GEOMETRIA

FORMULÁRIO

Lados e apótemas dos polígonos regulares

I) *O apótema é igual ao raio do círculo inscrito.*

II) *Entre os elementos R (raio do círculo circunscrito), r (apótema) e o lado l de um polígono regular inscrito vale a relação:*

$$R^2 = r^2 + \frac{l^2}{4}$$

Donde

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 + l^2}; \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l^2} \quad \text{e} \quad l = 2\sqrt{R^2 - r^2}.$$

III) *Conhecendo o lado l_n de um polígono regular de n lados, inscrito em uma circunferência de raio R, calcular o lado l_{2n} do polígono regular inscrito, com um número duplo de lados.*

$$l_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_n^2}}.$$

IV) *Calcular o lado L, de um polígono regular circunscrito, em função do lado l, do polígono inscrito correspondente.*

$$L = \frac{2lR}{\sqrt{4R^2 - l^2}}$$

Polígonos regulares convexos	Lados	Apótemas	Lados dos polígonos circunscritos
Triângulo	$l_3 = R\sqrt{3}.$	$r_3 = \frac{R}{2}$	$L_3 = 2R\sqrt{3}.$
Quadrado	$l_4 = R\sqrt{2}.$	$r_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$	$L_4 = 2R.$
Hexágono	$l_6 = R.$	$r_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$	$L_6 = \frac{2R\sqrt{3}}{3}.$
Octógono	$l_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}.$	$r_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$	
Decágono	$l_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1).$	$r_{10} = \frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$	
Pentágono	$l_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$	$r_5 = \frac{R}{4}(\sqrt{5}+1).$	
Pentadecágono	$l_{15} = \frac{R}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}\right).$	$r_{15} = \frac{R}{8}\left[\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{5} - 1\right].$	

I) ÁREAS DOS POLÍGONOS REGULARES

As áreas dos polígonos regulares com n lados podem ser expressas, facilmente, por meio dos elementos correspondentes: r, *apótema (raio do círculo inscrito)*, do *lado* l e do *raio* R, *do círculo circunscrito (elementos fundamentais)*.

A) FÓRMULAS GERAIS TRIGONOMÉTRICAS

1. $s_n = \dfrac{nl^2}{4} \cot \dfrac{\pi}{n}$

2. $s_n = \dfrac{nR^2}{2} \operatorname{sen} \dfrac{2\pi}{n}$

3. $s_n = nr^2 \tan \dfrac{\pi}{n}$

4. $s_n = nR^2 \operatorname{sen} \dfrac{180^\circ}{n} \cos \dfrac{180^\circ}{n}$

B) FÓRMULAS DAS ÁREAS DOS POLÍGONOS REGULARES POR MEIO DOS ELEMENTOS FUNDAMENTAIS

5. $s_n = pr(2p = nl)$

6. $$s_3 = \begin{cases} \dfrac{l^2}{4}\sqrt{3} \\ \dfrac{3}{4} R^2 \sqrt{3} \\ 3r^2 \sqrt{3} \end{cases}$$

7. $$s_4 = \begin{cases} l^2 \\ 2R^2 \\ 4r^2 \end{cases}$$

8. $$s_5 = \begin{cases} \dfrac{l^2}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \\ \dfrac{5}{8} R^2 \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \\ \dfrac{5}{2} r^2 \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$9. \quad s_6 = \begin{cases} \dfrac{3}{2} l^2 \sqrt{3} \\ \dfrac{3}{2} R^2 \sqrt{3} \\ 2r^2 \sqrt{3} \end{cases}$$

$$10. \quad s_8 = \begin{cases} 2l^2 (1 + \sqrt{2}) \\ 2R^2 \sqrt{2} \\ 8r^2 (\sqrt{2} - l) \end{cases}$$

$$11. \quad s_{10} = \begin{cases} \dfrac{5}{2} l^2 \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \\ \dfrac{5}{4} R^2 \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \\ 2r^2 \sqrt{5}\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$12. \quad s_{12} = \begin{cases} 3l^2(2 + \sqrt{3}) \\ 3R^2 \\ 12r^2(2 - \sqrt{3}) \end{cases}$$

II) ÁREAS DOS POLÍGONOS QUAISQUER

Para calcular a área de um polígono qualquer, procederemos do seguinte modo:

A) Decompomos o polígono em triângulos, traçando as diagonais que partem do mesmo vértice;

B) Decompomos o polígono em triângulos ligando um ponto P, situado no interior do mesmo aos vértices da figura;

Em qualquer caso, *a área S do polígono será igual à soma das áreas dos triângulos, assim determinados.*

C) *A área de um polígono convexo circunscrito é igual ao produto do semiperímetro p, pelo raio r, do círculo inscrito*:

Temos, $S = p.r$

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

Linhas de alguns arcos

$x°$ ↓	sen	tan	cos	cot	$90° - x°$
15°	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	75°
22°30′	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}+1$	67°30′
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	60°
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	45°
	cos	cot	sen	tan	↑

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Fórmulas fundamentais:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\tan x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

Relações entre linhas trigonométricas de arcos associados:

A) Arcos complementares:

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen} x = \cos(90° - x); \\ \tan x = \cot(90° - x); \\ \sec x = \csc(90° - x); \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \cos x = \operatorname{sen}(90° - x); \\ \cot x = \tan(90° - x); \\ \csc x = \sec(90° - x). \end{array}\right.$$

B) Arcos suplementares:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(180^\circ - x) = \operatorname{sen} x; \\ \cos(180^\circ - x) = -\cos x; \\ \tan(180^\circ - x) = -\tan x; \end{cases} \qquad \begin{cases} \cot(180^\circ - x) = -\cot x; \\ \sec(180^\circ - x) = -\sec x; \\ \csc(180^\circ - x) = \csc x. \end{cases}$$

C) Arcos que diferem de meia circunferência:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(180^\circ + x) = -\operatorname{sen} x; \\ \cos(180^\circ + x) = -\cos x; \\ \tan(180^\circ + x) = \tan x; \end{cases} \qquad \begin{cases} \cot(180^\circ + x) = \cot x; \\ \sec(180^\circ + x) = -\sec x; \\ \csc(180^\circ + x) = -\csc x. \end{cases}$$

D) Arcos replementares ou simétricos:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(360^\circ - x) = -\operatorname{sen} x; \\ \cos(360^\circ - x) = \cos x; \\ \tan(360^\circ - x) = -\tan x; \\ \cot(360^\circ - x) = -\cot x; \\ \sec(360^\circ - x) = \sec x; \\ \csc(360^\circ - x) = -\csc x; \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x; \\ \cos(-x) = +\cos x; \\ \tan(-x) = -\tan x; \\ \cot(-x) = -\cot x; \\ \sec(-x) = +\sec x; \\ \csc(-x) = -\csc x. \end{cases}$$

FÓRMULAS DAS OPERAÇÕES EM TRIGONOMETRIA

Adição e subtração de arcos:

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b;$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b;$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b};$$

$$\operatorname{sen}(a + b + c) = \operatorname{sen} a \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \cos a \cos c + \operatorname{sen} c \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c;$$

$$\cos(a + b + c) = \cos a \cos b \cos c - \cos a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c - \cos b \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c - \cos c \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b;$$

$$\tan(a + b + c) = \frac{\tan a + \tan b + \tan c - \tan a \tan b \tan c}{1 - \tan a \tan b - \tan b \tan c - \tan a \tan c};$$

$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b;$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b;$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Multiplicação de arcos:

$$\sin 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a;$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a;$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a};$$

$$\operatorname{sen} 3a = 3 \operatorname{sen} a - 4 \operatorname{sen}^3 a;$$

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a;$$

$$\tan 3a = \frac{3 \tan a - \tan^3 a}{1 - 3 \tan^2 a}$$

Divisão de arcos:

Dado $\operatorname{sen} a$

$$\operatorname{sen} \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \left(\pm \sqrt{1 + \operatorname{sen} a} \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen} a} \right);$$

$$\cos \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \left(\pm \sqrt{1 + \operatorname{sen} a} \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen} a} \right).$$

Dado $\cos a$

$$\operatorname{sen} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}};$$

$$\cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}};$$

$$\tan \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}.$$

FÓRMULAS DE TRANSFORMAÇÃO LOGARÍTMICA:

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2};$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2};$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2};$$

$$\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2};$$

$$\tan p \pm \tan q = \frac{\operatorname{sen}(p \pm q)}{\cos p \cos q};$$

$$\cot p \pm \cot q = \frac{\operatorname{sen}(q \pm p)}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen} q}$$

Resolução dos triângulos retângulos

Fórmulas:

$$b = a \operatorname{sen} B = a \cos C; \quad b = c \tan B = c \cot C;$$

$$a^2 = b^2 + c^2; \quad c = a \operatorname{sen} C = a \cos B; \quad c = b \tan C = b \cot B;$$

$$B + C = 90^o; \quad S = \frac{bc}{2} = \frac{a^2}{4} \operatorname{sen} 2B;$$

$$\tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$$

1.° Caso
Dados: a, B
calcular:
b, c, C, S

$$C = 90^o - B; \quad b = a \operatorname{sen} B;$$
$$c = a \cos B;$$
$$S = \frac{bc}{2} = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sen} B \cos B = \frac{1}{4} a^2 \operatorname{sen} 2B.$$

2.° Caso
Dados: b, B
calcular:
a, c, C, S

$$C = 90^o - B; \quad a = \frac{b}{\operatorname{sen} B}; \quad c = b \cot B;$$
$$S = \frac{bc}{2} = \frac{b^2}{2} \cot B.$$

3.° Caso
Dados: b, c
calcular:
B, C, a, S

$$\tan B = \frac{b}{c}; \quad C = 90^o - B;$$
$$a = \frac{b}{\operatorname{sen} B}; \quad S = \frac{bc}{2}.$$

4.° Caso
Dados: a, b
calcular:
B, C, c, S

$$B = 90^o - C; \quad \cos C = \frac{b}{a};$$
$$\tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos C}{1 + \cos C}} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}};$$
$$c = a \operatorname{sen} C = \sqrt{(a-b)(a+b)};$$
$$S = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C.$$

Resolução dos triângulos retângulos

Fórmulas:

$$b = a \text{ sen B} = a \cos \text{C}; \quad b = c \tan \text{B} = c \cot \text{C};$$

$$a^2 = b^2 + c^2; \quad c = a \text{ sen C} = a \cos \text{B}; \quad c = b \tan \text{C} = b \cot \text{B};$$

$$\text{B} + \text{C} = 90^\circ; \quad \text{S} = \frac{bc}{2} = \frac{a^2}{4} \text{ sen 2B};$$

$$\tan \frac{\text{C}}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$$

1.° Caso
Dados: a, B
calcular:
b, c, C, S

$$\text{C} = 90^\circ - \text{B}; \quad b = a \text{ sen B};$$

$$c = a \cos \text{B};$$

$$\text{S} = \frac{bc}{2} = \frac{1}{2} a^2 \text{ sen B} \cos \text{B} = \frac{1}{4} a^2 \text{ sen 2B}.$$

2.° Caso
Dados: b, B
calcular:
a, c, C, S

$$\text{C} = 90^\circ - \text{B}; \quad a = \frac{b}{\text{sen B}}; \quad c = b \cot \text{B};$$

$$\text{S} = \frac{bc}{2} = \frac{b^2}{2} \cot \text{B}.$$

3.° Caso
Dados: b, c
calcular:
B, C, a, S

$$\tan \text{B} = \frac{b}{c}; \quad \text{C} = 90^\circ - \text{B};$$

$$a = \frac{b}{\text{sen B}}; \quad \text{S} = \frac{bc}{2}.$$

4.° Caso
Dados: a, b
calcular:
B, C, c, S

$$\text{B} = 90^\circ - \text{C}; \quad \cos \text{C} = \frac{b}{a};$$

$$\tan \frac{\text{C}}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \text{C}}{1 + \cos \text{C}}} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}};$$

$$c = a \text{ sen C} = \sqrt{(a-b)(a+b)};$$

$$\text{S} = \frac{1}{2} ab \text{ sen C}.$$

Resolução dos triângulos obliquângulos:

Fórmulas:

$$\text{I}\begin{cases} A + B + C = 180^{\circ} = 2R; \\ \dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{b}{\text{sen } B} = \dfrac{c}{\text{sen } C} \end{cases}$$

$$\text{II}\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C. \end{cases}$$

$$\text{III}\begin{cases} a = b \cos C + c \cos B \\ b = a \cos C + c \cos A \\ c = a \cos B + b \cos A. \end{cases}$$

$$\text{IV}\begin{cases} \tan \dfrac{A - B}{2} = \dfrac{a - b}{a + b} \tan \dfrac{A + B}{2} = \dfrac{a - b}{a + b} \cot \dfrac{C}{2} \end{cases}$$

V *Fórmulas do arco metade:*

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{r}{p - a};$$

$$\tan \frac{B}{2} = \frac{r}{p - b};$$

$$\tan \frac{C}{2} = \frac{r}{p - c};$$

onde

$p = \frac{1}{2}\ (a + b + c) =$ semiperímetro

e

$$r = \sqrt{\frac{(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}{p}} = \textit{raio do círculo inscrito.}$$

VI *Área do triângulo obliquângulo:*

$$\begin{cases} S = \frac{1}{2}\, bc \text{ sen } A; \quad S = \frac{1}{2}\, ac \text{ sen } B; \quad S = \frac{1}{2}\, ab \text{ sen } C; \\ S = \sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}; \end{cases}$$

$$S = \frac{a^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen} A}; \quad S = \frac{b^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen} B};$$

$$S = \frac{c^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{2 \operatorname{sen} C}$$

Casos:

Os problemas sobre triângulos obliquângulos estão enquadrados nos casos abaixo e são resolvidos mediante a aplicação deste formulário:

1.° Caso

Dados: a A, B, calcular: C, b, c, S

$$C = 180^\circ - (A + B);$$

$$b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}; \quad c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A};$$

$$S = \frac{a^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen} A}.$$

2.° Caso

Dados: a, b, C, calcular: c, A, B, S

$$\frac{A + B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2};$$

$$\tan \frac{A - B}{2} = \frac{a - b}{a + b} \tan \frac{A + B}{2};$$

$$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}; \quad S = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C.$$

3.° Caso

Dados: a, b, c, calcular: A, B, C, S

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{bc}};$$

$$\operatorname{sen} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)(p - c)}{ac}};$$

$$\operatorname{sen} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)(p - b)}{ab}};$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p - a)}{bc}};$$

$$\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p - b)}{ac}};$$

$$\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p - c)}{ab}}.$$

3.° Caso

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}};$$

$$\tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}};$$

$$\tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}};$$

$$2p = a + b + c;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

4.° Caso

Dados: a, b, A,
calcular:
B, C, c, S

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a};$$

$$C = 180^{\circ} - (A + B);$$

$$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A};$$

$$S = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C.$$