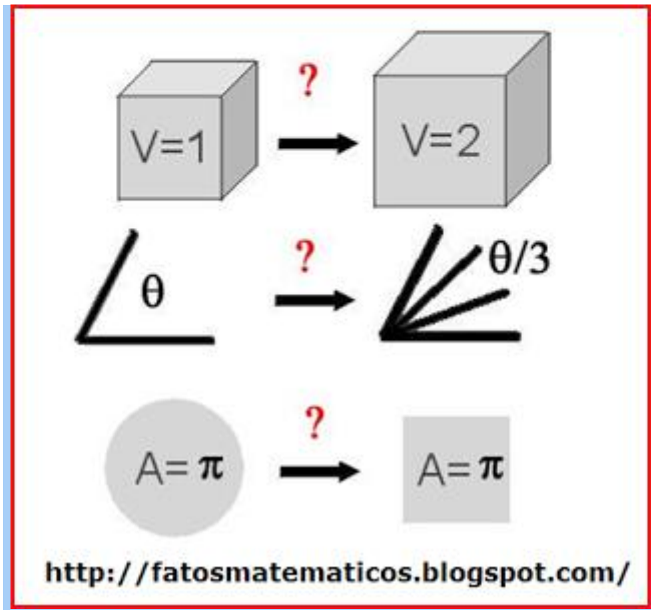
Ensino & Informação
Prof: Altamir A. R. Araldi
Revista®

Os Três Problemas Famosos da Geometria Grega



Na Grécia Clássica, apareceram três famosos problemas de enunciados muito simples: *a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo* que caíram como uma verdadeira bomba em sua cultura, e que mais tarde se transformariam para todos os gregos numa grande frustação, devido à impossibilidade de prová-los exclusivamente com o emprego de dois instrumentos: a régua não-graduada e o compasso. O estudo destes três problemas geométricos que desafiaram o poder inventivo de inúmeros matemáticos e intelectuais durante mais de dois mil anos deu-se início no período helênico (período compreendido entre o século VI a.C. e o século V d.C.). Os três problemas são:

A - Construção da aresta de um cubo cujo volume seja o dobro do volume de outro (duplicação do cubo);

B - Divisão de um ângulo qualquer em três partes iguais (trissecção do ângulo);

C - Construção de um quadrado cuja área seja igual à de um círculo (quadratura do círculo).

Para abordar as questões da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo, e pôr um fim em uma discussão que havia durado mais de 20 séculos, o matemático francês Pierre Laurent Wantzel $(1814-1848)$ que era linguística e engenheiro da prestigiosa École Polytechnique, foi quem apresentou a impossibilidade destas construções com os instrumentos inicialmente impostos. E com o desenvolvimento da Aritmética, da Álgebra e da Análise durante o século XIX, ele utilizou o **teorema 2 (auxiliar)** a seguir. Assim, para abordar tais problemas, utilizaremos os seguintes teoremas aludidos abaixo e, convido o leitor a pesquisar as demonstrações desses teoremas, consultando as referências bibliográficas [3] e [6].

Teorema 1: *Se um número racional a/b, com a e b primos entre si, é raiz da equação polinomial de coeficientes inteiros $c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + ... + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0$ então a será um divisor de c_0 e b um divisor de c_n.*

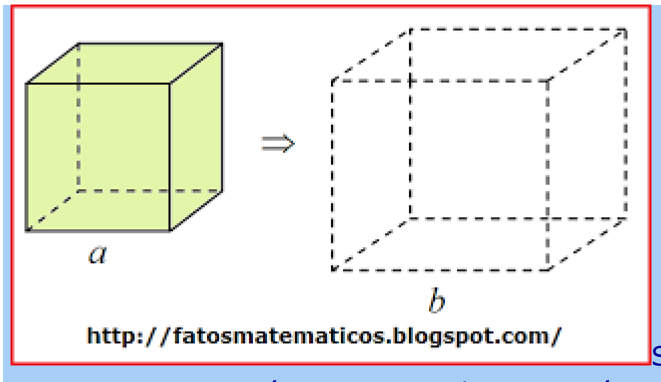
Demonstração: Ver referência [6].

Teorema 2 (auxiliar): *A condição necessária e suficiente para que três raízes de uma equação de grau 3, de coeficientes racionais sejam construtíveis por régua e compasso é que uma delas seja racional.*

Demonstração: Ver referência [3].

Usaremos estes dois teoremas para estudar os problemas da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo.

A - A Duplicação do Cubo:



Se o cubo dado tiver uma aresta de comprimento unitário, seu volume será a unidade cúbica; exige-se que encontraremos a aresta x de um cubo com o dobro deste volume. A aresta x exigida, portanto satisfará a seguinte equação cúbica.

$$x^3 = 2 \cdot 1 \;\Rightarrow\; x^3 - 2 = 0 \quad (I)$$

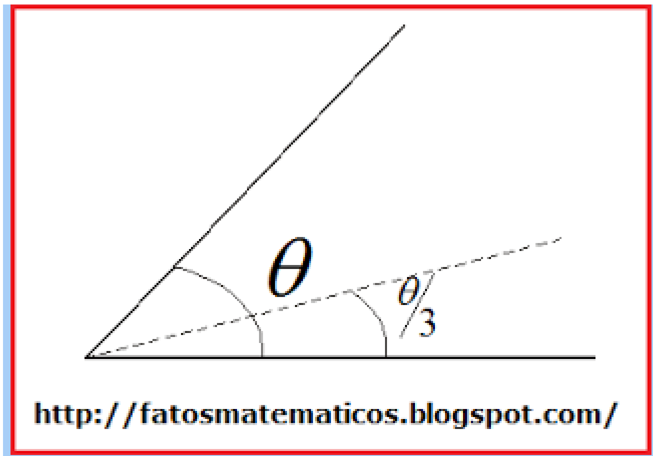
Suponhamos que a aresta x procurada seja um número racional, isto é, a raiz da equação (I) seja um número da forma a/b, onde a/b é uma fração irredutível. Pelo **teorema 1**, a será um divisor de -2 e b será um divisor de 1. Os possíveis valores de a são: ± 1 e ± 2 e os b são ± 1. Logo temos as possibilidades:

$$\frac{a}{b}=\left\{\frac{+1}{+1},\frac{+1}{-1},\frac{-1}{+1},\frac{-1}{-1},\frac{+2}{+1},\frac{+2}{-1},\frac{-2}{-1},\frac{-2}{+1}\right\}$$

ou seja, $\{+1,-1,+2,-2\}$. Mas nenhum destes números é raiz, pois as igualdades $1^3-2=0$, $(-1)^3-2=0$, $2^3-2=0$ e $(-2)^3-2=0$ são todas falsas.

Portanto, $x^3-2=0$ não tem raízes racionais e a aresta x não pode ser construída somente com régua e compasso, pelo **teorema 2 (auxiliar)**.

B - A Trissecção do Ângulo:



Para a trissecção do ângulo, o raciocínio é o seguinte: se um ângulo θ é construtível por régua e compasso, então seu cosseno: $\cos\theta=\phi$ também o é e reciprocamente. Por uma simples fórmula da trigonometria o $\cos\theta/3=z$ está relacionado com o $\cos\theta=\phi$ pela equação

$$\cos\theta=\phi=4\cos^3(\tfrac{\theta}{3})-3\cos(\tfrac{\theta}{3})$$

Em outras palavras, o problema de trissectar o ângulo θ com $\cos\theta=\phi$ equivale a construir uma solução da equação cúbica

$$4z^3-3z-\phi=0 \quad (II)$$

Para mostrar que isto não pode ser feito em geral, vamos considerar o caso particular para $\theta=60^{\circ}$, de modo que $\phi=\cos60^{\circ}=1/2$. A equação (II) torna-se então

$$8z^3-6z-1=0 \quad (III)$$

Suponhamos que com $\theta = 60^{\circ}$, $z = \cos 20^{\circ}$ seja um número racional da forma a/b, isto é, que z seja uma raiz racional da equação (III), onde a/b é uma fração irredutível. Assim, pelo**teorema 1**, a será um divisor de -1 e b será um divisor de 8.

Os possíveis valores de a são: ± 1 e os de b são: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ e ± 8. Logo, temos as possibilidades:

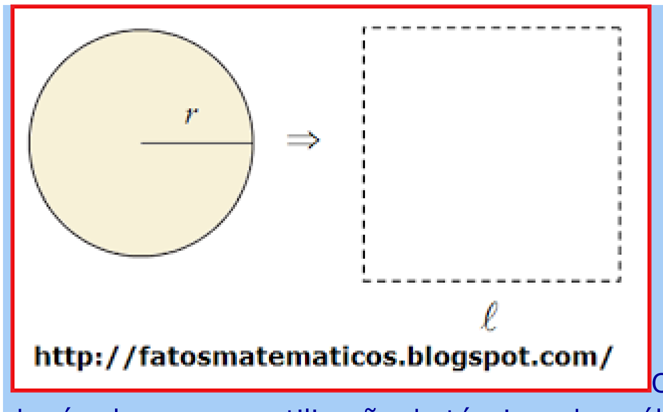
ou seja,

$$\left\{+1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right\}$$

Mas nenhum destes números são raízes da equação (III).

Portanto $8z^3 - 6z - 1 = 0$ não tem raízes racionais e assim, pelo teorema 2, $z = \cos 20^{\circ}$ não pode ser construído com régua e compasso.

A Quadratura do Círculo:



O problema de fazer a quadratura do círculo requer a utilização de técnicas de análise matemática avançada. Uma vez que um círculo de raio r tem área $A_C = \pi r^2$, o problema de construção de um quadrado com área $A_Q = l^2$ igual à de um círculo dado cujo raio seja o comprimento unitário 1 equivale a equação

$$l^2 = \pi \cdot 1^2 \;\Rightarrow\; l^2 = \pi \;\Rightarrow\; l = \sqrt{\pi}$$

Em outras palavras, equivale à construção de um segmento de comprimento $\sqrt{\pi}$ como lado do quadrado procurado. Este segmento será construído se e somente se o número π for construtível. Para isto, vamos considerar as seguintes definições:

Definição 1: *Um número real é chamado de* ***número algébrico****quando satisfaz alguma equação algébrica da forma* $c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0$*, na qual os coeficientes* $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_2, c_1, c_0$ *são números inteiros. Quando um número real não satisfaz nenhuma equação deste tipo, dizemos que ele é um* ***número transcendente****.*

Exemplo: π é um número transcendente.

A transcendência de π foi provada em 1881, pelo matemático alemão Ferdinand Von Lindemann $(1852-1939)$. Esta demonstração está em [6].

Proposição 1: *Todos os segmentos possíveis de serem construídos com régua e compasso têm comprimento igual a um número algébrico.*

Conforme citamos acima só possível quadrar o círculo, se conseguirmos construir, com régua e compasso um segmento de comprimento igual a $\sqrt{\pi}$. Se isso fosse possível, pela definição 2, $\sqrt{\pi}$ seria algébrico e, portanto π também será algébrico. O que é uma contradição, em virtude do fato que π é transcendente. Como isso, é impossível quadrar o círculo empregando apenas régua e compasso.

Referências Bibliográficas:

[1] BEKKEN, O. B. *Equações de Ahmes até Abel*, USU, GEPEM, 1994.
[2] BOYER, C. B. *História da Matemática*, São Paulo: Edgard Blücher, 2002.
[3] COURANT R., Robbins H. *O que é Matemática?* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2002.
[4] CONTADOR, P. R. M. *Matemática, uma breve história*, São Paulo: Editora Livraria da Física, Vols. I e II, 2006.
[5] EVES, H. *Introdução à História da Matemática*, tradução: Hygino H. Domingues, São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.
[6] FIGUEIREDO, D. G. *Números Irracionais e Transcendentes*, Rio de Janeiro: Coleção Iniciação Científica/Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) 2002.
[7] GARBI, G. G. *O Romance das Equações Algébricas*, São Paulo: Makron Books, 1997.
[8] L. H. JACY MONTEIRO. *Teoria de Galois*. Rio de Janeiro: Livro Técnico, 1971.

Artigo enviado por **Carlos Alberto M. de Assis**
Faculdade da Região dos Lagos - FERLAGOS
Instituto Católico de Educação e Cultura Mater Coeli