a fabricação de um produto requer x horas por máquina e y horas por pessoa e o custo de produção seja dado por $f(x, y)$, onde

$$f(x, y) = 2x^3 - 6xy + y^2 + 500$$

Determine o número de máquinas-hora e pessoas-hora necessárias para que o custo seja mínimo.

26. Uma loja vende dois tipos de camisas que são similares, mas de diferentes fabricantes. O custo para a loja, do primeiro tipo, é \$ 40, enquanto que o segundo tipo custa \$ 50. Ficou determinado pela experiência que se os preços de venda forem x e y , então o número de peças vendidas a cada mês será $3.200 - 50x + 25y$ e $25x - 25y$, respectivamente. A que preço deverá ser vendido cada tipo de camisa, para que o lucro bruto seja máximo?

27. Uma pintura abstrata foi vendida pelo artista em 1915 por \$ 100. Dada a sua importância histórica, o seu valor tem crescido no decorrer dos anos. Esse valor era de \$ 4.600 em 1935, \$ 11.000 em 1955 e \$ 20.000 em 1975. Na hipótese de que a valorização da pintura seguirá o mesmo padrão até 1995, use o método dos mínimos quadrados para estimar o seu valor em 1995.

28. Nos EUA um carro modelo 1985 foi vendido como carro usado em 1986 por US\$ 6.800. Seu valor era de US\$ 6.200 em 1987, US\$ 5.700 em 1988 e US\$ 4.800 em 1990. Use o método dos mínimos quadrados para estimar qual era o seu valor em 1989.

29. Um filme vem sendo exibido no Cinema Um por 5 semanas e o público (aproximado para a centena mais próxima) presente em cada semana está registrado na tabela:

Semana	1	2	3	4	5
Público	5.000	4.500	4.100	3.900	3.500

Supondo que o público semanal continuará a declinar segundo o mesmo padrão, até atingir 1.500, (a) use a reta de regressão para os dados da tabela, a fim de determinar o público na sexta semana. (b) O filme irá para o Cinema Dois, menor, quando o público estiver abaixo de 2.250. Quantas semanas espera-se que dure a exibição no Cinema Um?

30. Cinco tipos de árvores tiveram sua seiva analisada para medir a quantidade de hormônio que causa a queda das folhas. Para as árvores da tabela a seguir, quando foram medidos x microgramas (μg) de hormônio, y folhas haviam caído.

	Carvalho	Bordo	Bétula	Pinheiro	Alfarrobeira
x	28	57	38	75	82
y	208	350	300	620	719

(a) Ache uma equação da reta de regressão para os dados da tabela. (b) Use a reta de regressão para estimar o número de folhas que caem de uma árvore cuja quantidade de hormônio liberado foi de 100 μg .

31. Cinco corredores foram examinados para determinar a quantidade máxima de aspiração de oxigênio, que é uma medida usada para caracterizar a situação cardiovascular de uma pessoa. Os resultados estão na tabela a seguir, onde x é o número de segundos no melhor tempo feito em um quilômetro e y é o número de mililitros por minuto, por quilograma de peso corporal da aspiração máxima de oxigênio do corredor.

	Corredor A	Corredor B	Corredor C	Corredor D	Corredor E
x	300,5	350,6	407,3	326,2	512,8
y	350,2	325,8	375,6	418,5	400,2

(a) Ache uma equação da reta de regressão para os dados da tabela. (b) Use a reta de regressão para estimar a máxima aspiração de oxigênio de um corredor, cujo melhor tempo em um milha é de 340,4 s.

32. O número de pontos obtidos por um estudante no vestibular foi usado para prever a média obtida no fim do primeiro ano de graduação. A tabela a seguir dá os dados para seis estudantes, onde x é o número de pontos no vestibular e y é a média.

	Estudante A	Estudante B	Estudante C	Estudante D	Estudante E	Estudante F
x	92	81	73	78	79	85
y	3,4	2,7	3,1	3,8	2,2	3,0

(a) Ache uma equação da reta de regressão para os dados da tabela. (b) Use a reta de regressão para estimar a média de um estudante que obteve 88 pontos no vestibular.

33. Um monopolista produz grampeadores e grampos cujas equações de demanda são $x = 10/(pq)$ e $y = 20/(pq)$, onde 1.000 x grampeadores são demandados, se o preço for p por grampeador e 1.000 y caixas de grampos são demandadas, se o preço por caixa for q . O custo de produção é \$ 2 para cada grampeador e \$ 1 para cada caixa de grampos. Determine o preço de cada produto, a fim de obter um lucro total máximo.

34. Se as equações de demanda no Exercício 33 forem $x = 11 - 2p - 2q$ e $y = 19 - 2p - 3q$, mostre que para ter o lucro total máximo, os grampeadores devem ser gratuitos e os grampos devem ser caros.

35. Determine as dimensões relativas de uma caixa retangular sem tampa, a ser feita com uma dada quantidade de material, para que a caixa tenha o maior volume possível.

36. Prove que a caixa com volume máximo que pode ser colocada dentro de uma esfera tem a forma de um cubo.

37. Prove que $f_y(x_0, y_0) = 0$ se $f_y(x_0, y_0)$ existir e f tiver um valor máximo relativo em (x_0, y_0) .

38. Prove o Teorema 17.3.3, quando $f(x_0, y_0)$ é um valor mínimo relativo.

39. Prove o Teorema 17.3.5(ii).

40. Prove o Teorema 17.3.5(iii).

41. Obtenha a equação (6) substituindo de (5) em (4).

42. Se $f(m, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2$, use o teste da derivada segunda para provar que os valores de m e b em (5) e (6) dão um valor mínimo relativo de f . (Sugestão: mostre primeiro que $f_{mm}(m, b) > 0$. Para mostrar que $f_{mm}(m, b) \cdot f_{bb}(m, b) - f_{mb}^2(m, b) > 0$, você deve pro-

var que $\sum_{i=1}^n x_i^2 > \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$. Para provar isso, seja $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ e aplique as propriedades da notação de somatória à desigualdade $\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2 > 0$.)

17.4 FUNÇÕES IMPLÍCITAS, DERIVAÇÃO

Dada uma equação do tipo $F(x, y) = 0$, curva de nível da função $z = F(x, y)$, ela pode definir qualquer uma das variáveis x e y como função da outra ou não. Esse tipo de equação pode aparecer, por exemplo, em algum experimento de laboratório onde dois ou mais parâmetros são observados e, em vez dos dados compilados darem origem a uma relação funcional entre eles, o melhor que se pode conseguir com os dados é uma relação do tipo $F(x, y) = 0$. Essa relação estabelece uma interdependência não explicitamente funcional entre os parâmetros x e y .

Uma equação do tipo $F(x, y) = 0$ pode corresponder a um gráfico de uma curva onde podemos identificar mais de uma função. Analogamente, uma equação do tipo $F(x, y, z) = 0$ pode ser o gráfico de uma superfície formada por diversas funções. Observe os gráficos das Seções 15.7 e 16.1. Em alguns casos as curvas de nível ($z = 0$) determinam gráficos de funções e em outros não.

► **ILUSTRAÇÃO 1** Considere $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. A condição de que $F(x, f(x)) = x^2 + [f(x)]^2 - 1 = 0$ para todo x no domínio de f está satisfeita por cada uma das seguintes escolhas para f .

$$\begin{aligned} (1) \quad f(x) &= -\sqrt{1-x^2} & -1 \leq x \leq 1 \\ (2) \quad f(x) &= \sqrt{1-x^2} & -1 \leq x \leq 1 \\ (3) \quad f(x) &= \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ -\sqrt{1-x^2} & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Observe que no caso (3) a função é descontínua no zero. ◀

► **ILUSTRAÇÃO 2** A equação $xy - 1 = 0$ define a função $y = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. ◀

► **ILUSTRAÇÃO 3** Consideremos a equação $x^2 - 2yx + x^2 - 1 = 0$. Dizemos que ela define implicitamente a função $y = x + 1$.

De fato, temos que

$$(x + 1)^2 - 2x(x + 1) + x^2 - 1 = x^2 + 2x + 1 - 2x^2 - 2x - 1 = 0$$

Observe que a equação dada também define a função $y = x - 1$. ◀

► **ILUSTRAÇÃO 4** A equação $\ln y - x^2 = 0$ define a função $y = e^{x^2}$. De fato, temos que

$$\ln(e^{x^2}) - x^2 = x^2 - x^2 = 0$$

Poderíamos ter também as funções $x = \pm (\ln y)^{1/2}$, $1 \leq y$. ◀

► **ILUSTRAÇÃO 5** Já a equação $[(\sin y + 2)^2 x^2]^{1/2} = 0$ define a função $x = \sin y + 2$ (ou $x = -\sin y - 2$), mas não define y como função de x já que as senóides, curvas de nível de $z = [(\sin y + 2)^2 - x^2]^{1/2}$, ($z = 0$) não são gráficos funcionais para x como variável independente. ◀

► **ILUSTRAÇÃO 6** Por fim, a equação $\cos x + \cos y = 0$ não define nem x como função de y nem vice-versa. Observe a Figura 10 à página 915.

Em geral, dizemos que a equação $F(x, y) = 0$ define *implicitamente* a função $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, se

$$F(x, f(x)) = 0, a \leq x \leq b$$

Da mesma forma, a equação $F(x, y, z) = 0$ define *implicitamente* a função $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, se

$$F(x, y, f(x, y)) = 0, (x, y) \in D$$

onde D é uma região do plano. ◀

► **ILUSTRAÇÃO 7** Dada a equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dizemos que ela define implicitamente a função $z = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$. De fato, temos que

$$x^2 + y^2 + [(1 - x^2 - y^2)^{1/2}]^2 = x^2 + y^2 + 1 - x^2 - y^2 = 1 \quad \blacktriangleleft$$

A discussão das condições sobre a função F para que ela defina implicitamente uma função é o Teorema da Função Implícita, o qual prova a existência de funções implícitas a partir daquelas condições, foge ao contexto deste livro.

No que segue, estaremos então admitindo tacitamente a existência da função implícita. Os próprios resultados obtidos darão conta de algumas restrições. Fica entendido que as fórmulas desenvolvidas só serão válidas para funções tais que a aplicação das fórmulas não conduza a um absurdo.

Poderemos estar interessados em calcular pontos extremos, planos tangentes, enfim, analisar o comportamento de funções cuja definição explícita não é possível ou é complicada. Torna-se importante, então, poder calcular suas derivadas parciais. Nesta secção desenvolvemos um método que nos permite encontrar as derivadas de funções definidas implicitamente, diretamente a partir da equação ou das equações que a definem. Consideremos, por exemplo, a equação

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

a qual define implicitamente a função $y = (1 - x^2)^{1/2}$. Temos que

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy \\ &= 2x dx + 2y dy = 0 \end{aligned}$$

onde igualamos a zero, pois $F(x, y) = 0$. Segue, então, que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{2x}{2y} \\ &= -\frac{x}{y} \end{aligned}$$

que existe sempre se $y \neq 0$.

17.4.1 TEOREMA

Dadas as funções $F = F(x, y)$ e $y = f(x)$ definidas e diferenciáveis, respectivamente, em $D \subset \mathbb{R}^2$ e $a \leq x \leq b$. Seja f a função definida implicitamente por $F(x, y) = 0$, isto é, $F(x, f(x)) = 0$ para $a \leq x \leq b$. Então,

$$\frac{df}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, a \leq x \leq b$$

onde as derivadas do segundo membro devem ser calculadas nos pontos $(x, f(x))$ e supõe-se que $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$.

Prova Para todo $x \in [a, b]$, temos que

$$F(x, f(x)) = 0$$

Logo,

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$$

Segue, então, que se $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

EXEMPLO 1 Dado que y é uma função implícita de x definida por $F(x, y) = x^3 + y \cos x = 0$, determine $\frac{dy}{dx}$.

Solução

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \\ &= -\frac{3x^2 - y \operatorname{sen} x}{\cos x} \\ &= \frac{-3x^2 \cos x - x^3 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \quad (\cos x \neq 0) \end{aligned}$$

► **ILUSTRAÇÃO 8** Suponha que $y(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Segue que $F(x, y) = y g(x) - f(x) = 0$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{y g'(x) - f'(x)}{g(x)} \\ &= \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{[g(x)]^2} \quad (g(x) \neq 0) \end{aligned}$$

que é a conhecida fórmula para derivar o quociente de duas funções. ◀

► **ILUSTRAÇÃO 9** Convém observar que a fórmula para o cálculo de $\frac{dy}{dx}$ vale desde que exista $y = f(x)$ a partir de $F(x, y) = 0$. Por exemplo, $x^2 + y^2 = 0$ só tem a solução $x = y = 0$, isto é, um ponto. Entretanto, empregando a fórmula, teremos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

que não faz sentido. ▶

EXEMPLO 2 Dada a curva $y e^x - x + \sqrt{3} - 1 = 0$, queremos determinar a equação da reta tangente à curva no ponto onde ela intercepta o eixo y .

Solução

Dado que a equação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto (x_0, y_0) é

$$y - y_0 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{(x_0, y_0)} \cdot (x - x_0),$$

no nosso caso o ponto de tangência é $(0, 1 - \sqrt{3})$ e para determinarmos a equação procurada resta determinar $\frac{dy}{dx}$. Mas

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{ye^x - 1}{e^x} = \frac{-ye^x + 1}{e^x}$$

No ponto $(0, 1 - \sqrt{3})$ o valor de $\frac{dy}{dx}$ é $\sqrt{3}$, assim sendo $(y - 1 + \sqrt{3}) = \sqrt{3}x$ é a equação procurada.

EXEMPLO 3 Queremos calcular $\frac{dy}{dx}$, sendo que $y = f(x)$ é definida implicitamente por $F(x, y) = (3x^2 + 2y^2)^2 = 0$.

Solução

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{6x^2}{4y} = -\frac{3x^2}{2y}$$

pois, se $(3x^2 + 2y^2)^2 = 0$, então $(3x^2 + 2y^2) = 0$.

Podemos estender o teorema a seguir para funções de três variáveis.

17.4.2 TEOREMA

Dadas as funções $F = F(x, y, z)$ e $z = f(x, y)$ definidas e diferenciáveis, respectivamente, em $D \subset \mathbb{R}^3$ e $S \subset \mathbb{R}^2$, seja f a função de (x, y) definida implicitamente por $F(x, y, z) = 0$, isto é, $F(x, y, f(x, y)) = 0$ em S . Então,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

para todo $(x, y) \in S$. As derivadas do segundo membro são calculadas em $(x, y, f(x, y))$ e supõe-se que $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

Prova Para todo $(x, y) \in S$, temos que

$$F(x, y, f(x, y)) = 0$$

Logo,

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0$$

Mas, estamos supondo que $z = f(x, y)$, então

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Substituindo dz em dF , teremos

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy = 0$$

Como x e y são variáveis independentes, ou seja, x não é função de y nem vice-versa, segue que $\frac{dx}{dy} = 0$ e $\frac{dy}{dx} = 0$; portanto, da relação acima obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Se $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ podemos dividir ambas as igualdades por $\frac{\partial F}{\partial z}$, obtendo assim as fórmulas dadas no teorema. ■

► **ILUSTRAÇÃO 10** Se $z = f(x, y)$ for definida implicitamente por $F(x, y, z) = 0$ e se f for diferenciável, então

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \\ &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} dx - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} dy \end{aligned}$$

EXEMPLO 4 Calcule dy sendo $y = f(x)$ definida implicitamente por

$$F(x, y) = x^2y^2 - x \cos y - 1 = 0$$

Solução

$$\begin{aligned} dy &= \frac{df}{dx} dx \\ &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} dx \\ &= -\frac{2xy^2 - \cos y}{2x^2y + x \operatorname{sen} y} dx = \frac{-2xy^2 + \cos y}{2x^2y + x \operatorname{sen} y} dx \end{aligned}$$

EXEMPLO 5 Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sendo $z = f(x, y)$ definida implicitamente por

$$F(x, y, z) = x + y^3 - 3xz = 0$$

Solução Temos

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3z \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -3x$$

Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{x^2 - z}{x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{y^2}{x} \quad (x \neq 0)$$

Consideremos agora a seguinte situação: temos uma função $y = h(x)$ definida implicitamente pelo sistema de equações

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{e} \quad G(x, y, z) = 0$$

Caso seja simples obter em cada uma delas z como função de x e y , isto é,

$$z = f(x, y) \quad \text{e} \quad z = g(x, y)$$

então, é claro que

$$H(x, y) = f(x, y) - g(x, y) = 0$$

e de $H(x, y) = 0$ podemos tirar $y = h(x)$, bem como $z = l(x)$, pois $z = f(x, h(x)) = g(x, h(x)) = l(x)$. À equação $H(x, y) = 0$ podemos aplicar o método obtido anteriormente a fim de obter $\frac{dy}{dx}$.

Pode acontecer, entretanto, que explicitar z nas duas equações dadas seja uma tarefa por demais complicada. Podemos usar então o seguinte procedimento alternativo:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0$$

e

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy + \frac{\partial G}{\partial z} dz = 0$$

ou, alternativamente, já que estamos supondo a existência das funções $y = h(x)$ e $z = l(x)$ e que elas são deriváveis, o sistema pode ser escrito como

$$\frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{dz}{dx} = -\frac{\partial G}{\partial x}$$

Considerando as igualdades anteriores como um sistema linear em $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ teremos, resolvendo por Cramer,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}} \quad \text{e} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}}$$

As igualdades acima permitem calcular facilmente as derivadas $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$, mesmo sem conhecer a expressão explícita das funções $h(x)$ e $l(x)$.

EXEMPLO 6 Dado que

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

e

$$G(x, y, z) = x^2 - y^2 - 2z^2 - 1 = 0$$

queremos calcular $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$.

Solução Como

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix} = 12xz, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} = -8xy \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} = -4yz$$

então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12xz}{-4yz} = -\frac{3x}{y} \quad \text{e} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{-8xy}{-4yz} = \frac{2x}{z}$$

Consideremos agora um caso um pouco mais complicado. São dadas as equações

$$F(x, y, u, v) = 0 \text{ e } G(x, y, u, v) = 0$$

Vamos supor que elas definem u e v como funções implícitas de x e y . Tomando as diferenciais de F e G , teremos

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv = 0$$

e

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy + \frac{\partial G}{\partial u} du + \frac{\partial G}{\partial v} dv = 0$$

Como estamos supondo u e v funções de x e y , então

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad \text{e} \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

Substituindo du e dv em dF e dG , teremos

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = 0$$

e

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = 0$$

Mas x e y são as variáveis independentes e não existe nenhuma relação funcional entre elas, logo $\frac{dx}{dy} = 0$ e $\frac{dy}{dx} = 0$, donde concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial G}{\partial y} \end{aligned}$$

Supondo agora $\Delta \neq 0$, onde

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$$

podemos então determinar $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$. Por exemplo,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}$$

A transformação definida implicitamente no caso em discussão por $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ é uma transformação do plano no plano e corresponde a uma mudança de sistemas de coordenadas no plano: passagem das coordenadas x e y às coordenadas u e v desde que esta transformação seja bijetora, isto é, para cada (x, y) corresponde pela transformação um único (u, v) e vice-versa. Saber calcular as derivadas parciais de u e v numa tal transformação, como veremos no Capítulo 18, desempenha papel importante no cálculo de integrais duplas e triplas, quando são necessárias mudanças de variáveis nestas integrais.

EXERCÍCIOS 17.4

1. Calcule $\frac{dy}{dx}$ sendo $F(x, y) = e^{xy} + \sin(2x - 3y) = 0$.
 2. Calcule $\frac{dy}{dx}$ sendo $F(x, y) = x^2 \sin(x + y) + y^2 \cos(x + y) = 0$.
 3. Calcule $\frac{dy}{dx}$ sendo $F(x, y) = \frac{\sin(x + y)}{\cos(x - y)} = 0$.
 4. Calcule $\frac{dy}{dx}$ sendo $F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$.
 5. Calcule $\frac{dy}{dx}$ sendo $F(x, y) = \sin^2 x + \sin x \cos y + \cos^2 y = 0$.
 6. Calcule $\frac{dy}{dx}$ sendo $F(x, y) = x \sin y + y \cos x = 0$.
 7. Calcule $\frac{dy}{dx}$ sendo $F(x, y) = 1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy})$.
 8. $F(x, y) = 2x^3 - y^2 - 2x^2y + 1$; $P = \left(\frac{-1}{\sqrt[3]{2}}, 0\right)$.
 9. $F(x, y) = x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1$; $P = (1, 2)$.
 10. $F(x, y) = e^{xy} + \sin(2x + y) + x + y - 1$; $P = (0, 0)$.
 11. $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$; $P = (1, 0)$.
 12. $F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$; $P = (x_0, y_0)$.
- Nos Exercícios de 8 a 12, escreva a equação da reta tangente à curva $F(x, y) = 0$ no ponto P .
13. $F(x, y, u, v) = x + y^3 + u^3 + v^3$, $G(x, y, u, v) = x^3 - y - u^4 - v^4$. Calcule $\frac{\partial u}{\partial x}$.
 14. $F(x, y, u, v) = x - u^2 + v^2$, $G(x, y, u, v) = y - uv$. Calcule $\frac{\partial u}{\partial x}$.
 15. $F(x, y, u, v) = ue^v - xy + v$, $G(x, y, u, v) = ve^v - xv + u$. Calcule $\frac{\partial u}{\partial x}$.
 16. $F(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2 - 1$, $G(x, y, z) = x^2y - y^2z + xz^2 - 1$. Calcule $\frac{dy}{dx}$.
 17. Dado que $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, calcule $\frac{\partial r}{\partial x}$ e $\frac{\partial \theta}{\partial x}$.
 18. Dê a equação do plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ definida implicitamente por $F(x, y, z) = ye^z + xz - x^2 - y^2 = 0$ que passa pelo ponto $P = (1, 1, 0)$.
 19. Dê a equação do plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ definida implicitamente por $F(x, y, z) = z^3 + (x^2 + y^2)z + 1 = 0$ que passa pelo ponto $P = (1, 1, 1)$.
 20. Determine a equação do plano tangente à superfície $xy + yz + zx = 0$ no ponto $(1, 1, 1)$.
 21. Vamos supor que a função $y = f(x)$ definida implicitamente por $F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ seja contínua em $[-a, a]$. Determine os extremos de $f(x)$. (Sugestão: resolva $\frac{dy}{dx} = 0$.)
 22. Sabe-se que dadas $F(x, y, z) = 0$ e $G(x, y, z) = 0$, então
 - (i) $d\mathbf{R} \cdot \text{grad } F = 0$ representa o plano tangente no ponto (x_i, y_i, z_i) , onde $d\mathbf{R} = (x - x_i)\mathbf{i} + (y - y_i)\mathbf{j} + (z - z_i)\mathbf{k}$.
 - (ii) $d\mathbf{R} \cdot (\text{grad } F \times \text{grad } G) = 0$ representa o plano normal à curva $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ no ponto (x_i, y_i, z_i) .
 - (iii) $d\mathbf{R} \cdot (\text{grad } F \times \text{grad } G) = 0$ representa a reta tangente à curva $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ no ponto (x_i, y_i, z_i) .
 e $\text{grad } F \times \text{grad } G = J \begin{pmatrix} F, G \\ y, z \end{pmatrix} \mathbf{i} + J \begin{pmatrix} F, G \\ z, x \end{pmatrix} \mathbf{j} + J \begin{pmatrix} F, G \\ x, y \end{pmatrix} \mathbf{k}$
 23. Determine os pontos críticos de $z = f(x, y)$ definida implicitamente por $F(x, y, z) = 6x - 4y - x^2 - 2y^2 - z^2 = 0$.

* N. do E.: Esta expressão é chamada de Jacobiano (J) e será definida na Secção 18.8.

17.5 MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Na solução do Exemplo 3, da Secção 17.3, minimizamos a função com valores funcionais $xy + 2xz + 2yz$, sujeita à condição de que x, y e z satisfaçam a equação $xyz = V$. Compare isso com o Exemplo 1, da Secção 17.3, no qual encontramos os extremos relativos da função f para a qual $f(x, y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$. Há, essencialmente, dois tipos diferentes de problemas, pois no primeiro caso temos uma condição adicional, chamada de *vínculo (condição lateral ou restrição)*. Tal problema é chamado de *problema com extremos vinculados (condicionados ou com restrições)*, enquanto que o do segundo tipo é um *problema com extremos livres*.

Para que o Exemplo 3, da Secção 17.3 fosse solucionado, foi necessário obter uma função de duas variáveis x e y através da substituição de z na primeira equação, pelo seu valor da segunda equação. Como nem sempre é possível resolver a equação do vínculo para uma das variáveis em termos das outras, há um outro procedimento que pode ser usado para encontrarmos os pontos críticos, no caso de um problema com extremos vinculados. Ele é atribuído a Joseph L. Lagrange (1736-1813), sendo conhecido como o método dos multiplicadores de Lagrange. Antes de discutir a teoria desse método vamos descrever em linhas gerais o procedimento e ilustrá-lo com um exemplo.

Suponha que queiramos encontrar os extremos relativos de uma função f das três variáveis x, y e z , sujeitos ao vínculo $g(x, y, z) = 0$. Introduzimos uma nova variável λ , chamada de **multiplicador de Lagrange** e formamos a função auxiliar F para a qual

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$$

O problema consiste, portanto, em encontrar os pontos críticos da função F de quatro variáveis x, y, z e λ . Os valores de x, y e z que dão os extremos relativos de f estão entre esses pontos críticos. Os pontos críticos de F são os valores de x, y, z e λ para os quais se anulam as quatro derivadas parciais primeiras de F :

$$F_x = 0 \quad F_y = 0 \quad F_z = 0 \quad F_\lambda = 0$$

EXEMPLO 1 Resolva o Exemplo 3, da Secção 17.3, pelo método dos multiplicadores de Lagrange.

Solução As variáveis x, y e z e a constante V estão definidas na solução do Exemplo 3, da Secção 17.3. Seja

$$S = f(x, y, z) \quad \text{e} \quad g(x, y, z) = xyz - V \\ = xy + 2xz + 2yz$$

Queremos minimizar a função f , sujeita ao vínculo

$$g(x, y, z) = 0$$

Formamos a função F , dada por

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) \\ = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - V)$$

Para encontrar os pontos críticos de F calculamos as quatro derivadas parciais F_x , F_y , F_z e F_λ e igualamos a zero os seus valores funcionais.

$$F_x(x, y, z, \lambda): y + 2z + \lambda yz = 0 \quad (1)$$

$$F_y(x, y, z, \lambda): x + 2z + \lambda xz = 0 \quad (2)$$

$$F_z(x, y, z, \lambda): 2x + 2y + \lambda xy = 0 \quad (3)$$

$$F_\lambda(x, y, z, \lambda): xyz - V = 0 \quad (4)$$

Subtraindo os membros correspondentes nas equações (1) e (2), obtemos

$$y - x + \lambda z(y - x) = 0$$

$$(y - x)(1 + \lambda z) = 0$$

resultando nas duas equações

$$y = x \quad (5)$$

e, como $z \neq 0$,

$$\lambda = -\frac{1}{z}$$

Substituindo λ por $-1/z$ em (2) obtemos $x + 2z - x = 0$, resultando $z = 0$, que é impossível pois z está no intervalo $(0, +\infty)$. Substituindo (5) em (3), temos

$$2x + 2x + \lambda x^2 = 0$$

$$x(4 + \lambda x) = 0$$

$$\lambda = -\frac{4}{x} \quad (\text{pois } x \neq 0)$$

Se na equação (2), $\lambda = -4/x$, então

$$x + 2z - \frac{4}{x}(xz) = 0$$

$$x + 2z - 4z = 0$$

$$z = \frac{x}{2} \quad (6)$$

Substituindo (5) e (6) em (4) obtemos $\frac{1}{2}x^3 - V = 0$, de onde $x = \sqrt[3]{2V}$. De (5) e (6) segue que $y = \sqrt[3]{2V}$ e $z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$. Logo, $(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V})$ é um ponto crítico da função F , e conforme foi mostrado no Exemplo 3, da Secção 17.3, f tem um valor mínimo absoluto nesse ponto.

Observe que a equação $F_\lambda(x, y, z, \lambda) = 0$ é equivalente ao vínculo dado pela equação $V = xyz$.

A validade do método dos multiplicadores de Lagrange pode ser mostrada se considerarmos o problema geral de extremo vinculado. Suponha que queiramos encontrar os extremos relativos de uma função f de três variáveis x , y e z , sujeitos ao vínculo

$$g(x, y, z) = 0 \quad (7)$$

Suponha que (7) possa ser resolvida para z , para obtermos

$$z = h(x, y)$$

onde h está definida em um disco aberto $B((x_0, y_0); r)$ e $f(x, y, h(x, y))$ tem um extremo relativo em $(x_0, y_0, h(x_0, y_0))$. Suponha também que as derivadas parciais primeiras de f , g e h existam em B e $g_3(x, y, h(x, y)) \neq 0$ em B . Como f tem um extremo relativo em $(x_0, y_0, h(x_0, y_0))$, as derivadas parciais primeiras de f se anulam nesse ponto. Calculamos essas derivadas parciais pela regra da cadeia,

$$\text{em } (x_0, y_0, h(x_0, y_0)) \quad f_1 + f_3 \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad f_2 + f_3 \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

Se em (7) derivarmos implicitamente em relação a x e depois em relação a y e considerarmos z como a função derivável h de x e y , então no ponto (x, y) , no disco aberto B

$$g_1 + g_3 \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad g_2 + g_3 \frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

ou, equivalentemente, pois $g_3 \neq 0$ no disco aberto B ,

$$\text{em } (x, y) \text{ de } B \quad \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{g_1}{g_3} \quad \text{e} \quad \frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{g_2}{g_3}$$

onde os valores funcionais de g_1 , g_2 e g_3 estão em $(x, y, h(x, y))$. Se os valores $\frac{\partial h}{\partial x}$ e $\frac{\partial h}{\partial y}$ forem substituídos nas relações (8), então, no ponto $(x_0, y_0, h(x_0, y_0))$

$$f_1 + f_3 \left(-\frac{g_1}{g_3} \right) = 0 \quad \text{e} \quad f_2 + f_3 \left(-\frac{g_2}{g_3} \right) = 0$$

Além disso,

$$f_3 - g_3 \left(\frac{f_3}{g_3} \right) = 0$$

em qualquer ponto onde $g_3 \neq 0$. Assim, em $(x_0, y_0, h(x_0, y_0))$,

$$f_1 + g_1 \left(-\frac{f_3}{g_3} \right) = 0 \quad f_2 + g_2 \left(-\frac{f_3}{g_3} \right) = 0 \quad f_3 + g_3 \left(-\frac{f_3}{g_3} \right) = 0$$

Se $\lambda = -f_3/g_3$, então essas equações podem ser escritas como

$$f_1 + \lambda g_1 = 0 \quad f_2 + \lambda g_2 = 0 \quad f_3 + \lambda g_3 = 0 \quad (9)$$

Além disso, como f tem um extremo relativo em $(x_0, y_0, h(x_0, y_0))$ e esse extremo está sujeito ao vínculo $g(x, y, z) = 0$, então

$$g(x_0, y_0, h(x_0, y_0)) = 0 \quad (10)$$

Se

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) \quad (11)$$

e se $z_0 = h(x_0, y_0)$, então (9) e (10) equivalem a

$$F_x = 0 \quad F_y = 0 \quad F_z = 0 \quad F_\lambda = 0 \quad \text{em } (x_0, y_0, z_0) \quad (12)$$

Logo, podemos concluir que um ponto (x_0, y_0, z_0) no qual a função f tem um extremo relativo está entre os pontos críticos da função F , definida por (11).

Observe que as equações (9) podem ser escritas na forma vetorial

$$\nabla f + \lambda \nabla g = \mathbf{0} \quad \text{em } (x_0, y_0, z_0) \quad \text{onde } \nabla g \neq \mathbf{0}$$

Essa equação vetorial juntamente com a equação $g(x_0, y_0, z_0) = 0$, dá uma outra forma das equações (12).

EXEMPLO 2 Use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar a menor distância entre a origem e o plano $Ax + By + Cz = D$.

Solução Sejam w unidades a distância entre a origem e m ponto (x, y, z) , no plano. Então,

$$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Como w será um mínimo quando w^2 for um mínimo, formamos a função f para a qual

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Queremos encontrar o valor mínimo de f , sujeito ao vínculo

$$Ax + By + Cz - D = 0$$

Com a hipótese de que existe tal valor mínimo, ele irá ocorrer em um ponto crítico da função F , tal que

$$F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(Ax + By + Cz - D)$$

Para encontrar os pontos críticos de F , calculamos as derivadas parciais de F , igualando-as a zero.

$$F_x(x, y, z, \lambda): 2x + \lambda A = 0$$

$$F_y(x, y, z, \lambda): 2y + \lambda B = 0$$

$$F_z(x, y, z, \lambda): 2z + \lambda C = 0$$

$$F_\lambda(x, y, z, \lambda): Ax + By + Cz - D = 0 \quad (13)$$

Das três primeiras equações

$$x = -\frac{1}{2}\lambda A \quad y = -\frac{1}{2}\lambda B \quad z = -\frac{1}{2}\lambda C \quad (14)$$

Substituindo x, y, z por esses valores em (13), obtemos

$$-\frac{1}{2}\lambda(A^2 + B^2 + C^2) = D$$

$$-\frac{1}{2}\lambda = \frac{D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

Substituímos $-\frac{1}{2}\lambda$ por esse valor nas equações (14) e obtemos

$$x = \frac{AD}{A^2 + B^2 + C^2} \quad y = \frac{BD}{A^2 + B^2 + C^2} \quad z = \frac{CD}{A^2 + B^2 + C^2} \quad (15)$$

O ponto com essas coordenadas é o único ponto crítico de F . Logo, a distância mínima da origem ao plano é a distância da origem ao ponto (x_0, y_0, z_0) , onde x_0, y_0 e z_0 são os valores de x, y e z dados nas equações (15). A distância mínima

é, então,

$$\begin{aligned}\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} &= \sqrt{\frac{A^2 D^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2} + \frac{B^2 D^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2} + \frac{C^2 D^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2}} \\ &= \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\end{aligned}$$

Quando diversos vínculos são impostos, o método dos multiplicadores de Lagrange pode ser aplicado se usarmos diversos multiplicadores. Por exemplo, se desejamos encontrar pontos críticos da função com valores $f(x, y, z)$ sujeitos às duas condições laterais $g(x, y, z) = 0$ e $h(x, y, z) = 0$, encontramos os pontos críticos da função F das cinco variáveis x, y, z, λ e μ , para as quais

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z)$$

O exemplo a seguir ilustra o método.

EXEMPLO 3 Ache os extremos relativos da função f se

$$f(x, y, z) = xz + yz$$

e se o ponto (x, y, z) está na intersecção das superfícies $x^2 + z^2 = 2$ e $yz = 2$.

Solução Formamos a função F tal que

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = xz + yz + \lambda(x^2 + z^2 - 2) + \mu(yz - 2)$$

Determinando as cinco derivadas parciais e igualando-as a zero, temos

$$F_x(x, y, z, \lambda, \mu): z + 2\lambda x = 0 \quad (16)$$

$$F_y(x, y, z, \lambda, \mu): z + \mu z = 0 \quad (17)$$

$$F_z(x, y, z, \lambda, \mu): x + y + 2\lambda z + \mu y = 0 \quad (18)$$

$$F_\lambda(x, y, z, \lambda, \mu): x^2 + z^2 - 2 = 0 \quad (19)$$

$$F_\mu(x, y, z, \lambda, \mu): yz - 2 = 0 \quad (20)$$

De (17) obtemos $\mu = -1$ e $z = 0$. Rejeitamos $z = 0$, pois isso contradiz (20). De (16) obtemos, se $x \neq 0$,

$$\lambda = -\frac{z}{2x}$$

Substituindo esse valor de λ e $\mu = -1$ em (18), obtemos

$$\begin{aligned}x + y - \frac{z^2}{x} - y &= 0 \\ x^2 &= z^2\end{aligned} \quad (21)$$

Substituindo (21) em (19), temos $2x^2 - 2 = 0$ ou $x^2 = 1$. Isso dá dois valores para x , ou seja, 1 e -1 ; e para cada um desses valores de x obtemos, de (21), os dois valores 1 e -1 para z . Obtendo os valores correspondentes para y , de

(20), temos quatro conjuntos de soluções para as cinco equações de (16) a (20). Essas soluções são

$$\begin{array}{lllll} x = 1 & y = 2 & z = 1 & \lambda = -\frac{1}{2} & \mu = -1 \\ x = 1 & y = -2 & z = -1 & \lambda = \frac{1}{2} & \mu = -1 \\ x = -1 & y = 2 & z = 1 & \lambda = \frac{1}{2} & \mu = -1 \\ x = -1 & y = -2 & z = -1 & \lambda = -\frac{1}{2} & \mu = -1 \end{array}$$

Do primeiro e do quarto conjuntos de soluções temos $f(x, y, z) = 3$, enquanto que o resultado do segundo e do terceiro conjuntos de soluções é $f(x, y, z) = 1$. Logo, f tem um valor funcional máximo relativo de 3 e um valor funcional mínimo relativo de 1.

EXERCÍCIOS 17.5

Nos Exercícios de 1 a 4, use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar os pontos críticos da função dada, sujeitos aos vínculos dados.

1. $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$ com vínculo $x^2 + y^2 - 4y = 0$
2. $f(x, y) = 4x^2 + 2y^2 + 5$ com vínculo $x^2 + y^2 - 2y = 0$
3. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ com vínculo $3x - 2y + z - 4 = 0$
4. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ com vínculo $y^2 - x^2 = 1$

Nos Exercícios de 5 a 8, use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar os extremos relativos de f , sujeitos ao vínculo indicado. Ache também os pontos nos quais os extremos ocorrem. Suponha que os extremos relativos existam.

5. $f(x, y) = x^2 + y$ com vínculo $x^2 + y^2 = 9$
6. $f(x, y) = x^2y$ com vínculo $x^2 + 8y^2 = 24$
7. $f(x, y, z) = xyz$ com vínculo $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 4$
8. $f(x, y, z) = y^3 + xz^2$ com vínculo $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Nos Exercícios 9 e 10, ache um valor mínimo relativo de f , sujeito ao vínculo indicado. Suponha que um valor mínimo relativo exista.

9. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ com vínculo $xyz = 1$
10. $f(x, y, z) = xyz$ com vínculo $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Nos Exercícios 11 e 12, ache um valor máximo relativo de f , sujeito ao vínculo indicado. Suponha que um valor máximo relativo exista.

11. $f(x, y, z) = x + y + z$ com vínculo $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
12. $f(x, y, z) = xyz$ com vínculo $2xy + 3xz + yz = 72$
13. Ache um valor mínimo relativo da função f para a qual $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 16z^2$ com o vínculo (a) $xyz = 1$; (b) $xy = 1$; (c) $x = 1$.
14. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar a menor distância entre o ponto $(1, 3, 0)$ e o plano $4x + 2y - z = 5$.
15. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar a menor distância entre o ponto $(1, -1, -1)$ e o plano $x + 4y + 3z = 2$.
16. Ache a menor e a maior distância da origem a um ponto da elipse $x^2 + 4y^2 = 16$.

17. Ache a menor e a maior distância da origem a um ponto do elipsóide $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$.

18. Se $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$, use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar o ponto do plano $x + y + z = 5$ no qual $f(x, y, z)$ é mínimo.

19. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar um valor funcional mínimo relativo de f , se $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ com dois vínculos, $x + 2y + 3z = 6$ e $x - y - z = -1$.

20. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar um valor funcional mínimo relativo de f , se $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ com dois vínculos, $x + y + 2z = 1$ e $3x - 2y + z = -4$.

21. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para achar um valor funcional máximo relativo de f , se $f(x, y, z) = xyz$ com dois vínculos, $x + y + z = 4$ e $x - y - z = 3$.

22. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar um valor funcional máximo relativo de f , se $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ com dois vínculos, $x + y + z = 1$ e $x + y - z = 0$.

Nos Exercícios de 23 a 32, use o método dos multiplicadores de Lagrange para resolver o exercício indicado nos Exercícios 17.3.

- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| 23. Exercício 13 | 24. Exercício 14 | 25. Exercício 15 |
| 26. Exercício 16 | 27. Exercício 17 | 28. Exercício 22 |
| 29. Exercício 23 | 30. Exercício 24 | 31. Exercício 35 |
| 32. Exercício 36 | | |

33. Um disco circular é a região limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$. Se T graus for a temperatura em qualquer ponto do disco e $T = 2x^2 + y^2 - y$, ache o ponto mais quente e o mais frio do disco.

34. Uma companhia possui três fábricas produzindo o mesmo produto. Se as fábricas A , B e C produzem x , y e z unidades, respectivamente, seus custos de fabricação são $(3x^2 + 200)$, $(y^2 + 400)$ e $(2z^2 + 300)$. Se um pedido de 1.100 unidades deve ser entregue, use o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar como a produção deve ser distribuída entre as três fábricas, a fim de minimizar o custo total de fabricação.

17.6 OBTENÇÃO DE UMA FUNÇÃO A PARTIR DE SEU GRADIENTE E DIFERENCIAL EXATA

No Capítulo 19, quando estudarmos campos vetoriais, desejaremos determinar se uma dada função com valores vetoriais é o gradiente de alguma função com valores reais f e, se for, queremos obter tal função f . Primeiro vamos considerar o problema de como obter f , se for conhecido o seu gradiente. Isto é, temos

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} \quad (1)$$

e queremos encontrar $f(x, y)$.

► **ILUSTRAÇÃO 1** Suponhamos que

$$\nabla f(x, y) = (y^2 + 2x + 4)\mathbf{i} + (2xy + 4y - 5)\mathbf{j} \quad (2)$$

Então, como a igualdade (1) deve ser satisfeita, segue que

$$f_x(x, y) = y^2 + 2x + 4 \quad (3)$$

$$f_y(x, y) = 2xy + 4y - 5 \quad (4)$$

Integrando ambos os membros de (3) em relação a x ,

$$f(x, y) = y^2x + x^2 + 4x + g(y) \quad (5)$$

Observe que a “constante” de integração é uma função de y e independente de x , pois estamos integrando em relação a x . Agora, se derivarmos ambos os membros de (5) parcialmente em relação a y , iremos obter

$$f_y(x, y) = 2xy + g'(y) \quad (6)$$

As igualdades (4) e (6) dão duas expressões para $f_y(x, y)$. Logo,

$$2xy + 4y - 5 = 2xy + g'(y)$$

Assim sendo,

$$g'(y) = 4y - 5$$

$$g(y) = 2y^2 - 5y + C$$

Substituindo esse valor de $g(y)$ em (5), teremos

$$f(x, y) = y^2x + x^2 + 4x + 2y^2 - 5y + C \quad \blacktriangleleft$$

EXEMPLO 1 Ache $f(x, y)$ se

$$\nabla f(x, y) = e^{y^2} \cos x \mathbf{i} + 2ye^{y^2} \sin x \mathbf{j}$$

Solução Como a igualdade (1) deve estar satisfeita,

$$f_x(x, y) = e^{y^2} \cos x \quad (7)$$

$$f_y(x, y) = 2ye^{y^2} \sin x \quad (8)$$

Integrando ambos os membros de (8) em relação a y , obteremos

$$f(x, y) = e^{y^2} \sin x + g(x) \quad (9)$$

onde $g(x)$ é independente de y . Agora, derivamos parcialmente ambos os lados de (9) em relação a x , obtendo

$$f_x(x, y) = e^{y^2} \cos x + g'(x) \quad (10)$$

Igualando o segundo membro de (7) e o de (10),

$$e^{y^2} \cos x = e^{y^2} \cos x + g'(x)$$

$$g'(x) = 0$$

$$g(x) = C$$

Substituindo esse valor de $g(x)$ em (9), iremos obter

$$f(x, y) = e^{y^2} \operatorname{sen} x + C$$

Todos os vetores da forma $M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ não são necessariamente gradientes, como mostra a ilustração a seguir.

► **ILUSTRAÇÃO 2** Vamos mostrar que não existe função f , tal que

$$\nabla f(x, y) = 3y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} \quad (11)$$

Suponha que exista tal função. Segue, então, que

$$f_x(x, y) = 3y \quad (12)$$

$$f_y(x, y) = -2x \quad (13)$$

Integrando ambos os membros de (12) em relação a x , iremos obter

$$f(x, y) = 3xy + g(y)$$

Derivamos parcialmente essa expressão em relação a y , obtendo

$$f_y(x, y) = 3x + g'(y)$$

Igualando o segundo membro dessa equação e o de (13), obteremos

$$3x + g'(y) = -2x$$

$$g'(y) = -5x$$

Se ambos os membros dessa relação forem derivados com relação a x , deve resultar

$$0 = -5$$

o que, naturalmente, é falso. Assim sendo, a hipótese de que $3y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j}$ é um gradiente leva a uma contradição. ◀

Vamos determinar agora uma condição que deve estar satisfeita, para que um vetor seja um gradiente.

Suponha que M_y e N_x sejam contínuas num disco aberto B em R^2 . Se

$$M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j} \quad (14)$$

for um gradiente em B , então existirá uma função f , tal que

$$f_x(x, y) = M(x, y) \quad (15)$$

$$f_y(x, y) = N(x, y) \quad (16)$$

para todo (x, y) em B . Como $M_y(x, y)$ existe em B , então, de (15),

$$M_y(x, y) = f_{xy}(x, y) \quad (17)$$

Além disso, como $N_x(x, y)$ existe em B , segue de (16) que

$$N_x(x, y) = f_{yx}(x, y) \quad (18)$$

Uma vez que M_y e N_x são contínuas em B , seus equivalentes f_{xy} e f_{yx} também são contínuos em B . Assim, do Teorema 16.7.1, $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ em todos os pontos de B . Logo, os primeiros membros de (17) e de (18) são iguais em todos os pontos de B . Provamos que se M_y e N_x forem contínuas em um disco aberto B de R^2 , uma condição necessária para que o vetor (14) seja um gradiente em B é que

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) \quad (19)$$

A relação (19) também é uma condição suficiente para que o vetor (14) seja um gradiente em B . Se (19) estiver satisfeita, podemos mostrar como encontrar uma função f , tal que o vetor (14) seja um gradiente. Mas, a demonstração de que sempre que (19) estiver satisfeita, tal função existe, é material de um curso em Cálculo Avançado. O método para encontrar f é uma generalização do que foi usado na Ilustração 1, no Exemplo 1 e no Exemplo 2 adiante. Temos o teorema a seguir.

17.6.1 TEOREMA

Suponhamos que M e N sejam funções de duas variáveis x e y , definidas num disco aberto $B((x_0, y_0); r)$ em R^2 , e que M_y e N_x sejam contínuas em B . Então, o vetor

$$M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

será um gradiente em B se e somente se

$$M_y(x, y) = N_x(x, y)$$

para todos os pontos em B .

► **ILUSTRAÇÃO 3** (a) Vamos aplicar o Teorema 17.6.1 ao vetor no segundo membro de (2), na Ilustração 1. Seja

$$M(x, y) = y^2 + 2x + 4 \quad N(x, y) = 2xy + 4y - 5$$

$$M_y(x, y) = 2y \quad N_x(x, y) = 2y$$

Assim, $M_y(x, y) = N_x(x, y)$ e, portanto, o vetor é um gradiente.

(b) Se aplicarmos o Teorema 17.6.1 ao vetor no segundo membro de (1), na Ilustração 2, com $M(x, y) = 3y$ e $N(x, y) = -2x$, iremos obter

$$M_y(x, y) = 3 \quad N_x(x, y) = -2$$

Logo, $M_y(x, y) \neq N_x(x, y)$; assim, o vetor não é um gradiente. ◀

EXEMPLO 2 Determine se o vetor

$$(e^{-y} - 2x)\mathbf{i} - (xe^{-y} + \sen y)\mathbf{j}$$

é um gradiente $\nabla f(x, y)$ e, se for, ache $f(x, y)$.

Solução Vamos aplicar o Teorema 17.6.1. Seja

$$M(x, y) = e^{-y} - 2x \quad N(x, y) = -xe^{-y} - \sen y$$

$$M_y(x, y) = -e^{-y} \quad N_x(x, y) = -e^{-y}$$

Logo, $M_y(x, y) = N_x(x, y)$; assim, o vetor é um gradiente $\nabla f(x, y)$. Além disso,

$$f_x(x, y) = e^{-y} - 2x \quad (20)$$

$$f_y(x, y) = -xe^{-y} - \text{sen } y \quad (21)$$

Integrando ambos os membros de (20) em relação a x , iremos obter

$$f(x, y) = xe^{-y} - x^2 + g(y) \quad (22)$$

onde $g(y)$ é independente de x . Agora derivamos parcialmente ambos os membros de (22) em relação a y , obtendo

$$f_y(x, y) = -xe^{-y} + g'(y)$$

Igualando o lado direito da equação anterior e de (21), obtemos

$$-xe^{-y} + g'(y) = -xe^{-y} - \text{sen } y$$

$$g'(y) = -\text{sen } y$$

$$g(y) = \cos y + C$$

Substituindo a expressão de $g(y)$ em (22), teremos

$$f(x, y) = xe^{-y} - x^2 + \cos y + C$$

Para determinarmos se uma dada função com valores vetoriais é o gradiente de alguma função com valores reais f , precisamos estabelecer se a expressão da forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ é a diferencial total de uma função f . Tal expressão é denominada *diferencial exata*.

17.6.2 DEFINIÇÃO

A expressão diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

será chamada de **exata** no disco aberto B em R^2 , se existir um função f tal que

$$f_x(x, y) = M(x, y) \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = N(x, y)$$

em todos os pontos (x, y) de B .

► ILUSTRAÇÃO 4 A expressão

$$xy^4 dx + 2x^2y^3 dy \quad (23)$$

é uma diferencial exata, pois se

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^4$$

então $f_x(x, y) = xy^4$ e $f_y(x, y) = 2x^2y^3$. Observe que (23) é a diferencial total de f . ◀

O teorema a seguir, o qual fornece um teste para determinar se uma expressão é exata, decorre imediatamente da Definição 17.6.2 e do Teorema 17.6.1.

17.6.3 TEOREMA

Suponhamos que M e N sejam funções de duas variáveis x e y , definidas em um disco aberto $B((x_0, y_0); r)$, em R^2 , e que M_y e N_x sejam contínuas em B . Então, a expressão diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

será exata em B se e somente se

$$M_y(x, y) = N_x(x, y)$$

em todos os pontos de B .

EXEMPLO 3 Determine se a expressão diferencial é exata:

(a) $(y \operatorname{sen} x - 3 \cos y) dx + (3x \operatorname{sen} y - \cos x) dy$

(b) $(3 + r \cos \theta) dr + r^2 \operatorname{sen} \theta d\theta$

Solução

(a) Seja

$$M(x, y) = y \operatorname{sen} x - 3 \cos y \quad N(x, y) = 3x \operatorname{sen} y - \cos x$$

$$M_y(x, y) = \operatorname{sen} x + 3 \operatorname{sen} y \quad N_x(x, y) = 3 \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x$$

Como $M_y(x, y) = N_x(x, y)$, temos então uma diferencial exata.

(b) Seja

$$M(r, \theta) = 3 + r \cos \theta \quad N(r, \theta) = r^2 \operatorname{sen} \theta$$

$$M_\theta(r, \theta) = -r \operatorname{sen} \theta \quad N_r(r, \theta) = 2r \operatorname{sen} \theta$$

Como $M_\theta(r, \theta) \neq N_r(r, \theta)$, então a expressão diferencial não é exata.

Se $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ for uma diferencial exata, dizemos então que a equação diferencial

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

é uma equação diferencial exata. A solução geral da equação é dada por $f(x, y) = C$, onde $f_x(x, y) = M(x, y)$, $f_y(x, y) = N(x, y)$ e C é uma constante arbitrária.

► **ILUSTRAÇÃO 5** Igualando a zero a expressão diferencial exata (23), temos a equação diferencial exata

$$xy^4 dx + 2x^2y^3 dy = 0$$

A solução geral dessa equação é

$$\frac{1}{2}x^2y^4 = \bar{C}$$

$$\Leftrightarrow x^2y^4 = C$$

onde $C = 2\bar{C}$.

EXEMPLO 4 Determine se a equação diferencial a seguir é exata. Em caso afirmativo, ache a sua solução geral.

$$(3x^2y + xy^2 + e^x) dx + (x^3 + x^2y + \cos y) dy = 0$$

Solução Seja

$$M(x, y) = 3x^2y + xy^2 + e^x \quad N(x, y) = x^3 + x^2y + \cos y$$

$$M_y(x, y) = 3x^2 + 2xy \quad N_x(x, y) = 3x^2 + 2xy$$

Logo, $M_y(x, y) = N_x(x, y)$; assim sendo, a equação diferencial é exata. Portanto, a solução geral é $f(x, y) = C$, onde

$$f_x(x, y) = 3x^2y + xy^2 + e^x \quad (24)$$

$$f_y(x, y) = x^3 + x^2y + \cos y \quad (25)$$

Integrando ambos os membros de (24) em relação a x , iremos obter

$$f(x, y) = x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 + e^x + g(y) \quad (26)$$

onde $g(y)$ é independente de x . Derivando parcialmente ambos os membros de (26) em relação a y teremos

$$f_y(x, y) = x^3 + x^2y + g'(y)$$

Igualando o segundo membro dessa igualdade e o de (25), teremos

$$x^3 + x^2y + g'(y) = x^3 + x^2y + \cos y$$

$$g'(y) = \cos y$$

$$g(y) = \text{sen } y + \bar{C}$$

Substituindo essa expressão em (26), teremos

$$f(x, y) = x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 + e^x + \text{sen } y + \bar{C}$$

Logo, a solução geral é

$$x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 + e^x + \text{sen } y + \bar{C} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^3y + x^2y^2 + 2e^x + 2 \text{sen } y = C$$

onde $C = -2\bar{C}$.

O Teorema 17.6.1 pode ser estendido para funções de três variáveis.

17.6.4 TEOREMA

Sejam M , N e R funções de três variáveis x , y e z , definidas numa bola aberta $B((x_0, y_0, z_0); r)$ em \mathbb{R}^3 , sendo M_y , M_z , N_x , N_z , R_x e R_y contínuas em B . Então, o vetor $M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ será um gradiente em B se e somente se $M_y(x, y, z) = N_x(x, y, z)$, $M_z(x, y, z) = R_x(x, y, z)$ e $N_z(x, y, z) = R_y(x, y, z)$.

A demonstração da parte “somente se” do Teorema 17.6.3 é análoga à demonstração da parte “somente se” do Teorema 17.5.1 e será deixada como exercício (veja o Exercício 35). A demonstração da parte “se” foge do contexto deste livro.

EXEMPLO 5 Determine se o seguinte vetor é um gradiente $\nabla f(x, y, z)$ e, se for, então ache $f(x, y, z)$:

$$(e^x \sen z + 2yz)\mathbf{i} + (2xz + 2y)\mathbf{j} + (e^x \cos z + 2xy + 3z^2)\mathbf{k}$$

Solução Vamos aplicar o Teorema 17.5.4. Seja

$$\begin{aligned} M(x, y, z) &= e^x \sen z + 2yz & N(x, y, z) &= 2xz + 2y & R(x, y, z) &= e^x \cos z + 2xy + 3z^2 \\ M_y(x, y, z) &= 2z & N_x(x, y, z) &= 2z & R_x(x, y, z) &= e^x \cos z + 2y \\ M_z(x, y, z) &= e^x \cos z + 2y & N_z(x, y, z) &= 2x & R_y(x, y, z) &= 2x \end{aligned}$$

Logo,

$$M_y(x, y, z) = N_x(x, y, z) \quad M_z(x, y, z) = R_x(x, y, z) \quad N_z(x, y, z) = R_y(x, y, z)$$

Assim sendo, o vetor dado é um gradiente $\nabla f(x, y, z)$. Além disso,

$$f_x(x, y, z) = e^x \sen z + 2yz \tag{27}$$

$$f_y(x, y, z) = 2xz + 2y \tag{28}$$

$$f_z(x, y, z) = e^x \cos z + 2xy + 3z^2 \tag{29}$$

Integrando ambos os membros de (27) em relação a x , teremos

$$f(x, y, z) = e^x \sen z + 2xyz + g(y, z) \tag{30}$$

onde $g(y, z)$ é independente de x . Derivando parcialmente ambos os membros de (30) com relação a y , obteremos

$$f_y(x, y, z) = 2xz + g_y(y, z)$$

Igualando o segundo membro dessa equação e o de (28), resultará

$$2xz + g_y(y, z) = 2xz + 2y$$

$$g_y(y, z) = 2y$$

Agora, integrando ambos os membros da relação acima com respeito a y , teremos

$$g(y, z) = y^2 + h(z) \tag{31}$$

onde h é independente de x e de y . Substituindo (31) em (30), obtemos

$$f(x, y, z) = e^x \sen z + 2xyz + y^2 + h(z) \tag{32}$$

Derivando parcialmente com relação a z ambos os membros de (32):

$$f_z(x, y, z) = e^x \cos z + 2xy + h'(z)$$

Igualando o segundo membro dessa equação e o de (29), temos

$$e^x \cos z + 2xy + h'(z) = e^x \cos z + 2xy + 3z^2$$

$$h'(z) = 3z^2$$

$$h(z) = z^3 + C$$

Substituindo $z^3 + C$ para $h(z)$ em (32), obtemos

$$f(x, y, z) = e^x \sen z + 2xyz + y^2 + z^3 + C$$

A seguir, temos uma extensão da Definição 17.6.2 para funções de três variáveis.

17.6.5 DEFINIÇÃO

A expressão diferencial

$$M(x, y, z)dx + N(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

será denominada *exata* em uma bola aberta B de R^3 , se existir uma função f tal que

$$f_x(x, y, z) = M(x, y, z) \quad f_y(x, y, z) = N(x, y, z) \quad f_z(x, y, z) = R(x, y, z)$$

em todos os pontos (x, y, z) de B .

► ILUSTRAÇÃO 6 A expressão

$$(e^x \operatorname{sen} z + 2yz) dx + (2xz + 2y) dy + (e^x \cos z + 2xy + 3z^2) dz$$

é uma diferencial exata, pois é a diferencial total da função f encontrada no Exemplo 5. ◀

EXERCÍCIOS 17.6

Nos Exercícios de 1 a 12, determine se o vetor é um gradiente. Em caso afirmativo, ache uma função cujo gradiente é o vetor dado.

- $4xi - 3yj$
- $y^2i + 3x^2j$
- $(6x - 5y)i - (5x - 6y^2)j$
- $(4y^2 + 6xy - 2)i + (3x^2 + 8xy + 1)j$
- $(6x^2y^2 - 14xy + 3)i + (4x^3y - 7x^2 - 8)j$
- $(2x + \ln y)i + \left(y^2 + \frac{x}{y}\right)j$
- $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)i + \left(\frac{1 - 2x}{y^3}\right)j$
- $\left(\frac{2x - 1}{y}\right)i + \left(\frac{x - x^2}{y^2}\right)j$
- $2x \sec 2y i + 2x^2 \sec 2y \operatorname{tg} 2y j$
- $(2xy - y \operatorname{sen} x)i + (x^2 + \cos x)j$
- $(2x \cos y - 1)i - x^2 \operatorname{sen} y j$
- $(ye^x + x)i + (xe^y - y)j$

Nos Exercícios de 13 a 16, determine se a expressão é uma diferencial exata. Em caso afirmativo, determine a função para a qual a diferencial total é igual à expressão dada.

- $(2xy + y^2 + 1) dx + (x^2 + 2xy + x) dy$
- $3(2x^2 + 6xy) dx + 3(3x^2 + 8y) dy$
- $(e^y - 2xy) dx + (xe^y - x^2) dy$
- $(\operatorname{sen} 2x - \operatorname{tg} y) dx - x \sec^2 y dy$

Nos Exercícios de 17 a 24, determine se a equação diferencial é exata. Em caso afirmativo, ache a solução geral.

- $(x + y) dx + (2y + x) dy = 0$
- $3x - y + (x + 3y) \frac{dy}{dx} = 0$
- $ye^x - 2x + e^x \frac{dy}{dx} = 0$

$$20. \frac{y}{x-1} dx + \left(\ln(2x-2) + \frac{1}{y}\right) dy = 0$$

$$21. (xy^2 + 2y) dx + (2y^3 - x^2y + 2x) dy = 0$$

$$22. e^{2x} \left(\frac{dy}{dx} + 2y\right) = x^2$$

$$23. \left(\frac{x^2}{y^2} \cos \frac{x}{y}\right) \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \cos \frac{x}{y} + \operatorname{sen} \frac{x}{y} + \cos x$$

$$24. (2y \operatorname{cotg} x - 3x^2) \frac{dy}{dx} = y^2 \operatorname{cosec}^2 x + 6xy - 2$$

Nos Exercícios de 25 a 30, determine se o vetor é um gradiente. Em caso afirmativo, ache uma função cujo gradiente é o vetor dado.

- $(2y - 5z)i + (2x + 8z)j - (5x - 8y)k$
- $4x^3i + 9y^2j - 2zk$
- $e^y \operatorname{sen} z i + xe^y \operatorname{sen} z j + xe^y \cos z k$
- $(2xy + 7z^3)i + (x^2 + 2y^2 - 3z)j + (21xz^2 - 4y)k$
- $e^x(e^z - \ln y)i + (e^y \ln z - e^x y^{-1})j + (e^{x+z} + e^y z^{-1})k$
- $\frac{1}{y+z} i - \frac{x-z}{(y+z)^2} j - \frac{x+y}{(y+z)^2} k$

Nos Exercícios de 31 a 34, determine se a expressão é uma diferencial exata. Em caso afirmativo, ache a função cuja diferencial total é igual à expressão dada.

- $(4xy + 3yz - 2) dx + (2x^2 + 3xz - 5z^2) dy + (3xy - 10yz + 1) dz$
- $e^z \cos x dx + z \operatorname{sen} y dy + (e^z \operatorname{sen} x - \cos y) dz$
- $z \operatorname{tg} y dx + xz \sec^2 y dy + x \operatorname{tg} y dz$
- $(2y + z) dx + (2x - 3z + 4yz) dy + (x - 3y + 2y^2) dz$
- Prove a parte "somente se" do Teorema 17.5.4.
- Prove que $\nabla f(x, y) = ai + bj$ se e somente se

$$f(x, y) = ax + by + c \quad \text{onde } a, b \text{ e } c \text{ são constantes.}$$

- Prove que uma equação diferencial cujas variáveis são distintas é exata.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 17

Nos Exercícios de 1 a 5, ache os valores da derivada direcional num dado ponto P_0 para a função dada, na direção e sentido de \mathbf{U} .

- $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 1$; $\mathbf{U} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$; $P_0 = (5, 10)$
- $g(x, y) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x}$; $\mathbf{U} = \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{j}$; $P_0 = (4, -4)$
- $h(x, y) = e^x + y^2 \cos x$; $\mathbf{U} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\mathbf{j}$; $P_0 = (0, 3)$
- $f(x, y) = x^2 - 2x^2y + \ln x$; $\mathbf{U} = \cos \pi\mathbf{i} + \sin \pi\mathbf{j}$; $P_0 = (1, -2)$
- $f(x, y, z) = xy^2z - 3xyz + 2xz^2$; $\mathbf{U} = -\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}$; $P_0 = (2, 1, 1)$

Nos Exercícios de 6 a 9, ache (a) o gradiente de f em P_0 ; (b) a taxa de variação dos valores da função na direção e sentido de \mathbf{U} em P_0 .

- $f(x, y) = 3x^2 - 2xy^3$; $\mathbf{U} = \cos \frac{1}{6}\pi\mathbf{i} + \sin \frac{1}{6}\pi\mathbf{j}$; $P_0 = (-3, 1)$
- $f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$; $\mathbf{U} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{j}$; $P_0 = (1, 1)$
- $f(x, y, z) = yz - y^2 - xz$; $\mathbf{U} = \frac{5}{6}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$; $P_0 = (1, 2, 3)$
- $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + 2xyz$; $\mathbf{U} = \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{k}$; $P_0 = (2, -1, 0)$

Nos Exercícios de 10 a 13, determine se a função com valores vetoriais é um gradiente. Em caso afirmativo, ache uma função cujo gradiente é a função dada.

- $(e^x \operatorname{tg} y - \sec y)\mathbf{i} - \sec y(x \operatorname{tg} y - e^x \sec y)\mathbf{j}$
- $2xe^{x^2} \ln y\mathbf{i} + \frac{e^{x^2}}{y}\mathbf{j}$
- $y(\cos x - z \sin x)\mathbf{i} + z(\cos x + \sin y)\mathbf{j} - (\cos y - y \cos x)\mathbf{k}$
- $\left(\frac{-y}{(x+z)^2} + \frac{1}{x^2}\right)\mathbf{i} + \frac{1}{x+z}\mathbf{j} + \left(\frac{-y}{(x+z)^2} + \frac{2}{z^2}\right)\mathbf{k}$

Nos Exercícios de 14 a 16, ache uma equação do plano tangente e as equações da reta normal à superfície dada no ponto indicado.

- $3x^2 + 2xy - y^2 = 15$; $(2, 3, 4)$
- $x^2 + 2y + z = 8$; $(2, 1, 2)$
- $z = x^2 + 2xy$; $(1, 3, 7)$
- Ache as equações simétricas da reta tangente à curva de intersecção das superfícies $x^2 - 3xy + y^2 - z = 0$ e $2x^2 + y^2 - 3z + 27 = 0$ no ponto $(1, -2, 11)$.
- Ache as equações da reta tangente à curva de intersecção da superfície $z = 3x^2 + y^2 + 1$, com o plano $x = 2$, no ponto $(2, -1, 14)$.
- Uma equação da superfície de uma montanha é $z = 900 - 3xy$, onde a distância é medida em metros, o eixo x aponta na direção oeste e o eixo y na direção sul. Um alpinista está no ponto correspondente a $(50, 4, 300)$. (a) Qual a direção de subida mais íngreme? (b) Quando se move na direção norte, o alpinista está descendo ou subindo? (c) Em que direção o alpinista estará numa curva de nível?

- Se $f(x, y, z) = \sinh(x+z) \cosh y$, ache a taxa de variação de $f(x, y, z)$ em relação à distância em \mathbb{R}^3 , no ponto $P(1, 1, 0)$, na direção de \overrightarrow{PQ} , se Q for o ponto $(-1, 0, 2)$.

Nos Exercícios 21 e 22, determine os extremos relativos de f , quando existirem.

- $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$
- $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 2y^2 + 10x - 11y$

Nos Exercícios de 23 a 26, use o método dos multiplicadores de Lagrange para achar o(s) ponto(s) crítico(s) da função dada, sujeitos ao vínculo indicado. Determine se a função tem um valor máximo ou mínimo relativo nos pontos críticos.

- $f(x, y) = 5 + x^2 - y^2$ com vínculo $x^2 - 2y^2 = 5$
- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ com vínculo $x^2 - y^2 = 1$
- $f(x, y, z) = y + xz - 2x^2 - y^2 - z^2$ com vínculo $z = 35 - x - y$
- $f(x, y, z) = xz^2 + y^3$ com vínculo $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

- Use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar a menor distância do ponto $(4, 1, 2)$ ao plano $x - y + 2z = 0$.
- Use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar o ponto sobre a superfície $z = x^2 + y^2 + 2$ que está mais próximo da origem.

Nos Exercícios de 29 a 32, determine se a expressão é uma diferencial exata. Caso seja, determine a função para a qual a expressão dada é a diferencial total.

- $(6x^2y + 5x) dx + (2x^3 + 3y) dy$
- $\sin x \sin y dx - \cos x \cos y dy$
- $e^x \operatorname{tg} y dx + (e^x \sec^2 y - z \operatorname{cosec}^2 y) dy + \cotg y dz$
- $\left(\frac{1}{x} - ze^{yz}\right) dx - xz^2e^{yz} dy - xe^{yz}(yz + 1) dz$

Nos Exercícios de 33 a 36, determine se a equação diferencial é exata. Se for, ache a solução geral.

- $(3x^2y^2 + 2y^3) dx + (2x^3y + 6xy^2) dy = 0$
- $(2xy + 3 - 2 \sin x) dx + (x^2 + 3x) dy = 0$
- $\frac{dy}{dx} = \frac{ye^{-x} - \sin x}{e^{-x} + 2y}$
- $2y \sin xy + (2x \sin xy + y^3) \frac{dy}{dx} = 0$

- Ache três números cuja soma é 100 e cuja soma dos quadrados é mínima.
- Um fabricante produz diariamente x unidades de um produto A e y unidades de um produto B . Se $P(x, y)$ for o lucro diário das vendas dos produtos, e $P(x, y) = 33x + 66y + xy - x^2 - 3y^2$, quantas unidades de cada produto deverão ser produzidas para que o fabricante receba um lucro máximo?

39. Ache as dimensões de um paralelepípedo retangular de maior volume possível que possa ser inscrito em um elipsóide $x^2 + 9y^2 + z^2 = 9$. Suponha que as arestas sejam paralelas aos eixos coordenados.
40. A temperatura é T graus em qualquer ponto (x, y) da curva $4x^2 + 12y^2 = 1$, $T = 4x^2 + 24y^2 - 2x$. Ache os pontos da curva onde a temperatura é máxima e onde é mínima. Ache também o valor da temperatura nesses pontos.
41. A temperatura em qualquer ponto (x, y) de uma placa circular aquecida é T graus,

$$T = \frac{44}{x^2 + y^2 + 9}$$

e a distância é medida em centímetros da origem ao centro da placa. (a) Ache a taxa de variação da temperatura no ponto $(3, 2)$ na direção do vetor $\cos \frac{1}{6}\pi \mathbf{i} + \sin \frac{1}{6}\pi \mathbf{j}$. (b) Ache a direção, o sentido e o módulo da maior taxa de variação de T no ponto $(3, 2)$.

42. Um caixote retangular sem tampa tem uma superfície de 216 cm^2 . Quais são as dimensões do caixote com o maior volume?
43. Para o caixote do Exercício 42, em vez da área da superfície ser 216 cm^2 , a soma dos comprimentos das arestas é 216 cm . Quais são as dimensões do caixote com o maior volume?
44. Um fio de arame com $L \text{ cm}$ de comprimento é cortado em três pedaços. Um deles é encurvado na forma de uma circunferência, outro na forma de um quadrado e o terceiro na forma de um triângulo equilátero. Como deve ser cortado o fio para que (a) a área combinada das três figuras seja a menor possível e (b) a área combinada das três figuras seja a maior possível?
45. Determine as dimensões relativas de uma caixa retangular sem tampa, para que seu volume seja máximo.
46. Ache a maior e a menor distância da origem até a curva de intersecção das superfícies $x^2 = 2yz$ e $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 30$.
47. A tabela seguinte dá os dados para cinco pacientes submetidos a uma determinada intervenção cirúrgica em um certo hospital, onde x anos é a idade do paciente e y dias é o intervalo de tempo em que o paciente permanece em recuperação no hospital após a cirurgia.

	Paciente A	Paciente B	Paciente C	Paciente D	Paciente E
x	54	46	40	36	30
y	15	12	9	10	8

- (a) Ache uma equação para a reta de regressão, para os dados da tabela. (b) Use a reta de regressão a fim de estimar o interva-

lo de tempo de internação para um paciente com 42 anos, submetido à cirurgia.

48. Na tabela a seguir são dados a pressão sistólica do sangue e os batimento cardíacos correspondentes de vários pacientes, onde $x \text{ mm}$ de mercúrio é a pressão sistólica do sangue e y é o número de batimentos cardíacos por minuto.

	Paciente A	Paciente B	Paciente C	Paciente D	Paciente E	Paciente F
x	110	117	133	146	115	127
y	70	74	80	65	60	77

- (a) Ache uma equação da reta de regressão para os dados da tabela. (b) Use a reta de regressão para estimar o número de batimentos cardíacos de um paciente com pressão sistólica de 85 mm de mercúrio.

49. Nos desertos a escassez de água é um fator que limita drasticamente a atividade das plantas. Na tabela a seguir, x é o número de milímetros de precipitação por ano para seis regiões diferentes e y é a quantidade em quilogramas por hectare do produto final da fotossíntese.

	Região A	Região B	Região C	Região D	Região E	Região F
x	100	200	400	500	600	650
y	1.000	1.900	3.200	4.400	5.800	6.400

- (a) Ache uma equação da reta de regressão para os dados da tabela. (b) Use a reta de regressão para estimar esse produto final da fotossíntese numa região tendo uma precipitação anual de 300 mm .

50. Um cereal para o café de manhã teve sua venda testada em quatro cidades do mesmo tamanho, com diferentes preços; os resultados aparecem na tabela a seguir, onde x foi o preço por caixa e y 10^3 o número de caixas vendidas por semana.

	Cidade A	Cidade B	Cidade C	Cidade D
x	130	140	150	160
y	100	85	75	63

- (a) Ache uma equação da reta de regressão para os dados da tabela. Use a reta de regressão na parte (a) como a curva de demanda para estimar as vendas semanais, se o preço por caixa for (b) $\$ 1,20$ e (c) $\$ 1,70$.

DEZOITO

Integração Múltipla

$$V = \iint_R f(x, y) dA$$

$$I_x = \iint_R y^2 \rho(x, y) dA$$

$$M = \iiint_S kndV$$

Agora aplicaremos a integral definida de uma função de uma única variável a uma função de várias variáveis. Começaremos na Secção 18.1, definindo a *integral dupla* de duas variáveis em uma região retangular fechada em R^2 . Então, aplicamos o conceito para considerar a integral dupla de uma função em uma região plana mais geral. Na Secção 18.2 mostramos como as *integrais iteradas* são usadas para avaliar as integrais duplas. Aplicamos as integrais duplas na Secção 18.2 para encontrar volumes de sólidos e na Secção 18.3, para calcular *massa*, *centro de massa* e *momentos de inércia*. Então, na Secção 18.4 demonstramos como as coordenadas polares podem ser usadas para avaliar certas integrais duplas. Outra aplicação de integrais duplas é feita para o cálculo de *áreas de superfícies*, as quais discutiremos na Secção 18.5.

Consideraremos as *integrais triplas* na Secção 18.6 definindo-as primeiro em um paralelepípedo retangular e então em uma região mais geral em R^3 . Mostraremos na Secção 18.7 que quando uma região tem um eixo de simetria, as coordenadas cilíndricas são usadas para o cálculo de uma integral tripla e quando há simetria em relação a um ponto, são usadas as coordenadas esféricas.

O tratamento aqui é menos formal e mais intuitivo que nos capítulos anteriores, pois as provas da maioria dos teoremas deste capítulo pertencem a um curso de Cálculo Avançado.

18.1 A INTEGRAL DUPLA

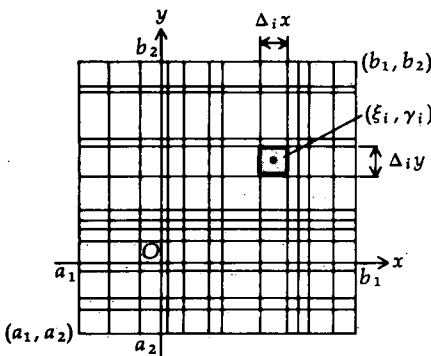


FIGURA 1

Denominamos uma integral de uma função de uma única variável de **integral simples** para distingui-la de uma *integral múltipla*, que envolve uma função de várias variáveis. Na discussão de uma integral simples, exigimos que a função fosse definida em um intervalo fechado no conjunto R dos números reais. Para a *integral dupla* de uma função de duas variáveis, exigimos que a função seja definida numa região fechada em R^2 . Uma região fechada é aquela que inclui sua fronteira. Neste capítulo, sempre que nos referirmos a uma região, ficará implícito que ela será fechada. O tipo mais simples de região fechada em R^2 é uma região retangular que passaremos a definir. Consideremos dois pontos distintos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$, tais que $a_1 \leq b_1$ e $a_2 \leq b_2$. Esses dois pontos determinam um retângulo com lados paralelos aos eixos coordenados. Consulte a Figura 1.* Os dois pontos, juntamente com os pontos (b_1, a_2) e (a_1, b_2) , são chamados de *vértices* do retângulo. Os segmentos de reta que unem vértices consecutivos são chamados de *lados* do retângulo. O conjunto de pontos interiores ao retângulo é chamado de *região retangular aberta* e o conjunto de todos os pontos no retângulo aberto, juntamente com os pontos sobre os lados do retângulo, constituem uma *região retangular fechada*.

Vamos denotar por R a região retangular fechada da Figura 1, e seja f uma função definida em R . A região R pode ser considerada como uma **região de integração**. A primeira etapa é definir uma **partição**, Δ , de R . Traçamos linhas paralelas aos eixos coordenados e obtemos uma malha de sub-regiões retangulares que cobrem R . A **norma** dessa partição, denotada por $\|\Delta\|$, é determinada pelo comprimento da maior diagonal de uma sub-região retangular da partição. O comprimento da diagonal foi escolhido porque representa a maior distância entre dois pontos em uma sub-região retangular. Enumeramos então as sub-regiões de uma forma arbitrária e seja n o seu total. Denotamos a largura da i -ésima região por $\Delta_i x$ e sua altura por $\Delta_i y$ unidades de comprimento. Então, se $\Delta_i A$ unidades de área for a área da i -ésima sub-região retangular,

$$\Delta_i A = \Delta_i x \Delta_i y$$

Seja (ξ_i, γ_i) um ponto arbitrário da i -ésima sub-região e seja $f(\xi_i, \gamma_i)$ o valor funcional nele. Consideremos o produto $f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A$. Associado a cada uma das n sub-regiões existe tal produto e sua soma é

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A \quad (1)$$

Existem muitas somas da forma (1), pois a norma da partição pode ser qualquer número positivo e cada ponto (ξ_i, γ_i) pode ser qualquer ponto na i -ésima sub-região. Se todas essas somas puderem se tornar arbitrariamente próximas

* N. do R.: O retângulo fechado também é freqüentemente caracterizado como o conjunto dos pares (x, y) que pertencem ao produto cartesiano dos intervalos fechados:

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = \{(x, y) \in R^2; a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2\}$$

de um número L , ao tomarmos partições com normas suficientemente pequenas, então L será definido como o limite dessas somas quando a norma da partição de R tender a zero. Temos a definição a seguir.

18.1.1 DEFINIÇÃO

Seja f uma função definida numa região retangular fechada R . O número L será o **limite** das somas da forma $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A$ se L satisfizer a propriedade de que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que para toda partição Δ , para a qual $\|\Delta\| < \delta$ e para todas as possíveis seleções do ponto (ξ_i, γ_i) no i -ésimo retângulo $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A - L \right| < \epsilon$$

Se tal número L existir, escrevemos

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A = L$$

Se existir um número L satisfazendo a Definição 18.1.1, podemos mostrar que ele é único. A demonstração é similar à prova do Teorema (2.1.2) a respeito da unicidade do limite de uma função.

18.1.2 DEFINIÇÃO

Uma função f de duas variáveis será dita **integrável** numa região retangular fechada R se f estiver definida em R e o número L da Definição 18.1.1 existir. Esse número L será chamado de **integral dupla** de f em R , e escrevemos

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A = \iint_R f(x, y) dA$$

Outros símbolos usados para a integral dupla de f em R são

$$\iint_R f(x, y) dx dy \quad \text{e} \quad \iint_R f(x, y) dy dx$$

O teorema a seguir, enunciado sem demonstração, dá uma condição suficiente para que uma função de duas variáveis seja integrável.

18.1.3 TEOREMA

Se uma função de duas variáveis for contínua numa região retangular fechada R , então R será integrável em R .

O valor aproximado de uma integral dupla é encontrado no exemplo a seguir.

EXEMPLO 1 Ache um valor aproximado da integral dupla

$$\iint_R (3y - 2x^2) dA$$

onde R é a região retangular com vértices $(-1, 1)$ e $(2, 3)$. Tome uma partição de R formada pelas retas $x = 0$, $x = 1$ e $y = 2$ e seja (ξ_i, γ_i) o centro da i -ésima sub-região.

Solução Consulte a Figura 2 que mostra a região R dividida em seis sub-regiões, as quais são quadrados com lados de comprimento unitário. Para cada i , $\Delta_i A = 1$. Em cada uma das sub-regiões, o ponto (ξ_i, γ_i) será o centro do

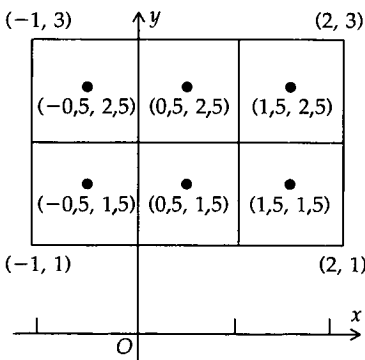


FIGURA 2

quadrado. Com $f(x, y) = 3y - 2x^2$, uma aproximação da integral dupla será dada por

$$\begin{aligned} \iint_R (3y - 2x^2) dA &\approx f(-0,5, 1,5) \cdot 1 + f(0,5, 1,5) \cdot 1 + f(1,5, 1,5) \cdot 1 \\ &\quad + f(1,5, 2,5) \cdot 1 + f(0,5, 2,5) \cdot 1 + f(-0,5, 2,5) \cdot 1 \\ &= 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 7 \cdot 1 + 7 \cdot 1 \\ &= 25 \end{aligned}$$

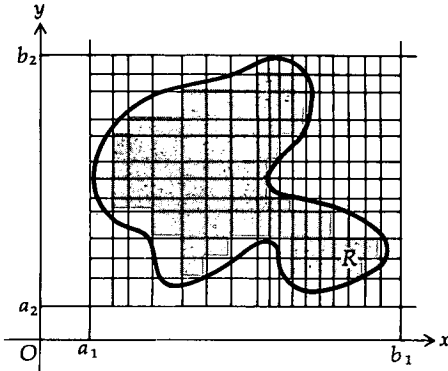


FIGURA 3

O valor exato da integral dupla do Exemplo 1 é 24, conforme será mostrado no Exemplo 1 da Secção 18.2.

Vamos considerar agora a integral dupla de uma função sobre uma região mais geral. Na Secção 6.3 a função suave foi definida como sendo aquela que tem derivada contínua e o seu gráfico é uma curva suave. Seja R uma região fechada cuja fronteira consiste em um número finito de arcos de curvas suaves, unidos para formar uma curva fechada. Como fizemos com uma região retangular, traçamos retas paralelas aos eixos coordenados que dão uma partição retangular da região R . Descartamos as sub-regiões contendo pontos que não estão em R e consideramos somente aquelas sub-regiões que estão totalmente em R (as quais estão sombreadas na Figura 3). Seja n o número dessas regiões sombreadas e vamos proceder de forma análoga àquela utilizada para regiões retangulares. As Definições 18.1.1 e 18.1.2 são aplicáveis quando a região R for do tipo mais geral descrito acima. Você pode, intuitivamente, imaginar que se a norma da partição tender a zero, n crescerá sem limitação e a área da região omitida (isto é, os retângulos descartados) tenderá a zero. Realmente, pode ser provado que se uma função for integrável em uma região R , o limite das somas aproximativas do tipo (1) será o mesmo, qualquer que seja a forma de se subdividir R , desde que cada sub-região tenha uma forma para a qual se possa atribuir uma área.

Da mesma forma que a integral de uma função de uma única variável é interpretada geometricamente em termos da área de uma região plana, a integral dupla pode ser interpretada geometricamente em termos do volume de um sólido tridimensional. Suponha que a função f seja contínua numa região fechada R em R^2 . Além disso, para simplificar a discussão vamos supor que $f(x, y)$ seja não-negativa em R . O gráfico da equação $z = f(x, y)$ é uma superfície que está acima do plano xy , conforme mostra a Figura 4. A figura mostra uma sub-região retangular particular de R , tendo dimensões de medida $\Delta_i x$ e $\Delta_i y$. A figura também mostra um sólido retangular tendo essa sub-região como base e $f(\xi_i, \gamma_i)$ como a medida da altura, onde (ξ_i, γ_i) é um ponto na i -ésima sub-região. O volume do sólido retangular é determinado por

$$\begin{aligned} \Delta_i V &= f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A \\ &= f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i x \Delta_i y \end{aligned}$$

O número $\Delta_i V$ é a medida do volume do sólido retangular delgado que aparece na Figura 4; assim, a soma dada em (1) é a soma das medidas dos volumes de n de tais sólidos. Essa soma aproxima a medida do volume do sólido tridimensional mostrado na Figura 4. O sólido é limitado acima pelo gráfico de f e abaixo pela região R no plano xy . A soma em (1) também aproxima o número dado pela integral dupla

$$\iint_R f(x, y) dA$$

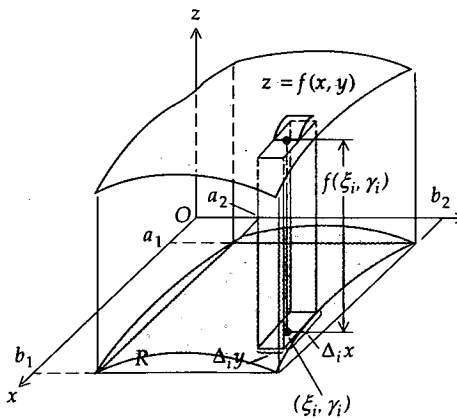


FIGURA 4

Podemos provar que o volume do sólido tridimensional da Figura 4 é o valor da integral dupla. Esse fato está estabelecido no teorema a seguir, cuja demonstração formal não será dada.

18.1.4 TEOREMA

Seja f uma função de duas variáveis, contínua numa região fechada R , no plano xy e $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) em R . Se V for a medida do volume do sólido S tendo a região R como base e tendo uma altura cuja medida é $f(x, y)$ no ponto (x, y) em R , então

$$\begin{aligned} V &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A \\ &= \iint_R f(x, y) dA \end{aligned}$$

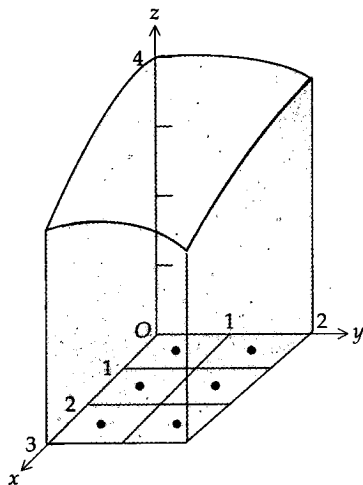


FIGURA 5

EXEMPLO 2 Obtenha uma aproximação do volume do sólido limitado pela superfície

$$f(x, y) = 4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2$$

pelos planos $x = 3$, $y = 2$ e pelos três planos coordenados. Para encontrar um valor aproximado da integral dupla, vamos fazer uma partição da região no plano xy , traçando as retas $x = 1$, $x = 2$ e $y = 1$ e tomar (ξ_i, γ_i) no centro da i -ésima sub-região.

Solução O sólido aparece na Figura 5. A região retangular R é o retângulo no plano xy limitado pelos eixos coordenados e pelas retas $x = 3$ e $y = 2$. Do Teorema 18.1.4, se V unidades cúbicas for o volume do sólido, então,

$$V = \iint_R \left(4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2\right) dA$$

A Figura 5 mostra R dividido em seis sub-regiões que são quadrados, tendo lados de comprimento unitário. Logo, para cada i , $\Delta_i A = 1$. O ponto (ξ_i, γ_i) em cada sub-região é o centro do quadrado. Então, uma aproximação de V é dada pela aproximação da integral dupla. Logo,

$$V \approx f(0,5, 0,5) \cdot 1 + f(1,5, 0,5) \cdot 1 + f(2,5, 0,5) \cdot 1 + f(0,5, 1,5) \cdot 1 + f(1,5, 1,5) \cdot 1 + f(2,5, 1,5) \cdot 1$$

Usando uma calculadora para resolver os valores da função, obtemos

$$\begin{aligned} V &\approx 3,957 + 3,734 + 3,290 + 3,832 + 3,609 + 3,165 \\ &\approx 21,59 \end{aligned}$$

Assim, o volume é aproximadamente 21,59 unidades de volume.

O valor exato do volume do Exemplo 2 da Secção 18.2 será de 21,5 unidades de volume.

Várias propriedades da integral dupla são análogas às propriedades da integral definida de uma função de uma única variável. As mais importantes serão dadas nos teoremas a seguir.

18.1.5 TEOREMA

Se c for uma constante e a função f for integrável numa região fechada R , então cf será integrável em R e

$$\iint_R cf(x, y) dA = c \iint_R f(x, y) dA$$

18.1.6 TEOREMA

Se as funções f e g forem integráveis numa região fechada R , então a função $f + g$ será integrável em R e

$$\iint_R [f(x, y) + g(x, y)] dA = \iint_R f(x, y) dA + \iint_R g(x, y) dA$$

O resultado do teorema 18.1.6 pode ser aplicado a qualquer número finito de funções integráveis. As demonstrações dos Teoremas 18.1.5 e 18.1.6 seguem diretamente da definição de integral dupla.

18.1.7 TEOREMA

Se as funções f e g forem integráveis na região fechada R e, além disso, $f(x, y) \geq g(x, y)$ para todo (x, y) em R , então

$$\iint_R f(x, y) dA \geq \iint_R g(x, y) dA$$

O Teorema 18.1.7 é análogo ao Teorema 5.6.8 para integrais definidas de uma função de uma única variável. A demonstração é similar.

18.1.8 TEOREMA

Seja a função f integrável numa região fechada R e suponha que m e M sejam dois números tais que $m \leq f(x, y) \leq M$ para todo (x, y) em R . Então, se A for a medida da área da região R ,

$$mA \leq \iint_R f(x, y) dA \leq MA$$

A demonstração do Teorema 18.1.8 é similar àquela do Teorema 5.6.9 e baseia-se no Teorema 18.1.7.

18.1.9 TEOREMA

Suponha que a função f seja contínua numa região fechada R e que a região R seja composta de duas sub-regiões R_1 e R_2 que não têm pontos em comum, com exceção de pontos em partes de suas fronteiras. Então,

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA$$

A demonstração do Teorema 18.1.9 depende da definição de integral dupla e dos teoremas de limites.

EXERCÍCIOS 18.1

1. Ache um valor aproximado da integral dupla

$$\iint_R (3x - 2y + 1) dA$$

onde R é a região retangular com vértices $(0, -2)$ e $(3, 0)$. Faça uma partição de R com as retas $x = 1$, $x = 2$ e $y = -1$ e considere (ξ_i, γ_i) como o centro da i -ésima sub-região.

2. Ache um valor aproximado da integral dupla

$$\iint_R (y^2 - 4x) dA$$

onde R é a região retangular com vértices $(-1, 0)$ e $(1, 3)$. Faça uma partição de R com as retas $x = 0$, $y = 1$ e $y = 2$ e considere (ξ_i, γ_i) como o centro da i -ésima sub-região.

Nos Exercícios de 3 a 8, ache um valor aproximado da integral dupla, onde R é a região retangular com vértices P e Q , Δ é uma partição de R e (ξ_i, γ_i) é o centro de cada sub-região.

3. $\iint_R (x^2 + y) dA$; $P(0, 0)$; $Q(4, 2)$; Δ : $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$.

4. $\iint_R (2 - x - y) dA$; $P(0, 0)$; $Q(6, 4)$; Δ : $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $y_1 = 0$, $y_2 = 2$.
5. $\iint_R (xy + 3y^2) dA$; $P(-2, 0)$; $Q(4, 6)$; Δ : $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $y_1 = 0$, $y_2 = 2$, $y_3 = 4$.
6. $\iint_R (xy + 3y^2) dA$; $P(0, -2)$; $Q(6, 4)$; Δ : $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $y_1 = -2$, $y_2 = 0$, $y_3 = 2$.
7. $\iint_R (x^2y - 2xy^2) dA$; $P(-3, -2)$; $Q(1, 6)$; Δ : $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $y_1 = -2$, $y_2 = 0$, $y_3 = 2$, $y_4 = 4$.
8. $\iint_R (x^2y - 2xy^2) dA$; $P(-3, -2)$; $Q(1, 6)$; Δ : $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_3 = -1$, $x_4 = 0$, $y_1 = -2$, $y_2 = -1$, $y_3 = 0$, $y_4 = 1$, $y_5 = 2$, $y_6 = 3$, $y_7 = 4$, $y_8 = 5$.

Nos Exercícios de 9 a 12, ache um valor aproximado da integral dupla dada, onde R é a região retangular tendo os vértices P e Q , Δ é uma partição de R e (ξ_i, γ_i) é um ponto arbitrário em cada sub-região.

9. A integral dupla, P , Q e Δ são os mesmos do Exercício 3; $(\xi_1, \gamma_1) = (0,25, 0,5)$; $(\xi_2, \gamma_2) = (1,75, 0)$; $(\xi_3, \gamma_3) = (2,5, 0,25)$; $(\xi_4, \gamma_4) = (4, 1)$; $(\xi_5, \gamma_5) = (0,75, 1,75)$; $(\xi_6, \gamma_6) = (1,25, 1,5)$; $(\xi_7, \gamma_7) = (2,5, 2)$; $(\xi_8, \gamma_8) = (3, 1)$.
10. A integral dupla, P , Q e Δ são os mesmos do Exercício 4; $(\xi_1, \gamma_1) = (0,5, 1,5)$; $(\xi_2, \gamma_2) = (3, 1)$; $(\xi_3, \gamma_3) = (5,5, 0,5)$; $(\xi_4, \gamma_4) = (2, 2)$; $(\xi_5, \gamma_5) = (2, 2)$; $(\xi_6, \gamma_6) = (5, 3)$.
11. A integral dupla, P , Q e Δ são os mesmos do Exercício 5; $(\xi_1, \gamma_1) = (-0,5, 0,5)$; $(\xi_2, \gamma_2) = (1, 1,5)$; $(\xi_3, \gamma_3) = (2,5, 2)$; $(\xi_4, \gamma_4) = (-1,5, 3,5)$; $(\xi_5, \gamma_5) = (0, 3)$; $(\xi_6, \gamma_6) = (4, 4)$; $(\xi_7, \gamma_7) = (-1, 4,5)$; $(\xi_8, \gamma_8) = (1, 4,5)$; $(\xi_9, \gamma_9) = (3, 4,5)$.
12. A integral dupla, P , Q e Δ são os mesmos do Exercício 5; $(\xi_1, \gamma_1) = (-2, 0)$; $(\xi_2, \gamma_2) = (0, 0)$; $(\xi_3, \gamma_3) = (2, 0)$; $(\xi_4, \gamma_4) = (-2, 2)$; $(\xi_5, \gamma_5) = (0, 2)$; $(\xi_6, \gamma_6) = (2, 2)$; $(\xi_7, \gamma_7) = (-2, 4)$; $(\xi_8, \gamma_8) = (0, 4)$; $(\xi_9, \gamma_9) = (2, 4)$.
13. Obtenha uma aproximação para o volume do sólido no primeiro octante limitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 64$, pelos planos $x = 3$, $y = 3$ e pelos três planos coordenados. Para achar um valor aproximado da integral dupla, faça uma partição da região no plano xy com as retas $x = 1$, $x = 2$, $y = 1$ e $y = 2$, e considere (ξ_i, γ_i) como o centro da i -ésima sub-região.
14. Calcule uma aproximação para o volume do sólido limitado pelos planos $x = 2x + y + 4$, $x = 2$, $y = 3$ e pelos três

planos coordenados. Para achar um valor aproximado da integral dupla faça uma partição da região no plano xy formado pelas retas $x = 1$, $y = 1$ e $y = 2$, e considere (ξ_i, γ_i) como o centro da i -ésima sub-região.

15. Obtenha uma aproximação para o volume do sólido limitado pela superfície $z = 10 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2$, pelos planos $x = 2$, $y = 2$ e pelos três planos coordenados. Para achar um valor aproximado da integral dupla, faça uma partição da região no plano xy com as retas $x = 1$ e $y = 1$, e considere (ξ_i, γ_i) como o centro da i -ésima sub-região.
16. Calcule uma aproximação para o volume do sólido limitado pela superfície $100z = 300 - 25x^2 - 4y^2$, pelos planos $x = -1$, $x = 3$, $y = -3$, $y = 5$ e pelo plano xy . Para encontrar um valor aproximado da integral dupla, faça uma partição da região no plano xy formado pelas retas $x = 1$, $y = -1$, $y = 1$ e $y = 3$, e considere (ξ_i, γ_i) como o centro da i -ésima sub-região.

Nos Exercícios de 17 a 22, aplique o Teorema 18.1.8 para encontrar um intervalo fechado que contenha o valor da integral dupla dada.

17. $\iint_R (2x + 5y) dA$, onde R é a região retangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$ e $(0, 2)$.
18. $\iint_R (x^2 + y^2) dA$, onde R é a região retangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$.
19. $\iint_R e^{xy} dA$, onde R é a região retangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$.
20. $\iint_R (\sen x + \sen y) dA$, onde R é a região retangular com vértices $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, (π, π) e $(0, \pi)$. (Sugestão: use o resultado do Exercício 10, nos Exercícios 17.3.)
21. $\iint_R [\sen(x + y) + \sen x + \sen y] dA$, onde R é a região retangular com vértices $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, (π, π) e $(0, \pi)$. (Sugestão: use o resultado do Exercício 11, nos Exercícios 17.3.)
22. $\iint_R \frac{2x + 2y + 1}{x^2 + y^2 + 1} dA$, onde R é uma região retangular com vértices $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ e $(-1, 1)$. (Sugestão: use o resultado do Exercício 8, nos Exercícios 17.3.)

18.2 CÁLCULO DE INTEGRAIS DUPLAS E INTEGRAIS ITERADAS

Para funções de uma única variável, o segundo teorema fundamental do cálculo provê um método para se calcular uma integral definida que consiste em encontrar uma antiderivada (ou integral indefinida) do integrando. Há um método correspondente para o cálculo de uma integral dupla que inclui executar sucessivas integrações simples. O desenvolvimento rigoroso desse método é dado num curso de Cálculo Avançado. Nossa discussão aqui será intuitiva, usando

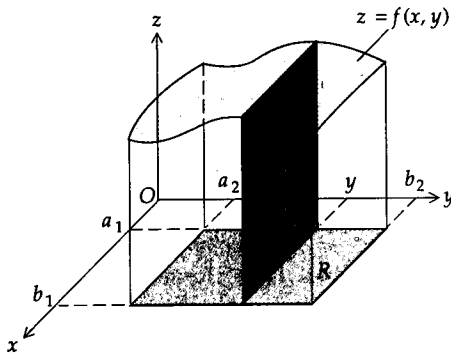


FIGURA 1

interpretações geométricas da integral dupla como a medida de um volume. Vamos desenvolver o método primeiro para integrais duplas numa região retangular.

Seja f uma função dada que é integrável numa região retangular fechada R , no plano xy , limitada pelas retas $x = a_1$, $x = b_1$, $y = a_2$ e $y = b_2$. Vamos supor que $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) em R . Consulte a Figura 1, que mostra um esboço do gráfico da equação $z = f(x, y)$ quando (x, y) está em R . O número que representa o valor da integral dupla

$$\iint_R f(x, y) \, dA$$

é a medida do volume do sólido entre a superfície e a região R . Esse número pode ser encontrado pelo método das secções planas paralelas, discutidas na Seção 6.1, como faremos agora.

Seja y um número em $[a_2, b_2]$. Considere o plano paralelo ao plano xz pelo ponto $(0, y, 0)$. Seja $A(y)$ a medida da área da região plana de intersecção desse plano com o sólido. A medida do volume do sólido é expressa por

$$\int_{a_2}^{b_2} A(y) \, dy$$

Como o volume do sólido também é determinado pela integral dupla

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_{a_2}^{b_2} A(y) \, dy \tag{1}$$

Assim, podemos encontrar o valor da integral dupla da função f em R , calculando a integral simples de $A(y)$. Precisamos encontrar agora $A(y)$ quando y for dado. Como $A(y)$ é a medida da área de uma região plana, podemos encontrá-la por integração. Na Figura 1, observe que a fronteira superior da região plana é o gráfico da equação $z = f(x, y)$, quando x está em $[a_1, b_1]$. Logo, $A(y) = \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) \, dx$. Substituindo essa equação em (1) obtemos

$$\boxed{\iint_R f(x, y) \, dA = \int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{a_1}^{b_1} f(x, y) \, dx \right] dy} \tag{2}$$

A integral à direita de (2) é chamada de **integral iterada**. Usualmente os colchetes são omitidos quando escrevemos uma integral iterada. Assim, (2) pode ser escrita como

$$\boxed{\iint_R f(x, y) \, dA = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) \, dx \, dy} \tag{3}$$

Antes de calcular a “integral interna” em (3), lembre-se de que x é a variável de integração e y é considerada uma constante. Isto equivale a considerar y constante, tal como no cálculo da derivada parcial de $f(x, y)$ em relação a x .

Ao considerarmos secções planas paralelas ao plano yz , obtemos uma integral iterada com a ordem de integração trocada; temos então

$$\boxed{\iint_R f(x, y) \, dA = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) \, dy \, dx} \tag{4}$$

Uma condição suficiente para que (3) e (4) sejam válidas é que a função seja contínua na região retangular R .

EXEMPLO 1 Calcule a integral dupla

$$\iint_R (3y - 2x^2) dA$$

se R for a região que consiste em todos os pontos (x, y) para os quais $-1 \leq x \leq 2$ e $1 \leq y \leq 3$.

Solução Com $a_1 = -1$, $b_1 = 2$, $a_2 = 1$ e $b_2 = 3$, temos, de (3),

$$\begin{aligned} \iint_R (3y - 2x^2) dA &= \int_1^3 \int_{-1}^2 (3y - 2x^2) dx dy \\ &= \int_1^3 \left[\int_{-1}^2 (3y - 2x^2) dx \right] dy \\ &= \int_1^3 \left[3xy - \frac{2}{3}x^3 \right]_{-1}^2 dy \\ &= \int_1^3 (9y - 6) dy \\ &= \left[\frac{9}{2}y^2 - 6y \right]_1^3 \\ &= 24 \end{aligned}$$

No Exemplo 1 da Seção 18.1 encontramos 25 como um valor aproximado da integral dupla acima.

EXEMPLO 2 Ache o volume do sólido limitado pela superfície

$$f(x, y) = 4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2$$

pelos planos $x = 3$, $y = 2$ e pelos três planos coordenados.

Solução A Figura 2 mostra o gráfico da equação $z = f(x, y)$ no primeiro octante e o sólido dado. Se V unidades for o volume do sólido, então, do Teorema 18.1.4,

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A \\ &= \iint_R f(x, y) dA \\ &= \int_0^3 \int_0^2 \left(4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2 \right) dy dx \\ &= \int_0^3 \left[4y - \frac{1}{9}x^2 y - \frac{1}{48}y^3 \right]_0^2 dx \\ &= \int_0^3 \left(\frac{47}{6} - \frac{2}{9}x^2 \right) dx \\ &= \left[\frac{47}{6}x - \frac{2}{27}x^3 \right]_0^3 \\ &= 21.5 \end{aligned}$$

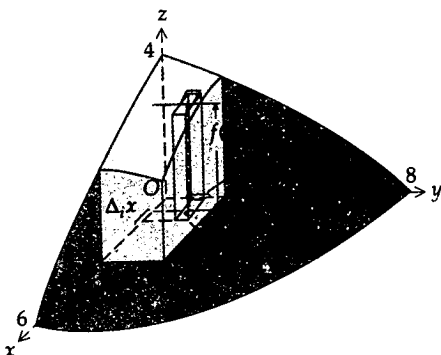


FIGURA 2

O volume é, portanto, 21,5 unidades.

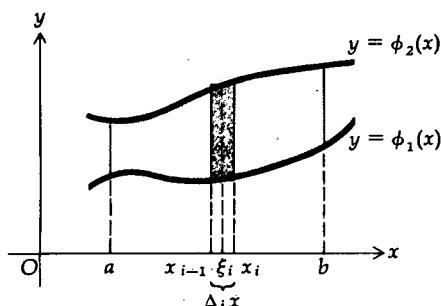


FIGURA 3

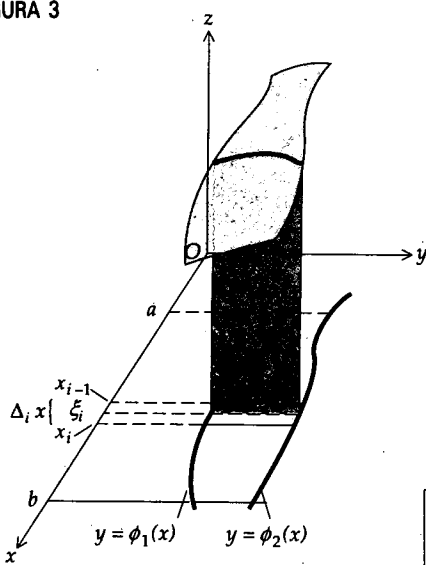


FIGURA 4

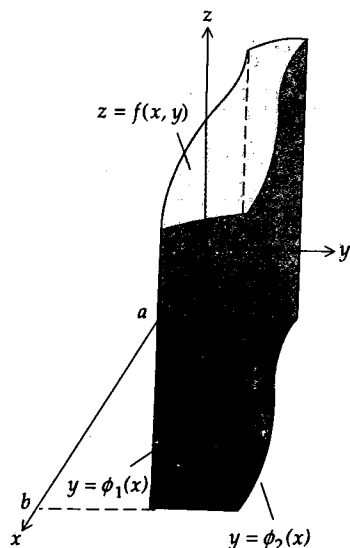


FIGURA 5

No Exemplo 2 da Secção 18.1 encontramos um valor aproximado de 21,59 para esse mesmo volume.

Suponha agora que R seja uma região no plano xy , limitada pelas retas $x = a$ e $x = b$, onde $a < b$ e pelas curvas $y = \phi_1(x)$ e $y = \phi_2(x)$, onde ϕ_1 e ϕ_2 são duas funções contínuas no intervalo fechado $[a, b]$; além disso, $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ para todo x , tal que $a \leq x \leq b$ (veja a Figura 3). Seja Δ uma partição do intervalo $[a, b]$, definida por $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Consideremos a região R da Figura 3 dividida em faixas verticais como $\Delta_i x$ unidades de largura. Uma das faixas é mostrada na figura. A intersecção da superfície $z = f(x, y)$ e um plano $x = \xi_i$, onde $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ é uma curva. Um segmento dessa curva está sobre a i -ésima faixa vertical. A região abaixo desse segmento de curva e acima do plano xy aparece na Figura 4 e a medida da área dessa região é dada por

$$\int_{\phi_1(\xi_i)}^{\phi_2(\xi_i)} f(\xi_i, y) dy$$

A medida do volume do sólido limitado acima pela superfície $z = f(x, y)$ e abaixo pela i -ésima faixa vertical é aproximadamente igual a

$$\left[\int_{\phi_1(\xi_i)}^{\phi_2(\xi_i)} f(\xi_i, y) dy \right] \Delta_i x$$

Quando a norma de Δ tende a zero, se tomarmos o limite da soma das medidas dos volumes para n faixas verticais de R , desde $x = a$ até $x = b$, obtemos a medida do volume do sólido limitado acima pela superfície $z = f(x, y)$ e abaixo pela região R no plano xy . (Veja a Figura 5.) Essa é a integral dupla de f em R ; ou seja

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left[\int_{\phi_1(\xi_i)}^{\phi_2(\xi_i)} f(\xi_i, y) dy \right] \Delta_i x = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy dx = \iint_R f(x, y) dy dx \tag{5}$$

Condições suficientes para que (5) seja válida são que f seja contínua na região fechada R e que ϕ_1 e ϕ_2 sejam funções suaves.

EXEMPLO 3 Expresse, como uma integral dupla e depois como uma integral iterada, a medida do volume do sólido acima do plano xy , limitado pelo parabolóide elíptico $z = x^2 + 4y^2$ e pelo cilindro $x^2 + 4y^2 = 4$. Calcule a integral iterada para encontrar o volume do sólido.

Solução O sólido é mostrado na Figura 6. Vamos encontrar o volume da parte do sólido que está no primeiro octante a qual, com base nas propriedades de simetria, é um quarto do volume pedido. A região R no plano xy está limitada pelos eixos x e y e pela elipse $x^2 + 4y^2 = 4$. Essa região está na Figura 7 que também mostra a i -ésima sub-região de uma partição retangular de R , onde (ξ_i, γ_i) é qualquer ponto dessa sub-região. Se V unidades de volume for o volume do sólido dado, então, pelo Teorema 18.1.4,

$$V = 4 \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\xi_i^2 + 4\gamma_i^2) \Delta_i A = 4 \iint_R (x^2 + 4y^2) dA$$

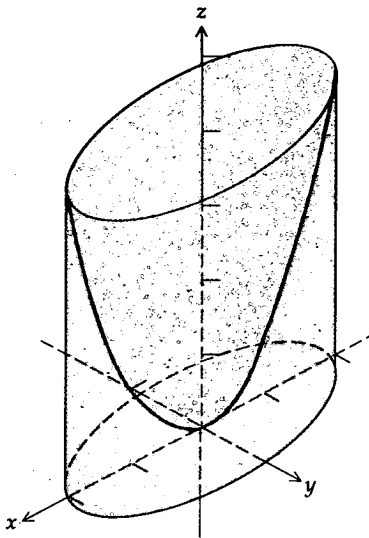


FIGURA 6

Para expressar V a medida do volume como uma integral iterada, dividimos a região R em n faixas verticais. A Figura 8 mostra a região R e a i -ésima faixa vertical tendo uma largura de $\Delta_i x$ unidades e um comprimento de $\frac{1}{2}\sqrt{4 - \xi_i^2}$ unidades, onde $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$. De (5),

$$\begin{aligned} V &= 4 \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left[\int_0^{\sqrt{4-\xi_i^2}/2} (\xi_i^2 + 4y^2) dy \right] \Delta_i x \\ &= 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}/2} (x^2 + 4y^2) dy dx \\ &= 4 \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{4}{3} y^3 \right]_0^{\sqrt{4-x^2}/2} dx \\ &= 4 \int_0^2 \left[\frac{1}{2} x^2 \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{6} (4-x^2)^{3/2} \right] dx \\ &= \frac{4}{3} \int_0^2 (x^2 + 2) \sqrt{4-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{3} x (4-x^2)^{3/2} + 2x \sqrt{4-x^2} + 8 \sin^{-1} \frac{1}{2} x \Big|_0^2 \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

Logo, o volume é de 4π unidades.

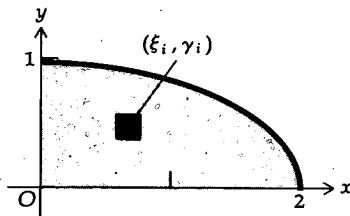


FIGURA 7

Suponha que a região R seja limitada pelas curvas $x = \lambda_1(y)$ e $x = \lambda_2(y)$ e pelas retas $y = c$ e $y = d$, com $c < d$, e que λ_1 e λ_2 sejam duas funções contínuas no intervalo fechado $[c, d]$ onde $\lambda_1(y) \leq \lambda_2(y)$ sempre que $c \leq y \leq d$. Considere uma partição Δ do intervalo $[c, d]$ e divida a região em faixas horizontais cujas medidas das larguras sejam $\Delta_i y$. Veja a Figura 9, mostrando a i -ésima faixa horizontal. A intersecção da superfície $z = f(x, y)$ com um plano $y = \gamma_i$, onde $y_{i-1} \leq \gamma_i \leq y_i$ é uma curva, e um segmento dessa curva está sobre a i -ésima faixa horizontal. Então, como na obtenção de (5), a medida do volume do sólido limitado acima pela superfície $z = f(x, y)$ e abaixo pela i -ésima faixa vertical é aproximadamente igual a

$$\left[\int_{\lambda_1(\gamma_i)}^{\lambda_2(\gamma_i)} f(x, \gamma_i) dx \right] \Delta_i y$$

Tomando o limite, quando $\|\Delta\|$ tende a zero, da soma dessas medidas de volume para n faixas horizontais de R , desde $y = c$ até $y = d$, obtemos a medida do volume do sólido limitado acima pela superfície $z = f(x, y)$ e abaixo pela região R no plano xy . Essa medida de volume é a integral dupla de f em R . Logo,

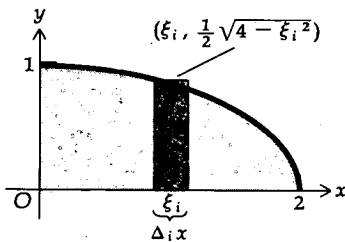


FIGURA 8

$$\begin{aligned} \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left[\int_{\lambda_1(\gamma_i)}^{\lambda_2(\gamma_i)} f(x, \gamma_i) dx \right] \Delta_i y &= \int_c^d \int_{\lambda_1(y)}^{\lambda_2(y)} f(x, y) dx dy \\ &= \iint_R f(x, y) dx dy \end{aligned} \tag{6}$$

Condições suficientes para que (6) seja válida são que λ_1 e λ_2 sejam funções suaves e f seja contínua em R . Na aplicação de ambas (5) e (6), algumas vezes pode ser necessário subdividir uma região R em sub-regiões nas quais são verificadas essas condições suficientes.

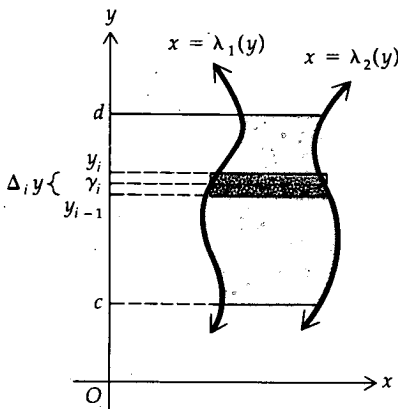


FIGURA 9

EXEMPLO 4 Expresse o volume do sólido do Exemplo 3 por uma integral iterada na qual a ordem de integração é o reverso daquela do Exemplo 3. Calcule o volume.

Solução Novamente, vamos calcular o volume do sólido no primeiro octante e multiplicar por 4 o resultado. A Figura 10 mostra a região R no plano xy e a i -ésima faixa horizontal cuja largura mede $\Delta_i y$ e cujo comprimento tem uma medida de $2\sqrt{1 - \gamma_i^2}$. Então, por (6),

$$\begin{aligned} V &= 4 \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left[\int_0^{2\sqrt{1-\gamma_i^2}} (x^2 + 4\gamma_i^2) dx \right] \Delta_i y \\ &= 4 \int_0^1 \int_0^{2\sqrt{1-y^2}} (x^2 + 4y^2) dx dy \\ &= 4 \int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3 + 4y^2x \right]_0^{2\sqrt{1-y^2}} dy \\ &= 4 \int_0^1 \left[\frac{8}{3}(1-y^2)^{3/2} + 8y^2\sqrt{1-y^2} \right] dy \\ &= \frac{32}{3} \int_0^1 (2y^2 + 1)\sqrt{1-y^2} dy \\ &= -\frac{16}{3}y(1-y^2)^{3/2} + 8y\sqrt{1-y^2} + 8\sin^{-1}y \Big|_0^1 \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

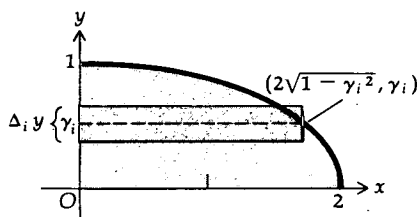


FIGURA 10

Logo, o volume é 4π unidades de volume, o que está de acordo com o resultado do Exemplo 3.

Das soluções dos Exemplos 3 e 4, vemos que a integral dupla $\iint_R (x^2 + 4y^2) dA$ pode ser calculada por qualquer uma das integrais iteradas.

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}/2} (x^2 + 4y^2) dy dx \quad \text{ou} \quad \int_0^1 \int_0^{2\sqrt{1-y^2}} (x^2 + 4y^2) dx dy$$

Se em (5) ou (6) $f(x, y) = 1$ para todo x e y , então a medida A da área de uma região R é expressa como uma integral dupla. Temos

$$A = \iint_R dy dx \Leftrightarrow A = \iint_R dx dy \quad (7)$$

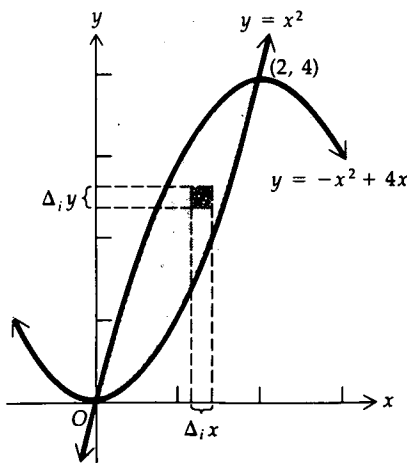


FIGURA 11

EXEMPLO 5 Ache, por integração dupla, a área da região no plano xy , limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4x - x^2$.

Solução A região está na Figura 11. De (7),

$$\begin{aligned} A &= \iint_R dy dx \\ &= \int_0^2 \int_{x^2}^{4x-x^2} dy dx \\ &= \int_0^2 (4x - x^2 - x^2) dx \\ &= 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \Big|_0^2 \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Logo, a área da região é $\frac{8}{3}$ unidades.

EXERCÍCIOS 18.2

Nos Exercícios de 1 a 10, calcule a integral iterada.

1. $\int_1^2 \int_0^{2x} xy^3 dy dx$
2. $\int_0^4 \int_0^y dx dy$
3. $\int_0^4 \int_0^y \sqrt{9+y^2} dx dy$
4. $\int_{-1}^1 \int_1^{e^x} \frac{x}{y} dy dx$
5. $\int_1^4 \int_{y^2}^y \sqrt{\frac{y}{x}} dx dy$
6. $\int_1^4 \int_{x^2}^x \sqrt{\frac{y}{x}} dy dx$
7. $\int_0^1 \int_0^1 |x-y| dy dx$
8. $\int_0^3 \int_0^x x^2 e^{xy} dy dx$
9. $\int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^x \text{sen}(4x-y) dy dx$
10. $\int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{y^2} \text{sen} \frac{x}{y} dx dy$

Nos Exercícios de 11 a 18, ache o valor exato da integral dupla.

11. A integral dupla é a mesma que a do Exercício 1, dos Exercícios 18.1.
12. A integral dupla é a mesma que a do Exercício 2, dos Exercícios 18.1.
13. A integral dupla é a mesma que a do Exercício 3, dos Exercícios 18.1.
14. A integral dupla é a mesma que a do Exercício 6, dos Exercícios 18.1.
15. $\iint_R \text{sen } x dA$; R é a região limitada pelas retas $y = 2x$, $y = \frac{1}{2}x$ e $x = \pi$.
16. $\iint_R \cos(x+y) dA$; R é a região limitada pelas retas $y = x$, $x = \pi$ e o eixo x .
17. $\iint_R x^2 \sqrt{9-y^2} dA$; R é a região limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 9$.
18. $\iint_R \frac{y^2}{x^2} dA$; R é a região limitada pelas retas $y = x$, $y = 2$ e pela hipérbole $xy = 1$.
19. Ache o volume do sólido sob o plano $z = 4x$ e acima da circunferência $x^2 + y^2 = 16$ no plano xy . Faça um esboço do sólido.
20. Ache o volume do sólido limitado pelos planos $x = y + 2z + 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $3y + z - 3 = 0$. Faça um esboço do sólido.
21. Ache o volume do sólido no primeiro octante, limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + z^2 = 4$. Faça um esboço do sólido.
22. Ache o volume do sólido no primeiro octante, limitado pelo parabolóide $z = 9 - x^2 - 3y^2$. Faça um esboço do sólido.

23. Ache o volume do sólido no primeiro octante, limitado pelas superfícies $x + z^2 = 1$, $x = y$ e $x = y^2$. Faça um esboço do sólido.
24. Ache, por integração dupla, o volume da parte do sólido limitada pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ que está no primeiro octante. Faça um esboço do sólido.

Nos Exercícios de 25 a 28, use integrais duplas para encontrar a área da região limitada pelas curvas dadas no plano xy . Faça um esboço da região.

25. $y = x^3$ e $y = x^2$
26. $y^2 = 4x$ e $x^2 = 4y$
27. $y = x^2 - 9$ e $y = 9 - x^2$
28. $x^2 + y^2 = 16$ e $y^2 = 6x$

29. Expresse como uma integral iterada a medida do volume do sólido limitado pelo elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

30. Use a integração dupla para encontrar a área da região no primeiro quadrante, limitada pela parábola $y^2 = 4x$, pela circunferência $x^2 + y^2 = 5$ e pelo eixo x por duas maneiras: (a) integrando primeiro em relação a x ; (b) integrando primeiro em relação a y . Compare os dois métodos de solução.
31. Ache, por dois métodos, o volume do sólido abaixo do plano $3x + 8y + 6z = 24$ e acima da região no primeiro quadrante do plano xy , limitado pela parábola $y^2 = 2x$, pela reta $2x + 3y = 10$ e pelo eixo x : (a) integrando primeiro em relação a x ; (b) integrando primeiro em relação a y . Compare os dois métodos de solução.
32. Dada a integral iterada $\int_0^a \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2} dy dx$. (a) Faça um esboço do sólido cuja medida de volume é representada pela integral iterada dada; (b) calcule a integral iterada; (c) escreva a integral iterada que dá a medida de volume do mesmo sólido com a ordem de integração invertida.
33. Dada a integral iterada $\frac{2}{3} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} (2x + y) dy dx$. Siga as mesmas instruções que foram dadas no Exercício 32.
34. Use a integração dupla para encontrar o volume do sólido comum a dois cilindros circulares retos, com raio de r unidades e cujos eixos interceptam-se em ângulo reto. (Veja o Exercício 48, dos Exercícios 6.1.)

Nos Exercícios 35 e 36, a integral iterada não pode ser calculada exatamente em termos de funções elementares, na ordem de integração dada. Inverta a ordem de integração e faça o cálculo.

35. $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \text{sen } \pi y^3 dy dx$
36. $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx dy$

18.3 CENTRO DE MASSA E MOMENTOS DE INÉRCIA

No Capítulo 6, usamos integrais simples para encontrar o centro de massa de uma lâmina homogênea. Usando integrais simples, podemos considerar somente lâminas com densidade de massa por unidade de área constante (exceto em casos especiais); contudo, com integrais duplas podemos calcular também o centro de massa de lâminas não-homogêneas.

Suponhamos que seja dada uma lâmina tendo a forma de uma região fechada R , no plano xy . Seja $\rho(x, y)$ a medida da densidade de massa por unidade de área da lâmina em qualquer ponto (x, y) de R , onde ρ é contínua em R . Para encontrar a massa total da lâmina, iremos proceder da seguinte forma: seja Δ uma partição de R em n retângulos. Se (ξ_i, γ_i) for um ponto qualquer no i -ésimo retângulo, tendo uma área de medida $\Delta_i A$, então uma aproximação da medida da massa do i -ésimo retângulo é dada por $\rho(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A$, e a medida da massa total da lâmina é aproximada por

$$\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A$$

Tomando o limite da soma acima, quando a norma de Δ tende a zero, expressamos a medida M da massa da lâmina por

$$\begin{aligned} M &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A \\ &= \iint_R \rho(x, y) dA \end{aligned} \quad (1)$$

A medida do momento de massa do i -ésimo retângulo em relação ao eixo x é aproximada por $\gamma_i \rho(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A$. A soma das medidas dos momentos de massa dos n retângulos em relação ao eixo x é, então, aproximada pela soma desses n termos. A medida M_x do momento de massa em relação ao eixo x da lâmina toda é dada por

$$\begin{aligned} M_x &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma_i \rho(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A \\ &= \iint_R y \rho(x, y) dA \end{aligned}$$

Analogamente, a medida M_y do momento de massa em relação ao eixo y é dada por

$$\begin{aligned} M_y &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \xi_i \rho(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A \\ &= \iint_R x \rho(x, y) dA \end{aligned} \quad (2)$$

O centro de massa da lâmina é denotada por (\bar{x}, \bar{y}) e

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

EXEMPLO 1 Uma lâmina com a forma de um triângulo retângulo isósceles tem uma densidade de massa por unidade de área que varia como o quadrado da distância ao vértice do ângulo reto. Se a massa for medida em quilogramas, a distância em metros, ache a massa e o centro de massa da lâmina.

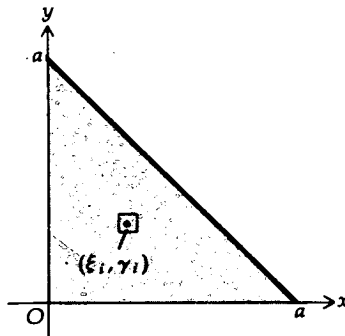


FIGURA 1

Solução Escolha os eixos coordenados de tal forma que o vértice do triângulo retângulo esteja na origem e os lados com a metros de comprimento estejam ao longo dos eixos coordenados (veja a Figura 1). Seja $\rho(x, y)$ o número de quilogramas por metro quadrado da densidade de massa por unidade de área da lâmina no ponto (x, y) . Então, $\rho(x, y) = k(x^2 + y^2)$, onde k é uma constante. Logo, se M kg for a massa da lâmina, temos de (1) que

$$\begin{aligned} M &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k(\xi_i^2 + \gamma_i^2) \Delta_i A \\ &= k \iint_R (x^2 + y^2) dA \\ &= \int_0^a \int_0^{a-x} (x^2 + y^2) dy dx \\ &= k \int_0^a \left[yx^2 + \frac{1}{3}y^3 \right]_0^{a-x} dx \\ &= k \int_0^a \left(\frac{1}{3}a^3 - a^2x + 2ax^2 - \frac{4}{3}x^3 \right) dx \\ &= k \left(\frac{1}{3}a^4 - \frac{1}{2}a^4 + \frac{2}{3}a^4 - \frac{1}{3}a^4 \right) \\ &= \frac{1}{6}ka^4 \end{aligned}$$

Para achar o centro de massa, observe que devido à simetria ele deve estar sobre a reta $y = x$. Logo, se determinarmos \bar{x} , teremos também \bar{y} . De (2),

$$\begin{aligned} M_y &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k\xi_i(\xi_i^2 + \gamma_i^2) \Delta_i A \\ &= k \iint_R x(x^2 + y^2) dA \\ &= k \int_0^a \int_0^{a-x} x(x^2 + y^2) dy dx \\ &= k \int_0^a \left[x^3y + \frac{1}{3}xy^3 \right]_0^{a-x} dx \\ &= k \int_0^a \left(\frac{1}{3}a^3x - a^2x^2 + 2ax^3 - \frac{4}{3}x^4 \right) dx \\ &= k \left(\frac{1}{6}a^5 - \frac{1}{3}a^5 + \frac{1}{2}a^5 - \frac{4}{15}a^5 \right) \\ &= \frac{1}{15}ka^5 \end{aligned}$$

Como $M\bar{x} = M_y$, então $M\bar{x} = \frac{1}{15}ka^5$; como $M = \frac{1}{6}ka^4$, obtemos $\bar{x} = \frac{2}{5}a$. Logo, o centro de massa está no ponto $(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a)$.

18.3.1 DEFINIÇÃO

O momento de inércia de uma partícula cuja massa é m kg, em torno de um eixo, é definido como sendo mr^2 kg·m², onde r m é a distância entre a partícula e o eixo.

Se tivermos um sistema de n partículas, o momento de inércia do sistema será definido como a soma dos momentos de inércia de todas as partículas. Isto é, se a i -ésima partícula tiver uma massa de m_i kg e estiver a uma distância de r_i m do eixo, então I kg·m² será o momento de inércia do sistema, onde

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

Estendendo o conceito de momento de inércia a uma distribuição contínua de massa no plano, tal como barras ou lâminas por um processo similar ao usado previamente, temos a definição a seguir.

18.3.2 DEFINIÇÃO

Suponhamos que haja uma distribuição contínua de massa ocupando uma região R do plano xy , e suponhamos que a medida da densidade de área dessa distribuição no ponto (x, y) seja $\rho(x, y)$ kg-m², onde ρ é contínua em R . Então, o momento de inércia I_x kg-m² em torno do eixo x dessa distribuição de massa será determinado por

$$\begin{aligned} I_x &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma_i^2 \rho(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A \\ &= \iint_R y^2 \rho(x, y) dA \end{aligned}$$

Da mesma forma, a medida I_y kg-m² do momento de inércia em torno do eixo y é dada por

$$\begin{aligned} I_y &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \rho(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A \\ &= \iint_R x^2 \rho(x, y) dA \end{aligned}$$

e a medida I_0 kg-m² do momento de inércia em torno da origem, ou do eixo z , é dada por

$$\begin{aligned} I_0 &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\xi_i^2 + \gamma_i^2) \rho(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A \\ &= \iint_R (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA \end{aligned}$$

O número I_0 é a medida do chamado momento de inércia polar.

EXEMPLO 2 Um fio retilíneo homogêneo tem uma densidade linear de massa constante de k kg-m. Ache o momento de inércia do fio em torno de um eixo perpendicular a ele, passando por uma extremidade.

Solução Vamos supor que o fio tenha um comprimento de a m e que se estenda ao longo do eixo x , desde a origem. Vamos encontrar o seu momento de inércia em torno do eixo y . Dividindo o fio em n segmentos, seja $\Delta_i x$ m o comprimento do i -ésimo segmento. A massa do i -ésimo segmento é, então, $k \Delta_i x$ kg. Suponha que a massa do i -ésimo segmento esteja concentrada num único ponto ξ_i , onde $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$. O momento de inércia do i -ésimo segmento em torno do eixo y está entre $kx_{i-1}^2 \Delta_i x$ kg-m² e $kx_i^2 \Delta_i x$ kg-m² e é aproximado por $k\xi_i^2 \Delta_i x$ kg-m², onde $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$. Se o momento de inércia do fio em torno do eixo y for I_y kg-m², então

$$\begin{aligned} I_y &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k \xi_i^2 \Delta_i x \\ &= \int_0^a kx^2 dx \\ &= \frac{1}{3} ka^3 \end{aligned}$$

Logo, o momento de inércia é $\frac{1}{3} ka^3$ kg-m².

EXEMPLO 3 Uma lâmina retangular homogênea tem densidade de massa por unidade de área constante de k g-cm². Ache o momento de inércia da lâmina em torno de um vértice.

Solução Suponha que a lâmina seja limitada pelas retas $x = a$, $y = b$, o eixo x e o eixo y . Veja a Figura 2. Se I_0 g-cm² for o momento de inércia em torno da origem, então

$$\begin{aligned} I_0 &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k(\xi_i^2 + \gamma_i^2) \Delta_i A \\ &= \iint_R k(x^2 + y^2) dA \\ &= k \int_0^b \int_0^a (x^2 + y^2) dx dy \\ &= k \int_0^b \left[\frac{1}{3}x^3 + xy^2 \right]_0^a dy \\ &= k \int_0^b \left(\frac{1}{3}a^3 + ay^2 \right) dy \\ &= \frac{1}{3}kab(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

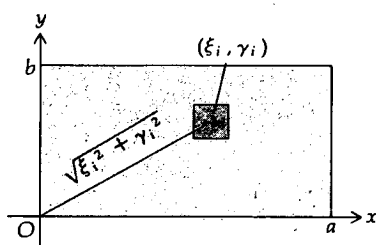


FIGURA 2

O momento de inércia é, então, $\frac{1}{3}kab(a^2 + b^2)$ g-cm².

É possível encontrar a distância com relação a qualquer eixo L , onde a massa da lâmina pode ser concentrada, sem afetar o momento de inércia da lâmina em torno de L . A medida dessa distância, denotada por r , é chamada de *raio de giração* da lâmina em torno de L . Isto é, se a massa M kg da lâmina for concentrada em um ponto distante r m de L , o momento de inércia da lâmina em torno de L será o mesmo que o de uma partícula de massa M kg a uma distância de r m de L ; esse momento de inércia é Mr^2 kg-m². Assim, temos a definição a seguir.

18.3.3 DEFINIÇÃO

Se I for a medida do momento de inércia em torno de um eixo L de uma distribuição de massa num plano e M for a medida da massa total da distribuição, então o **raio de giração** da distribuição em torno de L terá por medida r , onde

$$r^2 = \frac{I}{M}$$

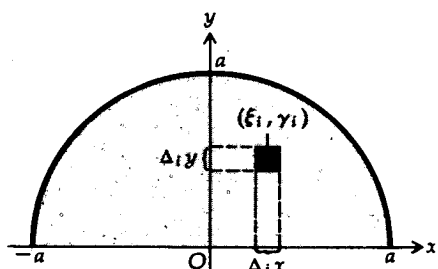


FIGURA 3

EXEMPLO 4 Suponhamos que a lâmina tenha a forma de uma semicircunferência e que a medida da densidade de massa por unidade de área da lâmina em qualquer ponto seja proporcional à medida da distância do ponto ao diâmetro. Se a massa for medida em quilogramas e a distância em metros, ache o raio de giração da lâmina em torno do eixo x .

Solução Escolha os eixos x e y de tal forma que a semicircunferência seja a metade superior da circunferência $x^2 + y^2 = a^2$. Veja a Figura 3. A densidade de massa por unidade de área da lâmina, no ponto (x, y) é, então, ky kg-m².

Assim, se M kg for a massa da lâmina, temos

$$\begin{aligned}
 M &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k y_i \Delta_i A \\
 &= \iint_R k y \, dA \\
 &= \int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} k y \, dx \, dy \\
 &= k \int_0^a [yx]_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} dy \\
 &= 2k \int_0^a y \sqrt{a^2-y^2} \, dy \\
 &= -\frac{2}{3}k(a^2-y^2)^{3/2} \Big|_0^a \\
 &= \frac{2}{3}ka^3
 \end{aligned}$$

Se I_x kg-m² for o momento de inércia da lâmina em torno do eixo x , então

$$\begin{aligned}
 I_x &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma_i^2 (k y_i) \Delta_i A \\
 &= \iint_R k y^3 \, dy \, dx \\
 &= \int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} k y^3 \, dy \, dx \\
 &= k \int_{-a}^a \left[\frac{1}{4} y^4 \right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx \\
 &= \frac{1}{4}k \int_{-a}^a (a^4 - 2a^2 x^2 + x^4) dx \\
 &= \frac{1}{4}k(2a^5 - \frac{4}{3}a^5 + \frac{2}{5}a^5) \\
 &= \frac{4}{15}ka^5
 \end{aligned}$$

Assim sendo, se r m for o raio de giração

$$\begin{aligned}
 r^2 &= \frac{\frac{4}{15}ka^5}{\frac{2}{3}ka^3} \\
 &= \frac{2}{5}a^2
 \end{aligned}$$

Logo, $r = \frac{1}{5}\sqrt{10}a$. O raio de giração é, portanto, $\frac{1}{5}\sqrt{10}a$ m.

EXERCÍCIOS 18.3

Nos Exercícios de 1 a 12, ache a massa e o centro de massa da lâmina, se a densidade de massa por unidade de área for a indicada. A massa é medida em quilogramas e a distância em metros.

1. A lâmina na forma de uma região retangular, limitada pelas retas $x = 3$, $y = 2$ e pelos eixos coordenados. A densidade em qualquer ponto é xy^2 kg-m².
2. A lâmina na forma de uma região retangular, limitada pelas retas $x = 4$, $y = 5$ e pelos eixos coordenados. A densidade em qualquer ponto é $(x^2 + y)$ kg-m².
3. A lâmina na forma de uma região retangular cujos lados são segmentos dos eixos coordenados e a reta $x + 2y = 6$. A densidade em qualquer ponto é y^2 kg-m².
4. A lâmina na forma da região no primeiro quadrante, limitada pela parábola $y = x^2$, pela reta $y = 1$ e pelo eixo y . A densidade em qualquer ponto é $(x + y)$ kg-m².
5. A lâmina na forma da região no primeiro quadrante, limitada pela parábola $x^2 = 8y$, pela reta $y = 2$ e pelo eixo y . A densidade de massa por unidade de área varia como a distância à reta $y = -1$.

6. A lâmina na forma da região limitada pela curva $y = e^x$, pela reta $x = 1$ e pelos eixos coordenados. A densidade de massa por unidade de área varia como a distância ao eixo x .
7. A lâmina na forma da região no primeiro quadrante, limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ e pelos eixos coordenados. A densidade de massa por unidade de área varia como a soma das distâncias aos dois lados retos.
8. A lâmina na forma da região limitada pelo triângulo cujos lados são segmentos dos eixos coordenados e a reta $3x + 2y = 18$. A densidade de massa por unidade de área varia como o produto das distâncias aos eixos coordenados.
9. A lâmina na forma da região limitada pela curva $y = \sin x$ e pelo eixo x , de $x = 0$ a $x = \pi$. A densidade de massa por unidade de área varia como a distância ao eixo x .
10. A lâmina na forma da região limitada pela curva $y = \sqrt{x}$ e pela reta $y = x$. A densidade de massa por unidade de área varia como a distância ao eixo y .
11. A lâmina na forma da região do primeiro quadrante, limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 4$ e pela reta $x + y = 2$. A densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto é $xy \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.
12. A lâmina na forma da região limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$ e pelas retas $x = 1$ e $y = 1$. A densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto é $xy \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

Nos Exercícios de 13 a 18, ache o momento de inércia da lâmina homogênea dada, em torno do eixo indicado, sendo $k \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ a densidade de massa por unidade de área e a distância medida em metros.

13. A lâmina na forma da região limitada por $4y = 3x$, $x = 4$ e pelo eixo x ; em torno do eixo x .

14. A lâmina do Exercício 13; em torno da reta $x = 4$.
15. A lâmina na forma da região limitada por uma circunferência de raio a unidades; em torno do seu centro.
16. A lâmina na forma da região limitada pela parábola $x^2 = 4 - 4y$ e pelo eixo x em torno do eixo x .
17. A lâmina do Exercício 16; em torno da origem.
18. A lâmina na forma da região limitada por um triângulo com lados a , b e c m; em torno do lado com a m.

Nos Exercícios de 19 a 22, ache para a lâmina dada, cada um dos segmentos: (a) o momento de inércia em torno do eixo x ; (b) o momento de inércia em torno do eixo y ; (c) o raio de giração em torno do eixo x ; (d) o momento polar de inércia.

19. A lâmina do Exercício 1.
20. A lâmina do Exercício 4.
21. A lâmina do Exercício 9.
22. A lâmina do Exercício 10.
23. Uma lâmina homogênea, com uma densidade $k \text{ g}\cdot\text{cm}^2$, na forma de um triângulo isósceles, tendo uma base de b cm e uma altura de h cm, é dada. Ache o raio de giração da lâmina em torno de seu eixo de simetria.
24. Uma lâmina homogênea com uma densidade $k \text{ g}\cdot\text{cm}^2$ e na forma da região limitada pela curva $x = \sqrt{y}$, pelo eixo x e pela reta $x = a$, onde $a > 0$, é dada. Ache o momento de inércia da lâmina em torno da reta $x = a$.
25. Uma lâmina na forma da região limitada pela parábola $y = 2x - x^2$ e pelo eixo x , é dada. Ache o momento inércia da lâmina em torno da reta $y = 4$, se a densidade de massa por unidade de área variar como a distância à reta $y = 4$. A massa é medida em quilogramas e a distância, em metros.

18.4 A INTEGRAL DUPLA EM COORDENADAS POLARES

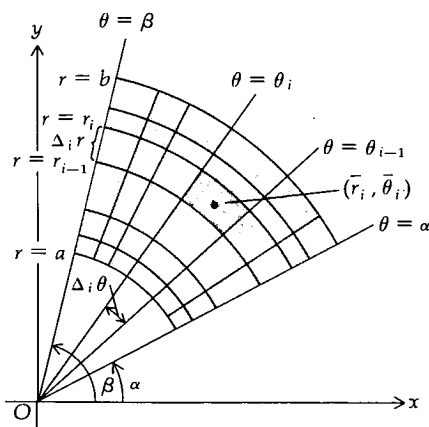


FIGURA 1

Agora mostraremos como a integral dupla de uma função sobre uma região fechada pode ser definida em coordenadas polares. Vamos começar pelo tipo mais simples de região. Seja R a região limitada pelos raios $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ e pelas circunferências $r = a$ e $r = b$. Então, seja Δ uma partição dessa região obtida, ao traçarmos raios pela origem e circunferências com centro na origem.* Isso aparece na Figura 1. Obtemos uma malha de sub-regiões a que chamaremos de retângulos "curvos". A norma $\|\Delta\|$ da partição é o comprimento da maior dentre as diagonais dos retângulos "curvos". Seja n o número de sub-regiões e $\Delta_i A$ a medida da área do i -ésimo retângulo "curvo". Como a área da i -ésima sub-região é a diferença entre as áreas de dois setores circulares,

$$\begin{aligned} \Delta_i A &= \frac{1}{2} r_i^2 (\theta_i - \theta_{i-1}) - \frac{1}{2} r_{i-1}^2 (\theta_i - \theta_{i-1}) \\ &= \frac{1}{2} (r_i - r_{i-1})(r_i + r_{i-1})(\theta_i - \theta_{i-1}). \end{aligned}$$

Seja $\bar{r}_i = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})$, $\Delta_r = r_i - r_{i-1}$, e $\Delta_\theta = \theta_i - \theta_{i-1}$. Então,

$$\Delta_i A = \bar{r}_i \Delta_r \Delta_\theta$$

Tomamos o ponto $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)$ na i -ésima sub-região, onde $\theta_{i-1} \leq \bar{\theta}_i \leq \theta_i$ e formamos a soma

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i) \Delta_i A = \sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i) \bar{r}_i \Delta_r \Delta_\theta$$

*N. do R.: A origem do sistema de coordenadas polares também é denominada *pólo*, em alguns casos.

Podemos mostrar que se f for contínua na região R , então o limite dessa soma, quando $\|\Delta\|$ tende a zero, existirá e será a integral dupla de f em R . Podemos escrever então:

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i) \Delta_i A = \iint_R f(r, \theta) dA$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i) \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta = \iint_R f(r, \theta) r dr d\theta$$

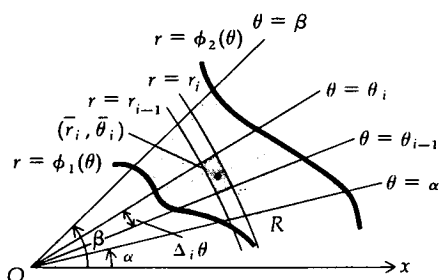


FIGURA 2

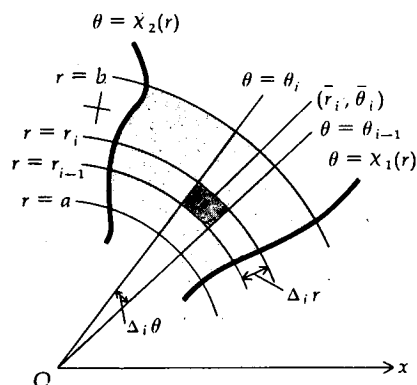


FIGURA 3

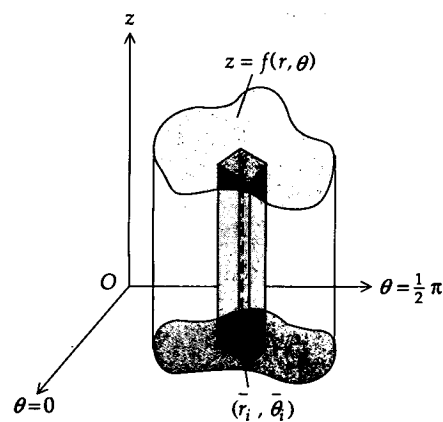


FIGURA 4

Observe que em coordenadas polares, $dA = r dr d\theta$.

Podemos mostrar que a integral dupla é igual a uma integral iterada, tendo uma dentre as duas formas possíveis:

$$\iint_R f(r, \theta) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r, \theta) r dr d\theta$$

$$= \int_a^b \int_{\alpha}^{\beta} f(r, \theta) r d\theta dr$$

Podemos definir a integral dupla de uma função contínua f de duas variáveis em regiões fechadas de coordenadas polares planas de uma maneira diferente da que já foi feita. Por exemplo, considere a região R limitada pelas curvas $r = \phi_1(\theta)$ e $r = \phi_2(\theta)$, onde ϕ_1 e ϕ_2 são funções suaves, e pelas retas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$. Veja a Figura 2. Na figura, $\phi_1(\theta) \leq \phi_2(\theta)$ para todo θ no intervalo fechado $[\alpha, \beta]$. Então, podemos mostrar que a integral dupla de f em R existe e é igual a uma integral iterada, e temos

$$\iint_R f(r, \theta) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} f(r, \theta) r dr d\theta$$

Se a região R for limitada pelas curvas $\theta = \chi_1(r)$ e $\theta = \chi_2(r)$, onde χ_1 e χ_2 são funções suaves, e pelas circunferências $r = a$ e $r = b$, conforme mostra a Figura 3, onde $\chi_1(r) \leq \chi_2(r)$ para todo r no intervalo fechado $[a, b]$, então

$$\iint_R f(r, \theta) dA = \int_a^b \int_{\chi_1(r)}^{\chi_2(r)} f(r, \theta) r d\theta dr$$

Podemos interpretar a integral dupla de uma função em uma região fechada no plano coordenado polar como a medida do volume de um sólido, usando coordenadas cilíndricas. A Figura 4 mostra um sólido tendo como base uma região R em coordenadas polares planas e limitada acima pela superfície $z = f(r, \theta)$, onde f é contínua em R e $f(r, \theta) \geq 0$ em R . Tome uma partição de R dando uma malha de n retângulos “curvos”. Construa os n sólidos para os quais o i -ésimo deles tem por base o i -ésimo retângulo “curvo” e como medida de sua altura $f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)$, onde $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)$ está na i -ésima sub-região. A Figura 4 mostra o i -ésimo sólido. A medida do volume do i -ésimo sólido é

$$f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i) \Delta_i A = f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i) \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta$$

A soma das medidas dos volumes dos n sólidos é

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i) \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta$$

Se V for a medida do volume do sólido dado, então

$$V = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i) \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta$$

$$= \iint_R f(r, \theta) r dr d\theta \tag{1}$$

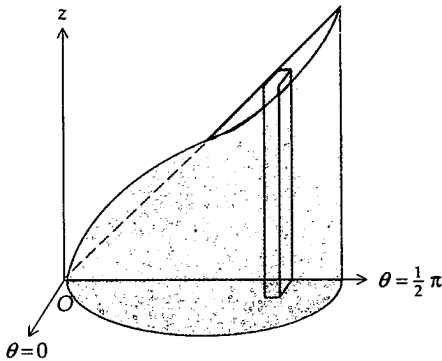


FIGURA 5

EXEMPLO 1 Ache o volume do sólido no primeiro octante limitado pelo cone $z = r$ e pelo cilindro $r = 3 \operatorname{sen} \theta$.

Solução O sólido e o i -ésimo elemento aparecem na Figura 5. Usando (1) com $f(r, \theta) = r$, temos, onde V unidades é o volume do sólido dado,

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \cdot \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta \\ &= \iint_R r^2 dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{3 \operatorname{sen} \theta} r^2 dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^{3 \operatorname{sen} \theta} d\theta \\ &= 9 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 \theta d\theta \\ &= -9 \cos \theta + 3 \cos^3 \theta \Big|_0^{\pi/2} \\ &= 6 \end{aligned}$$

O volume é, portanto, de 6 unidades de volume.

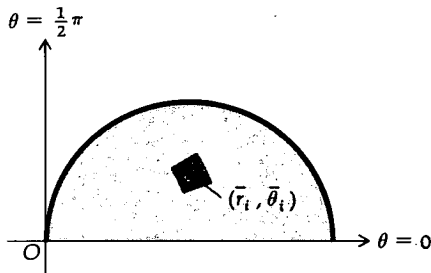


FIGURA 6

EXEMPLO 2 Ache a massa da lâmina na forma da região interior à semi-circunferência $r = a \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2} \pi$ e cuja medida da densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto é proporcional à medida de sua distância à origem. A massa é medida em quilogramas, enquanto que a distância é medida em metros.

Solução A Figura 6 mostra um esboço da lâmina e o i -ésimo retângulo "curvo". A densidade de massa por unidade de área no ponto (r, θ) é $kr \operatorname{kg}\cdot\operatorname{m}^{-2}$, onde k é uma constante. Se $M \operatorname{kg}$ for a massa da lâmina, então

$$\begin{aligned} M &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (k\bar{r}_i) \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta \\ &= \iint_R kr^2 dr d\theta \\ &= k \int_0^{\pi/2} \int_0^{a \cos \theta} r^2 dr d\theta \\ &= \frac{1}{3} ka^3 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{3} ka^3 \left[\operatorname{sen} \theta - \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 \theta \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2}{9} ka^3 \end{aligned}$$

Logo, a massa é $\frac{2}{9} ka^3 \operatorname{kg}$.

EXEMPLO 3 Ache o centro de massa da lâmina do Exemplo 2.

Solução Sejam \bar{x} e \bar{y} as coordenadas cartesianas do centro de massa da lâmina onde, como de costume, o eixo x situa-se ao longo do eixo polar e o eixo

y , ao longo do eixo $\frac{1}{2}\pi$. Seja (\bar{x}_i, \bar{y}_i) a representação cartesiana do ponto $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)$. Então, se M_x kg-m for o momento de massa da lâmina em relação ao eixo x ,

$$M_x = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \bar{y}_i (k\bar{r}_i) \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta$$

Substituindo \bar{y}_i por $\bar{r}_i \text{ sen } \bar{\theta}_i$, obtemos

$$\begin{aligned} M_x &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k\bar{r}_i^3 \text{ sen } \bar{\theta}_i \Delta_i r \Delta_i \theta \\ &= \iint_R k r^3 \text{ sen } \theta \, dr \, d\theta \\ &= k \int_0^{\pi/2} \int_0^{a \cos \theta} r^3 \text{ sen } \theta \, dr \, d\theta \\ &= \frac{1}{4} k a^4 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta \text{ sen } \theta \, d\theta \\ &= -\frac{1}{20} k a^4 \cos^5 \theta \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{20} k a^4 \end{aligned}$$

Se M_y kg-m for o momento de massa da lâmina em relação ao eixo y , então

$$M_y = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \bar{x}_i (k\bar{r}_i) \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta$$

Substituindo \bar{x}_i por $\bar{r}_i \cos \bar{\theta}_i$, temos

$$\begin{aligned} M_y &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k\bar{r}_i^3 \cos \bar{\theta}_i \Delta_i r \Delta_i \theta \\ &= \iint_R k r^3 \cos \theta \, dr \, d\theta \\ &= k \int_0^{\pi/2} \int_0^{a \cos \theta} r^3 \cos \theta \, dr \, d\theta \\ &= \frac{1}{4} k a^4 \int_0^{\pi/2} \cos^5 \theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{4} k a^4 \left[\text{sen } \theta - \frac{2}{3} \text{ sen}^3 \theta + \frac{1}{5} \text{ sen}^5 \theta \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2}{15} k a^4 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{M_y}{M} & \bar{y} &= \frac{M_x}{M} \\ &= \frac{\frac{2}{15} k a^4}{\frac{2}{9} k a^3} & &= \frac{\frac{1}{20} k a^4}{\frac{2}{9} k a^3} \\ &= \frac{3}{5} a & &= \frac{9}{40} a \end{aligned}$$

Assim, o centro de massa está no ponto $(\frac{3}{5}a, \frac{9}{40}a)$.

No exemplo a seguir, mostramos como a área de uma região no plano polar pode ser encontrada por integração dupla.

EXEMPLO 4 Ache, por integração dupla, a área da região compreendida por uma folha da rosácea $r = \text{sen } 3\theta$.

Solução A Figura 7 mostra a região e o i -ésimo retângulo “curvo”. Se A unidades for a área da região, então

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta_i A \\ &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta \\ &= \iint_R r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/3} \int_0^{\text{sen } 3\theta} r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \text{sen}^2 3\theta \, d\theta \\ &= \left[\frac{1}{4}\theta - \frac{1}{24} \text{sen } 6\theta \right]_0^{\pi/3} \\ &= \frac{1}{12}\pi \end{aligned}$$

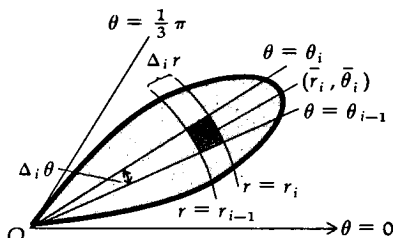


FIGURA 7

Logo, a área é de $\frac{1}{12}\pi$ unidades de área.

Algumas vezes é mais fácil calcular uma integral dupla usando coordenadas polares, em vez de coordenadas cartesianas. Tal situação é o que acontece no exemplo a seguir.

EXEMPLO 5 Calcule a integral dupla

$$\iint_R e^{-(x^2+y^2)} \, dA$$

onde a região R está no primeiro quadrante e é limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ e pelos eixos coordenados.

Solução Como $x^2 + y^2 = r^2$ e $dA = r \, dr \, d\theta$,

$$\begin{aligned} \iint_R e^{-(x^2+y^2)} \, dA &= \iint_R e^{-r^2} r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^a e^{-r^2} r \, dr \, d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [e^{-r^2}]_0^a \, d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (e^{-a^2} - 1) \, d\theta \\ &= \frac{1}{4}\pi(1 - e^{-a^2}) \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 18.4

Nos Exercícios de 1 a 6, use integrais duplas para encontrar a área da região dada.

1. A região dentro da cardióide $r = 2(1 + \sin \theta)$.
2. Uma folha da rosácea $r = a \cos 2\theta$.
3. A região dentro da cardióide $r = a(1 + \cos \theta)$ e fora da circunferência $r = a$.
4. A região dentro da circunferência $r = 1$ e fora da lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$.
5. A região dentro do grande laço da limaçon $r = 2 - 4 \sin \theta$ e fora do pequeno laço.
6. A região dentro da limaçon $r = 3 - \cos \theta$ e fora da circunferência $r = 5 \cos \theta$.

Nos exercícios de 7 a 12, ache o volume do sólido dado.

7. O sólido limitado pelo elipsóide $z^2 + 9r^2 = 9$.
8. O sólido delimitado na esfera $z^2 + r^2 = 4$ pelo cilindro $r = 1$.
9. O sólido delimitado na esfera $z^2 + r^2 = 16$ pelo cilindro $r = 4 \cos \theta$.
10. O sólido acima do plano polar, limitado pelo cone $z = 2r$ e pelo cilindro $r = 1 - \cos \theta$.
11. O sólido limitado pelo parabolóide $z = 4 - r^2$, pelo cilindro $r = 1$ e pelo plano polar.
12. O sólido acima do parabolóide $z = r^2$ e abaixo do plano $z = 2r \sin \theta$.

Nos Exercícios de 13 a 19, ache o centro de massa da lâmina dada se a densidade de massa por unidade de área for a indicada. A massa é medida em quilogramas e a distância em metros.

13. Uma lâmina na forma da região do Exercício 1. A densidade de massa por unidade de área varia com a distância até a origem.
14. Uma lâmina na forma da região do Exercício 2. A densidade de massa por unidade de área varia com a distância até a origem.
15. Uma lâmina na forma da região interior à limaçon $r = 2 - \cos \theta$. A densidade de massa por unidade de área varia com a distância até a origem.
16. Uma lâmina na forma da região limitada pela limaçon $r = 2 + \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e pelo eixo polar. A densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto é $k \sin \theta \text{ kg-m}^2$.
17. A lâmina do Exercício 16. A densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto é $kr \sin \theta \text{ kg-m}^2$.
18. Uma lâmina na forma da região do Exercício 6. A densida-

de de massa por unidade de área varia com a distância até a origem.

19. Uma lâmina na forma da região do Exercício 5. A densidade de massa por unidade de área varia com a distância até a origem.

Nos Exercícios de 20 a 24, ache o momento de inércia da lâmina dada em torno do eixo ou ponto indicado, se a densidade de massa por unidade de área for a indicada. A massa é medida em quilogramas e a distância em metros.

20. Uma lâmina na forma da região limitada pela circunferência $r = \sin \theta$, em torno do eixo $\frac{1}{2}\pi$. A densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto é $k \text{ kg-m}^2$.
21. A lâmina do Exercício 20, em torno do eixo polar. A densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto é $k \text{ kg-m}^2$.
22. Uma lâmina na forma da região limitada pela cardióide $r = a(1 - \cos \theta)$, em torno da origem. A densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto é $k \text{ kg-m}^2$.
23. Uma lâmina na forma da região limitada pela cardióide $r = a(1 + \cos \theta)$ e pela circunferência $r = 2a \cos \theta$, em torno da origem. A densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto é $k \text{ kg-m}^2$.
24. Uma lâmina na forma da região encerrada pela lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\theta$, em torno do eixo polar. A densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto é $k \text{ kg-m}^2$.
25. Uma lâmina homogênea na forma da região encerrada por um laço da lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$. Ache o raio de giração da lâmina em torno de um eixo perpendicular ao plano polar na origem.
26. Uma lâmina na forma da região encerrada pela circunferência $r = 4$, a densidade de massa por unidade de área varia com a distância até a origem. Ache o raio de giração da lâmina em torno de um eixo perpendicular ao plano polar na origem.
27. Calcule por coordenadas polares a integral dupla $\iint_R e^{x^2 + y^2} dA$, onde R é a região limitada pelas circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 9$.
28. Calcule por coordenadas polares a integral dupla $\iint_R \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dA$, onde R é a região no primeiro quadrante, limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$ e pelos eixos coordenados.

18.5 ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE

A integral dupla pode ser usada para determinar a área de parte da superfície $z = f(x, y)$ que está acima de uma região fechada R , no plano xy . Para mostrar isso precisamos primeiro definir o que entendemos pela medida dessa área e então obter uma fórmula para calculá-la. Suponha que f e suas derivadas parciais sejam contínuas em R e suponha que $f(x, y) > 0$ em R . Seja Δ uma parti-

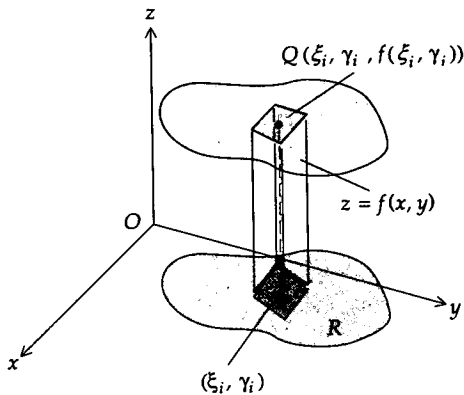


FIGURA 1

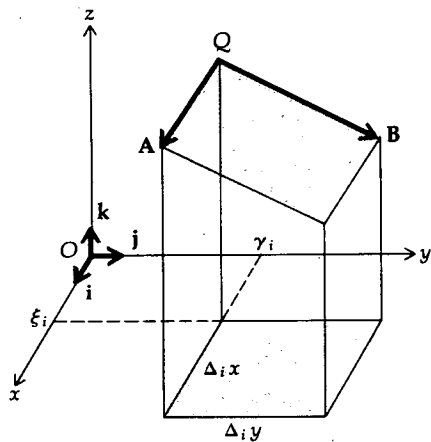


FIGURA 2

ção de R em n sub-regiões retangulares. O i -ésimo retângulo tem dimensões com medidas $\Delta_i x$ e $\Delta_i y$ e uma área de medida $\Delta_i A$. Seja (ξ_i, γ_i) um ponto qualquer no i -ésimo retângulo, e no ponto $Q(\xi_i, \gamma_i, f(\xi_i, \gamma_i))$ da superfície consideremos o plano tangente à superfície. Vamos projetar verticalmente para cima o i -ésimo retângulo sobre o plano tangente, e seja $\Delta_i \sigma$ a medida da área dessa projeção. A Figura 1 mostra a região R , a parte da superfície sobre R , a i -ésima sub-região retangular de R , e a projeção do i -ésimo retângulo sobre o plano tangente à superfície em Q . O número $\Delta_i \sigma$ é uma aproximação da medida da área da parte da superfície que está acima do i -ésimo retângulo. Como existem n de tais partes, a somatória

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i \sigma$$

é uma aproximação da medida σ da área da parte da superfície que está sobre R . Isso nos leva a definir σ da seguinte maneira:

$$\sigma = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta_i \sigma \tag{1}$$

Agora precisamos obter uma fórmula para calcular o limite na expressão (1). Para fazer isso, achamos uma fórmula para calcular $\Delta_i \sigma$ como a medida da área de um paralelogramo. Para simplificar os cálculos tome o ponto (ξ_i, γ_i) no i -ésimo retângulo, no vértice (x_{i-1}, y_{i-1}) . Sejam \mathbf{A} e \mathbf{B} vetores tendo como representações os segmentos de reta orientados, com pontos iniciais em Q , e formando os dois lados adjacentes do paralelogramo cuja área tem medida $\Delta_i \sigma$. Veja a Figura 2. Então, $\Delta_i \sigma = \|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|$. Como

$$\mathbf{A} = \Delta_i x \mathbf{i} + f_x(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i x \mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \Delta_i y \mathbf{j} + f_y(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i y \mathbf{k}$$

segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta_i x & 0 & f_x(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i x \\ 0 & \Delta_i y & f_y(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i y \end{vmatrix} \\ &= -\Delta_i x \Delta_i y f_x(\xi_i, \gamma_i) \mathbf{i} - \Delta_i x \Delta_i y f_y(\xi_i, \gamma_i) \mathbf{j} + \Delta_i x \Delta_i y \mathbf{k} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta_i \sigma &= \|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\| \\ &= \sqrt{f_x^2(\xi_i, \gamma_i) + f_y^2(\xi_i, \gamma_i) + 1} \Delta_i x \Delta_i y \end{aligned}$$

Substituindo essa expressão em (1), obtemos

$$\sigma = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{f_x^2(\xi_i, \gamma_i) + f_y^2(\xi_i, \gamma_i) + 1} \Delta_i x \Delta_i y$$

Esse limite é uma integral dupla que existe em R , em virtude da continuidade de f_x e f_y em R . Temos, então, o teorema a seguir.

18.5.1 TEOREMA

Suponhamos que f e suas derivadas parciais sejam contínuas na região fechada R , no plano xy . Então, se σ for a medida da área da superfície $z = f(x, y)$ que está sobre R ,

$$\sigma = \iint_R \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1} \, dx \, dy$$

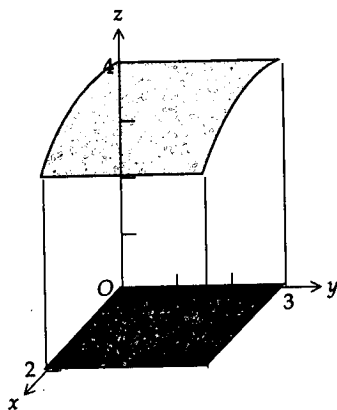


FIGURA 3

EXEMPLO 1 Ache a área da superfície que é cortada do cilindro $x^2 + z^2 = 16$ pelos planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ e $y = 3$.

Solução A superfície dada está na Figura 3. A região R é o retângulo no primeiro quadrante do plano xy , limitado pelas retas $x = 2$ e $y = 3$. A superfície tem por equação $x^2 + z^2 = 16$. Resolvendo para z obtemos $z = \sqrt{16 - x^2}$. Assim, $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2}$. Logo, se σ for a medida da área da superfície, então, do Teorema 18.5.1,

$$\begin{aligned}\sigma &= \iint_R \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1} \, dx \, dy \\ &= \int_0^3 \int_0^2 \sqrt{\left(\frac{-x}{\sqrt{16 - x^2}}\right)^2 + 0 + 1} \, dx \, dy \\ &= \int_0^3 \int_0^2 \frac{4}{\sqrt{16 - x^2}} \, dx \, dy \\ &= 4 \int_0^3 \left[\text{sen}^{-1} \frac{1}{4}x\right]_0^2 \, dy \\ &= 4 \int_0^3 \frac{1}{6}\pi \, dy \\ &= 2\pi\end{aligned}$$

A área da superfície é, portanto, 2π unidades.

EXEMPLO 2 Ache a área do parabolóide $z = x^2 + y^2$ abaixo do plano $z = 4$.

Solução A Figura 4 mostra a superfície dada. Da equação do parabolóide vemos que $f(x, y) = x^2 + y^2$. A região fechada no plano xy , limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 4$, é a região R . Se σ for a área da superfície em questão, então, do Teorema 18.5.1,

$$\begin{aligned}\sigma &= \iint_R \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1} \, dx \, dy \\ &= \iint_R \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1} \, dx \, dy\end{aligned}$$

Como o integrando contém o termo $4(x^2 + y^2)$, o cálculo da integral dupla fica simplificado com o uso de coordenadas polares. Então, $x^2 + y^2 = r^2$. Como $dx \, dy = dA$, então $dx \, dy = r \, dr \, d\theta$. Além disso, os limites para r são de 0 a 2, enquanto que os limites para θ são de 0 a 2π . Logo,

$$\begin{aligned}\sigma &= \iint_R \sqrt{4r^2 + 1} \, r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{4r^2 + 1} \, r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{12}(4r^2 + 1)^{3/2}\right]_0^2 \, d\theta \\ &= \frac{1}{6}\pi(17\sqrt{17} - 1)\end{aligned}$$

Assim, a área do parabolóide abaixo do plano dado é $\frac{1}{6}\pi(17\sqrt{17} - 1)$.

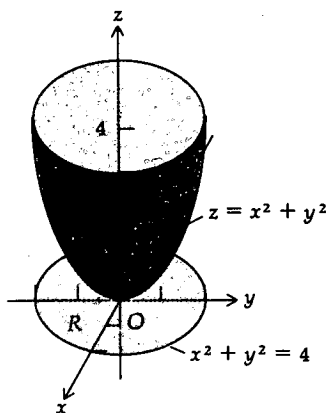


FIGURA 4

EXEMPLO 3 Ache a área da parte superior da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Solução O hemisfério está na Figura 5. Resolvendo a equação da esfera para z e igualando-o a $f(x, y)$ obtemos

$$f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

Como $f_x(x, y) = -x/\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ e $f_y(x, y) = -y/\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, f_x e f_y não estão definidos na circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ que é a fronteira da região R no plano xy . Além disso, a integral dupla obtida do Teorema 18.5.1 é

$$\iint_R \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

que é uma integral imprópria, pois o integrando tem uma descontinuidade infinita em cada ponto da fronteira de R . Podemos superar essa situação considerando a região R' como sendo limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = b^2$, onde $b < a$, tomando, em seguida, o limite quando $b \rightarrow a^-$. Além disso, o cálculo fica simplificado se a integral dupla for calculada por uma integral iterada, usando coordenadas polares. Então, se σ for a área do hemisfério,

$$\begin{aligned} \sigma &= \lim_{b \rightarrow a^-} \int_0^b \int_0^{2\pi} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} r d\theta dr \\ &= 2\pi a \lim_{b \rightarrow a^-} \int_0^b \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr \\ &= 2\pi a \lim_{b \rightarrow a^-} \left[-\sqrt{a^2 - r^2} \right]_0^b \\ &= 2\pi a \lim_{b \rightarrow a^-} \left[-\sqrt{a^2 - b^2} + a \right] \\ &= 2\pi a^2 \end{aligned}$$

A área do hemisfério é, portanto, $2\pi a^2$ unidades.

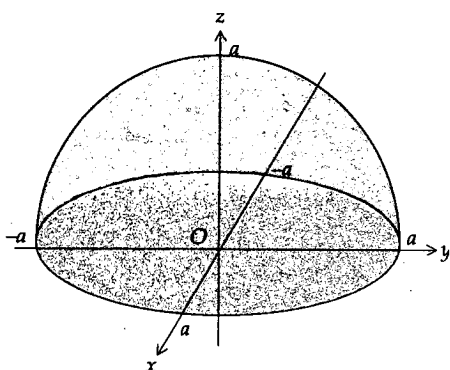


FIGURA 5

Considere agora a curva $y = F(x)$ com $a \leq x \leq b$, $F(x) > 0$ em $[a, b]$ e F' contínua em $[a, b]$. Se essa curva for girada em torno do eixo x , obtemos uma superfície de revolução. Da Seção 15.6, uma equação dessa superfície é

$$y^2 + z^2 = [F(x)]^2 \quad (2)$$

A Figura 6 mostra a superfície de revolução. Na figura, o plano xy é o plano do papel; contudo, ainda temos um sistema dextrogiro. Queremos obter uma fórmula para encontrar a medida da área dessa superfície de revolução, usando o Teorema 18.5.1. Das propriedades de simetria, a medida da área da superfície acima do plano xz e em frente ao plano xy é um quarto da medida da área de toda a superfície. Resolvendo (2) para z e desprezando a raiz quadrada negativa, pois $z \geq 0$, obtemos $f(x, y) = \sqrt{[F(x)]^2 - y^2}$. A região R no plano xy é aquela limitada pelo eixo x , pela curva $y = F(x)$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$. Calculando as derivadas parciais de f , obtemos

$$f_x(x, y) = \frac{F(x)F'(x)}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}} \quad f_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}}$$

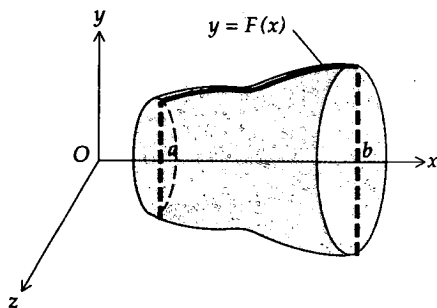


FIGURA 6

Vemos que $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ não existem em parte da fronteira de R (quando $y = -F(x)$ e quando $y = F(x)$). A integral dupla obtida do Teorema 18.5.1 é

$$\iint_R \sqrt{\frac{[F(x)]^2 [F'(x)]^2}{[F(x)]^2 - y^2} + \frac{y^2}{[F(x)]^2 - y^2} + 1} dy dx = \iint_R \frac{F(x) \sqrt{[F'(x)]^2 + 1}}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}} dy dx$$

Essa integral dupla é imprópria, pois o integrando tem uma descontinuidade infinita em cada ponto da fronteira de R , onde $y = -F(x)$ e $y = F(x)$. Assim, calculamos a integral dupla por uma integral iterada para a qual o integrando interno é impróprio. Se σ for a área da superfície de revolução,

$$\begin{aligned} \sigma &= 4 \int_a^b \left[F(x) \sqrt{[F'(x)]^2 + 1} \int_0^{F(x)} \frac{dy}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}} \right] dx & (3) \\ \int_0^{F(x)} \frac{dy}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}} &= \lim_{b \rightarrow F(x)^-} \int_0^b \frac{dy}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}} \\ &= \lim_{b \rightarrow F(x)^-} \left[\text{sen}^{-1} \frac{y}{F(x)} \right]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow F(x)^-} \text{sen}^{-1} \frac{b}{F(x)} \\ &= \frac{1}{2} \pi \end{aligned}$$

Logo, de (3),

$$\sigma = 2\pi \int_a^b F(x) \sqrt{[F'(x)]^2 + 1} dx$$

Vamos estabelecer esse resultado como um teorema, onde F será substituída por f .

18.5.2 TEOREMA

Suponha que a função f seja positiva em $[a, b]$ e f' seja contínua em $[a, b]$. Se σ for a medida da área da superfície de revolução obtida girando-se a curva $y = f(x)$, com $a \leq x \leq b$, em torno do eixo x , então

$$\sigma = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{[f'(x)]^2 + 1} dx$$

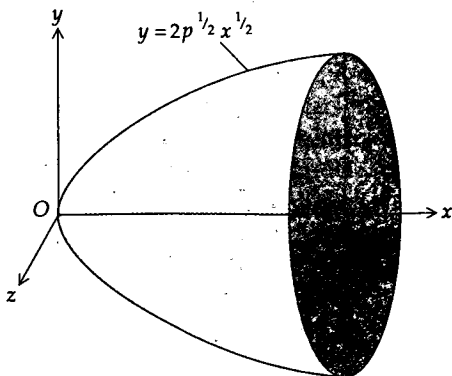


FIGURA 7

EXEMPLO 4 Ache a área do parabolóide de revolução gerado pela rotação da parte superior da parábola $y^2 = 4px$, com $0 \leq x \leq h$, em torno do eixo x .

Solução O parabolóide de revolução aparece na Figura 7. Resolvendo a equação da parábola em y ($y \geq 0$) obtemos $y = 2p^{1/2}x^{1/2}$. Assim, se σ unidades for a área da superfície, do Teorema 18.5.2, com $f(x) = 2p^{1/2}x^{1/2}$,

$$\begin{aligned} \sigma &= 2\pi \int_0^h 2p^{1/2}x^{1/2} \sqrt{\frac{p}{x} + 1} dx \\ &= 4\pi p^{1/2} \int_0^h \sqrt{p+x} dx \\ &= \frac{8}{3}\pi p^{1/2} (p+x)^{3/2} \Big|_0^h \\ &= \frac{8}{3}\pi (\sqrt{p(p+h)^3} - p^2) \end{aligned}$$

A área do parabolóide de revolução é, portanto, $\frac{8}{3}\pi(\sqrt{p(p+h)^3} - p^2)$ unidades.

EXERCÍCIOS 18.5

1. Ache a área da superfície delimitada no plano $2x + y + z = 4$ pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$.
2. Ache a área da superfície delimitada no plano $z - 2x - y = 5$ pelos planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ e $y = 4$.
3. Ache a área da parte da superfície no plano $36x + 16y + 9z = 144$, delimitada pelos planos coordenados.
4. Ache a área da superfície que é delimitada no plano $z = ax + by$ pelos planos $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ e $y = b$, onde $a > 0$ e $b > 0$.
5. Ache a área da superfície no primeiro octante, delimitada no cilindro $x^2 + y^2 = 9$ pelo plano $x = z$.
6. Ache a área da superfície que é delimitada no cilindro $x^2 + y^2 = 25$ pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $z = 1$ e $z = 3$.
7. Seja R a região triangular no plano xy , com vértices em $(0, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$ e $(2, 4, 0)$. Ache a área da superfície da parte do gráfico de $z - 5x - y^2 = 2$ que está sobre R .
8. Ache a área da superfície no primeiro octante, delimitada no cone $x^2 + y^2 = z^2$ pelo plano $x + y = 4$.
9. Ache a área da parte da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ que é delimitada por dentro do cone $y^2 + z^2 = x^2$.
10. Ache a área da parte da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 9$.
11. Ache a área da parte da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ que está dentro do parabolóide de $x^2 + y^2 = 3z$.
12. Para a esfera e o parabolóide do Exercício 11, ache a área da parte da superfície do parabolóide que está dentro da esfera.
13. Ache a área da superfície da parte do cilindro $x^2 + z^2 = 4$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$.
14. Ache a área da superfície da parte do cone $x^2 + y^2 = z^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.
15. Ache a área da superfície da parte do cone $x^2 + y^2 = z^2$ entre o cilindro $y^2 = x$ e o plano $x - y = 2$.
16. Ache a área da superfície da parte do sólido $xy = az$ no primeiro octante que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.
17. O segmento de reta da origem ao ponto (a, b) é girado em torno do eixo x . Ache a área da superfície do cone assim gerado.
18. Deduza a fórmula para a área da superfície de uma esfera obtida girando-se uma semicircunferência em torno de seu diâmetro.
19. Ache a área da superfície de revolução obtida girando-se o arco da catenária $y = a \cosh(x/a)$ de $x = 0$ até $x = a$, em torno do eixo y .
20. Ache a área da superfície de revolução obtida girando-se a catenária do Exercício 19 em torno do eixo x .
21. O laço da curva $18y^2 = x(6 - x)^2$ é girado em torno do eixo x . Ache a área da superfície de revolução assim gerada.
22. Ache a área da superfície de revolução obtida girando-se o arco da curva $y = \ln x$ de $x = 1$ até $x = 2$ em torno do eixo y .
23. Ache a área da parte do plano $x = z$ que está entre os planos $y = 0$ e $y = 6$ e dentro do hiperbolóide $9x^2 - 4y^2 + 16z^2 = 144$.
24. Ache a área da superfície delimitada do parabolóide hiperbólico $y^2 - x^2 = 6z$ pelo cilindro $x^2 + y^2 = 36$.
25. Suponha que f e suas derivadas parciais sejam contínuas na região fechada R do plano xy . Mostre que se σ for a medida da área da parte da superfície $z = f(x, y)$ que está sobre R , então

$$\sigma = \iint_R \|\nabla g(x, y, z)\| dx dy$$
 onde $g(x, y, z) = z - f(x, y)$.

18.6 A INTEGRAL TRIPLA

A extensão da integral dupla para a tripla é análoga à extensão da integral simples para a dupla. O tipo mais simples de região em R^3 é um paralelepípedo retangular, limitado por seis planos: $x = a_1$, $x = a_2$, $y = b_1$, $y = b_2$, $z = c_1$ e $z = c_2$, com $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$ e $c_1 < c_2$. Seja f uma função de três variáveis e suponha que f seja contínua acima da região S . Uma partição de S é formada ao dividirmos S em caixas retangulares, através de planos paralelos aos planos coordenados. Denotamos tal partição por Δ e supomos que n seja o número de caixas. Seja $\Delta_i V$ a medida do volume da i -ésima caixa. Escolha um ponto arbitrário (ξ_i, γ_i, μ_i) na i -ésima caixa. Forme a soma

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i, \mu_i) \Delta_i V \quad (1)$$

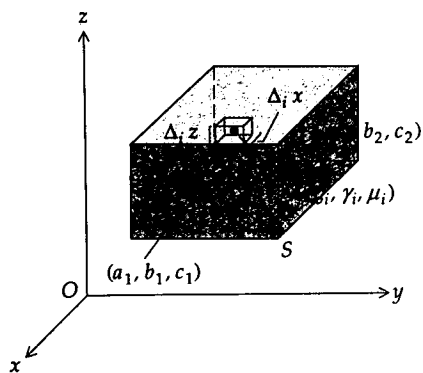


FIGURA 1

Consulte a Figura 1, que mostra o paralelepípedo junto com a i -ésima caixa. A norma $\|\Delta\|$ da partição é o comprimento da maior diagonal das caixas. Se as somas da forma (1) tendem a um limite quando $\|\Delta\|$ tende a zero para qualquer escolha dos pontos (ξ_i, γ_i, μ_i) , então chamamos esse limite de **integral tripla** de f em S e escrevemos

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i, \mu_i) \Delta_i V = \iiint_S f(x, y, z) dV$$

Uma condição suficiente para a existência da integral tripla de f em S é que f seja contínua em S .

Da mesma forma que uma integral dupla é igual a uma integral iterada duas vezes, a integral tripla é o mesmo que uma integral iterada três vezes. Quando S for o paralelepípedo descrito acima e f for contínua em S , então

$$\iiint_S f(x, y, z) dV = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z) dz dy dx$$

EXEMPLO 1 Calcule a integral tripla

$$\iiint_S xy \operatorname{sen} yz dV$$

se S for o paralelepípedo retangular, limitado pelos planos $x = \pi$, $y = \frac{1}{2}\pi$, $z = \frac{1}{3}\pi$ e pelos planos coordenados.

Solução

$$\begin{aligned} \iiint_S xy \operatorname{sen} yz dV &= \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/3} xy \operatorname{sen} yz dz dy dx \\ &= \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} [-x \cos yz]_0^{\pi/3} dy dx \\ &= \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} x(1 - \cos \frac{1}{3}\pi y) dy dx \\ &= \int_0^\pi x \left(y - \frac{3}{\pi} \operatorname{sen} \frac{1}{3}\pi y \right) \Big|_0^{\pi/2} dx \\ &= \int_0^\pi x \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi^2}{6} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi^2}{6} \right) \Big|_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{4} \left(\pi^2 - 6 \operatorname{sen} \frac{\pi^2}{6} \right) \end{aligned}$$

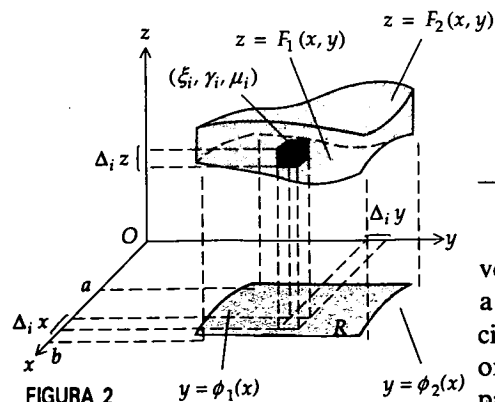


FIGURA 2

Vamos discutir agora a integral tripla de uma função contínua de três variáveis numa região em R^3 que não seja um paralelepípedo retangular. Seja S a região tridimensional fechada, limitada pelos planos $x = a$ e $x = b$, pelos cilindros $y = \phi_1(x)$ e $y = \phi_2(x)$ e pelas superfícies $z = F_1(x, y)$ e $z = F_2(x, y)$, onde as funções ϕ_1 , ϕ_2 , F_1 e F_2 são suaves (isto é, têm derivadas ou derivadas parciais contínuas). Veja a Figura 2. Construa planos paralelos aos planos coor-

denados, formando, desse modo, um conjunto de paralelepípedos que cubram completamente S . Os paralelepípedos que estão inteiramente dentro de S ou sobre a fronteira de S formam uma **partição** Δ de S . Escolha algum sistema de numeração, de tal forma que eles fiquem enumerados de 1 até n . A norma $\|\Delta\|$ dessa partição de S é o comprimento da maior diagonal de qualquer paralelepípedo pertencente à partição. Seja $\Delta_i V$ a medida do volume do i -ésimo paralelepípedo. Seja f a função de três variáveis, contínua em S , e seja (ξ_i, γ_i, μ_i) um ponto arbitrário no i -ésimo paralelepípedo. Forme a soma

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i, \mu_i) \Delta_i V$$

Se essa soma tiver um limite quando $\|\Delta\|$ tende a zero, e se esse limite for independente da escolha dos planos da partição e dos pontos arbitrários (ξ_i, γ_i, μ_i) em cada paralelepípedo, então esse limite será chamado de **integral tripla** de f em S e escrevemos

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i, \mu_i) \Delta_i V = \iiint_S f(x, y, z) dV \quad (2)$$

Provamos em Cálculo Avançado que uma condição suficiente para a existência do limite em (2) é que f seja contínua em S . Além disso, sob as condições impostas às funções ϕ_1, ϕ_2, F_1 e F_2 , segundo as quais elas devem ser suaves, podemos provar também que a integral tripla pode ser calculada pela integral iterada

$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

Da mesma forma que a integral dupla pode ser interpretada como a medida da área de uma região plana quando $f(x, y) = 1$ em R , a integral tripla pode ser interpretada como a medida do volume de uma região tridimensional. Se $F(x, y, z) = 1$ em S , então (2) torna-se

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta_i V = \iiint_S dV$$

e a integral tripla é a medida do volume da região S .

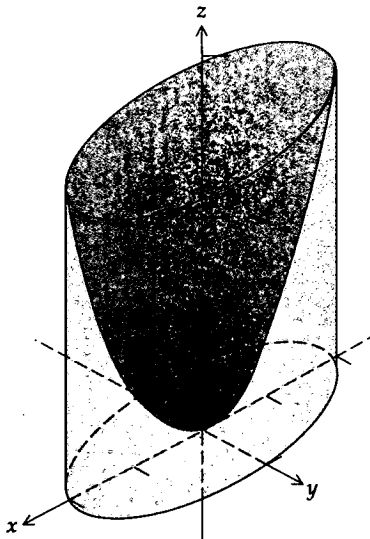


FIGURA 3

EXEMPLO 2 Ache, por integração tripla, o volume do sólido do Exemplo 3, da Secção 18.2.

Solução O sólido está acima do plano xy , limitado pelo parabolóide elíptico $z = x^2 + 4y^2$ e pelo cilindro $x^2 + 4y^2 = 4$. Ele aparece na Figura 3. Se V unidades for o volume do sólido, então

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta_i V \\ &= \iiint_S dV \end{aligned}$$

onde S é a região limitada pelo sólido. Os limites de z são de 0 (o valor de z no plano xy) até $x^2 + 4y^2$ (o valor de z no parabolóide elíptico). Os limites de y para um quarto do volume vão de 0 (valor de y no plano xz) até $\frac{1}{2} \sqrt{4 - x^2}$

(o valor de y no cilindro). Os limites de x no primeiro octante vão de 0 até 2. Calculamos a integral tripla por uma integral iterada, obtendo

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}/2} \int_0^{x^2+4y^2} dz \, dy \, dx \\ &= 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}/2} (x^2 + 4y^2) \, dy \, dx \end{aligned}$$

Essa é a mesma integral iterada duas vezes, obtida no Exemplo 3, da Secção 18.2, e o restante da solução é o mesmo.

EXEMPLO 3 Ache o volume do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 25$, pelo plano $x + y + z = 8$ e pelo plano xy .

Solução O sólido aparece na Figura 4. Os limites de z na integral iterada são de 0 a $8 - x - y$ (o valor de z no plano). Os limites de y são obtidos da região de fronteira no plano xy que é a circunferência $x^2 + y^2 = 25$. Assim, esses limites vão de $-\sqrt{25 - x^2}$ a $\sqrt{25 - x^2}$. Os limites de x vão de -5 a 5 . Se V unidades for o volume pedido,

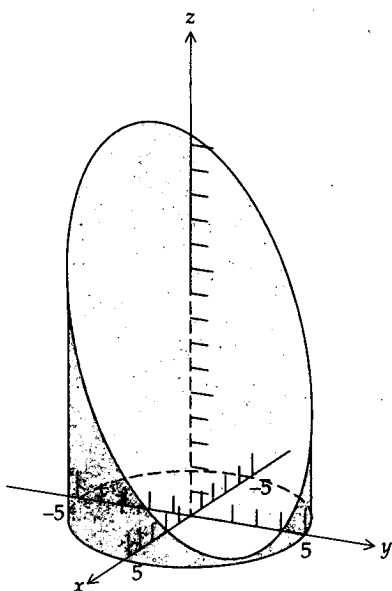


FIGURA 4

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta_i V \\ &= \iiint_S dV \\ &= \int_{-5}^5 \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} \int_0^{8-x-y} dz \, dy \, dx \\ &= \int_{-5}^5 \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} (8-x-y) \, dy \, dx \\ &= \int_{-5}^5 \left[(8-x)y - \frac{1}{2}y^2 \right]_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} dx \\ &= 2 \int_{-5}^5 (8-x)\sqrt{25-x^2} \, dx \\ &= 16 \int_{-5}^5 \sqrt{25-x^2} \, dx + \int_{-5}^5 \sqrt{25-x^2} (-2x) \, dx \\ &= 16 \left(\frac{1}{2}x\sqrt{25-x^2} + \frac{25}{2} \sin^{-1} \frac{1}{5}x \right) + \frac{2}{3}(25-x^2)^{3/2} \Big|_{-5}^5 \\ &= 200\pi \end{aligned}$$

O volume é, portanto, 200π unidades.

EXEMPLO 4 Ache a massa do sólido acima do plano xy , limitado pelo cone $9x^2 + z^2 = y^2$ e pelo plano $y = 9$, se a medida da densidade de massa por unidade de volume em qualquer ponto (x, y, z) do sólido for proporcional à medida da distância do ponto ao plano xy . A densidade de massa por unidade de volume é medida em quilogramas por metro cúbico.

Solução A Figura 5 mostra o sólido. Seja M kg a massa do sólido. A densidade em qualquer ponto (x, y, z) do sólido é kz kg-m³, onde k é uma constante. Então, se (ξ_i, γ_i, μ_i) for um ponto qualquer no i -ésimo paralelepípedo

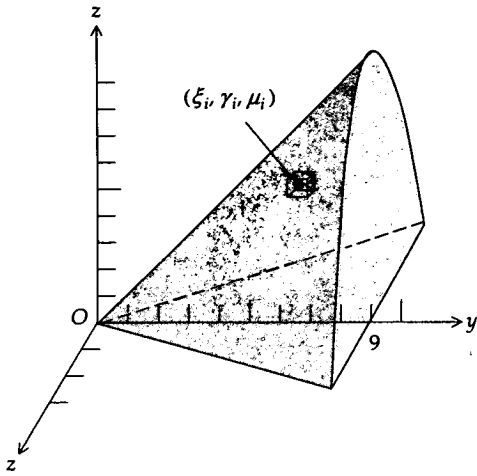


FIGURA 5

retangular da partição,

$$\begin{aligned}
 M &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k \mu_i \Delta_i V \\
 &= \iiint_S kz \, dV \\
 &= 2k \int_0^9 \int_0^{y/3} \int_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} z \, dz \, dx \, dy \\
 &= 2k \int_0^9 \int_0^{y/3} \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} dx \, dy \\
 &= k \int_0^9 \int_0^{y/3} (y^2 - 9x^2) dx \, dy \\
 &= \frac{2}{9} k \int_0^9 y^3 dy \\
 &= \frac{729}{2} k
 \end{aligned}$$

A massa é, portanto, $\frac{729}{2} k$ kg.

EXERCÍCIOS 18.6

Nos Exercícios de 1 a 8, calcule a integral iterada.

- $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{2y}^{1+y^2} x \, dz \, dy \, dx$
- $\int_1^2 \int_0^x \int_1^{x+xy} xy \, dz \, dy \, dx$
- $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x+y} (x+y+z) \, dz \, dy \, dx$
- $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{2-y} z \, dx \, dz \, dy$
- $\int_{-1}^0 \int_e^{2e} \int_0^{\pi/3} y \ln z \operatorname{tg} x \, dx \, dz \, dy$
- $\int_1^2 \int_y^{y^2} \int_0^{\ln x} ye^z \, dz \, dx \, dy$
- $\int_0^{\pi/2} \int_z^{\pi/2} \int_0^{xz} \cos \frac{y}{z} \, dy \, dx \, dz$
- $\int_0^2 \int_0^y \int_0^{\sqrt{3z}} \frac{z}{x^2+z^2} \, dx \, dz \, dy$

Nos Exercícios de 9 a 18, calcule a integral tripla.

- $\iiint_S y \, dV$, se S for a região limitada pelo tetraedro formado pelos planos $12x + 20y + 15z = 60$ e pelos planos coordenados.
- $\iiint_S (x^2 + z^2) \, dV$, se S for a mesma região do Exercício 9.
- $\iiint_S z \, dV$, se S for a região limitada pelo tetraedro com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ e $(1, 0, 1)$.
- $\iiint_S yz \, dV$, se S for a mesma região do Exercício 11.
- $\iiint_S xy \, dV$, se S for o paralelepípedo retangular no primeiro

octante, limitado pelos planos coordenados e pelos planos $x = 2$, $y = 3$ e $z = 4$.

- $\iiint_S x \, dV$, se S for o tetraedro limitado pelos planos $x + 2y + 3z = 6$, $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$.
- $\iiint_S dV$, se S for a região limitada pelas superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 27 - 2x^2 - 2y^2$.
- $\iiint_S y^2 \, dV$, se S for a região limitada pelos cilindros $x^2 + y = 1$ e $z^2 + y = 1$ e pelo plano $y = 0$.
- $\iiint_S (xz + 3z) \, dV$, se S for a região limitada pelo cilindro $x^2 + z^2 = 9$ e pelos planos $x + y = 3$, $z = 0$ e $y = 0$, acima do plano xy .
- $\iiint_S xyz \, dV$, se S for a região limitada pelos cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + z^2 = 4$.

Nos Exercícios de 19 a 32, use a integração tripla.

- Ache o volume do sólido no primeiro octante, limitado abaixo pelo plano xy , acima pelo plano $z = y$ e lateralmente pelo cilindro $y^2 = x$ e pelo plano $x = 1$.
- Ache o volume do sólido no primeiro octante, limitado pelo cilindro $x^2 + z^2 = 16$, pelo plano $x + y = 2$ e pelos três planos coordenados.
- Ache o volume do sólido no primeiro octante, limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + 2z = 4$ e pelos três planos coordenados.

22. Ache o volume do sólido limitado pelo cone elíptico $4x^2 + 9y^2 - 36z^2 = 0$ e pelo plano $z = 1$.

23. Ache o volume do sólido acima do parabolóide elíptico $3x^2 + y^2 = z$ e abaixo do cilindro $x^2 + z = 4$.

24. Ache o volume do sólido delimitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

25. Ache o volume do sólido delimitado pelo elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

26. Ache o volume do sólido limitado pelos cilindros $z = 5x^2$ e $z = 3 - x^2$, e pelos planos xz e $y + z = 4$.

27. Ache a massa do sólido homogêneo, limitado pelo cilindro $z = 4 - x^2$, pelo plano $y = 5$ e pelos planos coordenados, se a densidade de massa por unidade de volume em qualquer ponto for $k \text{ kg/m}^3$.

28. Ache a massa do sólido encerrado pelo tetraedro formado pelo plano $100x + 25y + 16z = 400$ e pelos planos coordenados, se a densidade de massa por unidade de volume variar com a distância ao plano yz . A densidade de massa por

unidade de volume é medida em quilogramas por metro cúbico.

29. Ache a massa do sólido limitado pelos cilindros $x = z^2$ e $y = x^2$ e pelos planos $z = 1$, $y = 0$ e $z = 0$. A densidade de massa por unidade de volume varia com o produto das distâncias aos três planos coordenados e é medida em quilogramas por metro cúbico.

30. Ache a massa do sólido limitado pela superfície $z = 4 - 4x^2 - y^2$ e pelo plano xy . A densidade de massa por unidade de volume em qualquer ponto do sólido é $3z|x| \text{ kg-m}^3$.

31. Ache a massa do sólido limitado pela superfície $z = xy$ e pelos planos $x = 1$, $y = 1$ e $z = 0$. A densidade de massa por unidade de volume em qualquer ponto do sólido é $3\sqrt{x^2 + y^2} \text{ kg-m}^3$.

32. Um sólido tem o formato de um cilindro circular reto, sendo r o raio da base e h a altura, ambos medidos em metros. Ache a massa do sólido, se a densidade de massa por unidade de volume varia com a distância a uma das bases. A densidade é medida em quilogramas por metro cúbico.

18.7 A INTEGRAL TRIPLA EM COORDENADAS CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS

Se uma região S em R^3 tem um eixo de simetria, as integrais triplas em S são mais facilmente calculadas se usarmos coordenadas cilíndricas. Se houver simetria em relação a um ponto, é conveniente escolher o ponto como a origem e usar coordenadas esféricas. Nessa secção discutiremos a integral tripla nessas coordenadas e vamos aplicá-las a problemas físicos.

Para definir a integral tripla em coordenadas cilíndricas, construímos uma partição da região S através de planos que passem pelo eixo z , pelos planos perpendiculares ao eixo z e pelos cilíndricos circulares retos, tendo z como seu eixo. Uma sub-região típica é mostrada na Figura 1. Os elementos da partição construída estão inteiramente em S . Esse tipo de partição é chamado de **partição cilíndrica**. A medida do comprimento da maior "diagonal" de qualquer uma das sub-regiões é chamada de **norma** da partição. Seja n o número de sub-regiões da partição e $\Delta_i V$ a medida do volume da i -ésima sub-região. A medida da área da base é $\bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta$, onde $\bar{r}_i = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})$. Assim, se $\Delta_i z$ for a medida da altura da i -ésima sub-região,

$$\Delta_i V = \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta \Delta_i z$$

Seja f uma função de r , θ e z e suponhamos que f seja contínua em S . Vamos escolher um ponto $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i)$ na i -ésima sub-região, de tal forma que $\theta_{i-1} \leq \bar{\theta}_i \leq \theta_i$ e $z_{i-1} \leq \bar{z}_i \leq z_i$. Formamos a soma

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i) \Delta_i V = \sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i) \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta \Delta_i z \quad (1)$$

Quando a norma de Δ tende a zero, pode ser mostrado, sob condições convenientes em S , que o limite dessa soma existe. Esse limite é chamado de **integral tripla em coordenadas cilíndricas** da função f em S e escrevemos

$$\begin{aligned} \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i) \Delta_i V &= \iiint_S f(r, \theta, z) dV \\ \Leftrightarrow \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i) \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta \Delta_i z &= \iiint_R f(r, \theta, z) r dr d\theta dz \end{aligned}$$

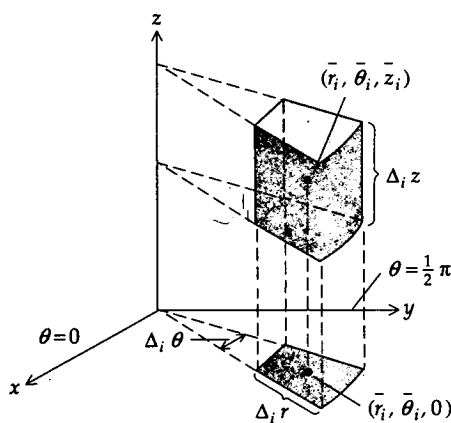


FIGURA 1

Observe que em coordenadas cilíndricas, $dV = r dr d\theta dz$. Podemos calcular a integral tripla através de uma integral iterada. Por exemplo, suponhamos que a região S em R^3 seja limitada pelos planos $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$, com $\alpha < \beta$, pelos cilindros $r = \lambda_1(\theta)$ e $r = \lambda_2(\theta)$, onde λ_1 e λ_2 são suaves em $[\alpha, \beta]$ e $\lambda_1(\theta) \leq \lambda_2(\theta)$ para $\alpha \leq \theta \leq \beta$, e pelas superfícies $z = F_1(r, \theta)$ e $z = F_2(r, \theta)$, onde F_1 e F_2 são funções de duas variáveis suaves numa região R do plano polar, limitada pelas curvas $r = \lambda_1(\theta)$, $r = \lambda_2(\theta)$, $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$. Suponhamos também que $F_1(r, \theta) \leq F_2(r, \theta)$ para todo ponto (r, θ) em R . Então, a integral tripla pode ser calculada por uma integral iterada através da fórmula

$$\iiint_S f(r, \theta, z) r dr d\theta dz = \int_\alpha^\beta \int_{\lambda_1(\theta)}^{\lambda_2(\theta)} \int_{F_1(r, \theta)}^{F_2(r, \theta)} f(r, \theta, z) r dz dr d\theta$$

Existem cinco outras integrais iteradas que podem ser usadas para calcular a integral tripla, pois há seis permutações possíveis das variáveis r, θ e z .

As integrais triplas em coordenadas cilíndricas são especialmente úteis no cálculo do momento de inércia de um sólido em relação ao eixo z , uma vez que a distância do eixo z a um ponto no sólido é determinada pela coordenada r .

EXEMPLO 1 Um sólido homogêneo, com a forma de um cilindro circular reto, tem um raio de 2 m e uma altura de 4 m. Ache o momento de inércia do sólido em relação ao eixo x .

Solução Vamos escolher os planos coordenados, de tal forma que o plano xy seja o plano da base do sólido e o eixo z seja o eixo do sólido. A Figura 2 mostra a parte do sólido no primeiro octante, bem como a i -ésima sub-região de uma partição cilíndrica. Usando coordenadas cilíndricas e tomando o ponto $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i)$ na i -ésima sub-região com $k \text{ kg}\cdot\text{m}^3$ como a densidade de massa por unidade de volume em qualquer ponto, então se $I_z \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ for o momento de inércia do sólido em relação ao eixo z ,

$$\begin{aligned} I_z &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \bar{r}_i^2 k \Delta_i V \\ &= \iiint_S kr^2 dV \end{aligned}$$

Existem seis formas diferentes possíveis de ordem de integração. A Figura 2 mostra a ordem $dz dr d\theta$. Usando-a, temos

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_S kr^2 dz r dr d\theta \\ &= 4k \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^4 r^3 dz dr d\theta \end{aligned}$$

Na primeira integração, as sub-regiões são somadas de $z = 0$ a $z = 4$ e transformam-se numa coluna. Na segunda integração, as colunas são somadas de $r = 0$ a $r = 2$ e transformam-se em uma porção do cilindro, com a forma de uma cunha. Na terceira integração, a porção em cunha é girada de $\theta = 0$ até $\theta = \frac{1}{2}\pi$; isso faz com que a cunha percorra toda a região tridimensional

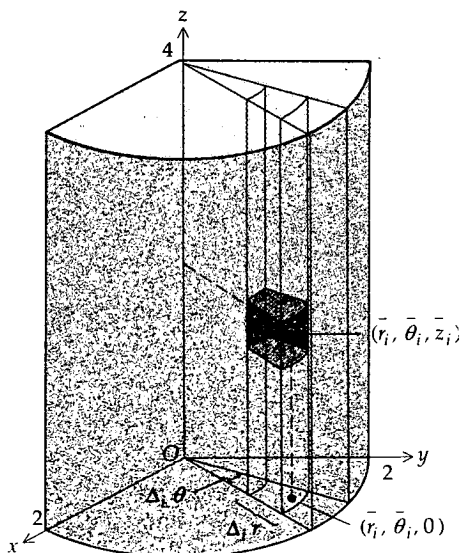


FIGURA 2

no primeiro octante. Para obter o volume total, multiplicamos por 4. Efetuando a integração, obtemos

$$\begin{aligned} I_z &= 16k \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^3 dr d\theta \\ &= 64k \int_0^{\pi/2} d\theta \\ &= 32k\pi \end{aligned}$$

Logo, o momento de inércia é $32 k\pi \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

EXEMPLO 2 Resolva o Exemplo 1, usando a ordem de integração (a) $dr dz d\theta$; (b) $d\theta dr dz$.

Solução

(a) A Figura 3 representa a ordem de integração $dr dz d\theta$. Ela mostra que as sub-regiões somadas de $r = 0$ até $r = 2$ dão um setor em forma de cunha. Então, somamos de $z = 0$ até $z = 4$ para obter uma porção em forma de cunha, sendo ela girada de $\theta = 0$ até $\theta = \frac{1}{2}\pi$ para cobrir o primeiro octante. Então,

$$\begin{aligned} I_z &= 4k \int_0^{\pi/2} \int_0^4 \int_0^2 r^3 dr dz d\theta \\ &= 32k\pi \end{aligned}$$

(b) A Figura 4 representa a ordem $d\theta dr dz$. Ela mostra que as sub-regiões somadas de $\theta = 0$ até $\theta = \frac{1}{2}\pi$ dão um anel interior ao cilindro. Esses anéis são somados de $r = 0$ a $r = 2$, resultando uma porção horizontal do cilindro. As porções horizontais são somadas de $z = 0$ a $z = 4$. Logo,

$$\begin{aligned} I_z &= 4k \int_0^4 \int_0^2 \int_0^{\pi/2} r^3 d\theta dr dz \\ &= 32k\pi \end{aligned}$$

EXEMPLO 3 Ache a massa de um hemisfério sólido com raio a m, se a densidade de massa por unidade de volume em qualquer ponto for proporcional à distância do ponto ao eixo do sólido e for medida em quilogramas por metro cúbico.

Solução Se escolhermos os planos coordenados de tal forma que a origem seja o centro da esfera e o eixo z seja o eixo do sólido, então uma equação da superfície hemisférica acima do plano xy será $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. A Figura 5 mostra essa superfície e o sólido, bem como a i -ésima sub-região de uma partição cilíndrica. Uma equação do hemisfério em coordenadas cilíndricas é $z = \sqrt{a^2 - r^2}$. Se $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i)$ for um ponto na i -ésima sub-região, a densidade nesse ponto será $k\bar{r}_i$, $\text{kg}\cdot\text{m}^3$, onde k é uma constante; se M kg for a massa do sólido, então

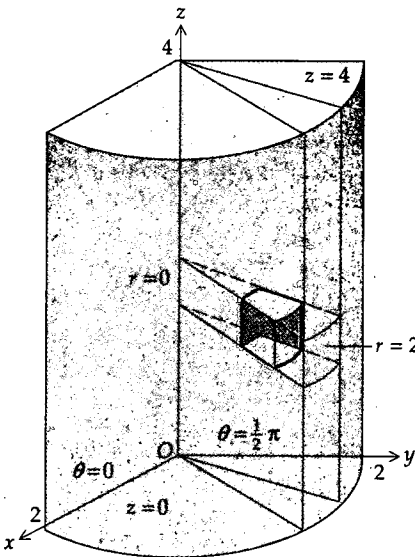


FIGURA 3

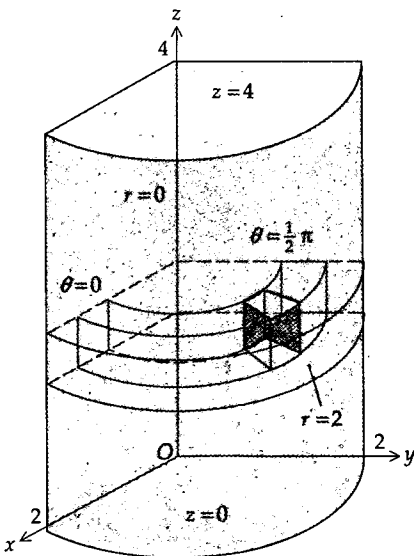


FIGURA 4

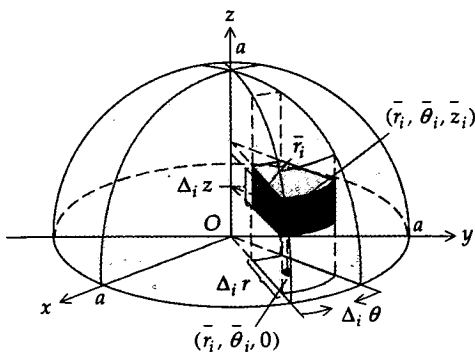


FIGURA 5

$$\begin{aligned}
 M &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k \bar{r}_i \Delta_i V \\
 &= \iiint_S k r \, dV \\
 &= k \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} r^2 \, dz \, dr \, d\theta \\
 &= k \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 \sqrt{a^2-r^2} \, dr \, d\theta \\
 &= k \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{4}r(a^2-r^2)^{3/2} + \frac{1}{8}a^2 r \sqrt{a^2-r^2} + \frac{1}{8}a^4 \operatorname{sen}^{-1} \frac{r}{a} \right]_0^a d\theta \\
 &= \frac{1}{16}ka^4\pi \int_0^{2\pi} d\theta \\
 &= \frac{1}{8}ka^4\pi^2
 \end{aligned}$$

A massa do hemisfério sólido é, portanto, $\frac{1}{8}ka^4\pi^2$ kg.

EXEMPLO 4 Ache o centro de massa do sólido do Exemplo 3.

Solução Seja $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ a representação cartesiana do centro de massa. Dada a simetria, $\bar{x} = 0$ e $\bar{y} = 0$. Precisamos calcular \bar{z} . Se M_{xy} kg-m for o momento de massa do sólido em relação ao plano xy , então

$$\begin{aligned}
 M_{xy} &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \bar{z}_i(k\bar{r}_i) \Delta_i V \\
 &= \iiint_S k z r \, dV \\
 &= k \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} z r^2 \, dz \, dr \, d\theta \\
 &= \frac{1}{2}k \int_0^{2\pi} \int_0^a (a^2-r^2)r^2 \, dr \, d\theta \\
 &= \frac{1}{15}ka^5 \int_0^{2\pi} d\theta \\
 &= \frac{2}{15}ka^5\pi
 \end{aligned}$$

Como $M\bar{z} = M_{xy}$, temos que $\bar{z} = M_{xy}/M$; assim,

$$\begin{aligned}
 \bar{z} &= \frac{\frac{2}{15}ka^5\pi}{\frac{1}{8}ka^4\pi^2} \\
 &= \frac{16}{15\pi} a
 \end{aligned}$$

O centro de massa está, portanto, sobre o eixo do sólido a uma distância de $\frac{16a}{15\pi}$ m do plano da base.

Vamos definir agora a integral tripla em coordenadas esféricas. Uma partição esférica da região tridimensional S é feita pelos planos contendo o eixo z , esferas com centro na origem e cones circulares com vértices na origem, e o eixo

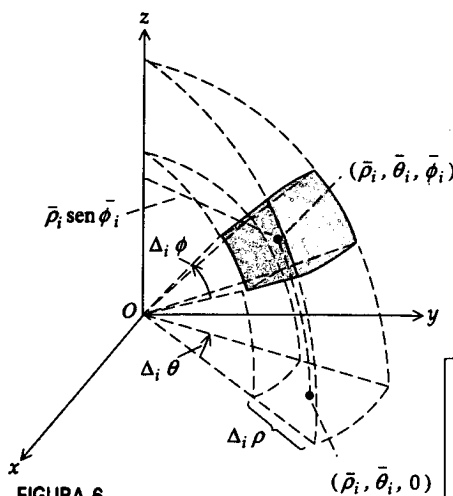


FIGURA 6

co z como seu eixo. Uma sub-região típica dessa partição aparece na Figura 6. Se $\Delta_i V$ for a medida do volume da i -ésima sub-região e $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i, \bar{\phi}_i)$ for um ponto dela, podemos obter uma aproximação a $\Delta_i V$ considerando a região como se fosse em paralelepípedo retangular e, tomando o produto das medidas de suas três dimensões. Essas medidas são $\bar{\rho}_i \Delta_i \theta$, $\bar{\rho}_i \Delta_i \phi$ e $\Delta_i \rho$. As Figuras 7 e 8 mostram como são obtidas as duas primeiras medidas, enquanto que a Figura 6 mostra a medida da dimensão $\Delta_i \rho$. Logo,

$$\Delta_i V = \bar{\rho}_i^2 \sin \bar{\phi}_i \Delta_i \rho \Delta_i \theta \Delta_i \phi$$

A integral tripla em coordenadas esféricas de uma função f em S é dada por

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i, \bar{\phi}_i) \Delta_i V = \iiint_S f(\rho, \theta, \phi) dV$$

$$\Leftrightarrow \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i, \bar{\phi}_i) \bar{\rho}_i^2 \sin \bar{\phi}_i \Delta_i \rho \Delta_i \theta \Delta_i \phi = \iiint_R f(\rho, \theta, \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi$$

Observe que em coordenadas esféricas, $dV = \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi$. As integrais triplas podem ser calculadas por uma integral iterada.

As coordenadas esféricas são especialmente úteis em alguns problemas envolvendo esferas, como nos exemplos a seguir.

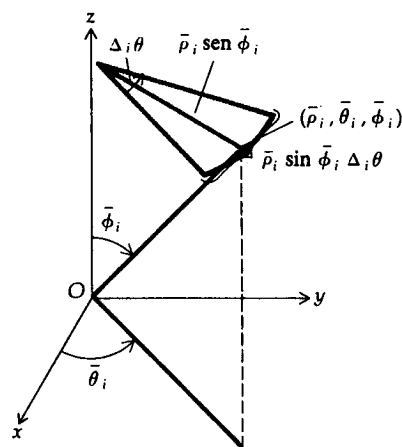


FIGURA 7

EXEMPLO 5 Ache a massa do hemisfério sólido do Exemplo 3, se a densidade de massa por unidade de volume em qualquer ponto for proporcional à distância do ponto ao centro da base.

Solução Se $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i, \bar{\phi}_i)$ for um ponto na i -ésima sub-região de uma partição esférica, a densidade nesse ponto será $k\bar{\rho}_i$ kg·m³, onde k é uma constante. Se M kg for a massa do sólido, então

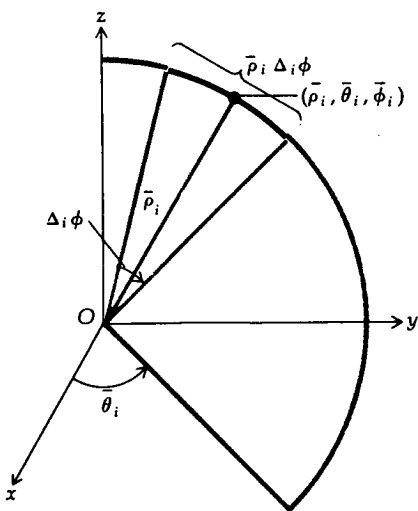


FIGURA 8

$$\begin{aligned} M &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k\bar{\rho}_i \Delta_i V \\ &= \iiint_S k\rho dV \\ &= 4k \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^a \rho^3 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= a^4 k \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin \phi d\phi d\theta \\ &= a^4 k \int_0^{\pi/2} [-\cos \phi]_0^{\pi/2} d\theta \\ &= a^4 k \int_0^{\pi/2} d\theta \\ &= \frac{1}{2} a^4 k \pi \end{aligned}$$

Logo, a massa do hemisfério sólido é $\frac{1}{2} a^4 k \pi$ kg.

É interessante comparar a solução do Exemplo 5, que usa coordenadas esféricas, com a solução obtida com coordenadas cartesianas. Pelo último método, uma partição de S é feita se dividirmos S em caixas retangulares, através de planos paralelos

aos planos coordenados. Se (ξ_i, γ_i, μ_i) for um ponto qualquer da i -ésima sub-região e como $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, então

$$\begin{aligned} M &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k \sqrt{\xi_i^2 + \gamma_i^2 + \mu_i^2} \Delta_i V \\ &= \iiint_S k \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV \\ &= 4k \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} \int_0^{\sqrt{a^2 - y^2 - z^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz \end{aligned}$$

Os cálculos envolvidos nessa integração são, obviamente, muito mais complicados do que aqueles com coordenadas esféricas.

EXEMPLO 6 Um sólido homogêneo é limitado acima pela esfera $\rho = a$ e abaixo pelo cone $\phi = \alpha$, onde $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$. Ache o momento de inércia do sólido em torno do eixo z . A densidade de massa por unidade de volume em qualquer ponto é $k \text{ kg}\cdot\text{m}^3$.

Solução O sólido está na Figura 9. Vamos fazer uma partição esférica do sólido e seja $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i, \bar{\phi}_i)$ um ponto na i -ésima sub-região. A medida da distância do ponto $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i, \bar{\phi}_i)$ ao eixo z é $\bar{\rho}_i \text{ sen } \bar{\phi}_i$. Assim, se $I_z \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ for o momento de inércia do sólido dado em torno do eixo z , então

$$\begin{aligned} I_z &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\bar{\rho}_i \text{ sen } \bar{\phi}_i)^2 k \Delta_i V \\ &= \iiint_S k \rho^2 \text{ sen}^2 \phi dV \\ &= k \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} \int_0^a (\rho^2 \text{ sen}^2 \phi) \rho^2 \text{ sen } \phi d\rho d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{3} k a^5 \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} \text{sen}^3 \phi d\theta d\phi \\ &= \frac{2}{3} k a^5 \pi \int_0^\alpha \text{sen}^3 \phi d\phi \\ &= \frac{2}{3} k a^5 \pi \left[-\cos \phi + \frac{1}{3} \cos^3 \phi \right]_0^\alpha \\ &= \frac{2}{15} k a^5 \pi (\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha + 2) \end{aligned}$$

O momento de inércia do sólido em torno do eixo z é, portanto $\frac{2}{15} k a^5 \pi (\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha + 2) \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

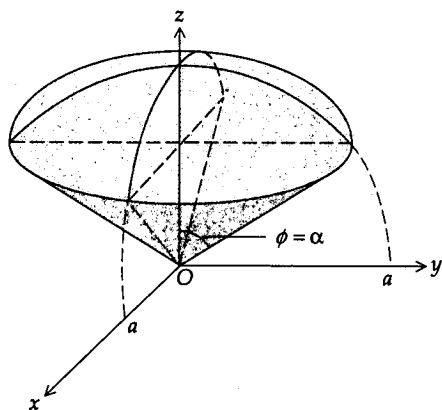


FIGURA 9

EXERCÍCIOS 18.7

Nos Exercícios de 1 a 6, calcule a integral iterada.

- $\int_0^{\pi/4} \int_0^a \int_0^{r \cos \theta} r \sec^3 \theta dz dr d\theta$
- $\int_0^{\pi/4} \int_{2 \text{ sen } \theta}^{2 \cos \theta} \int_0^{r \text{ sen } \theta} r^2 \cos \theta dz dr d\theta$
- $\int_0^\pi \int_2^4 \int_0^1 r e^z dz dr d\theta$
- $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^2 \rho^3 \text{ sen } \phi d\rho d\phi d\theta$

$$5. \int_0^{\pi/4} \int_0^{2a \cos \phi} \int_0^{2\pi} \rho^2 \text{ sen } \phi d\theta d\rho d\phi$$

$$6. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{\pi/4}^\phi \int_0^{a \text{ cosec } \theta} \rho^3 \text{ sen}^2 \theta \text{ sen } \phi d\rho d\theta d\phi$$

- Ache o volume do sólido encerrado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ usando (a) coordenadas cilíndricas e (b) coordenadas esféricas.

8. Se S for o sólido no primeiro octante, limitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e pelos planos coordenados, calcule a integral tripla $\iiint_S xyz \, dV$ por três métodos: (a) usando coordenadas esféricas; (b) usando coordenadas retangulares; (c) usando coordenadas cilíndricas.

Nos Exercícios de 9 a 16, use coordenadas cilíndricas.

9. Ache o volume do sólido no primeiro octante, limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelo plano $z = x$.
10. Ache o volume do sólido limitado pelo parabolóide $x^2 + y^2 + z = 1$ e pelo plano xy .
11. Ache o volume do sólido limitado pelo parabolóide $x^2 + y^2 + z = 12$ e pelo plano $z = 8$.
12. Ache o volume do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2y$, pelo parabolóide $x^2 + y^2 = 2z$ e pelo plano xy .
13. Ache a massa do sólido limitado por uma esfera de raio a m, se a densidade de massa por unidade de volume varia com o quadrado da distância ao centro. A densidade é medida em quilogramas por metro cúbico.
14. Ache a massa do sólido no primeiro octante interno ao cilindro $x^2 + y^2 = 4x$ e sob a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. A densidade de massa por unidade de volume varia com a distância do plano xy , sendo medida em quilogramas por metro cúbico.
15. Ache o momento de inércia em relação ao eixo z do sólido homogêneo limitado pelo cilindro $r = 5$, pelo cone $z = r$ e pelo plano xy . A densidade de massa por unidade de volume em qualquer ponto é $k \text{ g-cm}^3$.
16. Ache o momento de inércia do sólido limitado por um cilindro circular reto de h m de altura e a m de raio em relação ao eixo do cilindro. A densidade de massa por unidade de volume varia com a distância ao eixo do cilindro, sendo medida em quilogramas por metro cúbico.
17. Ache a massa do sólido no Exercício 13, usando coordenadas esféricas.
18. Use coordenadas esféricas para encontrar o centro de massa do sólido limitado pelo hemisfério do Exemplo 5. A densidade de massa por unidade de volume é igual à do Exemplo 5.

Nos Exercícios de 19 a 22, use coordenadas esféricas.

19. Ache o volume do sólido interno à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ e acima do cone $x^2 + y^2 = z^2$.

20. Ache o volume do sólido interno à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ e acima do parabolóide $x^2 + y^2 = z$.
21. Ache o momento de inércia em relação ao eixo z do sólido homogêneo interno ao cilindro $x^2 + y^2 - 2x = 0$, abaixo do cone $x^2 + y^2 = z^2$ e acima do plano xy . A densidade de massa por unidade de volume em qualquer ponto é $k \text{ kg-m}^3$.
22. Ache o momento de inércia em relação ao eixo z do sólido homogêneo limitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. A densidade de massa por unidade de volume em qualquer ponto é $k \text{ g-cm}^3$.

Nos Exercícios de 23 a 28, use o sistema de coordenadas que você julgar melhor para o problema.

23. Ache a massa de um hemisfério sólido de raio 2 m, se a densidade de massa por unidade de volume varia com a distância ao centro da base, sendo medida em quilogramas por metro cúbico.
24. Ache a massa do sólido homogêneo interior ao parabolóide $3x^2 + 3y^2 = z$ e exterior ao cone $x^2 + y^2 = z^2$, se a densidade de massa por unidade de volume constante for $k \text{ kg-m}^3$.
25. Ache o momento de inércia em torno de um diâmetro do sólido entre duas esferas concêntricas, tendo raios a e $2a$ cm. A densidade de massa por unidade de volume varia com o inverso do quadrado da distância ao centro, sendo medida em gramas por centímetro cúbico.
26. Ache a massa do sólido do Exercício 25. A densidade de massa por unidade de volume é a mesma que a do Exercício 25.
27. Ache o centro de massa do sólido interior ao parabolóide $x^2 + y^2 = z$ e exterior ao cone $x^2 + y^2 = z^2$. A densidade de massa por unidade de volume constante é $k \text{ kg-m}^3$.
28. Ache o momento de inércia em relação ao eixo z do sólido homogêneo do Exercício 27.

Nos Exercícios de 29 a 32, calcule a integral iterada, usando coordenadas esféricas ou cilíndricas.

29. $\int_0^4 \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} \, dy \, dx \, dz$
30. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dz \, dy \, dx$
31. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 \, dz \, dx \, dy$
32. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \, dz \, dx \, dy$

18.8 MUDANÇA DE VARIÁVEIS EM INTEGRAIS MÚLTIPLAS

Nesse parágrafo faremos um estudo geral do cálculo de integrais múltiplas através de mudanças de variáveis, generalizando o que já foi visto de mudanças para coordenadas polares, esféricas e cilíndricas.

Trataremos do seguinte problema: dada uma integral dupla $\iint_R f(x, y) \, dx \, dy$ ou uma integral tripla $\iiint_R f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$ encontre uma transformação do plano no plano do tipo $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ ou no espaço $u = u(x, y, z)$,

$v = v(x, y, z)$ e $w = w(x, y, z)$ que nos permita, trocando as variáveis iniciais pelas novas, calcular efetivamente as integrais dadas.

A demonstração rigorosa de todos os fatos envolvidos é mais avançada do que pretendemos nessa obra. Faremos a seguir uma descrição pormenorizada dos procedimentos usados, justificando, principalmente de forma geométrica, as fórmulas obtidas.

Observamos que ao mudarmos as variáveis ou seja, por exemplo, ao passarmos do plano descrito por coordenadas x e y ao plano descrito por coordenadas u e v , estaremos eventualmente modificando a forma da região R . Assim as coordenadas polares $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ transformam um retângulo R no plano das coordenadas r e θ ,

$$R = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

no círculo de raio 1 centrado na origem no plano xy .

Logo, numa mudança de variáveis a região de integração deverá também ser trocada de forma conveniente. Será necessário que a transformação leve de forma bijetiva uma região na outra.

18.8.1 DEFINIÇÃO

Dada a transformação $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ onde u e v bem como suas derivadas parciais são funções contínuas de x e y , a expressão

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = J\left(\frac{u, v}{x, y}\right)$$

chamaremos de Jacobiano de u e v em relação a x e y .

EXEMPLO 1 Calcular o Jacobiano da transformação

$$\begin{aligned} u &= \cos x + \sin y \\ v &= -\sin x + \cos y \end{aligned}$$

Solução

$$J\left(\frac{u, v}{x, y}\right) = \begin{vmatrix} -\sin x & \cos y \\ -\cos x & -\sin y \end{vmatrix} = \cos(x - y)$$

EXEMPLO 2 Sendo $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, calcule $J\left(\frac{x, y}{r, \theta}\right)$.

Solução

$$J\left(\frac{x, y}{r, \theta}\right) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r$$

Pode-se definir de forma análoga o Jacobiano de transformações no espaço.

18.8.2 DEFINIÇÃO

Dada a transformação $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ e $w = w(x, y, z)$ onde u , v e w , bem como suas derivadas parciais, são funções contínuas de x , y e z , define-se o Jacobiano de u , v e w em relação a x , y e z como sendo

$$J\left(\begin{array}{l} u, v, w \\ x, y, z \end{array}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

EXEMPLO 3 Dado que

$$\begin{aligned} x &= \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y &= \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z &= \rho \cos \phi \end{aligned}$$

queremos determinar $J\left(\begin{array}{l} x, y, z \\ \rho, \theta, \phi \end{array}\right)$.

Solução

$$J\left(\begin{array}{l} x, y, z \\ \rho, \theta, \phi \end{array}\right) = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \phi \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \operatorname{sen} \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \operatorname{sen} \phi \end{vmatrix} = -\rho^2 \operatorname{sen} \phi$$

EXEMPLO 4 Dado que

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \operatorname{sen} \theta \\ z &= z \end{aligned}$$

queremos determinar o Jacobiano de x , y e z em relação a r , θ e z .

Solução

$$J\left(\begin{array}{l} x, y, z \\ r, \theta, z \end{array}\right) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

O Jacobiano tem uma aplicação muito importante no problema de mudança de variáveis em integrais múltiplas. Vimos em 18.4 que o elemento de área em coordenadas polares é $dA = r dr d\theta$ e em 18.7 que em coordenadas cilíndricas o elemento de volume é $dV = r dr d\theta dz$, enquanto que $dV = \rho^2 \operatorname{sen} \phi d\rho d\theta d\phi$ é o elemento de volume em coordenadas esféricas.

Por outro lado, no Exemplo 2 vimos que $J\left(\begin{array}{l} x, y \\ r, \theta \end{array}\right) = r$, no Exemplo 4 vimos que $J\left(\begin{array}{l} x, y, z \\ r, \theta, z \end{array}\right) = r$, enquanto que no Exemplo 3 vimos que $J\left(\begin{array}{l} x, y, z \\ \rho, \theta, \phi \end{array}\right) = -\rho^2 \operatorname{sen} \phi$.

Temos então que

$$dA = J\left(\frac{x, y}{r, \theta}\right) dr d\theta, \quad dV = J\left(\frac{x, y, z}{r, \theta, z}\right) dr d\theta dz, \text{ enquanto que}$$

$$dV = \left| J\left(\frac{x, y, z}{\rho, \theta, \phi}\right) \right| d\rho d\theta d\phi.$$

Em geral vale o seguinte teorema.

18.8.3 TEOREMA

Dada a transformação $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ no plano, tal que $J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \neq 0$, então

$$dA = \left| J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \right| du dv$$

Se tivermos a transformação $x = x(u, v, w)$; $y = y(u, v, w)$ e $z = z(u, v, w)$ no espaço, tal que $J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) \neq 0$, então

$$dV = \left| J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) \right| du dv dw$$

Prova O teorema generaliza o procedimento de substituição de variável na integração para os casos de integrais duplas e triplas. Recapitulando 9.4 e 9.7, se tivermos a integral definida

$$\int_a^b f(x) dx$$

uma substituição da variável do tipo $x = g(t)$ nos leva a

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(g(t)) g'(t) dt,$$

pois $dx = g'(t) dt$. O objetivo dessa substituição é tornar a integral facilmente calculável por antiderivação.

Vamos desenvolver um raciocínio geométrico a fim de justificar, intuitivamente, que o Jacobiano é um bom “índice corretor do elemento de área”, ou seja, que valem as fórmulas

$$dx dy = \left| J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \right| du dv$$

ou

$$DA = \left| J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \right| dA'$$

Consideremos o caso em que está dada a transformação

$$x = x(u, v) \text{ e } y = y(u, v)$$

que leva o retângulo R' do plano uv na figura R do plano xy . Veja as Figuras 1 e 2.

As retas $u = u_0$ e $v = v_0$ do plano uv são levadas respectivamente nas curvas u_0 -constante e v_0 -constante do plano xy . Em outras palavras, essas curvas são os conjuntos de pontos $(x(u_0, v), y(u_0, v))$, $v_0 \leq v \leq v_0 + \Delta v$ e $(x(u, v_0), y(u, v_0))$, $u_0 \leq u \leq u_0 + \Delta u$, respectivamente u_0 -constante e v_0 -constante.

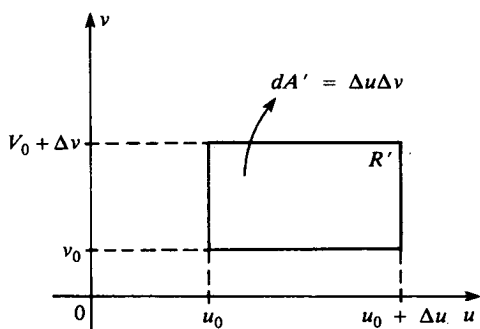


FIGURA 1

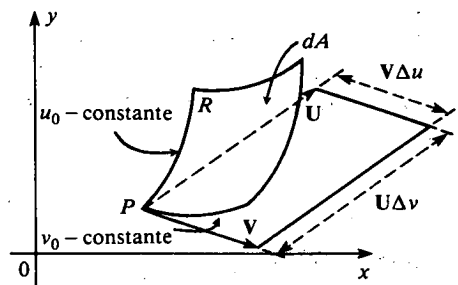


FIGURA 2

No ponto P de coordenadas $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))$ consideremos os vetores \mathbf{U} e \mathbf{V} tangentes às curvas u_0 -constante e v_0 -constante. Vamos supor \mathbf{U} e \mathbf{V} unitários, isto é,

$$|\mathbf{U}| = |\mathbf{V}| = 1$$

A área dA de R será aproximada pelo paralelogramo cujos lados têm as direções de \mathbf{U} e de \mathbf{V} e com comprimentos $\|\mathbf{V} \cdot \Delta u\|$ e $\|\mathbf{U} \cdot \Delta v\|$. Se pensarmos \mathbf{U} e \mathbf{V} como velocidades e Δu e Δv como intervalos de tempo, então $|\mathbf{U} \cdot \Delta u|$ e $|\mathbf{V} \cdot \Delta v|$ correspondem às distâncias percorridas em Δu e Δv . No limite, quando Δu e Δv tendem a zero, o elemento de área dA tende a coincidir com o referido paralelogramo. Mas (veja a Seção 15.5 e a interpretação geométrica após a Seção 15.5.8), a área do paralelogramo pode ser calculada pelo produto vetorial. Assim,

$$dA = \|\mathbf{V} \Delta u \cdot \mathbf{U} \Delta v\| = \|\mathbf{V} \cdot \mathbf{U}\| \Delta u \Delta v$$

Mas

$$\mathbf{V} = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} \quad \text{e} \quad \mathbf{U} = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j}$$

ou pensados como vetores no espaço

$$\mathbf{V} = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + 0\mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{U} = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

e, portanto

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{U} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} = J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \mathbf{k}$$

E, como $\|\mathbf{k}\| = 1$,

$$dA = \left| J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \right| \Delta u \Delta v$$

ou no limite

$$dA = \left| J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \right| du dv$$

Consideremos agora

$$\iint_R f(x, y) dA$$

onde $dA = dx dy$ e seja dada a transformação $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$. Temos então que

$$dA = \left| J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \right| du dv$$

e assim

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R'} f[x(u, v), y(u, v)] \left| J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \right| du dv.$$

Da mesma forma, se tivermos

$$\iiint_R f(x, y, z) \, dv,$$

onde $dV = dx \, dy \, dz$ e dada a transformação $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$ e $z = z(u, v, w)$, então

$$dV = \left| J \left(\begin{matrix} x, y, z \\ u, v, w \end{matrix} \right) \right| du \, dv \, dw$$

e assim

$$\iiint_R f(x, y, z) \, dV = \iiint_{R'} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] \left| J \left(\begin{matrix} x, y, z \\ u, v, w \end{matrix} \right) \right| du \, dv \, dw$$

Observamos que nas integrais à esquerda a região R será descrita em termos das variáveis x, y, z , enquanto que à direita a região R' descrita em função de u, v e w deve ser tal que R' é levada bijectivamente sobre R pela transformação $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$. ■

Antes de passarmos aos exemplos, salientamos que mudanças de variável nas integrais duplas e triplas são utilizadas não apenas para passar de funções cujas primitivas não são imediatamente visíveis, como também para mudar de uma região R dada inicialmente, eventualmente difícil de descrever, para uma região R' , preferivelmente retangular (nas integrais duplas) ou paralelepédica (nas integrais triplas), as quais permitem calcular as integrais múltiplas como uma interação de integrais simples de uma só variável.

EXEMPLO 5 Calcule a área da região E interna à elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Solução Consideremos a transformação: $x = au$ e $y = bu$. Se substituirmos na equação da elipse teremos $u^2 + v^2 = 1$ que é a equação do círculo C com centro na origem e raio 1 no plano uv , cuja área é π . Como

$$J \left(\begin{matrix} x, y \\ u, v \end{matrix} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab$$

Logo,

$$\iint_E dx \, dy = \iint_C ab \, du \, dv = ab \iint_C du \, dv = ab \cdot \pi = \pi ab$$

EXEMPLO 6 Seja R o semicírculo de raio unitário e centro na origem.

Calcule $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$.

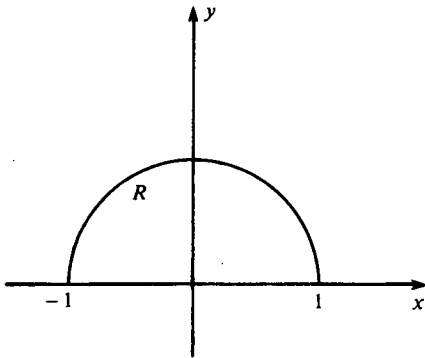


FIGURA 3

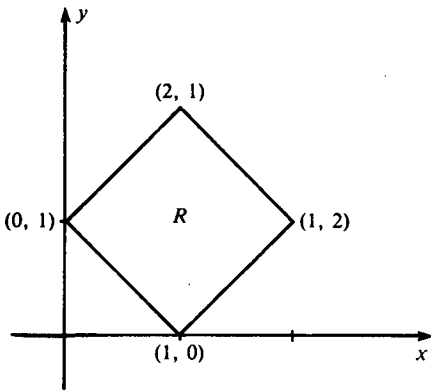


FIGURA 4

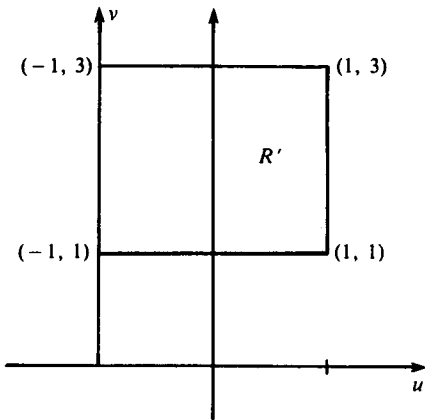


FIGURA 5

Solução Vamos fazer a transformação

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

lembrando que $J\left(\frac{x, y}{r, \theta}\right) = r$. Temos

$$\iint_R \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy = \int_0^\pi \left[\int_0^r r^2 \, dr \right] d\theta = \frac{\pi r^3}{3} = \frac{\pi}{3} [x^2 + y^2]^{3/2}$$

Observe que se fosse pedida a $\iint_R x\sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$, então

$$\iint_R x\sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy = \int_0^\pi \left[\int_0^r r^3 \cos \theta \, d\theta \right] dr = 0$$

EXEMPLO 7 Seja R o paralelogramo de vértices $(1, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ e $(0, 1)$. Mediante a transformação $u = x - y$, $v = x + y$, calcule a integral

$$\iint_R (1 - x^2 - y^2) \, dx \, dy$$

Solução Temos $x = \frac{u + v}{2}$ e $y = \frac{v - u}{2}$, segue que

$$J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = \frac{1}{2} \text{ e a região } R' \text{ aparece na Figura 5.}$$

$$\text{Então, } \iint_R (1 - x^2 - y^2) \, dx \, dy = \int_1^3 \left[\int_{-1}^1 \left(1 - \frac{u^2 + v^2}{4}\right) du \right] dv = 0$$

EXEMPLO 8 Sabendo que $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ e que $u = u(t, w)$ e $v = v(t, w)$, queremos mostrar que

$$J\left(\frac{x, y}{t, w}\right) = J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \cdot J\left(\frac{u, v}{t, w}\right)$$

Solução Estamos supondo que os Jacobianos existam e que $J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \neq 0$.

Pela regra da cadeia, temos

$$J\left(\frac{x, y}{t, w}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Mas

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{\partial x}{\partial w} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial w} + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial w}$$

e fórmulas análogas para $\frac{\partial y}{\partial t}$ e $\frac{\partial y}{\partial w}$. Segue então que

$$J\left(\begin{array}{c} x, y \\ t, w \end{array}\right) = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial w} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial w} \end{array} \right|$$

Por outro lado, dada duas matrizes quadradas A e B , então sabemos que

$$\det(A, B) = \det A \cdot \det B$$

Deste resultado segue que

$$J\left(\begin{array}{c} x, y \\ t, w \end{array}\right) = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial t} & \frac{\partial u}{\partial w} \\ \frac{\partial v}{\partial t} & \frac{\partial v}{\partial w} \end{array} \right| = J\left(\begin{array}{c} x, y \\ u, v \end{array}\right) J\left(\begin{array}{c} u, v \\ t, w \end{array}\right)$$

Além disso, se fizermos $x = t$ e $y = w$ teremos

$$J\left(\begin{array}{c} x, y \\ x, y \end{array}\right) \cdot J\left(\begin{array}{c} u, v \\ x, y \end{array}\right) = J\left(\begin{array}{c} x, y \\ x, y \end{array}\right) = 1$$

EXEMPLO 9 Seja R a região limitada pelas curvas $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 4$, $xy = 1$ e $xy = 4$, do plano xy . Calcule a integral

$$I = \iint_R (x^2 + y^2) dx dy$$

mediante a transformação $u = x^2 - y^2$ e $v = 2xy$.

Solução Temos

$$J\left(\begin{array}{c} u, v \\ x, y \end{array}\right) = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{array} \right| = 4(x^2 + y^2)$$

Como $J\left(\begin{array}{c} u, v \\ x, y \end{array}\right) \cdot J\left(\begin{array}{c} x, y \\ u, v \end{array}\right) = 1$, temos

$$J\left(\begin{array}{c} x, y \\ u, v \end{array}\right) = \frac{1}{4(x^2 + y^2)}$$

Mas

$$u^2 = (x^2 - y^2)^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 \quad \text{e} \quad v^2 = 4x^2y^2$$

logo

$$v^2 - u^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2$$

e, portanto,

$$x^2 + y^2 = [v^2 - u^2]^{\frac{1}{2}}$$

Então,

$$\begin{aligned} I &= \iint_{R'} [v^2 - u^2]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{4[v^2 - u^2]^{\frac{1}{2}}} du dv \\ &= \frac{1}{4} \int_2^8 \left[\int_1^4 du \right] dv = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

EXEMPLO 10 Dada a região $R: 0 \leq x - y + 2z \leq 1, 1 \leq x + y - 2z \leq 2$ e $0 \leq z \leq 1$, calcule

$$I = \iiint_R \frac{x - y + 2z}{x + y - 2z} dx dy dz.$$

Solução Vamos fazer a transformação

$$\begin{aligned} u &= x - y + 2z \\ v &= x + y - 2z \\ w &= z \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(u + v) \\ y &= \frac{1}{2}(v - u) + 4w \\ z &= w \end{aligned}$$

e

$$J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

Observe ainda que pela transformação dada R será levado no paralelepípedo $R': 0 \leq u \leq 1, 1 \leq v \leq 2$ e $0 \leq w \leq 1$. Então,

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{R'} \frac{u}{v} \left| J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) \right| du dv dw \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dw \int_1^2 \frac{dv}{v} \int_0^1 u du \\ &= \frac{1}{4} \ln 2 \end{aligned}$$

Observe ainda que

$$\iiint_{R'} \left| J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) \right| du dv dw = \frac{1}{2}$$

é o volume de R .

EXERCÍCIOS 18.8

1. Calcule $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ sendo R a região limitada por $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

2. Seja R a região do plano uv limitada pelos eixos u e v e pela reta $u + v = 2$. Dada a transformação $x = u + v$ e $y = u^2 - v$:

- a) Esboce a imagem R' de R pela transformação dada.
b) Calcule

$$I = \iint_{R'} \frac{dx dy}{\sqrt{1 + 4x + 4y}}$$

3. Seja R a parte da coroa circular compreendida entre $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$ no primeiro quadrante. Calcule

$$I = \iint_R (x^2 + y^2) dx dy$$

4. Calcule a integral

$$I = \iiint_R (x^2 + y^2) dx dy dz$$

onde R é dado pelas desigualdades

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

isto é, R é a parte da esfera de centro em $(0, 0, 0)$, raio 1, no primeiro octante. (Sugestão: use a transformação $x = \rho \sin \theta \cos \phi$, $y = \rho \sin \theta \sin \phi$ e $z = \rho \cos \theta$.)

5. Seja R um paralelogramo de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 1)$ e $(1, 1)$. Mediante a transformação $x = u + v$ e $y = v$, calcule a integral

$$I = \iint_R (x, y) dx dy$$

6. Calcule o volume do elipsóide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} \leq 1$, mediante a transformação $x = 2u$, $y = 3v$ e $z = 3w$. Suponha conhecido o volume da esfera.

7. Calcule

$$I = \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz$$

sabendo que $f(x, y, z) = 3$ e R é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $x \geq 0$ e mediante a transformação para coordenadas esféricas.

8. Calcule

$$I = \iiint_R x^2 dx dy dz$$

onde R é tal que $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, usando a transformação para coordenadas cilíndricas: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$.

9. Seja R a região do espaço dado por: $0 \leq x - y + z \leq 1$, $1 \leq x + y - z \leq 2$ e $0 \leq z \leq 1$. Calcule

$$I = \iiint_R \frac{e^{x-y+z}}{x+y-z} dx dy dz$$

mediante a transformação $u = x - y + z$, $v = x + y - z$ e $w = z$.

10. Calcule o volume da região R dada no Exercício 9.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 18

Nos Exercícios de 1 a 8, calcule a integral iterada dada.

$$1. \int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} x^2 y dy dx$$

$$2. \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} xy dx dy$$

$$3. \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \sin \theta} r \cos^2 \theta dr d\theta$$

$$4. \int_0^{\pi} \int_0^{3(1+\cos \theta)} r^2 \sin \theta dr d\theta$$

$$5. \int_0^1 \int_0^z \int_0^{y+z} e^x e^y e^z dx dy dz$$

$$6. \int_1^2 \int_3^x \int_0^{\sqrt{3y}} \frac{y}{y^2 + z^2} dz dy dx$$

$$7. \int_0^{\pi/2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_0^2 \rho^3 \sin \phi \cos \phi d\rho d\phi d\theta$$

$$8. \int_0^a \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} z r e^{-r^2} dr d\theta dz$$

Nos Exercícios de 9 a 12, calcule a integral múltipla.

9. $\iint_R xy dA$; R é a região no primeiro quadrante, limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$ e pelos eixos coordenados.

10. $\iint_R (x + y) dA$; R é a região limitada pela curva $y = \cos x$ e pelo eixo x de $x = -\frac{1}{2}\pi$ a $x = \frac{1}{2}\pi$

11. $\iiint_S z^2 dV$; S é a região limitada pelos cilindros $x^2 + z = 1$ e $y^2 + z = 1$ e pelo plano xy .

12. $\iiint_S y \cos(x + z) dV$; S é a região limitada pelo cilindro $x = y^2$ e pelos planos $x + z = \frac{1}{2}\pi$, $y = 0$ e $z = 0$.

13. Calcule, por coordenadas polares, a integral dupla

$$\iint_R \frac{1}{x^2 + y^2} dA$$

onde R é a região no primeiro quadrante, limitada pelas duas circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

14. Calcule por coordenadas polares a integral iterada

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{3y}}^{\sqrt{4-y^2}} \ln(x^2 + y^2) dx dy.$$

Nos Exercícios 15 e 16, calcule a integral iterada, invertendo a ordem de integração.

$$15. \int_0^1 \int_x^1 \sin y^2 dy dx$$

$$16. \int_0^1 \int_0^{\cos^{-1}y} e^{\sin x} dx dy$$

Nos Exercícios 17 e 18, use integral dupla para encontrar a área da região limitada pelas curvas dadas no plano xy . Faça um esboço da região.

17. $y = x^2$ e $y = x^4$

18. $y = \sqrt{x}$ e $y = x^3$

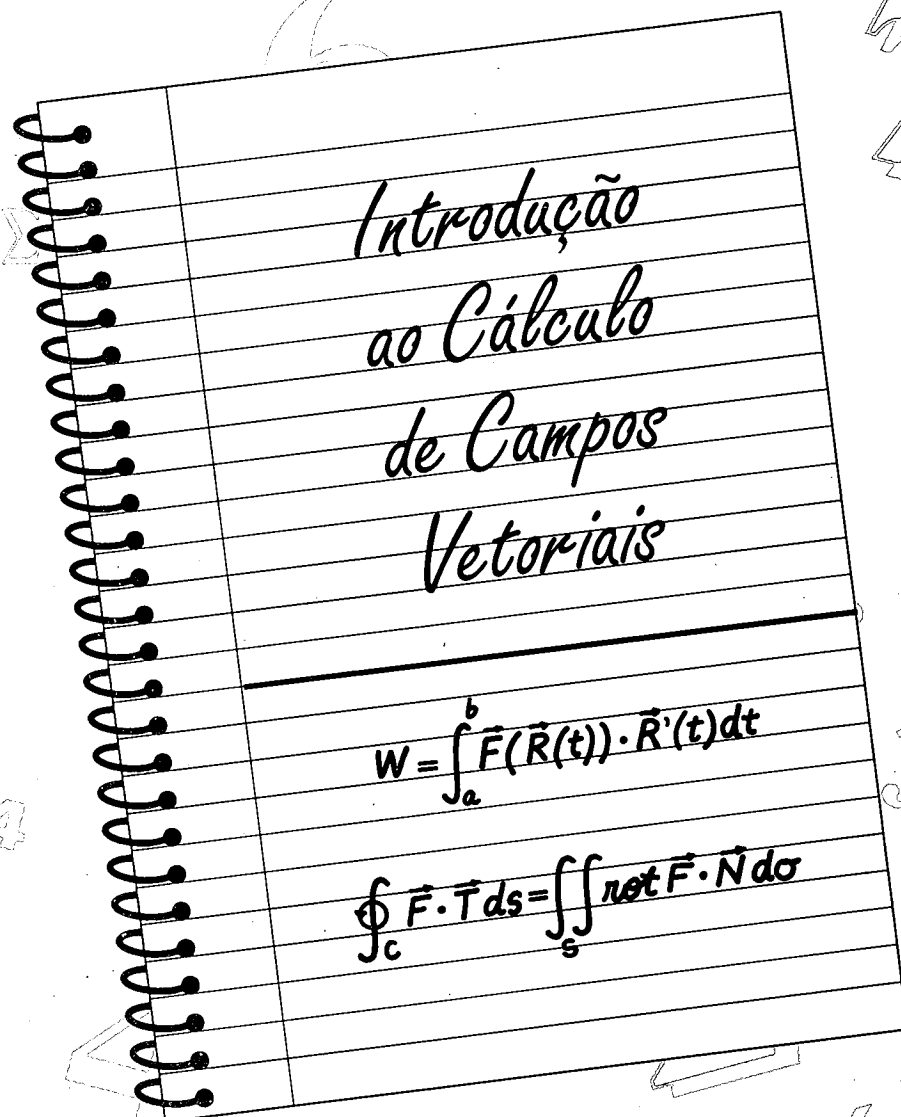
Nos Exercícios 19 e 20, calcule a integral iterada, mudando para coordenadas esféricas ou cilíndricas.

19. $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} dz dy dx$

20. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z \sqrt{4-x^2-y^2} dz dy dx$

21. Use integração dupla para encontrar a área da região no primeiro quadrante, limitada pelas parábolas $x^2 = 4y$ e $x^2 = 8 - 4y$. Integre primeiro em relação a x .
22. Use integração dupla para encontrar a área da região no plano xy , limitada pelas parábolas $y = 9 - x^2$ e $y = x^2 + 1$. Integre primeiro em relação a x .
23. Use integração dupla para encontrar a área da região no Exercício 21, integrando primeiro em relação a y .
24. Use integração dupla para encontrar a área da região no Exercício 22, integrando primeiro em relação a y .
25. Use integração dupla para encontrar o volume do sólido limitado pelos planos $x = y$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$ e $z = 1$. Integre primeiro em relação a x .
26. Use integração dupla para encontrar o volume do sólido acima do plano xy , limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 16$ e pelo plano $z = 2y$. Integre primeiro em relação a x .
27. Use integração dupla para encontrar o volume do sólido no Exercício 25, integrando primeiro em relação a y .
28. Use integração dupla para encontrar o volume do sólido no Exercício 26, integrando primeiro com relação a y .
29. Ache o volume do sólido acima do plano xy , limitado pelas superfícies $x^2 = 4y$, $y^2 = 4x$ e $x^2 = z - y$.
30. Ache a massa da lâmina na forma da região limitada pela parábola $y = x^2$ e pela reta $x - y + 2 = 0$, se a densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto for $x^2 y^2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.
31. Ache a área da superfície do cilindro $x^2 + y^2 = 9$ no primeiro octante e entre os planos $x = z$ e $3x = z$.
32. Ache a área da superfície do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ que está dentro do cilindro $y^2 + z^2 = a^2$.
33. Use integração dupla para encontrar a área da região interior à circunferência $r = 1$ e à direita da parábola $r(1 + \cos \theta) = 1$.
34. Ache a massa da lâmina na forma da região exterior à limaçon $r = 3 - \cos \theta$ e exterior à circunferência $r = 5 \cos \theta$, se a densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto for $2|\sin \theta| \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.
35. Ache o centro de massa da lâmina retangular limitada pelas retas $x = 3$ e $y = 2$ e pelos eixos coordenados, se a densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto for $xy^2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.
36. Ache o centro de massa da lâmina na forma da região limitada pelas parábolas $x^2 = 4 + 4y$ e $x^2 = 4 - 8y$, se a densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto for $kx^2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.
37. Ache a massa da lâmina na forma da região limitada pelo eixo polar e pela curva $r = \cos 2\theta$, onde $0 \leq \theta \leq \frac{1}{4}\pi$. A densidade em qualquer ponto é $r\theta \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.
38. Ache o momento de inércia em torno do eixo x da lâmina na forma da região limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = a^2$, se a densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto for $k\sqrt{x^2 + y^2} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.
39. Use coordenadas cilíndricas para encontrar o volume do sólido limitado pelo parabolóide $x^2 + y^2 = 4z$, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4ay$ e pelo plano $z = 0$.
40. Use coordenadas esféricas para encontrar a massa de uma esfera sólida de $a \text{ m}$ de raio, se a densidade de massa por unidade de volume em cada ponto for proporcional à distância do ponto ao centro da esfera. A densidade é medida em quilogramas por metro cúbico.
41. Use integração tripla para encontrar o volume do sólido limitado pelo plano $z = 1$ e pelo menor segmento da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ delimitado por esse plano.
42. Use integração tripla para encontrar o volume do sólido no primeiro octante limitado pelo plano $y + z = 8$, pelo cilindro $y = 2x^2$ e pelos planos xy e yz .
43. Ache o momento de inércia em torno do eixo x , da lâmina na forma da região limitada pela curva $y = e^x$, pela reta $x = 2$ e pelos eixos coordenados, se a densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto for $xy \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.
44. Ache o momento de inércia da lâmina do Exercício 43 em torno do eixo y .
45. Ache o momento de inércia em relação ao eixo $\frac{1}{2}\pi$ da lâmina homogênea na forma da região limitada pela curva $r^2 = 4 \cos 2\theta$, se a densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto for $k \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.
46. Ache a massa da lâmina do Exercício 45.
47. Ache o momento polar de inércia e o raio de giração correspondente para a lâmina do Exercício 45.
48. Ache o momento de inércia em torno do eixo y , da lâmina na forma da região limitada pela parábola $y = x - x^2$ e pela reta $x + y = 0$, se a densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto for $(x + y) \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.
49. Ache a massa do sólido limitado pelas esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, se a densidade de massa por unidade de volume em qualquer ponto for $k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ kg}\cdot\text{m}^3$.
50. Ache o momento de inércia em torno do eixo z do sólido do Exercício 49.
51. O sólido homogêneo limitado pelo cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ entre os planos $z = 0$ e $z = 4$ tem uma densidade de massa por unidade de volume de $k \text{ kg}\cdot\text{m}^3$ em qualquer ponto. Ache o momento de inércia do sólido em torno do eixo z .
52. Ache o centro de massa do sólido limitado pela esfera $x^2 + y^2 = z^2 - 6z = 0$ e pelo cone $x^2 + y^2 + z^2$ e acima do cone, se a densidade de massa por unidade de volume for $kz \text{ kg}\cdot\text{m}^3$ em qualquer ponto.

DEZENOVE



O tratamento do material neste capítulo é uma breve apresentação de tópicos desenvolvidos integralmente em Cálculo Avançado. Na Seção 19.1 discutiremos *campos vetoriais*, que são funções que associam vetores a pontos no espaço, e a *divergência* e o *rotacional* de um campo vetorial são introduzidos. As *integrais de linha* são definidas na Seção 19.2 e são aplicadas para determinarmos o trabalho realizado por um campo vetorial, ao mover uma partícula ao longo de uma curva. A seguir, integrais de linha independentes do caminho serão apresentadas na Seção 19.3, onde um teorema análogo do segundo teorema fundamental do Cálculo é introduzido para integrais de linha. Também na Seção 19.3, provamos a *lei de conservação da energia*, um conceito fundamental em Física.

Três teoremas importantes em Cálculo Vetorial têm os nomes dos seguintes matemáticos e cientistas: George Green, Karl Gauss e George Stokes. O *teorema de Green* sobre integrais de linha em curvas constitui o assunto a ser abordado na Secção 19.4. A Secção 19.5, sobre *integrais de superfícies*, é seguida da secção final, que apresenta o *teorema da divergência de Gauss* e o *teorema de Stokes*. Aplicações desses teoremas em Física, Química e Engenharia pertencem a cursos nesses campos. Incluímos aqui aplicações de integrais de superfícies para encontrar a massa de uma superfície e o fluxo de um campo de velocidade através de uma superfície.

19.1 CAMPOS VETORIAIS

Um *campo vetorial* associa um vetor a um ponto no espaço. Por exemplo, se \mathbf{F} for uma função com valores vetoriais definida numa bola aberta B em \mathbb{R}^3 tal que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k} \quad (1)$$

então \mathbf{F} associa a cada ponto (x, y, z) em B um vetor, sendo \mathbf{F} chamada de **campo vetorial**. Esse campo vetorial tem como seu domínio um subconjunto de \mathbb{R}^3 e como sua imagem um subconjunto de V_3 . Se o domínio de um campo vetorial for um conjunto de pontos num plano e sua imagem for um conjunto de vetores em V_2 , então o campo vetorial terá uma equação da forma

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

Se, em vez de um vetor, um escalar estiver associado a cada ponto no espaço, teremos um **campo escalar**; assim, um campo escalar é uma função com valores reais. Um exemplo de campo escalar é obtido ao expressarmos a temperatura em um ponto como função das coordenadas do ponto.

Para um exemplo de campo vetorial, consideremos o fluxo de um fluido, tal como a água que escoar em um cano ou o sangue que flui por uma artéria. Suponha que o fluido consista em um número infinito de partículas e que a velocidade de uma partícula dependa somente de sua posição; assim sendo, a velocidade é independente do tempo e, por isso, o fluxo do fluido é chamado de *estacionário*. Em um ponto (x, y, z) , a velocidade do fluido é dada por $\mathbf{F}(x, y, z)$, definida por uma equação do tipo (1). Assim, \mathbf{F} é um campo vetorial chamado de **campo de velocidade** do fluido. Os campos de velocidades podem descrever outros movimentos, tais como os dos ventos ou a rotação de uma roda. Os campos vetoriais que aparecem neste livro serão todos independentes do tempo; eles são chamados de **campos vetoriais estacionários**.

Não podemos mostrar em uma figura as representações de todos os vetores de um dado campo vetorial. Mas, traçando as representações de alguns dos vetores, podemos obter uma descrição visual do campo vetorial, conforme indicado no exemplo a seguir.

EXEMPLO 1 (a) Mostre numa figura as representações, tendo ponto inicial em (x, y) , dos vetores do campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

onde x é ± 1 ou ± 2 e y é ± 1 ou ± 2 . (b) Prove que cada representação é tangente a uma circunferência tendo seu centro na origem e um comprimento igual ao raio da circunferência.

Tabela 1

(x, y)	$F(x, y)$
(1, 1)	$-i + j$
(1, -1)	$i + j$
(-1, 1)	$-i - j$
(-1, -1)	$i - j$
(1, 2)	$-2i + j$
(1, -2)	$2i + j$
(-1, 2)	$-2i - j$
(-1, -2)	$2i - j$
(2, 1)	$-i + 2j$
(2, -1)	$i + 2j$
(-2, 1)	$-i - 2j$
(-2, -1)	$i - 2j$
(2, 2)	$-2i + 2j$
(2, -2)	$2i + 2j$
(-2, 2)	$-2i - 2j$
(-2, -2)	$2i - 2j$

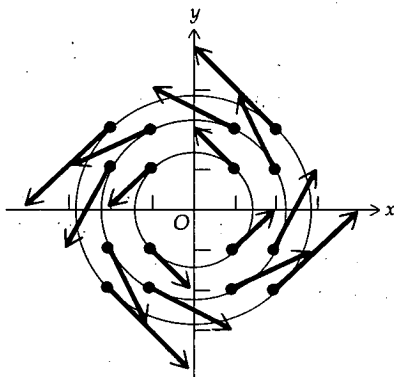


FIGURA 1

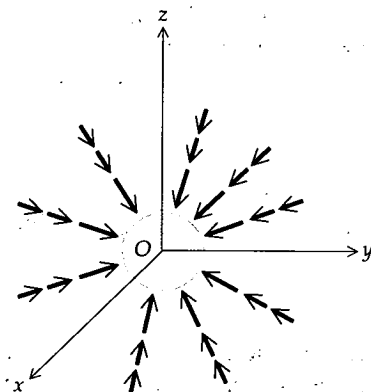


FIGURA 2

Solução

(a) A Tabela 1 indica os vetores $F(x, y)$ associados com os dezesseis pontos (x, y) . As representações destes vetores aparecem na Figura 1.

(b) Seja

$$\mathbf{R}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

o vetor de posição cujo ponto final está em (x, y) . Então,

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(x, y) \cdot \mathbf{F}(x, y) &= (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \cdot (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \\ &= -xy + xy \\ &= 0\end{aligned}$$

Portanto, \mathbf{R} e \mathbf{F} são ortogonais. Assim, a representação de \mathbf{F} cujo ponto inicial está em (x, y) é tangente à circunferência com centro na origem e raio $\|\mathbf{R}(x, y)\|$. Como

$$\begin{aligned}\|\mathbf{F}(x, y)\| &= \sqrt{(-y)^2 + x^2} \\ &= \|\mathbf{R}(x, y)\|\end{aligned}$$

o comprimento de cada representação é igual ao raio da circunferência.

O campo vetorial do Exemplo 1 é similar ao campo de velocidade determinado por uma roda girando na origem.

Um exemplo de um campo vetorial em V_3 decorre da lei do inverso dos quadrados de Newton da atração gravitacional. Essa lei estabelece que a medida da intensidade da força gravitacional entre duas partículas com massas M e m unidades, respectivamente, é

$$\frac{GMm}{d^2}$$

onde d unidades é a distância entre as partículas e G é uma constante gravitacional. Assim, se uma partícula com M unidades de massa estiver na origem e uma partícula com 1 unidade ($m = 1$) de massa estiver num ponto $P(x, y, z)$ e se $\mathbf{F}(x, y, z)$ for a força gravitacional exercida pela partícula na origem sobre a partícula em P , temos

$$\|\mathbf{F}(x, y, z)\| = \frac{GM(1)}{\|\mathbf{R}(x, y, z)\|^2}$$

onde $\mathbf{R}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Para obter o vetor $\mathbf{F}(x, y, z)$ que representa a força, precisamos também da direção e sentido de \mathbf{F} . Como a direção é radial e o sentido aponta para a origem, podemos caracterizá-los pelo vetor unitário

$-\frac{1}{\|\mathbf{R}\|} \mathbf{R}$. Como o módulo foi dado anteriormente, temos

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{GM}{\|\mathbf{R}(x, y, z)\|^2} \left(-\frac{\mathbf{R}(x, y, z)}{\|\mathbf{R}(x, y, z)\|} \right)$$

Como, $\|\mathbf{R}(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, obtemos

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-GM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \quad (2)$$

O campo vetorial definido por (2) é chamado de **campo de forças**. A Figura 2 mostra algumas representações dos vetores nesse campo de forças, onde o ob-

jeto na origem é uma esfera (a Terra, por exemplo) e $\|\mathbf{R}\|$ é maior do que o raio da esfera. Cada representação aponta para a origem. As representações de vetores próximos da origem são maiores do que aquelas em pontos longe da origem e os comprimentos são os mesmos em pontos situados a uma mesma distância da origem. Em virtude dessas propriedades, o campo de forças definido por (2) é chamado de *campo de forças central*.

O gradiente de um campo escalar é um campo vetorial. Se ϕ for um campo escalar e \mathbf{F} for o campo vetorial definido por $\mathbf{F} = \nabla\phi$, então \mathbf{F} será chamado de **campo vetorial gradiente** e ϕ será denominado **função potencial** para \mathbf{F} . Um campo vetorial gradiente também é chamado de **campo vetorial conservativo**. A expressão *conservativo* ficará clara após a leitura da Secção 19.3.

► **ILUSTRAÇÃO 1** Considere o campo vetorial definido por

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^2 + 2x + 4)\mathbf{i} + (2xy + 4y - 5)\mathbf{j}$$

Da Ilustração 1 da Secção 17.5, segue que, se

$$\phi(x, y) = y^2x + x^2 + 4x + 2y^2 - 5y$$

então

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla\phi(x, y)$$

Assim, \mathbf{F} é um campo vetorial conservativo e ϕ é uma função potencial de \mathbf{F} . ◀

A ilustração a seguir mostra que o campo de forças gravitacional definido por (2) é conservativo.

► **ILUSTRAÇÃO 2** No Exemplo 5 da Secção 17.1 mostramos que, se

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

então

$$\nabla V(x, y, z) = \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

Assim, se

$$\phi(x, y, z) = \frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\nabla\phi(x, y, z) = \frac{-GM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

Comparando essa equação e (2) observamos que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla\phi(x, y, z)$$

Portanto, \mathbf{F} é conservativo e ϕ é uma função potencial de \mathbf{F} . ◀

Nas duas ilustrações acima é simples provar que o campo vetorial é conservativo, pois conhecemos uma função ϕ da qual \mathbf{F} é o gradiente. Um problema mais difícil é decidir se um dado campo vetorial é conservativo e, se for, achar uma função potencial. Com essa finalidade aplicamos os Teoremas 17.5.1 e 17.5.4, conforme mostram os dois exemplos a seguir.

EXEMPLO 2 Se \mathbf{F} for um campo vetorial definido por

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{y} \mathbf{i} - \frac{x}{y^2} \mathbf{j}$$

prove que \mathbf{F} é conservativo e ache uma função potencial para \mathbf{F} .

Solução Seja

$$M(x, y) = \frac{1}{y} \quad N(x, y) = -\frac{x}{y^2}$$

$$M_y(x, y) = -\frac{1}{y^2} \quad N_x(x, y) = -\frac{1}{y^2}$$

Como $M_y(x, y) = N_x(x, y)$, segue do Teorema 17.5.1 que \mathbf{F} é um gradiente e, portanto, um campo vetorial conservativo. Uma função potencial ϕ satisfaz a equação

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla \phi(x, y)$$

Logo,

$$\phi_x(x, y) = \frac{1}{y} \quad \phi_y(x, y) = -\frac{x}{y^2} \quad (3)$$

Integrando em relação a x ambos os membros da primeira das fórmulas (3) temos

$$\phi(x, y) = \frac{x}{y} + g(y) \quad (4)$$

onde $g(y)$ é independente de x . Derivando parcialmente ambos os membros de (4) em relação a y , temos

$$\phi_y(x, y) = -\frac{x}{y^2} + g'(y)$$

Igualando os segundos membros dessa igualdade e a segunda das fórmulas (3), obtemos

$$-\frac{x}{y^2} + g'(y) = -\frac{x}{y^2}$$

$$g'(y) = 0$$

$$g(y) = C$$

Com esse valor de $g(y)$ em (4) temos

$$\phi(x, y) = \frac{x}{y} + C$$

que é a função potencial pedida.

EXEMPLO 3 Se \mathbf{F} for o campo vetorial definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2 + 1)\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + (2xz + y^2)\mathbf{k}$$

prove que \mathbf{F} é conservativo e encontre uma função potencial para \mathbf{F} .

Solução Para determinar se \mathbf{P} é conservativo, aplicamos o Teorema 17.5:4 para nos certificarmos de que \mathbf{F} é um gradiente. Seja

$$\begin{aligned} M(x, y, z) &= z^2 + 1 & N(x, y, z) &= 2yz & R(x, y, z) &= 2xz + y^2 \\ M_y(x, y, z) &= 0 & N_x(x, y, z) &= 0 & R_x(x, y, z) &= 2z \\ M_z(x, y, z) &= 2z & N_z(x, y, z) &= 2y & R_y(x, y, z) &= 2y \end{aligned}$$

Logo,

$$M_y(x, y, z) = N_x(x, y, z) \quad M_z(x, y, z) = R_x(x, y, z) \quad N_z(x, y, z) = R_y(x, y, z)$$

Assim, pelo Teorema 17.5.4, \mathbf{F} é um gradiente e, portanto, um campo vetorial conservativo. Vamos encontrar agora uma função potencial ϕ tal que $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla\phi(x, y, z)$; portanto,

$$\phi_x(x, y, z) = z^2 + 1 \quad \phi_y(x, y, z) = 2yz \quad \phi_z(x, y, z) = 2xz + y^2 \quad (5)$$

Integrando em relação a x ambos os membros da primeira das relações (5) temos

$$\phi(x, y, z) = xz^2 + x + g(y, z) \quad (6)$$

Derivando parcialmente com respeito a y ambos os membros de (6) obtemos

$$\phi_y(x, y, z) = g_y(y, z)$$

Igualando os segundos membros da relação anterior e a segunda das relações (5) temos

$$g_y(y, z) = 2yz$$

Agora, integrando com respeito a y ambos os membros da igualdade acima, obtemos

$$g(y, z) = y^2z + h(z)$$

Substituindo essa igualdade em (6) obtemos

$$\phi(x, y, z) = xz^2 + x + y^2z + h(z) \quad (7)$$

Derivando parcialmente com respeito a z ambos os membros de (7) obtemos

$$\phi_z(x, y, z) = 2xz + y^2 + h'(z)$$

Igualando agora os lados direitos dessa relação e da terceira das relações (5) temos

$$2xz + y^2 + h'(z) = 2xz + y^2$$

$$h'(z) = 0$$

$$h(z) = C$$

Substituindo C para $h(z)$ em (7) obteremos a função potencial desejada ϕ , na forma

$$\phi(x, y, z) = xz^2 + x + y^2z + C$$

Existem dois campos obtidos do campo vetorial \mathbf{F} por meio de derivações parciais. Um deles é o campo vetorial denotado por $\text{rot } \mathbf{F}$ (diz-se *rotacional* de \mathbf{F}) e o outro é o campo escalar denominado *divergente* de \mathbf{F} . Antes de dar as suas definições, mostraremos como o símbolo ∇ é usado como um operador.

Recordemos que se f for uma função escalar de três variáveis x , y e z , então o gradiente de f será dado por

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k} \quad (8)$$

Denotaremos agora o operador del em três dimensões por

$$\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Assim, a operação ∇ sobre a função escalar f significa

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

o que está de acordo com (8).

19.1.1 DEFINIÇÃO

Seja \mathbf{F} um campo vetorial numa bola aberta B em R^3 , tal que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

Então, o rotacional de \mathbf{F} é definido por

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

se essas derivadas parciais existirem.

Uma regra mnemônica para calcular o rotacional de \mathbf{F} é estender a notação do produto vetorial de dois vetores ao produto vetorial do operador ∇ com o campo vetorial \mathbf{F} e escrever

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & R \end{vmatrix}$$

Recordemos que ao utilizarmos a notação de determinante para o produto vetorial, foi ressaltado que nem todos os elementos do determinante eram números reais, ao contrário do usual. No “determinante” acima, a primeira linha é formada de vetores, a segunda linha de operadores de derivação parcial, enquanto que a terceira linha é formada por funções escalares.

EXEMPLO 4 Ache o rot \mathbf{F} , se \mathbf{F} for o campo vetorial definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^{2x}\mathbf{i} + 3x^2yz\mathbf{j} + (2y^2z + x)\mathbf{k}$$

Solução

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{2x} & 3x^2yz & 2y^2z + x \end{vmatrix} \\ &= (4yz - 3x^2y)\mathbf{i} + (0 - 1)\mathbf{j} + (6xyz - 0)\mathbf{k} \\ &= (4yz - 3x^2y)\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6xyz\mathbf{k} \end{aligned}$$

19.1.2 DEFINIÇÃO

Seja \mathbf{F} um campo vetorial numa bola aberta B em R^3 , tal que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

Então o **divergente** de \mathbf{F} , denotado por $\text{div } \mathbf{F}$, será definido por

$$\text{div } \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

se essas derivadas parciais existirem.

Vamos aplicar a notação do produto escalar de dois vetores ao “produto escalar” do operador ∇ com o campo vetorial \mathbf{F} para calcular o divergente de \mathbf{F} , escrevendo

$$\begin{aligned} &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \end{aligned}$$

EXEMPLO 5 Ache o $\text{div } \mathbf{F}$, sendo \mathbf{F} o campo vetorial do Exemplo 4.

Solução

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{F}(x, y, z) &= \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (e^{2x}) + \frac{\partial}{\partial y} (3x^2yz) + \frac{\partial}{\partial z} (2y^2z + x) \\ &= 2e^{2x} + 3x^2z + 2y^2 \end{aligned}$$

A importância física do $\text{rot } \mathbf{F}$ e do $\text{div } \mathbf{F}$ no estudo do movimento dos fluidos será discutida nas Seções 19.4-19.6. Nesta seção estamos interessados em aprender como calculá-los e em provar algumas de suas propriedades. Duas dessas propriedades são dadas nos dois teoremas a seguir. Será pedido que você prove esses teoremas nos Exercícios 47 e 48.

19.1.3 TEOREMA

Suponha que \mathbf{F} seja um campo vetorial numa bola aberta B em R^3 , tal que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

Se as derivadas parciais segundas de M , N e R forem contínuas em B , então

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{F}) = 0$$

19.1.4 TEOREMA

Se f for um campo escalar numa bola aberta B em R^3 e as derivadas parciais segundas de f forem contínuas em B , então

$$\text{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}$$

A expressão no Teorema 19.1.4 estabelece que o rotacional do gradiente de f é igual ao vetor nulo. Consideremos agora o divergente do gradiente de f , isto é, $\nabla \cdot (\nabla f)$, que também pode ser escrito como $\nabla \cdot \nabla f$ ou $\nabla^2 f$.

Por definição,

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \right)$$

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

A expressão à direita dessa igualdade é chamada de **laplaciano** de f . A seguinte equação obtida ao igualarmos a zero o laplaciano é chamada de **equação de Laplace**:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Uma função escalar que satisfaça a equação de Laplace é chamada de **harmônica**. Essas funções têm importantes aplicações em Física, no estudo da transferência de calor, radiação eletromagnética, acústica e outros.

Se \mathbf{F} for um campo vetorial em algum disco aberto B em \mathbb{R}^2 , tal que $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$, então o rotacional de \mathbf{F} e o divergente de \mathbf{F} em duas dimensões serão definidos por

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad \text{div } \mathbf{F}(x, y) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$$

se essas derivadas parciais existirem. O laplaciano em duas dimensões é definido por

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

EXEMPLO 6 Se $\mathbf{F}(x, y) = 3x^2y\mathbf{i} - 2xy^3\mathbf{j}$, ache (a) $\text{rot } \mathbf{F}(x, y)$ e (b) $\text{div } \mathbf{F}(x, y)$.

Solução Como $\mathbf{F}(x, y) = 3x^2y\mathbf{i} - 2xy^3\mathbf{j}$, $M(x, y) = 3x^2y$ e $N(x, y) = -2xy^3$. Logo,

$$\begin{aligned} \text{(a) } \text{rot } \mathbf{F}(x, y) &= \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k} & \text{(b) } \text{div } \mathbf{F}(x, y) &= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \\ &= (-2y^3 - 3x^2)\mathbf{k} & &= 6xy - 6xy^2 \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 19.1

Nos Exercícios de 1 a 6, mostre numa figura as representações dos vetores do campo vetorial dado, tendo ponto inicial em (x, y) , onde x é ± 1 ou ± 2 e y é ± 1 ou ± 2 .

1. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$
2. $\mathbf{F}(x, y) = -x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
3. $\mathbf{F}(x, y) = 4y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j}$
4. $\mathbf{F}(x, y) = -3y\mathbf{i} + 4x\mathbf{j}$
5. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$
6. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

Nos Exercícios de 7 a 14, ache um campo vetorial conservativo tendo a função potencial dada.

7. $f(x, y) = 3x^2 + 2y^3$
8. $f(x, y) = 2x^4 - 5x^2y^2 + 4y^4$
9. $f(x, y) = \text{tg}^{-1} x^2y$
10. $f(x, y) = ye^x - xe^y$
11. $f(x, y, z) = 2x^3 - 3x^2y + xy^2 - 4y^3$
12. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

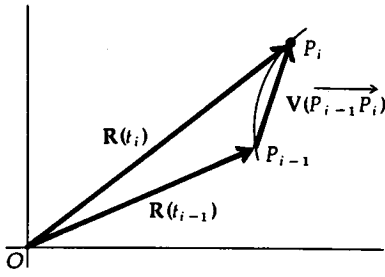


FIGURA 1

No ponto $(f(t), g(t))$ em C a força é

$$F(f(t), g(t)) = M(f(t), g(t))\mathbf{i} + N(f(t), g(t))\mathbf{j} \tag{2}$$

Seja Δ uma partição do intervalo $[a, b]$:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

Seja P_i o ponto $(x_i, y_i) = (f(t_i), g(t_i))$ em C . Consulte a Figura 1. O vetor $\mathbf{V}(P_{i-1}P_i) = \mathbf{R}(t_i) - \mathbf{R}(t_{i-1})$; logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(P_{i-1}P_i) &= f(t_i)\mathbf{i} + g(t_i)\mathbf{j} - [f(t_{i-1})\mathbf{i} + g(t_{i-1})\mathbf{j}] \\ \mathbf{V}(P_{i-1}P_i) &= [f(t_i) - f(t_{i-1})]\mathbf{i} + [g(t_i) - g(t_{i-1})]\mathbf{j} \end{aligned} \tag{3}$$

Como f' e g' são contínuas em $[a, b]$, segue do teorema do valor médio que existem números c_i e d_i no intervalo aberto (t_{i-1}, t_i) , de modo que

$$\begin{aligned} f(t_i) - f(t_{i-1}) &= f'(c_i)(t_i - t_{i-1}) \\ g(t_i) - g(t_{i-1}) &= g'(d_i)(t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

Expressando $\Delta_i t = t_i - t_{i-1}$, e substituindo as duas relações acima em (3), obtemos

$$\mathbf{V}(P_{i-1}P_i) = [f'(c_i)\mathbf{i} + g'(d_i)\mathbf{j}] \Delta_i t \tag{4}$$

Para cada i consideremos o vetor

$$\mathbf{F}_i = M(f(c_i), g(c_i))\mathbf{i} + N(f(d_i), g(d_i))\mathbf{j} \tag{5}$$

Cada um dos vetores $\mathbf{F}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ é uma aproximação do vetor $\mathbf{F}(f(t), g(t))$, dado por (2), ao longo do arco c de P_{i-1} até P_i . Observe que mesmo sendo c_i e d_i , de modo geral, números diferentes no intervalo aberto (t_{i-1}, t_i) , os valores dos vetores $\mathbf{F}(f(t), g(t))$ são próximos do vetor \mathbf{F}_i . Além disso, aproximamos o arco de C de P_{i-1} até P_i pelo segmento de reta $\overline{P_{i-1}P_i}$. Assim, aplicamos a fórmula (1) e obtemos uma aproximação para o trabalho realizado pelo vetor $\mathbf{F}(f(t), g(t))$ ao mover a partícula ao longo do arco de C , de P_{i-1} a P_i . Denotando essa aproximação por $\Delta_i W$, temos, da fórmula (1) e das relações (4) e (5),

$$\begin{aligned} \Delta_i W &= [M(f(c_i), g(c_i))\mathbf{i} + N(f(d_i), g(d_i))\mathbf{j}] \cdot [f'(c_i)\mathbf{i} + g'(d_i)\mathbf{j}] \Delta_i t \\ \Leftrightarrow \Delta_i W &= [M(f(c_i), g(c_i))f'(c_i)] \Delta_i t + [N(f(d_i), g(d_i))g'(d_i)] \Delta_i t \end{aligned}$$

Uma aproximação da medida do trabalho realizado por $\mathbf{F}(f(t), g(t))$ ao longo de C é $\sum_{i=1}^n \Delta_i W$ ou, equivalentemente,

$$\sum_{i=1}^n [M(f(c_i), g(c_i))f'(c_i)] \Delta_i t + \sum_{i=1}^n [N(f(d_i), g(d_i))g'(d_i)] \Delta_i t$$

Cada uma dessas somas é uma soma de Riemann. O primeiro somatório é uma soma de Riemann para a função com valores $M(f(t), g(t))f'(t)$, e o segundo somatório é uma soma de Riemann para a função com valores $N(f(t), g(t))g'(t)$. Se n crescer sem limitação, essas duas somas aproximam-se da integral definida:

$$\int_a^b [M(f(t), g(t))f'(t) + N(f(t), g(t))g'(t)] dt$$

Temos, portanto, a definição a seguir. Na definição, a notação $\mathbf{F}(\mathbf{R}(t))$ é usada, em vez de $\mathbf{F}(f(t), g(t))$.

19.2.1 DEFINIÇÃO

Seja C uma curva contida num disco aberto B em R^2 , com equação vetorial $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, onde f' e g' são contínuas em $[a, b]$. Além disso, consideremos um campo de forças em B definido por $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$, onde M e N são contínuas em B . Então, se W for a medida do trabalho realizado pelo campo de forças \mathbf{F} ao mover uma partícula ao longo de C de $(f(a), g(a))$ até $(f(b), g(b))$, temos

$$W = \int_a^b [M(f(t), g(t))f'(t) + N(f(t), g(t))g'(t)] dt \quad (6)$$

ou, equivalentemente, usando a notação vetorial

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \langle M(f(t), g(t)), N(f(t), g(t)) \rangle \cdot \langle f'(t), g'(t) \rangle dt \\ \Leftrightarrow W &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t) dt \end{aligned} \quad (7)$$

EXEMPLO 1 Suponha que uma partícula se move ao longo da parábola $y = x^2$ do ponto $(-1, 1)$ ao ponto $(2, 4)$. Ache o trabalho total realizado, se o movimento for causado pelo campo de forças $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j}$. Suponha que os arcos sejam medidos em metros e a força em newtons.

Solução As equações paramétricas da parábola são

$$x = t \quad \text{e} \quad y = t^2 \quad -1 \leq t \leq 2$$

Assim, uma equação vetorial da parábola é

$$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} \quad \text{e} \quad \mathbf{R}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$$

Como $\mathbf{F}(x, y) = \langle x^2 + y^2, 3x^2y \rangle$, então

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) &= \mathbf{F}(t, t^2) \\ &= \langle t^2 + t^4, 3t^4 \rangle \end{aligned}$$

Se W for o trabalho realizado, então, de (7),

$$\begin{aligned} W &= \int_{-1}^2 \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t) dt \\ &= \int_{-1}^2 \langle t^2 + t^4, 3t^4 \rangle \cdot \langle 1, 2t \rangle dt \\ &= \int_{-1}^2 (t^2 + t^4 + 6t^5) dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + t^6 \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{8}{3} + \frac{32}{5} + 64 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + 1 \right) \\ &= \frac{363}{5} \end{aligned} \quad (8)$$

Logo, o trabalho realizado é $\frac{363}{5}$ J.

As integrais nas fórmulas (6) e (7) são chamadas de *integrais de linha*. Para a integral de linha da fórmula (6), uma notação comumente usada, envolvendo a forma diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ é

$$\int_C M(x, y) dx + N(x, y) dy$$

Essa notação é sugerida pelo fato de que como as equações paramétricas de C são $x = f(t)$ e $y = g(t)$, então $dx = f'(t)dt$ e $dy = g'(t)dt$. Uma notação vetorial para a integral de linha da fórmula (7) é

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

Essa notação é sugerida ao considerarmos a equação vetorial de C que é $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, expressando $d\mathbf{R} = \mathbf{R}'(t) dt$. Então,

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot d\mathbf{R} = \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t) dt$$

Temos, assim, a definição formal a seguir.

19.2.2 DEFINIÇÃO

Seja C uma curva contida em um disco aberto B em R^2 e tendo a equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \quad a \leq t \leq b$$

tal que f' e g' sejam contínuas em $[a, b]$. Seja \mathbf{F} um campo vetorial em B definido por

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

onde M e N são contínuas em B . Então, a **integral de linha** de $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ sobre C é dada por

$$\int_C M(x, y)dx + N(x, y)dy = \int_a^b [M(f(t), g(t))f'(t) + N(f(t), g(t))g'(t)]dt$$

ou, equivalentemente, usando a notação vetorial, a **integral de linha** de \mathbf{F} sobre C é dada por

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t)dt$$

Ambas as notações na forma diferencial e na forma vetorial são usadas para integrais de linha. Conseqüentemente, usaremos as duas notações.*

► **ILUSTRAÇÃO 1** No Exemplo 1, a integral na equação (8) que define W é uma integral de linha. Com a notação vetorial, essa integral de linha pode ser denotada por

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

onde $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j}$ e $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$. Com a notação na forma diferencial essa integral de linha pode ser denotada por

$$\int_C (x^2 + y^2) dx + 3x^2y dy \quad (9)$$

Se uma equação de C for da forma $y = F(x)$, então x poderá ser usado como um parâmetro, em lugar de t . Analogamente, se uma equação de C for da forma $x = G(y)$, então y poderá ser usado como um parâmetro de t .

► **ILUSTRAÇÃO 2** No Exemplo 1 e na Ilustração 1, a equação de C é $y = x^2$, que é da forma $y = F(x)$. Logo, podemos usar x como um parâmetro, em vez

*N. do R.: Observe, todavia, que a notação $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$ pressupõe que a curva C seja orientada.

de t . Assim, na integral (9) da Ilustração 1 podemos substituir y por x^2 e dy por $2x dx$, e obteremos

$$\begin{aligned} W &= \int_{-1}^2 (x^2 + x^4) dx + 3x^2 x^2 (2x dx) \\ &= \int_{-1}^2 (x^2 + x^4 + 6x^5) dx \end{aligned}$$

Essa integral é a mesma que a terceira integral da solução do Exemplo 1, exceto que a variável é x , em vez de t . ◀

Se a curva C na definição de integral estiver no intervalo fechado $[a, b]$ sobre o eixo x , então $y = 0$ e $dy = 0$. Assim,

$$\int_C M(x, y) dx + N(x, y) dy = \int_a^b M(x, 0) dx$$

Portanto, nesse caso, a integral de linha reduz-se a uma integral definida.

Na definição de integral de linha, se C tiver a equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \quad a \leq t \leq b$$

exigimos que f' e g' sejam contínuas em $[a, b]$. Se, além dessa exigência de continuidade, $f'(t)$ e $g'(t)$ não forem ambas nulas em cada ponto do intervalo aberto (a, b) , então C será dita **suave** em $[a, b]$. Se um intervalo I puder ser dividido em um número finito de subintervalos nos quais C é suave, então C será dita **seccionalmente suave** em I .

► **ILUSTRAÇÃO 3** (a) A curva definida pela equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

é uma circunferência com centro na origem e raio 2. Veja a Figura 2. Para esta curva,

$$\begin{aligned} f(t) &= 2 \cos t & g(t) &= 2 \sin t \\ f'(t) &= -2 \sin t & g'(t) &= 2 \cos t \end{aligned}$$

Como f' e g' são contínuas para todo t e $f'(t)$ e $g'(t)$ não são ambas nulas em qualquer ponto, a circunferência é uma curva suave.

(b) A curva definida pela equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = a(t - \sin t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j} \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

é uma cicloide. Essa curva foi estudada na Seção 14.3 e um esboço de seu gráfico no intervalo $[-2\pi a, 4\pi a]$ está na Figura 3. Para a cicloide,

$$\begin{aligned} f(t) &= a(t - \sin t) & g(t) &= a(1 - \cos t) \\ f'(t) &= a(1 - \cos t) & g'(t) &= a \sin t \end{aligned}$$

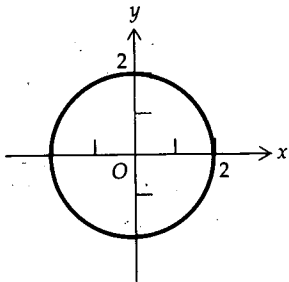


FIGURA 2

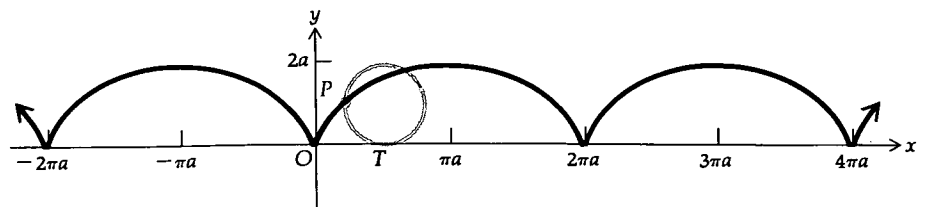


FIGURA 3

As funções f' e g' são contínuas para todo t , mas $f'(t)$ e $g'(t)$ são ambas nulas se $t = 2\pi n$, onde n é um inteiro qualquer. Logo, a cicloide não é suave. Mas, a cicloide é seccionalmente suave, pois é suave em cada subintervalo $[2\pi n, 2\pi(n+1)]$, onde n é um inteiro qualquer. ◀

As Figuras 4 e 5 mostram duas outras curvas seccionalmente suaves. Podemos estender o conceito de uma integral de linha para incluir curvas que sejam seccionalmente suaves.

19.2.3 DEFINIÇÃO

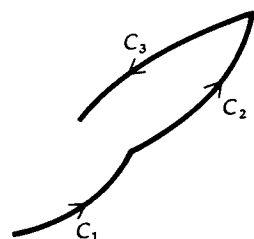


FIGURA 4

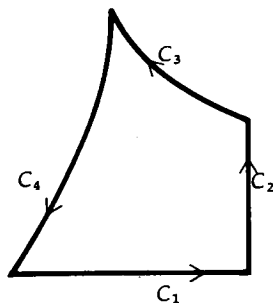


FIGURA 5

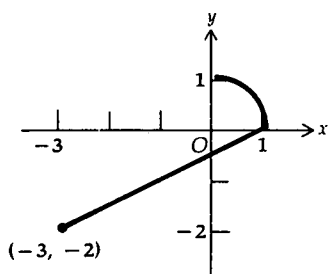


FIGURA 6

Suponha que a curva C consista em arcos suaves C_1, C_2, \dots, C_n . Então a integral de linha de $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ sobre C será definida por

$$\int_C M(x, y)dx + N(x, y)dy = \sum_{i=1}^n \left(\int_{C_i} M(x, y)dx + N(x, y)dy \right)$$

ou, equivalentemente, usando a notação vetorial, a integral de linha de \mathbf{F} sobre C será definida por

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \left(\int_{C_i} \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t)dt \right)$$

EXEMPLO 2 Calcule a integral de linha

$$\int_C 4xy \, dx + (2x^2 - 3xy) \, dy$$

se a curva C consistir no segmento de reta de $(-3, -2)$ a $(1, 0)$ e no arco do primeiro quadrante da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ de $(1, 0)$ a $(0, 1)$, percorrido na direção anti-horária.

Solução A Figura 6 mostra a curva C composta dos arcos C_1 e C_2 . O arco C_1 é o segmento de reta. Uma equação da reta que passe pelos pontos $(-3, -2)$ e $(1, 0)$ é $x - 2y = 1$. Logo, C_1 pode ser representado parametricamente por

$$x = 1 + 2t \quad y = t \quad -2 \leq t \leq 0$$

O arco C_2 , que é o arco do primeiro quadrante da circunferência $x^2 + y^2 = 1$, pode ser representado parametricamente por

$$x = \cos t \quad y = \sin t \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$$

Aplicando a Definição 19.2.2 para cada um dos arcos C_1 e C_2 , temos

$$\begin{aligned} \int_{C_1} 4xy \, dx + (2x^2 - 3xy) \, dy &= \int_{-2}^0 4(1+2t)t(2 \, dt) + [2(1+2t)^2 - 3(1+2t)t] \, dt \\ &= \int_{-2}^0 (8t + 16t^2 + 2 + 8t + 8t^2 - 3t - 6t^2) \, dt \\ &= \int_{-2}^0 (18t^2 + 13t + 2) \, dt \\ &= \left[6t^3 + \frac{13}{2}t^2 + 2t \right]_{-2}^0 \\ &= -(-48 + 26 - 4) \\ &= 26 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \int_{C_2} 4xy \, dx + (2x^2 - 3xy) \, dy \\
&= \int_0^{\pi/2} 4 \cos t \sin t (-\sin t \, dt) + [2 \cos^2 t - 3 \cos t \sin t](\cos t \, dt) \\
&= \int_0^{\pi/2} (-4 \cos t \sin^2 t + 2 \cos^3 t - 3 \cos^2 t \sin t) \, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} [-4 \cos t \sin^2 t + 2 \cos t(1 - \sin^2 t) - 3 \cos^2 t \sin t] \, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} (2 \cos t - 6 \cos t \sin^2 t - 3 \cos^2 t \sin t) \, dt \\
&= 2 \sin t - 2 \sin^3 t + \cos^3 t \Big|_0^{\pi/2} \\
&= 2 - 2 - 1 \\
&= -1
\end{aligned}$$

Logo, da Definição 19.2.3,

$$\begin{aligned}
\int_C 4xy \, dx + (2x^2 - 3xy) \, dy &= 26 + (-1) \\
&= 25
\end{aligned}$$

Vamos estender agora o conceito de integral de linha para três dimensões.

19.2.4 DEFINIÇÃOSeja C uma curva contida numa bola aberta B em R^3 tendo a equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \quad a \leq t \leq b$$

tal que f' , g' e h' sejam contínuas em $[a, b]$. Seja \mathbf{F} um campo vetorial em B , definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

onde M , N e R são contínuas em B . Então, a **integral de linha** de $M(x, y, z) \, dx + N(x, y, z) \, dy + R(x, y, z) \, dz$ sobre C será dada por

$$\begin{aligned}
& \int_C M(x, y, z) \, dx + N(x, y, z) \, dy + R(x, y, z) \, dz \\
&= \int_a^b [M(f(t), g(t), h(t))f'(t) + N(f(t), g(t), h(t))g'(t) + R(f(t), g(t), h(t))h'(t)] \, dt
\end{aligned}$$

ou, equivalentemente, usando a notação vetorial, a **integral de linha** de \mathbf{F} sobre C será dada por

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t) \, dt$$

Podemos definir o trabalho realizado por um campo de forças sobre uma partícula em movimento ao longo de uma curva em R^3 como uma integral de linha, como foi feito na Definição 19.2.1 para uma curva em R^2 . Essa definição será aplicada no exemplo a seguir.**EXEMPLO 3** Uma partícula percorre a cúbica retorcida

$$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 1$$

Ache o trabalho total realizado, se o movimento foi causado pelo campo de forças

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \mathbf{i} + xe^z \mathbf{j} + x \operatorname{sen} \pi y^2 \mathbf{k}$$

Suponha que o arco seja medido em metros e a força em newtons.

Solução

$$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \quad \mathbf{R}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

Como $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle e^x, xe^z, x \operatorname{sen} \pi y^2 \rangle$, então

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) &= \mathbf{F}(t, t^2, t^3) \\ &= \langle e^t, te^{t^3}, t \operatorname{sen} \pi t^4 \rangle \end{aligned}$$

Se W for o trabalho realizado, então, da notação vetorial para a integral de linha, na Definição 19.2.4

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} \\ &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t) dt \\ &= \int_0^1 \langle e^t, te^{t^3}, t \operatorname{sen} \pi t^4 \rangle \cdot \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle dt \\ &= \int_0^1 (e^t + 2t^2 e^{t^3} + 3t^3 \operatorname{sen} \pi t^4) dt \\ &= \left[e^t + \frac{2}{3} e^{t^3} - \frac{3}{4\pi} \cos \pi t^4 \right]_0^1 \\ &= e + \frac{2}{3} e - \frac{3}{4\pi} \cos \pi - 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{4\pi} \cos 0 \\ &= \frac{5}{3} e + \frac{3}{2\pi} - \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Logo, o trabalho realizado é $\left[\frac{5}{3}(e - 1) + \frac{3}{2\pi} \right] \text{ J}$.

EXEMPLO 4 Calcule a integral de linha

$$\int_C 3x dx + 2xy dy + z dz$$

se a curva C for a hélice circular definida pelas equações paramétricas

$$x = \cos t \quad y = \operatorname{sen} t \quad z = t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Solução Da notação com forma diferencial para uma integral de linha na Definição 19.2.4

$$\begin{aligned} &\int_C 3x dx + 2xy dy + z dz \\ &= \int_0^{2\pi} 3 \cos t (-\operatorname{sen} t dt) + 2(\cos t)(\operatorname{sen} t)(\cos t dt) + t dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-3 \operatorname{sen} t \cos t + 2 \cos^2 t \operatorname{sen} t + t) dt \\ &= \left[-\frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 t - \frac{2}{3} \cos^3 t + \frac{1}{2} t^2 \right]_0^{2\pi} \\ &= -\frac{3}{2}(0) - \frac{2}{3}(1) + \frac{1}{2}(4\pi^2) + \frac{3}{2}(0) + \frac{2}{3}(1) + \frac{1}{2}(0) \\ &= 2\pi^2 \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 19.2

Nos Exercícios de 1 a 22, calcule a integral de linha sobre a curva dada.

1. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = yi + xj$; $C: \mathbf{R}(t) = ti + t^2j, 0 \leq t \leq 1$.
2. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = 2xyi - 3xj$; $C: \mathbf{R}(t) = 3t^2i - tj, 0 \leq t \leq 1$.
3. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = 2xyi + (x - 2y)j$;
 $C: \mathbf{R}(t) = \sin ti - 2 \cos tj, 0 \leq t \leq \pi$.
4. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = xyi - y^2j$; $C: \mathbf{R}(t) = t^2i + t^3j$, do ponto (1, 1) ao ponto (4, -8).
5. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = (x - y)i + (y + x)j$; C : a circunferência $x^2 + y^2 = 4$ do ponto (2, 0) no sentido anti-horário.
6. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = (x - 2y)i + xyj$;
 $C: \mathbf{R}(t) = 3 \cos ti + 2 \sin tj, 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$.
7. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = y \sin xi - \cos xj$; C : o segmento de reta de $(\frac{1}{2}\pi, 0)$ a $(\pi, 1)$.
8. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = 9x^2yi + (5x^2 - y)j$; C : a curva $y = x^3 + 1$ de (1, 2) a (3, 28).
9. $\int_C (x^2 + xy) dx + (y^2 - xy) dy$; C : a reta $y = x$ da origem ao ponto (2, 2).
10. A integral de linha do Exercício 9; C : a parábola $x^2 = 2y$ da origem ao ponto (2, 2).
11. A integral de linha do Exercício 9; C : o eixo x da origem até (2, 0) e depois a reta $x = 2$ de (2, 0) a (2, 2).
12. $\int_C xy^2 dx + (x + y) dy$; C : a reta $y = -x$ da origem ao ponto (1, -1).
13. A integral de linha do Exercício 12; C : a curva $y = -x^3$ da origem ao ponto (1, -1).
14. A integral de linha do Exercício 12; C : o eixo y da origem a (0, -1) e a seguir, a reta $y = -1$ de (0, -1) a (1, -1).
15. $\int_C 3xy dx + (4x^2 - 3y) dy$; C : a reta $y = 2x + 3$ de (0, 3) a (3, 9) e a seguir, a parábola $y = x^2$ de (3, 9) a (5, 25).
16. $\int_C (xy - z) dx + e^x dy + y dz$; C : o segmento de reta de (1, 0, 0) a (3, 4, 8).
17. $\int_C (x + y) dx + (y + z) dy + (x + z) dz$; C : o segmento de reta da origem ao ponto (1, 2, 4).
18. A integral de linha do Exercício 16; $C: \mathbf{R}(t) = (t + 1)i + t^2j + t^3k, 0 \leq t \leq 2$.
19. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $(x, y, z) = zi + xj + yk$; C : a hélice circular $\mathbf{R}(t) = a \cos ti + a \sin tj + tk, 0 \leq t \leq 2\pi$.
20. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xyi + (6y^2 - xz)j + 10zk$; C : a cúbica retorcida $\mathbf{R}(t) = ti + t^2j + t^3k, 0 \leq t \leq 1$.
21. A integral de linha do Exercício 20; C : o segmento de reta da origem ao ponto (0, 0, 1); a seguir, o segmento de reta de (0, 0, 1) a (0, 1, 1) e depois o segmento de reta de (0, 1, 1) a (1, 1, 1).
22. A integral de linha do Exercício 20; C : o segmento de reta da origem ao ponto (1, 1, 1).

Nos Exercícios de 23 a 36, ache o trabalho total realizado pelo campo de forças dado sobre uma partícula que percorre o arco de curva C . Suponha que o arco seja medido em metros e a força em newtons.

23. $\mathbf{F}(x, y) = 2xyi + (x^2 + y^2)j$; C : o segmento de reta da origem ao ponto (1, 1).
24. O campo de forças do Exercício 23; C : o arco da parábola $y^2 = x$, da origem ao ponto (1, 1).
25. $\mathbf{F}(x, y) = (y - x)i + x^2yj$; C : o segmento de reta do ponto (1, 1) a (2, 4).
26. O campo de forças do Exercício 25; C : o arco da parábola $y = x^2$, do ponto (1, 1) a (2, 4).
27. O campo de forças do Exercício 25; C : o segmento de reta de (1, 1) a (2, 2) e, a seguir, o segmento de reta de (2, 2) a (2, 4).
28. $\mathbf{F}(x, y) = -x^2yi + 2yj$; C : o segmento de reta de (a, 0) a (0, a).
29. O campo de forças do Exercício 28; $C: \mathbf{R}(t) = a \cos ti + a \sin tj, 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$.
30. O campo de forças do Exercício 28; C : o segmento de reta de (a, 0) a (a, a) e depois o segmento de reta de (a, a) a (0, a).
31. $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z)i + (x + z)j + (x + y)k$; C : o segmento de reta da origem ao ponto (1, 1, 1).
32. $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2i + y^2j + xzk$; C : o segmento de reta da origem ao ponto (4, 0, 3).
33. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^xi + e^yj + e^zk$;
 $C: \mathbf{R}(t) = ti + t^2j + t^3k, 0 \leq t \leq 2$.
34. $\mathbf{F}(x, y, z) = (xyz + x)i + (x^2z + y)j + (x^2y + z)k$; C : o arco do Exercício 33.
35. O campo de forças do Exercício 34; C : o segmento de reta da origem ao ponto (1, 0, 0); a seguir, o segmento de reta de (1, 0, 0) a (1, 1, 0); daí o segmento de reta de (1, 1, 0) a (1, 1, 1).
36. $\mathbf{F}(x, y, z) = xi + yj + (yz - x)k$;
 $C: \mathbf{R}(t) = 2ti + t^2j + 4t^3k, 0 \leq t \leq 1$.

19.3 INTEGRAIS DE LINHA INDEPENDENTES DO CAMINHO

Aprendemos na Secção 19.2 que o valor de uma integral de linha é determinado pelo integrando e pela curva C entre dois pontos P_1 e P_2 . Mas, sob certas condições, o valor da integral de linha depende somente do integrando e dos pontos P_1

e P_2 , e não do caminho de P_1 e P_2 . Tal integral de linha é denominada **independente do caminho**.

► **ILUSTRAÇÃO 1** Suponha que o campo de forças

$$F(x, y) = (y^2 + 2x + 4)\mathbf{i} + (2xy + 4y - 5)\mathbf{j}$$

mova uma partícula da origem ao ponto $(1, 1)$. Vamos mostrar que o trabalho total realizado será o mesmo, se o caminho for ao longo (a) do segmento de reta da origem ao ponto $(1, 1)$; (b) do segmento da parábola $y = x^2$ da origem a $(1, 1)$ e (c) do segmento da curva $x = y^3$ da origem a $(1, 1)$.

Se W for a medida do trabalho realizado, então

$$W = \int_C (y^2 + 2x + 4) dx + (2xy + 4y - 5) dy \quad (1)$$

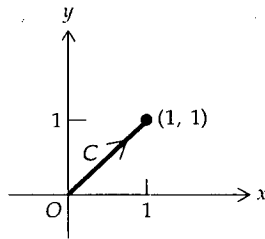


FIGURA 1

(a) Veja a Figura 1. Uma equação de C é $y = x$. Usamos x como parâmetro e expressamos $y = x$ e $dy = dx$ em (1). Então,

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 (x^2 + 2x + 4) dx + (2x^2 + 4x - 5) dx \\ &= \int_0^1 (3x^2 + 6x - 1) dx \\ &= x^3 + 3x^2 - x \Big|_0^1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

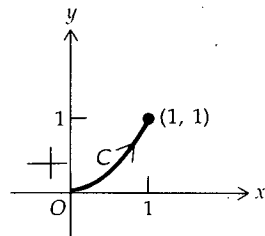


FIGURA 2

(b) Veja a Figura 2. Uma equação de C é $y = x^2$. Novamente, tomamos x como parâmetro e em (1), expressando $y = x^2$ e $dy = 2x dx$, temos

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 (x^4 + 2x + 4) dx + (2x^3 + 4x^2 - 5)2x dx \\ &= \int_0^1 (5x^4 + 8x^3 - 8x + 4) dx \\ &= x^5 + 2x^4 - 4x^2 + 4x \Big|_0^1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

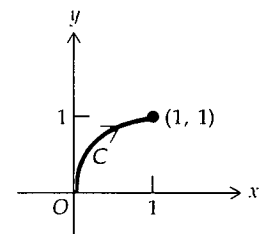


FIGURA 3

(c) Veja a figura 3. Uma equação de C é $x = y^3$. Tomamos y como parâmetro e em (1) expressamos $x = y^3$ e $dx = 3y^2 dy$. Então,

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 (y^2 + 2y^3 + 4)3y^2 dy + (2y^4 + 4y - 5) dy \\ &= \int_0^1 (6y^5 + 5y^4 + 12y^2 + 4y - 5) dy \\ &= y^6 + y^5 + 4y^3 + 2y^2 - 5y \Big|_0^1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Na Ilustração 1 vimos que o valor da integral de linha é o mesmo em três caminhos diferentes, de $(0, 0)$ a $(1, 1)$. Na verdade, o valor da integral de linha é o mesmo sobre qualquer curva seccionalmente suave da origem a $(1, 1)$; assim, essa integral de linha é independente do caminho. (Esse fato está provado na Ilustração 2.)

Vamos enunciar e demonstrar agora um teorema que, além de dar condições para que a integral de linha seja independente do caminho, também apresenta uma fórmula para encontrar o valor de tal integral de linha.

19.3.1 TEOREMA

Seja C qualquer curva seccionalmente suave, contida num disco aberto B em R^2 do ponto (x_1, y_1) ao ponto (x_2, y_2) . Se \mathbf{F} for um campo vetorial conservativo contínuo em B e ϕ for uma função potencial para \mathbf{F} , então a integral de linha

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$
 será independente do caminho C e

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \phi(x_2, y_2) - \phi(x_1, y_1)$$

Prova Daremos a demonstração para C suave. Caso C seja apenas seccionalmente suave, consideraremos as partes separadamente, aplicando a demonstração seguinte a cada parte suave.

Sejam as equações paramétricas de C

$$x = f(t) \quad y = g(t) \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

Assim, a equação vetorial de C é

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

Além disso, o ponto (x_1, y_1) é $(f(t_1), g(t_1))$ e o ponto (x_2, y_2) é $(f(t_2), g(t_2))$. Como ϕ é uma função potencial para \mathbf{F} , $\nabla\phi(x, y) = \mathbf{F}(x, y)$ onde $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \int_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{R} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \nabla\phi(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \nabla\phi(f(t), g(t)) \cdot \mathbf{R}'(t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \langle M(f(t), g(t)), N(f(t), g(t)) \rangle \cdot \langle f'(t), g'(t) \rangle dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [M(f(t), g(t))f'(t) dt + N(f(t), g(t))g'(t) dt] \end{aligned} \quad (2)$$

Observe que como $M(x, y) dx + N(x, y) dy = d\phi(x, y)$, então

$$M(f(t), g(t))f'(t) dt + N(f(t), g(t))g'(t) dt = d\phi(f(t), g(t))$$

Substituindo essa equação em (2) e aplicando então o segundo teorema fundamental do Cálculo (Teorema 5.8.2), obtemos

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \int_{t_1}^{t_2} d\phi(f(t), g(t)) \\ &= \phi(f(t), g(t)) \Big|_{t_1}^{t_2} \\ &= \phi(f(t_2), g(t_2)) - \phi(f(t_1), g(t_1)) \\ &= \phi(x_2, y_2) - \phi(x_1, y_1) \end{aligned}$$

que é o que queríamos provar. ■

Lembre-se da Secção 17.5, onde mostramos que dizer que o campo vetorial $M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ é conservativo equivale a afirmar que a forma diferencial $M(x, y) dx + N(x, y) dy$ é exata. Assim, concluímos, do Teorema 19.3.1, que a integral de linha $\int_C M(x, y)dx + N(x, y)dy$ é independente do caminho C , se o integrando for uma diferencial exata.

Devido a semelhança do Teorema 19.3.1 com o segundo teorema fundamental do Cálculo, ele é chamado, às vezes, do **teorema fundamental para as integrais de linha**.

► **ILUSTRAÇÃO 2** Vamos usar o Teorema 19.3.1 para calcular a integral de linha da Ilustração 1:

$$\int_C (y^2 + 2x + 4) dx + (2xy + 4y - 5) dy$$

Com notação vetorial essa integral de linha torna-se

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

onde

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^2 + 2x + 4)\mathbf{i} + (2xy + 4y - 5)\mathbf{j}$$

Na Ilustração 1 da Secção 19.1 mostramos que \mathbf{F} é um campo vetorial conservativo com a função potencial

$$\phi(x, y) = y^2x + x^2 + 4x + 2y^2 - 5y$$

Logo, do Teorema 19.3.1, a integral de linha é independente do caminho e C pode ser qualquer curva seccionalmente suave de $(0, 0)$ a $(1, 1)$. Além disso, do Teorema 19.3.1,

$$\begin{aligned} \int_C (y^2 + 2x + 4) dx + (2xy + 4y - 5) dy &= \phi(1, 1) - \phi(0, 0) \\ &= 3 - 0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Esse resultado está de acordo com o obtido na Ilustração 1.

Observe que o integrando dessa integral de linha é uma diferencial exata, pois

$$d\phi(x, y) = (y^2 + 2x + 4) dx + (2xy + 4y - 5) dy \quad \blacktriangleleft$$

EXEMPLO 1 Calcule a integral de linha

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

se $\mathbf{F}(x, y) = (e^{-y} - 2x)\mathbf{i} - (xe^{-y} + \sen y)\mathbf{j}$ e C for o arco no primeiro quadrante da circunferência

$$\mathbf{R}(t) = \pi \cos t\mathbf{i} + \pi \sen t\mathbf{j} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$$

Solução No Exemplo 2 da Secção 17.5 mostramos que

$$\nabla(xe^{-y} - x^2 + \cos y) = (e^{-y} - 2x)\mathbf{i} - (xe^{-y} + \sen y)\mathbf{j}$$

Logo, \mathbf{F} é um campo vetorial conservativo e aplicamos o Teorema 19.3.1 com $\phi(x, y) = xe^{-y} - x^2 + \cos y$. O ponto onde $t = 0$ é $(\pi, 0)$ e o ponto onde $t = \frac{1}{2}\pi$ é $(0, \pi)$.

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \phi(0, \pi) - \phi(\pi, 0) \\ &= \cos \pi - (\pi - \pi^2 + 1) \\ &= \pi^2 - \pi - 2\end{aligned}$$

Se o valor de uma integral de linha for independente do caminho, não será necessário encontrar uma função potencial ϕ . Vamos ilustrar este procedimento no próximo exemplo.

EXEMPLO 2 Se $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{y}\mathbf{i} - \frac{x}{y^2}\mathbf{j}$ e C for qualquer curva seccionalmente suave do ponto $(5, -1)$ ao ponto $(9, -3)$, mostre que o valor da integral de linha

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

é independente do caminho e calcule-a.

Solução Mostramos, no Exemplo 2 da Secção 19.1, que \mathbf{F} é um campo vetorial conservativo. Logo, a integral de linha é independente do caminho. Tomamos então, como caminho, o segmento de reta de $(5, -1)$ a $(9, -3)$. Uma equação da reta é $x + 2y = 3$. Expressando $y = -tx = 3 + 2t$, uma equação vetorial da reta é

$$\mathbf{R}(t) = (3 + 2t)\mathbf{i} - t\mathbf{j} \quad 1 \leq t \leq 3$$

Calculamos o valor da integral de linha aplicando a Definição 19.2.2.

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \int_C \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t) dt \\ &= \int_1^3 \mathbf{F}(3 + 2t, -t) \cdot \langle 2, -1 \rangle dt \\ &= \int_1^3 \left\langle -\frac{1}{t}, -\frac{3 + 2t}{t^2} \right\rangle \cdot \langle 2, -1 \rangle dt \\ &= \int_1^3 \left(-\frac{2}{t} + \frac{3 + 2t}{t^2} \right) dt \\ &= \int_1^3 \frac{3}{t^2} dt \\ &= -\frac{3}{t} \Big|_1^3 \\ &= 2\end{aligned}$$

► **ILUSTRAÇÃO 3** No Exemplo 2 da Secção 19.1 obtivemos a seguinte função potencial para o campo vetorial conservativo $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{y}\mathbf{i} - \frac{x}{y^2}\mathbf{j}$:

$$\phi(x, y) = \frac{x}{y} + K$$

onde K é uma constante arbitrária. Assim, se o Teorema 19.3.1 for usado para calcular a integral de linha do Exemplo 2, temos

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \phi(9, -3) - \phi(5, -1) \\ &= \left(\frac{9}{-3} + K \right) - \left(\frac{5}{-1} + K \right) \\ &= 2\end{aligned}$$

que está de acordo com o resultado anterior. ◀

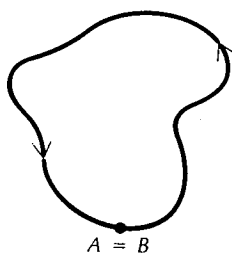


FIGURA 4

Observe, na Ilustração 3, que a constante arbitrária K não aparece, pois $K - K = 0$. Daqui para frente, quando aplicarmos o Teorema 19.3.1, omitiremos a constante arbitrária para a função potencial; o que significa escolher como função potencial aquela para a qual $K = 0$.

Se C for a curva definida pela equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \quad a \leq t \leq b$$

o ponto inicial $A(f(a), g(a))$ e o ponto $B(f(b), g(b))$ coincidem, então a curva C é dita **fechada**. A Figura 4 mostra uma curva fechada onde os pontos A e B coincidem. O seguinte teorema a respeito de integrais de linha de um campo vetorial conservativo sobre uma curva fechada seccionalmente suave decorre imediatamente do Teorema 19.3.1.

19.3.2 TEOREMA

Se C for qualquer curva fechada seccionalmente suave, contida em um disco aberto B em R^2 e se \mathbf{F} for um campo vetorial conservativo em B , então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = 0$$

Prova Aplicamos o Teorema 19.3.1, e como C é fechada, o ponto (x_1, y_1) coincide com o ponto (x_2, y_2) . Logo,

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \phi(x_2, y_2) - \phi(x_1, y_1) \\ &= 0\end{aligned}$$

EXEMPLO 3 Uma partícula movimenta-se sobre a circunferência

$$\mathbf{R}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Ache o trabalho total realizado pelo campo de forças

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(4 \ln 3y + \frac{1}{x} \right) \mathbf{i} + \frac{4x}{y} \mathbf{j}$$

Solução Seja

$$M(x, y) = 4 \ln 3y + \frac{1}{x} \quad N(x, y) = \frac{4x}{y}$$

$$M_y(x, y) = \frac{4}{y} \quad N_x(x, y) = \frac{4}{y}$$

Como $M_y(x, y) = N_x(x, y)$, \mathbf{F} é conservativo. Além disso, C é uma curva fechada. Logo, se W for a medida do trabalho realizado, temos, do Teorema 19.3.2,

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vamos estender agora nossa discussão para funções de três variáveis. O enunciado e a demonstração do teorema a seguir são análogos aos do Teorema 19.3.1. A demonstração será deixada como exercício (veja o Exercício 32).

19.3.3 TEOREMA

Seja C qualquer curva seccionalmente suave contida em uma bola aberta B em \mathbb{R}^3 , do ponto (x_1, y_1, z_1) ao ponto (x_2, y_2, z_2) . Se \mathbf{F} for um campo vetorial conservativo em B e ϕ for uma função potencial para \mathbf{F} , então a integral de linha

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

será independente do caminho C , e

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1)$$

► **ILUSTRAÇÃO 4** No Exemplo 5 da Seção 17.5 mostramos que o campo vetorial definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (e^x \sen z + 2yz)\mathbf{i} + (2xz + 2y)\mathbf{j} + (e^x \cos z + 2xy + 3z^2)\mathbf{k}$$

é um gradiente $\nabla f(x, y, z)$, e

$$f(x, y, z) = e^x \sen z + 2xyz + y^2 + z^3$$

Assim, \mathbf{F} é um campo vetorial conservativo. Logo, se C for uma curva seccionalmente suave de $(0, 0, 0)$ a $(1, -2, \pi)$, segue do Teorema 19.3.3 que a integral de linha

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

será independente do caminho e seu valor será

$$\begin{aligned} f(1, -2, \pi) - f(0, 0, 0) &= (e \sen \pi - 4\pi + 4 + \pi^3) - 0 \\ &= \pi^3 - 4\pi + 4 \end{aligned}$$

EXEMPLO 4 Mostre que a integral de linha

$$\int_C (4x + 2y - z) dx + (2x - 2y + z) dy + (-x + y + 2z) dz$$

é independente do caminho e calcule a integral, se C for qualquer curva seccionalmente suave, de $(4, -2, 1)$ a $(-1, 2, 0)$.

Solução A integral de linha é independente do caminho se o integrando for uma diferencial exata. Seja

$$\begin{array}{lll} M(x, y, z) = 4x + 2y - z & N(x, y, z) = 2x - 2y + z & R(x, y, z) = -x + y + 2z \\ M_y(x, y, z) = 2 & N_x(x, y, z) = 2 & R_x(x, y, z) = -1 \\ M_z(x, y, z) = -1 & N_z(x, y, z) = 1 & R_y(x, y, z) = 1 \end{array}$$

Como

$$M_y(x, y, z) = N_x(x, y, z) \quad M_z(x, y, z) = R_x(x, y, z) \quad N_z(x, y, z) = R_y(x, y, z)$$

o integrando é uma diferencial exata e a integral de linha é independente do caminho. Tomamos como caminho o segmento de reta de $(4, -2, 1)$ a $(-1, 2, 0)$. Um conjunto de números direcionais dessa reta é $[5, -4, 1]$. Logo, as equações da reta são

$$\frac{x+1}{5} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z}{1}$$

As equações paramétricas do segmento de reta são

$$x = -5t - 1 \quad y = 4t + 2 \quad z = -t \quad -1 \leq t \leq 0$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \int_C (4x + 2y - z) dx + (2x - 2y + z) dy + (-x + y + 2z) dz \\ &= \int_{-1}^0 [4(-5t - 1) + 2(4t + 2) - (-t)](-5 dt) \\ & \quad + \int_{-1}^0 [2(-5t - 1) - 2(4t + 2) + (-t)](4 dt) \\ & \quad + \int_{-1}^0 [-(-5t - 1) + (4t + 2) + 2(-t)](-dt) \\ &= \int_{-1}^0 (-28t - 27) dt \\ &= -14t^2 - 27t \Big|_{-1}^0 \\ &= -13 \end{aligned}$$

A integral de linha do Exemplo 4 pode ser calculada se acharmos uma função potencial para o campo vetorial conservativo $(4x + 2y - z)\mathbf{i} + (2x - 2y + z)\mathbf{j} + (-x + y + 2z)\mathbf{k}$ e aplicarmos o Teorema 19.3.3. Você deverá fazer isso no Exercício 31.

EXEMPLO 5 Suponha que \mathbf{F} seja o campo de forças gravitacional exercido por uma partícula com M unidades de massa na origem sobre uma partícula com massa unitária no ponto $P(x, y, z)$. Então, da Secção 19.1,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-GM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

Ache o trabalho realizado pela força \mathbf{F} sobre a partícula com massa unitária no movimento, ao longo de uma curva suave C de $(0, 3, 4)$ a $(2, 2, 1)$.

Solução Na Ilustração 2 da Secção 19.1 mostramos que \mathbf{F} é conservativo e que uma função potencial para \mathbf{F} é dada por

$$\phi(x, y, z) = \frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Se W for a medida do trabalho realizado sobre a partícula com massa unitária ao longo de C ,

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

Do Teorema 19.3.3, a integral de linha é independente do caminho e

$$\begin{aligned} W &= \phi(2, 2, 1) - \phi(0, 3, 4) \\ &= \frac{GM}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} - \frac{GM}{\sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2}} \\ &= \frac{GM}{3} - \frac{GM}{5} \\ &= \frac{2}{15}GM \end{aligned}$$

Vamos mostrar agora como os resultados dessa secção levam a conclusões importantes em Física. Se o movimento de uma partícula for causado por um campo de forças conservativo \mathbf{F} , a **energia potencial** da partícula no ponto (x, y, z) será definida como sendo um campo escalar E , tal que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\nabla E(x, y, z)$$

Isto é, $-E$ é uma função potencial de \mathbf{F} . Usaremos a notação $E(P)$ para denotar a energia potencial da partícula no ponto P . Se W for a medida do trabalho realizado por \mathbf{F} ao mover uma partícula ao longo de uma curva seccionalmente suave, C , do ponto A até o ponto B , então, do Teorema 19.3.3,

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} \\ W &= -E(x, y, z) \Big|_A^B \\ W &= -[E(B) - E(A)] \\ W &= E(A) - E(B) \end{aligned} \tag{3}$$

Assim, W é a diferença da energia potencial da partícula em A e B .

Suponha agora que a partícula esteja num ponto A , no tempo t_1 e em B no tempo t_2 e que a curva C tenha a equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

Então, os vetores velocidade e aceleração em t são $\mathbf{V}(t)$ e $\mathbf{A}(t)$, definidos por

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{R}'(t) \quad \mathbf{A}(t) = \mathbf{V}'(t)$$

A velocidade escalar da partícula em t é denotada por $v(t)$, onde $v(t) = \|\mathbf{V}(t)\|$. Então, outra fórmula para o cálculo de W é dada por

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} \\ W &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t) dt \\ W &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{V}(t) dt \end{aligned} \tag{4}$$

A segunda lei do movimento de Newton estabelece que se a força \mathbf{F} estiver agindo sobre uma partícula com m unidades de massa, então

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) &= m\mathbf{A}(t) \\ \Leftrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) &= m\mathbf{V}'(t) \end{aligned}$$

Substituindo essa equação em (4), temos

$$W = \int_{t_1}^{t_2} m[\mathbf{V}'(t) \cdot \mathbf{V}(t)] dt$$

Como $D_t[\mathbf{V}(t) \cdot \mathbf{V}(t)] = 2\mathbf{V}'(t) \cdot \mathbf{V}(t)$ e $\mathbf{V}(t) \cdot \mathbf{V}(t) = [v(t)]^2$, obtemos

$$W = \frac{1}{2}m \int_{t_1}^{t_2} D_t[\mathbf{V}(t) \cdot \mathbf{V}(t)] dt$$

$$W = \frac{1}{2}m \int_{t_1}^{t_2} D_t[v(t)]^2 dt$$

$$W = \frac{1}{2}m[v(t)]^2 \Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$W = \frac{1}{2}m[v(t_2)]^2 - \frac{1}{2}m[v(t_1)]^2 \quad (5)$$

Em Física, a **energia cinética** de uma partícula é definida como sendo $\frac{1}{2}mv^2$. Logo, a equação (5) estabelece que o trabalho realizado quando uma partícula se movimenta ao longo de C , do ponto A ao ponto B , é igual à variação na energia cinética da partícula. Se usarmos a notação $K(P)$ para indicar a energia cinética de uma partícula no ponto P , a equação (5) poderá ser escrita como

$$W = K(B) - K(A)$$

Igualando os valores de W de (3) e da equação acima, temos

$$E(A) - E(B) = K(B) - K(A)$$

$$E(A) + K(A) = E(B) + K(B)$$

A igualdade acima estabelece que as somas das energias potencial e cinética nos pontos inicial A e final B são iguais. Como A e B podem ser quaisquer pontos sobre C , a soma das duas energias é constante ao longo de C ; isto é, a energia total de uma partícula permanece inalterada durante o movimento. Esse fato é um dos grandes princípios da Física, chamado de **lei de conservação da energia**. É por essa razão que a expressão *conservativo* é usada para um campo de forças que é um gradiente.

EXERCÍCIOS 19.3

Nos Exercícios de 1 a 12, use os resultados do exercício indicado nos Exercícios 19.1 para provar que o valor da integral de linha dada é independente do caminho. Então calcule a integral de linha, aplicando o Teorema 19.3.1 ou o Teorema 19.3.3 e usando a função potencial encontrada no exercício indicado. Em cada exercício, C é uma curva qualquer seccionalmente suave, ligando o ponto A ao ponto B .

1. $\int_C y dx + x dy$; A é $(1, 4)$ e B é $(3, 2)$; Exercício 21.

2. $\int_C x dx + y dy$; A é $(-5, 2)$ e B é $(1, 3)$; Exercício 22.

3. $\int_C e^x \sin y dx + e^x \cos y dy$; A é $(0, 0)$ e B é $(2, \frac{1}{2}\pi)$; Exercício 23.

4. $\int_C (\sin y \sinh x + \cos y \cosh x) dx + (\cos y \cosh x - \sin y \sinh x) dy$
 A é $(1, 0)$ e B é $(2, \pi)$; Exercício 24.

5. $\int_C (2xy^2 - y^3) dx + (2x^2y - 3xy^2 + 2) dy$;
 A é $(-3, -1)$ e B é $(1, 2)$; Exercício 25.

6. $\int_C (3x^2 + 2y - y^2e^x) dx + (2x - 2ye^x) dy$;
 A é $(0, 2)$ e B é $(1, -3)$; Exercício 26.

7. $\int_C (x^2 - y) dx - (x - 3z) dy + (z + 3y) dz$;
 A é $(-3, 1, 2)$ e B é $(3, 0, 4)$; Exercício 27.

8. $\int_C yz dx + xz dy + xy dz$; A é $(0, -2, 5)$ e B é $(4, 1, -3)$;
Exercício 28.

9. $\int_C (ze^x + e^y) dx + (xe^y - e^z) dy + (-ye^z + e^x) dz$;
 A é $(1, 0, 2)$ e B é $(0, 2, 1)$; Exercício 29.

10. $\int_C (\operatorname{tg} y + 2xy \operatorname{sec} z) dx + (x \operatorname{sec}^2 y + x^2 \operatorname{sec} z) dy + \operatorname{sec} z(x^2y \operatorname{tg} z - \operatorname{sec} z) dz$
 A é $(2, \frac{1}{4}\pi, 0)$ e B é $(3, \pi, \pi)$; Exercício 30.

11. $\int_C (2x \cos y - 3) dx - (x^2 \sin y + z^2) dy - (2yz - 2) dz$;
 A é $(-1, 0, 3)$ e B é $(1, \pi, 0)$; Exercício 31.

12. $\int_C (2y^3 - 8xz^2) dx + (6xy^2 + 1) dy - (8x^2z + 3z^2) dz$; A é $(2, 0, 0)$ e B é $(3, 2, 1)$; Exercício 32.

Nos Exercícios de 13 a 20, mostre que o valor da integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$ para os dados F e C é independente do caminho e calcule a integral.

13. $\mathbf{F}(x, y) = 2(x - y)\mathbf{i} + 2(3y - x)\mathbf{j}$; C é o arco do primeiro quadrante da circunferência $x^2 + y^2 = 9$, do ponto sobre o eixo x ao ponto sobre o eixo y .

14. $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 + 6xy - 2y^2)\mathbf{i} + (3x^2 - 4xy + 3y^2)\mathbf{j}$; C é o arco do primeiro quadrante da elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$, do ponto sobre o eixo x ao ponto sobre o eixo y .

15. $\mathbf{F}(x, y) = (4e^{2x} - 3e^xe^{2y})\mathbf{i} + (2e^{2y} - 3e^xe^{2y})\mathbf{j}$; C é o arco da parábola $y^2 = 4x$, do vértice ao ponto de intersecção entre a parábola e a corda que passa pelo foco e é paralela à diretriz, no primeiro quadrante.

16. $\mathbf{F}(x, y) = e^x \cos y \mathbf{i} - e^x \sin y \mathbf{j}$; C é o segmento de reta $3x + 4y = 12$, do ponto onde ela intercepta o eixo y ao ponto onde ela intercepta o eixo x .

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 3y^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$; C é o traço do elipsóide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 9$, no plano xz , do eixo x positivo ao eixo z positivo.

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy + z^2)\mathbf{i} + (x^2 - 2yz)\mathbf{j} + (2xz - y^2)\mathbf{k}$; C é o traço da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, do plano yz , do eixo y positivo ao eixo z positivo.

19. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2ye^{2x}\mathbf{i} + e^{2x}\mathbf{j} + 3z^2\mathbf{k}$; C é qualquer curva seccionalmente suave, do ponto $(\ln 2, 1, 1)$ ao ponto $(\ln 2, 2, 2)$.

20. $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{1}{z} - \frac{y}{x^2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{x} + \frac{z}{y^2}\right)\mathbf{j} - \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{z^2}\right)\mathbf{k}$; C é qualquer curva seccionalmente suave, do ponto $(1, 2, -1)$ ao ponto $(2, -4, -2)$.

Nos Exercícios de 21 a 30, mostre que o valor da integral de linha é independente do caminho e calcule o valor de qualquer maneira conveniente. Em cada exercício C é uma curva qualquer, seccionalmente suave, ligando o ponto A ao ponto B .

21. $\int_C (2y - x) dx + (y^2 + 2x) dy$; A é $(0, -1)$ e B é $(1, 2)$.

22. $\int_C (\ln x + 2y) dx + (e^y + 2x) dy$; A é $(3, 1)$ e B é $(1, 3)$.

23. $\int_C \operatorname{tg} y dx + x + x \sec^2 y dy$; A é $(-2, 0)$ e B é $(4, \frac{1}{4}\pi)$.

24. $\int_C \sin y dx + (\sin y + x \cos y) dy$; A é $(-2, 0)$ e B é $(2, \frac{1}{6}\pi)$.

25. $\int_C \frac{2y}{(xy + 1)^2} dx + \frac{2x}{(xy + 1)^2} dy$; A é $(0, 2)$ e B é $(1, 0)$. A e $(1, 0, 0)$ e B é $(1, 2, 3)$.

27. $\int_C (y + z) dx + (x + z) dy + (x + y) dz$; A é $(0, 0, 0)$ e B é $(1, 1, 1)$.

28. $\int_C (yz + x) dx + (xz + y) dy + (xy + z) dz$; A é $(0, 0, 0)$ e B é $(1, 1, 1)$.

29. $\int_C (e^x \sin y + yz) dx + (e^x \cos y + z \sin y + xz) dy + (xy - \cos y) dz$; A é $(2, 0, 1)$ e B é $(0, \pi, 3)$.

30. $\int_C (2x \ln yz - 5ye^x) dx - (5e^x - x^2y^{-1}) dy + (x^2z^{-1} + 2z) dz$; A é $(2, 1, 1)$ e B é $(3, 1, e)$.

31. Calcule a integral de linha do Exemplo 4, achando uma função potencial para o campo vetorial conservativo

$(4x + 2y - z)\mathbf{i} + (2x - 2y + z)\mathbf{j} + (-x + y + 2z)\mathbf{k}$ e aplicando o Teorema 19.3.3.

32. Prove o Teorema 19.3.3.

Nos Exercícios de 33 a 36, ache o trabalho total realizado pelo campo de forças F ao deslocar uma partícula ao longo de um arco da curva C dada. Suponha que o arco seja medido em metros e a força seja medida em newtons. (Sugestão: primeiro mostre que \mathbf{F} é conservativo.)

33. $\mathbf{F}(x, y) = 3(x + y)^2\mathbf{i} + 3(x + y)^2\mathbf{j}$; C : o arco da parábola $y = x^2$ do vértice ao ponto $(2, 4)$.

34. $\mathbf{F}(x, y) = (2xy - 5y + 2y^2)\mathbf{i} + (x^2 - 5x + 4xy)\mathbf{j}$; C é o quarto da circunferência $\mathbf{R}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j}$, $0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$.

35. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2y^2z^3\mathbf{i} + 4xyz^3\mathbf{j} + 6xy^2z^2\mathbf{k}$; C : o arco da cúbica retorcida $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ de $t = 1$ a $t = 2$.

36. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4y^2z\mathbf{i} + 8xyz\mathbf{j} + 4(3z^3 + xy^2)\mathbf{k}$; C : o arco da hélice circular $\mathbf{R}(t) = 3 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j} + \mathbf{k}$ de $t = 0$ a $t = \frac{1}{3}\pi$.

37. Se \mathbf{F} for o campo de força definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{k(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

ache o trabalho realizado por \mathbf{F} ao mover uma partícula ao longo do segmento de reta do ponto $(3, 0, 0)$ a $(3, 0, 4)$. Calcule a integral de linha por dois métodos: (a) usando uma função potencial para \mathbf{F} ; (b) não usando uma função potencial para \mathbf{F} .

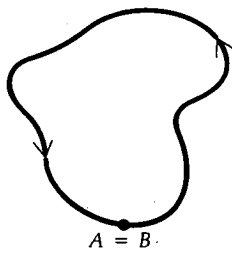
19.4 O TEOREMA DE GREEN

Há um teorema que expressa uma integral dupla sobre uma região plana R em termos de uma integral de linha ao longo da fronteira de R , chamado Teorema de Green. Esse nome é uma homenagem ao matemático e físico inglês George Green (1793-1841), que introduziu o teorema em um trabalho escrito sobre aplicações de Matemática à Eletricidade e Magnetismo. Antes de enunciar o teorema é necessário revisar e introduzir alguns termos referentes a curvas planas.

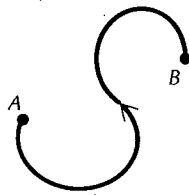
A definição de curva *suave* está na Secção 19.2 e a de curva *fechada*, na Secção 19.3. Uma curva C é chamada de **simples**, caso não se intercepte. Isto é, se uma equação vetorial de C for

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

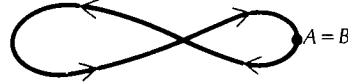
e se A for o ponto $(f(a), g(a))$ e B o ponto $(f(b), g(b))$, então C será **simples** entre A e B se $(f(t_1), g(t_1))$ não for o mesmo ponto que $(f(t_2), g(t_2))$ para todo t_1 e t_2 , distintos, no intervalo aberto (a, b) .



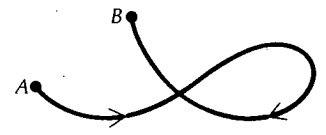
(a) Simples e fechada
FIGURA 1



(b) Simples mas não fechada



(c) Fechada mas não simples



(d) Nem simples, nem fechada

A circunferência e a elipse são exemplos de curvas fechadas simples e suaves. Na Figura 1(a)-(d) aparecem mais exemplos de curvas suaves que podem ou não ser simples e fechadas. Em (a) a curva é tanto simples como fechada; em (b) a curva é simples, mas não fechada; em (c) a curva é fechada, mas não simples e em (d) a curva nem é simples, nem fechada.

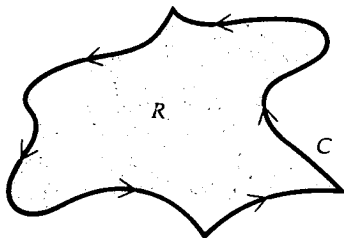


FIGURA 2

No enunciado do teorema de Green iremos nos referir a uma integral de linha ao longo de uma curva C , fechada, simples e seccionalmente suave que forma a fronteira de uma região R no plano e o sentido ao longo de C é anti-horário. Na Figura 2 é mostrada tal região R com a curva de fronteira C requerida. A integral de linha em torno de C no sentido anti-horário é denotada por \oint_C .

19.4.1 TEOREMA
Teorema de Green

Sejam M e N funções de duas variáveis x e y , de tal modo que tenham derivadas parciais primeiras contínuas em um disco aberto B em R^2 . Se C for uma curva fechada simples seccionalmente suave, contida inteiramente em B , e se R for a região limitada por C , então

$$\oint_C M(x, y) dx + N(x, y) dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

A demonstração do teorema de Green para todas as regiões limitadas por curvas que são fechadas, simples e seccionalmente suaves é matéria de um curso de Cálculo Avançado. Mas, provaremos o teorema para um tipo particular de região, onde cada reta horizontal ou vertical intercepta-a em no máximo dois pontos. A prova está a seguir.

Prova Seja R a região do plano xy que pode ser definida por,

$$R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\} \tag{1}$$

no

$$R = \{(x, y) | c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\} \tag{2}$$

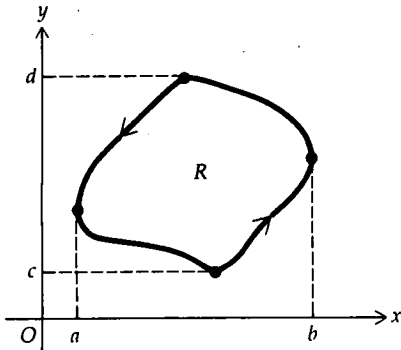


FIGURA 3

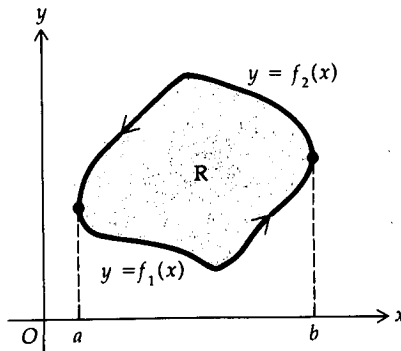


FIGURA 4

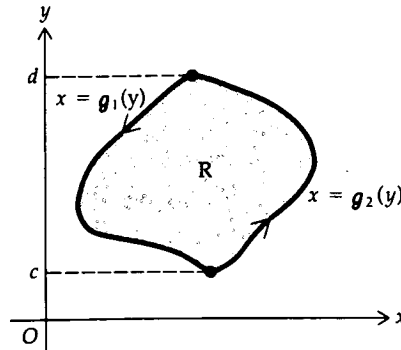


FIGURA 5

onde as funções f_1, f_2, g_1 e g_2 são suaves. A Figura 3 mostra tal região R , que deve ser considerada definida por (1) na Figura 4 e por (2) na Figura 5.

A prova consistirá em mostrar que

$$\oint_C M(x, y) dx = - \iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dA \quad (3)$$

e

$$\oint_C N(x, y) dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dA \quad (4)$$

Para provar (3), tratamos R como a região definida por (1). Consulte a Figura 4. Seja C_1 o gráfico de $y = f_1(x)$ de $x = a$ a $x = b$; isto é, C_1 é a parte mais baixa da curva de fronteira orientada C , indo da esquerda para a direita. Seja C_2 o gráfico de $y = f_2(x)$ de $x = b$ a $x = a$; isto é, C_2 é a parte superior da curva de fronteira orientada C , que vai da direita para a esquerda. Consideremos a integral de linha $\oint_C M(x, y) dx$.

$$\begin{aligned} \oint_C M(x, y) dx &= \int_{C_1} M(x, y) dx + \int_{C_2} M(x, y) dx \\ &= \int_a^b M(x, f_1(x)) dx + \int_b^a M(x, f_2(x)) dx \\ &= \int_a^b M(x, f_1(x)) dx - \int_a^b M(x, f_2(x)) dx \\ &= \int_a^b [M(x, f_1(x)) - M(x, f_2(x))] dx \end{aligned} \quad (5)$$

Vamos considerar agora a integral dupla $\iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dA$, onde R é ainda tratada como sendo definida por (1). Então,

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dA &= \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy dx \\ &= \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy \right) dx \\ &= \int_a^b M(x, y) \Big|_{f_1(x)}^{f_2(x)} dx \\ &= \int_a^b [M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x))] dx \end{aligned} \quad (6)$$

Comparando (5) e (6), segue que a igualdade (3) é válida.

Para provar (4), R é considerada como uma região definida por (2), como na Figura 5. Os detalhes da demonstração serão deixados como exercício (veja o Exercício 43).

Somando os termos correspondentes das igualdades (3) e (4), obtemos o teoremas de Green para essa região R . ■

► **ILUSTRAÇÃO 1** Usaremos o teorema de Green para calcular a integral de linha $\oint_C y^2 dx + 4xy dy$, onde C é a curva fechada que consiste no arco da pa-

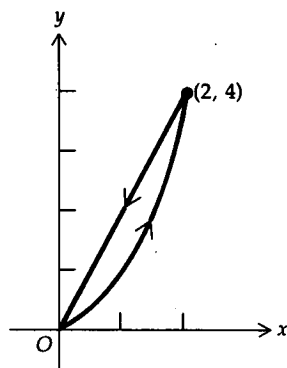


FIGURA 6

rábola $y = x^2$, da origem ao ponto $(2, 4)$ e no segmento de reta de $(2, 4)$ até a origem. A região R com a curva de fronteira orientada C está mostrada na Figura 6. Do teorema de Green,

$$\begin{aligned} \oint_C y^2 dx + 4xy dy &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x} (4xy) - \frac{\partial}{\partial y} (y^2) \right] dA \\ &= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4y - 2y) dy dx \\ &= \int_0^2 y^2 \Big|_{x^2}^{2x} dx \\ &= \int_0^2 (4x^2 - x^4) dx \\ &= \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^2 \\ &= \frac{64}{15} \end{aligned}$$

Para mostrar a vantagem de usar o teorema de Green, vamos calcular a mesma integral de linha pelo método da Seção 19.2. Se C_1 for o arco da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ até $(2, 4)$ e C_2 for o segmento de reta de $(2, 4)$ até $(0, 0)$, então

$$\oint_C y^2 dx + 4xy dy = \oint_{C_1} y^2 dx + 4xy dy + \oint_{C_2} y^2 dx + 4xy dy$$

As equações paramétricas de C_1 são

$$x = t \quad y = t^2 \quad 0 \leq t \leq 2$$

Logo,

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} y^2 dx + 4xy dy &= \int_0^2 (t^2)^2 dt + 4(t)(t^2)(2t dt) \\ &= \int_0^2 9t^4 dt \\ &= \left[\frac{9}{5}t^5 \right]_0^2 \\ &= \frac{288}{5} \end{aligned}$$

O arco C_2 pode ser representado parametricamente por

$$x = t \quad y = 2t \quad \text{de } t = 2 \text{ a } t = 0$$

Assim,

$$\begin{aligned} \oint_{C_2} y^2 dx + 4xy dy &= \int_2^0 (2t)^2 dt + 4(t)(2t)(2 dt) \\ &= \int_2^0 20t^2 dt \\ &= \left[\frac{20}{3}t^3 \right]_2^0 \\ &= -\frac{160}{3} \end{aligned}$$

Logo,

$$\oint_C y^2 dx + 4xy dy = \frac{288}{5} - \frac{160}{3} \\ = \frac{64}{15}$$

que está de acordo com o resultado obtido, usando o teorema de Green. ◀

EXEMPLO 1 Use o teorema de Green para encontrar o trabalho total realizado ao mover um objeto no sentido anti-horário, uma vez em torno da circunferência $x^2 + y^2 = a^2$, se o movimento for causado pelo campo de forças $\mathbf{F}(x, y) = (\sin x - y)\mathbf{i} + (e^y - x^2)\mathbf{j}$. Suponha que o arco seja medido em metros e a força seja medida em newtons.

Solução Se W J for o trabalho realizado, então

$$W = \oint_C (\sin x - y) dx + (e^y - x^2) dy$$

onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$. Do teorema de Green,

$$W = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x} (e^y - x^2) - \frac{\partial}{\partial y} (\sin x - y) \right] dA \\ = \iint_R (-2x + 1) dA$$

Usaremos coordenadas polares para calcular a integral dupla, com $x = r \cos \theta$ e $dA = r dr d\theta$. Então,

$$W = \int_0^{2\pi} \int_0^a (-2r \cos \theta + 1)r dr d\theta \\ = \int_0^{2\pi} \int_0^a (-2r^2 \cos \theta + r) dr d\theta \\ = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{2}{3} r^3 \cos \theta + \frac{r^2}{2} \right]_0^a d\theta \\ = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{2}{3} a^3 \cos \theta + \frac{a^2}{2} \right) d\theta \\ = \left[-\frac{2}{3} a^3 \sin \theta + \frac{a^2}{2} \theta \right]_0^{2\pi} \\ = \pi a^2$$

Logo, o trabalho realizado foi de πa^2 J.

O teorema a seguir, que é uma conseqüência do teorema de Green, fornece um método útil para o cálculo da área de uma região limitada por uma curva seccionalmente suave, simples e fechada.

19.4.2 TEOREMA

Se R for uma região tendo por fronteira uma curva C fechada simples e seccionalmente suave, e A unidades de área for a área de R , então

$$A = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$$

Prova No enunciado do teorema de Green, seja $M(x, y) = -\frac{1}{2}y$ e $N(x, y) = \frac{1}{2}x$. Então,

$$\begin{aligned}\oint_C -\frac{1}{2}y \, dx + \frac{1}{2}x \, dy &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2}x \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{2}y \right) \right] dA \\ &= \iint_R \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) dA \\ &= \iint_R dA\end{aligned}$$

Como $\iint_R dA$ é a medida da área de R ,

$$\frac{1}{2} \oint_C x \, dy - y \, dx = A \quad \blacksquare$$

EXEMPLO 2 Use o Teorema 19.4.2 para encontrar a área da região encerrada pela elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Solução As equações paramétricas da elipse são

$$x = a \cos t \quad y = b \sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Então $dx = -a \sin t \, dt$ e $dy = b \cos t \, dt$. Se C for a elipse e A unidades for a área da região encerrada por C , então, do Teorema 19.4.2,

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2} \oint_C x \, dy - y \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(a \cos t)(b \cos t \, dt) - (b \sin t)(-a \sin t \, dt)] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t) \, dt \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt \\ &= \pi ab\end{aligned}$$

Logo, a área é πab unidades.

EXEMPLO 3 Use o teorema de Green para calcular a integral de linha

$$\oint_C (x^4 - 3y) \, dx + (2y^3 + 4x) \, dy$$

onde C é a elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Solução Do teorema de Green,

$$\begin{aligned}\oint_C (x^4 - 3y) dx + (2y^3 + 4x) dy &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x} (2y^3 + 4x) - \frac{\partial}{\partial y} (x^4 - 3y) \right] dA \\ &= \iint_R (4 + 3) dA \\ &= 7 \iint_R dA\end{aligned}$$

A integral dupla $\iint_R dA$ é a medida da área da região encerrada pela elipse.

Do Exemplo 2, com $a = 3$ e $b = 2$, a medida da área da região encerrada pela elipse é 6π . Logo,

$$\oint_C (x^4 - 3y) dx + (2y^3 + 4x) dy = 42\pi$$

Há duas formas vetoriais do teorema de Green que iremos obter. Seja C uma curva fechada, simples e seccionalmente suave no plano xy . Vamos supor que uma equação vetorial de C seja

$$\mathbf{R}(s) = xi + yj$$

e $x = f(s)$, $y = g(s)$, onde s unidades são o comprimento do arco medido no sentido anti-horário de um ponto particular P_0 em C ao ponto P em C . Então, se $\mathbf{T}(s)$ for o vetor tangente unitário de C em P , do Teorema 14.6.3 temos $\mathbf{T}(s) = D_s \mathbf{R}(s)$. Assim,

$$\mathbf{T}(s) = \frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \mathbf{j} \quad (7)$$

O vetor $\mathbf{N}(s)$, definido por

$$\mathbf{N}(s) = \frac{dy}{ds} \mathbf{i} - \frac{dx}{ds} \mathbf{j} \quad (8)$$

é o vetor normal unitário de C em P . Para verificar esse fato, observe que $\mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{N}(s) = 0$ e os módulos de $\mathbf{T}(s)$ e $\mathbf{N}(s)$ são iguais. O vetor normal unitário, definido por (8), foi escolhido ao invés de seu negativo, de tal forma que quando o sentido de percurso ao longo de C for anti-horário, $\mathbf{N}(s)$ irá apontar para fora da região R , limitada por C e será chamado de **normal exterior unitário**. Veja a Figura 7. Seja

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

onde M e N satisfazem as hipóteses do teorema de Green. Como

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{N}(s) ds &= [M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}] \cdot \left(\frac{dy}{ds} \mathbf{i} - \frac{dx}{ds} \mathbf{j} \right) ds \\ &= M(x, y) dy - N(x, y) dx\end{aligned}$$

então

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{N}(s) ds = \oint_C -N(x, y) dx + M(x, y) dy$$

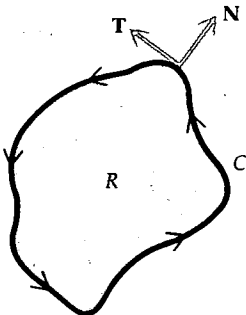


FIGURA 7

Aplicando o teorema de Green à integral de linha à direita dessa relação teremos

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{N}(s) ds &= \iint_R \left[\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}(-N) \right] dA \\ &= \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F} dA\end{aligned}$$

Essa forma vetorial do teorema de Green será enunciada formalmente como o teorema a seguir, cujo nome é uma homenagem ao matemático e cientista alemão Karl Gauss (1777-1855).

19.4.3 TEOREMA Teorema da Divergência de Gauss no Plano

Sejam as funções M e N , a curva C e a região R idênticas àquelas que foram definidas no teorema de Green. Se $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ e $\mathbf{N}(s)$ for o vetor normal exterior unitário de C em P , onde s unidades é o comprimento do arco medido no sentido anti-horário de um ponto particular P_0 em C até P , então

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} ds = \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F} dA$$

EXEMPLO 4 Verifique o teorema da divergência de Gauss no plano se

$$\mathbf{F}(x, y) = 2y\mathbf{i} + 5x\mathbf{j}$$

e R for a região limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

Solução A fronteira de R é a circunferência unitária que pode ser representada parametricamente por

$$x = \cos s \quad y = \sin s \quad 0 \leq s \leq 2\pi$$

onde s unidades é o comprimento de arco entre o ponto onde $s = 0$ ao ponto P em C . Então, uma equação vetorial de C é

$$\mathbf{R}(s) = \cos s \mathbf{i} + \sin s \mathbf{j} \quad 0 \leq s \leq 2\pi$$

De (8), o vetor normal exterior unitário é

$$\mathbf{N}(s) = \cos s \mathbf{i} + \sin s \mathbf{j}$$

Em um ponto $P(\cos s, \sin s)$ em C , \mathbf{F} é $2 \sin s \mathbf{i} + 5 \cos s \mathbf{j}$. Logo,

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} ds &= \int_0^{2\pi} (2 \sin s \mathbf{i} + 5 \cos s \mathbf{j}) \cdot (\cos s \mathbf{i} + \sin s \mathbf{j}) ds \\ &= \int_0^{2\pi} (2 \sin s \cos s + 5 \sin s \cos s) ds \\ &= 7 \int_0^{2\pi} \sin s \cos s ds \\ &= \left. \frac{7}{2} \sin^2 s \right|_0^{2\pi} \\ &= 0\end{aligned}$$

Como $M = 2y$, $\frac{\partial M}{\partial x} = 0$, e como $N = 5x$, $\frac{\partial N}{\partial y} = 0$. Assim,

$$\iint_R \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dA = 0$$

Portanto, verificamos o teorema da divergência de Gauss no plano para \mathbf{F} e R .

Observe, no Exemplo 4, que é mais fácil calcular $\iint_R \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA$ que $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, ds$.

Se \mathbf{F} for um campo vetorial e $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, então \mathbf{F} será dito **corpo de divergência nula**. O campo vetorial no Exemplo 4 é de divergência nula. No estudo de Hidrodinâmica (movimento fluido), se o campo de velocidades de um fluido for de divergência nula, ele será chamado de **incompressível**. Na teoria de Eletricidade e Magnetismo, um campo vetorial de divergência nula é chamado de **solenoidal**.

Vamos usar agora o teorema da divergência de Gauss no plano, para dar uma interpretação física da divergência de um campo vetorial. Sejam as funções M e N , a região R e a curva C , conforme foram definidas no teorema de Green. Suponhamos que \mathbf{F} seja um campo de velocidades de um fluido bidimensional (profundidade constante) e \mathbf{F} seja definida por $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$. Suponhamos que o fluido flua através de uma região R , tendo a curva C como fronteira, e que o sentido ao longo de C seja anti-horário. Vamos supor que o fluido tenha uma densidade constante em R e, por conveniência, seja unitária a medida da densidade. O fluxo do campo de velocidades \mathbf{F} através de C é a taxa segundo a qual o fluido atravessa C na direção perpendicular a C^* . Mostraremos como esse fluxo pode ser expresso como uma integral de linha.

Sejam s unidades o comprimento de arco da curva C , medido a partir de um ponto particular P_0 , até o ponto P . Vamos dividir a curva C em n arcos e seja $\Delta_i s$ o comprimento do i -ésimo arco contendo o ponto $P_i(x_i, y_i)$, onde s_i é o comprimento de arco de C , de P_0 até P_i . Como \mathbf{F} é contínua, uma aproximação da velocidade do fluido em cada ponto do i -ésimo arco é $\mathbf{F}(x_i, y_i)$. A quantidade de fluido que atravessa o arco por unidade de tempo é dada aproximadamente pela área de um paralelogramo, tendo um par de lados opostos de comprimento $\Delta_i s$ e uma altura de comprimento $\mathbf{F}(x_i, y_i) \cdot \mathbf{N}(s_i)$, onde $\mathbf{N}(s_i)$ é o vetor normal exterior unitário a C em $P_i(x_i, y_i)$. Veja a Figura 8. A medida da área do paralelogramo é $\mathbf{F}(x_i, y_i) \cdot \mathbf{N}(s_i) \Delta_i s$. A quantidade total de fluido que atravessa C por unidade de tempo é, aproximadamente,

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}(x_i, y_i) \cdot \mathbf{N}(s_i) \Delta_i s$$

Tomando o limite dessa soma quando n cresce sem limitação e quando cada $\Delta_i s$ tende a zero, obtemos a integral de linha

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{N}(s) \, ds$$

que é chamada de **fluxo** de \mathbf{F} através de C .

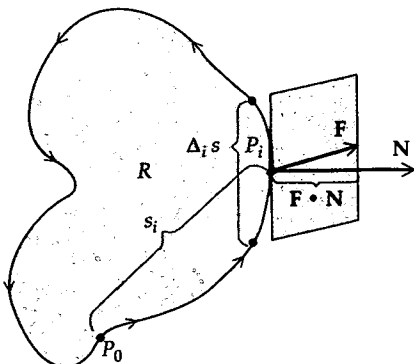


FIGURA 8

*N. do R.: A taxa refere-se ao tempo e o fluxo é a quantidade de massa por unidade de tempo que atravessa C ; positivo se de dentro para fora e negativo, em caso contrário.

Agora, seja $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y})$ um ponto particular na região R . Consideremos uma circunferência tendo seu centro em \bar{P} e tendo um pequeno raio δ , e vamos denotar essa circunferência por C_δ . Seja R_δ a região encerrada por C_δ . Então

$$\text{fluxo de } \mathbf{F} \text{ através de } C_\delta = \oint_{C_\delta} \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{N} \, ds$$

Aplicando o Teorema 19.4.3, temos

$$\text{fluxo de } \mathbf{F} \text{ através de } C_\delta = \iint_{R_\delta} \text{div } \mathbf{F} \, dA$$

Se M_x e N_y forem contínuas em R_δ , então $\text{div } \mathbf{F}$ será contínua lá e para δ pequeno, $\text{div } \mathbf{F}$ em R_δ será aproximadamente $\text{div } \mathbf{F}(\bar{x}, \bar{y})$. Assim,

$$\text{fluxo de } \mathbf{F} \text{ através de } C_\delta \approx \iint_{R_\delta} \text{div } \mathbf{F}(\bar{x}, \bar{y}) \, dA$$

Como $\text{div } \mathbf{F}(\bar{x}, \bar{y})$ é constante e $\iint_{R_\delta} dA$ é a área da circunferência de raio δ , temos

$$\text{fluxo de } \mathbf{F} \text{ através de } C_\delta \approx \text{div } \mathbf{F}(\bar{x}, \bar{y}) (\pi\delta^2) \quad (9)$$

Lembre-se de que o fluxo de \mathbf{F} através de C_δ é a quantidade total de fluido que atravessa C_δ por unidade de tempo. Logo, de (9), $\text{div } \mathbf{F}(x, y)$ pode ser interpretada como a medida aproximada da taxa de fluido por unidade de área, afastando-se do ponto (\bar{x}, \bar{y}) . Se $\text{div } \mathbf{F}(\bar{x}, \bar{y}) > 0$, dizemos que o fluido tem uma **fonte** em (\bar{x}, \bar{y}) . Se $\text{div } \mathbf{F}(\bar{x}, \bar{y}) < 0$, dizemos que o fluido tem um **sumidouro** em (\bar{x}, \bar{y}) . Se \mathbf{F} for de divergência nula em todos os pontos de uma região, então não existem nem fontes, nem sumidouros na região. Conforme mencionado acima, em tais casos o fluido é incompressível.

A palavra *fluxo* normalmente significa escoamento; contudo, o termo *fluxo* é aplicado a campos vetoriais em geral, mesmo que nada tenham a ver com velocidade de um fluido. Assim, se \mathbf{F} for um campo vetorial

$$\text{fluxo de } \mathbf{F} \text{ através de } C = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, ds \quad (10)$$

EXEMPLO 5 O campo de velocidades de um fluido é definido por

$$\mathbf{F}(x, y) \equiv (5x - y)\mathbf{i} + (x^2 - 3y)\mathbf{j}$$

Ache a taxa de escoamento do fluido para fora da região R , limitada por uma curva fechada, suave, C e cuja área seja 150 cm^2 .

Solução A taxa de escoamento do fluido é dada pelo fluxo de \mathbf{F} através de C . De (10) e do teorema da divergência de Gauss no plano,

$$\begin{aligned} \text{fluxo} &= \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, ds \\ &= \iint_R \text{div } \mathbf{F} \, dA \\ &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x} (5x - y) + \frac{\partial}{\partial y} (x^2 - 3y) \right] dA \\ &= \iint_R (5 - 3) \, dA \\ &= 2 \iint_R dA \end{aligned}$$

Como a área de R é 150 cm^2 , $\iint_R dA = 150$. Logo,

$$\text{fluxo} = 300$$

Portanto, a taxa de escoamento do fluido para fora da região é 300 cm^2 por unidade de tempo.

Para obter a segunda forma vetorial do teorema de Green, vamos considerar o produto escalar de $\mathbf{F}(x, y)$ pelo vetor tangente unitário $\mathbf{T}(s)$, definido pela igualdade (7). Temos

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{T}(s) ds &= [M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}] \cdot \left(\frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \mathbf{j} \right) ds \\ &= M(x, y) dx + N(x, y) dy \end{aligned}$$

Assim,

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{T}(s) ds = \oint_C M(x, y) dx + N(x, y) dy \quad (11)$$

O rotacional de \mathbf{F} em duas dimensões foi definido na Seção 19.1 como

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{k} &= \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \\ \text{rot } \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{k} &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \end{aligned}$$

Assim sendo, dessa equação e de (11), a fórmula do teorema de Green pode ser escrita como

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{T}(s) ds = \iint_R \text{rot } \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{k} dA$$

Essa forma vetorial do teorema de Green está enunciada formalmente como o teorema a seguir, cujo nome foi dado em homenagem ao matemático e físico irlandês George Stokes (1819-1903).

19.4.4 TEOREMA Teorema de Stokes no Plano

Sejam as funções M e N , a curva C e a região R definidas como no teorema de Green. Se $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ e $\mathbf{T}(s)$ for o vetor tangente unitário de C em P , onde s unidades é o comprimento de arco de C medido a partir de um ponto P_0 até P , então

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \iint_R \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dA$$

EXEMPLO 6 Verifique o teorema de Stokes no plano para \mathbf{F} e R do Exemplo 4.

Solução Como no Exemplo 4, o campo vetorial \mathbf{F} é definido por

$$\mathbf{F}(x, y) = 2y\mathbf{i} + 5x\mathbf{j}$$

e uma equação vetorial de C é

$$\mathbf{R}(s) = \cos s \mathbf{i} + \sin s \mathbf{j} \quad 0 \leq s \leq 2\pi$$

Como $\mathbf{T}(s) = D_s \mathbf{R}(s)$,

$$\mathbf{T}(s) = -\sin s \mathbf{i} + \cos s \mathbf{j}$$

Num ponto $P(\cos s, \sin s)$ em C , \mathbf{F} é $2 \sin s \mathbf{i} + 5 \cos s \mathbf{j}$. Logo,

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds &= \int_0^{2\pi} (2 \sin s \mathbf{i} + 5 \cos s \mathbf{j}) \cdot (-\sin s \mathbf{i} + \cos s \mathbf{j}) \, ds \\ &= \int_0^{2\pi} (-2 \sin^2 s + 5 \cos^2 s) \, ds \\ &= -2 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2s}{2} \, ds + 5 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2s}{2} \, ds \\ &= -s + \frac{1}{2} \sin 2s + \frac{5}{2}s + \frac{5}{4} \sin 2s \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{3}{2}s + \frac{7}{4} \sin 2s \Big|_0^{2\pi} \\ &= 3\pi \end{aligned}$$

Como $N = 5x$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 5$ e como $M = 2y$, $\frac{\partial M}{\partial y} = 2$. Assim,

$$\begin{aligned} \iint_R \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} \, dA &= \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_R (5 - 2) \, dA \\ &= 3 \iint_R dA \\ &= 3\pi \end{aligned}$$

Assim sendo, para esse \mathbf{F} e esse R o teorema de Stockes no plano está verificado.

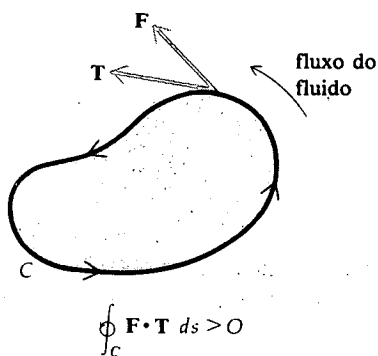


FIGURA 9

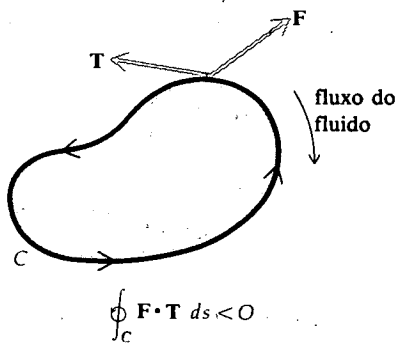


FIGURA 10

Se \mathbf{F} for o campo de velocidades de um fluido, o produto escalar $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ será a componente tangencial de \mathbf{F} e a integral de linha $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$ será chamada de **circulação** de \mathbf{F} em torno da curva fechada C . De uma forma intuitiva, podemos considerar a circulação como sendo a soma das componentes tangenciais de \mathbf{F} em torno de C . Se o movimento em torno de C for no sentido anti-horário e $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds > 0$, então o fluido estará circulando no sentido anti-horário; veja a Figura 9. Se $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds < 0$, a circulação do fluido será no sentido horário veja a Figura 10.

Seja $\bar{P}(x, y)$ um ponto dado na região R e seja C_δ a circunferência tendo seu centro em \bar{P} com um pequeno raio δ . Se R_δ for a região encerrada por C_δ ,

$$\oint_{C_\delta} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \iint_{R_\delta} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} \, dA$$

Se M_y e N_x forem contínuas em R_δ , então, $\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}$ será contínua ali e para δ pequeno, $\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}$ em R_δ será aproximadamente, $\text{rot } \mathbf{F}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \mathbf{k}$. Logo,

$$\oint_{C_\delta} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds \approx \text{rot } \mathbf{F}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \mathbf{k} \iint_{R_\delta} dA$$

$$\oint_{C_\delta} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds \approx \text{rot } \mathbf{F}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \mathbf{k} (\pi \delta^2)$$

Assim, interpretamos a $\text{rot } \mathbf{F}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \mathbf{k}$ como a medida aproximada da taxa de circulação por unidade de área no sentido anti-horário, no ponto \bar{P} . Quando \mathbf{F} e \mathbf{T} forem vetores ortogonais, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = 0$ e, então, $\text{rot } \mathbf{F} = 0$. Em tal caso, \mathbf{F} será chamado de **irrotacional**. Essa terminologia é usada, mesmo que \mathbf{F} não seja um campo de velocidades de um fluido.

EXERCÍCIOS 19.4

Nos Exercícios de 1 a 8, calcule a integral de linha pelo teorema de Green. Verifique, então, o resultado pelo método da Seção 19.2.

- $\oint_C 4y \, dx + 3x \, dy$, onde C é o quadrado com vértices em $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.
- $\oint_C y^2 \, dx + x^2 \, dy$, onde C é o quadrado do Exercício 1.
- $\oint_C 2xy \, dx - x^2 y \, dy$, onde C é o triângulo com vértices em $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.
- A integral de linha do Exercício 3, onde C é o triângulo com vértices em $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$.
- $\oint_C x^2 y \, dx - y^2 x \, dy$, onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$.
- $\oint_C (x^2 - y^2) \, dx + 2xy \, dy$, onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$.
- A integral de linha do Exercício 5, onde C é a curva fechada que consiste no arco de $4y = x^3$ de $(0, 0)$ a $(2, 2)$ e no segmento de reta de $(2, 2)$ a $(0, 0)$.
- A integral de linha do Exercício 6, onde C é a curva fechada do Exercício 7.

Nos Exercícios de 9 a 20, use o teorema de Green para calcular a integral de linha.

- $\oint_C (x + y) \, dx + xy \, dy$, onde C é a curva fechada, determinada pelo eixo x , pela reta $x = 2$ e pela curva $4y = x^3$.
- $\oint_C y^2 \, dx + x^2 \, dy$, onde C é a curva fechada, determinada pelo eixo x , pela reta $x = 1$ e pela curva $y = x^2$.
- $\oint_C (-x^2 + x) \, dy$, onde C é a curva fechada, determinada pela reta $x - 2y = 0$ e pela parábola $x = 2y^2$.
- $\oint_C (x^2 + y) \, dx$, onde C é a curva fechada, determinada pelo eixo x e pela parábola $y = 4 - x^2$.
- $\oint_C \cos y \, dx + \cos x \, dy$, onde C é o retângulo com vértices em $(0, 0)$, $(\frac{1}{3}\pi, 0)$, $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{4}\pi)$ e $(0, \frac{1}{4}\pi)$.

- $\oint_C e^{x+y} \, dx + e^{x+y} \, dy$, C é a circunferência $x^2 + y^2 = 4$
- $\oint_C (\sin^4 x + e^{2x}) \, dx + (\cos^3 y - e^y) \, dy$, onde C é a curva $x^4 + y^4 = 16$.
- $\oint_C x \sin y \, dx - y \cos x \, dy$, onde C é o retângulo com vértices em $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}\pi, 0)$, $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ e $(0, \frac{1}{4}\pi)$.
- $\oint_C \frac{x^2 y}{x^2 + 1} \, dx - \text{tg}^{-1} x \, dy$, onde C é a elipse $4x^2 + 25y^2 = 100$.
- $\oint_C e^y \cos x \, dx + e^y \sin x \, dy$, onde C é a curva $x^6 + y^4 = 10$.
- $\oint_C (e^x - x^2 y) \, dx + 3x^2 y \, dy$, onde C é a curva fechada, determinada por $y = x^2$ e $x = y^2$.
- $\oint_C \text{tg} y \, dx - x \text{tg}^2 y \, dy$ onde C é a elipse $x^2 + 4y^2 = 1$.

Nos Exercícios de 21 a 26, use o Teorema 19.4.2 para calcular a área da região dada.

- A região cuja fronteira é o quadrilátero com vértices em $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(3, 2)$ e $(1, 1)$.
- A região cuja fronteira é a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$.
- A região limitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.
- A região limitada pela parábola $y = 2x^2$ e pela reta $y = 8x$.
- A região limitada pela hipociclóide, tendo equações paramétricas

$$x = a \cos^3 t \quad y = a \sin^3 t \quad a > 0 \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$
- A região limitada abaixo pelo eixo x e acima por um arco da cicloide, tendo equações paramétricas

$$x = t - \sin t \quad y = 1 - \cos t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Nos Exercícios de 27 a 30, verifique o teorema da divergência de Gauss no plano e o teorema de Stokes no plano para \mathbf{F} e \mathbf{R} dados.

- $\mathbf{F}(x, y) = 3xi + 2yj$ e R é a região limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$.
- $\mathbf{F}(x, y) = 3yi - 2xj$ e R é a região limitada por $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

- 29. $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$ e R é a região limitada pela elipse $4x^2 + 25y^2 = 100$.
- 30. $\mathbf{F}(x, y) = y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ e R é a região limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 4$.

Nos Exercícios de 31 a 34, use o teorema de Green para encontrar o trabalho total realizado pelo campo de forças $\mathbf{F}(x, y)$ ao mover um objeto no sentido anti-horário, uma volta em torno da curva C dada. Suponha que o arco seja medido em metros e a força em newtons.

- 31. C é a elipse $x^2 + 4y^2 = 16$; $\mathbf{F}(x, y) = (3x + y)\mathbf{i} + (4x - 5y)\mathbf{j}$.
- 32. C é a circunferência $x^2 + y^2 = 25$; $\mathbf{F}(x, y) = (e^x + y^2)\mathbf{i} + (x^2y + \cos y)\mathbf{j}$.
- 33. C é o triângulo com vértices em $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(0, 2)$; $\mathbf{F}(x, y) = (e^{x^2} + y^2)\mathbf{i} + (e^{y^2} + x^2)\mathbf{j}$.
- 34. C consiste na parte superior da elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ e no intervalo $[-2, 2]$ no eixo x ; $\mathbf{F}(x, y) = (xy + y^2)\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$.

Nos Exercícios de 35 a 38, ache a taxa de escoamento do fluido para fora de uma região R , limitada pelo arco de curva C dado, se \mathbf{F} for o campo de velocidades do fluido. Suponha que a velocidade seja medida em centímetros por segundo e a área de R seja medida em centímetros quadrados.

- 35. $\mathbf{F}(x, y) = (y^2 + 6x)\mathbf{i} + (2y - x^2)\mathbf{j}$; C é a elipse $x^2 + 4y^2 = 4$.

- 36. $\mathbf{F}(x, y) = (5y - y^2)\mathbf{i} + (3x - 2y)\mathbf{j}$; C é o triângulo retângulo com vértices em $(1, 2)$, $(4, 2)$ e $(4, 6)$.
- 37. $\mathbf{F}(x, y) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j}$; C é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$.
- 38. $\mathbf{F}(x, y) = xy^2\mathbf{i} + yx^2\mathbf{j}$; C é a circunferência $x^2 + y^2 = 9$.

Nos Exercícios de 39 a 42, \mathbf{F} é o campo de velocidades de um fluido em torno da curva fechada C , sendo o movimento na direção anti-horária. Use o teorema de Stokes no plano para calcular $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$ e pelo resultado determine qual das afirmações se aplica: (i) a circulação do fluido é anti-horária; (ii) a circulação do fluido é horária; (iii) \mathbf{F} é irrotacional.

- 39. $\mathbf{F}(x, y) = 4y\mathbf{i} + 6x\mathbf{j}$; C é o triângulo com vértices em $(0, 0)$, $(3, 0)$ e $(3, 5)$.
- 40. $\mathbf{F}(x, y) = 8y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j}$; C é a elipse $4x^2 + 9y^2 = 1$.
- 41. $\mathbf{F}(x, y) = \sin^2 x\mathbf{i} + \cos^2 y\mathbf{j}$; C é a elipse $9x^2, y^2 = 9$.
- 42. $\mathbf{F}(x, y) = y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j}$; C é a circunferência $x^2 + y^2 = 25$.

- 43. Prove que $\oint_C N(x, y)dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dA$ se R for a região definida por $R = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$, onde g_1 e g_2 são suaves.

19.5 INTEGRAIS DE SUPERFÍCIES

Agora aplicaremos o conceito de uma integral de linha àquele de uma integral definida sobre a superfície. Começaremos considerando uma região fechada no plano xy . Nesta secção usaremos o símbolo D em vez de R , para denotar uma região no plano xy , a fim de evitar confusão com a função definida por $R(x, y, z)$ usada mais tarde na discussão. Suponha que S seja uma superfície sobre D e tenha a equação $z = f(x, y)$, onde f e suas derivadas parciais são contínuas em D . Então, se σ for a medida da área da superfície S , temos, do Teorema 18.5.1,

$$\sigma = \iint_D \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1} dx dy \tag{1}$$

Podemos generalizar a integral em (1), considerando uma função G de três variáveis x, y e z , onde G é contínua em S . Prosseguimos agora numa forma similar à discussão na Secção 18.5 que precede o enunciado do Teorema 18.5.1. Seja Δ uma partição da região D em n sub-regiões retangulares, onde o i -ésimo retângulo tem dimensões de medidas $\Delta_i x$ e $\Delta_i y$ e uma área de medida $\Delta_i A$. Seja (ξ_i, γ_i) um ponto qualquer no i -ésimo retângulo, e no ponto $Q(\xi_i, \gamma_i, f(\xi_i, \gamma_i))$ sobre a superfície S , consideremos o plano tangente à superfície. Projetando verticalmente para cima o i -ésimo retângulo sobre o plano tangente, seja $\Delta_i \sigma$ a medida da área dessa projeção. Veja a Figura 1. O número $\Delta_i \sigma$ é uma aproximação da medida da área da superfície que está acima do i -ésimo retângulo. Mostramos na Secção 18.5 que

$$\Delta_i \sigma = \sqrt{f_x^2(\xi_i, \gamma_i) + f_y^2(\xi_i, \gamma_i) + 1} \Delta_i A \tag{2}$$

Se formarmos a soma

$$\sum_{i=1}^n G(\xi_i, \gamma_i, f(\xi_i, \gamma_i)) \Delta_i \sigma$$

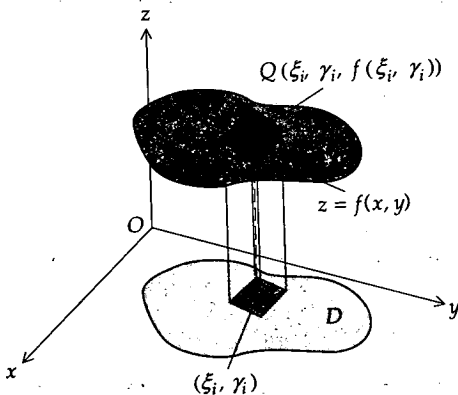


FIGURA 1

e tomarmos o limite dessa soma quando a norma da partição tende a zero, temos

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n G(\xi_i, \gamma_i, f(\xi_i, \gamma_i)) \Delta_i \sigma \tag{3}$$

Esse limite é chamado de **integral de superfície** de G sobre S , sendo denotado por

$$\iint_S G(x, y, z) \, d\sigma$$

Para obter uma fórmula para o cálculo dessa integral de superfície, substituímos (2) em (3), obtendo

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n G(\xi_i, \gamma_i, f(\xi_i, \gamma_i)) \sqrt{f_x^2(\xi_i, \gamma_i) + f_y^2(\xi_i, \gamma_i) + 1} \Delta_i A$$

Esse limite é uma integral dupla sobre a região D , no plano xy . Assim,

$$\iint_S G(x, y, z) \, d\sigma = \iint_D G(x, y, f(x, y)) \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1} \, dA \tag{4}$$

Se $G(x, y, z) = 1$, então (4) torna-se

$$\iint_S d\sigma = \iint_D \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1} \, dA$$

Comparando essa relação com (1), observamos que para essa G a integral de superfície de G sobre S dá a medida da área da superfície S .

Para a integral de superfície em (4), $z = f(x, y)$ é uma equação da superfície S , projetada sobre a região D no plano xy . Se uma equação da superfície S for da forma $y = g(x, z)$ e S for projetada sobre uma região D no plano xz , sendo g e suas derivadas parciais primeiras contínuas em D , então

$$\iint_S G(x, y, z) \, d\sigma = \iint_D G(x, g(x, z), z) \sqrt{g_x^2(x, z) + g_z^2(x, z) + 1} \, dA \tag{5}$$

Além disso, se uma equação da superfície S for da forma $x = h(y, z)$ e S for projetada sobre uma região D no plano yz , sendo h e suas derivadas parciais primeiras contínuas em D , então

$$\iint_S G(x, y, z) \, d\sigma = \iint_D G(h(y, z), y, z) \sqrt{h_y^2(y, z) + h_z^2(y, z) + 1} \, dA \tag{6}$$

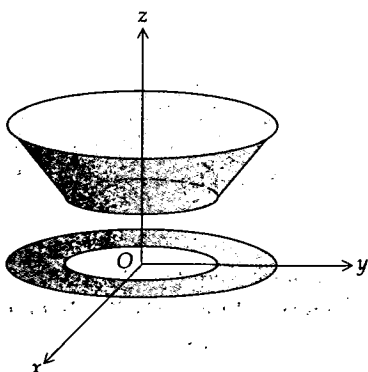


FIGURA 2

EXEMPLO 1 Calcule a integral de superfície

$$\iint_S x^2 z^2 \, d\sigma$$

onde S é a parte do cone $x^2 + y^2 = z^2$ entre os planos $z = 1$ e $z = 2$.

Solução A Figura 2 mostra a superfície S e a projeção de S sobre a região D do plano xy . A região D é limitada por dois círculos de raios 1 e 2, cujos

centros estão na origem. Resolvemos a equação de S em z , onde $z \geq 0$, e obtemos $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Logo,

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad f_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

De (4) com $G(x, y, z) = x^2 z^2$, obtemos

$$\begin{aligned} \iint_S x^2 z^2 d\sigma &= \iint_D x^2(x^2 + y^2) \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1} dA \\ &= \iint_D x^2(x^2 + y^2) \sqrt{2} dA \end{aligned}$$

Calculamos a integral dupla usando coordenadas polares, onde $x = r \cos \theta$, $x^2 + y^2 = r^2$ e $dA = r dr d\theta$. Logo,

$$\begin{aligned} \iint_S x^2 z^2 d\sigma &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_1^2 (r^2 \cos^2 \theta) r^2 (r dr d\theta) \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_1^2 \cos^2 \theta r^5 dr d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left[\cos^2 \theta \frac{r^6}{6} \right]_1^2 d\theta \\ &= \frac{21\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{21\sqrt{2}}{4} \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{21\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Se a medida da densidade de massa por unidade de área no ponto (x, y, z) sobre uma superfície S for $\rho(x, y, z)$ e se M for a medida da massa total de S , então

$$M = \iint_S \rho(x, y, z) d\sigma \quad (7)$$

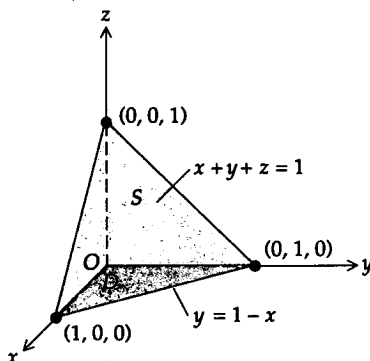


FIGURA 3

EXEMPLO 2 Ache a massa da parte do plano $x + y + z = 1$ no primeiro octante, se a densidade em qualquer ponto (x, y, z) sobre a superfície for kx^2 kg-m², onde k é uma constante.

Solução A Figura 3 mostra S , que é a superfície do plano dado no primeiro octante e a região D , que é a projeção de S sobre o plano xy . Resolvemos a equação do plano em z e obtemos $z = 1 - x - y$. Logo,

$$f(x, y) = 1 - x - y \quad f_x(x, y) = -1 \quad f_y(x, y) = -1$$

De (7), com $\rho(x, y, z) = kx^2$, se M kg for a massa da superfície,

$$\begin{aligned} M &= \iint_S kx^2 d\sigma \\ &= \iint_D kx^2 \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1} dA \\ &= \iint_D kx^2 \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1} dA \\ &= \sqrt{3}k \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 dy dx \\ &= \sqrt{3}k \int_0^1 [x^2 y]_0^{1-x} dx \\ &= \sqrt{3}k \int_0^1 (x^2 - x^3) dx \\ &= \sqrt{3}k \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{12} \sqrt{3}k \end{aligned}$$

Assim, a massa é $\frac{1}{12} \sqrt{3} k$ kg.

Vamos apresentar agora uma aplicação das integrais de superfície ao escoamento de um fluido. Seja \mathbf{F} o campo de velocidades de um fluido definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

Além disso, vamos supor que o fluido escoe através de uma superfície S , tendo a equação $z = f(x, y)$, que está sobre uma região fechada D , no plano xy . Suponha que f e suas derivadas parciais primeiras sejam contínuas em D . Em cada ponto de S há dois vetores unitários normais a S . A normal unitária tendo uma componente \mathbf{k} positiva é chamada de **normal unitária superior** e aquela com uma componente \mathbf{k} negativa é chamada de **normal unitária inferior**.

Como na discussão que precedeu (2), tomamos uma partição de D em n sub-regiões retangulares. Escolhemos um ponto (ξ_i, γ_i) no i -ésimo retângulo. Projetamos verticalmente para cima o i -ésimo retângulo sobre o plano tangente a S no ponto $Q(\xi_i, \gamma_i, f(\xi_i, \gamma_i))$ e seja $\Delta_i\sigma$ dado por (2) uma aproximação da medida da área dessa projeção. Novamente nos referimos à Figura 1. Seja \mathbf{N}_i a normal unitária superior a S no ponto Q e seja \mathbf{F}_i o vetor velocidade do fluido em Q . A quantidade de fluido que atravessa a projeção por unidade de tempo é dada, aproximadamente, pelo volume do paralelepípedo, tendo uma base com $\Delta_i\sigma$ unidades de área e uma altura com $\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{N}_i$ unidades de comprimento. Veja a Figura 4. A medida do volume do paralelepípedo é $\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{N}_i \Delta_i\sigma$. A quantidade total de fluido que atravessa S por unidade de tempo é dada, aproximadamente, por

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{N}_i \Delta_i\sigma$$

Tomando o limite desse somatório quando n cresce sem limitação e cada $\Delta_i\sigma$ tende a zero, obtemos a integral de superfície

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} d\sigma \quad (8)$$

que é chamada de **fluxo** de \mathbf{F} através de S .

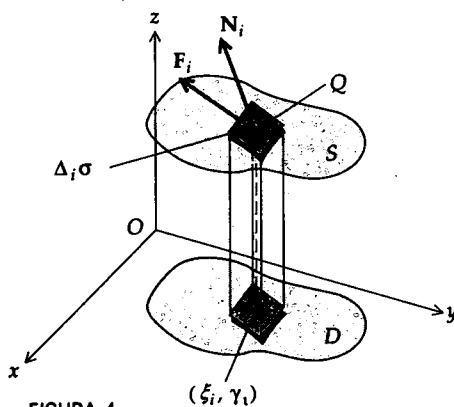


FIGURA 4

Para calcular a integral de superfície (8), escrevemos a equação de S na forma $g(x, y, z) = 0$, onde

$$g(x, y, z) = z - f(x, y)$$

Do Teorema 17.2.2, um vetor normal unitário à superfície definida por $g(x, y, z) = 0$ é

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} \\ &= \frac{-f_x(x, y)\mathbf{i} - f_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1}} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma &= \iint_S (M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{-f_x\mathbf{i} - f_y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \right) d\sigma \\ &= \iint_D \frac{-Mf_x - Nf_y + R}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} (\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}) \, dA \end{aligned}$$

Logo, concluímos que

$$\boxed{\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = \iint_D (-Mf_x - Nf_y + R) \, dA} \quad (9)$$

onde \mathbf{N} é uma normal unitária superior. Se \mathbf{N} for uma normal unitária inferior (onde a componente de \mathbf{k} é negativa)

$$\boxed{\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = \iint_D (Mf_x + Nf_y - R) \, dA} \quad (10)$$

Essa fórmula é provada de maneira similar àquela usada para provar (9).

EXEMPLO 3 O campo de velocidades de um fluido é dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

e a superfície S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ que está acima da região D no plano xy , encerrada pela circunferência $x^2 + y^2 = 4$. Ache o fluxo de \mathbf{F} através de S .

Solução A Figura 5 mostra a superfície S e a região D no plano xy . Resolvemos a equação da esfera em z , com $z > 0$, e obtemos $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Logo,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sqrt{9 - x^2 - y^2} & f_x &= \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} & f_y &= \frac{-y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} \\ & & f_x &= -\frac{x}{z} & f_y &= -\frac{y}{z} \end{aligned}$$

Por definição de fluxo temos

$$\text{fluxo de } \mathbf{F} \text{ através de } S = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma$$

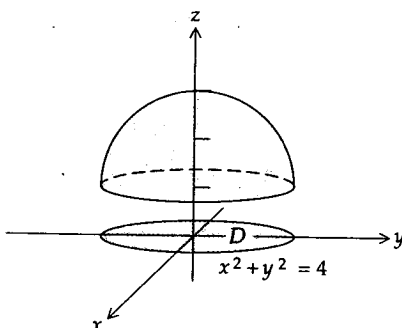


FIGURA 5

Do campo de velocidades dado, $M = y$, $N = -x$ e $R = 8$. Logo, de (9),

$$\begin{aligned} \text{fluxo de } \mathbf{F} \text{ através de } S &= \iint_D (-Mf_x - Nf_y + R) dA \\ &= \iint_D \left[-y \left(-\frac{x}{z} \right) - (-x) \left(-\frac{y}{z} \right) + 8 \right] dA \\ &= 8 \iint_D dA \end{aligned}$$

Como D é a região encerrada pela circunferência $x^2 + y^2 = 4$, $A = 4\pi$. Assim,

$$\begin{aligned} \text{fluxo de } \mathbf{F} \text{ através de } S &= 8(4\pi) \\ &= 32\pi \end{aligned}$$

Concluimos, então, que o fluxo através de S é de 32π unidades de volume do fluido por unidade de tempo.

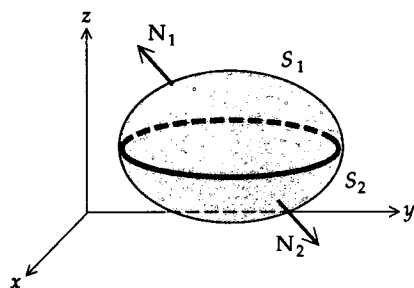


FIGURA 6

Suponhamos que S seja uma superfície fechada, como por exemplo, paralelepípedos retangulares, esferas e elipsóides. Quando usamos (8) para calcular o fluxo de \mathbf{F} através de uma superfície fechada, escolhemos \mathbf{N} como a **normal unitária exterior**, que é a normal que aponta para fora do sólido limitado pela superfície*. Em particular, se S for um elipsóide, conforme mostra a Figura 6, consideraremos como sendo formada por uma superfície superior S_1 e uma inferior S_2 , como está indicado na figura. Em tal caso, o fluxo de \mathbf{F} através de S é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} d\sigma = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1 d\sigma + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2 d\sigma$$

Para a integral de superfície através de S_1 , \mathbf{N}_1 é a normal unitária superior, e para a integral de superfície através de S_2 , \mathbf{N}_2 é a normal unitária inferior.

EXEMPLO 4 O campo de velocidades de um fluido é dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = 5zk$, e S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. Ache o fluxo de \mathbf{F} através de S , se o comprimento for medido em centímetros e o tempo for medido em horas.

Solução A Figura 7 mostra a esfera e a região D no plano xy , que é a circunferência $x^2 + y^2 = 16$. Como $\mathbf{F}(x, y, z) = 5zk$, $M = 0$, $N = 0$ e $R = 5z$. O fluxo de \mathbf{F} através de S é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} d\sigma = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1 d\sigma + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2 d\sigma \quad (11)$$

onde S_1 é a metade superior da esfera e S_2 é a metade inferior. Para S_1 , \mathbf{N}_1 é a normal unitária superior e uma equação de S_1 é $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$. Assim, $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$. De (9),

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1 d\sigma &= \iint_D [-Mf_x - Nf_y + R] dA \\ &= \iint_D 5z dA \\ &= 5 \iint_D \sqrt{16 - x^2 - y^2} dA \end{aligned}$$

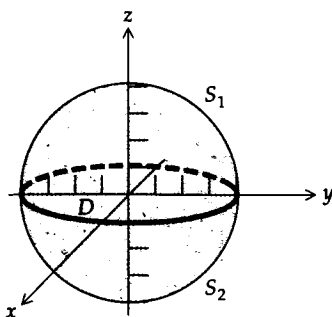


FIGURA 7

N. do R.: Diz-se neste caso que a superfície fechada S é orientada positivamente.

$$\begin{aligned}
&= 5 \int_0^{2\pi} \int_0^4 \sqrt{16-r^2} r dr d\theta \\
&= 5 \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3} (16-r^2)^{3/2} \right]_0^4 d\theta \\
&= \frac{320}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \frac{640}{3} \pi
\end{aligned}$$

Para S_2 , N_2 é a normal unitária inferior e como equação de S_2 temos $z = -\sqrt{16-x^2-y^2}$. Portanto, $f(x, y) = -\sqrt{16-x^2-y^2}$. De (10),

$$\begin{aligned}
\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2 d\sigma &= \iint_D [Mf_x + Nf_y - R] dA \\
&= \iint_D -5z dA \\
&= 5 \iint_D \sqrt{16-x^2-y^2} dA
\end{aligned}$$

Como no cálculo do fluxo de \mathbf{F} através de S_1 obtemos

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} d\sigma = \frac{640}{3} \pi$$

Então, de (11),

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} d\sigma &= \frac{640}{3} \pi + \frac{640}{3} \pi \\
&= \frac{1280}{3} \pi
\end{aligned}$$

Logo, a taxa de escoamento do fluido através da esfera, isto é, o fluxo é de $\frac{1280}{3} \pi \text{ cm}^3/\text{h}$.

O conceito de fluxo não está limitado ao campo de velocidades de fluidos. Por exemplo, se \mathbf{F} for um campo elétrico, então a integral de superfície (8) será um fluxo elétrico, e se \mathbf{F} for um campo magnético, a integral de superfície será um fluxo magnético. A integral de superfície (8) também pode representar um fluxo de calor.

EXERCÍCIOS 19.5

Nos Exercícios de 1 a 14, calcule a integral de superfície.

$$\iint_S G(x, y, z) d\sigma \text{ para } G \text{ e } S \text{ dados.}$$

- $G(x, y, z) = z$; S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ acima do plano xy .
- $G(x, y, z) = x$; S é a parte do plano $x + y + z = 1$ no primeiro octante.
- $G(x, y, z) = x + 2y - z$; S é a parte do plano $x + y + z = 2$ no primeiro octante.
- $G(x, y, z) = z$; S é a parte do plano $2x + 3y + z = 6$ no primeiro octante.
- $G(x, y, z) = xyz$; S é o mesmo que no Exercício 4.
- $G(x, y, z) = x^2$; S é a parte do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ entre o plano xy e o plano $z = 1$ no primeiro octante.
- $G(x, y, z) = x$; S é a parte do cilindro $z = x^2$ no primeiro octante, limitada pelos planos coordenados e pelos planos $x = 1$ e $y = 2$.
- $G(x, y, z) = y$; S é a parte do cilindro $z = 4 - y^2$ no primeiro octante, limitada pelos planos coordenados e pelo plano $x = 3$.
- $G(x, y, z) = z^2$; S é a parte do cone $x^2 + y^2 = z^2$ entre os planos $z = 1$ e $z = 2$.
- $G(x, y, z) = xyz$; S é a parte do cone $x^2 + y^2 = z^2$ entre os planos $z = 1$ e $z = 2$.
- $G(x, y, z) = x + y$; S é a parte do plano $4x + 3y + 6z = 12$ no primeiro octante.
- $G(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; S é a parte do cone $x^2 + y^2 = z^2$ entre o plano xy e o plano $z = 2$.

13. $G(x, y, z) = xyz$; S é a parte do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ entre os planos $y = 1$ e $y = 3$.
14. $G(x, y, z) = x^2$; S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ acima do plano xy .

Nos Exercícios de 15 a 20, ache a massa da superfície S dada, se a densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto (x, y, z) na superfície é $\rho(x, y, z)$ kg·m².

15. S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ acima do plano xy ; $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, onde k é uma constante.
16. S é a parte do plano $3x + 2y + z = 6$ no primeiro octante; $\rho(x, y, z) = y + 2z$.
17. S é a parte do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ acima do plano xy ; $\rho(x, y, z) = 1/\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$.
18. S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ abaixo do plano xy ; $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$.
19. S é a parte do cone $x^2 + y^2 = z^2$ entre os planos $z = 2$ e $z = 3$; $\rho(x, y, z) = y^2z^2$.
20. S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ no primeiro octante; $\rho(x, y, z) = kz^2$, onde k é uma constante.
21. $\mathbf{F}(x, y, z) = xi + yj + zk$; S é a parte do plano $3x + 2y + z = 6$ no primeiro octante.
22. $\mathbf{F}(x, y, z)$ é o mesmo que no Exercício 21; S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, acima do plano xy .
23. $\mathbf{F}(x, y, z) = -2yi + 2xj + 5k$; S é aquela parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ que está acima da região no plano xy , encerrada pela circunferência $x^2 + y^2 = 9$.
24. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3xi + 3yj + 6zk$; S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ acima do plano xy .
25. Suponha $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2i + xyj + 2zk$, e seja S o cubo no primeiro octante, limitado pelos planos coordenados e pelos planos $x = 1$, $y = 1$ e $z = 1$. Ache o fluxo de \mathbf{F} através de S , calculando seis integrais de superfície, uma para cada face do cubo.
26. Se $\mathbf{F}(x, y, z) = 3xi + y^2j + yzk$, e S for o cubo do Exercício 25, ache o fluxo de \mathbf{F} através de S calculando seis integrais de superfície, uma para cada face do cubo.

19.6 TEOREMA DA DIVERGÊNCIA DE GAUSS E TEOREMA DE STOKES

A discussão da Seção 19.4 dizia respeito ao tratamento do teorema de Green e de suas duas formas vetoriais, o teorema da divergência de Gauss e o teorema de Stokes, ambos no plano. Essas idéias podem ser estendidas ao espaço tridimensional. Uma apresentação rigorosa desses tópicos é dada num curso de Cálculo Avançado; contudo, nesta seção vamos dar uma breve introdução intuitiva.

► **ILUSTRAÇÃO 1** Seja $F(x, y)$ uma função contínua e com derivadas contínuas no plano. Do teorema de Green temos que

$$\iint_R \frac{\partial F}{\partial x} dx dy = \oint_C F dy \quad \text{e} \quad \iint_R \frac{\partial F}{\partial y} dy dx = -\oint_C F dx$$

onde C é o contorno de R . Observe que se trata de uma generalização do segundo teorema fundamental do Cálculo (Teorema 5.8.2), isto é, se F for uma função definida e derivável em $a \leq x \leq b$, então

$$\int_a^b \frac{dF}{dx} dx = F(b) - F(a)$$

19.6.1 TEOREMA DA DIVERGÊNCIA DE GAUSS NO ESPAÇO

Sejam M , N e R funções das três variáveis x , y , e z tais que suas derivadas parciais de primeira ordem são contínuas numa bola aberta B em R^3 . Seja S uma superfície seccionalmente suave contida em B e E a região de R^3 limitada por B . Se $\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ e $\mathbf{N} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$ for um vetor normal exterior unitário de S , então

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} d\sigma = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV$$

Prova Em termos de suas componentes, a equação acima pode ser escrita como

$$\iiint_E \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S (M \cos \alpha + N \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma$$

É suficiente então estabelecer as três equações:

$$\iiint_E \frac{\partial M}{\partial x} dx dy dz = \iint_S M \cos \alpha d\sigma$$

$$\iiint_E \frac{\partial N}{\partial y} dx dy dz = \iint_S N \cos \alpha d\sigma$$

e

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_S R \cos \alpha d\sigma$$

e somar os resultados. Vamos começar pela última destas equações e prová-la em condições especiais.

Vamos supor que E é um conjunto de pontos (x, y, z) satisfazendo a uma relação do tipo $g(x, y) \leq z \leq f(x, y)$ para todo (x, y) em V , onde V é uma região conexa do plano xy . Vamos supor que as funções f e g são contínuas em V e satisfazem em V a relação $g(x, y) \leq f(x, y)$. Isto significa que V é a projeção de E no plano xy . Se conduzirmos por um ponto de V uma reta paralela ao eixo z ela interceptará E em dois pontos que são as extremidades de um segmento de reta que une a superfície $z = g(x, y)$ à superfície $z = f(x, y)$. A superfície S fica então dividida numa calota superior S_1 , dada por $z = f(x, y)$, numa calota inferior S_2 dada por $z = g(x, y)$ e possivelmente de uma parte cilíndrica S_3 gerada por uma reta paralela ao eixo z percorrendo o contorno de V . A normal externa a S tem em S_1 uma componente z não-negativa, em S_2 uma componente z não-positiva e em S_3 a normal é paralela ao plano xy .

A idéia da demonstração é bem simples. Vamos expressar a integral tripla como uma integral dupla estendida a todo V . Mostraremos então que a integral dupla tem o mesmo valor que a integral de superfície do teorema.

Temos

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_V \left[\int_{g(x,y)}^{f(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right] dx dy$$

Mas, a integral

$$\int_{g(x,y)}^{f(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz$$

pode ser calculada pelo segundo teorema fundamental do Cálculo, Secção 5.8.2, resultando:

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_V [R(x, y, f(x, y)) - R(x, y, g(x, y))] dx dy$$

Quanto à integral de superfície temos

$$\iint_S R \cos \gamma d\sigma = \iint_{S_1} R \cos \gamma d\sigma + \iint_{S_2} R \cos \gamma d\sigma + \iint_{S_3} R \cos \gamma d\sigma.$$

Mas em S_3 a normal é paralela ao plano xy ; resulta pois que $\cos \gamma = 0$ e a integral sobre S_3 é nula.

Sejam

$$P(x, y) = xi + yj + f(x, y)k$$

e

$$P(x, y) = xi + yj + g(x, y)k$$

as representações de S_1 e S_2 . Em S_1 a normal \mathbf{N} tem a mesma direção que $\frac{\partial P}{\partial x} \times \frac{\partial P}{\partial y}$, assim podemos escrever

$$\iint_{S_1} R \cos \gamma \, d\sigma = \iint_{S_1} R \, dx \, dy = \iint_V R[x, y, f(x, y)] \, dx \, dy$$

Em S_2 a normal \mathbf{N} tem a direção oposta à de $\frac{\partial P}{\partial x} \times \frac{\partial P}{\partial y}$, assim

$$\iint_{S_2} R \cos \gamma \, d\sigma = - \iint_{S_2} R \, dx \, dy = \iint_V R[x, y, g(x, y)] \, dx \, dy$$

Então,

$$\iint_S R \cos \gamma \, d\sigma = \iint_V \{R[x, y, f(x, y)] - R[x, y, g(x, y)]\} \, dx \, dy$$

Segue então que

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} \, dx \, dy \, dz = \iint_S R \cos \gamma \, d\sigma$$

A demonstração das duas primeiras fórmulas é análoga.

EXEMPLO 1 Use o teorema da divergência de Gauss para resolver o Exemplo 4 da Seção 19.5.

Solução $\mathbf{F}(x, y, z) = 5z\mathbf{k}$ e S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. Do teorema da divergência de Gauss, o fluxo de \mathbf{F} através de S é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$$

Como $\mathbf{F}(x, y, z) = 5z\mathbf{k}$, $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial z} (5z)$; isto é, $\operatorname{div} \mathbf{F} = 5$. Assim,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = 5 \iiint_E dV$$

Como o volume de E é o da esfera de raio 4, temos

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma &= 5 \left[\frac{4}{3} \pi (4)^3 \right] \\ &= \frac{1280}{3} \pi \end{aligned}$$

Comparando a solução do exemplo acima com aquela do Exemplo 4 na Seção 19.5, observamos como o teorema da divergência de Gauss pode simplificar o cálculo de uma integral de superfície.

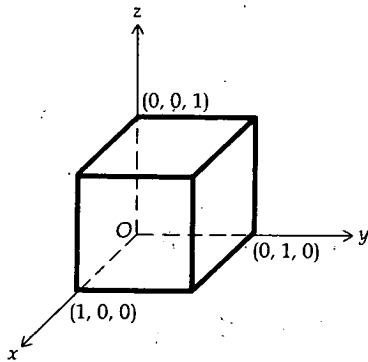


FIGURA 1

EXEMPLO 2 Se $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2y\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$, e S é cubo no primeiro octante, limitado pelos planos $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ e pelos planos coordenados, ache o fluxo de \mathbf{F} através de S .

Solução O cubo está na Figura 1. O fluxo de \mathbf{F} através de S é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma$$

Para calcular essa integral de superfície diretamente, teríamos que calcular seis integrais de superfície, uma para cada face do cubo. Aplicando o teorema da divergência de Gauss com

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xz) \\ &= 2xy + 2y + x \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma &= \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (2xy + 2y + x) \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (2xy + 2y + x) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 [xy^2 + y^2 + xy]_0^1 \, dx \\ &= \int_0^1 (2x + 1) \, dx \\ &= x^2 + x \Big|_0^1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Na Secção 19.4 vimos uma segunda forma vetorial do teorema de Green, conhecida como teorema de Stokes no plano (Teorema 19.4.4):

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \iint_D \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} \, dA$$

onde C é uma curva fechada simples, seccionalmente contínua em R^2 e D é a região limitada por C . Estenderemos agora esse teorema para o espaço tridimensional.

19.6.2 TEOREMA Teorema de Stokes

Sejam M , N e R funções de três variáveis x, y, z , tais que elas tenham derivadas parciais primeiras contínuas em uma bola aberta B em R^3 . Seja S uma superfície seccionalmente suave contida em B e seja C uma curva fechada simples e seccionalmente suave que é a fronteira de S^* . Se $\mathbf{F}(x, y, z)$ for $M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$, \mathbf{N} for o vetor normal unitário para cima de S e \mathbf{T} for o vetor tangente unitário de C , onde s unidades é o comprimento do arco medido desde um dado ponto P_0 sobre C até P , então

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma$$

*N. do R.: A curva C também é denominada *bordo* de S e denotada por ∂S .

O teorema de Stokes estabelece que a integral de linha da componente tangencial de um campo vetorial \mathbf{F} ao longo da fronteira orientada C de uma superfície S pode ser calculada através da integral de superfície da componente normal da rotação de \mathbf{F} sobre S .

O Teorema 19.6.2 está restrito a superfícies para as quais \mathbf{N} é uma normal dirigida para cima de S . Um enunciado completo do teorema de Stokes, envolvendo superfícies com uma orientação e para as quais a normal unitária \mathbf{N} pode ser adequadamente definida, pode ser encontrado em textos de Cálculo Avançado, onde também pode ser encontrada a demonstração do teorema.

A Figura 2, mostra uma superfície S com uma curva de fronteira orientada C para a qual o Teorema 19.6.2 se aplica. Uma equação de S é da forma $z = f(x, y)$, onde f tem derivadas parciais primeiras contínuas na região D que é a projeção de S sobre o plano xy . A curva C é a projeção de C sobre o plano xy , e \bar{C} e D estão definidas como no teorema de Green (Teorema 19.4.1). O sentido positivo ao longo de C é o mesmo que o sentido positivo ao longo de C , que é anti-horário. A Figura 2 também mostra as representações dos vetores \mathbf{N} e \mathbf{T} .

Uma outra forma da equação do Teorema de Stokes obtém-se ao escrever $d\mathbf{R}$ no lugar de $\mathbf{T} ds$ na integral de linha. Temos então

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma \tag{1}$$

Prova Lembrando-se que $\mathbf{T} ds = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$, segue que devemos provar

$$\begin{aligned} \oint_C M dx + N dy + R dz &= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) dy dz + \iint_S \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \\ &+ \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

No teorema da divergência é suficiente estabelecer as três fórmulas a seguir

$$\oint_C M dx = \iint_S \frac{\partial M}{\partial z} dz dx - \frac{\partial M}{\partial y} dx dy$$

$$\oint_C N dy = \iint_S \frac{\partial N}{\partial x} dx dy - \frac{\partial N}{\partial z} dy dz$$

$$\oint_C R dz = \iint_S \frac{\partial R}{\partial y} dy dz - \frac{\partial R}{\partial x} dz dx$$

e então somar os resultados.

Vamos nos limitar ao caso em que S pode ser representada por

$$z = f(x, y) \text{ para } (x, y) \text{ em } D$$

onde D é a projeção de S sobre o plano xy (ver Figura 2). A curva C tem por projeção em xy a curva \bar{C} . Enquanto (x, y, z) percorre uma volta sobre C , no sentido indicado na Figura 2, o ponto $(x, y, 0)$ sua projeção no plano xy , percorre uma vez \bar{C} , no sentido correspondente.

Pelo teorema de Green, temos

$$\oint_C M(x, y, z) dx = \int_{\bar{C}} M[x, y, f(x, y)] dx = - \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy.$$

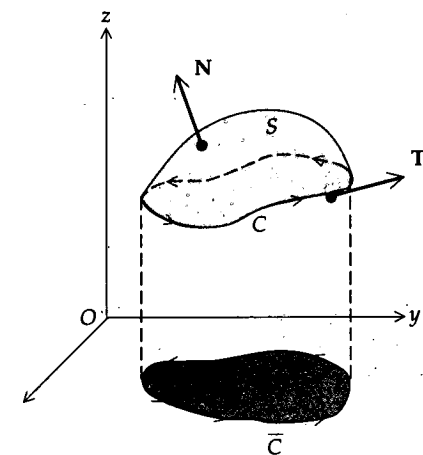


FIGURA 2

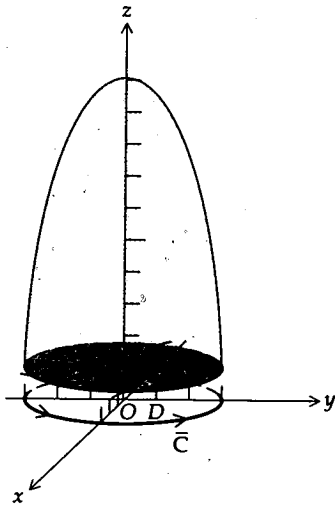


FIGURA 3

Por outro lado, da Secção 19.5 e das fórmulas (9) e (10), temos

$$\iint_S \frac{\partial M}{\partial z} dz dx - \frac{\partial M}{\partial y} dx dy = \iiint_D \left(-\frac{\partial M}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

Segue então que

$$\oint_C M dx = \iint_S \frac{\partial M}{\partial z} dz dx - \frac{\partial M}{\partial y} dx dy$$

Do mesmo modo estabelecemos as fórmulas análogas para N e R.

Se trocarmos o sinal de N, ambos os membros da fórmula acima mudarão de sinal e ela continua válida. O caso geral pode ser tratado usando uma decomposição num número finito do que foi feito aqui, seguido por um processo com limites.

EXEMPLO 3 Seja o campo de forças F definido por

$$F(x, y, z) = -4yi + 2zj + 3xk$$

e suponha que S seja a parte do parabolóide $z = 10 - x^2 - y^2$ acima do plano $z = 1$. Verifique o teorema de Stokes para esse F e para S , calculando cada um dos seguintes:

- $\oint_C F \cdot dR$ onde uma equação vetorial de C é $R(t) = 3 \cos t i + 3 \sin t j + k$;
- $\oint_C F \cdot T ds$;
- $\iint_S \text{rot } F \cdot N d\sigma$.

Solução A Figura 3 mostra a superfície S e a região D , que é a projeção de S sobre o plano xy . A região D é limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 9$. A curva C , que é a fronteira de S , é a circunferência com centro em $(0, 0, 1)$ e raio 3 no plano $z = 1$.

(a) Temos a seguinte equação vetorial de C :

$$R(t) = 3 \cos t i + 3 \sin t j + k \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (2)$$

Assim,

$$R'(t) = -3 \sin t i + 3 \cos t j \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \oint_C F \cdot dR &= \int_C F(R(t)) \cdot R'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-12 \sin t i + 2j + 9 \cos t k) \cdot (-3 \sin t i + 3 \cos t j) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (36 \sin^2 t + 6 \cos t) dt \\ &= 36 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt + 6 \int_0^{2\pi} \cos t dt \\ &= 18t - 9 \sin 2t + 6 \sin t \Big|_0^{2\pi} \\ &= 36\pi \end{aligned}$$

(b) Para calcular $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$, obtemos uma equação vetorial de C , tendo s como um parâmetro, onde s unidades é o comprimento de arco medido do ponto onde $t = 0$. Como $\frac{ds}{dt} = \|R'(t)\|$ temos de (3)

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \sqrt{9 \operatorname{sen}^2 t + 9 \operatorname{cos}^2 t} \\ &= 3\sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{cos}^2 t} \\ &= 3\end{aligned}$$

Portanto, $s = 3t + C$, e como $s = 0$ quando $t = 0$, $C = 0$. Assim,

$$s = 3t$$

De (2) com $t = \frac{1}{3}s$, obtemos

$$\mathbf{R}(s) = 3 \operatorname{cos} \frac{1}{3}s \mathbf{i} + 3 \operatorname{sen} \frac{1}{3}s \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad 0 \leq s \leq 6\pi$$

Como $\mathbf{T}(s) = D_s \mathbf{R}(s)$, temos

$$\mathbf{T}(s) = -\operatorname{sen} \frac{1}{3}s \mathbf{i} + \operatorname{cos} \frac{1}{3}s \mathbf{j} \quad 0 \leq s \leq 6\pi$$

Logo,

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds &= \int_C \mathbf{F}(\mathbf{R}(s)) \cdot \mathbf{T}(s) \, ds \\ &= \int_0^{6\pi} (-12 \operatorname{sen} \frac{1}{3}s \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 9 \operatorname{cos} \frac{1}{3}s \mathbf{k}) \cdot (-\operatorname{sen} \frac{1}{3}s \mathbf{i} + \operatorname{cos} \frac{1}{3}s \mathbf{j}) \, ds \\ &= \int_0^{6\pi} (12 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{3}s + 2 \operatorname{cos} \frac{1}{3}s) \, ds \\ &= 12 \int_0^{6\pi} \frac{1 - \operatorname{cos} \frac{2}{3}s}{2} \, ds + 2 \int_0^{6\pi} \operatorname{cos} \frac{1}{3}s \, ds \\ &= 6s - 9 \operatorname{sen} \frac{2}{3}s + 6 \operatorname{sen} \frac{1}{3}s \Big|_0^{6\pi} \\ &= 36\pi\end{aligned}$$

(c) Primeiro calculamos $\operatorname{rot} \mathbf{F}$.

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -4y & 2z & 3x \end{vmatrix} \\ &= -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}\end{aligned}$$

Assim,

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = \iint_S (-2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \cdot \mathbf{N} \, d\sigma$$

Para calcular essa integral de superfície aplicamos (9) da Secção 19.5, pois \mathbf{N} é uma normal unitária superior. O campo vetorial é $-2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$; assim $M = -2$, $N = -3$ e $R = 4$. Como uma equação da superfície é $z = 10 - x^2 - y^2$,

$$f(x, y) = 10 - x^2 - y^2 \quad f_x(x, y) = -2x \quad f_y(x, y) = -2y$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma &= \iint_D [-(-2)(-2x) - (-3)(-2y) + 4] \, dA \\
 &= \iint_D (-4x - 6y + 4) \, dA \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (-4r \cos \theta - 6r \operatorname{sen} \theta + 4)r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{4}{3}r^3 \cos \theta - 2r^3 \operatorname{sen} \theta + 2r^2 \right]_0^3 \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} (-36 \cos \theta - 54 \operatorname{sen} \theta + 18) \, d\theta \\
 &= -36 \operatorname{sen} \theta + 54 \cos \theta + 18\theta \Big|_0^{2\pi} \\
 &= 36\pi
 \end{aligned}$$

Os resultados das partes (a), (b) e (c) são todos 36π . Verificamos, portanto, o teorema de Stokes para esse \mathbf{F} e para S .

EXEMPLO 4 Use o teorema de Stokes para calcular a integral de linha

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

se $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$ e C for a fronteira orientada da superfície que consiste na parte do cilindro $z = 4 - x^2$ no primeiro octante que é delimitada pelos planos coordenados e pelo plano $y = 3$.

Solução A Figura 4 mostra a superfície S e a fronteira orientada C que é composta de quatro arcos C_1 , C_2 , C_3 e C_4 . Do teorema de Stokes,

$$\begin{aligned}
 \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds &= \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma \\
 \operatorname{rot} \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xy & y^2 \end{vmatrix} \\
 &= 2y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \iint_S (2y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}) \cdot \mathbf{N} \, d\sigma$$

Como \mathbf{N} é um vetor unitário superior, calculamos o valor da integral de superfície aplicando (9) da Seção 19.5. Como o campo vetorial é $2y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, então $M = 2y$, $N = x$ e $R = y$. Uma equação de S é $z = 4 - x^2$. Logo,

$$f(x, y) = 4 - x^2 \quad f_x(x, y) = -2x \quad f_y(x, y) = 0$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
 \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds &= \iint_D [-(2y)(-2x) - x(0) + y] \, dA \\
 &= \iint_D (4xy + y) \, dA
 \end{aligned}$$

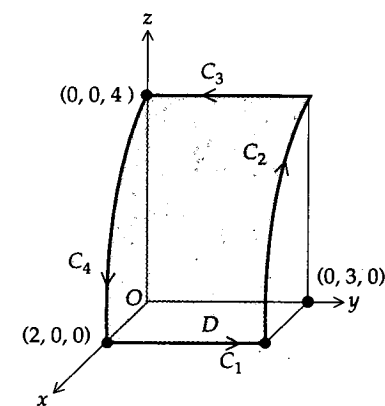


FIGURA 4

A região D está encerrada pelo retângulo no plano xy , limitado pelos eixos x e y e pelas retas $x = 2$ e $y = 3$. Logo,

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds &= \int_0^2 \int_0^3 (4xy + y) \, dy \, dx \\ &= \int_0^2 \left[2xy^2 + \frac{1}{2}y^2 \right]_0^3 \, dx \\ &= \int_0^2 (18x + \frac{9}{2}) \, dx \\ &= 9x^2 + \frac{9}{2}x \Big|_0^2 \\ &= 45\end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 19.6

Nos Exercícios de 1 a 4, verifique o teorema da divergência de Gauss para \mathbf{F} e S .

- $\mathbf{F}(x, y, z) = 2zk$; S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = xi + yj + zk$; S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = xyi + yzj$; S é o cubo limitado pelos planos coordenados e pelos planos $x = 1$, $y = 1$ e $z = 1$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = 4xi - 2yj + zk$; S é a parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ abaixo do plano $z = 4$.

Nos Exercícios de 5 a 8, para o \mathbf{F} e o S do exercício indicado nos Exercício 19.5, encontre o fluxo de \mathbf{F} através de S pelo teorema da divergência de Gauss.

- Exercício 21
- Exercício 22
- Exercício 25
- Exercício 26

Nos Exercícios de 9 a 16, use o teorema da divergência de Gauss para calcular a integral de superfície $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma$ para \mathbf{F} e S dados.

- $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2yz\mathbf{i} + xy^2z\mathbf{j} + xyz^2\mathbf{k}$; S é o cubo no primeiro octante, limitado pelos planos $x = 1$, $y = 2$ e $z = 3$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = 6xi + 3yj + 2zk$; S é o tetraedro com vértices na origem e os pontos $(3, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 2)$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = xi + yj + zk$; S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = xi + yj + zk$; S é a fronteira da região delimitada lateralmente pelo cilindro $x^2 + y^2 = 9$, abaixo pelo plano xy e acima pelo plano $z = 4$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S é a superfície do Exercício 12.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S é a superfície do Exercício 11.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xi + 2yz\mathbf{j} + 3zk$; S é a fronteira da região encerrada entre os planos coordenados e o plano $x + y + z = 1$.

- $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{x^2 + y^2 + z^2}$; S é a fronteira da região fora da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Nos Exercícios de 17 a 22, verifique o teorema de Stokes para \mathbf{F} e S dados.

- $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ acima do plano xy .
- $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ abaixo do plano xy .
- $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S é a parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ abaixo do plano $z = 1$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = xyi + y^2\mathbf{j} + 2k$; S é a superfície do Exercício 19.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = -3yi + 3x\mathbf{j} + 2k$; S é a parte do plano $z = 1$ dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 9$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$; S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ acima do plano xy .

Nos Exercícios de 23 a 28, use o teorema de Stokes para avaliar a integral de linha $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$ para \mathbf{F} e C .

- $\mathbf{F}(x, y, z) = 4yi - 3z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$; C é o triângulo com vértices em $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = (y - x)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$; C é o triângulo com vértices em $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, 1)$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; C é a circunferência $x^2 + y^2 = 4$ no plano xy .
- $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$; C é o quadrado em vértices em $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e $(2, 2, 0)$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = (2y + \sin^{-1} x)\mathbf{i} + e^{y^2}\mathbf{j} + (x + \ln(z^2 + 4))\mathbf{k}$; C é o triângulo com vértices em $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 2)$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = (2z - e^x)\mathbf{i} + (x^3 + \sin y)\mathbf{j} + (y^2 - \operatorname{tg} z)\mathbf{k}$; C tem a equação vetorial $\mathbf{R}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 19

Nos Exercícios 1 e 2, ache o campo vetorial conservativo tendo a função potencial f .

1. (a) $f(x, y) = 2x^2y + 3xy^3$; (b) $f(x, y, z) = xe^y - yze^y$
2. (a) $f(x, y) = e^x \cos y + x \sin y$; (b) $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$

Nos Exercícios de 3 a 6, prove que o campo vetorial \mathbf{F} é conservativo e ache a função potencial.

3. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{2y^2}{1 + 4x^2y^4} \mathbf{i} + \frac{4xy}{1 + 4x^2y^4} \mathbf{j}$
4. $\mathbf{F}(x, y, z) = (6x - 4y)\mathbf{i} + (z - 4x)\mathbf{j} + (y - 8z)\mathbf{k}$
5. $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2 \sec^2 x \mathbf{i} + 2ye^{3z} \mathbf{j} + (3y^2e^{3z} + 2z \operatorname{tg} x)\mathbf{k}$
6. $\mathbf{F}(x, y) = (y \sin x - \sin y)\mathbf{i} - (x \cos y + \cos x)\mathbf{j}$

Nos Exercícios de 7 a 10, ache $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ e $\operatorname{div} \mathbf{F}$ para o campo vetorial dado.

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{yz} \mathbf{i} + e^{xz} \mathbf{j} + e^{xy} \mathbf{k}$
8. $\mathbf{F}(x, y) = \sin y \mathbf{i} + \sin x \mathbf{k}$
9. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{y} \mathbf{i} - \frac{2x}{y} \mathbf{j}$
10. $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x}{y} \mathbf{i} + \frac{y}{z} \mathbf{j} + \frac{z}{x} \mathbf{k}$

Nos Exercícios de 11 a 18, calcule a integral de linha sobre a curva C .

11. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = 3y\mathbf{i} - 4x\mathbf{j}$; $C: \mathbf{R}(t) = 2t^2\mathbf{i} - t\mathbf{j}, 0 \leq t \leq 1$.
12. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = (x + y)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j}$; $C: \mathbf{R}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$ do ponto (8, 4) ao ponto (1, 1).
13. $\int_C (2x + 3y) dx + xy dy$; $C: \mathbf{R}(t) = 4 \sin t \mathbf{i} - \cos t \mathbf{j}, 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$.
14. $\int_C (2x + y) dx + (x - 2y) dy$; $C: x^2 + y^2 = 9$.
15. $\int_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$; $C: \mathbf{R}(t) = (t - 1)\mathbf{i} + (t + 1)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1$.
16. $\int_C xe^y dx - xe^z dy + e^z dz$; $C: \mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1$
17. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y, z) = 3xy\mathbf{i} + (4y^2 - xz)\mathbf{j} + 6z\mathbf{k}$; C : a cúbica retorcida $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1$.
18. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; C : a hélice circular $\mathbf{R}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} + t\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 2\pi$.

Nos Exercícios de 19 a 26, prove que o valor da integral de linha dada é independente do caminho e calcule o valor da maneira mais conveniente. Em cada exercício, C é qualquer curva seccionalmente suave de A até o ponto B .

19. $\int_C 2xe^y dx + x^2e^y dy$; A é (1, 0) e B é (3, 2).

20. $\int_C \left(\frac{1}{y} - y \right) dx + \left(-\frac{x}{y^2} - x \right) dy$; A é (0, 1) e B é (6, 3).
21. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = (\cos y - y \cos x)\mathbf{i} - (\sin x + x \sin y)\mathbf{j}$; A é (0, $\frac{1}{2}\pi$) e B é (π , 0).
22. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = (2xy - 2y)\mathbf{i} + (x^2 - 2x + 3y^2)\mathbf{j}$; A é (2, -1) e B é (3, 2).
23. $\int_C 3y dx + (3x + 4y)dy + 2z dz$; A é (0, 1, -1) e B é (1, 2, 0).
24. $\int_C z \sin y dx + xz \cos y dy + x \sin y dz$; A é (0, 0, 0) e B é (2, 3, $\frac{1}{2}\pi$).
25. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{1}{y} - \frac{2z}{x^2} \right) \mathbf{i} - \left(\frac{1}{z} + \frac{x}{y^2} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{2}{x} + \frac{y}{z^2} \right) \mathbf{k}$; A é (2, -1, 1) e B é (4, 2, -2)
26. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy + 3yz)\mathbf{i} + (x^2 - 4yz + 3xz)\mathbf{j} + (3xy - 2y^2)\mathbf{k}$; A é (0, 2, 1) e B é (1, -1, 4).

Nos Exercícios de 27 a 30, use o teorema de Green para calcular a integral de linha.

27. $\oint_C (3x + 2y) dx + (3x + y^2) dy$, onde C é a elipse $16x^2 + 9y^2 = 144$.
28. $\oint_C \ln(y + 1) dx - \frac{xy}{y + 1} dy$, onde C é a curva fechada, determinada pela curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ e pelo intervalo [0, 4] nos eixos x e y .
29. $\oint_C e^x \sin y dx + e^x \cos y dy$, onde C é qualquer curva fechada suave.
30. $\oint_C (x^2 - y^3) dx + (y^2 + x^3) dy$; onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

Nos Exercícios 31 e 32, use o Teorema 19.4.2 para encontrar a área da região dada.

31. A região encerrada pela parábola $y = x^2$ e pela reta $y = x + 2$.
32. A região encerrada pelas duas parábolas $y = x^2$ e $x^2 = 18 - y$.

Nos Exercícios de 33 a 36, ache o trabalho total realizado quando um objeto é deslocado ao longo do arco C dado, sob ação do campo de forças dado. Suponha que o arco seja medido em metros e a força em newtons.

33. $\mathbf{F}(x, y) = 2x^2y\mathbf{i} + (x^2 + 3y)\mathbf{j}$; C : é o arco da parábola $y = 3x^2 + 2x + 4$ de (0, 4) a (1, 9).
34. $\mathbf{F}(x, y) = xy^2\mathbf{i} - x^2y\mathbf{j}$; C : o arco da circunferência $x^2 + y^2 = 4$ de (2, 0) a (0, 2).

35. $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy - z)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; C : o segmento de reta da origem ao ponto $(4, 1, 2)$.
 36. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + e^{y^2}\mathbf{j} + (x + z)\mathbf{k}$; $C: \mathbf{R}(t) = 3t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$; $0 \leq t \leq 3$.

Nos Exercícios 37 e 38, verifique o teorema da divergência de Gauss no plano e o teorema de Stokes no plano para \mathbf{F} e R dados.

37. $\mathbf{F}(x, y) = 4y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j}$ e R é a região limitada por $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.
 38. $\mathbf{F}(x, y) = 3x^2\mathbf{i} + 4y^2\mathbf{j}$ e R é a região limitada pela elipse $9x^2 + 16y^2 = 144$.

Nos Exercícios 39 e 40, use o teorema de Green para encontrar o trabalho total realizado pelo campo de forças dado em virtude do deslocamento de um objeto no sentido anti-horário, uma volta em torno da curva C . Suponha que o arco seja medido em metros e a força em newtons.

39. C é a circunferência $x^2 + y^2 = 4$;
 $\mathbf{F}(x, y) = (xy^2 + \cos x)\mathbf{i} + (x^2 + e^y)\mathbf{j}$.
 40. C é a elipse $9x^2 + y^2 = 9$;
 $\mathbf{F}(x, y) = (2x - 3y)\mathbf{i} + (x + 2y)\mathbf{j}$.

Nos Exercícios 41 e 42, ache a taxa de escoamento do fluido para fora da região R limitada pela curva C dada, se \mathbf{F} for o campo de velocidades do fluido. Suponha que a velocidade seja medida em centímetros por segundo e a área de R seja medida em centímetros quadrados.

41. $\mathbf{F}(x, y) = (4x - 3y)\mathbf{i} + (5y - 4x^2)\mathbf{j}$; C é o triângulo retângulo com vértices em $(0, 1)$, $(0, 4)$ e $(4, 4)$.
 42. $\mathbf{F}(x, y) = (y^2 + 12x)\mathbf{i} + (4y - x^2)\mathbf{j}$; C é a elipse $x^2 + 4y^2 = 16$.
 43. Ache o valor da integral de linha

$$\int_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

se C for o arco da circunferência $x^2 + y^2 = 4$ de $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

44. Aplique o teorema de Green para calcular a área do quadrilátero com vértices nos pontos $(0, 0)$, $(3, 2)$, $(1, 5)$ e $(-2, 1)$.
 45. Calcule a integral de superfície $\iint_S xy \, d\sigma$, onde S é a parte do plano $3x + 2y - z = 0$ no primeiro octante, abaixo do plano $z = 6$.
 46. Calcule a integral de superfície $\iint_S x^2 \, d\sigma$, onde S é a parte do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ no primeiro octante, limitada pelo plano xy e pelo plano $z = 1$.

47. Calcule a integral de superfície $\iint_S x \, d\sigma$, onde S é a parte do cilindro $z = 9 - x^2$ no primeiro octante, limitada pelos planos coordenados e pelo plano $y = 2$.

48. Calcule a integral de superfície $\iint_S xyz \, d\sigma$, onde S é a parte

do cilindro $y^2 + z^2 = 9$ entre os planos $x = 1$ e $x = 4$.

49. Ache a massa da parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ no primeiro octante, se a densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto (x, y, z) da superfície for $kz^2 \text{ kg-m}^2$, onde k é uma constante.
 50. Ache a massa do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ acima do plano xy , se a densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto (x, y, z) sobre a superfície for $(4 - z) \text{ kg-m}^2$.
 51. Um funil tem a forma da parte do cone $x^2 + y^2 = z^2$ entre os planos $z = 1$ e $z = 4$. Se a densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto (x, y, z) sobre a superfície for $(10 - z) \text{ kg-m}^2$, ache a massa do funil.
 52. Suponha que a superfície S seja a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ que está acima da região D no plano xy , encerrada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$. Se o campo de velocidades do fluido for dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$, ache o fluxo de \mathbf{F} através de S .
 53. O campo de velocidades de um fluido é dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$ e a superfície S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ acima do plano xy . Ache o fluxo de \mathbf{F} através de S .
 54. Verifique o teorema da divergência de Gauss se $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{1}{2}z\mathbf{i}$ e S for a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Nos Exercícios 55 e 56, use o teorema da divergência de Gauss para avaliar a integral de superfície $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}$ para \mathbf{F} e S .

55. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$; S é a fronteira da região delimitada lateralmente pelo cilindro $x^2 + y^2 = 16$, abaixo pelo plano xy e acima pelo plano $z = 2$.
 56. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S é a fronteira da região delimitada pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pelo plano $z = 1$.

Nos Exercícios 57 e 58, verifique o teorema de Stokes para \mathbf{F} e S .

57. $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + 4x\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$; S é a porção do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ acima do plano xy .
 58. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$; S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ acima do plano xy .

Nos Exercícios 59 e 60, use o teorema de Stokes para calcular a integral de linha $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$ para \mathbf{F} e C .

59. $\mathbf{F}(x, y, z) = (z + \ln(x^2 + 1))\mathbf{i} + (\cos y - x^2)\mathbf{j} + (3y^2 - e^z)\mathbf{k}$; C tem a equação vetorial $\mathbf{R}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \mathbf{k}$, onde $0 \leq t \leq 2\pi$.
 60. $\mathbf{F}(x, y, z) = -2y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; C é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ no plano xy .

VINTE

Equações Diferenciais

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t)$$

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t))$$

O problema central das equações diferenciais, em sua forma mais simples, já foi estudado na Secção 5.1 em Antidiferenciação e nas Secções 5.8.1 e 5.8.2 nos Teoremas Fundamentais do Cálculo. Trata-se de determinar qual a função $f(t)$ cuja derivada $f'(t)$ é conhecida, ou seja, dado que

$$f'(t) = g(t)$$

então

$$f(t) = \int g(t) + c$$

A constante c é determinada através do conhecimento de algum valor particular da função $f(t)$. Por esta razão, a resolução de uma equação diferencial é chamada de integração.

* N. do E.: Este capítulo foi especialmente preparado para a edição brasileira.

As equações diferenciais têm uma importância muito grande nas aplicações de matemática. Sempre que indagarmos sobre a evolução de um dado fenômeno susceptível de tratamento matemático, do qual sabemos algo sobre como varia no tempo, estaremos pretendendo resolver uma equação diferencial. Vamos dar alguns exemplos a seguir.

- (a) Se $y(t)$ for a porcentagem de indivíduos numa dada população abertamente contra a política do governo e $(1 - y(t))$ a porcentagem dos que são a favor, é razoável supor que a variação desta porcentagem é simultaneamente proporcional aos dois tipos de atitude. Assim,

$$\frac{dy(t)}{dt} = ky(t)(1 - y(t)) \quad k > 0$$

- (b) Uma das regras do capitalismo é que todo capital empregado deve render juros, ou seja, que a variação do capital $C(t)$ no tempo deve ser proporcional ao capital. Assim,

$$\frac{dC(t)}{dt} = kC(t) \quad k > 0$$

onde o fato da derivada ser positiva caracteriza $C(t)$ como função crescente.

- (c) Em geral, a variação da concentração $C(t)$ de determinada substância no sangue é proporcional à concentração inicial e tende a diminuir com o tempo. Assim,

$$\frac{dC(t)}{dt} = -kC(t) \quad k > 0$$

onde o fato da derivada ser negativa caracteriza $C(t)$ como função decrescente.

Passaremos agora a estudar os conceitos básicos e a seguir os métodos de resolução das equações diferenciais.

20.1 CONCEITOS BÁSICOS

Uma equação do tipo

$$F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0 \quad (1)$$

onde $y = y(t)$ é a função procurada, é chamada de equação diferencial de ordem n . Assim sendo, a ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada mais alta da função incógnita que aparece no problema. A função $y = \varphi(t)$ que transforma a equação (1) numa identidade é chamada *solução* da equação diferencial enquanto que o gráfico de $\varphi(t)$ é chamado de *curva integral*. A solução representada implicitamente por $\phi(t, y) = 0$ é chamada usualmente de uma *integral* de (1).

► **ILUSTRAÇÃO 1** Consideremos a equação $y'(t) - y(t) = 0$. Sabemos que, a menos de uma constante, a única função cuja derivada é ela mesma é a exponencial e^t . E de fato, $\frac{d}{dt} [e^t] - e^t = 0$. Convém observar que, sendo c uma constante qualquer, $\frac{d}{dt} [ce^t] - ce^t = 0$ ◀

► **ILUSTRAÇÃO 2** A função $y(t) = e^{2t}$ é uma solução da equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 5 \frac{dy}{dt} + 6y = 0 \quad \text{pois} \quad 4e^{2t} - 5(2e^{2t}) + 6e^{2t} = 0 \quad \blacktriangleleft$$

► **ILUSTRAÇÃO 3** A função $y(t) = \frac{t^2}{2}$ é uma solução da equação diferencial

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - 2t \frac{dy}{dt} + t^2 = 0 \quad \text{pois} \quad (t)^2 - 2t(t) + t^2 = 0 \quad \blacktriangleleft$$

► **ILUSTRAÇÃO 4** A função $y(t) = e^{t^2}$ é uma solução de

$$\frac{dy}{dt} - 2ty = 0 \quad \text{pois} \quad (2te^{t^2}) - 2t(e^{t^2}) = 0 \quad \blacktriangleleft$$

► **ILUSTRAÇÃO 5** Consideremos as equações diferenciais

$$y'(t) + 2t y(t) = 0 \quad (1)$$

$$tdy = (1 - y) dt \quad (2)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 1 \quad (3)$$

Elas são todas de primeira ordem, enquanto que $\frac{d^2y}{dt^2} - 3 \frac{dy}{dt} + 2y = 0$ é de segunda ordem. ◀

EXEMPLO 1 Sabe-se que num movimento retilíneo uniformemente variado, como o próprio nome diz, a aceleração $a = \frac{dv}{dt}$ é constante. Supondo que o movimento parte do repouso e sabendo que $v = \frac{ds}{dt}$ determine $s(t)$.

Solução Como $\frac{dv}{dt} = a$, então

$$\begin{aligned} v(t) &= \int a dt + c_1 \\ &= at + c_1 \end{aligned} \quad \text{sendo } t \geq 0 \text{ e } c_1 \text{ constante}$$

Na expressão de $v(t)$, fazendo $t = 0$ obtemos $v(0) = c_1$ e, como o movimento começa do repouso, segue que $c_1 = 0$ e portanto $v(t) = at$. Assim,

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = at$$

então

$$\begin{aligned} s(t) &= \int at dt + c_2 \\ &= \frac{1}{2} at^2 + c_2 \end{aligned} \quad \text{sendo } t \geq 0 \text{ e } c_2 \text{ constante}$$

Tomando $t = 0$ na expressão de $s(t)$, teremos $s(0) = c_2$ e então

$$s(t) = \frac{1}{2} at^2 + s(0).$$

20.1.1 DEFINIÇÃO

Uma função $y(t)$ definida implicitamente pela equação $\phi(t, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$, que contém n constantes arbitrárias e é solução da equação diferencial (1), é chamada de **solução geral** da equação na região onde (1) é dada. Atribuindo valores às constantes c_1, c_2, \dots, c_n , obtemos uma **solução particular** de (1).

► **ILUSTRAÇÃO 6** Retomando o Exemplo 1, temos que $v(t) = at + c_1$ e $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + c_2$ são soluções gerais das equações diferenciais

$$\frac{dv}{dt} = a \quad \text{e} \quad \frac{ds}{dt} = at$$

Pudemos eliminar c_1 na expressão de $v(t)$, pois sabíamos que $v(0) = 0$, e então $v(t) = at$ é uma solução particular da equação. No caso da solução geral $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + c_2$, c_2 só poderá ser determinado no caso de conhecermos algum valor particular da função $s(t)$. Digamos que $s(0) = 0$ então $c_2 = 0$, e $s(t) = \frac{1}{2}at^2$ é uma solução particular da equação. ◀

O valor da função que permite eliminar a constante é chamado de *condição*. As condições são classificadas conforme o ponto em que são dadas, assim se a equação diferencial estiver definida para $t \in [a, b]$ e a condição for dada em a teremos uma **condição inicial**. Caso a condição seja dada num ponto $t \neq a$, ela é chamada de **condição de contorno**. O número de condições necessárias para a completa eliminação das constantes é igual à ordem da equação.

Retomando o Exemplo 1, caso sejam dados $v(0)$ e $s(0)$, temos condições iniciais. Sendo $a < 0$, poderíamos considerar $s(t_1)$ como sendo o espaço percorrido até a parada do móvel, teríamos então um problema de contorno.

O *grau* de uma equação refere-se ao expoente da derivada de maior ordem que aparece na equação.

Consideremos as equações diferenciais:

(a) $\frac{dy}{dt} + e^t y = 0$

(b) $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - 2t \frac{dy}{dt} + 6y = 0$

(c) $\frac{d^2y}{dt^2} - 5 \frac{dy}{dt} + 6y = 0$

(a) e (c) são do primeiro grau, enquanto que (b) é do segundo grau.

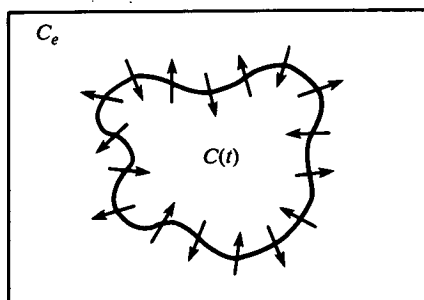


FIGURA 1

► **ILUSTRAÇÃO 7*** O processo de difusão de moléculas através da membrana de uma célula é bastante complicado. Existe uma aproximação simplificada da realidade baseada na Lei de Fick: “o fluxo através de uma membrana é proporcional à área da membrana e à diferença de concentração entre os meios separados por ela, se esta diferença de concentração for pequena.”

Suponhamos que uma célula de volume constante V esteja mergulhada em um meio líquido homogêneo de concentração C_e . O processo de difusão garante que existe um fluxo de moléculas através da membrana da célula em ambas as direções, até que a concentração da solução em seu interior $C = C(t)$ seja igual a C_e . (Veja a Figura 1)

Seja $m = m(t)$ a massa da solução no interior da célula, então pela definição de concentração,

$$m(t) = V \cdot C(t)$$

* BASSANEZI, R. & FERREIRA Jr, W. *Equações Diferenciais com Aplicações*. São Paulo, HARBRA, 1988. p. 45.

O fluxo pode ser representado por $\frac{dm}{dt}$ (taxa de variação da massa). Assim, a lei de Fick é expressa matematicamente por:

$$\frac{dm}{dt} = k A (C_e - C)$$

Como

$$\frac{dm}{dt} = V \cdot \frac{dC}{dt}$$

temos

$$\frac{dC}{dt} = \frac{kA}{V} (C_e - C)$$

onde A é a área da membrana (suposta constante) e k é a constante de permeabilidade, determinada para cada solução, estrutura e espessura da membrana.

Se $C_e > C(t)$ em cada instante t , o fluxo de moléculas será maior no sentido de fora para dentro da célula e, portanto, entram mais moléculas do que saem.

Isto implica que $C = C(t)$ é crescente, isto é, $\frac{dC}{dt} > 0$. O contrário ocorre quando $C_e < C(t)$.

Desta forma, podemos considerar $k > 0$ em ambos os casos.

A solução geral da equação é dada por

$$C(t) = K e^{-\frac{kA}{V}t} + C_e$$

onde K é a constante de integração. ◀

20.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

Dada uma equação diferencial de primeira ordem,

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

a situação mais simples que pode ocorrer em termos da função f é quando f não depende de y . Temos então

$$\frac{dy}{dt} = g(t) \tag{1}$$

Segue então que

$$y(t) = \int g(t) dt + c$$

pelo segundo teorema fundamental do cálculo, Secção 5.8.2. É usual chamar $\int g(t) dt$ de *primitiva* da função y . A função y dada desta forma é a solução geral da equação (1). Observe ainda que se u for uma outra solução de (1) então como $\frac{du}{dt} = g(t)$ segue que $u(t) = \int g(t) dt + c_1$ e podemos obter $u(t)$ a partir de $y(t)$ bastando fazer $c_1 = c$.

20.2.1 DEFINIÇÃO

A equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t)$$

onde $f(t, y) = -a(t)y + b(t)$ é chamada de **linear de primeira ordem**.

Os dados do problema são as funções $a(t)$ e $b(t)$. É natural esperarmos que $a(t)$ e $b(t)$ compareçam em integrais no processo de resolução da equação. Assim sendo, vamos exigir que elas sejam funções contínuas de t .

O problema que se coloca agora é, dada uma equação diferencial linear de 1ª ordem, como determinar uma solução geral para ela. Para tanto vamos desenvolver três métodos de solução.

1º Método de Solução Vamos supor que $y(t) = u(t)v(t)$ onde as funções u e v são também desconhecidas. Substituindo na equação linear de primeira ordem, teremos

$$\frac{du}{dt} v + u \frac{dv}{dt} + a(t) u v = b(t)$$

logo,

$$v \left[\frac{du}{dt} + a(t) u \right] + u \frac{dv}{dt} = b(t)$$

Se escolhermos a função u de forma que ela satisfaça a equação

$$\frac{du}{dt} + a(t) u = 0$$

então,

$$u \frac{dv}{dt} = b(t)$$

e

$$\frac{dv}{dt} = \frac{b(t)}{u(t)}$$

Más a equação acima tem um segundo membro que só depende de t e assim, é do tipo anterior. Então,

$$v(t) = \int \frac{b(t)}{u(t)} dt + c_1$$

e a solução da equação dada sendo $y(t) = u(t)v(t)$ dará

$$y(t) = u(t) \left(\int \frac{b(t)}{u(t)} dt + c_1 \right)$$

Resta-nos então o problema de resolver a equação

$$\frac{du}{dt} + a(t) u = 0$$

chamada de *equação homogênea* associada à equação linear de primeira ordem dada que, por isto, é chamada de equação *não-homogênea* ou *completa*.

Podemos reescrever a equação homogênea como

$$\frac{du}{dt} = -a(t)u$$

Mas sabemos que

$$\frac{d}{dt} \ln |u(t)| = \frac{\frac{du}{dt}}{u}$$

onde por $\ln |u(t)|$ entende-se o logaritmo natural de $|u(t)|$. Segue então que

$$\frac{d}{dt} \ln |u(t)| = -a(t)$$

Mas esta equação tem um segundo membro que só depende de t sendo portanto do tipo anterior onde f só dependia de t .

Assim sendo,

$$\ln |u(t)| = - \int a(t) dt + c_3$$

$$\begin{aligned} e \quad |u(t)| &= \exp \left(- \int a(t) dt + c_3 \right) \\ &= (\exp c_3) \left[\exp \left(- \int a(t) dt \right) \right] \end{aligned}$$

Chamando c_2 à exponencial de c_3 e usando o fato de que a função exponencial é sempre positiva, temos

$$c_2 = \left| u(t) \cdot \exp \left(\int a(t) dt \right) \right| = |g(t)|$$

onde definimos a função $g(t)$ como sendo $u(t) \cdot \exp \left(\int a(t) dt \right)$. Fica assim estabelecido que a função g tem módulo constante. Por outro lado, a função g é o produto da função u , que é derivável pois é solução da equação diferencial homogênea por uma função exponencial. Segue, então, que a função g é contínua. Vamos supor por absurdo que a função g não seja constante. Existiriam então dois valores de t , t_1 e t_2 , tais que $g(t_1) = -c_2$ e $g(t_2) = c_2$. Como g é contínua, segue que deve assumir todos os valores entre $-c_2$ e c_2 existindo portanto um valor de t , digamos t^* , tal que $g(t^*) = 0$. Mas isto não é possível, pois $|g(t)| = c_2$. Assim sendo podemos concluir que $g(t) = c_2$, e

$$u(t) = c_2 \cdot \exp \left(- \int a(t) dt \right)$$

Logo,

$$\begin{aligned} y(t) &= c_2 \exp \left(- \int a(t) dt \right) \left(\int \frac{b(t)}{u(t)} dt + c_1 \right) \\ &= \exp \left(- \int a(t) dt \right) \cdot \int \frac{b(t)}{u(t)} dt + c \exp \left(- \int a(t) dt \right) \end{aligned}$$

onde $c = c_1 c_2$. Não aparece constante no primeiro termo pois a expressão de u envolve a constante c_2 .

Vamos definir a função $w(t)$ como sendo

$$w(t) = \int \frac{b(t)}{u(t)} dt$$

Segue então que

$$y(t) = u(t) w(t) + u(t)$$

Observe ainda que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [u(t) w(t)] &= \frac{du(t)}{dt} \cdot w(t) + u(t) \frac{dw(t)}{dt} \\ &= -a(t) u(t) w(t) + b(t) \end{aligned}$$

Logo, a função $u \cdot w$ é uma solução particular da equação linear. Além disso, podemos ver que a solução geral da equação linear é a soma da solução geral da equação homogênea com uma solução particular da equação não-homogênea. Este resultado é característico das equações lineares em geral.

EXEMPLO 1 Determine pelo 1º método a solução geral da equação diferencial

$$y'(t) = 2t y(t) + t$$

Solução Consideremos em primeiro lugar a equação homogênea

$$\frac{du(t)}{dt} = 2t u(t)$$

cujas soluções são

$$\begin{aligned} u(t) &= c_1 \exp \left(\int 2t dt \right) \\ &= c_1 \exp(t^2) \end{aligned}$$

Pelo 1º método, temos

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{te^{-t^2}}{c_1}$$

logo,

$$v(t) = \frac{1}{c_1} \int te^{-t^2} dt = -\frac{1}{2c_1} \int d(e^{-t^2}) = -\frac{e^{-t^2}}{2c_1} + c_2$$

então,

$$\begin{aligned} y(t) &= u(t) v(t) \\ &= c_1 e^{t^2} \left(\frac{-e^{-t^2}}{2c_1} + c_2 \right) \\ &= -\frac{1}{2} + c e^{t^2} \end{aligned}$$

onde $c = c_1 c_2$.

2º Método de Solução Vamos considerar a função

$$h(t) = y(t) \exp \left(\int a(t) dt \right)$$

Então,

$$\begin{aligned}\frac{dh(t)}{dt} &= \frac{dy(t)}{dt} \cdot \exp\left(\int a(t) dt\right) + a(t) y(t) \exp\left(\int a(t) dt\right) \\ &= \exp\left(\int a(t) dt\right) \left[\frac{dy(t)}{dt} + a(t) y(t)\right] \\ &= \exp\left(\int a(t) dt\right) b(t)\end{aligned}$$

Usamos o fato de que

$$\frac{d}{dt} \left[\exp F(t) \right] = \frac{dF}{dt} \cdot \exp F(t)$$

e

$$\frac{d}{dt} \left[\int a(t) dt \right] = a(t)$$

Segue então que

$$\frac{d}{dt} \left[y(t) \exp\left(\int a(t) dt\right) \right] = b(t) \exp\left(\int a(t) dt\right)$$

Mas a equação diferencial acima é linear e com um segundo membro função somente de t , já resolvida anteriormente. Então,

$$y(t) \exp\left(\int a(t) dt\right) = \int b(t) \exp\left(\int a(t) dt\right) dt + c$$

Resolvendo em relação a y teremos a solução geral da equação linear.

Observe que o fator $\exp\left(\int a(t) dt\right)$ é chamado de **fator integrante**, pois se multiplicarmos ambos os membros da equação diferencial por ele é possível então integrá-la.

EXEMPLO 2 Determine pelo 2º método a solução geral da equação diferencial

$$y'(t) = 2t y(t) + t$$

Solução O fator integrante é $\exp(-t^2)$. Multiplicando ambos os membros da equação diferencial dada pelo fator integrante,

$$e^{-t^2} \left(\frac{dy}{dt} - 2ty \right) = te^{-t^2}$$

$$\frac{d}{dt} \left[y e^{-t^2} \right] = te^{-t^2}$$

$$\begin{aligned}ye^{-t^2} &= \int te^{-t^2} dt + c \\ &= -\frac{e^{-t^2}}{2} + c\end{aligned}$$

e

$$y(t) = -\frac{1}{2} + ce^{t^2}$$

EXEMPLO 3 Dê a solução geral da equação diferencial

$$e^{-t} \frac{dy}{dt} + e^{-t} y = t$$

Solução Podemos reescrever a equação dada como

$$\frac{dy}{dt} + y = te^t$$

A equação homogênea associada é

$$\frac{du}{dt} + u = 0$$

cuja solução é

$$\begin{aligned} u(t) &= c_1 \exp\left(-\int dt\right) \\ &= c_1 e^{-t} \end{aligned}$$

Pelo primeiro método segue que

$$\frac{dv}{dt} = \frac{te^{2t}}{c_1}$$

então,

$$v(t) = \frac{1}{c_1} \int te^{2t} dt + c_2$$

Integrando por partes

$$\int te^{2t} dt = \frac{te^{2t}}{2} - \frac{1}{2} \int e^{2t} dt = \frac{te^{2t}}{2} - \frac{e^{2t}}{4}$$

como

$$y(t) = u(t) v(t)$$

temos

$$y(t) = e^t \left(\frac{2t - 1}{4} \right) + ce^{-t}$$

onde $c = c_1 c_2$.

Pelo 2º método, temos o fator integrante

$$\exp\left(\int dt\right) = e^t$$

Multiplicando ambos os membros da equação dada pelo fator integrante, teremos:

$$e^t \frac{dy}{dt} + e^t y = te^{2t}$$

logo,

$$\frac{d}{dt} (y e^t) = te^{2t}$$

e

$$ye' = \int te^{2t} dt + c$$

mas

$$\int te^{2t} dt = e^{2t} \left(\frac{2t - 1}{4} \right)$$

logo,

$$y(t) = e^t \left(\frac{2t - 1}{4} \right) + ce^{-t}$$

Conforme já foi observado, a solução geral de uma equação linear pode ser encontrada somando à solução geral da equação homogênea uma solução particular da equação completa.

Vejam um método para obter uma solução particular que, acoplado com qualquer método que dê a solução geral da equação homogênea nos permita encontrar a solução geral da equação linear.

3º Método de Solução Resolva a equação diferencial $y'(t) = -y(t) + t^3$. Em primeiro lugar, consideremos a equação homogênea

$$\frac{du}{dt} = -u$$

cuja solução é $u(t) = c_1 e^{-t}$.

Consideremos agora

$$w(t) = \gamma(t) e^{-t}$$

onde tomamos a solução da equação homogênea e em vez de uma constante consideramos uma função de t , a qual devemos determinar. Substituindo $w(t)$ na equação dada, teremos

$$\gamma'(t) e^{-t} - \gamma(t) e^{-t} = -\gamma(t) e^{-t} + t^3$$

Segue então que

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = t^3 e^t$$

e portanto

$$\gamma(t) = \int t^3 e^t dt$$

Integrando por partes, teremos

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= t^3 e^t - 3 \int t^2 e^t dt \\ &= t^3 e^t - 3t^2 e^t + 6 \int t e^t dt \\ &= t^3 e^t - 3t^2 e^t + 6te^t - 6e^t + c_2 \end{aligned}$$

A solução geral $y(t)$ da equação dada é tal que

$$\begin{aligned} y(t) &= u(t) + w(t) \\ &= c_1 e^{-t} + t^3 - 3t^2 + 6t - 6 + c_2 e^{-t} \\ &= c e^{-t} + t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \end{aligned}$$

onde fizemos $c = c_1 + c_2$.

Este método de encontrar uma solução particular da equação completa é chamado de **método da variação das constantes**.

EXERCÍCIOS 20.2

Ache a solução geral das equações diferenciais dadas.

1. $ty'(t) - 2y(t) = -t$

2. $ty'(t) - 3y(t) = -2nt$

3. $ty'(t) - y(t) = (t-1)e^t$

4. $\frac{dy}{dx} + y = \cos x - \sin x$

5. $ty''(t) + 2y'(t) = 0$ (Sugestão: faça $y'(t) = u(t)$)

6. $y' - y \frac{\cos t}{\sin t} = e^t \left(1 - \frac{\cos t}{\sin t} \right)$

7. $y' + \frac{1}{t} y = \frac{1+t}{t} \cdot e^t$

8. $y' + y \operatorname{tg} t = e^{-t}(\operatorname{tg} t - 1)$

9. $ty' - y = t \cos t - \sin t$

10. $y'(t) = \operatorname{tg} t \cdot y + \cos t$

20.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM COM VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

Quando tratamos das equações lineares homogêneas tínhamos a seguinte situação:

$$\frac{dy(t)}{dt} = -a(t) y(t)$$

Consideremos agora um caso um pouco mais complicado onde, em vez de y temos uma função de y , ou seja

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{g(t)}{f(y)}$$

Podemos reescrever esta equação como

$$f(y) \cdot \frac{dy(t)}{dt} = g(t)$$

20.3.1 TEOREMA

Seja F uma função tal que $\frac{dF}{dt} = f(y) \frac{dy}{dt}$. Segue, então, que

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt} \int g(t) dt$$

pois, pelo teorema fundamental do cálculo, Secção 5.8.1,

$$\frac{d}{dt} \int g(t) dt = g(t) = f(y) \frac{dy}{dt}$$

Logo,

$$F(y(t)) = \int g(t) dt + c$$

que define implicitamente a solução geral $y(t)$ da equação dada.

Convém observar ainda que se $\frac{dF}{dt} = f(y) \frac{dy}{dt}$, então

$$dF = f(y) dy$$

e portanto

$$F = \int f(y) dy$$

EXEMPLO 1 Encontre a solução geral de $\frac{dy}{dt} = \frac{t^2}{y^2}$

Solução Podemos reescrever a equação dada como

$$y^2 \frac{dy}{dt} = t^2$$

ou

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{y^3(t)}{3} \right) = t^2$$

Logo,

$$y^3(t) = t^3 + c \quad c \text{ sendo uma constante arbitrária}$$

e

$$y(t) = (t^3 + c)^{\frac{1}{3}}$$

EXEMPLO 2 Determine a solução geral de

$$\frac{dy(t)}{dt} = 1 + y^2(t)$$

Solução A equação diferencial pode ser escrita como

$$\frac{1}{1 + y^2(t)} \frac{dy(t)}{dt} = 1$$

ou seja

$$\frac{d}{dt} [\text{arc tg } y(t)] = 1$$

Logo,

$$\text{arc tg } y(t) = t + c$$

e

$$y(t) = \text{tg}(t + c)$$

EXEMPLO 3 Determine a solução geral da equação diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} = e^{t-y}$$

Solução A equação pode ser reescrita como

$$e^y \frac{dy}{dt} = e^t$$

mas

$$e^y \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} [e^{y(t)}]$$

então,

$$\frac{d}{dt} [e^{y(t)}] = e^t$$

Logo,

$$e^{y(t)} = e^t + c \quad \text{e} \quad y(t) = \ln(e^t + c)$$

EXEMPLO 4 Calcule a solução geral da equação diferencial

$$(1 - x) dy - y^2 dx = 0$$

Solução Podemos reescrever a equação como

$$\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - x}$$

mas

$$\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (-y^{-1})$$

Logo,

$$-\frac{1}{y} = \int \frac{dx}{1 - x} = -\ln c(1 - x)$$

Temos então

$$y \ln c(1 - x) = 1$$

EXEMPLO 5 Calcule a solução geral da equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1 + y^2}{1 + t^2}$$

Solução Podemos reescrever a equação dada como

$$\frac{1}{1 + y^2} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{1 + t^2}$$

como

$$\frac{1}{1 + y^2} \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} [\text{arc tg } y], \text{ segue que}$$

$$\text{arc tg } y = \text{arc tg } t + c_1$$

Donde

$$y = \operatorname{tg} [\operatorname{arc} \operatorname{tg} t + c_1]$$

mas

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

Logo,

$$y = \frac{t + \operatorname{tg} c_1}{1 - t \cdot \operatorname{tg} c_1} = \frac{t + c}{1 - ct}$$

onde $c = \operatorname{tg} c_1$.

Vejamos um exemplo de aplicação das equações diferenciais com variáveis separáveis.

► **ILUSTRAÇÃO 1 Crescimento Específico ou Lei da Alometria***

Nem todas as partes do corpo de um indivíduo têm em cada instante um desenvolvimento proporcional. A cabeça de uma criança cresce mais lentamente que seu corpo. O rápido crescimento dos pés de um adolescente, comparado com o resto de seu corpo, causa muitas vezes alguns transtornos. A *Alometria* estuda estes diferentes padrões de crescimento.

O *tamanho* de um órgão pode ser a medida do seu volume, peso, comprimento ou área lateral.

Sejam $x = x(t)$ e $y = y(t)$ os tamanhos de órgãos ou partes do corpo distintos de um mesmo indivíduo, num instante t .

Dizer que uma parte cresce mais rapidamente que a outra é o mesmo que colocar

$$\frac{dx}{dt} > \frac{dy}{dt}$$

Uma maneira melhor para se poder relacionar diferentes crescimentos é através do crescimento específico ou relativo de cada órgão, definido por $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$.

Assim, se o crescimento absoluto for exponencial, seu crescimento específico será constante (verifique!).

A Lei da Alometria estabelece que, no mesmo indivíduo, “os crescimentos específicos de seus órgãos são proporcionais”. O modelo matemático é, pois,

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = k \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} \quad (1)$$

com $x > 0$ e $y > 0$ e k constante (taxa de crescimento relativo).

Nesta equação x e y são variáveis equivalentes. Usando a Regra da Cadeia podemos escrever

$$\frac{dx}{dy} = k \frac{x}{y} \left(\text{de maneira análoga vale } \frac{dy}{dx} = k' \left| \frac{y}{x} \right. \right) \quad (2)$$

* BASSANEZI, R. & FERREIRA Jr, W. *Equações Diferenciais com Aplicações*. São Paulo, HARBRA, 1988. p. 57-58.

Separando as variáveis e integrando, obtemos

$$\ln x = k \ln y + \ln c, \quad c > 0 \quad (3)$$

ou

$$x = cy^k \quad (x > 0 \text{ e } y > 0) \quad (4)$$

Na prática é comum usar a equação (3); tomamos

$$X = \ln x \text{ e } Y = \ln y, \text{ e então, } X = kY + c$$

e, assim, num gráfico log-log os tamanhos se correlacionam na equação de uma reta!

O mesmo mecanismo da Lei da Alometria, isto é, a proporcionalidade entre crescimentos específicos, é usado no estudo do metabolismo, das diferenças raciais etc. Um exemplo de aplicação da Equação (4) foi dado por Bertalanffy (1973) relacionando o peso $W(t)$ e o comprimento $\ell(t)$ de peixes

$$W(t) = W_{\infty} \left(\frac{\ell(t)}{\ell_{\infty}} \right)^3$$

EXERCÍCIOS 20.3

Resolva as equações diferenciais

1. $dx + \left(\frac{y-1}{x^2} \right)^3 dy = 0$

2. $x^2(y-1) dx + y(x+1)^2 dy = 0$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{(x+1)(y+2)}$

4. $(1+x^2) dy - xy dx = 0$

5. $y'(t) = \frac{1-y^2}{t^2-1}$

6. $y'(t) = \frac{3}{t(1+y^2)}$

7. $y'(t) = \frac{1-y^2}{ty}$

8. $xy(1+x^2) dy - (1+y^2) dx = 0$

9. $(2+y) dt + (t-3) dy = 0$

10. $t(t+3) dy = y(2t+3) dt$

11. $d\rho + \rho \frac{\sin \theta}{\cos \theta} d\theta = 0$

12. $\operatorname{tg} x \operatorname{sen}^2 y dx + \cos^2 x \operatorname{cotg} y dy = 0$

13. $3e^x \operatorname{tg} y dx + (1-e^x) \sec^2 y dy = 0$

14. $(1+e^x) y y' = e^x$, sendo $y(0) = 1$

15. $(xy^2+x) dx + (x^2y-y) dy = 0$, sendo $y(0) = 1$

20.4 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS HOMOGÊNEAS

A palavra homogêneo é usada para qualificar algo que tenha uma estrutura ou composição uniforme. Em Matemática, significa que os símbolos considerados têm o mesmo grau matemático, ou dimensão, nos símbolos considerados.

20.4.1 DEFINIÇÃO

Uma expressão em t e y é chamada de **homogênea de grau n** se, substituindo t por λt e y por λy , obtivermos λ^n vezes a expressão anterior. Isto é,

$$A(\lambda t, \lambda y) = \lambda^n A(t, y)$$

O termo homogêneo refere-se ao fato das variáveis t e y comparecerem com o mesmo grau.

► **ILUSTRAÇÃO 1** A expressão $t^2 + ty + y^2$ é homogênea de grau 2, pois $(\lambda t)^2 + (\lambda t)(\lambda y) + (\lambda y)^2 = \lambda^2 (t^2 + ty + y^2)$

A expressão $[x^2 + y^2]^{1/2} + x \operatorname{sen} \frac{x}{y}$ é homogênea de grau 1, pois

$$[(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2]^{1/2} + \lambda x \operatorname{sen} \frac{\lambda x}{\lambda y} = \lambda \left\{ [x^2 + y^2]^{1/2} + x \operatorname{sen} \frac{x}{y} \right\} \quad \blacktriangleleft$$

20.4.2 DEFINIÇÃO

A equação diferencial

$$A(t, y) dt + B(t, y) dy = 0$$

é chamada *homogênea* quando $A(t, y)$ e $B(t, y)$ forem **homogêneas de mesmo grau**.

► **ILUSTRAÇÃO 2** A equação diferencial

$$(x^2 + xy) dx + 2y^2 dy = 0$$

é homogênea, pois $(x^2 + xy)$ e $2y^2$ são homogêneas de grau 2. ◀

► **ILUSTRAÇÃO 3** Consideremos a equação diferencial linear

$$y'(t) + a(t) y(t) = 0$$

Ela pode ser reescrita como

$$a(t) dt + \frac{1}{y} dy = 0$$

Para que fosse homogênea, deveríamos ter $a(t)$ e $\frac{1}{y}$ como homogêneas de mesmo grau, o que nem sempre acontece. No caso de $a(t) = \frac{1}{t}$, por exemplo, ela seria homogênea, pois $\frac{1}{t}$ e $\frac{1}{y}$ são homogêneas de grau -1 .

Vamos explicar em que sentido está sendo usado o termo homogênea para a equação $y'(t) + a(t) y(t) = 0$.

Consideremos um sistema linear

$$Ax = b$$

onde A é uma matriz real $n \times n$, b e x são vetores em \mathbb{R}^n . O sistema $Ax = 0$ é chamado de homogêneo pois as coordenadas de $b = 0$ são homogêneas, todas iguais a zero, apresentando assim uma composição uniforme.

A equação $y'(t) + a(t) y(t) = b(t)$ pode ser escrita como

$$[D + a(t) 1] y(t) = b(t)$$

onde devemos entender que

$$\begin{aligned} [D + a(t) 1] y(t) &= Dy(t) + a(t) y(t) \\ &= \frac{dy}{dt} + a(t) y(t) \end{aligned}$$

Por analogia com sistemas lineares, a equação

$$[D + a(t) 1] y(t) = 0$$

é chamada de homogênea.

Dada a equação

$$A(t, y) dt + B(t, y) dy = 0$$

onde A e B são homogêneas de grau n , considerando a transformação $y = tx$, a equação dada tornar-se-á uma equação com variáveis separáveis. De fato, como A e B são homogêneas de grau n ,

$$A(t, y) dt + B(t, y) dy = t^n \left\{ A\left(1, \frac{y}{t}\right) dt + B\left(1, \frac{y}{t}\right) dy \right\} = 0$$

Assim,

$$A\left(1, \frac{y}{t}\right) dt + B\left(1, \frac{y}{t}\right) dy = 0$$

Tomando

$$y = tx \quad \text{então} \quad dy = tdx + xdt \quad \text{e}$$

$$A(1, x) dt + B(1, x)[tdx + xdt] = 0$$

Logo,

$$[A(1, x) + xB(1, x)] dt + tB(1, x) dx = 0$$

E, portanto,

$$\frac{1}{t} dt + \frac{B(1, x)}{A(1, x) + xB(1, x)} dx = 0$$

com variáveis separadas. ◀

EXEMPLO 1 Resolva a equação diferencial

$$2ty dt - (t^2 - y^2) dy = 0$$

Solução As expressões $2ty$ e $-(t^2 - y^2)$ são homogêneas de grau 2. Usando a transformação $y = tx$, $dy = tdx + xdt$ resulta

$$t^2\{(1 + x^2) dt - 2x [tdx + xdt]\} = 0$$

Logo,

$$(1 + x^2 - 2x^2) dt - 2tx dx = 0$$

e

$$\frac{1}{t} dt - \frac{2x}{1 - x^2} dx = 0$$

Integrando, teremos

$$\ln t + \ln(1 - x^2) = \ln c_1$$

ou

$$\ln t \left(1 - \frac{y^2}{t^2}\right) = \ln c_1$$

Assim sendo,

$$t - \frac{y^2}{t} = c \quad \text{ou} \quad t^2 - y^2 = ct$$

► ILUSTRAÇÃO 4 Espelho Parabólico*

Os raios luminosos provenientes de uma fonte luminosa puntual incidem em um refletor espelhado, de modo que todos os raios refletidos saem paralelos. O problema é determinar a forma do refletor que tenha esta propriedade.

Consideremos a origem de um sistema cartesiano o ponto de onde partem os raios luminosos e o eixo das abscissas, disposto na mesma direção do feixe refletido.

Seja $P(x, y)$ o ponto de incidência sobre o refletor de um raio luminoso.

A Figura 1 representa uma secção do refletor pelo plano xy que contém o eixo das abscissas e o ponto $P(x, y)$.

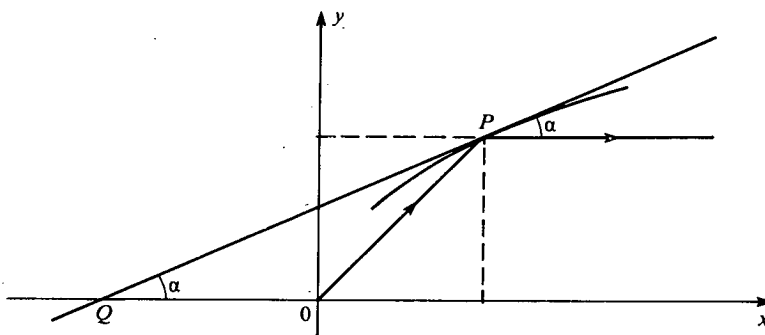


FIGURA 1 Espelho parabólico

Estamos supondo o refletor com uma superfície suave. Assim, podemos considerar a reta tangente no ponto P à curva, determinada pela intersecção do plano xy com o refletor. Seja Q a intersecção desta reta com o eixo x .

O triângulo PQO é isósceles porque o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão; então $QO = OP = \sqrt{x^2 + y^2}$. Portanto,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \quad (1)$$

Como $\operatorname{tg} \alpha$ é o coeficiente angular da reta tangente à curva $y = \varphi(x)$ no ponto $P(x, y)$, temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \quad (2)$$

que é uma equação homogênea, sugerindo a mudança da variável $z = \frac{y}{x}$.

No entanto, se racionalizarmos o denominador da equação, podemos escrever

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x - \sqrt{x^2 + y^2})}{x^2 - (x^2 + y^2)} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y} \quad (y \neq 0) \quad (3)$$

ou

$$ydy + xdx = \sqrt{x^2 + y^2} dx \quad (4)$$

que pode ser escrita ainda por

$$\frac{ydy + xdx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = dx \quad \text{ou} \quad d(\sqrt{x^2 + y^2}) = dx$$

* BASSANEZI, R. & FERREIRA, Jr, W. *Equações Diferenciais com Aplicações*. São Paulo, HARBRA, 1988. p. 98-99.

Logo,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + c \text{ ou } y^2 = 2cx + c^2 \quad (c \text{ constante})$$

que é uma família de parábolas com o foco na origem (fonte de luz). Se cada corte do espelho for uma parábola, a superfície procurada será um parabolóide de revolução. ◀

EXERCÍCIOS 20.4

Resolva as equações diferenciais dadas.

1. $2(4y + 5t) dt + (5y + 7t) dy = 0$

3. $2t \frac{dy}{dt} + (t + 4y) = 0$

5. $4 \frac{dy}{dx} + \frac{x}{y} = 0$, sendo $y(4) = 2$

7. Uma curva passa pelo ponto $x = 2, y = 1$ e tem por coeficiente angular $-\left(\frac{x+y}{x}\right)$ em cada ponto. Determine a equação da curva.

9. Resolva $\frac{dy}{dx} = \frac{-x + 2y - 5}{2x - y + 4}$ mediante a substituição $x = u + \alpha, y = v + \beta$ onde α e β são encontrados resolvendo $-\alpha + 2\beta = 5$ e $2\alpha - 2\beta = -4$.

2. $[2t y(t) + 3y^2(t)] y'(t) + (y^2(t) + 2t^2) = 0$

4. $\frac{dy}{dt} + 2 \left[\frac{1 - y^2}{1 - 4t^2} \right]^{1/2} = 0$

6. $y dt = t dy - [t^2 + y^2]^{1/2} dt$

8. Uma curva passa pelo ponto $x = \frac{1}{2}, y = 0$ e tem por coeficiente angular $\frac{y + [x^2 + y^2]^{1/2}}{x}$ em cada ponto. Determine a equação da curva.

10. Prove que $(t + y)^{a+b} (t - y)^{a-b} = c$ é a solução de $(at - by) dy + (bt - ay) dy = 0$.

20.5 EQUAÇÃO DE BERNOULLI

Trata-se de uma equação diferencial do tipo

$$y'(t) = P(t) y(t) + Q(t) y^m(t) \quad \text{onde } m \neq 0 \text{ e } m \neq 1$$

Para resolvê-la façamos a substituição

$$y(t) = x^k(t)$$

onde k deve ser determinado. Teremos então

$$y'(t) = k \cdot x^{k-1}(t) \cdot x'(t)$$

e a equação dada se transforma em

$$k x^{k-1}(t) x'(t) = P(t) x^k(t) + Q(t) x^{km}(t)$$

então,

$$x'(t) = \frac{1}{k} P(t) x(t) + \frac{1}{k} Q(t) x^{mk-k+1}$$

Vamos escolher k de tal forma que

$$mk - k + 1 = 0$$

ou

$$k = \frac{-1}{m-1}$$

e então a equação dada se transforma numa equação linear.

EXEMPLO 1 Resolva a equação diferencial

$$t \frac{dy}{dt} + y + t^2 y^2 = 0$$

Solução Podemos reescrevê-la como

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{t}y - t^2 y^2$$

Fazendo $y = x^{-1}$ pois $k = \frac{-1}{2-1} = -1$, então

$$y' = -x^{-2}x'$$

e então a equação dada se transforma em

$$-x^{-2}x' = -\frac{1}{t}x^{-1} - tx^{-2} \quad \text{ou seja} \quad x' = \frac{1}{t}x + t$$

que é uma equação linear. A equação homogênea é

$$x' - \frac{1}{t}x = 0 \quad \text{ou seja} \quad \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} [\ln x] = \frac{1}{t}$$

Assim,

$$\ln x = \ln c_2 t \quad \text{e} \quad x = c_2 t$$

Tomando na equação completa $x = uv$, então

$$x' = u'v + uv' \quad \text{e} \quad u'v + uv' - \frac{1}{t}uv = t$$

Logo,

$$\left(u' - \frac{1}{t}u\right)v + uv' = t$$

Tomando u como solução da equação homogênea, teremos

$$v' = \frac{t}{c_2 t} = \frac{1}{c_2}$$

portanto

$$v(t) = \frac{1}{c_2} t + c_1$$

e

$$x(t) = u(t)v(t) = c_2 t \left[\frac{1}{c_2} t + c_1 \right] = t^2 + ct$$

Como $y(t) = \frac{1}{x(t)}$, temos

$$y(t) = \frac{1}{t^2 + ct}$$

EXEMPLO 2 Resolva

$$y' - \frac{3}{x}y = y^5$$

Solução Dividindo ambos os membros da equação por y^5 , obtemos

$$y^{-5}y' - \frac{3}{x}y^{-4} = 1$$

Seja $v = y^{-4}$, portanto $v' = -4y^{-5}y'$ e $y^{-5}y' = -\frac{v'}{4}$

Então, temos

$$-\frac{1}{4}v' - \frac{3}{x}v = 1 \quad \text{ou} \quad v' + \frac{12}{x}v = -4$$

Multiplicando ambos os membros pelo fator integrante x^{12} , e como

$$\frac{d}{dx}(vx^{12}) = v'x^{12} + 12vx^{11}$$

temos

$$d(vx^{12}) = -4x^{12} dx$$

Integrando, obtemos

$$vx^{12} = -\frac{4x^{13}}{13} + c \quad \text{ou} \quad y^{-4} = -\frac{4}{13}x + cx^{-12}$$

► **ILUSTRAÇÃO 1 Crescimento de peixes (von Bertalanffy)***

A pesca sempre foi um elemento importante para a sobrevivência de muitas raças. Com o desenvolvimento de materiais sofisticados e muitas vezes predatórios, o estoque de peixes diminuiu muito, até mesmo causando o perigo de extinção de algumas espécies. Atualmente existem leis internacionais que definem a maneira como a pesca deve ser efetuada, impondo controle sobre o tamanho das redes, tamanho das malhas e períodos de aprisionamento. Os modelos matemáticos podem ser utilizados para se medir o efeito de tais controles e estabelecer em que condições o peixe pode ser capturado. O peso $p(t)$ de cada espécie é dado pela equação de von Bertalanffy (obtida experimentalmente):

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p^{2/3} - \beta p \quad (1)$$

a qual estabelece que o aumento do peso de um peixe é proporcional à área de sua superfície (α é a constante de anabolismo, representando a taxa de síntese de massa por unidade de superfície do animal). β é a constante de catabolismo, representando a taxa de diminuição da massa por unidade de massa.

A equação (1) é uma equação de Bernoulli com $n = \frac{2}{3}$, isto é

$$\frac{dp}{dt} + \beta p = \alpha p^{2/3}$$

* BASSANEZI, R. & FERREIRA, Jr, W. *Equações Diferenciais com Aplicações*. São Paulo, HARBRA, 1988. p. 79-82.

Fazendo a substituição $z = p^{1-2/3} = p^{1/3}$, vem

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{3} p^{-2/3} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{3} p^{-2/3} (\alpha p^{-2/3} - \beta p) = \frac{\alpha}{3} - \frac{\beta}{3} z$$

ou seja

$$\frac{dz}{dt} + \frac{\beta}{3} z = \frac{\alpha}{3} \quad (\text{equação linear})$$

cuja solução é dada por

$$z = \frac{\alpha}{\beta} + C e^{-\beta t/3} \quad (\text{verifique!})$$

Portanto

$$p(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \left(1 + \frac{C\beta}{\alpha} e^{-\beta t/3}\right)^3$$

Quando $t = 0$, o valor de p é insignificante. Usamos $p(0) \cong 0$ e obtemos

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \left(1 + \frac{C\beta}{\alpha}\right)^3 = 0, \text{ e então } 1 + \frac{C\beta}{\alpha} = 0 \text{ ou } \boxed{C = -\frac{\alpha}{\beta}}$$

$$\text{Assim, } p(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 (1 - e^{-\beta t/3})^3.$$

Quando t cresce, p tende a $P_\infty = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3$. Tomando $k = \frac{\beta}{3}$, temos

$$p(t) = P_\infty (1 - e^{-kt})^3$$

que fornece o peso do peixe em cada instante t .

A equação (2) é chamada *equação de von Bertalanffy* para o aumento de peso do peixe. Um estudo desta equação nos fornece algumas informações interessantes:

derivando (2) em relação a t , obtemos

$$\frac{dp}{dt} = 3k P_\infty (1 - e^{-kt})^2 e^{-kt}$$

derivando mais uma vez,

$$\frac{d^2p}{dt^2} = 3k^2 P_\infty e^{-kt} (1 - e^{-kt})(3e^{-kt} - 1)$$

Agora, $\frac{dp}{dt} = 0$ quanto $t = 0$ ou quando $t \rightarrow +\infty$ e $\frac{d^2p}{dt^2} = 0$ se $t = 0$,

ou $t \rightarrow +\infty$, ou $t = \frac{\ln 3}{k}$.

Ainda, se $p \neq 0$ então $\frac{dp}{dt} > 0$, ou seja, o peso é sempre crescente, tendo um valor limite P_∞ . Matematicamente P_∞ é "atingido" quando $t \rightarrow +\infty$, mas na realidade este "tempo infinito" é de aproximadamente 10 anos! Esta contradição pode ser minorada se, por exemplo, estabelecermos que 99% do peso limite de um peixe é atingido depois de 10 anos.

Por outro lado, $t^* = \frac{\ln 3}{k}$ é um ponto de inflexão da curva obtida de (2) e $p(t^*) = P_\infty (1 - e^{-\ln 3})^3 = 0,296 P_\infty$. O valor $t^* = \frac{\ln 3}{k}$ é o instante de maior variação de peso do peixe, pois $\frac{dp}{dt}$ atinge seu valor máximo em $t = t^*$ (veja a Figura 2).

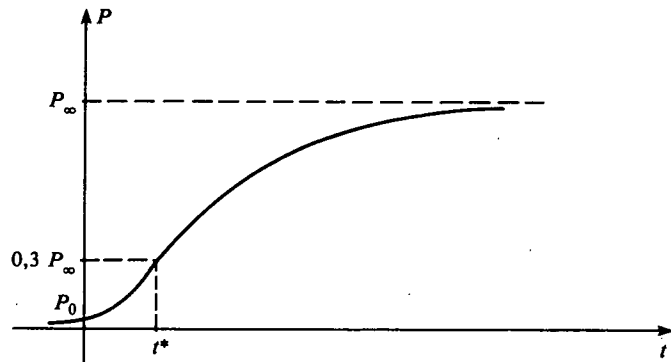


FIGURA 2 Curva de von Bertalanffy para crescimento em peso de peixes

Do princípio da Alometria (veja a Ilustração 1 da Secção 20.3) sabemos que o crescimento do organismo é proporcional à superfície do corpo: então, podemos escrever a equação (1) na forma

$$\frac{dp}{dt} = \alpha S - \beta p \quad (3)$$

sendo S a superfície fisiológica do organismo.

Para expressarmos S e p em termos do comprimento linear ℓ do organismo, assumimos que este cresce isometricamente e tem uma constante específica gravitacional. Assim,

$$S = a\ell^2 \text{ e } p = b\ell^3 \quad (a \text{ e } b \text{ constantes})$$

Portanto,

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} (b\ell^3) = 3b\ell^2 \frac{d\ell}{dt}$$

Estes valores, substituídos na equação (3) nos dão

$$3b\ell^2 \frac{d\ell}{dt} = \alpha a\ell^2 - \beta b\ell^3$$

ou seja

$$\frac{d\ell}{dt} = \lambda - k\ell, \text{ onde } \lambda = \frac{\alpha}{3b} \text{ e } k = \frac{\beta}{3} \quad (4)$$

A equação (4) é autônoma e sua solução é dada por

$$\ell(t) = \frac{\lambda}{k} - C e^{-kt}$$

Usando a condição inicial $\ell(0) \cong 0$, obtemos $C = \frac{\lambda}{k}$.

Por outro lado, o comprimento limite l_∞ é dado quando $t \rightarrow \infty$, isto é, $l_\infty = \frac{\lambda}{k}$. Desta forma, obtemos a expressão

$$l(t) = l_\infty (1 - e^{-kt})$$

denominada equação de von Bertalanffy para o crescimento, em comprimento, do peixe. ◀

EXERCÍCIOS 20.5

Dê a solução geral das equações diferenciais.

1. $2t \frac{dy}{dt} + 2y = ty^3$

2. $\frac{dy}{dt} + \frac{y}{t} = 2y^2$

3. $\frac{dy}{dt} + \frac{y}{t} = y^3$

4. $xy' - y = y^2$

5. $yy' + y^2 \operatorname{tg} t = \cos^2 t$

6. $y'(t) = \frac{4}{t}y + t\sqrt{y}$

7. $y^2 dx - (2xy + 3) dy = 0$

8. $2xy \frac{dy}{dx} - y^2 + x = 0$

9. $ydx + \left(x - \frac{1}{2}x^3y\right) dy = 0$

10. $3x dy = y(1 + x \operatorname{sen} x - 3y^2 \operatorname{sen} x) dx$

20.6 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EXATAS

Até agora sabemos resolver as equações diferenciais autônomas tipo $\frac{dy}{dt} = g(t)$, as lineares $\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t)$ e as separáveis $\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{f(y)}$.

Em geral somos capazes de resolver equações do tipo

$$\frac{d}{dt} F(t, y) = 0$$

pois se a derivada de F em relação a t for nula segue que $F(t, y) = c$, c constante, e esta equação define y como uma função implícita de t .

Como reconhecer que uma dada equação

$$M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0$$

é a derivada em relação a t de alguma função $F(t, y)$?

Observe que

$$\frac{d}{dt} F(t, y) = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

pela regra da cadeia. Assim sendo, a equação dada é da forma $\frac{d}{dt} F(t, y)$ se e somente se

$$M(t, y) = \frac{\partial F}{\partial t} \quad \text{e} \quad N(t, y) = \frac{\partial F}{\partial y}$$

Enunciaremos a seguir um teorema que fornece uma condução necessária e suficiente para $M(t, y) + N(t, y) dy$ ser a derivada em relação a t de uma função $F(t, y)$. A demonstração foge ao contexto deste livro e pode ser encontrada em qualquer texto de Cálculo Avançado.

20.6.1 TEOREMA

Se $M(t, y)$ e $N(t, y)$ forem funções contínuas e com derivadas parciais contínuas em relação a t e a y no retângulo dado por $a < t < b$ e $\alpha < y < \beta$, então a condição necessária e suficiente para que

$$M(t, y) = \frac{\partial F}{\partial t} \quad \text{e} \quad N(t, y) = \frac{\partial F}{\partial y}$$

é que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} \quad \text{no retângulo.}$$

EXEMPLO 1 Verifique se a equação diferencial

$$1 + (1 + ty) e^{ty} + (1 + t^2 e^{ty}) \frac{dy}{dt} = 0$$

satisfaz as condições do teorema.

Solução Temos $M(t, y) = 1 + (1 + ty) e^{ty}$ e $N(t, y) = 1 + t^2 e^{ty}$, então

$$\frac{\partial M}{\partial y} = t e^{ty} + t(1 + ty) e^{ty} = 2te^{ty} + t^2 y e^{ty}$$

e

$$\frac{\partial N}{\partial t} = 2t e^{ty} + yt^2 e^{ty}$$

Logo,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$$

Vejam como proceder para determinar $F(t, y)$.

1º método De $\frac{\partial F}{\partial t} = M(t, y)$ temos

$$F(t, y) = \int M(t, y) dt + h(y)$$

Como $\frac{\partial F}{\partial y} = N(t, y)$ temos

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(t, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int M(t, y) dt + \frac{d}{dy} h(y)$$

Então,

$$\frac{dh(y)}{dy} = N(t, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(t, y) dt$$

que determina $h(y)$.

2º método De $\frac{\partial F}{\partial y} = N(t, y)$, temos

$$F(t, y) = \int N(t, y) dy + k(t)$$

onde k é uma função arbitrária de t . Como $\frac{\partial F}{\partial t} = M(t, y)$, então

$$M(t, y) = \frac{\partial}{\partial t} \int N(t, y) dy + \frac{d}{dt} k(t)$$

e $k(t)$ fica determinado pela equação

$$\frac{dk(t)}{dt} = M(t, y) - \frac{\partial}{\partial t} \int N(t, y) dy$$

3º método De $\frac{\partial F}{\partial t} = M(t, y)$ e $\frac{\partial F}{\partial y} = N(t, y)$, temos

$$F(t, y) = \int M(t, y) dt + h(y) \quad \text{e} \quad F(t, y) = \int N(t, y) dt + k(t)$$

Determinamos então $h(y)$ e $k(t)$ por inspeção.

EXEMPLO 2 Determine a solução geral de

$$1 + (1 + ty) e^{ty} + (1 + t^2 e^{ty}) \frac{dy}{dx} = 0$$

Solução Como

$$M(t, y) = 1 + (1 + ty) e^{ty}, \text{ então}$$

$$\begin{aligned} F(t, y) &= \int [1 + (1 + ty) e^{ty}] dt + h(y) \\ &= \int dt + \frac{1}{y} \int e^{ty} d(ty) + \frac{1}{y} \int ty e^{ty} d(ty) \\ &= t + \frac{1}{y} e^{ty} + \frac{1}{y} [ty e^{ty} - e^{ty}] + h(y) \end{aligned}$$

Resolvemos a integral $\int ty e^{ty} d(ty)$ por partes.

Então,

$$F(t, y) = t + \frac{1}{y} e^{ty} + te^{ty} - \frac{1}{y} e^{ty} = t + te^{ty}$$

Para determinar $h(y)$, como $\frac{\partial F}{\partial y} = N(t, y)$ segue que

$$\begin{aligned} N(t, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \int M(t, y) dt + \frac{dh(y)}{dy} \\ &= t^2 y e^{ty} + \frac{dh(y)}{dy} \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{dh(y)}{dy} = (1 + t^2 e^{ty}) - t^2 e^{ty} = 1 \text{ e portanto}$$

$$F(t, y) = t + t e^{ty} + y = c \text{ é a solução.}$$

EXEMPLO 3 Determine a solução geral da equação diferencial

$$3y + e^t + (3t + \cos y) \frac{dy}{dt} = 0$$

Solução Temos $M(t, y) = 3y + e^t$ e $N(t, y) = 3t + \cos y$. Então,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3 \text{ e também } \frac{\partial N}{\partial t} = 3.$$

Seja então $F(t, y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial t} = M(t, y), \quad \text{logo} \quad F(t, y) = \int M(t, y) dt + h(y)$$

ou seja

$$\begin{aligned} F(t, y) &= \int (3y + e^t) dt + h(y) \\ &= 3ty + e^t + h(y) \end{aligned}$$

Então,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(t, y) = 3t + \cos y = 3t + \frac{dh}{dy}(y)$$

Portanto

$$\frac{dh(y)}{dy} = \cos y$$

donde a solução é

$$h(y) = \sin y \text{ e } F(t, y) = 3ty + e^t + \sin y = c$$

EXERCÍCIOS 20.6

Resolva as equações diferenciais.

- $(y - t^2)dt - (y^2 - t)dy = 0$
- $(\cos \theta + \theta \cos \varphi)d\varphi + (\sin \varphi - \varphi \sin \theta)d\theta = 0$
- $(4t^3 + y^2 e^{ty^2})dt = -(2ty e^{ty^2} - 3y^2)dy$
- $2ty^3 + 3t^2y^2 \frac{dy}{dt} = 0$
- $3ty + y^2 + \left(\frac{3t^2}{2} + 2ty\right)\frac{dy}{dt} = 0$
- $\frac{y^2 e^x}{2} + 2ye^{2x} + (ye^x + e^{2x})\frac{dy}{dx} = 0$
- Resolva pelo 2º método
- $2x + x^4 e^x e^y + 4x^3 e^x e^y + (x^4 e^x e^y + 2y)\frac{dy}{dx} = 0$
- $(4x^2y^3 - 2y)dx + (4x^3y^2 - 2x)dy = 0$
- $(3t + 1)dy + (3t^2 + 3y)dt = 0$
- $\left(\frac{y^2}{2} - 2y e^t\right) + (ty - 2e^t)\frac{dy}{dt} = 0$
- $3t^2 + 4ty + (2y + 2t^2)\frac{dy}{dt} = 0$
- $(8ty^2 + 3t^2y)dt + (12y^2 + 8t^2y + t^3)dy = 0$
- $3x^2y + 2x \cos y + (x^3 - y - x^2 \sin y)\frac{dy}{dx} = 0$
- Determine qual a função $F(x, y)$ tal que
- $dF = (3x^2y + y^3)dx + (x^3 + 3xy^2)dy$

20.7 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM COM COEFICIENTES CONSTANTES

As equações diferenciais de segunda ordem são equações do tipo

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t))$$

Por exemplo,

$$y''(t) = t \cos y(t) + [y'(t)]^2$$

é uma equação de segunda ordem. Por solução da equação entendemos uma função que satisfaça a equação. Assim, por exemplo, a função $y(t) = e^{2t}$ é uma solução da equação diferencial $y''(t) = 4y(t)$ pois $y'(t) = 2e^{2t}$ e $y''(t) = 4e^{2t}$.

► **ILUSTRAÇÃO 1** Consideremos a equação diferencial

$$y''(t) = 0,$$

Vamos supor que $t \in [a, b]$. Aplicando-se duas vezes o segundo teorema fundamental do cálculo, Secção 5.8.2, temos

$$y(t) = c_1 t + c_2$$

Vemos que neste caso a solução geral depende de duas constantes arbitrárias. Frequentemente é necessário resolver a equação de segunda ordem sujeita a duas condições. No caso de serem dadas as condições $y(a)$ e $y'(a)$, teremos um problema de valor inicial. Caso tenhamos uma condição em a e outra em b , teremos um problema de contorno.

É um problema bastante difícil resolver uma equação diferencial qualquer de segunda ordem. Mesmo o caso linear, isto é, a equação

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$$

escapa ao contexto deste livro. Assim, poderemos estudar tão somente o caso

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = g(t)$$

isto é, uma equação linear a coeficientes constantes. ◀

Existe uma propriedade que é característica das equações lineares que daremos a seguir.

20.7.1 TEOREMA

Se as funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ forem soluções da equação homogênea

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

então a função

$$Y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

onde c_1 e c_2 são constantes reais arbitrárias, é também solução da equação.

Prova Como as funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções, então

$$ay_1''(t) + by_1'(t) + cy_1(t) = 0$$

e

$$ay_2''(t) + by_2'(t) + cy_2(t) = 0$$

Multiplicando a primeira equação por c_1 , a segunda por c_2 e somando, obtemos

$$a[c_1 y_1''(t) + c_2 y_2''(t)] + b[c_1 y_1'(t) + c_2 y_2'(t)] + c[c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)] = 0$$

ou seja

$$aY''(t) + bY'(t) + cY(t) = 0$$

Vejam agora em que condições podemos considerar a solução $Y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ como sendo a solução geral da equação homogênea, isto é, se $Y^*(t)$ for uma outra solução da equação homogênea, então podemos escolher c_1 e c_2 de tal forma que $Y(t) = Y^*(t)$. Vamos dar um teorema cuja demonstração foge ao contexto deste livro.

20.7.2 TEOREMA

Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ forem soluções da equação homogênea

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

no intervalo $a < t < \beta$, com

$$y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$$

diferente de zero neste intervalo, então a função

$$Y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$$

é a solução geral da equação homogênea.

20.7.3 DEFINIÇÃO

A expressão $y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$ ou

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

é chamada de **wronskiano** das funções y_1 e y_2 e é indicado por

$$W(t) = W[y_1, y_2](t)$$

20.7.4 EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS

Passemos agora a estudar um método de resolução para a equação homogênea

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

Se encontrarmos duas soluções cujo wronskiano seja diferente de zero, teremos então a solução geral. Observando a equação, vemos que os termos $ay''(t)$, $by'(t)$ e $cy(t)$ devem ter soma nula. Para que isto ocorra, as funções $y''(t)$, $y'(t)$ e $y(t)$ devem ter o mesmo "aspecto", ou seja, não podemos pensar que $y(t)$ seja, por exemplo, um polinômio, pois neste caso os termos $ay''(t)$, $by'(t)$ e $cy(t)$ seriam polinômios com graus diferentes cuja soma seria não-nula. No entanto, a tentativa $y(t) = e^{\lambda t}$, λ sendo um parâmetro a ser determinado, é válida, pois tornaria o primeiro membro da equação uma combinação linear da função exponencial $e^{\lambda t}$. Substituindo na equação homogênea $y(t)$ por $e^{\lambda t}$, teremos

$$a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + ce^{\lambda t} = (a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda t} = 0$$

Como a função exponencial é diferente de zero, $e^{\lambda t}$ é solução da equação homogênea se e somente se λ for uma solução da equação

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

chamada de *equação característica* da equação dada. As raízes desta equação são

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Conforme $(b^2 - 4ac)$ seja positivo, nulo ou negativo teremos, respectivamente, duas raízes reais distintas, uma raiz dupla ou um par de números complexos conjugados.

1º caso Seja $b^2 - 4ac > 0$. Temos então duas raízes reais distintas λ_1 e λ_2 e portanto duas soluções $e^{\lambda_1 t}$ e $e^{\lambda_2 t}$ tais que

$$W[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}] = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

Como $W[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}] \neq 0$ segue que a solução geral é dada por

$$Y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

2º caso Seja $b^2 - 4ac = 0$. Teremos então uma única raiz dupla λ_1 e portanto só uma solução $e^{\lambda_1 t} = y_1(t)$.

Consideremos

$$y_2(t) = y_1(t) \cdot v(t)$$

Substituindo y_2 na equação homogênea reescrita na forma

$$y''(t) + \frac{b}{a} y'(t) + \frac{c}{a} y(t) = 0$$

como

$$y_2'(t) = y_1'(t)v(t) + y_1(t)v'(t)$$

e

$$y_2''(t) = y_1''(t)v(t) + 2y_1'(t)v'(t) + y_1(t)v''(t)$$

teremos

$$\begin{aligned} & v(t)y_1''(t) + 2v'(t)y_1'(t) + y_1(t)v''(t) + \frac{b}{a} [y_1'(t)v(t) + y_1(t)v'(t)] + \frac{c}{a} y_1(t)v(t) = \\ & = y_1(t)v''(t) + [2y_1'(t) + \frac{b}{a} y_1(t)]v'(t) + [y_1''(t) + \frac{b}{a} y_1'(t) + \frac{c}{a} y_1(t)]v(t) = \\ & = y_1(t)v''(t) + [2y_1'(t) + \frac{b}{a} y_1(t)]v'(t) \end{aligned}$$

pois $y_1(t)$ é solução da equação. Segue que $y_2(t)$ é solução da equação dada se $v(t)$ for solução da equação diferencial

$$y_1 v''(t) + [2y_1' + \frac{b}{a} y_1] v'(t) = 0$$

Vamos fazer agora $v'(t) = u(t)$ e portanto $v''(t) = u'(t)$. Lembrando que $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, então

$$e^{\lambda_1 t} u'(t) + [2\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{b}{a} e^{\lambda_1 t}] u(t) = 0$$

que é uma equação linear em $u(t)$ e de primeira ordem. Observe que, do fato de conhecermos uma solução $y_1(t)$ conseguimos reduzir a ordem da equação diferencial. Por esta razão, este método é chamado de *método da redução da ordem*. Retomando a última equação, dividida por $e^{\lambda_1 t}$, teremos

$$u'(t) + \left(2\lambda_1 + \frac{b}{a}\right)u = 0$$

Segue então que

$$u(t) = ke^{-\left(2\lambda_1 + \frac{b}{a}\right)t}$$

Como queremos somente uma solução, vamos fazer $k = 1$, logo

$$u(t) = \frac{e^{-\frac{b}{a}t}}{y_1^2(t)} \quad \text{e} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{e^{-\frac{b}{a}t}}{y_1^2(t)}$$

Integrando e fazendo a constante de integração igual a zero, teremos

$$v(t) = \int \frac{e^{-\frac{b}{a}t}}{y_1^2(t)} dt$$

Portanto,

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{e^{-\frac{b}{a}t}}{y_1^2(t)} dt$$

Observe que $W[y_1(t), y_2(t)]$ é diferente de zero, pois se fosse nulo, y_2 seria um múltiplo de y_1 o que acarretaria $v(t)$ constante, pois $v(t) = \frac{y_2(t)}{y_1(t)}$, mas então $\frac{dv}{dt} = 0$, porém

$$\frac{dv}{dt} = \frac{e^{-\frac{b}{a}t}}{y_1^2(t)} = e^{-\left(2\lambda_1 + \frac{b}{a}\right)t}$$

que é certamente diferente de zero.

3º caso Se $b^2 - 4ac < 0$ então teremos as raízes complexas

$$\lambda_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

Se, como anteriormente, $Y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$, $Y(t)$ seria complexo e precisaríamos de duas soluções reais. Isto pode ser contornado da seguinte forma: seja $y(t) = u(t) + iv(t)$ uma solução da equação homogênea com valores complexos. Então,

$$a[u''(t) + iv''(t)] + b[u'(t) + iv'(t)] + c[u(t) + iv(t)] = 0$$

ou seja

$$[au''(t) + bu'(t) + cu(t)] + i[av''(t) + bv'(t) + cv(t)] = 0$$

Isto significa que o número complexo do primeiro membro da equação é nulo. Mas se um número complexo é zero, são nulas suas partes real e imaginária, conseqüentemente

$$au''(t) + bu'(t) + cu(t) = 0$$

e

$$av''(t) + bv'(t) + cv(t) = 0$$

Assim sendo, cada solução complexa da equação homogênea dá origem a duas soluções reais. Consideremos então a solução complexa $e^{\lambda_1 t}$. Vamos definir

$$\theta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

Então,

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t} &= e^{\left(-\frac{b}{2a} + i\theta\right)t} = e^{-\frac{b}{2a}t} \cdot e^{i\theta t} \\ &= e^{-\frac{b}{2a}t} [\cos \theta t + i \operatorname{sen} \theta t] \\ &= e^{-\frac{b}{2a}t} \cos \theta t + i e^{-\frac{b}{2a}t} \operatorname{sen} \theta t \end{aligned}$$

E, portanto temos as soluções reais:

$$y_1(t) = e^{-\frac{b}{2a}t} \cos \theta t \quad \text{e} \quad y_2(t) = e^{-\frac{b}{2a}t} \operatorname{sen} \theta t$$

Vamos definir $\varphi = -\frac{b}{2a}$ e calcular $W[e^{\varphi t} \cos \theta t, e^{\varphi t} \operatorname{sen} \theta t]$

$$\begin{aligned} W[e^{\varphi t} \cos \theta t, e^{\varphi t} \operatorname{sen} \theta t] &= \\ &= \begin{bmatrix} e^{\varphi t} \cos \theta t & e^{\varphi t} \operatorname{sen} \theta t \\ \varphi e^{\varphi t} \cos \theta t - \theta e^{\varphi t} \operatorname{sen} \theta t & \varphi e^{\varphi t} \operatorname{sen} \theta t + \theta e^{\varphi t} \cos \theta t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} W[e^{\varphi t} \cos \theta t, e^{\varphi t} \operatorname{sen} \theta t] &= \\ &= \varphi e^{2\varphi t} \cos \theta t \operatorname{sen} \theta t + \theta e^{2\varphi t} \cos^2 \theta t - \varphi e^{2\varphi t} \cos \theta t \operatorname{sen} \theta t + \theta e^{2\varphi t} \operatorname{sen}^2 \theta t \\ &= \theta e^{2\varphi t} (\cos^2 \theta t + \operatorname{sen}^2 \theta t) \\ &= \theta e^{2\varphi t} \end{aligned}$$

Lembrando que $\theta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} > 0$ e que a exponencial não se anula, segue

que $W[e^{\varphi t} \cos \theta t, e^{\varphi t} \operatorname{sen} \theta t] \neq 0$

Assim sendo, a solução geral neste caso é

$$Y(t) = c_1 e^{-\frac{b}{2a}t} \cos \theta t + c_2 e^{-\frac{b}{2a}t} \operatorname{sen} \theta t.$$

Podemos pensar que a solução complexa $e^{\lambda_2 t}$ dará origem a mais duas soluções reais, entretanto

$$\begin{aligned} e^{\lambda_2 t} &= e^{-\frac{b}{2a}t} \cdot e^{-i\theta t} \\ &= e^{-\frac{b}{2a}t} [\cos(-\theta t) + i \operatorname{sen}(-\theta t)] \\ &= e^{-\frac{b}{2a}t} \cos \theta t - i e^{-\frac{b}{2a}t} \operatorname{sen} \theta t \end{aligned}$$

ou seja $e^{-\frac{b}{2a}t} \cos \theta t = y_1(t)$ e $-e^{-\frac{b}{2a}t} \operatorname{sen} \theta t = -y_2(t)$, portanto temos novamente as mesmas soluções.

EXEMPLO 1 Dada a equação diferencial

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 0$$

determine duas soluções y_1 e y_2 tais que $W[y_1(t), y_2(t)] \neq 0$.

Solução Seja $y(t) = e^{\lambda t}$, então

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

é a equação característica cujas soluções são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$. Então,

$$y_1(t) = e^{-t} \quad \text{e} \quad y_2(t) = e^{2t}$$

são soluções da equação dada.

Além disso,

$$W[y_1(t), y_2(t)] = \begin{vmatrix} e^{-t} & e^{2t} \\ -e^{-t} & 2e^{2t} \end{vmatrix} = 3e^t \neq 0$$

Segue que

$$Y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$$

é a solução geral da equação dada.

EXEMPLO 2 Dada a equação diferencial

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0$$

determine duas soluções y_1 e y_2 tais que $W[y_1(t), y_2(t)] \neq 0$.

Solução A equação característica é

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

que tem $\lambda = 2$ como raiz dupla. Assim sendo, $y_1(t) = e^{2t}$ é uma solução. Por outro lado,

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{e^{-\frac{b}{a}t}}{y_1^2(t)} dt = e^{2t} \int \frac{e^{4t}}{e^{4t}} dt = te^{2t}$$

Observe que

$$W[y_1(t), y_2(t)] = e^{4t} \neq 0$$

Segue que a solução geral da equação dada é

$$V(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}.$$

EXEMPLO 3 Resolva a equação diferencial

$$y''(t) + 4y'(t) + 13y(t) = 0$$

Solução Ao tentarmos a solução $y(t) = e^{\lambda t}$, teremos a equação característica

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$$

cuja solução é

$$\lambda = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i$$

Segue que $e^{(-2 + 3i)t}$ é uma solução a valores complexos da equação dada. Mas,

$$\begin{aligned} e^{(-2 + 3i)t} &= e^{-2t}(\cos 3t + i \operatorname{sen} 3t) \\ &= e^{-2t} \cos 3t + i e^{-2t} \operatorname{sen} 3t \end{aligned}$$

Segue que as partes real e imaginária desta solução são soluções reais da equação dada, assim

$$y_1(t) = e^{-2t} \cos 3t \quad \text{e} \quad y_2(t) = e^{-2t} \operatorname{sen} 3t$$

são soluções da equação dada e além disso

$$W[y_1(t), y_2(t)] = 3e^{-4t} \neq 0$$

Logo,

$$Y(t) = c_1 e^{-2t} \cos 3t + c_2 e^{-2t} \operatorname{sen} 3t$$

é a solução geral.

EXERCÍCIOS 20.7

Resolva as equações diferenciais:

1. $y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 0$

3. $\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + \frac{1}{4}y = 0$

5. $y''(t) - 10y'(t) + 25y(t) = 0$

7. $y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = 0$

9. $\frac{d^2y}{dt^2} + 25y(t) = 0$

2. $y''(t) - \frac{5}{6}y'(t) + \frac{1}{6}y(t) = 0$

4. $\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 5y(t) = 0$

6. $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 10y(t) = 0$

8. $y''(t) - y'(t) + y(t) = 0$

10. $[(y''(t) - 4y(t))[y''(t) + 9y(t)] = 0$

20.8 EQUAÇÕES NÃO-HOMOGÊNEAS

Vamos considerar agora a equação linear de segunda ordem com coeficientes constantes e não-homogênea ou completa:

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = g(t)$$

Conforme já observado, em decorrência da linearidade, para obter a solução desta equação basta somar à solução geral da equação homogênea uma solução particular da equação completa. Como já estabelecemos como obter a solução geral da equação homogênea resta-nos o problema de determinar uma solução particular da equação completa. A exemplo do que já foi feito para as equações lineares de primeira ordem, aqui também temos o método da *variação das constantes*. Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ soluções da equação homogênea com $W[y_1(t), y_2(t)] \neq 0$. Então,

$$Y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

é a solução geral da equação homogênea. Procuramos então uma solução particular da equação completa da forma

$$\varphi(t) = u_1(t) y_1(t) + u_2(t) y_2(t)$$

Temos

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2' \\ &= [u_1 y_1' + u_2 y_2'] + [u_1' y_1 + u_2' y_2] \end{aligned}$$

Enquanto que

$$\varphi''(t) = [u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2''] + [u_1'' y_1 + u_1' y_1' + u_2'' y_2 + u_2' y_2']$$

Podemos ver que

$$[u_1' y_1 + u_2' y_2] = 0$$

então não teremos na expressão de φ'' as derivadas segundas de u_1 e u_2 . Vamos modificar um pouco a equação dada escrevendo-a na forma

$$y''(t) + \alpha y'(t) + \beta y(t) = h(t)$$

$$\text{onde } \alpha = \frac{b}{a}, \beta = \frac{c}{a} \text{ e } h(t) = \frac{1}{a} g(t)$$

Substituindo $\varphi(t)$ nesta equação e impondo as condições acima de que $u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$, teremos

$$\begin{aligned} & [u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2''] + \alpha [u_1 y_1' + u_2 y_2'] + \beta [u_1 y_1 + u_2 y_2] = \\ & = u_1' y_1' + u_2' y_2' + u_1 [y_1'' + \alpha y_1' + \beta y_1] + u_2 [y_2'' + \alpha y_2' + \beta y_2] \\ & = u_1' y_1' + u_2' y_2' \end{aligned}$$

pois y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea. Assim sendo, $\varphi(t) = u_1 y_1 + u_2 y_2$ será solução da equação completa se tivermos:

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$$

e

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = h(t)$$

Multiplicando a primeira equação acima por y_2' , a segunda por y_2 e subtraindo uma da outra, teremos

$$[y_1 y_2' - y_1' y_2] u_1' = -h y_2$$

Por outro lado, multiplicando a primeira equação por y_1' , a segunda por y_1 e subtraindo uma da outra, teremos

$$[y_1 y_2' - y_1' y_2] u_2' = h y_1$$

segue então que

$$u_1' = \frac{b y_1}{y_1 y_2' - y_1' y_2} \quad \text{e} \quad u_2' = \frac{-h y_2}{y_1 y_2' - y_1' y_2}$$

Podemos então obter u_1 e u_2 por integração.

EXEMPLO 1 Ache a solução geral de

$$y''(t) - y(t) = t^2$$

Solução A solução geral da equação homogênea é

$$Y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

uma vez que a equação característica $\lambda^2 - 1 = 0$ tem por raízes ± 1 . Seja então

$$\varphi(t) = u_1(t) e^t + u_2(t) e^{-t}$$

e portanto

$$\varphi'(t) = [u_1 e^t - u_2 e^{-t}] + [u_1' e^t + u_2' e^{-t}]$$

Impondo a primeira condição, isto é,

$$u_1'e^t + u_2'e^{-t} = 0 \quad (1)$$

e derivando outra vez, teremos

$$\varphi''(t) = u_1e^t + u_2e^{-t} + u_1'e^t - u_2'e^{-t}$$

substituindo $\varphi(t)$ e $\varphi''(t)$ na equação dada teremos

$$u_1'e^t - u_2'e^{-t} = t^2 \quad (2)$$

As equações (1) e (2) formam um sistema linear em u_1' e u_2' . Então,

$$u_1' = \frac{1}{2} t^2 e^{-t}$$

Integrando, teremos

$$u_1(t) = -(1 + t + \frac{1}{2} t^2)e^{-t}$$

Substituindo a expressão de u_1 em (1), obtemos

$$u_2' = -\frac{1}{2} t^2 e^t$$

que integrada fornece o valor de u_2 , ou seja

$$u_2(t) = -(1 - t + \frac{1}{2} t^2)e^t$$

A solução geral é então

$$y(t) = Y(t) + \varphi(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - 2 - t^2$$

20.8.1 MÉTODO DOS COEFICIENTES A DETERMINAR

As integrações que aparecem no método da variação das constantes, podem ser bastante complicadas. Dependendo da função $g(t)$ que aparece no segundo membro da equação é possível encontrar mais facilmente uma solução particular da equação completa.

1º caso Suponhamos $g(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$. Uma solução particular $\varphi(t)$ deve ser tal que

$$a\varphi''(t) + b\varphi'(t) + c\varphi(t)$$

seja um polinômio de grau n . Uma tentativa óbvia é fazer de $\varphi(t)$ um polinômio desconhecido de grau n , isto é,

$$\varphi(t) = \alpha_n t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \dots + \alpha_1 t + \alpha_0$$

Então,

$$\varphi'(t) = n\alpha_n t^{n-1} + (n-1)\alpha_{n-1} t^{n-2} + \dots + \alpha_1$$

e

$$\varphi''(t) = n(n-1)\alpha_n t^{n-2} + \dots + 3 \cdot 2\alpha_3 t + 2\alpha_2$$

Substituindo na equação dada e obrigando o polinômio do primeiro membro a ser idêntico ao do segundo membro, teremos

$$c\alpha_n = a_n, c\alpha_{n-1} + nba_n = a_{n-1}, \dots, c\alpha_0 + b\alpha_1 + 2a\alpha_2 = a_0$$

Observe que a primeira equação dá o valor α_n que é $\frac{a_n}{c}$, $c \neq 0$, a segunda equação dará o valor de α_{n-1} que é $\frac{a_{n-1} - nb\alpha_n}{c}$ e assim, sucessivamente, iremos determinar $\alpha_{n-2}, \dots, \alpha_1$ e α_0 . Logo, caso $c \neq 0$, podemos determinar a solução particular φ .

No caso em que $c = 0$ e $\varphi(t) = \alpha_n t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \dots + \alpha_1 t + \alpha_0$, $a\varphi''(t) + b\varphi'(t)$ é um polinômio de grau $(n-1)$ enquanto $g(t)$ é de grau n , temos, então, um problema. Se considerarmos, no entanto, $\varphi(t)$ de grau $(n+1)$, tudo se acerta. Seja então

$$\varphi(t) = t[\alpha_n t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \dots + \alpha_1 t + \alpha_0]$$

Não é necessário considerar o termo constante em $\varphi(t)$, pois, $y(t) = k$, k constante, é solução da equação homogênea

$$ay''(t) + by'(t) = 0$$

Como a solução da equação completa será calculada somando-se à solução geral da equação homogênea uma solução particular da equação completa, ou seja,

$$y(t) = Y(t) + \varphi(t)$$

podemos imaginar $y(t) = k$ subtraída de $\varphi(t)$ e acrescentada a $Y(t)$.

Os coeficientes $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0$ são determinados a partir da equação

$$a\varphi''(t) + b\varphi'(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$$

pois

$$\varphi'(t) = \alpha_0 + 2\alpha_1 t + \dots + n\alpha_{n-1} t^{n-1} + (n+1)\alpha_n t^n$$

e

$$\varphi''(t) = 2\alpha_1 + 3 \cdot 2 \alpha_2 t + \dots + (n+1)n\alpha_n t^{n-1}.$$

Então,

$$(n+1)b\alpha_n = a_n$$

$$(n+1)na\alpha_n + nb\alpha_{n-1} = a_{n-1}$$

⋮

$$2a\alpha_1 + b\alpha_0 = a_0$$

e se $b \neq 0$ a solução é única.

O caso em que $b = c = 0$ pode ser facilmente resolvido por integrações, uma vez que temos

$$y''(t) = \frac{1}{a} [a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0]$$

Integrando duas vezes, teremos

$$\varphi(t) = \frac{1}{a} \left[\frac{a_n t^{n+2}}{(n+2)(n+1)} + \dots + \frac{a_1 t^3}{3 \cdot 2} + \frac{a_0 t^2}{2 \cdot 1} \right]$$

2º caso Seja agora

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = (a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0)e^{at}$$

Queremos eliminar e^{at} do segundo membro para recairmos no caso anterior. Consideremos então a substituição $y(t) = e^{at}u(t)$.

Segue que

$$y'(t) = (au(t) + u'(t))e^{at}$$

e

$$y''(t) = (u''(t) + 2au'(t) + a^2u(t))e^{at}$$

Substituindo na equação dada, teremos

$$au''(t) + (2aa + b)u'(t) + (aa^2 + ba + c)u(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0$$

Se $u(t)$ for solução desta equação, $y(t) = e^{at}u(t)$ será solução da equação dada e vice-versa.

Como recaímos no 1º caso, existem três situações a serem analisadas:

- (i) O caso em que $aa^2 + ba + c \neq 0$, isto é, e^{at} não é solução da equação homogênea. Então, $\varphi(t) = (\alpha_n t^n + \dots + \alpha_1 t + \alpha_0)e^{at}$ é uma solução particular da equação completa;
- (ii) o caso em que $aa^2 + ba + c = 0$, mas $2aa + b \neq 0$. Isto acarreta que e^{at} é solução da equação homogênea, mas te^{at} não é. Então, $\varphi(t) = (\alpha_n t^n + \dots + \alpha_1 t + \alpha_0)te^{at}$ é uma solução particular da equação completa;
- (iii) o caso em que $aa^2 + ba + c = 0$ e $2aa + b = 0$. Isto significa que a é uma raiz dupla da equação característica e portanto e^{at} e te^{at} são soluções da equação homogênea. Então, $\varphi(t) = (\alpha_n t^n + \dots + \alpha_1 t + \alpha_0)t^2e^{at}$ é uma solução particular da equação completa.

3º caso Vamos supor que

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \cos wt$$

ou

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \sin wt$$

Para recairmos no 2º caso vamos precisar do teorema a seguir.

20.8.2 TEOREMA

Se $y(t) = u(t) + iv(t)$ for uma solução a valores complexos da equação, com coeficientes reais

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = g(t) + ih(t)$$

então

$$au''(t) + bu'(t) + cu(t) = g(t)$$

e

$$av''(t) + bv'(t) + cv(t) = h(t)$$

Prova Basta substituir $y(t) = u(t) + iv(t)$ na equação dada e igualar as partes reais e imaginárias do primeiro e do segundo membro.

Se $\varphi(t) = u(t) + iv(t)$ for uma solução particular de

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = (a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0)e^{iwt}$$

a parte real do segundo membro é $(a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0) \cos wt$ e $(a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0) \sin wt$ é a parte imaginária. Segue então do Teorema 20.8.2 que

$$u(t) = \operatorname{Re}[\varphi(t)] \quad \text{e} \quad v(t) = \operatorname{Im}[\varphi(t)]$$

são soluções particulares, respectivamente, de

$$ay'' + by' + cy = (a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0) \cos wt$$

e

$$ay'' + by' + cy = (a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0) \sin wt$$

EXEMPLO 2 Determine uma solução particular de

$$y''(t) + y'(t) + y(t) = t^2$$

Solução Seja

$$\varphi(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$$

Substituindo na equação dada, teremos

$$\alpha_2 t^2 + (\alpha_1 + 2\alpha_2)t + (\alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2) = t^2$$

Logo,

$$\alpha_2 = 1 \quad \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \quad \text{e} \quad \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$$

e portanto

$$\alpha_2 = 1 \quad \alpha_1 = -2 \quad \alpha_0 = 0$$

e

$$\varphi(t) = 2t + t^2$$

é a solução particular.

EXEMPLO 3 Determine uma solução particular de

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = (1 + t + t^2 + t^3)e^{2t}$$

Solução Seja $y = ue^{2t}$, então,

$$\frac{d^2u}{dt^2} = 1 + t + t^2 + t^3$$

e

$$u(t) = \frac{t^2}{1 \cdot 2} + \frac{t^3}{2 \cdot 3} + \frac{t^4}{3 \cdot 4} + \frac{t^5}{4 \cdot 5}$$

Segue que

$$\varphi(t) = e^{2t} \left[\frac{t^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{t^5}{4 \cdot 5} \right]$$

EXEMPLO 4 Determine uma solução particular de

$$y''(t) + 4y(t) = \cos 2t$$

Solução Consideremos a equação a valores complexos

$$y''(t) + 4y(t) = e^{2it}$$

cuja equação característica $\lambda^2 + 4 = 0$ tem por raízes $\lambda = \pm 2i$ e, assim sendo, $\Psi(t) = \alpha_0 t e^{2it}$ é a solução a ser tentada. Como

$$\Psi'(t) = \alpha_0(1 + 2it)e^{2it} \quad \text{e} \quad \Psi''(t) = \alpha_0(4i - 4t)e^{2it}$$

então

$$\Psi''(t) + 4\Psi(t) = 4i\alpha_0 e^{2it}$$

Donde concluímos que $\alpha_0 = \frac{-i}{4}$ e

$$\Psi(t) = -\frac{it}{4} e^{2it} = -\frac{it}{4} (\cos 2t + i \sin 2t) = \frac{t}{4} \sin 2t - i \frac{t}{4} \cos 2t$$

Assim sendo,

$$\varphi(t) = \operatorname{Re}\{\Psi(t)\} = \frac{t}{4} \operatorname{sen} 2t$$

é uma solução particular da equação dada.

EXEMPLO 5 Determine uma solução particular de

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \cos t + 3 \operatorname{sen} t$$

Solução Vamos tentar a solução $\varphi(t) = a \cos t + b \operatorname{sen} t$, então

$$\Psi'(b) = -a \operatorname{sen} t + b \cos t \quad \text{e} \quad \varphi''(t) = -a \cos t - b \operatorname{sen} t$$

Logo,

$$-a \cos t - b \operatorname{sen} t + 3a \operatorname{sen} t - 3b \cos t + 2a \cos t - 2b \operatorname{sen} t = \cos t + 3 \operatorname{sen} t$$

resultando da identificação que

$$a - 3b = 1 \quad \text{e} \quad 3a + b = 3$$

e assim $a = 1$ e $b = 0$, portanto

$$\varphi(t) = \cos t$$

é uma solução particular da equação dada.

► **ILUSTRAÇÃO 1 Vibrações Mecânicas de Pequena Amplitude***

Estudaremos aqui o movimento de partículas representadas por pontos no espaço, que também podem ser corpos rígidos representados pelos seus centros de massa.

O movimento de uma partícula no espaço será representado por uma função $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ que nos dá o vetor posição para cada instante.

A velocidade desta partícula é dada por $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}(t) = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt} \right)$ que, como sabemos da geometria analítica, é um vetor tangente à trajetória.

A aceleração da partícula é o vetor $\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{x}}(t) = (\ddot{x}_1(t), \ddot{x}_2(t), \ddot{x}_3(t))$.

A força também é uma entidade representada por um vetor, e o efeito de várias forças $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$ sobre esta partícula pode ser representado como o efeito de uma só força $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \dots + \mathbf{F}_n$ obtida da soma vetorial; \mathbf{F} é chamada de resultante das forças.

A segunda Lei de Newton estabelece então que o movimento $\mathbf{x}(t)$ da partícula m (m talvez variável com o tempo) deve satisfazer a equação

$$\frac{d}{dt} (m\dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{F} \tag{1}$$

onde \mathbf{F} é a resultante de todas as forças aplicadas sobre a partícula no mesmo instante.

Esta lei é uma condição a ser cumprida entre o movimento $\mathbf{x}(t)$ da partícula de massa m e a força \mathbf{F} que atua sobre ela.

* BASSANEZI, R., FERREIRA Jr, W. *Equações Diferenciais com Aplicações*. São Paulo, HARBRA, 1988. p. 114-118.

Se pudermos prever a força \mathbf{F} que atuará sobre a partícula, dada sua posição \mathbf{x} no espaço, sua velocidade \mathbf{v} , e o instante observado t , a segunda Lei de Newton será então uma equação diferencial para o movimento. Isto é, se considerarmos \mathbf{F} como função $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, então, com a interpretação acima, o movimento da partícula deve satisfazer a equação vetorial (componente a componente)

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t] \quad (2)$$

que é uma equação diferencial ordinária para a função incógnita $\mathbf{x}(t)$.

Do ponto de vista físico é claro que esta equação não caracteriza um determinado movimento, mas impõe uma condição sobre os possíveis movimentos. Para caracterizar um movimento é necessário que se especifique o ponto de partida \mathbf{x}_0 e sua velocidade inicial \mathbf{v}_0 .

Estas condições todas podem ser reunidas em um problema matemático

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(m \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{v}_0 \end{cases} \quad (3)$$

que é o chamado problema de Cauchy para a equação diferencial.

As dificuldades na resolução destes problemas dependem inteiramente do tipo de função $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ que aparece na equação. No caso geral, este problema é extremamente difícil.

Para obtermos um modelo interessante, mas ainda matematicamente tratável, devemos nos restringir a situações físicas de interesse, em que a função $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ é relativamente simples.

O problema físico de vibrações mecânicas em torno de uma posição de equilíbrio é de grande importância nas aplicações em Engenharia e na Física, e também como um protótipo de equações diferenciais ordinárias, onde vários conceitos de idéias matemáticas são desenvolvidos e apreciados.

O oscilador harmônico, que estudaremos mais abaixo, talvez seja o modelo de comparação mais utilizado em Física pela sua relativa simplicidade e pela quantidade de conceitos importantes que apresenta. O desenvolvimento inicial da Física Atômica, por exemplo, baseou-se em grande parte no modelo mecânico e na linguagem do oscilador harmônico.

Vamos analisar o comportamento de uma partícula de massa m , constante, restrita ao movimento sobre a reta, e sob a ação de três tipos de forças:

1. Uma força elástica que tende a resultar a sua posição de equilíbrio em $x = 0$. Esta força será uma função do deslocamento $f(x)$, tal que $f(0) = 0$ e $xf(x) < 0$, se $x \neq 0$, isto é, não há força sem deslocamento e se houver um deslocamento x , a força atuará sempre no sentido oposto a ele.

2. Forças de atrito, que poderão ser de duas formas:

a. Força constante contrária ao movimento, causada por atrito de contacto (Lei de Coulomb), como, por exemplo, devido à restrição que a partícula tem para se movimentar em uma reta.

Neste caso, $F_a = -s(v)F_0$, com $s(0) = 0$, $s(v) = 1$ se $v > 0$, $s(v) = -1$ se $v < 0$ e F_0 constante positiva.

b. Força provocada pela resistência ao movimento imerso em um meio viscoso e que para velocidades baixas pode ser considerada como aproximadamente igual a $F_b = -cv$, $c > 0$.

3. Uma força externa conhecida $\varphi(t)$, exercida sobre a partícula e dependente apenas do tempo (veja a Figura 1).

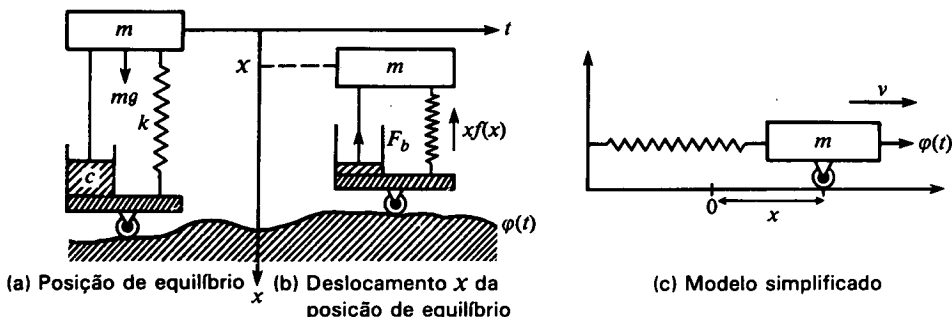


FIGURA 1 Oscilador harmônico amortecido

A segunda Lei de Newton nos fornece então uma condição entre o movimento $x(t)$ e a força resultante sobre esta partícula dada pela seguinte equação

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f(x) - c \frac{dx}{dt} + \varphi(t) - s \left(\frac{dx}{dt} \right) F_0 \tag{4}$$

Esta não é uma equação simples. No caso de uma função geral $f(x)$, para torná-la mais tratável do ponto de vista matemático faremos uma última hipótese: a vibração é de pequena amplitude e a partícula não se afasta muito da origem durante seu movimento. Com base nisto, faremos uma aproximação para a função $f(x)$ (suposta diferenciável) em torno da origem:

$$f(x) \cong f(0) + f'(0)x = f'(0)x$$

ou, como é tradicional escrever,

$$f(x) \cong -kx \quad \text{onde} \quad k = -f'(0)$$

Do ponto de vista do gráfico de $f(x)$, estamos aproximando a curva em torno da origem pela sua reta tangente. No caso de ser uma mola a causadora da força de restauração, o gráfico de f com o deslocamento tem em geral o aspecto da Figura 2. A hipótese da aproximação vale, então, para vibrações de amplitude menor do que x_M . Se considerarmos aproximações de $f(x)$ até a terceira ordem do desenvolvimento de Taylor, teremos

$$f(x) = f'(0)x + \frac{f''(0)}{2} x^2 + \frac{f'''(0)}{6} x^3$$

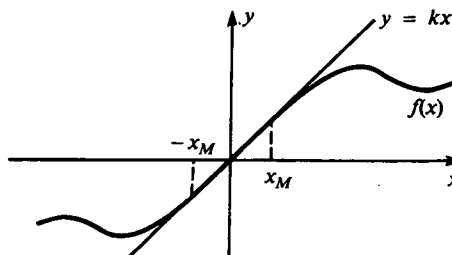


FIGURA 2 Força elástica

Observe que pela simetria do gráfico devemos ter $f''(0) = 0$. Sem o atrito, a equação (4) toma então a forma $\ddot{x} + ax + \beta x^3 = \varphi(t)$, denominada equações de Duffing, que *não* é linear.

O *oscilador harmônico clássico* considera apenas a força de atrito viscosa, e não a de contacto, de onde vem a equação

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = \varphi(t) \quad (5)$$

onde a operação efetuada sobre a função $x(t)$

$$Lx(t) = \left(m \frac{d^2}{dt^2} + c \frac{d}{dt} + k \right) x(t)$$

é linear. (Observe que a inclusão da força de atrito por contato torna a equação não-linear.)

Outro problema físico clássico que pode ser estudado aproximadamente pela equação do oscilador harmônico (isto é, uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem com coeficientes constantes!) é o *movimento de um pêndulo*, constituído de uma massa m suspensa por um fio inextensível sem massa e flexível. A partícula de massa m está restrita a se movimentar sobre um círculo (veja a Figura 3).

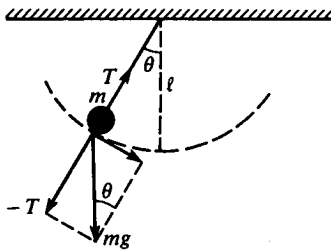


FIGURA 3 Pêndulo

A segunda Lei de Newton aplicada à componente tangencial ao movimento nos dá

$$m \frac{d^2}{dt^2} (\ell\theta) = -mg \sin \theta - c \frac{\ell\theta}{dt} + \varphi(t)$$

ou seja

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta - c \frac{d\theta}{dt} + \varphi(t) \quad (6)$$

Esta equação é não-linear em θ , pois $\frac{g}{\ell} \sin \theta$ é uma operação não-linear sobre a função $\theta(t)$ e faz o papel da força restauradora.

Entretanto, se considerarmos que a vibração do pêndulo é de pequena amplitude, próxima do ponto de equilíbrio, então θ é pequeno comparado com 1 e portanto, se $\theta \cong \theta$.

Sob esta hipótese, a equação linearizada do movimento do pêndulo fica sendo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \theta + c \frac{d\theta}{dt} = \varphi(t) \quad (7)$$

e do pêndulo livre

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \theta = 0 \quad (8)$$

que são equações correspondentes à do oscilador harmônico. ◀

EXERCÍCIOS 20.8

Resolva as equações diferenciais.

1. $y'' - 3y' + 2y = te^{-2t}$

3. $y'' + 4y = 8t$

5. $y'' - 3y' - 4y = 1 - 2t$

7. $y''' - 2y'' + y' - 2y = 4x + 5e^{2x} + 20 \cos x$

9. $y'' - y' - 6y = 6x^3 + 26 \sin 2x$

2. $y''' - 5y'' - 8y' - 4y = e^{3x}$

(Sugestão: $(\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda - 4) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$)

4. $y'' + 9y = 3 \cos 3t$

6. $y''' - 3y'' + 3y' - 1 = 48te^t$

8. $y'' - 3y' + 2y = 2e^t$

10. $y'' - 2y' - 3y + 8e^{-x} + 3x = 0$

20.9 RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS POR SÉRIES

Consideremos agora uma equação diferencial homogênea a coeficientes variáveis

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0$$

onde $a(t) \neq 0$ para $\alpha < t < \beta$. Vimos o caso em que $a(t)$, $b(t)$ e $c(t)$ eram constantes. Vamos supor agora $a(t)$, $b(t)$ e $c(t)$ polinômios. É razoável procurar então uma solução que seja um polinômio. Para determinar esta solução polinomial $y(t)$ com coeficientes desconhecidos, podemos igualar a zero a soma dos coeficientes das mesmas potências de t . Além disso, pode-se provar que se duas soluções y_1 e y_2 da equação acima forem tais que $W[y_1(t), y_2(t)] \neq 0$, então toda solução da equação pode ser escrita na forma $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$, e assim o problema se reduz a encontrar duas soluções.

EXEMPLO 1 Resolva $(1 + t)^2 y''(t) + 3t y'(t) + y(t) = 0$

Solução Como não sabemos qual deve ser o grau da solução polinomial vamos por

$$y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots$$

Então,

$$3t y'(t) = 3a_1 t + 3 \cdot 2 a_2 t^2 + \dots + 3n a_n t^n + \dots$$

e

$$y''(t) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 t + 4 \cdot 3a_4 t^2 + \dots + (n+2)(n+1)a_{n+2} t^n + \dots$$

$$t^2 y''(t) = 2a_2 t^2 + \dots + n(n-1)a_n t^n + \dots$$

Somando os coeficientes das mesmas potências de t :

$$[a_0 + 2a_2] + [a_1 + 3a_1 + 3 \cdot 2a_3] t + [a_2 + 3 \cdot 2a_2 + 4 \cdot 3a_4 + 2a_2] t^2 + \dots + [a_n + 3n a_n + (n+2)(n+1) a_{n+2} + n(n-1) a_n] t^n + \dots$$

Igualando a zero os coeficientes, teremos

$$(1 + 3n + n^2 - n) a_n + (n+2)(n+1) a_{n+2} = 0$$

ou

$$a_{n+2} = -\frac{1 + 2n + n^2}{(n+1)(n+2)} a_n = -\frac{n+1}{n+2} a_n \quad (1)$$

20.9.1 DEFINIÇÃO

A equação que expressa a_{n+2} em termos de a_n é chamada **fórmula de recorrência** ou uma **equação de diferenças**.

Vemos que ao determinar a_2 podemos determinar a_4 e assim sucessivamente. Da mesma forma, a_1 determina a_3 o qual por sua vez determina a_5 e assim por diante. Uma vez que sejam dados os valores de a_0 e a_1 todos os coeficientes ficam determinados de modo único. Observando que $a_0 = y(0)$ enquanto que $a_1 = y'(0)$, vemos que a_0 e a_1 decorrem das condições iniciais do problema. Como buscamos duas soluções, vamos considerar a título de exemplo dois conjuntos de valores para a_0 e a_1 , $a_0 = 1, a_1 = 0$ e $a_0 = 0, a_1 = 1$, para (1).

No primeiro caso todos os coeficientes ímpares a_1, a_3, a_5, \dots são nulos, pois a_1 é nulo. Quanto aos coeficientes pares temos

$$a_2 = -\frac{a_0}{2} = -\frac{1}{2}, a_4 = -\frac{3a_2}{4} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}, a_6 = -\frac{5}{6} a_4 = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}$$

e

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n n!}$$

Então,

$$y_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n n!} t^{2n}$$

No segundo caso, como $a_0 = 0$, todos os coeficientes pares são nulos enquanto que para os coeficientes ímpares teremos

$$a_3 = -\frac{2}{3} a_1 = -\frac{2}{3}, a_5 = -\frac{4}{5} a_3 = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}, a_7 = -\frac{6}{7} a_5 = -\frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}$$

e

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)} = (-1)^n \frac{2^n n!}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}$$

Logo,

$$y_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}$$

Convém observar que y_1 e y_2 são dados como séries de potências cujas propriedades foram estudadas no Capítulo 13.

EXEMPLO 2 Resolva a equação diferencial $y'(t) = y(t)$.

Solução Trata-se de uma equação linear homogênea cuja solução é $y(t) = y(0) e^t$. Vamos resolvê-la agora usando séries. Vamos supor que $y(t)$ seja a soma de uma série de potências

$$y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots$$

No intervalo de convergência da série, veja a Secção 13.2, podemos derivá-la termo a termo, logo

$$y'(t) = a_1 + 2a_2 t + \dots + na_n t^{n-1} + \dots$$

Substituindo na equação y e y' e igualando os coeficientes da mesma potência de t , iremos ter

$$na_n = a_{n-1} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Logo,

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Temos de novo uma fórmula de recorrência ou equação de diferenças. A situação é um pouco mais simples que a do Exemplo 1, pois, dado a_0 determinamos a_1 que por sua vez determina a_2 e assim sucessivamente. Então, basta o conhecimento de a_0 para determinarmos de modo único todos os coeficientes e $a_0 = y(0)$.

Da fórmula de recorrência temos

$$a_1 = \frac{1}{1} a_0 = \frac{1}{1!} a_0$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} a_0 = \frac{1}{2!} a_0$$

$$a_n = \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} \right) a_0 = \frac{1}{n!} a_0$$

Segue então que

$$y(t) = \left(1 + \frac{1}{1!} t + \frac{1}{2!} t^2 + \dots + \frac{1}{n!} t^n + \dots \right) a_0$$

Por outro lado, pela fórmula de Maclaurin, Secção 13.4, temos

$$e^t = 1 + \frac{1}{1!} t + \frac{1}{2!} t^2 + \dots + \frac{1}{n!} t^n + \dots$$

Portanto,

$$y(t) = e^t y(0) \text{ conforme era esperado.}$$

EXEMPLO 3 Resolva a equação diferencial

$$y''(t) - 2t y'(t) - 2y(t) = 0$$

Solução Vamos supor que $y(t)$ seja a soma de uma série de potências

$$y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots$$

então

$$-2y(t) = -2a_0 - 2a_1 t - \dots - 2a_n t^n - \dots$$

$$-2ty'(t) = -2a_1 t - \dots - 2na_n t^n - \dots$$

e

$$y''(t) = 2 \cdot 1 a_2 + 3 \cdot 2a_3 t + \dots + (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n + \dots$$

Assim,

$$[-2a_0 + 2 \cdot 1a_2] + [-2a_1 - 2a_1 + 3 \cdot 2a_3] t + [-2a_2 - 2 \cdot 2a_2 + 4 \cdot 3a_4] t^2 + \dots \\ + [-2a_n - 2na_n + (n+2)(n+1) a_{n+2}] t^n + \dots$$

Igualando a zero os coeficientes, temos

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} = 2(n+1) a_n$$

ou

$$a_{n+2} = \frac{2}{n+2} a_n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Temos então uma fórmula de recorrência ou equação de diferenças. Da fórmula de recorrência vemos que a_0 determina a_2 que por sua vez determina a_4 e assim sucessivamente. Analogamente, a_1 determina a_3 que por sua vez determina a_5 e assim por diante. Todos os coeficientes ficam determinados de modo único se forem dados os valores de a_0 e a_1 , isto é, se forem dados $y(0)$ e $y'(0)$.

EXEMPLO 4 Resolva a equação diferencial

$$y''(t) - y(t) = t^2$$

Solução Vamos supor que $y(t)$ seja a soma de uma série de potências

$$y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots$$

No intervalo de convergência desta série podemos derivá-la termo a termo e a série assim obtida tem por soma $y'(t)$, logo

$$y'(t) = a_1 + 2a_2 t + \dots + na_n t^{n-1} + \dots$$

Assim,

$$y'(t) - y(t) - t^2 = (a_1 - a_0) + (2a_2 - a_1)t + (3a_3 - a_2 - 1)t^2 + (4a_4 - a_3)t^3 + \dots \\ + (na_n - a_{n-1})t^{n-1} + \dots$$

A fim de que a série do segundo membro seja nula numa vizinhança de $t = 0$, é necessário e suficiente que todos os coeficientes sejam nulos, assim

$$a_1 - a_0 = 0 \quad \text{e} \quad a_1 = a_0 = y(0)$$

$$2a_2 - a_1 = 0 \quad \text{e} \quad a_2 = \frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{2} a_0$$

$$2a_3 - a_2 - 1 = 0 \quad \text{e} \quad a_3 = \frac{1}{3} a_2 + \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 3} a_0 + \frac{1}{3}$$

$$4a_4 - a_3 = 0 \quad \text{e} \quad a_4 = \frac{1}{4} a_3 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} a_0 + \frac{1}{3 \cdot 4}$$

$$\vdots \\ \vdots \\ na_n - a_{n-1} = 0 \quad \text{e} \quad a_n = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n} a_0 + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n} = \frac{1}{n!} (a_0 + 2) \quad n \geq 4$$

A fórmula para a_n pode ser provada por indução, pois, se

$$a_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} (a_0 + 2)$$

Como $a_n = \frac{1}{n} a_{n-1}$, segue que

$$a_n = \frac{1}{n(n-1)!} (a_0 + 2) = \frac{1}{n!} (a_0 + 2)$$

Então,

$$y(t) = a_0 + a_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} a_0 \right) t^3 + \sum_{n=4}^{\infty} (a_0 + 2) \frac{t^n}{n!}$$

Portanto,

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 + 2) \frac{t^n}{n!} - (a_0 + 2) - (a_0 + 2)t - (a_0 + 2) \frac{t^2}{2} - \\ - (a_0 + 2) \frac{t^3}{6} + a_0 + a_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} a_0 \right) t^3 \\ = (a_0 + 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} - t^2 - 2t - 2$$

Por outro lado, numa vizinhança de $t = 0$ temos

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots$$

logo

$$y(t) = (a_0 + 2) e^t - t^2 - 2t - 2$$

mas $y'(t) - y(t) = t^2$ é uma equação diferencial linear de primeira ordem cuja equação homogênea associada é

$$y'(t) - y(t) = 0$$

e tem por solução geral

$$Y(t) = ke^t$$

A fim de obter uma solução particular da equação completa vamos tentar

$$\varphi(t) = at^2 + bt + c$$

pois o segundo membro é um polinômio do segundo grau.

Então, como $\varphi'(t) = 2at + b$,

$$(2at + b) - (at^2 + bt + c) = t^2$$

Identificando os coeficientes das potências iguais de t , temos

$$a = -1, b = -2 \text{ e } c = -2$$

Assim,

$$\varphi(t) = -t^2 - 2t - 2 \quad \text{e} \quad y(t) = ke^t - t^2 - 2t - 2$$

Para $t = 0$, $y(0) = a_0 = k - 2$, de onde tiramos que

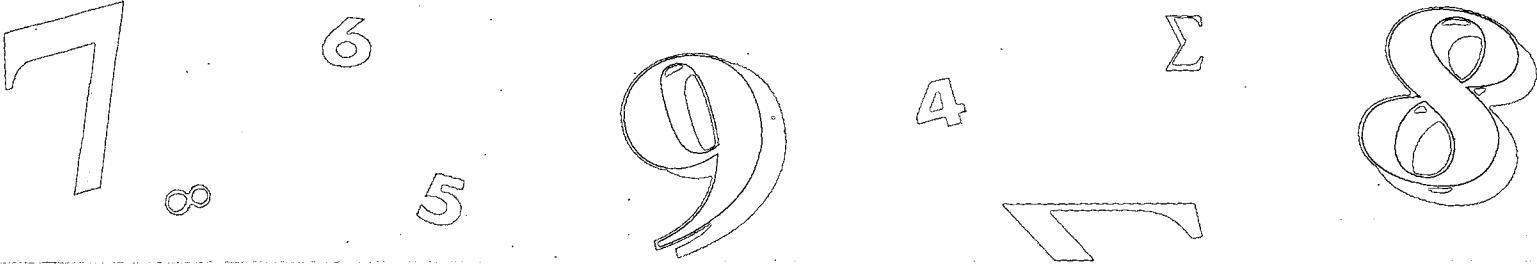
$$k = a_0 + 2$$

e assim, como anteriormente

$$g(t) = (a_0 + 2) e^t - t^2 - 2t - 2$$

EXERCÍCIOS 20.9

1. Resolva, por séries, a equação diferencial $y'(t) - y(t) = t^2 - 2t + 1$, sendo $y(1) = 2$.
2. Resolva, por séries, a equação diferencial $y'(t) + \frac{1}{1-t}y(t) = \frac{2t}{1-t}$, sujeita a condição $y(0) = 0$.
3. Resolva, por séries, $y''(t) + ty'(t) + y = 0$, $y(0) = y'(0) = 1$.
4. Resolva, por séries, a equação diferencial $xy'' + x^3y' - 3y = 0$ sendo que $y(1) = 0$ e $y'(1) = 2$.
5. Resolva, por séries, a equação diferencial $(x-1)y''' + y'' + (x-1)y' + y = 0$ sendo $y(0) = y''(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.
6. Resolva, por séries, a equação diferencial $(2x-1)y'' - 3y' = 0$.
7. Resolva, por séries, a equação diferencial $2y''' + xy'' + 2y' + xy = 0$ sendo $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ e $y''(0) = -1$.
8. Resolva, por séries, a equação diferencial $t^2y'' + 3ty' - 3y = 0$.
9. Resolva, por séries, a equação diferencial $y'' + \frac{3t}{1+t^2}y' + \frac{1}{1+t^2}y = 0$ sendo $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.
10. Resolva, por séries, a equação diferencial $y'' + t^2y' + 2ty = 0$, sendo $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.



Apêndice

A.1 USO DE UMA TABELA DE INTEGRAIS

Apresentamos várias técnicas de integração e vimos como elas são úteis para a avaliação de muitas integrais. No entanto, há ocasiões em que esses procedimentos não são suficientes ou levam a uma integração complicada. Em tais casos, você pode desejar usar uma *tabela de integrais*. Tabelas bastante completas aparecem em textos de Matemática, e tabelas menores são encontradas na maioria dos textos de Cálculo. Deve-se ter o cuidado de não se confiar totalmente nas tabelas, ao calcular integrais. É essencial que se tenha o domínio das técnicas de integração, como foi mencionado no Capítulo 9, pois pode ser necessário empregar algumas das técnicas para expressar o integrando numa forma que seja encontrada em uma tabela.

Uma tabela breve de integrais aparece no final deste livro. As fórmulas usadas nos exemplos e exercícios desta seção aparecem nessa tabela. Observe que na tabela há legendas indicando a forma do integrando. A primeira legenda é *Algumas Formas Elementares* e as cinco fórmulas incluídas constam daquelas dadas na introdução ao Capítulo 9. A segunda legenda é *Formas Racionais Contendo $a + bu$* . O primeiro exemplo utiliza uma dessas fórmulas.

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int \frac{x \, dx}{(4 - x)^3}$$

Solução A fórmula 10 na tabela de integrais é

$$\int \frac{u \, du}{(a + bu)^3} = \frac{1}{b^2} \left[\frac{a}{2(a + bu)^2} - \frac{1}{a + bu} \right] + C$$

Usando essa fórmula com $u = x$, $a = 4$ e $b = -1$, temos

$$\begin{aligned} \int \frac{x \, dx}{(4 - x)^3} &= \frac{1}{(-1)^2} \left[\frac{4}{2(4 - x)^2} - \frac{1}{4 - x} \right] + C \\ &= \frac{2}{(4 - x)^2} - \frac{1}{4 - x} + C \end{aligned}$$

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int \frac{dx}{6 - 2x^2}$$

Solução A fórmula 25 na tabela é

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C \quad (1)$$

Observe que essa fórmula pode ser usada se o coeficiente de x^2 na integral for 1, em vez de 2. Assim, escrevemos

$$\int \frac{dx}{6 - 2x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{3 - x^2}$$

Para a integral à direita aplicamos (1) com $u = x$ e $a = \sqrt{3}$ e nós temos

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{6 - 2x^2} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x + \sqrt{3}}{x - \sqrt{3}} \right| + C \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12} \ln \left| \frac{x + \sqrt{3}}{x - \sqrt{3}} \right| + C \end{aligned}$$

EXEMPLO 3 Calcule

$$\int \frac{dx}{8x^2 + 4x}$$

Solução

$$\int \frac{dx}{8x^2 + 4x} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x(2x + 1)}$$

A integral no segundo membro é da forma

$$\int \frac{du}{u(a + bu)}$$

onde $u = x$, $a = 1$ e $b = 2$. A fórmula 11 na tabela é

$$\int \frac{du}{u(a + bu)} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a + bu} \right| + C$$

Usando essa fórmula, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x(2x + 1)} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1} \ln \left| \frac{x}{1 + 2x} \right| + C \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x}{2x + 1} \right| + C \end{aligned}$$

EXEMPLO 4 Calcule

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$$

Solução A fórmula 27 na tabela é

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C \quad (2)$$

Podemos aplicar essa fórmula à integral dada se obtivermos uma expressão da forma $u^2 \pm a^2$, completando o quadrado sob o sinal radical. Para completar o quadrado de $x^2 + 2x$ acrescentamos 1 e, portanto, também subtraímos 1. Assim, escrevemos

$$\begin{aligned}x^2 + 2x - 3 &= (x^2 + 2x + 1) - 1 - 3 \\ &= (x + 1)^2 - 4\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x + 1)^2 - 4}}$$

A integral é da forma

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}}$$

onde $u = x + 1$ e $a = 2$. Logo, de (2),

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{(x + 1)^2 - 4}} &= \ln|(x + 1) + \sqrt{(x + 1)^2 - 4}| + C \\ &= \ln|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3}| + C\end{aligned}$$

EXEMPLO 5 Calcule

$$\int x^2 \sqrt{4x^2 + 1} dx$$

Solução A fórmula 29 na tabela, com o sinal mais, é

$$\int u^2 \sqrt{u^2 + a^2} du = \frac{u}{8} (2u^2 + a^2) \sqrt{u^2 + a^2} - \frac{a^4}{8} \ln|u + \sqrt{u^2 + a^2}| + C \quad (3)$$

Podemos aplicar essa fórmula escrevendo a integral do seguinte modo:

$$\begin{aligned}\int x^2 \sqrt{4x^2 + 1} dx &= \int x^2 \sqrt{4\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)} dx \\ &= 2 \int x^2 \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} dx\end{aligned}$$

De (3) com $u = x$ e $a = \frac{1}{2}$, temos

$$\begin{aligned}2 \int x^2 \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} dx &= 2 \left[\frac{x}{8} \left(2x^2 + \frac{1}{4} \right) \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} - \frac{\frac{1}{16}}{8} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} \right| \right] + C \\ &= \frac{x}{16} (8x^2 + 1) \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{64} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} \right| + C\end{aligned}$$

Das fórmulas 16, 19, 21, 73, 77, 86 e 98, entre outras, expressamos uma integral em termos de uma integral mais simples da mesma forma. Tais fórmulas são chamadas **fórmulas de redução**. O exemplo a seguir mostra como elas são aplicadas.

EXEMPLO 6 Calcule

$$\int \sec^5 x \, dx$$

Solução A fórmula 77 é

$$\int \sec^n u \, du = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} u \operatorname{tg} u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u \, du \quad (4)$$

Aplicamos essa fórmula com $u = x$ e $n = 5$ e temos

$$\int \sec^5 x \, dx = \frac{1}{4} \sec^3 x \operatorname{tg} x + \frac{3}{4} \int \sec^3 x \, dx$$

Agora aplicamos (4) à integral no segundo termo com $n = 3$ e obtemos

$$\begin{aligned} \int \sec^5 x \, dx &= \frac{1}{4} \sec^3 x \operatorname{tg} x + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \int \sec x \, dx \right) \\ &= \frac{1}{4} \sec^3 x \operatorname{tg} x + \frac{3}{8} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{3}{8} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C \end{aligned}$$

Como a integral no Exemplo 6 é uma potência ímpar da secante, ela pode ser calculada com o uso de integração por partes, conforme foi explicado na Seção 9.3. De fato, essa integral aparece como Exercício 12 nos Exercícios 9.3.

EXERCÍCIOS A.1

Nos Exercícios de 1 a 36, use a tabela de integrais para calcular a integral. Nos Exercícios de 1 a 4, o integrando é uma forma racional $a + bu$. Use uma das fórmulas de 6 a 13.

1. $\int \frac{x \, dx}{2 + 3x}$

2. $\int \frac{x \, dx}{(5 - 2x)^3}$

3. $\int \frac{x^2 \, dx}{(6 - x)^2}$

4. $\int \frac{dx}{x(7 + 3x)}$

Nos Exercícios de 5 a 8, o integrando é uma forma contendo $\sqrt{a \pm bu}$. Use uma das fórmulas de 14 a 23.

5. $\int x\sqrt{1 + 2x} \, dx$

6. $\int x^2\sqrt{1 + 2x} \, dx$

7. $\int \frac{\sqrt{1 + 2x}}{x} \, dx$

8. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1 + 2x}}$

Nos Exercícios 9 e 10, o integrando é uma forma contendo $a^2 + u^2$. Use uma das fórmulas de 24 a 26.

9. $\int \frac{dx}{4 - x^2}$

10. $\int \frac{dx}{x^2 - 25}$

Nos Exercícios de 11 a 14, o integrando é uma forma contendo $\sqrt{u^2 \pm a^2}$. Use uma das fórmulas de 27 a 38.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x}}$

12. $\int \sqrt{4x^2 + 1} \, dx$

13. $\int \frac{\sqrt{9x^2 + 4}}{x} \, dx$

14. $\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$

Nos Exercícios 15 e 16, o integrando é uma forma contendo $\sqrt{a^2 - u^2}$. Use uma das fórmulas de 39 a 48.

15. $\int \frac{\sqrt{9 - 4x^2}}{x} \, dx$

16. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25 - 9x^2}}$

Nos Exercícios 17 e 18, o integrando é uma forma contendo $2au - u^2$. Use uma das fórmulas de 49 a 58.

17. $\int x\sqrt{4x - x^2} \, dx$

18. $\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{4x - x^2}}$

Nos Exercícios de 19 a 24, o integrando é uma forma contendo funções trigonométricas. Use uma das fórmulas de 59 a 88.

19. $\int \operatorname{sen}^5 x \, dx$

20. $\int \cos^8 x \, dx$

21. $\int \operatorname{cosec}^7 x \, dx$

22. $\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x \, dx$

23. $\int t^4 \cos t \, dt$

24. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^5 x \, dx$

Nos Exercícios 25 e 26, o integrando é uma forma contendo uma função trigonométrica inversa. Use uma das fórmulas de 89 a 94.

25. $\int \sec^{-1} 3x \, dx$

26. $\int \operatorname{tg}^{-1} 4t \, dt$

Nos Exercícios de 27 a 34, o integrando é uma forma contendo uma função exponencial ou logarítmica. Use uma das fórmulas de 95 a 106.

27. $\int x^4 e^x dx$ 28. $\int x^3 2^x dx$ 29. $\int x^2 e^{4x} dx$
 30. $\int x^2 \ln x dx$ 31. $\int x^3 \ln(3x) dx$ 32. $\int 5x^2 e^{-2x} dx$
 33. $\int e^{2x} \sin 5x dx$ 34. $\int e^{3t} \cos 4t dt$

Nos Exercícios 35 e 36, o integrando é uma forma contendo uma função hiperbólica. Use uma das fórmulas de 107 a 124.

35. $\int 3y \operatorname{senh} 5y dy$ 36. $\int e^x \operatorname{sech} e^x dx$

Nos Exercícios de 37 a 52, use a tabela de integrais para calcular a integral definida.

37. $\int_1^2 \frac{dx}{x(5-x)^2}$ 38. $\int_0^3 \frac{x dx}{(1+x)^2}$

39. $\int_0^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 16}}$ 40. $\int_0^2 \frac{dx}{(9 + 4x^2)^{3/2}}$

41. $\int_1^2 x^4 \ln x dx$ 42. $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$

43. $\int_3^4 \sqrt{x^2 + 2x - 15} dx$ 44. $\int_3^5 x^2 \sqrt{x^2 - 9} dx$

45. $\int_1^2 \sqrt{4w - w^2} dw$ 46. $\int_0^{\pi/3} \sec^5 x dx$

47. $\int_{\pi/8}^{\pi/4} \operatorname{sen} 3t \operatorname{sen} 5t dt$ 48. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^6 \theta d\theta$

49. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 2x \cos^3 2x dx$ 50. $\int_4^5 w^2 \sqrt{w^2 - 16} dw$

51. $\int_0^1 x^3 e^{2x} dx$ 52. $\int_0^{\pi/6} e^{2t} \operatorname{sen} 3t dt$

A.2 TRANSFORMAÇÕES FUNCIONAIS E OPERADORES

Em primeiro lugar veremos os conceitos básicos para o estudo das transformações funcionais e operadores. Em seguida, as funções geradoras e equações de diferenças, e enfim os métodos operacionais.

A.2.1 CONCEITOS BÁSICOS

Será interessante comparar a definição que daremos a seguir com a que foi dada para função na Secção 1.4.1.

Sejam x e y dois espaços vetoriais reais (veja a Secção 14.1.9) e seja Ω um conjunto contido em x .

A.2.1.1 Definição

Se um elemento $y = T(x) \in Y$ está associado com cada $x \in \Omega$ dizemos que uma *transformação* ou aplicação T está definida em Ω e que ela leva Ω em Y . O conjunto Ω é chamado de **domínio de definição** da aplicação T enquanto que o conjunto dos elementos $y = T(x)$ em Y é chamado de **domínio dos valores** da transformação T .

Caso tenhamos por domínio de valores um conjunto de números, a transformação é chamada de **funcional**.

Caso $X = Y$, a transformação é então chamada de **operador**.

► **ILUSTRAÇÃO 1** Sejam $X = R^3$ e $Y = R^2$. A cada vetor $(x_1, x_2) \in R^2$ podemos considerar o vetor (x_1, x_2, x_3) em R^3 , onde x_3 é qualquer. Temos então uma aplicação P de R^3 em R^2 tal que

$$P(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$$

A aplicação P é chamada de *projeção* de R^3 em R^2 . ◀

► **ILUSTRAÇÃO 2** Seja $X = R^2$ e $Y = R$. Dado um vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ em R^2 podemos associar a ele o número $(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$.

Temos então uma aplicação N tal que

$$N(\mathbf{x}) = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$$

A aplicação N é um funcional. ◀

► **ILUSTRAÇÃO 3** Seja X o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis num intervalo $[a, b]$, que costuma ser notado por $C^\infty[a, b]$. Em $X = C^\infty[a, b]$, podemos considerar duas aplicações:

$$Df = \frac{df}{dt} \quad \text{e} \quad Tf = \int f(t)dt$$

As aplicações D e T são de $C^\infty[a, b]$ em si mesmo, isto é, são operadores. ◀

► **ILUSTRAÇÃO 4** Seja X o espaço vetorial R^2 das duplas reais. Dado $x = (x_1, x_2)$ consideremos o vetor

$$y = (x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta, x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta)$$

obtido girando x de um ângulo θ no sentido anti-horário. A aplicação

$$R(x_1, x_2) = (x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta, x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta)$$

é um operador em R^2 chamado de *rotação*.

Da mesma forma, se a for um vetor fixo em R^2 podemos considerar

$$T(x_1, x_2) = (x_1, x_2) + a$$

que também é um operador em R^2 chamado de *translação*. ◀

► **ILUSTRAÇÃO 5** Consideremos o conjunto s das seqüências reais, que consideraremos aqui como funções definidas no conjunto dos números naturais $0, 1, 2, 3, \dots$ e com valores reais.

Dadas duas seqüências em s , $x = \{x_n\}$ e $y = \{y_n\}$, vamos definir

$$x + y = \{x_n + y_n\}$$

e

$$\alpha x = \{\alpha x_n\} \quad \alpha \text{ sendo um número real}$$

O conjunto s com estas definições é um espaço vetorial. Dada a seqüência $\{x_n\} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = x$ consideremos a seqüência $\Delta x = (x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_{n+1} - x_n, \dots)$. Como Δx é também seqüência em s , Δ é um operador em s . ◀

Passaremos agora a uma categoria muito especial de transformações: as *transformações lineares*.

A.2.1.2 Definição

Sejam X e Y espaços vetoriais reais e T uma transformação de $\Omega \subset X$ em Y .

- (i) Se $T(\lambda x) = \lambda T(x)$, $\lambda \in R$, então T é chamada de **homogênea**;
- (ii) Se $T(x + y) = T(x) + T(y)$, $x, y \in X$, então T é chamada de **aditiva**.

As transformações aditivas e homogêneas são chamadas de **lineares**.

► **ILUSTRAÇÃO 6** A transformação P da Ilustração 1 é linear, pois

$$P(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda(x_1, x_2) = \lambda P(x_1, x_2, x_3)$$

e

$$\begin{aligned} P(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) \\ &= P(x_1, x_2, x_3) + P(y_1, y_2, y_3) \end{aligned} \quad \blacktriangleleft$$

► **ILUSTRAÇÃO 7** As aplicações dos Exemplos 3, 4 e 5 são todas lineares, exceto a translação, pois

$$T(x + y) \neq T(x) + T(y)$$

pois

$$T(x + y) = a + (x + y)$$

e

$$T(x) + T(y) = 2a + (x + y) \quad \blacktriangleleft$$

► **ILUSTRAÇÃO 8** Consideremos em R^2 os pontos x e y e seja $\lambda x + (1 - \lambda)y$ a equação da reta que passa por x e y (para $\lambda = 0$ teremos y e para $\lambda = 1$ teremos x).

Como a rotação é linear, segue que

$$R[\lambda x + (1 - \lambda)y] = \lambda R(x) + (1 - \lambda)R(y)$$

ou seja o operador R leva a reta $\lambda x + (1 - \lambda)y$ na reta $\lambda R(x) + (1 - \lambda)R(y)$, daí o termo linear.

Entretanto, o funcional da Ilustração 2 não é linear, pois

$$\begin{aligned} N(x + y) &= [(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2]^{1/2} \\ &\neq [x_1^2 + x_2^2]^{1/2} + [y_1^2 + y_2^2]^{1/2} = N(x) + N(y) \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

A.2.2 FUNÇÕES GERADORAS E EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS

Na Secção 20.8 vimos que existe um análogo de equações diferenciais para seqüências, isto é, equações do tipo

$$x_{n+1} = f(n, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}) \quad n = k, k+1, \dots$$

onde a incógnita é uma seqüência $\{x_n\}$. Dentre os métodos de resolução de equações de diferenças vamos considerar o chamado método da **função geradora**.

A.2.2.1 Definição

Dada a seqüência $\{x_n\}$ consideremos a função $F(s)$ dada pela soma da série de potências:

$$F(s) = x_0 + x_1s + x_2s^2 + \dots + x_ns^n + \dots$$

A função $F(s)$ é chamada de **função geradora da seqüência $\{x_n\}$** .

Consideremos agora a aplicação T que a cada seqüência em s faz corresponder sua função geradora $F(s)$. A aplicação T é linear, pois se $F(s)$ e $G(s)$ forem as funções geradoras das seqüências $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, então $\alpha F(s) + \beta G(s)$ é a função geradora da seqüência $\{\alpha x_n + \beta y_n\}$ uma vez que

$$\alpha F(s) = \alpha x_0 + \alpha x_1s + \dots + \alpha x_n s^n + \dots$$

e

$$\beta G(s) = \beta y_0 + \beta y_1s + \dots + \beta y_n s^n + \dots$$

e, somando membro a membro, teremos

$$\alpha F(s) + \beta G(s) = (\alpha x_0 + \beta y_0) + (\alpha x_1 + \beta y_1)s + \dots + (\alpha x_n + \beta y_n)s^n + \dots$$

A.2.3 MÉTODOS OPERACIONAIS

Além do significado já dado, o termo operador pode ainda ser usado para denotar uma correspondência entre dois conjuntos de funções.

A.2.3.1 Operador Diferencial

Consideremos a operação de derivação

$\frac{d^k y}{dt^k}$, onde $y(t)$ é uma função suficientemente diferenciável. Podemos indicar essa operação por $D^k y$ e o operador D^k é chamado **operador diferencial**. Existem definições e propriedades que permitem trabalhar com D^k

Por exemplo:

1. $D^0 y = 1 \cdot y$
2. $D^k(a y_1 + b y_2) = a D^k y_1 + b D^k y_2$
3. Se $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$, podemos considerar

$$\begin{aligned} P(D)y &= [a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \dots + a_n D^n]y \\ &= a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + \dots + a_n y^{(n)} \end{aligned}$$

Vejamos como utilizar essa noção de operador diferencial praticamente.

► ILUSTRAÇÃO 1 Considere a equação diferencial

$$y(t) - y'(t) = 2t + 3$$

Podemos reescrevê-la como

$$(1 - D)y = 2t + 3$$

Então,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{1 - D} (2t + 3) \\ &= (1 + D + D^2 + \dots + D^n + \dots)(2t + 3) \\ &= 2t + 3 + 2 \\ &= 2t + 5 \end{aligned}$$

Observe que se substituirmos $y(t) = 2t + 5$ no primeiro membro da equação dada, teremos

$$y(t) - y'(t) = (2t + 5) - (2) = 2t + 3$$

ou seja, $y(t)$ é uma solução particular da equação dada. ◀

► ILUSTRAÇÃO 2 Dada a equação diferencial

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 2t$$

Podemos reescrevê-la como

$$(1 - D)(2 - D)y = 2t$$

e

$$y = \frac{1}{(1 - D)(2 - D)} (2t)$$

Por frações parciais,

$$\frac{1}{(1 - D)(2 - D)} = \frac{1}{1 - D} - \frac{1}{2 - D} = \frac{1}{1 - D} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{D}{2}}$$

E assim,

$$\frac{1}{1-D}(2t) = (1 + D + D^2 + \dots + D^n)(2t) = 2t + 2$$

e

$$\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{D}{2}}(2t) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{D}{2} + \frac{D^2}{4} + \dots \right) (2t) = t + \frac{1}{2}$$

Logo,

$$\frac{1}{(1-D)(2-D)}(2t) = t + \frac{3}{2}$$

e como pode-se verificar facilmente, $y(t)$ é uma solução particular da equação dada. ◀

A.2.3.2 Operadores de Diferenças

Dado o conjunto s das seqüências reais podemos definir os operadores de diferença:

$$\begin{aligned} \Delta x_n &= x_{n+1} - x_n, \quad E x_n = x_{n+1}, \quad \nabla x_n = x_n - x_{n-1} \text{ e} \\ \delta x_n &= \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2} \end{aligned}$$

Vemos da definição que $\Delta = (E - 1)$. Podemos então operar formalmente com $(E - 1)$ como se fossem quantidades algébricas, assim, por exemplo

$$\begin{aligned} \Delta^n &= (E - 1)^n \\ &= \binom{n}{0} E^n - \binom{n}{1} E^{n-1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \end{aligned} \quad (1)$$

$$f(E) = f(1 + \Delta) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!} \Delta + \frac{f''(1)}{2!} \Delta^2 + \dots \quad (2)$$

A.2.3.3 Operadores $\nabla, \nabla \cdot, \nabla_x$

Consideremos agora o operador

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

cujas regras de funcionamento foram dadas na Secção 19.1. Se f for um campo escalar e F um campo vetorial dado por $F = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ então

$$(i) \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

é uma aplicação dos campos escalares diferenciáveis nos campos vetoriais.

$$(ii) \nabla \cdot F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

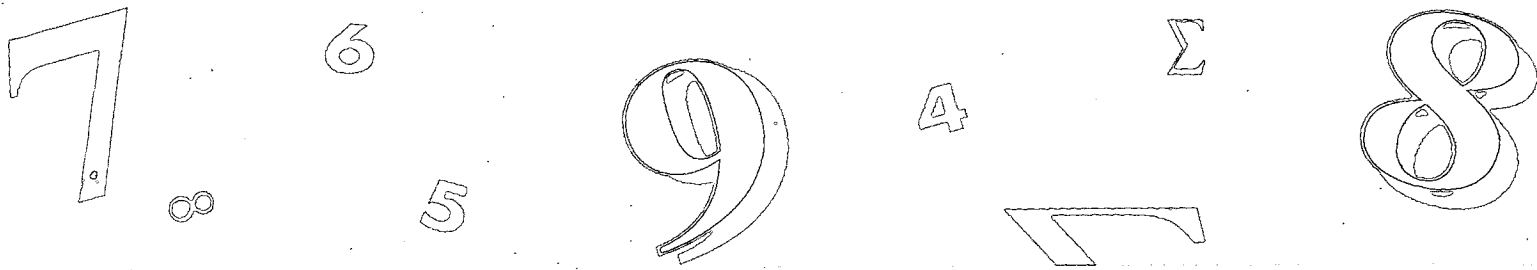
é uma aplicação dos campos vetoriais diferenciáveis nos campos escalares e

$$(iii) \nabla_x F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

é uma aplicação dos campos vetoriais diferenciáveis nos campos vetoriais.

Nos itens A.2.3.1, A.2.3.2 e A.2.3.3 caberia uma discussão sobre os conjuntos, domínio e imagem dos vários operadores que foi omitida por escapar ao escopo desse livro.





Fórmulas

O ALFABETO GREGO

α	alfa	ι	iota	ρ	rô
β	beta	κ	kapa	σ	sigma
γ	gama	λ	lambda	τ	tau
δ	delta	μ	mi	υ	ipsilon
ϵ	epsilon	ν	ni	ϕ	fi
ζ	zeta	ξ	csi	χ	qui
η	eta	\omicron	ômicron	ψ	psi
θ	teta	π	pi	ω	ômega

FÓRMULAS DE GEOMETRIA

Os seguintes símbolos são usados para a medida:

r : raio h : altura b : base a : base C : circunferência A : área s : área da superfície
 B : área da base V : volume

Círculo: $A = \pi r^2$; $C = 2\pi r$

Triângulo: $A = \frac{1}{2}bh$

Retângulo e paralelogramo: $A = bh$

Trapézio: $A = \frac{1}{2}(a + b)h$

Cilindro circular reto: $V = \pi r^2 h$; $S = 2\pi r h$

Cone circular reto: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$; $S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

Esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; $S = 4\pi r^2$

Prisma (com bases paralelas): $V = Bh$

Pirâmide: $V = \frac{1}{3}Bh$

FÓRMULAS DE TRIGONOMETRIA**As Oito Identidades Trigonométricas Fundamentais**

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x \operatorname{cosec} x = 1 & \quad \cos x \sec x = 1 & \quad \operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x = 1 & \quad \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} & \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 & \quad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x & \quad 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x \end{aligned}$$

Identidades Sobre Soma e Diferença

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(u + v) &= \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v & \quad \operatorname{sen}(u - v) &= \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v \\ \cos(u + v) &= \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v & \quad \cos(u - v) &= \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ \operatorname{tg}(u + v) &= \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}{1 - \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v} & \quad \operatorname{tg}(u - v) &= \frac{\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v}{1 + \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v} \end{aligned}$$

Identidades Sobre Medidas Múltiplas

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2u &= 2 \operatorname{sen} u \cos u \\ \cos 2u &= \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u & \quad \cos 2u &= 1 - 2 \operatorname{sen}^2 u & \quad \cos 2u &= 2 \cos^2 u - 1 \\ \operatorname{tg} 2u &= \frac{2 \operatorname{tg} u}{1 - \operatorname{tg}^2 u} \\ \operatorname{sen}^2 u &= \frac{1 - \cos 2u}{2} & \quad \cos^2 u &= \frac{1 + \cos 2u}{2} & \quad \operatorname{tg}^2 u &= \frac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u} \\ \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}t &= \frac{1 - \cos t}{2} & \quad \cos^2 \frac{1}{2}t &= \frac{1 + \cos t}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}t &= \frac{1 - \cos t}{\operatorname{sen} t} & \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2}t &= \frac{\operatorname{sen} t}{1 + \cos t} \end{aligned}$$

Identidades para o Produto, Soma e Diferença de Senos e Co-senos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} u \cos v &= \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v)] & \quad \cos u \operatorname{sen} v &= \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) - \operatorname{sen}(u - v)] \\ \cos u \cos v &= \frac{1}{2}[\cos(u + v) + \cos(u - v)] & \quad \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v &= \frac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)] \\ \operatorname{sen} s + \operatorname{sen} t &= 2 \operatorname{sen}\left(\frac{s + t}{2}\right) \cos\left(\frac{s - t}{2}\right) & \quad \operatorname{sen} s - \operatorname{sen} t &= 2 \cos\left(\frac{s + t}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{s - t}{2}\right) \\ \cos s + \cos t &= 2 \cos\left(\frac{s + t}{2}\right) \cos\left(\frac{s - t}{2}\right) & \quad \cos s - \cos t &= -2 \operatorname{sen}\left(\frac{s + t}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{s - t}{2}\right) \end{aligned}$$

Algumas Fórmulas de Redução

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(-x) &= -\operatorname{sen} x & \quad \cos(-x) &= \cos x & \quad \operatorname{tg}(-x) &= -\operatorname{tg} x \\ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) &= \cos x & \quad \cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) &= \operatorname{sen} x & \quad \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) &= \operatorname{cotg} x \\ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi + x\right) &= \cos x & \quad \cos\left(\frac{1}{2}\pi + x\right) &= -\operatorname{sen} x & \quad \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\pi + x\right) &= -\operatorname{cotg} x \\ \operatorname{sen}(\pi - x) &= \operatorname{sen} x & \quad \cos(\pi - x) &= -\cos x & \quad \operatorname{tg}(\pi - x) &= -\operatorname{tg} x \end{aligned}$$

Lei dos Senos e dos Co-senos

a , b e c representam as medidas dos lados de um triângulo: α , β e γ representam as medidas dos ângulos opostos aos lados de medidas a , b , e c , respectivamente.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

TABELA DE DERIVADAS

1. $D_x(u^n) = nu^{n-1} D_x u$
2. $D_x(u + v) = D_x u + D_x v$
3. $D_x(uv) = u D_x v + v D_x u$
4. $D_x\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v D_x u - u D_x v}{v^2}$
5. $D_x(e^u) = e^u D_x u$
6. $D_x(a^u) = a^u \ln a D_x u$
7. $D_x(\ln u) = \frac{1}{u} D_x u$
8. $D_x(\sen u) = \cos u D_x u$
9. $D_x(\cos u) = -\sen u D_x u$
10. $D_x(\tg u) = \sec^2 u D_x u$
11. $D_x(\cotg u) = -\operatorname{cosec}^2 u D_x u$
12. $D_x(\sec u) = \sec u \tg u D_x u$
13. $D_x(\operatorname{cosec} u) = -\operatorname{cosec} u \cotg u D_x u$
14. $D_x(\sen^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u$
15. $D_x(\cos^{-1} u) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u$
16. $D_x(\tg^{-1} u) = \frac{1}{1+u^2} D_x u$
17. $D_x(\cotg^{-1} u) = \frac{-1}{1+u^2} D_x u$
18. $D_x(\sec^{-1} u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} D_x u$
19. $D_x(\operatorname{cosec}^{-1} u) = \frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}} D_x u$
20. $D_x(\sinh u) = \cosh u D_x u$
21. $D_x(\cosh u) = \sinh u D_x u$
22. $D_x(\tgh u) = \operatorname{sech}^2 u D_x u$
23. $D_x(\cotgh u) = -\operatorname{cosech}^2 u D_x u$
24. $D_x(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tgh u D_x u$
25. $D_x(\operatorname{cosech} u) = -\operatorname{cosech} u \cotg u D_x u$

TABELA DE INTEGRAIS

Algumas Formas Elementares

1. $\int du = u + C$
2. $\int a du = au + C$
3. $\int [f(u) + g(u)] du = \int f(u) du + \int g(u) du$
4. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
5. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

Formas Racionais Contendo $a + bu$

6. $\int \frac{u du}{a + bu} = \frac{1}{b^2} [a + bu - a \ln|a + bu|] + C$
7. $\int \frac{u^2 du}{a + bu} = \frac{1}{b^3} \left[\frac{1}{2}(a + bu)^2 - 2a(a + bu) + a^2 \ln|a + bu| \right] + C$
8. $\int \frac{u du}{(a + bu)^2} = \frac{1}{b^2} \left[\frac{a}{a + bu} + \ln|a + bu| \right] + C$
9. $\int \frac{u^2 du}{(a + bu)^2} = \frac{1}{b^3} \left[a + bu - \frac{a^2}{a + bu} - 2a \ln|a + bu| \right] + C$
10. $\int \frac{u du}{(a + bu)^3} = \frac{1}{b^2} \left[\frac{a}{2(a + bu)^2} - \frac{1}{a + bu} \right] + C$
11. $\int \frac{du}{u(a + bu)} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a + bu} \right| + C$
12. $\int \frac{du}{u^2(a + bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2} \ln \left| \frac{a + bu}{u} \right| + C$
13. $\int \frac{du}{u(a + bu)^2} = \frac{1}{a(a + bu)} + \frac{1}{a^2} \ln \left| \frac{u}{a + bu} \right| + C$

Formas Contendo $\sqrt{a + bu}$

14. $\int u \sqrt{a + bu} du = \frac{2}{15b^3} (3bu - 2a)(a + bu)^{3/2} + C$
15. $\int u^2 \sqrt{a + bu} du = \frac{2}{105b^3} (15b^2u^2 - 12abu + 8a^2)(a + bu)^{3/2} + C$
16. $\int u^n \sqrt{a + bu} du = \frac{2u^n(a + bu)^{3/2}}{b(2n + 3)} - \frac{2an}{b(2n + 3)} \int u^{n-1} \sqrt{a + bu} du$
17. $\int \frac{u du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2}{3b^2} (bu - 2a) \sqrt{a + bu} + C$
18. $\int \frac{u^2 du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2}{15b^3} (3b^2u^2 - 4abu + 8a^2) \sqrt{a + bu} + C$
19. $\int \frac{u^n du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2u^n \sqrt{a + bu}}{b(2n + 1)} - \frac{2an}{b(2n + 1)} \int \frac{u^{n-1} du}{\sqrt{a + bu}}$

$$20. \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{\sqrt{a+bu} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+bu} + \sqrt{a}} \right| + C & \text{se } a > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$$21. \int \frac{du}{u^n \sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{a(2n-3)}{2a(n-1)} \int \frac{du}{u^{n-1} \sqrt{a+bu}}$$

$$22. \int \frac{\sqrt{a+bu} du}{u} = 2\sqrt{a+bu} + a \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$$

$$23. \int \frac{\sqrt{a+bu} du}{u^n} = -\frac{(a+bu)^{3/2}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-5)}{2a(n-1)} \int \frac{\sqrt{a+bu} du}{u^{n-1}}$$

Formas Contendo $a^2 \pm u^2$

$$24. \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{tg}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$25. \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{tgh}^{-1} \frac{u}{a} + C & \text{se } |u| < a \\ \frac{1}{a} \operatorname{cotg}^{-1} \frac{u}{a} + C & \text{se } |u| > a \end{cases}$$

$$26. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C = \begin{cases} -\frac{1}{a} \operatorname{tgh}^{-1} \frac{u}{a} + C & \text{se } |u| < a \\ -\frac{1}{a} \operatorname{cotg}^{-1} \frac{u}{a} + C & \text{se } |u| > a \end{cases}$$

Formas Contendo $\sqrt{u^2 \pm a^2}$

Nas fórmulas de 27 a 38, podemos substituir

$$\ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) \text{ por } \operatorname{senh}^{-1} \frac{u}{a}$$

$$\ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| \text{ por } \operatorname{cosh}^{-1} \frac{u}{a}$$

$$\ln \left| \frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right| \text{ por } \operatorname{senh}^{-1} \frac{a}{u}$$

$$27. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

$$28. \int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

$$29. \int u^2 \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{8} (2u^2 \pm a^2) \sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8} \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

$$30. \int \frac{\sqrt{u^2 + a^2} du}{u} = \sqrt{u^2 + a^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right| + C$$

$$31. \int \frac{\sqrt{u^2 - a^2} du}{u} = \sqrt{u^2 - a^2} - a \operatorname{sec}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$32. \int \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2} du}{u^2} = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} + \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

$$33. \int \frac{u^2 du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{\pm a^2}{2} \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

$$34. \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 + a^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right| + C$$

$$35. \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{sec}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$36. \int \frac{du}{u^2 \sqrt{u^2 \pm a^2}} = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{\pm a^2 u} + C$$

$$37. \int (u^2 \pm a^2)^{3/2} du = \frac{u}{8} (2u^2 \pm 5a^2) \sqrt{u^2 \pm a^2} + \frac{3a^4}{8} \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

$$38. \int \frac{du}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{u}{\pm a^2 \sqrt{u^2 \pm a^2}} + C$$

Formas Contendo $\sqrt{a^2 - u^2}$

$$39. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$40. \int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$41. \int u^2 \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{8} (2u^2 - a^2) \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^4}{8} \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$42. \int \frac{\sqrt{a^2 - u^2} du}{u} = \sqrt{a^2 - u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$$

$$= \sqrt{a^2 - u^2} - a \operatorname{cosh}^{-1} \frac{a}{u} + C$$

$$43. \int \frac{\sqrt{a^2 - u^2} du}{u^2} = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} - \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$44. \int \frac{u^2 du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$45. \int \frac{du}{u \sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$$

$$= -\frac{1}{a} \operatorname{cosh}^{-1} \frac{a}{u} + C$$

$$46. \int \frac{du}{u^2 \sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2 u} + C$$

$$47. \int (a^2 - u^2)^{3/2} du = -\frac{u}{8} (2u^2 - 5a^2) \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{3a^4}{8} \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$48. \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{a^2 - u^2}} + C$$

Formas Contendo $2au - u^2$

$$49. \int \sqrt{2au - u^2} du = \frac{u-a}{2} \sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2} \cos^{-1} \left(1 - \frac{u}{a} \right) + C$$

$$50. \int u \sqrt{2au - u^2} du = \frac{2u^2 - au - 3a^2}{6} \sqrt{2au - u^2}$$

$$+ \frac{a^3}{2} \cos^{-1} \left(1 - \frac{u}{a} \right) + C$$

$$51. \int \frac{\sqrt{2au - u^2} du}{u} = \sqrt{2au - u^2} + a \cos^{-1} \left(1 - \frac{u}{a} \right) + C$$

$$52. \int \frac{\sqrt{2au - u^2} du}{u^2} = -\frac{2\sqrt{2au - u^2}}{u} - \cos^{-1} \left(1 - \frac{u}{a} \right) + C$$

$$53. \int \frac{du}{\sqrt{2au - u^2}} = \cos^{-1} \left(1 - \frac{u}{a} \right) + C$$

$$54. \int \frac{u du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\sqrt{2au - u^2} + a \cos^{-1} \left(1 - \frac{u}{a} \right) + C$$

$$55. \int \frac{u^2 du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{(u+3a)\sqrt{2au - u^2}}{2} + \frac{3a^2}{2} \cos^{-1} \left(1 - \frac{u}{a} \right) + C$$

$$56. \int \frac{du}{u \sqrt{2au - u^2}} = -\frac{\sqrt{2au - u^2}}{au} + C$$

$$57. \int \frac{du}{(2au - u^2)^{3/2}} = \frac{u-a}{a^2 \sqrt{2au - u^2}} + C$$

$$58. \int \frac{u du}{(2au - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a \sqrt{2au - u^2}} + C$$

Formas Contendo Funções Trigonométricas

$$59. \int \operatorname{sen} u du = -\cos u + C$$

$$60. \int \cos u du = \operatorname{sen} u + C$$

$$61. \int \operatorname{tg} u du = \ln |\sec u| + C$$

$$62. \int \operatorname{cotg} u du = \ln |\operatorname{sen} u| + C$$

$$63. \int \sec u du = \ln |\sec u + \operatorname{tg} u| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}u \right) \right| + C$$

$$64. \int \operatorname{cosec} u du = \ln |\operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg} u| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{1}{2}u \right| + C$$

$$65. \int \sec^2 u du = \operatorname{tg} u + C$$

$$66. \int \operatorname{cosec}^2 u du = -\operatorname{cotg} u + C$$

$$67. \int \sec u \operatorname{tg} u du = \sec u + C$$

$$68. \int \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u du = -\operatorname{cosec} u + C$$

$$69. \int \operatorname{sen}^2 u du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2u + C$$

$$70. \int \cos^2 u du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2u + C$$

$$71. \int \operatorname{tg}^2 u du = \operatorname{tg} u - u + C$$

$$72. \int \operatorname{cotg}^2 u du = -\operatorname{cotg} u - u + C$$

$$73. \int \operatorname{sen}^n u du = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} u du$$

$$74. \int \cos^n u du = \frac{1}{n} \cos^{n-1} u \operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u du$$

$$75. \int \operatorname{tg}^n u du = \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} u - \int \operatorname{tg}^{n-2} u du$$

$$76. \int \operatorname{cotg}^n u du = -\frac{1}{n-1} \operatorname{cotg}^{n-1} u - \int \operatorname{cotg}^{n-2} u du$$

$$77. \int \sec^n u du = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} u \operatorname{tg} u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u du$$

$$78. \int \operatorname{cosec}^n u du = -\frac{1}{n-1} \operatorname{cosec}^{n-2} u \operatorname{cotg} u + \frac{n-2}{n-1} \int \operatorname{cosec}^{n-2} u du$$

$$79. \int \operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nu du = -\frac{\operatorname{sen}(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)u}{2(m-n)} + C$$

$$80. \int \cos mu \cos nu du = \frac{\operatorname{sen}(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)u}{2(m-n)} + C$$

$$81. \int \operatorname{sen} mu \cos nu du = -\frac{\cos(m+n)u}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)u}{2(m-n)} + C$$

$$82. \int u \operatorname{sen} u du = \operatorname{sen} u - u \cos u + C$$

83. $\int u \cos u \, du = \cos u + u \sin u + C$

84. $\int u^2 \sin u \, du = 2u \sin u + (2 - u^2) \cos u + C$

85. $\int u^2 \cos u \, du = 2u \cos u + (u^2 - 2) \sin u + C$

86. $\int u^n \sin u \, du = -u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u \, du$

87. $\int u^n \cos u \, du = u^n \sin u - n \int u^{n-1} \sin u \, du$

88.
$$\int \sin^m u \cos^n u \, du = -\frac{\sin^{m-1} u \cos^{n+1} u}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} u \cos^n u \, du$$

$$= \frac{\sin^{m+1} u \cos^{n-1} u}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m u \cos^{n-2} u \, du$$

Formas Contendo Funções Trigonômicas Inversas

89. $\int \sin^{-1} u \, du = u \sin^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$

90. $\int \cos^{-1} u \, du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$

91. $\int \operatorname{tg}^{-1} u \, du = u \operatorname{tg}^{-1} u - \ln \sqrt{1+u^2} + C$

92. $\int \operatorname{cotg}^{-1} u \, du = u \operatorname{cotg}^{-1} u + \ln \sqrt{1+u^2} + C$

93.
$$\int \sec^{-1} u \, du = u \sec^{-1} u - \ln|u + \sqrt{u^2-1}| + C$$

$$= u \sec^{-1} u - \operatorname{cosh}^{-1} u + C$$

94.
$$\int \operatorname{cosec}^{-1} u \, du = u \operatorname{cosec}^{-1} u + \ln|u + \sqrt{u^2-1}| + C$$

$$= u \operatorname{cosec}^{-1} u + \operatorname{cosh}^{-1} u + C$$

Formas Contendo Funções Exponenciais e Logarítmicas

95. $\int e^u \, du = e^u + C$

96. $\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

97. $\int u e^u \, du = e^u(u-1) + C$

98. $\int u^n e^u \, du = u^n e^u - n \int u^{n-1} e^u \, du$

99. $\int u^n a^u \, du = \frac{u^n a^u}{\ln a} - \frac{n}{\ln a} \int u^{n-1} a^u \, du + C$

100. $\int \frac{e^u \, du}{u^n} = -\frac{e^u}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{e^u \, du}{u^{n-1}}$

101. $\int \frac{a^u \, du}{u^n} = -\frac{a^u}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{\ln a}{n-1} \int \frac{a^u \, du}{u^{n-1}}$

102. $\int \ln u \, du = u \ln u - u + C$

103. $\int u^n \ln u \, du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2} [(n+1) \ln u - 1] + C$

104. $\int \frac{du}{u \ln u} = \ln|\ln u| + C$

105. $\int e^{au} \sin nu \, du = \frac{e^{au}}{a^2 + n^2} (a \sin nu - n \cos nu) + C$

106. $\int e^{au} \cos nu \, du = \frac{e^{au}}{a^2 + n^2} (a \cos nu + n \sin nu) + C$

Formas Contendo Funções Hiperbólicas

107. $\int \sinh u \, du = \cosh u + C$

108. $\int \cosh u \, du = \sinh u + C$

109. $\int \operatorname{tgh} u \, du = \ln|\cosh u| + C$

110. $\int \operatorname{cotgh} u \, du = \ln|\sinh u| + C$

111. $\int \operatorname{sech} u \, du = \operatorname{tg}^{-1}(\sinh u) + C$

112. $\int \operatorname{cosech} u \, du = \ln|\operatorname{tgh} \frac{1}{2} u| + C$

113. $\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \operatorname{tgh} u + C$

114. $\int \operatorname{cosech}^2 u \, du = -\operatorname{cotgh} u + C$

115. $\int \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u \, du = -\operatorname{sech} u + C$

116. $\int \operatorname{cosech} u \operatorname{cotgh} u \, du = -\operatorname{cosech} u + C$

117. $\int \sinh^2 u \, du = \frac{1}{4} \sinh 2u - \frac{1}{2} u + C$

118. $\int \cosh^2 u \, du = \frac{1}{4} \sinh 2u + \frac{1}{2} u + C$

119. $\int \operatorname{tgh}^2 u \, du = u - \operatorname{tgh} u + C$

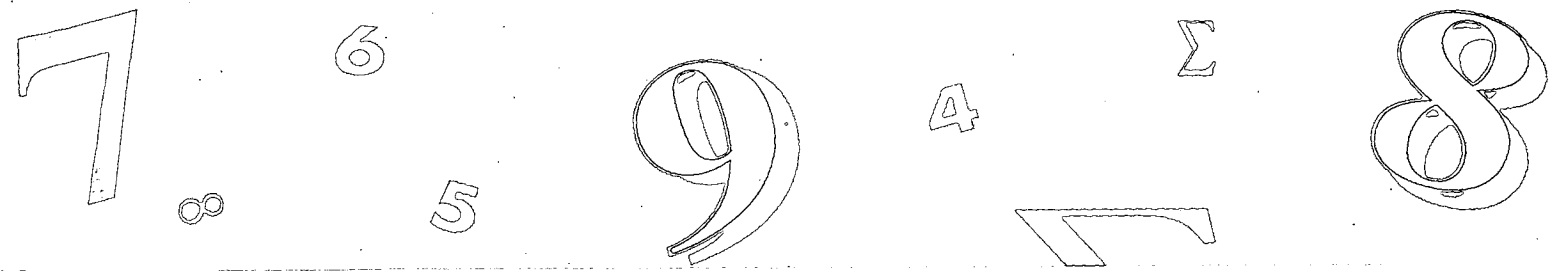
120. $\int \operatorname{cotgh}^2 u \, du = u - \operatorname{cotgh} u + C$

121. $\int u \sinh u \, du = u \cosh u - \sinh u + C$

122. $\int u \cosh u \, du = u \sinh u - \cosh u + C$

123. $\int e^{au} \sinh nu \, du = \frac{e^{au}}{a^2 - n^2} (a \sinh nu - n \cosh nu) + C$

124. $\int e^{au} \cosh nu \, du = \frac{e^{au}}{a^2 - n^2} (a \cosh nu - n \sinh nu) + C$



Respostas dos Exercícios de Número Ímpar

EXERCÍCIOS 12.1 (Página 693)

1. $\frac{1}{2}$ 3. divergente 5. -2 7. 0 9. 1 11. divergente 13. divergente 15. $e^{1/3}$ 17. 1 19. 0
 21. escolher $N = 1 + \frac{3}{\epsilon}$ 23. escolher $N = \frac{6}{\epsilon} - \frac{3}{2}$ 25. escolher $N = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2 - 5\epsilon}{\epsilon}}$

EXERCÍCIOS 12.2 (Página 699)

1. crescente 3. decrescente 5. não-monotônico 7. não-monotônico 9. decrescente
 11. crescente depois dos dois primeiros termos 13. crescente 15. decrescente 19. não-limitada 31. $\left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}$

EXERCÍCIOS 12.3 (Página 708)

1. $s_n = \frac{n}{2n+1}; \frac{1}{2}$ 3. $s_n = \frac{5n}{3n+1}; \frac{5}{3}$ 5. $s_n = -\ln(n+1)$; divergente 7. $s_n = \frac{5}{2} \left(1 - \frac{1}{5^n}\right); \frac{5}{2}$
 9. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(3n-2)(3n+1)}; \frac{2}{3}$ 11. $\frac{1}{3} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{3^n}; 0$ 13. $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)$; divergente 15. divergente 17. 2 19. divergente
 21. 1 23. $\frac{1}{e-1}$ 25. divergente 27. $\frac{3}{11}$ 29. $\frac{137}{111}$ 31. 8 m 33. $\frac{3.100}{9}$ m 35. 1.000

EXERCÍCIOS 12.4 (Página 713)

1. divergente 3. divergente 5. 3 7. $\frac{10}{3}$ 9. $\frac{63 \cdot 2^{10} + 1}{2^{16}}$ 11. divergente 13. $\frac{3}{2}$ 15. divergente 17. divergente 19. 2
 21. divergente 23. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$ são ambos divergentes; $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n}$ é convergente

EXERCÍCIOS 12.5 (Página 722)

1. convergente 3. convergente 5. divergente 7. convergente 9. divergente 11. convergente 13. divergente
 15. convergente 17. divergente 19. convergente 21. divergente 23. convergente 25. convergente

EXERCÍCIOS 12.6 (Página 726)

1. divergente 3. convergente 5. convergente 7. convergente 9. divergente 11. convergente 13. convergente
 15. convergente 17. convergente 19. convergente 21. divergente 27. $0,7032 < \sum_{m=50}^{100} \frac{1}{m} < 0,7134$

EXERCÍCIOS 12.7 (Página 730)

1. convergente 3. convergente 5. convergente 7. convergente 9. convergente 11. divergente 13. convergente
 15. $|R_4| < \frac{1}{3}$ 17. $|R_4| < \frac{1}{81}$ 19. $|R_4| < \frac{1}{25}$ 21. $|R_4| < \frac{1}{6 \ln 6}$ 23. 0,333 25. 0,632 27. 0,113 29. 0,406

EXERCÍCIOS 12.8 (Página 738)

1. absolutamente convergente 3. absolutamente convergente 5. absolutamente convergente 7. divergente 9. absolutamente convergente
 11. absolutamente convergente 13. absolutamente convergente 15. absolutamente convergente 17. absolutamente convergente
 19. divergente 25. (b) convergente

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 12 (Página 740)

1. $1, \frac{3}{2}, \frac{9}{5}, 2; 3$ 3. $0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{15}{17}; 1$ 5. 1, 3, 1, 3; não tem limite 7. $4, \frac{81}{16}, \frac{4096}{729}, \frac{390,625}{65.536}; e^2$ 9. $\frac{3}{16}, \frac{15}{64}, \frac{63}{256}, \frac{255}{1024}; s_n = \frac{4^n - 1}{4^{n+1}}; \frac{1}{4}$
 11. convergente, 3 13. divergente 15. convergente, $4 + 2\sqrt{3}$ 17. convergente, $\frac{1}{6}$ 19. $\frac{649}{729}$ 21. convergente 23. divergente
 25. convergente 27. divergente 29. convergente 31. divergente 33. divergente 35. convergente 37. convergente
 39. absolutamente convergente 41. condicionalmente convergente 43. divergente 45. absolutamente convergente
 47. absolutamente convergente 49. $\frac{437}{330}$ 51. 90 cm

EXERCÍCIOS 13.1 (Página 750)

1. $[-1, 1)$ 3. $[-1, 1]$ 5. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 7. $(-3, 3)$ 9. $(-\infty, +\infty)$ 11. $(-5, -1)$ 13. $(-9, 9]$ 15. $(0, 2]$
 17. $(-\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e^2})$ 19. $[-1, 1]$ 21. $(-4, 6)$ 23. $[4, 6)$ 25. $[-1, 1]$ 27. $(-e, e)$ 29. $+\infty$

EXERCÍCIOS 13.2 (Página 759)

1. (a) $R = 1; [-1, 1]$; (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}; R = 1$; (c) $[-1, 1)$ 3. (a) $R = 1; [-1, 1]$; (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{nx^{n-1}}; R = 1$; (c) $(-1, 1)$
 5. (a) $R = +\infty; (-\infty, +\infty)$; (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}; R = +\infty$; (c) $(-\infty, +\infty)$
 7. (a) $R = \frac{1}{3}; (0, \frac{2}{3})$; (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} 3n(n+1)(3x-1)^n; R = \frac{1}{3}$; (c) $(0, \frac{2}{3})$ 9. (a) $R = 3; [-2, 4)$; (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^{n-1}}{3^n}; R = 3$; (c) $(-2, 4)$
 11. $\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$ 13. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n(n+1)x^n$ 15. (a) $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n$ se $|x| < \frac{1}{2}$; (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} n2^n x^{n-1}$ se $|x| < \frac{1}{2}$
 17. (a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$; (b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$ 19. 0,60653 21. (a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$; (b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 23. 2 25. (a) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+2}}{n!}$
 27. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

EXERCÍCIOS 13.3 (Página 766)

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}; R = +\infty$ 3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1} - 2^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)}; R = 4$ 5. 1,718 7. 0,693 9. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n!)}; R = +\infty$

$$11. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}; +\infty \quad 13. 1,318 \quad 15. 1,057 \quad 17. 0,485 \quad 19. 0,747 \quad 21. 0,041 \quad 23. 0,450 \quad 25. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$27. 0,2450 \quad 29. 0,221 \quad 31. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad 37. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}; R = +\infty$$

EXERCÍCIOS 13.4 (Página 775)

$$7. \ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^n}{n2^n} \quad 9. \ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n2^n}; R = 2$$

$$11. 2 + \frac{1}{4}(x-4) + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)(x-4)^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n) \cdot 4^n}; R = 4$$

$$13. \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}(x - \frac{1}{3}\pi) - \frac{1}{4}(x - \frac{1}{3}\pi)^2 + \frac{1}{12}\sqrt{3}(x - \frac{1}{3}\pi)^3 + \frac{1}{48}(x - \frac{1}{3}\pi)^4 - \dots; R = +\infty \quad 15. \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n}}{(2n)!}$$

$$17. (a) x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5; (b) 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4; (c) \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{45}x^6 \quad 19. 0,5299 \quad 21. 1,97435 \quad 23. -0,2231$$

$$25. 2,7182818 \quad 27. 0,0415 \quad 29. 0,0048 \quad 31. 0,2398 \quad 33. a_4 = 3; a_3 = -5; a_2 = 2; a_1 = -1; a_0 = 6$$

EXERCÍCIOS 13.5 (Página 780)

$$1. 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2^n n!} x^n; R = 1 \quad 3. \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)x^n}{8^n n!}; R = 4$$

$$5. 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-4)}{3^n n!} x^{3n}; R = 1 \quad 7. \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)x^{4n}}{18^n n!}; R = \sqrt{3}$$

$$9. x^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)x^{n+2}}{2^n n!}; R = 1 \quad 11. 4,899 \quad 13. 5,010 \quad 15. 0,198$$

$$17. x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)x^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}; R = 1 \quad 19. (a) 1 + \frac{1}{4}x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (4n-5)}{4^n n!} x^n;$$

$$(b) 1 + \frac{1}{4}x^2 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (4n-5)}{4^n n!} x^{2n}; (c) 0,510 \quad 21. 0,335 \quad 23. 2,0271 \quad 25. 0,4970$$

$$27. 0,5082 \quad 29. \frac{1}{p+1} x^{p+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)x^{2n+p+1}}{2^n n!(2n+p+1)}; R = 1$$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 13 (Página 780)

$$1. [-1, 1] \quad 3. [-3, 3] \quad 5. x = 3 \quad 7. (-7, 5) \quad 9. (-1, 3] \quad 11. (-1, 1) \quad 13. (a) R = 1, [-1, 1];$$

$$(b) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{2n-1}, R = 1; (c) (-1, 1) \quad 15. (a) R = +\infty, (-\infty, +\infty); (b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n!)^2}, R = +\infty; (c) (-\infty, +\infty)$$

$$17. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{4n+4}(2n+1)}; R = 4 \quad 19. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}; R = +\infty \quad 21. 0,161 \quad 23. 0,493 \quad 25. 0,1974 \quad 27. 5,0658$$

$$29. 0,9986 \quad 31. 1,6094 \quad 33. 0,0124 \quad 35. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\ln a)^n x^n}{n!}; (-\infty, +\infty) \quad 37. \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(3^{2n}-1)x^{2n+1}}{(2n+1)!}; (-\infty, +\infty)$$

$$39. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(3x+\pi)^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad 41. \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{(x+1)^n}{n}$$

EXERCÍCIOS 14.1 (Página 793)

1. (b) 5 3. (b) $\frac{1}{2} \sqrt{1 + 4e^2}$ 5. (a) $\frac{7}{4}\pi$; (c) $\text{tg}^{-1} 0,4 \approx 0,38$ 7. (2, -3) 9. (5, 6) 11. (-4, 3) 13. (12, -5)
 15. (a) (-1, 9); (b) (1, -5) 17. (a) (-9, -4); (b) (4, -e) 19. (a) (6, 1); (b) $\sqrt{74}$; (c) $\sqrt{1.061}$
 21. (a) $10i + 15j$; (b) $-24i + 6j$; (c) $6i + 2j$; (d) $2\sqrt{10}$ 23. (a) $\sqrt{13} + \sqrt{17}$; (b) $-14i + 21j$; (c) $7\sqrt{13}$; (d) $5\sqrt{13} - 6\sqrt{17}$
 25. (a) $-28i + 6j$; (b) $2\sqrt{205}$ 27. $\frac{11}{\sqrt{137}}i + \frac{4}{\sqrt{137}}j$ 29. (a) $5(\frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j)$, $\frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j$; (b) $2\sqrt{2}(\cos \frac{1}{4}\pi i + \text{sen} \frac{1}{4}\pi j)$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}i + \frac{1}{2}\sqrt{2}j$
 31. (a) $8(\cos \frac{2}{3}\pi i + \text{sen} \frac{2}{3}\pi j)$, $-\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\sqrt{3}j$; (b) $16(\cos \pi i + \text{sen} \pi j)$, $-i$ 33. $h = 2, k = 3$ 37. (a) 135 N; (b) 17°
 39. $29,0^\circ$ 41. $346,1^\circ$; (b) 388,3 km/h 43. (a) $28,1^\circ$; (b) 1,7 mi/h; (c) 0,53 mi 51. (a) (1, -2); (b) (1, -2)

EXERCÍCIOS 14.2 (Página 800)

1. 10 3. -1 11. $\frac{1}{10}\sqrt{2}$ 13. $-\frac{16}{65}$ 15. 10, $-\frac{2}{5}$ 17. (a) 0; (b) não tem k 19. $\frac{-240 + \sqrt{85.683}}{407}$
 21. $-\frac{4}{17}\sqrt{17}i + \frac{1}{17}\sqrt{17}j$; $\frac{4}{17}\sqrt{17}i - \frac{1}{17}\sqrt{17}j$ 23. $\pm \frac{1}{\|\mathbf{A}\|}(a_2i - a_1j)$ 25. (a) $-\frac{80}{\sqrt{85}}$; (b) $\frac{-112}{17}i + \frac{96}{17}j$ 27. $\frac{29}{30}\sqrt{50}$
 29. (a) 24 J; (b) $24\sqrt{3} J$ 31. $(18 - 9\sqrt{3}) J \approx 2,4 J$

EXERCÍCIOS 14.3 (Página 807)

1. $(-\infty, 0) \cup (0, 4]$ 3. [-1, 1] 5. todos os números reais que não estejam em (-4, 3) 7. $\frac{4}{3}t$; $\frac{4}{9}$
 9. $\frac{1 + \ln t}{te^t(2+t)}$; $\frac{(2+t) - (1 + \ln t)(2+4t+t^2)}{t^3e^{2t}(2+t)^3}$ 11. $-\frac{b}{a} \cotg t - \frac{b}{a^2} \text{cosec}^3 t$ 13. $(y-1)^2 = x$ 15. $25x^2 - 9y = 225$
 17. $x^2 - y^2 = 1, x \geq 1$ 19. $9x^2 + 16y^2 = 144$ 21. $5\sqrt{3}x + 2y = 20$ 23. $y = 1; x = -1$
 27. $\frac{dy}{dx} = 0$; $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4a}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ 31. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ 35. $3\pi a^2$ unidades quad.

EXERCÍCIOS 14.4 (Página 814)

1. $4i + 4j$ 3. $2i$ 5. i 7. $\mathbf{R}'(t) = 2e^{2t}i + \frac{1}{t}j$; $\mathbf{R}''(t) = 4e^{2t}i - \frac{1}{t^2}j$ 9. $\mathbf{R}'(t) = (1+t^2)^{-1}i + 2t \ln 2j$;
 $\mathbf{R}''(t) = -2t(1+t^2)^{-2}i + 2'(\ln 2)^2j$ 11. $\mathbf{R}'(t) = -2t(t^2+4)^{-2}i - \frac{5}{2}(1-5t)^{-1/2}j$; $\mathbf{R}''(t) = (6t^2-8)(t^2+4)^{-3}i - \frac{25}{4}(1-5t)^{-3/2}j$
 13. $\mathbf{R}'(t) = 10 \cos 2ti - 4 \sec 4t \text{tg} 4tj$; $\mathbf{R}''(t) = -20 \text{sen} 2ti + (16 \sec 4t - 32 \sec^3 4t)j$ 15. $(2t-3)(2t^2-6t+5)^{-1/2}$
 21. $20t$ 23. $8e^{4t} - 8e^{-4t}$ 29. $\ln|\sec t| - \ln|t| + C$ 31. $\frac{1}{3}e^{3t}i + \ln|t-1|j + C$ 33. $(t \ln t - t)i + \frac{1}{3}t^3j + C$
 35. $\frac{1}{2}(t - \frac{1}{2} \text{sen} 2t - \pi)i + (t + \frac{1}{2} \text{sen} 2t - \pi)j$ 37. $x^2 + y^2 = 1; 0$ 39. 0

EXERCÍCIOS 14.5 (Página 820)

1. $1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2})$ 3. $2\sqrt{10} + \sqrt{2} \ln(2 + \sqrt{5})$ 5. $\frac{2}{27}[(40)^{3/2} - (13)^{3/2}]$ 7. 120 9. $\sqrt{2}(e-1)$
 11. $\ln(1 + \sqrt{2})$ 13. $6a$ 15. 8π 17. $a[\ln \cosh 2 + \ln \cosh 1]$ 19. 5π 21. $2\pi a$ 23. 12 25. $\frac{1}{2}\sqrt{5}(e^8 - 1)$
 27. $\frac{1}{2}a(\theta_1 - \frac{3}{2} \text{sen} \frac{2}{3}\theta_1)$ 29. 200 m

EXERCÍCIOS 14.6 (Página 824)

1. $\mathbf{T}(t) = \frac{t^2-1}{t^2+1}i + \frac{2}{t^2+1}j$; $\mathbf{N}(t) = \frac{2t}{t^2+1}i + \frac{1-t^2}{t^2+1}j$ 3. $\mathbf{T}(t) = \frac{e^t}{\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}}i - \frac{e^{-t}}{\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}}j$;
 $\mathbf{N}(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}}i + \frac{e^t}{\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}}j$ 5. $\mathbf{T}(t) = -\text{sen} ti + \cos tj$; $\mathbf{N}(t) = -\cos ti - \text{sen} tj$ 7. $\mathbf{T}(t) = -\text{sen} kti + \cos ktj$;

$N(t) = -\cos kt \mathbf{i} - \sin kt \mathbf{j}$ 9. $T(t) = -(1 + \cotg^4 t)^{-1/2} \mathbf{i} + (1 + \tg^4 t)^{-1/2} \mathbf{j}$; $N(t) = \frac{-\cos^2 t}{\sqrt{\sen^4 t + \cos^4 t}} \mathbf{i} - \frac{\sen^2 t}{\sqrt{\sen^4 t + \cos^4 t}} \mathbf{j}$
 11. $T(t) = \frac{2t}{\sqrt{4t^2 + e^{2t}}} \mathbf{i} + \frac{e^t}{\sqrt{4t^2 + e^{2t}}} \mathbf{j}$; $N(t) = \frac{e^t(1-t)}{|t-1|\sqrt{4t^2 + e^{2t}}} \mathbf{i} + \frac{2t(t-1)}{|t-1|\sqrt{4t^2 + e^{2t}}} \mathbf{j}$ 13. $T(t) = \sen t \mathbf{i} - \cos t \mathbf{j}$;
 $N(t) = \cos t \mathbf{i} + \sen t \mathbf{j}$ 15. $T(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \mathbf{i} + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \mathbf{j}$; $N(t) = -\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \mathbf{j}$ 19. $x = 2 + \cos s$, $y = 3 + \sen s$
 21. $x = \frac{1}{9} [(27s + 8)^{2/3} - 4]$, $y = \frac{1}{27} [(27s + 8)^{2/3} - 4]^{3/2}$ 23. $x = a \left(\frac{3a - 2s}{3a} \right)^{3/2}$, $y = a \left(\frac{2s}{3a} \right)^{3/2}$ 25. $s = \sqrt{2}(e^t - 1)$
 27. $\frac{27}{185} \sqrt{37}$

EXERCÍCIOS 14.7 (Página 831)

1. $\frac{1}{8} \sqrt{2}$; $4\sqrt{2}$ 3. $\frac{1}{4} \sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$ 5. $\frac{\sqrt{2}|1-t^2|^{3/2}}{(1+6t^2+t^4)^{3/2}}$; $\sqrt{2}$; $\frac{1}{2} \sqrt{2}$ 7. $\frac{1}{2}$; 2 9. $\frac{1}{4} \sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$ 11. $\frac{4}{49} \sqrt{7}$; $\frac{7}{4} \sqrt{7}$
 13. $\frac{2}{289} \sqrt{17}$; $\frac{17}{2} \sqrt{17}$ 15. $\frac{(2-x^2)^{3/2}}{|x|}$ 17. $\frac{1}{576} (16x^2 + 81y^2)^{3/2}$ 19. $\frac{2(x+y)^{3/2}}{a^{1/2}}$ 21. $4a \sen \frac{1}{2} t$ 25. (3, 9)
 27. (-3, -1) 29. $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 5 = 0$ 31. $\frac{23}{98} \sqrt{7}$; $\frac{14}{23} \sqrt{7}$ 33. $\frac{1}{16a}$; $16|a|$ 37. 2; $\frac{1}{2}$; (0, $-\frac{1}{2}$)
 39. $\left(3x + 2p, -\frac{y^3}{4p^2} \right)$ 41. $\left(\frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, \frac{b^2 - a^2}{b} \sen^3 t \right)$

EXERCÍCIOS 14.8 (Página 837)

1. (a) $2t \mathbf{i} + \mathbf{j}$; (b) $2t \mathbf{i}$; (c) $\sqrt{37}$; (d) 2 3. (a) $-10 \sen 2t \mathbf{i} + 6 \cos 2t \mathbf{j}$; (b) $-20 \cos 2t \mathbf{i} - 12 \sen 2t \mathbf{j}$; (c) 10; (d) 12
 5. (a) $\mathbf{i} + \tg t \mathbf{j}$; (b) $\sec^2 t \mathbf{j}$; (c) $\sqrt{2}$; (d) 2 7. (a) $\cos t \mathbf{i} + \sec^2 t \mathbf{j}$; (b) $-\sen t \mathbf{i} + 2 \sec^2 t \tg t \mathbf{j}$; (c) $\frac{1}{6} \sqrt{91}$; (d) $\frac{1}{18} \sqrt{849}$
 9. (a) $2t \mathbf{i} + 6t \mathbf{j}$; (b) $2t \mathbf{j}$; (c) $2\sqrt{10}$; (d) 2 11. (a) $2t \mathbf{i} + 8t \mathbf{j}$; (b) $2t \mathbf{i} + 16t \mathbf{j}$; (c) $2\sqrt{17}$; (d) $2\sqrt{65}$ 13. (a) $3t \mathbf{j}$; (b) $-4t \mathbf{i}$; (c) 3; (d) 4
 15. (a) $\mathbf{i} + \sqrt{3} \mathbf{j}$; (b) $-\sqrt{3} \mathbf{i} + \mathbf{j}$; (c) 2; (d) 2 17. $\frac{2t-3}{t-1} \mathbf{i} + \frac{4-2t-t^2}{2} \mathbf{j}$ 19. $(e^{-t} + 3t - 1) \mathbf{i} + \left(\frac{1}{2} e^{2t} + \frac{5}{2} \right) \mathbf{j}$
 21. (a) $\frac{390.625}{2}$ cm; (b) $\frac{390.625}{8}$ cm; (c) $1.250 \sqrt{2} \mathbf{i} - 1.250 \sqrt{2} \mathbf{j}$ 23. $(25 + \sqrt{631}) s$; $(20.000 \sqrt{3} + 800 \sqrt{1.893})$ cm 25. 283 m/s
 27. $40^\circ 8'$ 29. 29 m

EXERCÍCIOS 14.9 (Página 842)

1. $V(t) = \mathbf{i} + 2t \mathbf{j}$; $A(t) = 2t \mathbf{j}$; $A_T(t) = \frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}}$; $A_N(t) = \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}$ 3. $V(t) = t \cos t \mathbf{i} + \sen t \mathbf{j}$;
 $A(t) = (\cos t - t \sen t) \mathbf{i} + (\sen t + t \cos t) \mathbf{j}$; $A_T(t) = 1$; $A_N(t) = t$ 5. $V(0) = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$; $A(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$; $A_T(0) = 0$; $A_N(0) = \sqrt{2}$
 7. $V(\frac{1}{4}\pi) = \frac{3}{4} \sqrt{2} \mathbf{i} - \frac{3}{4} \sqrt{2} \mathbf{j}$; $A(\frac{1}{4}\pi) = \frac{3}{4} \sqrt{2} \mathbf{i} + \frac{3}{4} \sqrt{2} \mathbf{j}$; $A_T(\frac{1}{4}\pi) = 0$; $A_N(\frac{1}{4}\pi) = \frac{3}{2}$ 9. $\|V(t)\| = t\sqrt{4+9t^2}$; $A_T(t) = \frac{4+18t^2}{\sqrt{4+9t^2}}$;
 $A_N(t) = \frac{6t}{\sqrt{4+9t^2}}$; $K(t) = \frac{6}{t(4+9t^2)^{3/2}}$ 11. $V(t) = 2t \mathbf{i} + 2t \mathbf{j}$; $A(t) = 2t \mathbf{j}$; $T(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \mathbf{i} + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \mathbf{j}$;
 $N(t) = \frac{-t}{\sqrt{1+t^2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \mathbf{j}$; $\|V(t)\| = 2\sqrt{1+t^2}$; $A_T(t) = \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}$; $A_N(t) = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}$; $K(t) = \frac{1}{2(1+t^2)^{3/2}}$; $V(2) = 2t \mathbf{i} + 4t \mathbf{j}$;
 $T(2) = \frac{1}{\sqrt{5}} \mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}} \mathbf{j}$; $A(2) = 2t \mathbf{j}$; $N(2) = \frac{-2}{\sqrt{5}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{5}} \mathbf{j}$; $\|V(2)\| = 2\sqrt{5}$; $A_T(2) = \frac{4}{\sqrt{5}}$; $A_N(2) = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $K(2) = \frac{1}{10\sqrt{5}}$
 13. $V(t) = -15 \sen 3t \mathbf{i} + 15 \cos 3t \mathbf{j}$; $A(t) = -45 \cos 3t \mathbf{i} - 45 \sen 3t \mathbf{j}$; $T(t) = -\sen 3t \mathbf{i} + \cos 3t \mathbf{j}$; $N(t) = -\cos 3t \mathbf{i} - \sen 3t \mathbf{j}$;
 $\|V(t)\| = 15$; $A_T(t) = 0$; $A_N(t) = 45$; $K(t) = \frac{1}{5}$; $V(\frac{1}{3}\pi) = -15t \mathbf{j}$; $A(\frac{1}{3}\pi) = 45t \mathbf{i}$; $T(\frac{1}{3}\pi) = -\mathbf{j}$; $N(\frac{1}{3}\pi) = \mathbf{i}$; $\|V(\frac{1}{3}\pi)\| = 15$

R-6

Respostas dos Exercícios de Número Ímpar

15. $\mathbf{V}(t) = e^t \mathbf{i} - e^{-t} \mathbf{j}$; $\mathbf{A}(t) = e^t \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j}$; $\mathbf{T}(t) = \frac{e^{2t}}{\sqrt{e^{4t} + 1}} \mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{e^{4t} + 1}} \mathbf{j}$; $\mathbf{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{e^{4t} + 1}} \mathbf{i} + \frac{e^{2t}}{\sqrt{e^{4t} + 1}} \mathbf{j}$;
 $\|\mathbf{V}(t)\| = \frac{\sqrt{e^{4t} + 1}}{e^t}$; $A_T(t) = \frac{e^{4t} - 1}{e^t \sqrt{e^{4t} + 1}}$; $A_N(t) = \frac{2e^t}{\sqrt{e^{4t} + 1}}$; $K(t) = \frac{2e^{3t}}{(e^{4t} + 1)^{3/2}}$; $\mathbf{V}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$; $\mathbf{A}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$; $\mathbf{T}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j}$;
 $\mathbf{N}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j}$; $\|\mathbf{V}(0)\| = \sqrt{2}$; $A_T(0) = 0$; $A_N(0) = \sqrt{2}$; $K(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 17. (a) $\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$; (b) $\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$; (c) $8\mathbf{j}$; (d) $\frac{64}{65} \sqrt{65}$; (e) $\frac{8}{65} \sqrt{65}$
19. $\mathbf{R} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$; se tiver velocidade escalar constante, $\mathbf{V} = \frac{k}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{k}{\sqrt{2}} \mathbf{j}$; $\mathbf{A} = \frac{k^2}{16} \mathbf{i} - \frac{k^2}{16} \mathbf{j}$; $\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j}$; $\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j}$;
 $A_T = 0$; $A_N = \frac{k^2 \sqrt{2}}{16}$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 14 (Página 842)

1. $-25\mathbf{i} + 36\mathbf{j}$ 3. $\sqrt{4.594}$ 5. $15\sqrt{2} - 14\sqrt{13}$ 7. 92 9. $\frac{9}{\sqrt{106}} \mathbf{i} - \frac{5}{\sqrt{106}} \mathbf{j}$ 11. $h = -\frac{1}{2}$; $k = \frac{1}{2}$ 13. $-\frac{19}{5} \sqrt{2}$
15. $-\frac{19}{25} \mathbf{i} - \frac{133}{25} \mathbf{j}$ 17. $-\frac{19}{26} \sqrt{13}$ 19. (a) 104,4 N; (b) $35,5^\circ$ 21. $-89,30 \text{ J}$
23. (a) todos números reais em $[0, +\infty)$ exceto 1; (b) $\frac{1}{2} \mathbf{i} + \frac{1}{2} \mathbf{j}$; (c) $\frac{-1}{(t+1)^2} \mathbf{i} + \frac{2t^{1/2} - t - 1}{2t^{1/2}(t-1)^2} \mathbf{j}$ 25. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{6t}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{108t^3}$
27. $x = 12$; $y = 16$; $y = -16$ 29. $-\frac{4(t^{12} + t^{10}) + 144(t^2 - 1)^3}{t^9(t^2 - 1)^3}$ 31. $\frac{3}{2} \sqrt{37} + \frac{1}{4} \ln(6 + \sqrt{37})$ 37. $|at|$ 39. $\frac{2}{75}$; $\frac{75}{2}$
41. (a) $9y = 12x - x^2$; (b) $\mathbf{V}(t) = 3\mathbf{i} + (4 - 2t)\mathbf{j}$; $\mathbf{A}(t) = -2\mathbf{j}$; (c) $\mathbf{V}(1) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; $\mathbf{A}(1) = -2\mathbf{j}$
43. $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg} t$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3a} \sec^4 t \operatorname{cosec} t$ 45. $\mathbf{T}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \mathbf{i} + \frac{2}{e^t + e^{-t}} \mathbf{j}$; $\mathbf{N}(t) = \frac{2}{e^t + e^{-t}} \mathbf{i} - \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \mathbf{j}$
47. $x = 2(3s + 17\sqrt{17})^{2/3} - 34$; $y = \frac{1}{3} [(3s + 17\sqrt{17})^{2/3} - 16]^{3/2}$ 49. $h = \frac{1}{2g} (v_0 \operatorname{sen} \alpha)^2$ 55. $\mathbf{V}(t) = 2 \operatorname{sen} 2t\mathbf{i} + 2 \operatorname{cosh} 2t\mathbf{j}$;
 $\mathbf{A}(t) = 4 \operatorname{cosh} 2t\mathbf{i} + 4 \operatorname{senh} 2t\mathbf{j}$; $\|\mathbf{V}(t)\| = 2\sqrt{\operatorname{cosh} 4t}$; $A_T(t) = \frac{4 \operatorname{senh} 4t}{\sqrt{\operatorname{cosh} 4t}}$; $A_N(t) = \frac{4}{\sqrt{\operatorname{cosh} 4t}}$ 57. $A_T = \frac{4t - 8}{\sqrt{4t^2 - 16t + 25}}$;
 $A_N = \frac{6}{\sqrt{4t^2 - 16t + 25}}$

EXERCÍCIOS 15.1 (Página 851)

1. (b) (7, 2, 0), (0, 0, 3), (0, 2, 0), (0, 2, 3), (7, 0, 3), (7, 0, 0); (c) $\sqrt{62}$ 3. (b) (2, 1, 2), (-1, 3, 2), (-1, 1, 5), (2, 3, 2), (-1, 3, 5), (2, 1, 5);
(c) $\sqrt{22}$ 5. (b) (3, -1, 0), (3, 3, 0), (1, 3, 0), (1, 3, 5), (1, -1, 5), (3, -1, 5); (c) $3\sqrt{5}$ 7. (a) 3; (b) (2, 5, $\frac{5}{2}$) 9. (a) $\frac{13}{2}$; (b) ($\frac{5}{4}$, -1, 2)
11. (a) $7\sqrt{2}$; (b) $(-1, \frac{9}{2}, -\frac{1}{2})$ 13. $(\pm 4\sqrt{6}, 4, 2)$ 17. (a) $|\overline{AB}| = 9\sqrt{2}$; $|\overline{AC}| = 2\sqrt{62}$; $|\overline{BC}| = \sqrt{62}$; (b) ponto médio de AB : $(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$;
ponto médio de AC : $(-1, 2, 5)$; ponto médio de BC : $(-\frac{5}{2}, 8, \frac{7}{2})$ 21. esfera com centro em (4, -2, -1) e $r = 5$
23. o ponto (0, 0, 3) 25. o conjunto vazio 27. $x^2 + (y - 1)^2 + (z + 4)^2 = 9$

EXERCÍCIOS 15.2 (Página 859)

1. (a) (21, -13, -2); (b) (-25, -26, 5); (c) $7\sqrt{59} - 5\sqrt{41}$; (d) $\sqrt{1.326}$
3. (a) (-19, -16, -1); (b) $(-6\sqrt{91}, -8\sqrt{91}, -2\sqrt{91})$ 5. $a = 0, b = 0$ 7. $\frac{4}{\sqrt{89}}$; $\frac{3}{\sqrt{89}}$; $\frac{8}{\sqrt{89}}$ 9. $-\frac{6}{\sqrt{86}}$; $\frac{1}{\sqrt{86}}$; $\frac{7}{\sqrt{86}}$
11. $(\frac{13}{3}, 0, -\frac{4}{3})$ 13. $(\frac{17}{3}, \frac{4}{3}, -6)$ 15. (a) $7(-\frac{6}{7} \mathbf{i} + \frac{2}{7} \mathbf{j} + \frac{3}{7} \mathbf{k})$; (b) $\sqrt{14}(-\frac{2}{\sqrt{14}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{14}} \mathbf{j} - \frac{3}{\sqrt{14}} \mathbf{k})$
17. (a) $(\frac{1}{9}, \frac{8}{9}, \frac{4}{9})$; (b) $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ 21. (a) -44; (b) -468; (c) -31; (d) (-84, 198, 124)
23. (a) $-\frac{1}{5} \sqrt{5}$; (b) -3; (c) (2, 1, -2) 25. (a) $-\frac{13}{9} \sqrt{6}$; (b) $(-\frac{26}{27}, -\frac{91}{27}, \frac{13}{27})$ 29. $\frac{1}{11} \sqrt{4.422}$ 33. $\frac{7}{2} \sqrt{3}$ unidades quad.
35. $-\frac{43}{30} \sqrt{6}$ 37. 25 J 39. $\frac{5}{3} \sqrt{6}$ J 41. $\frac{2}{5}$ 45. $\cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $\cos^{-1}(-\frac{1}{\sqrt{3}})$ 49. $r = 5, s = 9, t = -12$

EXERCÍCIOS 15.3 (Página 867)

1. $x + 2y - 3z + 1 = 0$ 3. $y - z + 3 = 0$ 5. $x - 3y - 4z - 3 = 0$ 7. $3x + 2y + 6z = 23$
 9. $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}); (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ 11. $(\frac{4}{13}, \frac{3}{13}, -\frac{12}{13}); (-\frac{4}{13}, -\frac{3}{13}, \frac{12}{13})$ 13. $(\frac{3}{\sqrt{13}}, 0, \frac{2}{\sqrt{13}}); (-\frac{3}{\sqrt{13}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{13}})$
 15. $5x - 3y + 7z + 14 = 0$ 17. $2x - y - z + 1 = 0$ 19. $4y - 3z - 1 = 0$ e $z = 1$ 21. $67,6^\circ$ 23. $69,2^\circ$
 25. $\frac{16}{15}\sqrt{6}$ 27. $\frac{3}{2}$

EXERCÍCIOS 15.4 (Página 872)

1. $x = 1 + 4t, y = 2 - 3t, z = 1; \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-3}, z = 1$ 3. $x = 13t, y = -12t, z = -8t; \frac{x}{13} = \frac{y}{-12} = \frac{z}{-8}$
 5. $x = 2t - 2, y = -16t; z = 13t + 3; \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-16} = \frac{z-3}{13}$ 7. $x = 4 + t, y = -5 + 3t, z = 20 - 6t; \frac{x-4}{1} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-20}{-6}$
 9. $\frac{x-\frac{1}{7}}{2} = \frac{y}{7} = \frac{z-\frac{10}{7}}{13}$ 13. $8x - y - 66 = 0; 13x - 5z - 102 = 0; 13y - 40z + 42 = 0$ 15. $4x + y + 3 = 0; 3x - z + 4 = 0;$
 $3y + 4z - 7 = 0$ 17. $\frac{5}{18}\sqrt{6}$ 19. $4x + 7y - 3z + 7 = 0$ 21. $4x + 2y - 3z + 5 = 0$ 23. $(\frac{5}{3}, -\frac{17}{6}, \frac{5}{12})$
 25. $\frac{x-3}{1} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-4}{1}$ 27. $\frac{2}{5}\sqrt{70}$ 31. $x = x_0, y = y_0$

EXERCÍCIOS 15.5 (Página 882)

1. $(7, 13, -11)$ 3. -490 11. $(9, -1, -23)$ 15. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ 17. $\sqrt{89}$ unidades quad. 19. $9\sqrt{29}$ unidades quad.
 21. $5x - 2y + 7z = 0$ 23. $x + 2y + z - 2 = 0$ 25. $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j - k)$ 27. $\pm \frac{1}{\sqrt{6}}(i + 2j + k)$ 29. 20 unidades cúb. 31. $\frac{38}{3\sqrt{78}}$

EXERCÍCIOS 15.6 (Página 887)

13. $x^2 + z^2 = 4y$ 15. $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$ 17. $y^2 = 9x^2 + 9z^2$ 19. $y^2 + z^2 = \text{sen}^2 x$ 21. $x^2 + z^2 = 16$; eixo x
 23. $x^2 - z^2 = 4$; eixo z 25. $z = \sqrt{|y|}$; eixo y 27. $y^2 = 9x^2$; eixo y

EXERCÍCIOS 15.7 (Página 894)

1. hiperbolóide elíptico de uma folha 3. parabolóide hiperbólico 5. cilindro hiperbólico 7. elipsóide
 9. hiperbolóide elíptico de uma folha 11. cone elíptico 13. parabolóide elíptico 15. parabolóide hiperbólico
 17. hiperbolóide elíptico de duas folhas 19. (a) $1 < |k| < \sqrt{2}$; (b) $|k| < 1$ 21. vértice: $(1, -\frac{1}{3}, 0)$; foco: $(1, 0, 0)$ 25. 8π unidades cúb.
 27. $\frac{abh^2}{2c} \pi$ unidades cúb.

EXERCÍCIOS 15.8 (Página 900)

1. $\frac{1}{\sqrt{4t^2 + 5}}(i - 2tj - 2k)$ 3. $T(t) = \frac{1}{3}\sqrt{3}[(\cos t - \text{sen } t)i + (\cos t + \text{sen } t)j + k]$
 5. $\frac{1}{\sqrt{4t^2 + 29}}[2(\cos t - t \text{ sen } t)i + 5j + 2(\text{sen } t + t \cos t)k]$ 7. $\sqrt{21} + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} \ln(4 + \sqrt{21})$ 9. $\sqrt{3}(e^3 - 1)$ 11. 13
 15. $R(t) = ti + e^tj + te^tk$ 17. $-\frac{3}{5}$ 19. $T(1) = \frac{1}{14}\sqrt{14}i + \frac{1}{7}\sqrt{14}j + \frac{3}{14}\sqrt{14}k; N(1) = -\frac{11}{266}\sqrt{266}i - \frac{4}{133}\sqrt{266}j + \frac{9}{266}\sqrt{266}k;$
 $B(1) = \frac{\sqrt{19}}{19}(3i - 3j + k); K(1) = \frac{1}{98}\sqrt{266}$ 21. $T(-1) = \frac{1}{3}(i + 2j - 2k); N(-1) = \frac{2}{15}\sqrt{5}i - \frac{1}{3}\sqrt{5}j - \frac{4}{15}\sqrt{5}k;$

$$\mathbf{B}(-1) = -\frac{2}{5}\sqrt{5}\mathbf{i} - \frac{1}{5}\sqrt{5}\mathbf{k}; \mathbf{K}(-1) = \frac{2}{27}\sqrt{5} \quad 23. \mathbf{T}(0) = \frac{1}{3}\sqrt{3}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}); \mathbf{N}(0) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}(\mathbf{i} - \mathbf{j}); \mathbf{B}(0) = -\frac{1}{6}\sqrt{6}(\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}); \mathbf{K}(0) = \frac{1}{3}\sqrt{2}$$

$$25. \mathbf{V}(\frac{1}{2}\pi) = a\mathbf{i} + \mathbf{k}; \mathbf{A}(\frac{1}{2}\pi) = -a\mathbf{j}; \|\mathbf{V}(\frac{1}{2}\pi)\| = \sqrt{a^2 + 1} \quad 27. \mathbf{V}(1) = 2e^2\mathbf{i} - 2e^{-2}\mathbf{j} + 3e^2\mathbf{k};$$

$$\mathbf{A}(1) = 4e^2\mathbf{i} + 4e^{-2}\mathbf{j} + 8e^2\mathbf{k}; \|\mathbf{V}(1)\| = \sqrt{13e^4 + 4e^{-4}} \quad 31. 2$$

EXERCÍCIOS 15.9 (Página 904)

1. (a) (0, 3, 5); (b) $(-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\sqrt{3}, -4)$; (c) (cos 1, sen 1, 1) 3. (a) $(\sqrt{6}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2})$; (b) (0, $2\sqrt{3}$, 2); (c) $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2}, -\sqrt{3})$
 5. (a) $(2, \frac{2}{3}\pi, -2\sqrt{3})$; (b) $(0, \frac{3}{4}\pi, -\sqrt{2})$; (c) $(\sqrt{6}, \frac{1}{3}\pi, \sqrt{6})$ 7. elipsóide; $r^2 + 4z^2 = 16$ 9. parabolóide elíptico; $r^2 = 3z$
 11. cone elíptico; $r^2 \cos 2\theta = 3z^2$ 13. esfera; $\rho = 9 \cos \phi$ 15. cilindro direito; $\rho \sin \phi = 3$
 17. esfera; $\rho = 8 \sin \phi \cos \theta$ 19. (a) cilindro circular reto; $x^2 + y^2 = 16$; (b) plano através do eixo z; $y = x$ 21. $x^2 - y^2 = z^3$
 23. (a) esfera; $x^2 + y^2 + z^2 = 81$; (b) plano através do eixo z; $x = y$; (c) metade de um cone com vértice na origem; $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
 25. cilindro circular reto; $x^2 + y^2 = 36$ 27. $x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2y$ 31. (b) $2\pi\sqrt{a^2 + 1}$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 15 (Página 905)

1. um ponto no eixo x em R , uma reta paralela ao eixo y em R^2 , um plano paralelo ao plano yz em R^3 3. o eixo x
 5. circunferência no plano xz com centro na origem e raio 2. 7. o plano é perpendicular ao plano xy interceptando-o na reta $y = x$
 9. o parabolóide de revolução gerado pela rotação $y^2 = 9z$ em torno do eixo z. 11. o cone circular reto gerado pela rotação de $y = x$ em torno do eixo x. 13. $\mathbf{i} + 26\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$ 15. -3 17. $7\sqrt{1.270}$ 19. $-\frac{1}{3}\sqrt{21}$ 21. $\frac{1}{9}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$ 23. (60, -49, 80) 25. 16 27. 295
 29. $(-3, \sqrt{167}, 1)$, $(-3, -\sqrt{167}, 1)$ 31. $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 17$ 33. $z^2 = e^{4y}$ ou $x^2 = e^{4y}$; o eixo y 35. 3
 37. (a) $\cos \alpha = -\frac{7}{\sqrt{78}}$, $\cos \beta = -\frac{5}{\sqrt{78}}$, $\cos \gamma = -\frac{2}{\sqrt{78}}$; (b) $-\frac{7}{\sqrt{78}}\mathbf{i} - \frac{5}{\sqrt{78}}\mathbf{j} - \frac{2}{\sqrt{78}}\mathbf{k}$ 39. (a) $-\frac{4}{5}\sqrt{3}$; (b) $-\frac{28}{25}\mathbf{i} + \frac{4}{25}\mathbf{j} - \frac{4}{5}\mathbf{k}$
 41. $x - 6y - 10z + 23 = 0$ 43. $\frac{47}{10}\sqrt{2}$ 45. 3 47. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ 49. $\frac{x}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{1}$, $x = 4t$, $y = -3t$, $z = t$ 53. $\frac{54}{25}\pi$ unidades quad.
 55. 24 unidades cúb. 57. $\frac{25}{4}[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)]$ 59. $\mathbf{V}(\frac{1}{2}\pi) = -\frac{1}{2}\pi\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\mathbf{A}(\frac{1}{2}\pi) = -2\mathbf{i} - \frac{1}{2}\pi\mathbf{j}$; $\|\mathbf{V}(\frac{1}{2}\pi)\| = \frac{1}{2}\sqrt{8 + \pi^2}$
 61. $\mathbf{T}(\frac{1}{2}\pi) = -\frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{j}$; $\mathbf{N}(\frac{1}{2}\pi) = -\mathbf{k}$; $\mathbf{B}(\frac{1}{2}\pi) = \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{j}$ 63. $(\frac{3}{2}\sqrt{3}, \pi, \frac{3}{2})$
 65. (a) $z = r^2(1 + \sin 2\theta) + 1$; (b) $r^2(25 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta) = 100$

EXERCÍCIOS 16.1 (Página 916)

1. (a) $-\frac{1}{7}$; (b) 5; (c) $\frac{x + y}{x - y + 2}$; (d) 0 3. (a) 1; (b) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; (c) $\frac{1}{2}\sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2}$; (d) $4x + 4y + 8$ 5. $\{(x, y) | x^2 + y^2 \neq 1\}$
 7. $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 9. $\{(x, y) | x^2 - y^2 \geq 1\}$ 11. $\{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 1\}$ 13. $\{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ 15. $\{(x, y) | y \neq \pm x\}$
 17. $\{(x, y) | -1 \leq x - y \leq 1\}$ 19. $\{(x, y) | xy > 1\}$ 21. $\{(x, y, z) | x - y - z \neq 0\}$ 23. $\{(x, y, z) | x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 16\}$
 25. $\{(x, y, z) | |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$ 27. $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 < 4\}$ 29. $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 16\}$ 31. R^2 33. R^2 35. R^2
 37. circunferências de raios $\sqrt{16 - k^2}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$ 39. circunferências de raios $\sqrt{16 - k}$, $k = 16, 12, 7, 0, -9, -20$
 41. hipérbolas $x^2 - y^2 = k$, $k = 16, 9, 4, 9, -4, -9, -16$ 43. circunferências de raios $\sqrt{2k}$, $k = 8, 6, 4, 2, 0$
 45. $h(x, y) = \sin^{-1} \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; domínio: $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 47. (a) 2; (b) 6; (c) $\sqrt{x - y^2}$; (d) $|x - y|$; (e) $|x - y|$

EXERCÍCIOS 16.2 (Página 926)

1. 0 3. -4 5. 2 7. 0 9. $\delta = \frac{1}{7}\epsilon$ 11. $\delta = \frac{1}{5}\epsilon$ 13. $\delta = \min(1, \frac{1}{6}\epsilon)$ 15. $\delta = \min(1, \frac{1}{8}\epsilon)$ 23. 0 25. 0
 27. o limite existe e é 0; pegue $\delta = \sqrt{\epsilon}$ 29. não existe limite 33. $\frac{1}{4}\pi$ 35. $\frac{1}{2}$ 39. $\frac{1}{2}$ 41. 3 47. 0; pegue $\delta = \frac{1}{3}\epsilon$

EXERCÍCIOS 16.3 (Página 930)

1. contínua em todos os pontos (x, y) em R^2 que não esteja na reta $y = 1$
 3. contínua em todos os pontos (x, y) em R^2 que não esteja no eixo y
 5. contínua em todos os pontos (x, y) em R^2 que não esteja na reta $y = 2x$
 7. contínua em todos os pontos (x, y) em R^2 que seja interna à circunferência $x^2 + y^2 = 25$ 9. contínua em todos os pontos R^2

11. contínua em todos os pontos $(x, y) \neq (0, 0)$ em R^2 13. contínua em todos os pontos R^2
 15. todos os pontos (x, y) em R^2 que seja interior à circunferência $x^2 + y^2 = 16$
 17. todos os pontos (x, y) em R^2 que seja exterior à elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ 19. todos os pontos (x, y) em R^2 para os quais $|xy| \geq 1$
 21. todos os pontos (x, y) em R^2 no primeiro e quarto quadrante para os quais $|x + y| < 1$ 23. todos os pontos em R^2 25. essencial
 27. removível; $f(0, 0) = 0$ 29. essencial 31. removível; $f(0, 0) = 0$
 35. contínua em todos os pontos (x, y, z) em R^3 que seja exterior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 37. contínua em todos os pontos em R^3

EXERCÍCIOS 16.4 (Página 938)

1. 6 3. $3x - 2y$ 5. $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 7. $x^2 - 6xy + 2z$ 9. $xy + yt + zt$ 11. 4 13. $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
 15. $-2 \sin 3\theta \sin 2\phi$ 17. $\frac{e^{y/x}}{xy} \left(y \ln \frac{y^2}{y} - x \right)$ 19. $\frac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ 21. $4xy + \frac{1}{z}$ 23. $xze^{xyz} + \frac{3xz^2}{z^4 + 9x^2y^2}$
 25. (a) -1 ; (b) 12 27. $-\ln \sin x$; $\ln \sin y$ 31. (a) 1; (b) 1 33. (a) -2 ; (b) 0 35. 4 37. $-4^\circ/\text{cm}$; $-8^\circ/\text{cm}$
 39. (a) $\frac{100}{i^2} \left[\frac{9i + 1}{(1 + i)^9} - 1 \right]$; (b) $\frac{1}{0,0036} \left[\frac{1,54}{(1,06)^9} - 1 \right] \approx -24,4$; (c) $\frac{5.000 \ln 1,06}{3(1,06)^t}$; (d) $-\frac{5.000 \ln 1,06}{3(1,06)^8} \approx -61$
 41. $0,0943 \text{ m}^2/\text{kg}$; $6,42 \text{ m}^2/\text{m}$

EXERCÍCIOS 16.5 (Página 947)

1. (a) $3(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)(\Delta y) - (\Delta y)^2 + 14\Delta x - 6\Delta y$; (b) $0,5411$; (c) $14\Delta x - 6\Delta y$; (d) $0,54$
 3. (a) $(2 + \Delta x)(-4 + \Delta y)e^{(2 + \Delta x)(-4 + \Delta y)} + 8e^{-8}$; (b) $-0,0026$; (c) $28e^{-8} \Delta x - 14e^{-8} \Delta y$; (d) $-0,0019$
 5. (a) $\Delta x + 4\Delta y + (\Delta x)(\Delta y) + \ln(1 + \Delta y) + \ln(5 + \Delta z) - \ln 5$; (b) $0,2141$; (c) $\Delta x + 5\Delta y + \frac{1}{5} \Delta z$; (d) $0,214$
 7. $(12x^2 - y^2) dx + (3 - 2xy) dy$ 9. $(\cos y - y \cos x) dx + (-x \sin y - \sin x) dy$ 11. $\frac{2x dx + 2y dy + 2z dz}{x^2 + y^2 + z^2}$
 13. $\text{tg}^{-1} z dx - \frac{2y}{z} dy + \left(\frac{x}{1 + z^2} + \frac{y^2}{z^2} \right) dz$
 15. (a) $2(x_0 y_0 - y_0) \Delta x + (x_0^2 - 2x_0) \Delta y + (y_0 \Delta x + \Delta x \Delta y) \Delta x + 2(x_0 \Delta x - \Delta x) \Delta y$; (b) $\epsilon_1 = y_0 \Delta x + \Delta x \Delta y$; $\epsilon_2 = 2(x_0 \Delta x - \Delta x)$
 17. (a) $\frac{2x_0 y_0 \Delta x + y_0(\Delta x)^2 - x_0^2 \Delta y}{y_0^2 + y_0 \Delta y}$; (b) $\epsilon_1 = \frac{y_0^2 \Delta x - 2x_0 y_0 \Delta y}{y_0^3 + y_0^2 \Delta y}$; $\epsilon_2 = \frac{x_0^2 \Delta y}{y_0^3 + y_0^2 \Delta y}$
 31. (a) $(y_0 - z_0) \Delta x + x_0 \Delta y + (2z_0 - x_0) \Delta z - (\Delta z)(\Delta x) + (\Delta x)(\Delta y) + (\Delta z)(\Delta z)$; (b) $\epsilon_1 = -\Delta z$, $\epsilon_2 = \Delta x$, $\epsilon_3 = \Delta z$ 35. $7,36 \text{ m}^3$
 37. $0,14 \text{ cm}$; $1,4\%$ 39. $\frac{13}{1.600}$; $0,325\%$ 41. $\$7.200$

$$43. D_1 f(x, y) = \begin{cases} 2x \text{ sen } \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{se } xy = (0, 0) \end{cases}$$

$$D_2 f(x, y) = \begin{cases} 2y \text{ sen } \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

EXERCÍCIOS 16.6 (Página 955)

1. $\frac{\partial u}{\partial r}$; (a) $6x - 2y$; (b) $16r - 10s$; $\frac{\partial u}{\partial s}$; (a) $-2x - 4y$; (b) $-10r - 6s$ 3. $\frac{\partial u}{\partial r}$; (a) $13x - 2y + 5$; (b) $24r - 41s + 5$;
 $\frac{\partial u}{\partial s}$; (a) $-17x - 7y - 10$; (b) $-41r + 44s - 10$ 5. $\frac{\partial u}{\partial r}$; (a) $\frac{2e^{y/x}}{x^2} (2x \text{ sen } t - y \cos t)$; (b) 0; $\frac{\partial u}{\partial t}$; (a) $\frac{2re^{y/x}}{x^2} (y \text{ sen } t + 2x \cos t)$;
 (b) $2e^{2 \text{tg}^{-1} \sec^2 t}$ 7. $\frac{\partial u}{\partial r} = 2r(2x + y) + 3x$; $\frac{\partial u}{\partial s} = 2s(2x + y) - 2x$ 9. $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{6re^s + s \cos rs}{\sqrt{1 - (3x + y)^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{3r^2 e^s + r \cos rs}{\sqrt{1 - (3x + y)^2}}$

R-10

Respostas dos Exercícios de Número Ímpar

11. $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{6s}{x^2} \sinh \frac{y}{x} (xe^r - ry)$; $\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{3}{x^2} \sinh \frac{y}{x} (2xe^r - yr^2) = 0$
13. $\frac{\partial u}{\partial r} = 2x \sin \phi \cos \theta + 2y \sin \phi \sin \theta + 2z \cos \phi$; $\frac{\partial u}{\partial \phi} = 2xr \cos \phi \cos \theta + 2yr \cos \phi \sin \theta - 2zr \sin \phi$;
 $\frac{\partial u}{\partial \theta} = -2xr \sin \phi \sin \theta + 2yr \sin \phi \cos \theta$ 15. (a) $e^x(\cos t - y \sin t) + e^y(x \cos t - \sin t)$;
 (b) $e^{\cos t}(\cos t - \sin^2 t) + e^{\sin t}(\cos^2 t - \sin t)$ 17. (a) $\frac{x \sec^2 t - y \sin t + z \cos t}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; (b) $\operatorname{tg} t \sec t$ 19. $\frac{txe^t - y}{t(x^2 + y^2)}$
21. $\frac{x + y + 2t + ty - tx}{t(y + t)^2}$ 23. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3y - 6x - 4z}{2z + 4x}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3x - 2y}{2z + 4x}$ 25. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z}{x}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xyz + 1}{3xy \operatorname{tg} 3xz - xy^2}$
29. decrescente a taxa de $\frac{8}{61}$ rad/min 31. crescente à taxa de $3.840\pi \text{ cm}^3/\text{min}$ 33. crescente à taxa de 1,6 L/min
35. $\frac{\partial u}{\partial v} = \cos w \sinh v \frac{\partial u}{\partial x} + \sin w \cosh v \frac{\partial u}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial w} = -\sin w \cosh v \frac{\partial u}{\partial x} + \cos w \sinh v \frac{\partial u}{\partial y}$

EXERCÍCIOS 16.7 (Página 962)

1. (a) $\frac{2}{y} - \frac{6y}{x^4}$; (b) $\frac{2x^2}{y^3}$ 3. (a) $4e^{2x} \sin y$; (b) $-e^{2x} \sin y$ 5. (a) $2 \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} - \frac{2xy}{x^2 + y^2}$; (b) $2 \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} + \frac{2xy}{x^2 + y^2}$
7. (a) $3y \cosh x$; (b) $4x \sinh y$ 9. (a) $e^x \cos y - \frac{2x \ln y}{(1 + x^2)^2}$; (b) $-e^x \cos y - \frac{\operatorname{tg}^{-1} x}{y^2}$ 11. (a) $12x + 20y$; (b) $12x + 20y$
13. (a) 0; (b) e^y 15. (a) $-2e^z \sin e^z$; (b) $-2we^z(\sin e^z + e^z \cos e^z)$ 17. (a) $\frac{-320rst}{(r^2 + 4s^2 - 5t^2)^3}$; (b) $\frac{16r(5t^2 + 12s^2 - r^2)}{(r^2 + 4s^2 - 5t^2)^3}$
25. não existe nem um nem outro 27. $f_{12}(0, 0) = -1$; $f_{21}(0, 0) = 1$ 31. $6se^{r-s}(2 + r) - 8e^{-2s}$ 33. $10 \cos^2 \theta + 8$ 35. $-10r \sin 2\theta$

EXERCÍCIOS 16.8 (Página 967)

3. $\xi_1 = 2$ 5. $\xi_1 = 6 - 2\sqrt{3}$ 7. 0 9. 0 11. $\xi_2 = 2\sqrt{3} - 4$ 13. $\xi_2 = 3 + \ln \left(\frac{e^2 - 1}{2} \right)$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 16 (Página 968)

1. $\{(x, y) | x^2 + 4y^2 \geq 16\}$ 3. $\{(x, y) | y > x^2\}$ 5. $\{(x, y, z) | y \neq \pm z\}$; o conjunto de todos os pontos em R^3 exceto aqueles sobre o plano $y = \pm z$ 7. $\{(x, y) | 4x^2 + 9y^2 \leq 36\}$; a parte superior do elipsóide $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{36} = 1$ 9. $y = \frac{k}{4x^{1/2}}$, $k = 16, 8, 4, 2$
11. (a) $4xy - 3y^2 + 4$; (b) $2x^2 - 6xy - 2$; (c) $4y$; (d) $-6x$; (e) $4x - 6y$; (f) $4x - 6y$ 13. (a) $\frac{2x}{3y^2}$; (b) $\frac{y - 2x^2}{3y^3}$; (c) $-\frac{4x}{3y^3}$; (d) $-\frac{4x}{3y^3}$
15. (a) $t^2 \cos st^2 + te^s$; (b) $2st \cos st^2 + e^s$; (c) $2t(\cos st^2 - st^2 \sin st^2) + e^s$; (d) $2t(\cos st^2 - st^2 \sin st^2) + e^s$ 17. (a) $\frac{1}{y} e^{x/y} + \frac{1}{x}$;
 (b) $-\frac{x}{y^2} e^{x/y} - \frac{1}{y}$; (c) $\frac{1}{y^2} e^{x/y} - \frac{1}{x^2}$; (d) $\frac{2x}{y^3} e^{x/y} + \frac{x^2}{y^4} e^{x/y} + \frac{1}{y^2}$ 19. (a) $\frac{y^2 + z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$; (b) $\frac{-2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$; (c) $\frac{-2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$
21. (a) $\frac{-320uvw}{(u^2 + 4v^2 - 5w^2)^3}$; (b) $\frac{16u(12v^2 + 5w^2 - u^2)}{(u^2 + 4v^2 - 5w^2)^3}$ 23. (a) $\frac{1}{rt^2}$; (b) $-\frac{2}{rt^3}$; (c) $\frac{2}{r^2t^3}$ 27. (a) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{6y(x + y)}{x^2 + y^2} + 3 \ln(x^2 + y^2)$;
 $\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{4y(x - y)}{x^2 + y^2} - 2 \ln(x^2 + y^2)$; (b) $\frac{\partial u}{\partial t} = (3t - 2s) \frac{18t}{4s^2 + 9t^2} + 3 \ln(8s^2 + 18t^2)$; $\frac{\partial u}{\partial s} = (3t - 2s) \frac{8s}{4s^2 + 9t^2} - 2 \ln(8s^2 + 18t^2)$
29. (a) $18xyse^{3rs} + 6yse^{3rs} + 9x^2r^2s^2 + 6xr^2s^2 - 9zr^2s^2$; (b) $[9(1 + 2rs)e^{6rs} + 6(1 + rs)e^{3rs} - 9 \ln 4]r^2s^2$
31. (a) $3x \cos t - 4(y + 2x) \sin t$; (b) $12 \cos 2t - 16 \sin 2t$; $\left. \frac{du}{dt} \right|_{t = \pi/4} = -16$

33. (a) $3(-1 + \Delta x)(3 + \Delta y)^2 - 5(-1 + \Delta x)(2 + \Delta z)^2 - 2(-1 + \Delta x)(3 + \Delta y)(2 + \Delta z) - 5$; (b) $-0,48$; (c) $-5\Delta x - 14\Delta y + 26\Delta z$; (d) $-0,48$ 35. 2 37. $\frac{1}{6}\pi$ 39. $\delta = \min(1, \frac{1}{35}\epsilon)$ 41. existe limite e é 0; pegue $\delta = \sqrt[4]{\epsilon}$ 43. não existe limite
45. contínua em todos os pontos (x, y) em R^2 que não estejam nas retas $x = \pm 2y$
47. contínua em todos os pontos (x, y) em R^2 exceto $(x, y) = (2n + 1, 2m + 1)$, onde n e m são quaisquer inteiros
49. contínua em todos os pontos em R^2 51. 39 centavos 53. $-3.200\pi \text{ cm}^3/\text{min}$ 55. decrescente à taxa de $-0,158 \text{ N/m}^2/\text{min}$.
59. (a) 12; (b) -3

EXERCÍCIOS 17.1 (Página 978)

1. $2\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}y$ 3. $3x + \sqrt{2}y + 4z$ 5. $\frac{17}{13(x-y)^2}$ 7. $(8x - 3y)\mathbf{i} + (2y - 3x)\mathbf{j}$ 9. $\frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$
11. $\frac{y+z}{(x+z)^2}\mathbf{i} - \frac{1}{x+z}\mathbf{j} - \frac{x-y}{(x+z)^2}\mathbf{k}$ 13. $e^{-2y} \sec z(\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + x \operatorname{tg} z\mathbf{k})$ 15. 6 17. -42 19. -2
21. $-3e^{\pi/4} \cos \frac{1}{12}\pi$ 23. (a) $(-4, -4)$; (b) $-2 - 2\sqrt{3}$ 25. (a) $(-12, 2, 14)$; (b) $\frac{6}{7}$ 29. $\frac{3}{20}\pi + \frac{2}{5}$; $\frac{1}{4}\sqrt{\pi^2 + 4}$ 31. $-\frac{29}{11}$; $\sqrt{21}$
33. $\theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{3}{3\pi + 1}$ e $\theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{3}{3\pi + 1} - \pi$ 35. (a) $6\sqrt{2}^\circ/\text{m}$; (b) direção do vetor $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$
37. (a) -1 ; (b) direção do vetor $-\mathbf{j}$ e magnitude 2

EXERCÍCIOS 17.2 (Página 982)

1. $2x - 2y + 3z = 17$; $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{3}$ 3. $4x + 8y + 3z + 22 = 0$; $\frac{x+2}{4} = \frac{y+4}{8} = \frac{z-6}{3}$ 5. $ex - y = 0$;
- $\frac{x-1}{-e} = \frac{y-e}{1}$, $z = 0$ 7. $x - y - 3 = 0$; $\frac{x-6}{1} = \frac{y-3}{-1}$, $z = 3$ 9. $x + 2y + 2z - 8 = 0$; $\frac{x-4}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$
11. $3x - 2y - 6z + 84 = 0$; $\frac{x+8}{-3} = \frac{y-27}{2} = \frac{z-1}{6}$ 13. $\frac{x-2}{4} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{20}$ 15. $x = 4$, $y = 16$
17. $\frac{x}{1-8\pi} = \frac{y-2}{-2\pi} = \frac{z-1}{-1}$ 19. as superfícies são tangentes

EXERCÍCIOS 17.3 (Página 995)

1. $f(4, -\frac{1}{2}) = -\frac{133}{4}$, mín. rel. 3. $f(-\frac{1}{4}, 16) = -12$, máx. rel. 5. não tem extremo relativo 7. não tem extremo relativo
9. $f(1, 1) = -5$, mín. rel.; $f(-1, -3) = 31$, máx. rel. 11. $f(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$, máx. rel.; $f(\frac{5}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi) = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$, mín. rel. 13. 8, 8, 8
15. $(\frac{41}{14}, -\frac{5}{7}, \frac{33}{14})$; $\frac{9}{14}\sqrt{14}$ 17. $(0, \frac{1}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}})$ e $(0, -\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}})$; 1 19. $\frac{1}{3}c$ mg de droga A e $\frac{1}{2}c$ mg de droga B 21. $\frac{16}{3}\sqrt{3}$ unidades cúb.
23. comprimento da base é $2\frac{2}{3}$ cm; largura da base é 2 cm; espessura 3 cm 25. 3 máquinas-hora e 9 pessoas-hora 27. \$25,400
29. (a) 3.120; (b) 9 31. (a) $y = 0,1560x + 314,9$; (b) 368,0 mililitros por minuto por kilograma 33. esse não é o lucro total máximo
35. $l:w:h = 1:1:\frac{1}{2}$

EXERCÍCIOS 17.4 (Página 1005)

1. $\frac{dy}{dx} = -\frac{ye^{xy} + 2 \cos(2x - 3y)}{xe^{xy} - 3 \cos(2x - 3y)}$ 3. $\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos 2y}{\cos 2x}$ 5. $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x (2 \operatorname{sen} x + \cos y)}{\operatorname{sen} y (\operatorname{sen} x + 2 \cos y)}$
7. $\frac{dy}{dx} = -\frac{2ye^{-xy}}{2xe^{-xy}} = -\frac{y}{x}$ 9. $x - 1 = 0$ 11. $y = x - 1$ 13. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{9x^2v^2 - 4v^3}{12(u^2v^3 + v^2u^3)}$
15. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{ye^y - xy - uve^y - v}{e^y + v - xe^v - ue^v - 1}$ 17. $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta$ e $\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\operatorname{sen} \theta}{r}$ 19. $x + y + z - 3 = 0$
21. Em $x = 0$ temos os extremos $y = \pm b$. 23. $x = 3$ e $y = -1$.

EXERCÍCIOS 17.5 (Página 1011)

1. (0, 0) e (0, 4) 3. $(\frac{6}{7}, -\frac{4}{7}, \frac{2}{7})$ 5. $f(\pm\frac{1}{2}\sqrt{35}, \frac{1}{2}) = \frac{37}{4}$, máx. rel.; $f(0, 3) = 3$, mín. rel.; $f(0, -3) = -3$, mín. rel.
 7. $f(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}) = f(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{3}) = f(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{3}) = f(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}) = -\frac{2}{9}\sqrt{6}$, mín. rel.;
 $f(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{3}) = f(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{3}) = f(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}) = f(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}) = \frac{2}{9}\sqrt{6}$, máx. rel.
 9. 3 11. $3\sqrt{3}$ 13. (a) 12; (b) 4; (c) 1 15. $\frac{4}{13}\sqrt{26}$ 17. 2,6 19. $\frac{37}{13}$ 21. $\frac{7}{32}$ 23. mais quente em $(\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$; mais frio em $(0, \frac{1}{2})$

EXERCÍCIOS 17.6 (Página 1019)

1. $f(x, y) = 2x^2 - \frac{3}{2}y^2 + C$ 3. $f(x, y) = 3x^2 - 5xy + 2y^3 + C$ 5. $f(x, y) = 2x^3y^2 - 7x^2y + 3x - 8y + C$
 7. $f(x, y) = \frac{2x^2 - 2y^2 - x}{2xy^2} + C$ 9. $f(x, y) = x^2 \sec 2y + C$ 11. $f(x, y) = x^2 \cos y - x + C$ 13. não é uma diferencial exata
 15. $f(x, y) = xe^y - x^2y + C$ 17. $\frac{1}{2}x^2 + y^2 + xy = C$ 19. $ye^x - x^2 = C$ 21. não é exata 23. $x \sin \frac{x}{y} + \sin x = C$
 25. $f(x, y, z) = 2xy - 5xz + 8yz + C$ 27. $f(x, y, z) = xe^y \sin z + C$ 29. $f(x, y, z) = e^{x+z} + e^y \ln z - e^x \ln y + C$
 31. $f(x, y, z) = 2x^2y + 3xyz - 5yz^2 - 2x + z + C$ 33. $f(x, y, z) = xz \operatorname{tg} y + C$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 17 (Página 1020)

1. 14 3. $-\frac{5}{2}\sqrt{2}$ 5. $-\frac{8}{3}$ 7. (a) $\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$; (b) $\frac{1}{4}(1 + \sqrt{3})$ 9. (a) $12\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$; (b) $\frac{13}{7}\sqrt{14}$ 11. $f(x, y) = e^{x^2} \ln y + C$
 13. $f(x, y, z) = \frac{y}{x+z} - \frac{1}{x} - \frac{2}{z} + C$ 15. $4x + 2y + z - 12 = 0$; $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}$ 17. $\frac{x-1}{17} = \frac{y+2}{20} = \frac{z-11}{-4}$
 19. (a) a direção do vetor $-12\mathbf{i} - 150\mathbf{j}$; (b) subindo;
 (c) a direção de um ou outro dos vetores: $\frac{25}{\sqrt{629}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{629}}\mathbf{j}$ ou $-\frac{25}{\sqrt{629}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{629}}\mathbf{j}$ 21. $f(-1, -1) = 1$, máx. rel. 23. $f(\pm\sqrt{5}, 0) = 10$, mín. rel.
 25. $f(9, 11, 15) = -362$, máx. rel. 27. $\frac{7}{6}\sqrt{6}$ 29. $f(x, y) = 2x^3y + \frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + C$ 31. $f(x, y, z) = e^x \operatorname{tg} y + z \operatorname{cotg} y + C$
 33. $x^3y^2 + 2xy^3 = C$ 35. $ye^{-x} + y^2 - \cos x = C$ 37. $\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}$ 39. $2\sqrt{3}$ por $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ por $2\sqrt{3}$
 41. (a) $-\frac{3\sqrt{3} + 2}{11}$ graus por cm; (b) $\frac{2}{11}\sqrt{13}$ graus por cm na direção do vetor $-\frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{j}$ 43. 18 cm por 18 cm por 18 cm
 45. base quadrada e uma profundidade que é a metade do comprimento de um lado da base. 47. (a) $81x - 284y - 270 = 0$; (b) 11 dias
 49. (a) $y = 9,628x - 1488,2$; (b) 2.740 kilogramas por hectare

EXERCÍCIOS 18.1 (Página 1027)

1. 45 3. 50 5. 1.368 7. 704 9. 50,75 11. 1.376 13. 68,6 15. 38,2 17. [0,24] 19. [1, e] 21. $[0, \frac{3}{2}\sqrt{3}\pi^2]$

EXERCÍCIOS 18.2 (Página 1034)

1. 42 3. $\frac{98}{3}$ 5. $-\frac{49}{5}$ 7. $\frac{1}{3}$ 9. $\frac{1}{3}$ 11. 45 13. $\frac{152}{3}$ 15. $\frac{3}{2}\pi$ 17. $\frac{864}{5}$ 19. $\frac{512}{3}$ unidades cúb. 21. $\frac{16}{3}$ unidades cúb.
 23. $\frac{15\pi - 32}{120}$ unidades cúb. 25. $\frac{1}{12}$ unidades quad. 27. 72 unidades quad. 29. $c \int_{-a}^a \int_{-b\sqrt{1-(x/a)^2}}^{b\sqrt{1-(x/a)^2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dy dx$
 31. $\frac{337}{30}$ unidades cúb. 33. (b) $\frac{2}{3}a^3$; (c) $\frac{2}{3} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (2x+y) dx dy$ 35. 0

EXERCÍCIOS 18.3 (Página 1039)

1. 12 kg; $(2, \frac{3}{2})$ 3. $\frac{27}{2}$ kg; $(\frac{6}{5}, \frac{9}{5})$ 5. $\frac{176}{15}$ k kg; $(\frac{35}{22}, \frac{102}{77})$ 7. $\frac{2}{3}ka^3$ kg; $(\frac{3}{32}a(2+\pi), \frac{3}{32}a(2+\pi))$ 9. $\frac{1}{4}k\pi$ kg; $(\frac{\pi}{2}, \frac{16}{9\pi})$
 11. $\frac{4}{3}$ kg; $(\frac{6}{5}, \frac{6}{5})$ 13. $9k$ kg-m² 15. $\frac{1}{2}\pi ka^4$ kg-m² 17. $\frac{96}{35}k$ kg-m² 19. (a) $\frac{144}{5}$ kg-m²; (b) 54 kg-m²; (c) $\frac{2}{5}\sqrt{15}$ m; (d) $\frac{414}{5}$ kg-m²
 21. (a) $\frac{3}{32}\pi k$ kg-m²; (b) $\frac{1}{24}\pi(2\pi^2 - 3)k$ kg-m²; (c) $\frac{1}{4}\sqrt{6}$ m; (d) $(\frac{1}{12}\pi^3 - \frac{1}{32}\pi)k$ kg-m² 23. $\frac{1}{12}b\sqrt{6}$ cm 25. $\frac{19.904}{315}k$ kg-m²

EXERCÍCIOS 18.4 (Página 1045)

1. 6π unidades quad. 3. $\frac{1}{4}a^2(8 + \pi)$ unidades quad. 5. $(4\pi + 12\sqrt{3})$ unidades quad. 7. 4π unidades cúb. 9. $\frac{128}{9}(3\pi - 4)$ unidades cúb.
 11. $\frac{7}{2}\pi$ unidades cúb. 13. $\frac{40}{3}\pi k$ kg; $(0, \frac{21}{10})$ 15. $\frac{22}{3}k\pi$ kg; $(-\frac{57}{44}, 0)$ 17. $\frac{20}{3}k$ kg; $(\frac{23}{25}, \frac{531}{1.280}\pi)$
 19. $\frac{8}{9}(27\sqrt{3} - 14\pi)k$ kg; $(0, \frac{3}{10}, \frac{297\sqrt{3} - 160\pi}{27\sqrt{3} - 14\pi})$ 21. $\frac{5}{64}k\pi$ kg-m² 23. $\frac{11}{16}k\pi a^4$ kg-m² 25. $\frac{1}{4}\sqrt{2\pi}$ m 27. $\pi e(e^8 - 1)$

EXERCÍCIOS 18.5 (Página 1050)

1. $\sqrt{6}$ unidades quad. 3. $2\sqrt{1.633}$ unidades quad. 5. 9 unidades quad. 7. $\frac{1}{12}(135\sqrt{10} - 13\sqrt{26})$ unidades quad. 9. 8π unidades quad.
 11. 12π unidades quad. 13. 32 unidades quad. 15. $9\sqrt{2}$ unidades quad. 17. $\pi b\sqrt{a^2 + b^2}$ unidades quad.
 19. $2\pi a^2(1 - e^{-1})$ unidades quad. 21. 12π unidades quad. 23. $\frac{72}{5}[2 + \sqrt{2}\ln(1 + \sqrt{2})]$ unidades quad.

EXERCÍCIOS 18.6 (Página 1054)

1. $\frac{1}{10}$ 3. $\frac{7}{8}$ 5. $-e(\ln 2)^2$ 7. $\frac{1}{2}\pi - 1$ 9. $\frac{15}{2}$ 11. $\frac{1}{24}$ 13. 36 15. $\frac{243}{2}\pi$ 17. $\frac{648}{5}$ 19. $\frac{1}{4}$ unidades cúb.
 21. $\frac{3}{2}\pi$ unidades cúb. 23. 4π unidades cúb. 25. $\frac{4}{3}\pi abc$ unidades cúb. 27. $\frac{80}{3}k$ kg 29. $\frac{1}{28}k$ kg 31. $\frac{2}{5}(2\sqrt{2} - 1)$ kg

EXERCÍCIOS 18.7 (Página 1060)

1. $\frac{1}{3}a^3$ 3. $6\pi(e - 1)$ 5. πa^3 7. $\frac{4}{3}\pi a^3$ 9. $\frac{1}{3}$ 11. 8π 13. $\frac{4}{5}a^3\pi k$ kg 15. $1.250\pi k$ g-cm² 17. $\frac{4}{5}a^5\pi k$ kg 19. 8π 21. $\frac{512}{75}k$ kg-m²
 23. $8k\pi$ kg 25. $\frac{56}{9}\pi a^3 k$ g-cm² 27. $(0, 0, \frac{1}{2})$ 29. 18π 31. $\frac{1}{15}\pi(2\sqrt{2} - 1)$

EXERCÍCIOS 18.8 (Página 1070)

1. $\frac{14\pi}{3}$ 3. $\frac{15\pi}{8}$ 5. 4 7. 2π 9. $(e - 1)\ln 2$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 18 (Página 1070)

1. $\frac{1}{40}$ 3. $\frac{1}{8}\pi$ 5. $\frac{1}{8}e^4 - \frac{3}{4}e^2 + e - \frac{3}{8}$ 7. $\frac{3}{4}\pi$ 9. $\frac{1}{8}$ 11. $\frac{1}{3}$ 13. $\frac{1}{2}\pi \ln 2$ 15. $\frac{1}{2}(1 - \cos 1)$ 17. $\frac{4}{15}$ unidades quad.
 19. 9π 21. $\frac{8}{3}$ unidades quad. 23. $\frac{8}{3}$ unidades quad. 25. $\frac{1}{2}$ unidades cúb. 27. $\frac{1}{2}$ unidades cúb. 29. $\frac{1.104}{35}$ unidades cúb.
 31. 18 unidades quad. 33. $(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3})$ unidades quad. 35. $(2, \frac{3}{2})$ 37. $\frac{1}{108}(3\pi - 7)$ kg 39. $6\pi a^4$ unidades cúb. 41. $\frac{5}{3}\pi$ unidades cúb.
 43. $\frac{1}{64}(7e^8 + 1)$ kg-m² 45. $k(\pi + \frac{8}{3})$ kg-m² 47. $2k\pi$ kg-m²; $\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$ m 49. $65k\pi$ kg 51. $\frac{32}{5}k\pi$ kg-m²

EXERCÍCIOS 19.1 (Página 1080)

7. $6x\mathbf{i} + 6y^2\mathbf{j}$ 9. $\frac{2xy}{1 + x^4y^2}\mathbf{i} + \frac{x^2}{1 + x^4y^2}\mathbf{j}$ 11. $(6x^2 - 6xy + y^2)\mathbf{i} + (-3x^2 + 2xy - 12y^2)\mathbf{j}$
 13. $2xye^{-4z}\mathbf{i} + x^2e^{-4z}\mathbf{j} - 4x^2ye^{-4z}\mathbf{k}$ 15. conservativo 17. não-conservativo 19. conservativo 21. $\phi(x, y) = xy + C$
 23. $\phi(x, y) = e^x \sin y + C$ 25. $\phi(x, y) = x^2y^2 - xy^3 + 2y + C$ 27. $\phi(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}z^2 - xy + 3yz + C$
 29. $\phi(x, y, z) = ze^x + xe^y - ye^z + C$ 31. $\phi(x, y, z) = x^2 \cos y - yz^2 - 3x + 2z + C$ 33. 0; 5 35. $2e^x \sin yk$; $2e^x \cos y$
 37. 0; $2x + 2y + 2z$ 39. $\sin z\mathbf{i} + \sin x\mathbf{j} + \sin y\mathbf{k}$; 0 41. $\frac{x - y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}\mathbf{k}$; $\frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} + 2z$

EXERCÍCIOS 19.2 (Página 1089)

1. 1 3. $\pi - \frac{8}{3}$ 5. 8π 7. 1 9. $\frac{16}{3}$ 11. $\frac{4}{3}$ 13. $-\frac{5}{12}$ 15. $\frac{1.477}{2}$ 17. $\frac{35}{2}$ 19. $\pi(a^2 + 2a)$ 21. 8 23. $\frac{4}{3}$ J 25. $20\frac{3}{4}$ J
 27. $27\frac{3}{4}$ J 29. $(\frac{1}{16}\pi a^4 + a^2)$ J 31. 3 J 33. $(e^2 + e^4 + e^8 - 3)$ J 35. $2\frac{1}{2}$ J

EXERCÍCIOS 19.3 (Página 1098)

1. 2 3. e^2 5. -4 7. 15 9. $-4e$ 11. -14 13. 18 15. $2e^2 - 3e^3 + e^4$ 17. $\frac{3}{4}$ 19. 11 21. $\frac{13}{2}$ 23. 4 25. 0 27. 3
 29. 4 31. -13 33. 216 J 35. 32,766 J 37. $\frac{2}{15}k$ J

EXERCÍCIOS 19.4 (Página 1111)

1. -1 3. $-\frac{5}{12}$ 5. $-\frac{1}{2}\pi$ 7. $-\frac{32}{15}$ 9. $-\frac{3}{7}$ 11. $\frac{1}{5}$ 13. $\frac{1}{24}(5 - 4\sqrt{2})\pi$ 15. 0 17. -10π 19. $\frac{41}{70}$ 21. $\frac{9}{2}$ unidades quad.
 23. $\frac{1}{3}$ unidades quad. 25. $\frac{3}{8}\pi a^2$ unidades quad. 31. 24π J 33. 0 35. 16π cm²/s 37. $\frac{3}{2}\pi$ cm²/s 39. 15; (i) 41. 0; (iii)

EXERCÍCIOS 19.5 (Página 1118)

1. 8π 3. $\frac{8}{3}\sqrt{3}$ 5. $\frac{9}{5}\sqrt{14}$ 7. $\frac{1}{6}(5\sqrt{5} - 1)$ 9. $\frac{15}{2}\sqrt{2}\pi$ 11. $\frac{7}{3}\sqrt{61}$ 13. 0 15. $16k\pi$ kg 17. 9π kg 19. $\frac{665}{6}\sqrt{2}\pi$ kg 21. 18
 23. 45π 25. $\frac{7}{2}$

EXERCÍCIOS 19.6 (Página 1127)

1. $\frac{8}{3}\pi$ 3. 1 5. 18 7. $\frac{7}{2}$ 9. 27 11. 32π 13. 144π 15. $\frac{11}{12}$ 17. 0 19. π 21. 54π 23. -1 25. 8π 27. -2

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 19 (Página 1128)

1. (a) $(4xy + 3y^3)\mathbf{i} + (2x^2 + 9xy^2)\mathbf{j}$; (b) $e^y\mathbf{i} + (xe^y - ze^y - yze^y)\mathbf{j} - ye^y\mathbf{k}$ 3. $\phi(x, y) = \text{tg}^{-1} 2xy^2 + C$
 5. $\phi(x, y, z) = z^2 \text{tg} x + y^2 e^{3z} + C$ 7. $x(e^{xy} - e^{xz})\mathbf{i} + y(e^{yz} - e^{xy})\mathbf{j} + z(e^{xz} - e^{yz})\mathbf{k}$; 0 9. $\frac{1-2y}{y^2} \mathbf{k}$; $\frac{2x}{y^2}$ 11. $-\frac{4}{3}$
 13. $\frac{44}{3} - 3\pi$ 15. $\frac{27}{10}$ 17. $\frac{19}{4}$ 19. $9e^2 - 1$ 21. π 23. 13 25. 4 27. 12π 29. 0 31. $\frac{9}{2}$ unidades quad. 33. $\frac{1.568}{15}$ J
 35. $\frac{23}{6}$ J 39. 0 41. 54 cm²/s 43. $\frac{1}{2}\pi$ 45. $\frac{3}{2}\sqrt{14}$ 47. $\frac{1}{6}(37\sqrt{37} - 1)$ 49. $\frac{8}{3}k\pi$ kg 51. $108\sqrt{2}\pi$ kg 53. 56π 55. 160π 59. 0

EXERCÍCIOS 20.2 (Página 1141)

1. $y = ct^2 + 1$ 3. $y = ct + e^t$ 5. $y = \frac{1}{c_1 t} + \frac{c_2 t}{2}$ 7. $y = c \text{sen } t + e^t$ 9. $y = (\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \text{sen } 2t + c_1) \frac{1}{\cos t}$

EXERCÍCIOS 20.3 (Página 1145)

1. $4x^3 + 3(y-1)^4 = c$ 3. $\frac{x+1}{y^2} = ce^y$ 5. $\left[\frac{1+y}{1-y}\right]^{1/2} = c \left[\frac{1-t}{1+t}\right]^{1/2}$ 7. $t^2 - t^2 y^2 = k$ 9. $(3-t)(2+y) = c$
 11. $\rho = c \cdot \cos \theta$ 13. $\text{tg } y = c(1 - e^x)^3$ 15. $1 + y^2 = \frac{2}{1 - x^2}$

EXERCÍCIOS 20.4 (Página 1149)

1. $(t+y)^2(2t+y)^3 = c$ 3. $t^3 + 6t^2 y = c$ 5. $x^2 + 4y^2 = 32$ 7. $x^2 + 2xy = 8$ 9. $(x+y-1)^3 = c(x-y+3)$

EXERCÍCIOS 20.5 (Página 1154)

1. $ct^2 y^2 + ty^2 - 1 = 0$ 3. $ct^2 y^2 + 2ty^2 - 1 = 0$ 5. $y^2 = (2t+c) \cos^2 t$ 7. $x = cy^2$ 9. $x^2 = \frac{1}{y + cy^2}$

EXERCÍCIOS 20.6 (Página 1157)

1. $ty - \frac{t^3}{3} - \frac{y^3}{3} = c$ 3. $\varphi \cos \theta + \theta \sin \varphi = c$ 5. $e^{t^2} + t^4 - y^3 = c$ 7. $t^2 y^3 = c$ 9. $\frac{3t^2 y}{2} + ty^2 = c$ 11. $\frac{y^2 e^x}{2} + ye^{2x} = c$
 13. $x^4 e^x e^y + x^2 + y^2 = c$

EXERCÍCIOS 20.7 (Página 1164)

1. $y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$ 3. $y = c_1 e^{\frac{1}{2}t} + c_2 t e^{\frac{1}{2}t}$ 5. $y = c_1 e^{5t} + c_2 t e^{5t}$ 7. $y = c_1 e^{-t} \cos \sqrt{2}t + c_2 e^{-t} \sin \sqrt{2}t$ 9. $y = c_1 \cos \sqrt{5}t + c_2 \sin \sqrt{5}t$

EXERCÍCIOS 20.8 (Página 1173)

1. $y = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + (\frac{1}{3} - \frac{5}{9}t) e^{-2t}$ 3. $y = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + 2t$ 5. $y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t} + (\frac{1}{2}t - \frac{5}{8})$
 7. $y = (c_1 + x) e^{2x} + (c_2 - 4x) \sin x + (c_3 - 2x) \cos x - 1 - 2x$ 9. $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{13}{36} - \frac{5}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x$

EXERCÍCIOS 20.9 (Página 1178)

1. $y = 2e^{(t-1)} - (t-1)^2 - 2(t-1)$ 3. $y = e^{-\frac{t^2}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{3, 5, \dots, (2n+1)}$ 5. $y = \sin x$ 7. $y = \cos x$

9. $y = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1, 3, \dots, (2j-1)}{2^j j!} t^{2j}$

EXERCÍCIOS A.1 (Página A.4)

1. $\frac{1}{3}x - \frac{2}{9} \ln|2 + 3x| + C$ 3. $x + \frac{36}{6-x} + 12 \ln|6-x| + C$ 5. $\frac{1}{30}(3x-1)(1+2x)^{3/2} + C$

7. $2\sqrt{1+2x} + \ln \left| \frac{\sqrt{1+2x}-1}{\sqrt{1+2x}+1} \right| + C$ 9. $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+2}{x-2} \right| + C$ 11. $\ln|x+3 + \sqrt{x^2+6x}| + C$

13. $\sqrt{9x^2+4} - 2 \ln \left| \frac{2 + \sqrt{9x^2+4}}{3x} \right| + C$ 15. $\sqrt{9-4x^2} - 3 \ln \left| \frac{3 + \sqrt{9-4x^2}}{2x} \right| + C$

17. $\frac{1}{3}(x^2 - x - 6)\sqrt{4x-x^2} + 4 \cos^{-1} \left(\frac{2-x}{2} \right) + C$ 19. $-\frac{1}{5} \sin^4 x \cos x - \frac{4}{15} \sin^2 x \cos x - \frac{8}{15} \cos x + C$

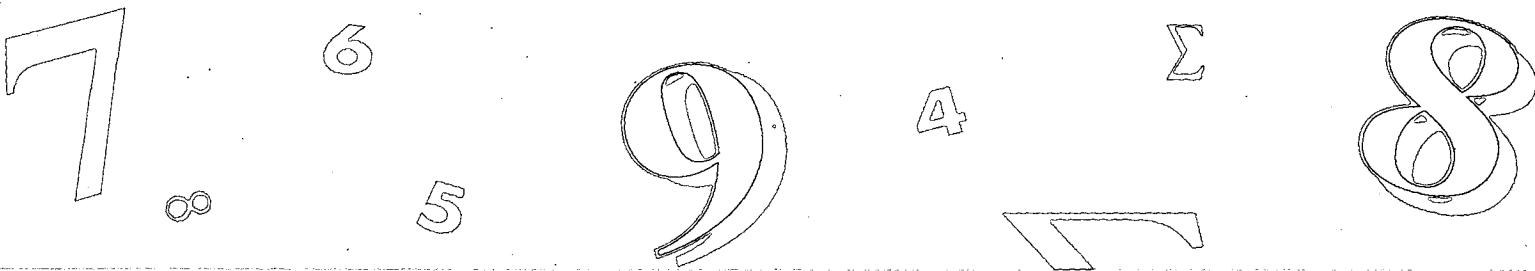
21. $-\frac{1}{6} \operatorname{cosec}^5 x \cotg x - \frac{5}{24} \operatorname{cosec}^3 x \cotg x - \frac{5}{16} \operatorname{cosec} x \cotg x + \frac{5}{16} \ln |\operatorname{cosec} x - \cotg x| + C$

23. $t^4 \sin t + 4t^3 \cos t - 12t^2 \sin t - 24t \cos t + 24 \sin t + C$ 25. $x \sec^{-1} 3x - \frac{1}{3} \ln|3x + \sqrt{9x^2-1}| + C$

27. $e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + C$ 29. $\frac{e^{4x}}{32}(8x^2 - 4x + 1) + C$ 31. $\frac{1}{16}x^4(4 \ln 3x - 1) + C$

33. $\frac{e^{2x}}{29}(2 \sin 5x - 5 \cos 5x) + C$ 35. $\frac{3}{5}y \cosh 5y - \frac{3}{25} \sinh 5y + C$ 37. $\frac{1}{60} + \frac{1}{25} \ln \frac{8}{3}$ 39. $\frac{15}{2} - 8 \ln 2$

41. $\frac{32}{5} \ln 2 - \frac{31}{25}$ 43. $\frac{15}{2} - 8 \ln 2$ 45. $\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ 47. $\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\sqrt{2}$ 49. 0 51. $\frac{1}{8}(e^2 + 3)$



Índice Remissivo

- Alfabeto grego, F-1
 Alometria, lei da, 1144
 Ângulo, de direção de um vetor, 785, 853
 entre dois planos, 865
 entre dois vetores, 796, 858
 Ângulos de direção, 786, 853
 Arco, comprimento de, 815-821
 como um parâmetro, 821
 de uma curva em R^3 , 815-821
 de uma curva em R^1 , 895
 em coordenadas polares, 820
 Área de uma superfície, 1045-1050
 Arquimedes, XV
 Axioma do completamento, 698
- Barrow, Isaac, XV
 Bernoulli, Jakob, XV
 Bernoulli, Johann, XV
 Bola aberta, 918
 continuidade de uma função em, 930
 Bola fechada, 918
 Bolzano, Bernhard, XV
- Campo(s), escalar, 1073
 forças, 1074
 velocidade, 1073
 vetorial, 1073-1081
 conservativo, 1075
 definição de, 1073
 gradiente, 1075
 solenoidal, 1107
 Cauchy, Augustin L., XV
 Centro, de curvatura, 833
 de massa, 1035
 de uma esfera, 851
 Ciclóide, 806
 Cilindro, 884
 como uma superfície, 884
 determinante de, 884
 diretriz de, 884
 elíptico, 885
 geratriz de, 884
 hiperbólico, 885
 parabólico, 885
 Circunferência, de curvatura, 829
 osculadora, 829
 Co-senos diretores, 854
 Completamento, axioma do, 698
 Componente normal do vetor aceleração, 840
 Componente tangencial do vetor aceleração, 840
 Componente tangencial do vetor velocidade, 839
 Componentes de um vetor, 785, 799, 853, 859
 Comprimento de arco, de uma curva, 815-821, 898
 como um parâmetro, 824
 Condição, de contorno, 1133
 inicial, 1133
 Cone, circular reto, 888
 elíptico, 893
 Continuidade
 de funções de mais de uma variável, 928-932
 de uma função em uma bola aberta, 930
 de uma função vetorial, 809
 Convergência, intervalo de, 749
 raio de, 749
 Coordenadas
 cartesianas retangulares tridimensionais, 847
 cilíndricas, 902
 e integrais triplas, 1055
 esféricas, 902
 e integrais triplas, 1059
 Cúbica retorcida, 896
 Curso, 789
 Curva, comprimento do arco de, 815-821, 898
 de contorno de uma função, 913
 de nível de uma função, 913
 de produto constante, 914
 em R^3 , 898
 equipotencial, 913
 integral, 1131
 fechada, 1094
 geratriz de uma superfície de revolução, 886
 seccionalmente suave, 1085
 simples, 1100
 suave, 1085
- Curvatura, 825-833, 899
 centro de, 833
 circunferência de, 829
 definição de, 827
 raio de, 829
 vetor, 827, 899
- Dedekind, Richard, XV
 Del ∇ , 975
 Derivação. *Veja também* Derivadas.
 de séries de potências, 751-761
 parcial, 932
 Derivada(s).
 das funções vetoriais, 809
 direcional, 977
 parciais, 932-940
 parciais de ordem superior, 957-964
 total, 954
 Descartes, René, XV
 Descontinuidade, essencial, 929
 removível, 929
 Desvio, 992
 Determinante de um cilindro, 884
 Diferença de vetores, 789, 855
 Diferenciabilidade, e continuidade, 944
 de funções vetoriais, 811
 Diferencial, de ordem n , 1131
 exata, 1015, 1019, 1154
 homogênea, de grau n , 1145
 de mesmo grau, 1146
 linear de primeira ordem, 1135
 total de uma função, 946, 947
 Dimensão do espaço vetorial real, 792
 Direção de um vetor, 785, 853
 Diretriz de um cilindro, 884
 Distância, de um ponto a um plano, 867
 de um ponto a uma reta, 860
 entre dois pontos, 850
 Domínio de uma função, 909
- Eixo de uma superfície de revolução, 886
 Elementos de uma seqüência, 687

- Elipsóide, 888
 de revolução, 887
 Energia cinética, 1098
 Ênupla ordenada, 909
 Epiciclóide, 845
 Equação de Laplace, 963, 1080
 Equação de von Bertalanffy, 1152
 Equações, características, 1159
 de diferenças, 1174
 de um plano, 862
 de uma esfera, 851
 de uma reta em R^3 , 869-873
 paramétricas, 869
 simétricas, 869
 gráfico de, 850
 homogêneas, 1159
 lineares, 863
 não-homogêneas, 1164
 paramétricas, 802, 896
 vetorial, 802, 896
 Equações cartesianas, 896
 de um plano, 862
 em um espaço tridimensional, 896
 Equações de Cauchy-Riemann, 957
 Equações diferenciais. *Veja também* Diferencial.
 exata, 1016
 parcial, 964
 Esfera, 851, 889
 centro de, 851
 equação de, forma centro-raio de, 851
 forma geral de, 851
 raio de, 851
 Esferóide, 889
 Espaço numérico, n -dimensional, 909
 tridimensional (R^3), 847
 Espaço vetorial real, 792
 base de, 792, 861
 dimensão de, 792
 Espelho parabólico, 1148
 Euler, Leonhard, XV
 Extremos, absolutos, 988
 absolutos de funções de duas
 variáveis, 984-997
 livres, 1006
 relativos, 984
 teste da derivada segunda para, 987

 Fator integrante, 1138
 Fermat, Pierre de, XV
 Fluido incompressível, 1107
 Fluxo de um campo vetorial, 1107, 1115
 Fonte de um fluido, 1108
 Forma centro-raio da equação de uma esfera, 851
 Fórmulas geométricas, F-1
 Fórmulas trigonométricas, F-2
 Fórmula de recorrência, 1174
 Função, composta, 911
 de mais de uma variável, 909-918
 continuidade, 928-932
 limites, 918-928
 de n variáveis, 909
 definição, 909
 diferenciável, 942, 947
 descontínua, 928
 domínio, 909
 geradora, A-7
 harmônica, 1080
 imagem, 909
 integrável, 1024
 polinomial, 912
 potencial, 1075
 Funções de Bessel, 782
 Funções vetoriais, 895
 cálculo, 809-815
 continuidade, 809
 derivada, 810
 diferenciabilidade, 811
 gráfico, 803
 implícitas, derivação, 998-1005
 integral indefinida, 813
 limite, 809, 896

 Gases ideais, lei dos, 937
 Gauss, Karl F., 1106
 Geometria, diferencial, 825
 fórmulas, F-1
 Geratriz de um cilindro, 884
 Gradiente de uma função, 975, 978
 Gráfico de uma função, 912, 914
 Grau, de uma equação, 1133
 de uma função polinomial, 912
 Green, George, 1099

 Hélice, 896
 circular, 896
 Hiperbolóide de revolução, 888
 Hiperbolóide elíptico, de duas folhas, 890
 de uma folha, 889
 Hipociclóide, 808

 Identidade aditiva, para vetores, 791
 Imagem de uma função, 909
 Incremento
 de uma função de duas variáveis, 941
 de uma função de n variáveis, 947
 Inércia, momento de, 1036, 1037
 polar, 1037
 Integração. *Veja também* Integrais.
 de séries de potências, 761-768
 região de, 1023
 múltipla, 1022-1061
 Integrais. *Veja também* Integração.
 dupla, 1023-1028
 avaliação, 1028-1034
 definição, 1024
 em coordenadas polares, 1040-1045
 elíptica, 844
 iterada, 1029
 múltipla, 1023
 tripla, 1050-1055
 definição, 1052
 em coordenadas cilíndricas, 1055
 em coordenadas esféricas, 1059
 Intercepto, de um plano, 864
 Intervalo
 de convergência de séries de potências, 749
 Isotermas, 913

 Jacobiano, 1062

 Lagrange, Joseph, XV, 1006
 Laplaciano, 1080
 Lei da conservação da energia, 1098
 Lei de Fick, 1133
 Lei do gás ideal, 937
 Lei do paralelogramo, 788
 Leibniz, Gottfried Wilhelm, XV, 728
 Leis associativas para vetores, 791
 Leis de comutação para vetores, 791, 796, 852
 Leis distributivas para vetores, 791, 796, 875
 Limitante inferior de uma seqüência, 697
 Limitante inferior máximo de uma seqüência, 697
 Limitante superior de uma seqüência, 696
 Limite(s)
 de funções de mais de uma variável, 918-928
 de uma função vetorial, 809, 896
 de uma seqüência, 690

 Magnitude de um vetor, 785, 853
 Mapa de contorno, 913
 Massa, centro de, 1035
 momento de, 1035
 Método da variação das constantes, 1141
 Método da redução da ordem, 1160
 Método dos coeficientes a determinar, 1166
 Momento, de inércia, 1035, 1037
 polar, 1037
 de massa, 1035
 Movimento, curvilíneo, 833
 em um plano, 833-839
 Multiplicação de vetores, 795-802, 857, 874-884
 por escalar, 790, 856
 produto escalar, 795-802, 857
 produto vetorial, 874, 884
 Multiplicadores de Lagrange, 1006-1011

 Newton, Sir Isaac, XV
 Norma de partição, 1023, 1051
 Números diretores, 869

 Octantes, 847
 Operador diferencial, A-8
 Oposto, existência para vetores, 791
 Oposto de um vetor, 788, 855
 Origem, 847

 Par ordenado, 785, 909
 Parabolóide, de revolução, 888
 elíptico, 892
 hiperbólico, 892
 Partição, cilíndrica, 1055
 de uma região, 1023, 1050
 norma de, 1023, 1051

- Plano tangente, 981
- Planos, 862-868
 ângulo entre, 865
 definição, 862
 equação, 862
 paralelos, 866
 perpendiculares, 866
 projeção, 873
 tangente, 981
 traços, 864
- Ponto, crítico, 986
 de acumulação, 923
 em um espaço numérico tridimensional, 847
 em um espaço numérico, n -dimensional, 909
 final, 784
 inicial, 784
 médio de um segmento de reta, 850
 de sela, 986
- Primitiva de uma função, 1134
- Produto de vetores, 795-802, 857, 874-884
- Projeção escalar de vetores, 798, 859
- Projétil, movimento de, 835-839
- Quádrica central, 891
- R^3 , curvas em, 895-902
 gráfico de uma equação em, 850
 retas em, 869-873
- Raio, de convergência de uma série
 de potências, 749
 de curvatura, 829
 de giração, 1038
 de uma esfera, 851
- Região de integração, 1023
- Região fechada, 988
- Regra da cadeia generalizada, 953
- Representação de posição de um vetor, 785, 853
- Representação de um vetor, 785
- Resto em séries infinitas, 730
- Reta(s)
 de regressão, 992
 equações em R^3 , 869-873
 tangente, 982
- Revolução,
 elipsóide de, 888
 hiperbolóide de, 888
 parabolóide de, 888
 superfície de, 886
- Segmento de reta, ponto médio de, 850
- Segundo teorema fundamental do Cálculo
 convergente, 692
 crescente, 695
 de somas parciais, 702
 decrescente, 695
 definição, 688
 divergente, 692
 elementos de, 688
 estritamente crescente, 695
 estritamente decrescente, 695
 finita, 688
- infinita, 688
 limitada, 697
 limitante inferior máximo, 697
 limitante inferior, 696
 limitante superior mínimo, 697
 limitante superior, 696
 limite de, 690
 monótona, 695
- Séries infinitas, absolutamente convergentes, 732
 alternadas, 727-732
 binomiais, 777-781
 com termos constantes, 701-710
 convergentes, 704
 convergentes condicionalmente, 732
 de potência, 743-782
 definição, 744
 derivação, 751-761
 integração, 761-768
 intervalo de convergência, 749
 raio de convergência, 749
 de Taylor, 768-777
 de termos positivos, 714-723
 definição, 702
 divergentes, 704
 geométricas, 708
 harmônica, 707
 hiper-harmônica, 722
 p , 722
 resto em, 730
 soma de, 704
 somas parciais de, 702
 termos de, 702
 teste da comparação com limite, 717
 teste da integral, 724-727
 teste da raiz, 737
 teste da razão, 734
 teste de comparação, 716
 teste de séries alternadas, 728
- Sistema de coordenadas, dextrogiro, 847
 sinistrogiro, 847
- Solução de uma equação diferencial, 1131
 geral, 1132
 particular, 1132
- Soma, de séries infinitas, 704
 de vetores, 787, 854
 parcial, de séries infinitas, 702
 seqüência de, 702
- Stokes, George, 1109
- Superfície, 850, 884
 área de, 1045-1050
 de nível de uma função, 914
 de revolução, 886
 equipotencial, 978
 isotérmica, 978
 quádrlica, 889-895
 central, 891
- Tabela de integrais, F-3
- Teorema da divergência de Gauss, 1119
 no plano, 1106
- Teorema de existência, 699
- Teorema de Green, 1099-1112
- Teorema de Stokes, 1122
 no plano, 1109
 para funções de duas variáveis, 988
- Termos constantes, séries infinitas, 701-710
- Termos de séries infinitas, 702
- Teste(s)
 para funções de duas variáveis, 987
 da razão, 734
 de comparação com limite, 717
 de comparação, 716
 de séries alternadas, 728
- Trabalho, 800, 1083
- Transformação, A-5
- Tratriz, 809
- Triedro móvel, 899
- Trigonometria, fórmulas, F-2
- Tripla ordenada, 847
- Valor máximo de uma função, 984-997
 absoluto de funções de duas variáveis, 988
 relativo de funções de duas variáveis, 984
- Valor mínimo de uma função, 984-997
 absoluto de funções de duas variáveis, 988
 relativo de funções de duas variáveis, 984
- Variáveis, dependentes, 910
 independentes, 910
- Velocidade escalar no ar, 789
- Velocidade escalar inicial, 836
- Velocidade instantânea, 833
- Velocidade escalar no solo, 789
- Vetor(es), 784, 853
 aceleração, 834, 900
 componente normal de, 840
 componente tangencial de, 840
 análise, 784
 ângulos de direção, 785, 853
 ângulos entre, 796, 858
 binormal, 899
 binormal unitário, 899
 campos, 1073-1081
 co-senos diretores, 854
 componentes de, 785, 799, 853
 curvatura, 827, 899
 de deslocamento, 800
 diferença de, 789, 855
 direção de, 785, 853
 equação, 802, 896
 existência de identidade aditiva para, 791
 existência de identidade para a
 multiplicação por escalar, 791
 existência do oposto para, 791
 gradiente, 975, 978
 independentes, 795, 861
 lei associativa para, 791
 lei comutativa para, 791, 796
 lei distributiva para, 791, 796, 876
 magnitude de, 785, 853
 multiplicação por escalar, 790, 856
 no espaço tridimensional, 853-862
 no espaço, 792