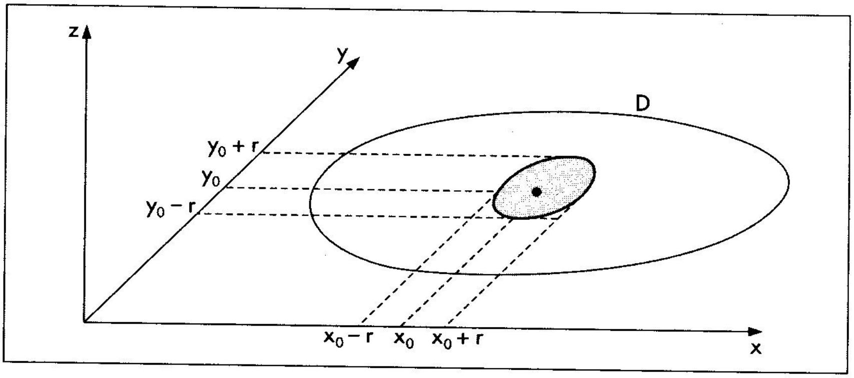
Figura 11.3: Ilustração do Teorema 11.1.




Consideremos os pontos dessa bola para os quais $y = y_0$. Então $f(x, y_0)$ será função somente de $x$. Mas, como $f(x, y_0) \leqslant f(x_0, y_0)$ para $x_0 - r < x < x_0 + r$, segue-se que a função $f(x, y_0)$ de uma variável tem um ponto de máximo em $(x_0, y_0)$ e, conseqüentemente, $f_x(x_0, y_0) = 0$.

Analogamente, se considerarmos os pontos da bola aberta para os quais $x = x_0$, então $f(x_0, y)$ será só função de $y$. Mas, como $f(x_0, y) \leqslant f(x_0, y_0)$ para $y_0 - r < y < y_0 + r$, segue-se que a função $f(x_0, y)$, de uma variável, tem ponto de máximo em $(x_0, y_0)$ e, conseqüentemente, $f_y(x_0, y_0) = 0$.

Em resumo, se $(x_0, y_0)$ for ponto de máximo, então $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$.

A demonstração é análoga se $(x_0, y_0)$ for um ponto de mínimo.

Os pontos que anulam simultaneamente as derivadas parciais $f_x$ e $f_y$ são chamados pontos críticos de $f$.

**Exemplo 11.1.** Seja $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 1$. Os possíveis pontos de máximo ou de mínimo são aqueles para os quais $f_x = 0$ e $f_y = 0$.

Temos que

$$f_x = 2x - 2 \quad \text{e} \quad f_y = 2y.$$

Igualando a zero essas derivadas, obtemos o sistema

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 2y = 0, \end{cases}$$

cuja solução é $x = 1$ e $y = 0$.

Portanto, o Teorema 11.1 nos assegura que, se $f$ tiver um ponto de máximo ou de mínimo, este só poderá ser o ponto $(1, 0)$.

**Exemplo 11.2.** Seja $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + xy$. Os possíveis pontos de máximo ou de mínimo são aqueles para os quais $f_x = 0$ e $f_y = 0$.

Como

$$f_x = 2x - 2 + y \quad \text{e} \quad f_y = 2y - 2 + x,$$

igualando a zero essas derivadas parciais, obtemos o sistema

$$\begin{cases} 2x - 2 + y = 0 \\ 2y - 2 + x = 0, \end{cases}$$

cuja solução é $x = \dfrac{2}{3}$ e $y = \dfrac{2}{3}$.

Portanto, o Teorema 11.1 nos assegura que, se $f$ tiver um ponto de máximo ou de mínimo, este só poderá ser o ponto $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.

**Exemplo 11.3.** Seja $f(x, y) = 2x + 3y - 5$. Temos: $f_x = 2$ e $f_y = 3$. Como essas derivadas nunca se anulam, a função não terá ponto de máximo nem de mínimo.

Nesse caso particular, poderíamos ter chegado a essa conclusão lembrando que o gráfico de $f$ é um plano não horizontal e conseqüentemente sem ponto de máximo nem de mínimo.

### Observações

Antes de prosseguirmos, cumpre salientarmos algumas considerações bastante importantes em tudo que segue.

(i) O Teorema 11.1 não nos garante a existência de pontos de máximo ou de mínimo, mas sim possíveis pontos de máximo ou mínimo. Assim, pode ocorrer de termos $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$ sem que $(x_0, y_0)$ seja ponto de máximo ou de mínimo.

Um exemplo desse fato é o da função $f(x, y) = xy$, em que $f_x = y$ e $f_y = x$; o ponto crítico é $(0, 0)$.

Assim, se tomarmos uma bola aberta de centro $(0, 0)$ e raio $r$, teremos:

a) para os pontos dessa bola aberta situados no interior do primeiro e terceiro quadrantes, $f(x, y) = xy > 0$, pois $x$ e $y$ têm o mesmo sinal;

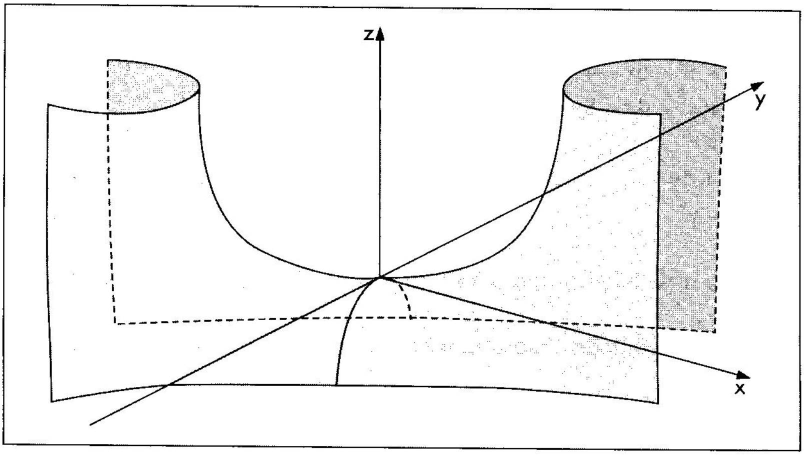
b) para os pontos dessa bola aberta situados no interior do segundo e quarto quadrantes, $f(x, y) = xy < 0$, pois $x$ e $y$ têm sinais contrários.

Logo

$(0, 0)$ não é ponto de máximo nem de mínimo.

Verifica-se que o gráfico dessa função tem o aspecto de uma "sela de cavalo". O ponto $(0, 0)$ é chamado ponto de sela (Figura 11.4).

Figura 11.4: O ponto (0, 0) é chamado ponto de sela.



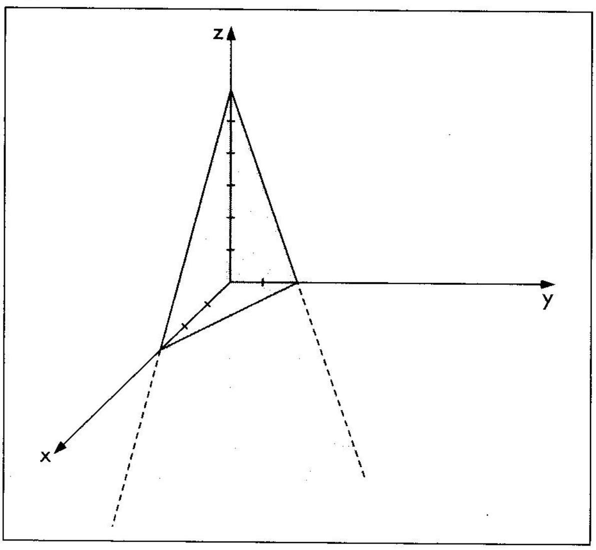

De um modo geral, todo ponto crítico $(x_0, y_0)$ que não é de máximo nem de mínimo é chamado ponto de sela.

(ii) O Teorema 11.1 só se aplica a pontos interiores ao domínio. Assim, os pontos que anulam as derivadas parciais $f_x$ e $f_y$ só podem ser pontos de máximo ou mínimo do interior do domínio. A análise dos pontos de fronteira deve ser feita à parte, como veremos a seguir.

Exemplo 11.4. A função $f(x, y) = 6 - 2x - 3y$ definida no domínio $D = \{(x, y) \in R^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$ tem um ponto de máximo em (0, 0), que é ponto de fronteira do domínio.

Além disso, $f$ não tem ponto de máximo ou mínimo no interior do domínio, pois $f_x = -2 \neq 0$ e $f_y = -3 \neq 0$ (Figura 11.5).

Figura 11.5



## Exercícios

1. Ache os pontos críticos de $f$ nos seguintes casos:
   a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 4y$
   b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 8y - xy$
   c) $f(x, y) = e^{x^2 + y^2}$
   d) $f(x, y) = 6x + 4y - 7$
   e) $f(x, y) = x^3 - y^3$

2. Mostre, usando a definição, que a função $f(x, y) = x^2 + y^2$ tem um ponto de mínimo.

3. Mostre, usando a definição, que a função $f(x, y) = -x^2 - y^2$ tem um ponto de máximo.

4. Mostre, usando a definição, que a função $f(x, y) = xy + 3$ tem um ponto de sela.

5. Mostre, usando a definição, que a função $f(x, y) = xy + 7$ tem um ponto de sela.

## 11.2 Critérios para Identificação de Pontos de Máximo ou Mínimo

O Teorema 11.1 permitiu-nos determinar os possíveis pontos de máximo ou de mínimo no interior do domínio, sem, contudo, identificá-los. O Teorema 11.2, que veremos a seguir, permitirá esta identificação. Sua demonstração poderá ser vista, por exemplo, em Leithold (1977).

**Teorema 11.2**

**Seja $f$ uma função de duas variáveis $x$ e $y$, contínua, com derivadas parciais até segunda ordem contínuas. Seja $(x_0, y_0)$ um ponto crítico de $f$. Chamemos o determinante**

$$H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

**de Hessiano (em homenagem ao matemático alemão Ludwig Otto Hesse, 1811–1874) de $f$ no ponto $(x_0, y_0)$. Se:**

**(a) $H(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, então $(x_0, y_0)$ será ponto de máximo de $f$.**
**(b) $H(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, então $(x_0, y_0)$ será ponto de mínimo de $f$.**
**(c) $H(x_0, y_0) < 0$ então $(x_0, y_0)$ será ponto de sela de $f$.**

**Exemplo 11.5.** Consideremos a função $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$. Os pontos críticos de $f$ são soluções do sistema

$$\begin{cases} f_x = 2x - 2 = 0 \\ f_y = 2y = 0, \end{cases}$$

ou seja, $x = 1$ e $y = 0$. Portanto $(1, 0)$ é o único ponto crítico.

Por outro lado,

$$\begin{cases} f_{xx} = 2 \\ f_{xy} = 0 \\ f_{yx} = 0 \\ f_{yy} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{xx}(1, 0) = 2 \\ f_{xy}(1, 0) = 0 \\ f_{yx}(1, 0) = 0 \\ f_{yy}(1, 0) = 2, \end{cases}$$

e, portanto,

$$H(1, 0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Desta forma,

$$\begin{cases} H(1, 0) > 0 \\ \text{e} \\ f_{xx}(1, 0) = 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (1, 0) \text{ é ponto de mínimo de } f.$$

Exemplo 11.6. Consideremos a função $f(x, y) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}y^4 + x + y.$

Os pontos críticos de $f$ são as soluções do sistema

$$\begin{cases} f_x = -x^3 + 1 = 0 \\ f_y = -y^3 + 1 = 0, \end{cases}$$

ou seja, $(1, 1)$ é o único ponto crítico.

Por outro lado,

$$\begin{cases} f_{xx} = -3x^2 \\ f_{xy} = 0 \\ f_{yx} = 0 \\ f_{yy} = -3y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{xx}(1, 1) = -3 \\ f_{xy}(1, 1) = 0 \\ f_{yx}(1, 1) = 0 \\ f_{yy}(1, 1) = -3, \end{cases}$$

e, portanto,

$$H(1, 1) = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 9.$$

Desta forma,

$$\begin{cases} H(1, 1) > 0 \\ \text{e} \\ f_{xx}(1, 1) = -3 < 0 \end{cases} \Rightarrow (1, 1) \text{ é ponto de máximo de } f.$$

**Exemplo 11.7.** Consideremos a função $f(x, y) = \frac{1}{5}x^5 - x + \frac{1}{5}y^5 - 16y$.

Os pontos críticos de $f$ são as soluções do sistema

$$\begin{cases} f_x = x^4 - 1 = 0 \\ f_y = y^4 - 16 = 0, \end{cases}$$

portanto, $x = 1$ ou $x = -1$, $y = 2$ ou $y = -2$, ou seja, os pontos críticos de $f$ são: $(1, 2)$, $(1, -2)$, $(-1, 2)$ e $(-1, -2)$.

Por outro lado,

$$f_{xx} = 4x^3 \quad f_{xy} = 0 \quad f_{yx} = 0 \quad f_{yy} = 4y^3$$

e

$$H = \begin{vmatrix} 4x^3 & 0 \\ 0 & 4y^3 \end{vmatrix} = 16x^3y^3.$$

Em resumo, temos:

a) Ponto $(1, 2)$:

$$H(1, 2) = 128 > 0,$$
$$f_{xx}(1, 2) = 4 > 0,$$

logo $(1, 2)$ é ponto de mínimo de $f$.

b) Ponto $(1, -2)$

$$H(1, -2) = -128 < 0,$$

logo $(1, -2)$ é ponto de sela de $f$.

c) Ponto $(-1, 2)$

$$H(-1, 2) = -128 < 0,$$

logo $(-1, 2)$ é ponto de sela de $f$.

d) Ponto $(-1, -2)$

$$H(-1, -2) = 128 > 0,$$
$$f_{xx}(-1, -2) = -4 < 0,$$

logo $(-1, -2)$ é ponto de máximo de $f$.

**Exemplo 11.8.** Consideremos a função $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$. Os pontos críticos de $f$ são as soluções do sistema

$$\begin{cases} f_x = 2x - 2y = 0 \\ f_y = -2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x = y, \end{cases}$$

ou seja, os pontos críticos de $f$ são os pontos $(x, x)$ em que $x \in R$.

Por outro lado,

$$f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = -2, \quad f_{yx} = -2, \quad f_{yy} = 2,$$

e

$$H(x, x) = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Logo, o Teorema 11.2 é inconclusivo. Nesse caso, devemos analisar o comportamento de $f$ nos pontos $(x, x)$, usando a definição.

Temos:

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \geqslant 0 \text{ para todo par } (x, y).$$
$$f(x, x) = 0 \text{ para todo } x.$$

Logo, $f(x, y) \geqslant f(x, x)$, para qualquer valor de $x$ e $y$, e, portanto, os pontos $(x, x)$ são todos de mínimo de $f$.

## Exercícios

6. Ache os pontos críticos de cada função abaixo e classifique-os
   a) $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2x - 2y$
   b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 3x - 4y$
   c) $f(x, y) = 3 + 4xy$
   d) $f(x, y) = e^{3x + 4y}$
   e) $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$
   f) $f(x, y) = e^{x^2 + y^2}$
   g) $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - 2x^2 - 3y^2 + 3x + 5y + 40$
   h) $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 - y^2 - 3y$
   i) $f(x, y) = e^{x^2 + 3y}$
   j) $f(x, y) = x^3 + 2y^2 - 3x - 4y$
   k) $f(x, y) = -x^2 - 4xy - 4$
   l) $f(x, y) = x^2y^2$

7. O lucro que uma empresa obtém, vendendo dois produtos $A$ e $B$, é dado por

$$L = 600 - 2x^2 - 4y^2 - 3xy + 18x + 18y$$

em que $x$ e $y$ são as quantidades vendidas. Obtenha os valores de $x$ e $y$ que maximizam o lucro.

8. Quando uma empresa usa $x$ unidades de trabalho e $y$ unidades de capital, sua produção mensal de certo produto é dada por

$$P = 32x + 20y + 3xy - 2x^2 - 2{,}5y^2$$

Obtenha os valores de $x$ e $y$ que maximizam a produção mensal.

9. Uma firma produz um produto que é vendido em dois países no estrangeiro. Sejam $x$ e $y$ as quantidades vendidas nesses dois mercados. Sabe-se que as equações de demanda nos dois mercados são dadas por $p_1 = 6.000 - 2x$ e $p_2 = 9.000 - 4y$, em que $p_1$ e $p_2$ são os preços unitários em cada mercado.
   A função custo da firma é $C = 60.000 + 500(x + y)$.
   *a)* Obtenha os valores de $x$ e $y$ que maximizam o lucro e ache o valor desse lucro.
   *b)* Nas condições do item anterior, quais os preços cobrados em cada país?

10. Uma firma produz dois produtos $A$ e $B$ nas quantidades $x$ e $y$. As equações de demanda de $A$ e $B$ são:

$$A: p_1 = 20 - x \qquad B: p_2 = 80 - 2y$$

   A função custo é $C = x^2 + y^2 + 4x + 4y$. Obtenha os preços $p_1$ e $p_2$ que devem ser cobrados para maximizar o lucro.

11. Resolva o exercício anterior considerando as seguintes funções de demanda

$$A: p_1 = 10 - x \qquad B: p_2 = 20 - 2y$$

   e a função custo $C = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 2xy$.

12. Uma firma produz dois produtos I e II cujos preços de venda são respectivamente \$ 10,00 e \$ 6,00. A função custo é $C = 2x^2 + y^2 + xy$, em que $x$ e $y$ são as quantidades produzidas de I e II respectivamente. Obtenha os valores de $x$ e $y$ que proporcionam lucro máximo.

13. Uma empresa fabrica dois produtos $P$ e $Q$, o 1º vendido a \$ 4,00 a unidade e o 2º, a \$ 2,00 a unidade. A função custo mensal é $C = 5 + x^2 + y^2 - xy$, em que $x$ e $y$ são as quantidades produzidas.
   *a)* Quais as quantidades $x$ e $y$ que maximizam o lucro?
   *b)* Qual o lucro máximo?

14. Uma empresa produz dois bens substitutos, cujas equações de demanda são dadas por

$$x = 500 - 2p + q \text{ e}$$
$$y = 900 + p - 3q$$

   em que $x$ e $y$ são as quantidades produzidas, $p$ e $q$ são seus preços unitários, respectivamente. Se a função custo para fabricar esses bens for

$$C = 10.000 + 200x + 100y$$

   obtenha os valores de $p$ e $q$ que maximizam o lucro.

15. Em relação ao exercício anterior, qual o lucro máximo?

16. Um duopólio é tal que as funções custo para as firmas são

$$C(x) = 3x \quad \text{e} \quad C(y) = \frac{1}{2}y^2$$

em que $x$ é a quantidade produzida pela 1ª firma e $y$, a da 2ª. A equação da demanda do produto é

$$p = 100 - 2(x + y), \text{ em que } p \text{ é o preço unitário.}$$

a) Qual a equação do lucro do duopólio, em função de $x$ e $y$?
b) Quais os valores de $x$ e $y$ que maximizam esse lucro?

17. Um monopolista produz e vende um produto em dois mercados, cada qual com a seguinte equação de demanda:

$$p_1 = 40 - 3x_1 \quad \text{e} \quad p_2 = 90 - 2x_2$$

em que $p_1$ e $p_2$ são os preços unitários em cada mercado, $x_1$ e $x_2$, as respectivas quantidades demandadas. A função custo é $C = 200 + 10(x_1 + x_2)$.
a) Obtenha os preços $p_1$ e $p_2$ que maximizam o lucro.
b) Se não puder haver discriminação de preços (ou seja, se $p_1$ e $p_2$ tiverem de ser iguais), qual o preço que maximiza o lucro?

18. Resolva o exercício anterior considerando as seguintes equações de demanda:

$$p_1 = 200 - x_1 \quad \text{e} \quad p_2 = 300 - 0{,}5x_2$$

e a função custo $C = 10.000 + 80(x_1 + x_2)$.

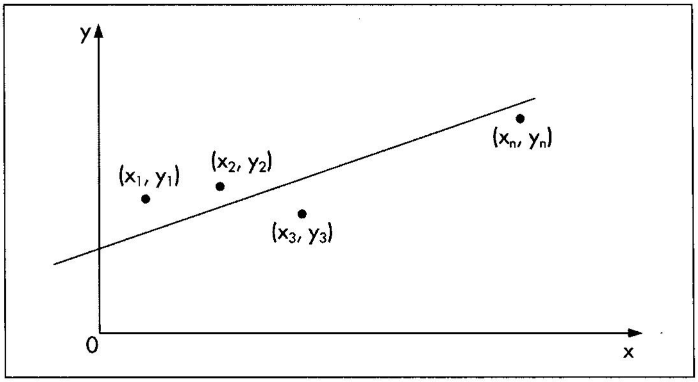
## 11.3 Uma Aplicação: Ajuste de Retas pelo Método dos Mínimos Quadrados

Ao longo do texto tivemos a oportunidade de trabalhar com certas funções sem mencionarmos de que forma elas foram obtidas. Muitas vezes elas são obtidas por meio de dados reais, usando-se uma técnica estatística conhecida como regressão; de acordo com essa técnica, é possível ajustarmos a um conjunto de valores uma determinada função que se adapte a esse conjunto.

Veremos neste capítulo como ajustar uma reta a uma nuvem de pontos.

Consideremos $n$ pontos do plano cartesiano, não todos situados numa mesma vertical, cujas coordenadas são $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, ... $(x_n, y_n)$. Suponhamos que o gráfico desses pontos sugira uma relação linear entre $y$ e $x$ (Figura 11.6).

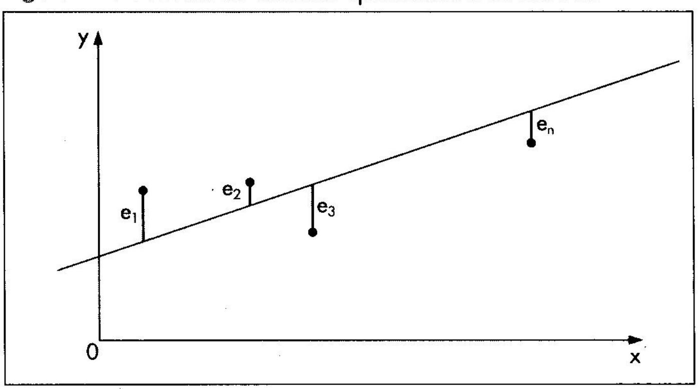
**Figura 11.6:** Relação aproximadamente linear entre $x$ e $y$.




Há inúmeras maneiras de obter uma reta que se adapte aos pontos (com uma régua por exemplo). Contudo, um método que é freqüentemente utilizado, em virtude das boas qualidades que possui, é o método dos mínimos quadrados.

A idéia básica do método consiste no seguinte: entre as infinitas retas que existem, uma delas, de equação $y = ax + b$, será aquela que tornará mínima a soma dos quadrados dos desvios $(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + \ldots + e_n^2)$ em que $e_i = y_i - (ax_i + b)$. Tal reta é chamada de reta de mínimos quadrados, cuja equação iremos determinar (Figura 11.7).

**Figura 11.7:** A reta de mínimos quadrados e os desvios.




Temos:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2.$$

Considerando a função de variáveis $a$ e $b$ dada por

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2,$$

nosso problema consiste em encontrar o par $(a, b)$ que minimiza $f(a, b)$.

A seguir, omitiremos os índices do somatório, pois não há perigo de confusão.

Os pontos críticos de $f(a, b)$ são obtidos impondo que as derivadas parciais $f_a$ e $f_b$ sejam ambas nulas. Isto é:

$$f_a = 2\sum(y_i - ax_i - b) \cdot (-x_i) = 0$$
$$f_b = 2\sum(y_i - ax_i - b) \cdot (-1) = 0;$$

a simplificação dessas equações conduz sucessivamente aos resultados:

$$\begin{cases} \sum(x_iy_i - ax_i^2 - bx_i) = 0 \\ \sum(y_i - ax_i - b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum x_iy_i - a\sum x_i^2 - b\sum x_i = 0 \\ \sum y_i - a\sum x_i - nb = 0 \end{cases}$$

e resolvendo-se este último sistema de equações obtemos:

$$a = \frac{\sum x_iy_i - \dfrac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n}}{\sum x_i^2 - \dfrac{(\sum x_i)^2}{n}}$$

e

$$b = \frac{\sum y_i}{n} - a\frac{\sum x_i}{n}.$$

Para provarmos que a solução encontrada é um ponto de mínimo, temos de calcular as derivadas de segunda ordem de $f$:

$$\begin{cases} f_{aa} = 2\sum x_i^2 \\ f_{ab} = 2\sum x_i \\ f_{ba} = 2\sum x_i \\ f_{bb} = 2n. \end{cases}$$

O Hessiano de $f$ no ponto crítico vale

$$H(a, b) = \begin{vmatrix} 2\sum x_i^2 & 2\sum x_i \\ 2\sum x_i & 2n \end{vmatrix},$$

ou seja,

$$H(a, b) = 4n\sum x_i^2 - 4(\sum x_i)^2 = 4n\left[\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right]$$

e, portanto,

$$H(a, b) = 4n \cdot \sum(x_i - \bar{x})^2, \quad \text{em que} \quad \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}.$$

Como $\sum(x_i - \bar{x})^2$ é uma soma de quadrados e os $x_i's$ não são todos iguais, segue-se que $H(a, b) > 0$.

Por outro lado, $f_{aa} = 2\sum x_i^2 > 0$, e assim concluímos que o ponto crítico obtido é de fato um ponto de mínimo de $f$.

Em resumo, a reta de mínimos quadrados tem por equação

$$y = ax + b,$$

em que

$$a = \frac{\sum x_i y_i - \frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}},$$

e

$$b = \frac{\sum y_i}{n} - a\frac{\sum x_i}{n}.$$

**Exemplo 11.9.** Um monopolista deseja obter empiricamente uma equação de demanda para seu produto. Ele admite que a quantidade média demandada ($y$) relaciona-se com seu preço unitário ($x$) por meio de uma função do 1º grau.

Para estimar essa reta, fixou os preços em vários níveis e observou a quantidade demandada, obtendo os dados a seguir:

| Preço unitário ($x$) | Quantidade demandada ($y$) |
|---|---|
| 1 | 9,5 |
| 2 | 8,5 |
| 3 | 5,5 |
| 4 | 3,5 |

Qual a equação da reta de mínimos quadrados?

### Resolução

Inicialmente, vamos escrever a seguinte tabela de dados

| | $x_i$ | $y_i$ | $x_i \cdot y_i$ | $x_i^2$ |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 9,5 | 9,5 | 1 |
| | 2 | 8,5 | 17 | 4 |
| | 3 | 5,5 | 16,5 | 9 |
| | 4 | 3,5 | 14 | 16 |
| $\sum$ | **10** | **27** | **57** | **30** |

Assim: $\sum x_i = 10$, $\sum y_i = 27$, $\sum x_i \cdot y_i = 57$ e $\sum x_i^2 = 30$.

Usando as fórmulas da reta de mínimos quadrados, teremos:

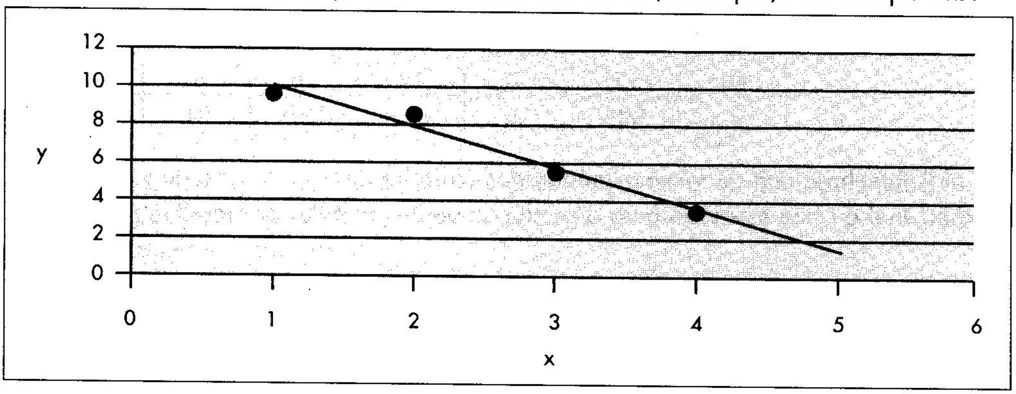
$$a = \frac{57 - \frac{(10)(27)}{4}}{30 - \frac{(10)^2}{4}} = -2{,}1,$$

e

$$b = \frac{27}{4} - (-2{,}1) \cdot \frac{10}{4} = 12.$$

Portanto, a equação da reta procurada é $y = -2{,}1x + 12$, cujo gráfico, juntamente com os pontos dados, encontra-se na Figura 11.8.

Figura 11.8: Reta de mínimos quadrados da demanda em função do preço do Exemplo 11.9.




## Exercícios

19. Encontre a reta de mínimos quadrados de $y$ em função de $x$ ajustada aos pontos

| $x_i$ | $y_i$ |
|---|---|
| 2 | 7 |
| 4 | 10 |
| 6 | 11 |

20. Encontre a reta de mínimos quadrados de $y$ em função de $x$ ajustada aos pontos

| $x_i$ | 5 | 4 | 2 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 15 | 10 | 5 | 3 | 9 |

21. A tabela a seguir fornece as quantidades de fertilizantes aplicados ($x_i$) e a produção por hectare ($y_i$) em quatro canteiros de uma fazenda experimental.

| $x_i$ | 2 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 20 | 35 | 55 | 85 |

*a)* Obtenha a reta de mínimos quadrados de $y$ em função de $x$ ajustada aos dados.
*b)* Preveja a produção para uma aplicação de fertilizante correspondente a $x = 7$.

22. Um monopolista variou o preço de seu produto ($x$) e observou a correspondente demanda mensal ($y$). Os dados obtidos foram:

| Preço ($x$) | Demanda mensal ($y$) |
|---|---|
| 10 | 100 |
| 15 | 70 |
| 20 | 50 |
| 25 | 30 |

*a)* Ajuste aos dados a reta de mínimos quadrados de $y$ em função de $x$.
*b)* Preveja a demanda para um preço igual a 27.

23. Uma empresa observou a quantidade mensal produzida de um produto ($x$) e o correspondente custo ($y$) em milhares de reais. Os dados foram os seguintes:

| $x$ | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 14,5 | 16,5 | 18 | 18,5 | 19,5 | 21 | 21,5 |

*a)* Obtenha a reta de mínimos quadrados ajustada de $y$ em função de $x$ aos dados.
*b)* Qual o custo estimado para a produção de 24 unidades por mês?

24. A tabela abaixo fornece a exportação de um produto ($y$), em milhões de dólares, em função ano ($x$) contado a partir de determinado ano do calendário:

| Ano ($x$) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Exportações ($y$) | 80 | 100 | 118 | 143 | 164 | 179 | 205 |

*a)* Obtenha a reta de mínimos quadrados de $y$ em função de $x$ ajustada aos dados.
*b)* Preveja a exportação para o próximo ano.

## 11.4 Análise dos Pontos de Fronteira

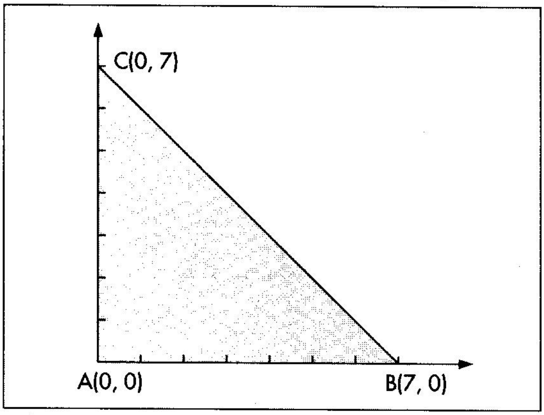
Até agora, vimos como encontrar máximos e mínimos de funções analisando apenas os pontos interiores ao domínio (pois os teoremas dados só se aplicam a esses pontos). A análise dos pontos de fronteira (quando existem) terá de ser feita sem o auxílio destes teoremas. Uma das formas usadas para abordar tais situações é por meio das curvas de nível da função a ser otimizada. Os exemplos esclarecerão esse tipo de abordagem.

**Exemplo 11.10.** Consideremos a função $f$ dada por $f(x, y) = 2x + y$, definida no domínio $D$ dado pelas inequações

$$x \geqslant 0,$$
$$y \geqslant 0,$$
$$x + y \leqslant 7.$$

a) Em primeiro lugar, notemos que o conjunto $D$ é constituído pela reunião do triângulo da Figura 11.9 com sua parte interna. A fronteira do domínio é constituída dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$.

**Figura 11.9:** Domínio da função do Exemplo 11.10.

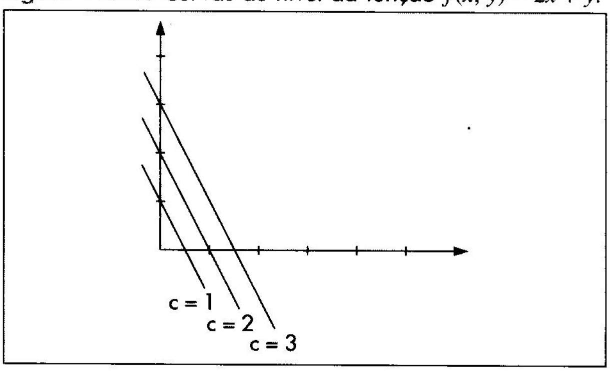



b) A função $f(x, y) = 2x + y$ admite como curvas de nível o feixe de paralelas à reta $2x + y = 0$, pois qualquer curva de nível $c$ tem por equação a reta $2x + y = c$, que é paralela à $2x + y = 0$ qualquer que seja $c$.

Eis algumas curvas de nível. Seus gráficos comparecem na Figura 11.10:

$$c = 1 \longrightarrow 2x + y = 1$$
$$c = 2 \longrightarrow 2x + y = 2$$
$$c = 3 \longrightarrow 2x + y = 3.$$

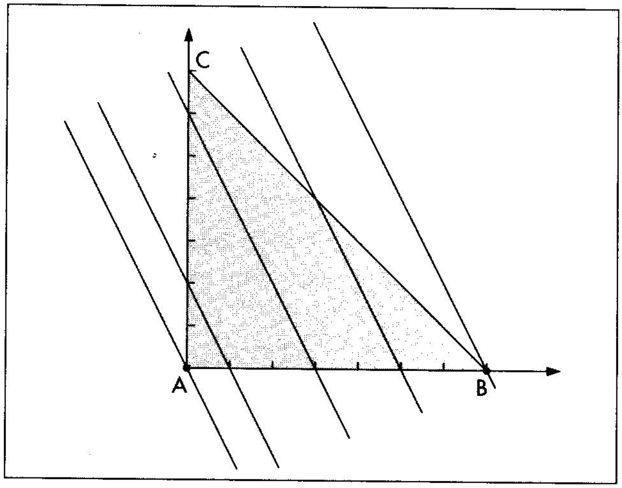
**Figura 11.10:** Curvas de nível da função $f(x, y) = 2x + y$.




Notemos, nesse exemplo, que, quanto mais a reta se distancia da origem, maior é o valor de $c$.

c) Como todos os pontos $(x, y)$ da curva de nível $c$ produzem um valor constante para $f(x, y)$, o ponto da curva de maior nível que intercepta $D$ é o ponto de máximo de $f$; no caso do exemplo em questão, tal ponto é $B(7, 0)$. A curva de menor nível que intercepta $D$ é o ponto de mínimo de $f$; no caso, tal ponto é $A(0, 0)$ (Figura 11.11).

Figura 11.11: O ponto $B$ é de máximo e o $A$ é de mínimo, no Exemplo 11.10.




d) O ponto (0, 0) é ponto de mínimo absoluto e (7, 0) é ponto de máximo absoluto de $f$.

e) Entre os pontos interiores a $D$, não existem pontos de máximo ou mínimo, pois as derivadas parciais nunca se anulam ($f_x = 2$ e $f_y = 1$).

É intuitivo perceber, nesse exemplo, que os pontos de máximo e de mínimo estão nos vértices do triângulo. Assim, por simples inspeção do valor de $f$ nos pontos $A$, $B$ e $C$, poderíamos descobrir os pontos de máximo e mínimo.

De fato,

$$
\begin{aligned}
&f(x, y) = 2x + y,\\
&A(0, 0) \rightarrow f(0, 0) = 2 \cdot 0 + 0 = 0,\\
&B(7, 0) \rightarrow f(7, 0) = 2 \cdot 7 + 0 = 14,\\
&C(0, 7) \rightarrow f(0, 7) = 2 \cdot 0 + 7 = 7,
\end{aligned}
$$

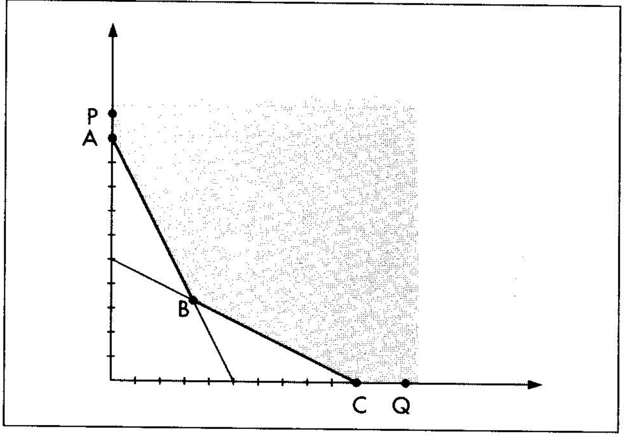
e, portanto, $A(0, 0)$ é o ponto de mínimo e $B(7, 0)$ é o ponto de máximo de $f$.

**Exemplo 11.11.** Consideremos a função dada por $f(x, y) = x + y$, definida no domínio $D$ determinado pelas inequações

$$
\begin{aligned}
&x \geqslant 0,\\
&y \geqslant 0,\\
&2x + y \geqslant 10,\\
&x + 2y \geqslant 10.
\end{aligned}
$$

a) O conjunto $D$ é formado pelos pontos da região indicada na Figura 11.12.

Figura 11.12: Domínio da função do Exemplo 11.11.




Os pontos $A$, $B$ e $C$ têm coordenadas $(0, 10)$, $\left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right)$ e $(10, 0)$ respectivamente; o ponto $B$ é a intersecção das retas $2x + y = 10$ e $x + 2y = 10$.

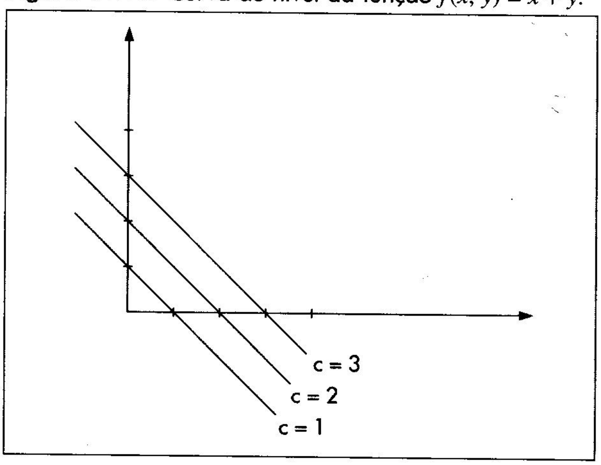
Os pontos de fronteira do domínio são aqueles dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, bem como os das semi-retas, $\overline{AP}$ e $\overline{CQ}$.

b) A função $f(x, y) = x + y$ admite como curvas de nível o feixe de retas paralelas à reta $x + y = 0$.

Eis algumas curvas de nível e seus respectivos gráficos (Figura 11.13):

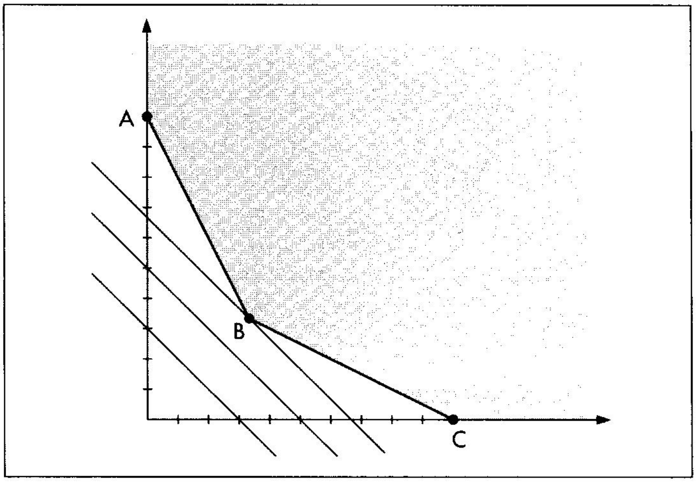
$$c = 1 \rightarrow x + y = 1$$
$$c = 2 \rightarrow x + y = 2$$
$$c = 3 \rightarrow x + y = 3.$$

Figura 11.13: Curva de nível da função $f(x, y) = x + y$.



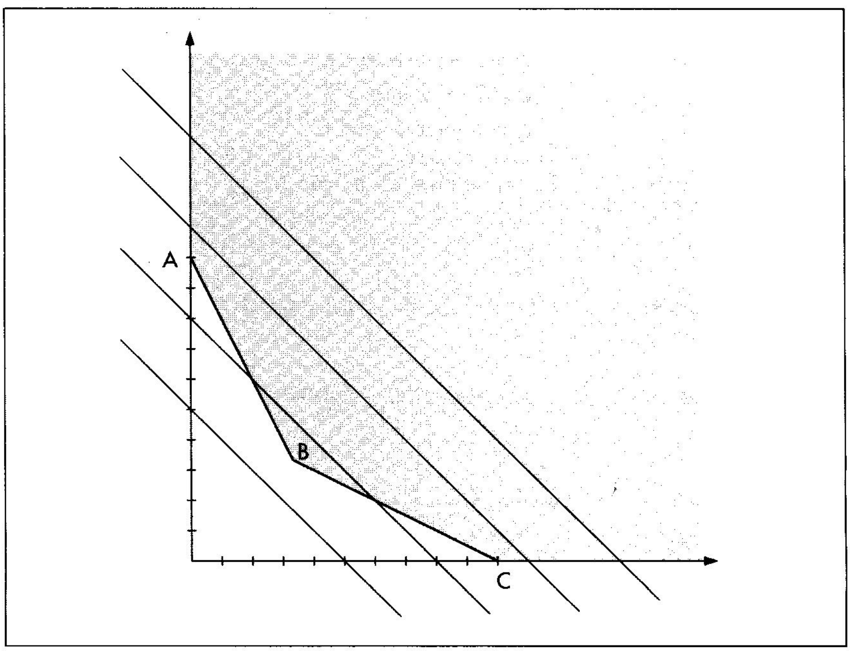
c) O ponto de mínimo de $f$ é o ponto da curva de menor nível que intercepta $D$. Assim, o ponto de mínimo é o ponto $B\left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right)$ (Figura 11.14).

**Figura 11.14:** O ponto $B$ é o ponto de mínimo da função $f(x, y) = x + y$ do Exemplo 11.11.




d) A função $f$ não tem ponto de máximo em $D$, pois não existe curva de maior nível de $f$ que intercepte $D$ (Figura 11.15).

**Figura 11.15:** Não há ponto de máximo.

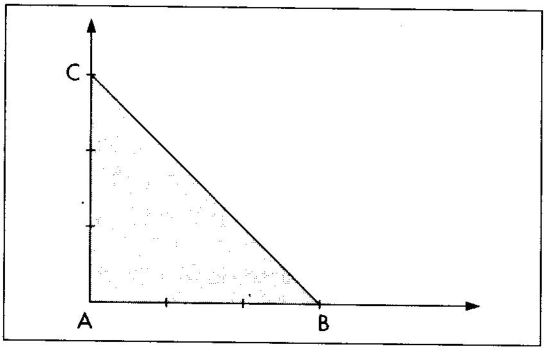


**Exemplo 11.12.** Consideremos a função dada por $f(x, y) = x + y$ e domínio $D$ determinado pelas inequações

$$x \geqslant 0,$$
$$y \geqslant 0,$$
$$x + y \leqslant 3.$$

a) O conjunto $D$ é constituído pela região triangular da Figura 11.16. Os vértices do triângulo são $A(0, 0)$, $B(3, 0)$ e $C(0, 3)$.

**Figura 11.16:** Domínio da função do Exemplo 11.12.




b) A função dada admite como curvas de nível o feixe de paralelas à reta $x + y = 0$ (Figura 11.17).

c) Todos os pontos do segmento $\overline{BC}$ são pontos de máximo, pois a reta determinada por $BC$ tem o mesmo coeficiente angular que o feixe de paralelas $(-1)$. O ponto de mínimo de $f$ é o ponto $A(0, 0)$ (Figura 11.18).

**Figura 11.17**

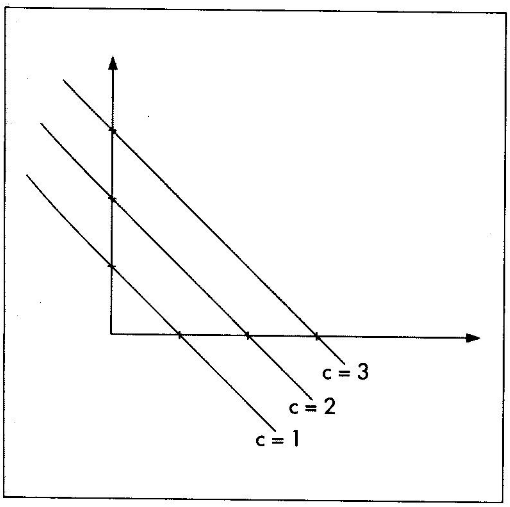
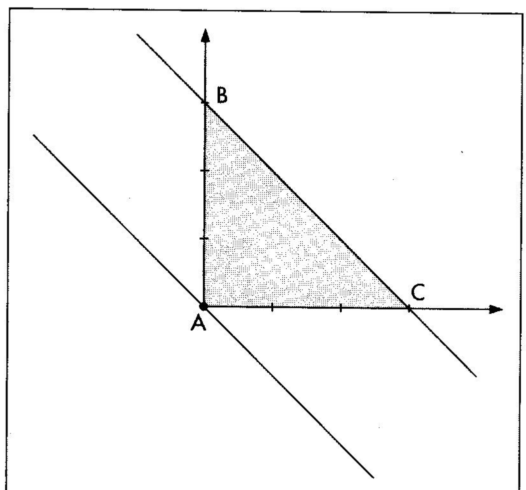



**Figura 11.18**



## Exercícios

25. Determine os pontos de máximo e mínimo (caso existam) das funções nos domínios indicados:

a) $f(x, y) = 3x + y$, $D = \{(x, y) \in R^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 6\}$

b) $f(x, y) = x + 3y$, $D = \{(x, y) \in R^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + 2y \leqslant 6\}$

c) $f(x, y) = x - y$, $D = \{(x, y) \in R^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + 3y \leqslant 5\}$

d) $f(x, y) = 2x + 5y$, $D = \{(x, y) \in R^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x \leqslant 6, y \leqslant 5, x + y \leqslant 8\}$

e) $f(x, y) = x + 10y$, $D = \{(x, y) \in R^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x \leqslant 5, y \leqslant 10, 2x + y \leqslant 12\}$

f) $f(x, y) = x + 20y$, $D = \{(x, y) \in R^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 10, 5x + y \leqslant 30\}$

g) $f(x, y) = 3x + y$, $D = \{(x, y) \in R^2 \mid x \geqslant 2, y \geqslant 0, x + y \leqslant 10, 5x + y \leqslant 30\}$

h) $f(x, y) = 4x - 3y$, $D = \{(x, y) \in R^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + 2y \leqslant 8, x - y \leqslant 4\}$

i) $f(x, y) = x + y$, $D = \{(x, y) \in R^2 \mid |x| \leqslant 2, |y| \leqslant 2\}$

j) $f(x, y) = x + 2y$, $D = \{(x, y) \in R^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \geqslant 5\}$

k) $f(x, y) = x + 3y$, $D = \{(x, y) \in R^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, 3x + y \geqslant 12\}$

l) $f(x, y) = 2x + y$, $D = \{(x, y) \in R^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, 3x + y \geqslant 12, x + 3y \geqslant 12\}$

m) $f(x, y) = x + 2y + 1$, $D = \{(x, y) \in R^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 1\}$

26. Determine o ponto de máximo e de mínimo da função $f(x, y) = x + y$ no domínio dado por $D = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

Resolução

O domínio da função é o círculo de centro na origem e raio 1 (Figura 11.19).

As curvas de nível da função são as retas do feixe de paralelas $x + y = c$ (Figura 11.20).

Portanto, os pontos de máximo e de mínimo são os pontos de tangência de $x + y = c$ com a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ (Figura 11.21).

**Figura 11.19**

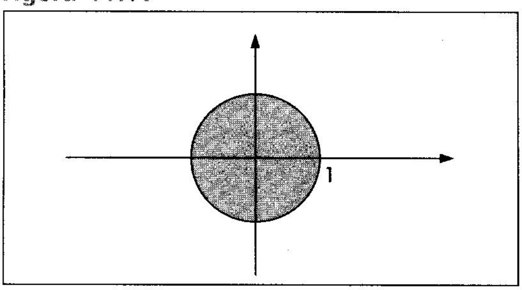



**Figura 11.20**

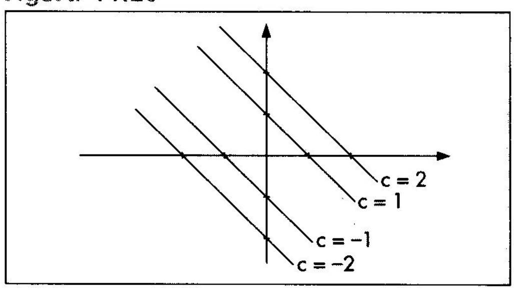
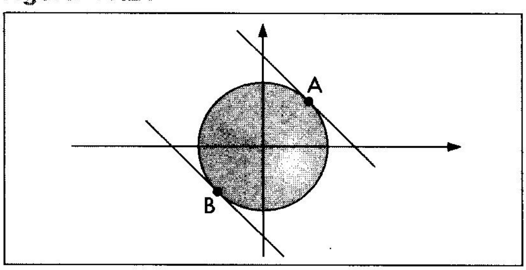



**Figura 11.21**



Assim sendo, devemos impor que o sistema de equações

$$\begin{cases} x + y = c & (11.1) \\ x^2 + y^2 = 1 & (11.2) \end{cases}$$

tenha solução única.

De (11.1) temos: $y = c - x$. Substituindo em (11.2), teremos:

$$2x^2 - 2cx + c^2 - 1 = 0 \qquad (11.3)$$

Para que (11.3) tenha uma única raiz, seu discriminante ($\Delta$) deve ser nulo. Assim:

$$\Delta = 4c^2 - 8(c^2 - 1) = -4c^2 + 8 = 0 \Rightarrow c = \sqrt{2} \text{ ou } c = -\sqrt{2}$$

É evidente que para $c = \sqrt{2}$ teremos um ponto de máximo e para $c = -\sqrt{2}$ teremos um ponto de mínimo.

Para $c = \sqrt{2}$ a equação (11.3) fica igual a $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$, cuja raiz é $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

O valor de $y$ é dado pela equação (11.1), isto é: $y = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Portanto o ponto de máximo é $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Para $c = -\sqrt{2}$ concluímos de modo análogo que o ponto de mínimo é $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

27. Determine os pontos de máximo e mínimo (se existirem) das funções abaixo, nos domínios indicados:

a) $f(x, y) = x - y$, $\quad D = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

b) $f(x, y) = x + y$, $\quad D = \left\{(x, y) \in R^2 \mid y \leq \frac{1}{x}, x > 0, y > 0\right\}$

c) $f(x, y) = x + y$, $\quad D = \left\{(x, y) \in R^2 \mid y \geq \frac{1}{x}, x \geq 0, y \geq 0\right\}$

d) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\quad D = \{(x, y) \in R^2 \mid x + y \leq 5, x \geq 0, y \geq 0\}$

e) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\quad D = \{(x, y) \in R^2 \mid x + y \geq 1\}$

f) $f(x, y) = -x^2 + y$, $\quad D = \{(x, y) \in R^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$

28. Uma marcenaria produz mesas e cadeiras de um único modelo, utilizando dois insumos: trabalho e madeira. Para produzir uma mesa são necessários 10 homens-hora e para uma cadeira, 2 homens-hora. Cada mesa requer 10 unidades de madeira e cada cadeira, 5 unidades.

Durante um período de tempo, a marcenaria dispõe de 200 homens-hora e 260 unidades de madeira. Se cada mesa é vendida por \$ 200,00 e cada cadeira por \$ 90,00, qual a produção que maximiza a receita de vendas naquele período?