

**variáveis
complexas
e suas
aplicações**

RUEL V. CHURCHILL

EDITORA MCGRAW-HILL DO BRASIL, LTDA.

RUEL V. CHURCHILL

Professor de Matemática – Universidade de Michigan

VARIÁVEIS COMPLEXAS E SUAS APLICAÇÕES

Tradução

Tadao Yoshioka

Professor de Matemática
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

Revisão Técnica

Alfredo Alves de Farias

Professor Adjunto do
Instituto de Ciências Exatas (Depto. de Matemática).
Universidade Federal de Minas Gerais

SÃO PAULO
RIO DE JANEIRO
BELO HORIZONTE
PORTO ALEGRE
RECIFE

NEW-YORK • ST. LOUIS • SAN FRANCISCO
AUCKLAND • BOGOTÁ • DÜSSELDORF • JOHANNESBURG
KUALA LUMPUR • LONDON • MADRID • MÉXICO
MONTREAL • NEW DELHI • PANAMÁ • PARIS
SINGAPORE • SYDNEY • TOKYO • TORONTO



Sumário

Prefácio à Edição Brasileira	XI
Prefácio	XII
1. NÚMEROS COMPLEXOS	1
Definição. Propriedades Adicionais. Representação Geométrica. Conjugados Complexos. Valores Absolutos. A Forma Polar. Produtos, Potências e Quocientes. Extração de Raízes. Regiões no Plano Complexo.	
2. FUNÇÕES ANALÍTICAS	19
Funções de uma Variável Complexa. Transformações. Limites. Continuidade. A Derivada. Fórmulas de Derivação. As Condições de Cauchy-Riemann. Condições Suficientes. Funções Analíticas. Funções Harmônicas.	
3. FUNÇÕES ELEMENTARES	44
A Função Exponencial. Outras Propriedades de $\exp z$. As Funções Trigonométricas. Outras Propriedades de Funções Trigonométricas. Funções Hiperbólicas. A Função Logarítmica. Ramos. Propriedades dos Logaritmos. Expoentes Complexos. Funções Trigonométricas Inversas.	
4. TRANSFORMAÇÕES POR FUNÇÕES ELEMENTARES	62
Funções Lineares. A Função z^n . A Função $1/z$. O Ponto no Infinito. A Transformação Linear Fracionária. Transformações Lineares Fracionárias Especiais. A Função $z^{1/2}$. Outras Funções Irracionais. A Transformação $w = \exp z$. A Transformação $w = \operatorname{sen} z$. Transformações Sucessivas. Tabela de Transformações de Regiões.	
5. INTEGRAIS	89
Integrais Definidas. Caminhos. Integrais Curvilíneas. Exemplos. O Teorema de Cauchy-Goursat. Um Teorema Preliminar. Demonstração do Teorema de Cauchy-Goursat. Domínios Simplesmente Conexos e Multiplamente Conexos. Integrais Indefinidas. A Fórmula Integral de Cauchy. Derivadas de Funções Analíticas. Teorema de Morera. Módulos Máximos de Funções. O Teorema Fundamental da Álgebra.	

6. SÉRIES DE POTÊNCIAS	121
Séries de Taylor. Observações e Exemplos. Séries de Laurent. Propriedades de Séries. Convergência Uniforme. Integração e Derivação de Séries de Potências. Unicidade de Representações por Séries de Potências. Multiplicação e Divisão. Exemplos. Zeros de Funções Analíticas.	
7. RESÍDUOS E POLOS	145
Resíduos. O Teorema do Resíduo. Polos. Quocientes de Funções Analíticas. Cálculo de Integrais Reais Impróprias. Um Outro Exemplo. Integrais Impróprias Envolvendo Funções Trigonométricas. Integrais Definidas de Funções Trigonométricas. Integração em torno de um Ponto de Ramificação.	
8. TRANSFORMAÇÕES CONFORMES	166
Rotação de Tangentes. Transformação Conforme. Exemplos. Funções Harmônicas Conjugadas. Funções Inversas. Transformação de Funções Harmônicas. Transformação de Condições de Contorno.	
9. APLICAÇÕES DE TRANSFORMAÇÕES CONFORMES	180
Temperaturas Estacionárias. Temperaturas Estacionárias numa Parede. Temperaturas num Quadrante com Parte de Uma Fronteira Isolada. Potencial Elétrico. Potencial num Espaço Cilíndrico. Escoamento de Fluido Bidimensional. A Função Corrente. Escoamento ao redor de um Canto. Escoamento ao redor de um Cilindro.	
10. A TRANSFORMAÇÃO DE SCHWARZ-CHRISTOFFEL	206
Transformação do Eixo Real num Polígono. A Transformação de Schwarz-Christoffel. Triângulos e Retângulos. Polígonos Degenerados. A Faixa Infinita. Escoamento de Fluido num Canal através de uma Fenda. Escoamento num Canal com um "Offset". Potencial Eletrostático junto a uma Placa Condutora.	
11. FÓRMULAS INTEGRAIS DE POISSON	228
Fórmula Integral de Poisson. Um Problema de Dirichlet para o Círculo. Problemas de Contorno Relacionados. Fórmulas Integrais para o Semiplano. Um Problema de Dirichlet para o Semiplano. Problemas de Neumann para Regiões Circulares. Um Problema de Neumann para o Semiplano.	

12. COMPLEMENTOS SOBRE TEORIA DAS FUNÇÕES	244
A. Prolongamento Analítico	244
Condições sob as Quais $f(z) \equiv 0$. Permanência de Formas de Identidades Funcionais. Unicidade do Prolongamento Analítico. Exemplos. O Princípio de Reflexão.	
B. Pontos Singulares e Zeros	253
Pólos e Zeros. Pontos Singulares Essenciais. O Número de Zeros e Pólos.	
C. Superfícies de Riemann	257
Uma Superfície para a Função $\log z$. Uma Superfície para a Função $z^{1/2}$. Superfícies para Outras Funções Irracionais.	
Apêndices	263
1. Bibliografia	263
2. Tabela de Transformações de Regiões	265
Índice Analítico	273

Prefácio à Edição Brasileira

O texto, que ora se apresenta à comunidade estudantil, em língua portuguesa, granjeia de uma certa tradição junto a especialistas em ramos da Engenharia e da Física, dado o preparo abrangente desses em disciplinas classificadas como Métodos Matemáticos.

Também é um texto muitas vezes usado na primeira familiarização de estudantes de Matemática em nível de graduação, com a teoria das funções complexas.

A primeira edição data de 1948. A presente tradução baseia-se na segunda edição (ampliada e revista), publicada em 1960. Seu conteúdo deve ser contemplado nessa cronologia.

A exposição é feita no estilo clássico discursivo e operacional adequado a estudantes de 5º período de cursos nas áreas de ciências e de tecnologia. Exercícios são formulados, em geral, a cada duas ou três seções que abranjam suficiente material para resolvê-los. Isto permite uma certa eficiência na absorção imediata dos conceitos que são introduzidos a cada passo. Tais exercícios, devido a esse objetivo, são, em sua grande maioria, de resolução direta, possuindo suficiente informação, de modo a não torná-los excessivamente algébricos mas, por outro lado, dosados de maneira a evitar uma rotina de cálculos.

Compreendida a intenção do Autor – pioneira na época – em tornar acessível a um grande público os métodos e resultados da teoria das funções complexas de uma variável complexa, é fácil planejar sua adoção em disciplinas adequadas e destinadas a estudantes de ciência aplicada e tecnologia. O texto pode ser coberto em um único semestre, desde que demonstrações não essenciais sejam omitidas, assegurando os objetivos de compreensão do conteúdo dos enunciados e suas utilizações como ferramentas matemáticas.

Guilherme M. de La Penha, Ph. D.
Diretor Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prefácio

A teoria das funções de uma variável complexa é uma das partes básicas da análise matemática. Sua influência pode ser notada em quase todos os ramos da matemática. Além de ser proeminente na matemática pura e de possuir uma estrutura lógica elegante, a teoria representa um dos instrumentos mais poderosos dos matemáticos aplicados, engenheiros e físicos.

O primeiro objetivo deste livro é a apresentação de um desenvolvimento lógico daquelas partes da teoria clássica, que mais se destacam nas aplicações da matéria. Exceto para alguns conceitos geométricos que podem ser aceitos intuitivamente, a presente apresentação pretende ser rigorosa e auto-suficiente. A seleção dos métodos de demonstração e o arranjo dos tópicos foram feitos tendo-se em vista a simplicidade e a brevidade, por vezes com sacrifício da elegância. Se, num curso de um semestre, se quiser dar maior ênfase à teoria dos resíduos e das transformações conformes, o tempo que se pode dedicar à teoria que antecede é limitado e seu desenvolvimento tem de ser bem conciso.

O segundo objetivo é o de dar uma introdução a aplicações, inclusive os usos da teoria dos resíduos e das integrais curvilíneas no cálculo das integrais reais, e aplicações das transformações conformes a problemas de potenciais, temperaturas estacionárias e escoamento de fluidos. As aplicações das transformações conformes apresentam um dos métodos clássicos de resolver problemas de contorno nas equações de derivadas parciais, restritos à equação de Laplace com duas variáveis independentes. Assim o livro serve como um volume acompanhante dos livros do autor "Fourier Series and Boundary Value Problems" e "Operational Mathematics", onde são tratados outros métodos clássicos de resolução de problemas lineares de contorno. No segundo livro dão-se algumas outras aplicações de variáveis complexas em relação com as transformadas de Laplace.

Os resultados básicos são, na maioria, enunciados como teoremas. Ilustram a teoria e as aplicações inúmeros exemplos e exercícios simples. O Apêndice 2 apresenta uma tabela de transformações conformes.

Os nove primeiros capítulos, com várias substituições do resto do livro, serviram por longo tempo como conteúdo de um curso de três horas semanais dado em cada semestre na Universidade de Michigan. As classes consistem principalmente de estudantes graduados e graduandos, especializando-se em engenharia, matemática ou física. Os estudantes têm como pré-requisito o equivalente a um semestre do cálculo avançado. Omitem-se nas aulas, alguns tópicos da matéria, já que os estudantes têm capacidade de entendê-los sem a assistência do instrutor. Como foi observado no início do capítulo 5, os capítulos 8 e 9 sobre transformações conformes e suas aplicações podem ser introduzidos logo após o capítulo 4, caso haja tal necessidade.

O livro é uma revisão extensa da primeira edição, publicada em 1948. Grande parte do material foi reescrito com vistas à exatidão lógica e clareza. O capítulo 11, sobre fórmulas integrais de Poisson, é inteiramente novo. Ao que saiba, o autor, constitui a primeira coleção de tais fórmulas. O número de exercícios foi aumentado consideravelmente, dando-se as respostas para a maioria deles. Algumas extensões da teoria aparecem nos exercícios.

Durante a preparação do livro nesta edição, o autor se valeu de sugestões de vários estudantes e colegas. Dentre seus colegas locais, Prof. C. L. Dolph, B. Dushnik, T. H. Hildebrandt, W. Kaplan e E. D. Rainville merecem agradecimentos especiais. Por comentários proveitosos de colegas, entre os quais J. R. Britton, W. B. Curry, R. J. Duffin, W. L. Duren, T. J. Higgins, I. Marx, M. E. Shanks e F. H. Steen, o autor expressa sua apreciação. A seleção do material ou dos métodos de demonstração foi influenciada por alguns dos livros cujos títulos se encontram no Apêndice 1.

Ruel V. Churchill

APÊNDICE 1

Bibliografia

A seguinte lista de livros, para estudo suplementar da teoria das funções de uma variável complexa e das aplicações da teoria, não pretende ser completa. Outras referências podem ser encontradas em alguns dos livros abaixo relacionados.

TEORIA

- Ahlfors, L.V.: "Complex Analysis," McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1953.
- Bieberbach, L.: "Conformal Mapping," Chelsea Publishing Company, New York, 1953.
- : "Lehrbuch der Funktionentheorie," vols. 1 and 2, B.G. Teubner, Berlin, 1934.
- Caratheodory, C.: "Conformal Representation," Cambridge University Press, London, 1952.
- : "Theory of Functions of a Complex Variable," vols. 1 and 2, Chelsea Publishing Company, New York, 1954.
- Copson, E.T.: "Theory of Functions of a Complex Variable," Oxford University Press, London, 1957.
- Dienes, P.: "The Taylor Series: An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable," Dover Publications, New York, 1957.
- Evans, G.C.: "The Logarithmic Potential," American Mathematical Society, Providence, R.I., 1927.
- Forsyth, A.R.: "Theory of Functions of a Complex Variable," Cambridge University Press, London, 1918.
- Hille, E.: "Analytic Function Theory," vol. 1, Ginn & Company, Boston, 1959.
- Hurwitz, A., and R. Courant: "Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen," Interscience Publishers, Inc., New York, 1944.
- Kellogg, O.D.: "Foundations of Potential Theory," Springer-Verlag OHG, Berlin, 1929.
- Knopp, K.: "Elements of the Theory of Functions," Dover Publications, New York, 1952.
- MacRobert, T.M.: "Functions of a Complex Variable," Macmillan & Co., Ltd., London, 1954.
- Nehari, Z.: "Conformal Mapping," McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1952.
- Springer, G.: "Introduction to Riemann Surfaces," Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1957.
- Sternberg, W.J., and T.L. Smith: "Theory of Potential and Spherical Harmonics," University of Toronto Press, Toronto, 1944.
- Titchmarsh, E.C.: "Theory of Functions," Oxford University Press, London, 1939.
- Whittaker, E.T., and G.N. Watson: "Modern Analysis," Cambridge University Press, London, 1950.

APLICAÇÕES

- Bowman, F.: "Introduction to Elliptic Functions, with Applications," English Universities Press, London, 1953.
- Churchill, R. V.: "Operational Mathematics," 2d ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1958.
- Glauert, H.: "The Elements of Aerofoil and Airscrew Theory," Cambridge University Press, London, 1948.
- Green, S. L.: "Hydro- and Aero-dynamics," Sir Isaac Pitman & Sons, Ltd., London, 1937.
- Guillemin, E. A.: "The Mathematics of Circuit Analysis," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1951.
- Jeans, J. H.: "Mathematical Theory of Electricity and Magnetism," Cambridge University Press, London, 1925.
- Kober, H.: "Dictionary of Conformal Representations," Dover Publications, New York, 1952.
- Lamb, H.: "Hydrodynamics," Dover Publications, New York, 1945.
- Love, A. E. H.: "Elasticity," Dover Publications, New York, 1944.
- Milne-Thomson, L. M.: "Theoretical Hydrodynamics," Macmillan & Co., Ltd., London, 1955.
- Muskhelishvili, N. I.: "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity," P. Noordhoff, N. V., Groningen Netherlands, 1953.
- Oberhettinger, F., and W. Magnus: "Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik und Technik," Springer-Verlag OHG, Berlin, 1949.
- Rothe, R., F. Ollendorff, and K. Pohlhausen: "Theory of Functions as Applied to Engineering Problems," Technology Press, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., 1948.
- Smythe, W. R.: "Static and Dynamic Electricity," 2d ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1950.
- Sokolnikoff, I. S.: "Mathematical Theory of Elasticity," 2d ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1956.
- Walker, M.: "Conjugate Functions for Engineers," Oxford University Press, London, 1933.