Vetor Tangente, Normal e Binormal

Lembre-se que se C é uma curva suave dada pela função vetorial $r(t)$, então $r'(t)$ é contínua e $r'(t) \neq 0$. Além disso, o vetor $r'(t)$ é tangente a curva C, e aponta na direção do parâmetro crescente.

O **vetor tangente unitário** (ou versor tangente) é dado por

$$\boxed{T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}}$$

e indica a direção da curva C

Observação: Se a curva C é representa pela função vetorial $r(s)$, onde s é o parâmetro comprimento de arco, então $\|r'(s)\| = 1$. Neste caso, o vetor tangente unitário é dado por

$$T(s) = r'(s).$$

Exemplo

1. Encontre o versor tangente à elipse $r(t) = (2\cos t, 3\sin t)$ no ponto $P(\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$.

2. Determine o vetor tangente unitário à curva $r(t) = (t, \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{3}t^3)$ num ponto qualquer.

Proposição: *Se $r(t)$ é uma função vetorial com norma constante, então $r(t)$ e $r'(t)$ são ortogonais.*

Demonstração: Precisamos provar que se $\|r(t)\| = c$, então $r(t) \cdot r'(t) = 0$. De fato,

$$r(t) \cdot r(t) = \|r(t)\|^2 = c^2.$$

Usando a regra do produto, temos que

$$r'(t) \cdot r(t) + r(t) \cdot r'(t) = 0.$$

Como o produto interno é comutativo, segue que

$$2(r(t) \cdot r'(t)) = 0,$$

e portanto

$$r(t) \cdot r'(t) = 0,$$

como queríamos demonstrar.

Uma vez que o vetor $T(t)$ tem norma constante 1, podemos admitir que a derivada do mesmo, $T'(t)$, é normal ao ponto, pois é perpendicular a sua tangente. Devemos, por outro lado, nos ater ao fato que o vetor resultante da derivação do vetor tangente unitário não é, necessariamente, sempre unitário; devemos portanto, estabelecer o **vetor normal unitário** (ou vetor normal principal unitário ou versor normal) como:

$$\boxed{N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}.}$$

Observação: O vetor normal unitário aponta para o lado côncavo da curva C.

No caso em que $r(s)$ é parametrizada pelo comprimento de arco, o procedimento para calcular o vetor unitário simplifica para

$$N(s) = \frac{r''(s)}{\|r''(s)\|}.$$

A tangente e a normal de um ponto estabelecem um plano sob o qual o ponto está inserido, este mesmo plano também possui uma normal. Uma vez que já estabelecemos uma normal ao ponto e que todos os vetores partindo do ponto, que são perpendiculares a sua tangente, são normais do ponto, estabelecemos pois, a sua **binormal**, calculando desta forma:

$$\boxed{B(t) = T(t) \times N(t).}$$

Diferente do caso da normal, o vetor binormal é unitário. De fato, podemos verificar pela fórmula do produto vetorial com referência ao ângulo. O ângulo entre os vetores T e N é reto, o que nos informa que:

$$\|B(t)\| = \|T(t) \times N(t)\| = \|T(t)\|\|N(t)\| \sin(\pi/2) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Dessa forma $\{T(t), N(t), B(t)\}$ é um conjunto de três vetores unitários mutuamente ortogonais. Pode ser mostrado que cada um desses vetores estão relacionado aos outros dois pela regra da mão direita:

$$B = T \times N, \qquad N = B \times T, \qquad T = N \times B$$

Além disso, estes vetores determinam um sistema de coordenadas chamado **triedro TNB** ou **triedro de Frenet**. Tipicamente, o sistema de coordenadas xyz determinado pelos vetores unitários $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ permanece fixo, enquanto que o triedro **TNB** varia à medida que sua origem move-se ao longo da curva C.

Exemplo

3. Determine os vetores tangente unitário, normal unitário e binormal da hélice circular

$$\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + t\vec{k}.$$

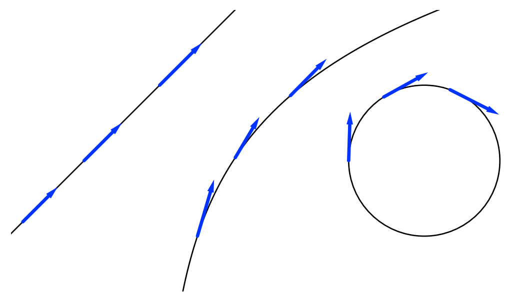
O plano determinado pelos vetores normal e binormal, N e B, em um ponto P sobre a curva C é chamado **plano normal** de C em P. Ele consiste em todas as retas que são ortogonais ao vetor tangente unitário T. O plano estabelecido pelos vetores tangente e normalpor T e N é denominado **plano osculador** de C em P. Para uma curva plana, o plano osculador é aquele que contém a curva.

Exemplo

4. Determine as equações do plano normal e do plano osculador da hélice circular $r(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + t\vec{k}$ no ponto $P(0, 1, \pi/2)$.

Curvatura

Seja C uma curva suave dada pela função vetorial $r(t)$. Podemos ver na figura abaixo que o vetor tangente unitário T não muda de direção quando uma curva é uma reta, muda de direção muito devagar quando a curva C é razoavelmente reta, mas muda de direção mais rapidamente quando a curva C se dobra ou retorce mais acentuadamente.



A **curvatura** de C em um dado ponto é a medida de quão rapidamente a curva muda de direção no ponto.

Seja C uma curva suave paramentrizada por comprimento de arco. A **curvatura** de C fica definida por:

$$\boxed{k(s) = \left\| \frac{dT}{ds} \right\|,}$$

onde T é o vetor tangente unitário.

Usando a Regra da Cadeia, temos que

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{ds}\frac{ds}{dt}.$$

Como $s = \displaystyle\int_a^t \|\vec{r'}(u)\| du$, segue que $\dfrac{ds}{dt} = \|\vec{r'}(t)\|$. Assim,

$$\left\| \frac{dT}{ds} \right\| = \left\| \frac{dT/dt}{ds/dt} \right\| = \frac{\|T'(t)\|}{\|\vec{r'}(t)\|}.$$

Portanto, a curvatura em termos de um parâmentro qualquer t é calculada por

$$\boxed{k(t) = \frac{\|T'(t)\|}{\|r'(t)\|}.}$$

Exemplo

5. Determine a curvatura de uma circunferência de raio "a".

Proposição: Mostre que a curvatura de uma curva dada pela função vedorial $r(t)$ é

$$k(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3}.$$

Demonstração: Como $T = \dfrac{r'}{\|r'\|}$ e $\|r'\| = \dfrac{ds}{dt}$ obtemos

$$r' = \|r'\|T = \frac{ds}{dt}T$$

e pela Regra do Produto segue que

$$r'' = \frac{d^2s}{dt^2}T + \frac{ds}{dt}T'.$$

Calculando,

$$r' \times r'' = \frac{ds}{dt}T \times \left(\frac{d^2s}{dt^2}T + \frac{ds}{dt}T' \right) = \frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}(T \times T) + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 (T \times T') = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 (T \times T'),$$

pois $T \times T = 0$.

Agora, $\|T(t)\| = 1$ para todo t, e então T e T' são ortogonais. Portanto

$$\|r' \times r''\| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \|(T \times T')\| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \|T\|\|T'\| \sin(\pi/2) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \|T'\|.$$

Então

$$\|T'\| = \frac{\|r' \times r''\|}{(ds/dt)^2} = \frac{\|r' \times r''\|}{\|r'\|^2}$$

e

$$k = \frac{\|T'\|}{\|r'\|} = \frac{\|r' \times r''\|}{\|r'\|^3}$$

Exemplo

6. Determine a curvatura da curva dada por $r(t) = (t, t, 1 + t^2)$.

7. A curva da função vetorial $r(t) = (2\cos t, 3\sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ é uma elipse. Determine a curvatura da elipse nos extremos dos eixos maior e menor.

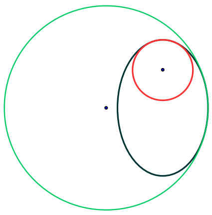
Resposta: A função da curvatura é $k(t) = \dfrac{6}{[4\sin^2 t + 9\cos^2 t]^{3/2}}$. Nos extremos do eixo menor a curvatura é $k(0) = k(\pi) = \frac{2}{9}$, e nos extremos do eixo maior a curvatura é $k(\frac{\pi}{2}) = k(\frac{3\pi}{2}) = \frac{3}{4}$.

Em geral, se uma curva C no plano $\mathbb{R}^2$ tem curvatura k no ponto P, então o círculo de raio $\rho = \dfrac{1}{k}$, tendo em comum uma tangente com C em P e centro no lado côncavo da curva em P, é chamado de **círculo de curvatura** ou **círculo osculador** em P. O círculo osculador e a curva C não somente tocam-se em P, mas têm a mesma curvatura naquele ponto. Neste sentido, o círculo osculador é o que melhor aproxima a curva C próximo de P. O raio ρ de um círculo osculador em P é chamado de **raio de curvatura** em P e o centro do círculo é chamado de **centro de curvatura**

Exemplo

8. Determine e desenhe o círculo osculador da parábola $y = x^2$ na origem.

9. Determine a equação geral do círculo de curvatura da elipse $r(t) = (2\cos t, 3\sin t)$ nos pontos $(2, 0)$ e $(0, 3)$.



Torção

Uma vez que o vetor binormal $B(t)$ é unitário e normal ao plano osculador, $B'(t)$ mede a variação do plano osculador ao longo da curva C.

Derivando $B(t) = T(t) \times N(t)$, temos

$$B'(t) = T'(t) \times N(t) + T(t) \times N'(t). \tag{1}$$

Das equações $k(t) = \dfrac{\|T'(t)\|}{\|r'(t)\|}$ e $N(t) = \dfrac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$, obtemos $T'(t) = k(t)\|r'(t)\|N(t)$. Substituindo $T'(t)$ por $k(t)\|r'(t)\|N(t)$ na equação (1), vemos que o primeiro termo da expressão de $B'(t)$ é nulo. Assim,

$$B'(t) = T(t) \times N'(t).$$

Ou seja, $B'(t)$ é ortogonal a $T(t)$. Mas B(t) é unitário, logo $B'(t)$ também é normal a $B(t)$. Portanto, $B'(t)$ é paralelo a $N(t)$. Isto é, existe uma função $t \longmapsto \tau(t)$ tal que

$$B'(t) = -\tau(t)N(t),$$

$\tau(t)$ é referido como **torção** da curva C no ponto $\vec{r}(t)$.

Multiplicando escalarmente ambos os membros por $N(t)$, obtemos $\tau(t) = -B'(t) \cdot N(t) = -N(t) \cdot B'(t)$. Portanto a torção $\tau(t)$ é dada por

$$\boxed{\tau(t) = -N(t) \cdot B'(t)}$$

Como $\|N\| = 1$ e $B' = -\tau \cdot N$, temos que $\|B'\| = \| -\tau N\| = |-\tau| \| \cdot N\| = |\tau| = \pm\tau$, ou ainda, $\tau = \pm\|B'\|$. Assim, a menos de sinal, a torção é a taxa de variação do vetor binormal.

Exemplo

10. Encontre a torção da hélice circular $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \geq 0$.

Se uma curva $r(t)$ está contida em um plano então sua torção é nula em todos os pontos.
De fato, podemos supor que a curva está parametrizada pelo comprimento de arco. Além disso, vamos supor que a curvatura não seja nula, pois, se a curvatura é nula, então a curva é uma reta. Se a curva está contida em um plano α, então seu plano osculador em qualquer ponto coincide com α. Portanto, o vetor normal ao plano osculador $B(t)$ é constante. Logo, $B'(t) = 0$ e implica que $\tau = 0$.

`http://www.atractor.pt/mat/curvtor`

Fórmulas de Frenet

$$T'(s) = kN \tag{2}$$

$$N'(s) = -kT + \tau N \tag{3}$$

$$B'(s) = -\tau N \tag{4}$$

Demonstração:

A fórmula (2) é obtida da definição do vetor normal unitário, $N = \dfrac{T'}{\|T'\|}$, e da definição da curvatura $k = \|T'\|$.

A fórmula (4) é obtida da definição da torção, $\tau = -N \cdot B'$, multiplicando escalarmente ambos os lados por $-N$ e usando o fato que $N \cdot N = 1$.

Para provar a equação (3) representamos N' como uma combinação linear de T, N e B. Temos,

$$N = aT + bN + cB. \tag{5}$$

Multiplicando escalarmente (5) por N, vem

$$\begin{aligned} N' \cdot N &= aT \cdot N + bN \cdot N + cB \cdot N \\ &= a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 0 \\ &= b. \end{aligned}$$

Lembrando que N' é ortogonal à N, segue que $N' \cdot N = 0$ e assim

$$b = 0.$$

Multiplicando escalarmente (5) por B, vem

$$\begin{aligned} N' \cdot B &= aT \cdot B + bN \cdot B + cB \cdot B \\ &= a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 1 \\ &= c. \end{aligned}$$

Uma vez que $N \cdot B = 0$, derivando obtemos $N' \cdot B = -N \cdot B'$, logo $c = -N \cdot B'$. Lembrando que $\tau = -N \cdot B'$ vem

$$c = \tau.$$

Multiplicando escalarmente (5) por T, temos

$$\begin{aligned} N' \cdot T &= aT \cdot T + bN \cdot T + cB \cdot T \\ &= a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 0 \\ &= a. \end{aligned}$$

Como $N \cdot T = 0$, derivando segue que $N' \cdot T = -N \cdot T'$, assim $a = -N \cdot T'$. Usando a equação (2), obtemos $a = -N \cdot (kN) = -k$, daí

$$a = -k.$$

Portanto,

$$N' = -kT + \tau N.$$

Componentes Tangencial e Normal da Aceleração

Você sabe de sua experiência como passageiro de um automóvel que se a velocidade de um carro aumenta rapidamente, então o seu corpo é jogado para trás contra o encosto do assento. Você também sabe que se o carro percorrer uma curva na estrada, então o seu corpo é jogado na direção para fora da curva - quanto maior a curvatura na estrada, maior será a força com que você é empurrado. A explicação desses fenômenos pode ser entendida resolvendo-se a velocidade e a aceleração em componentes vetoriais que são paralelas aos vetores tangente e normal unitários.

Teorema: *Se uma partícula move-se ao longo de uma curva suave, então em cada ponto sobre a curva os vetores velocidade e aceleração podem ser escritos como*

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}T \tag{6}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2}T + k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 N \tag{7}$$

onde s é um parâmetro comprimento de arco para a curva e T, N e k denotam, respectivamente, o vetor tangente unitário, o vetor normal unitário e a curvatura no ponto.

Demonstração: Seja $r(t)$ a função que descreve o movimento de uma partícula. Vimos que $\vec{v} = \dfrac{dr}{dt}$. Usando a regra da cadeia, obtemos $\vec{v} = \dfrac{dr}{ds} \cdot \dfrac{ds}{dt}$ ou $\vec{v} = \dfrac{ds}{dt}T$.

Para obter a segunda equação, derivamos ambos os lados em relação a t a equação 1 (já provada), disto resulta

$$\begin{aligned} \vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{v}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}T\right) &= \frac{d^2s}{dt^2}T + \frac{ds}{dt}\frac{dT}{dt} \\ &= \frac{d^2s}{dt^2}T + \frac{ds}{dt}\frac{dT}{ds}\frac{ds}{dt} \\ &= \frac{d^2s}{dt^2}T + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{dT}{ds} \\ &= \frac{d^2s}{dt^2}T + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 kN \end{aligned}$$

Portanto, $\vec{a} = \dfrac{d^2s}{dt^2}T + \left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 kN$.

Os coeficientes de T e N em (2) são denotados usualmente por

$$a_T = \frac{d^2s}{dt^2} \quad \text{e} \quad a_N = k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

e, neste caso, a Fórmula (2) é expressa como

$$\vec{a} = a_T T + a_N N$$

Os escalares a_T e a_N são chamados de **componente escalar tangencial da aceleração** e **componente escalar normal da aceleração**, e os vetores $a_T T$ e $a_N N$ sao chamados de **componente vetorial tangencial da aceleração** e **componente vetorial normal da aceleração.**

Os componentes escalares da aceleração explicam o efeito que você experimenta quando um carro arranca rapidamente ou faz uma curva. O crescimento abrupto na rapidez produz grandes valores para d^2s/dt^2, o qual resulta num grande componente escalar tangencial da aceleração; e pela segunda lei de Newton isso produz uma grande força tangencial sobre o carro na direção do movimento. Para entender o efeito de percorrer uma curva, observe que o componente escalar normal da aceleração tem a curvatura k e a rapidez ds/dt como fatores. Assim, curvas acentuadas ou curva feitas com alta rapidez produzem ambas grandes forças normais sobre o carro.

Teorema: *Se uma partícula move-se ao longo de uma curva suave C, então em cada ponto sobre a curva a velocidade $\vec{v}$ e a aceleração $\vec{a}$ estão relacionadas como a_T, a_N e k pelas fórmulas*

$$a_T = \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{\|\vec{v}\|} \qquad a_N = \frac{\|\vec{v}\times\vec{a}\|}{\|\vec{v}\|} \qquad k = \frac{\|\vec{v}\times\vec{a}\|}{\|\vec{v}\|^3}$$

Demonstração: Seja θ o ângulo entre o vetor $\vec{a}$ e o vetor $a_T T$. Assim,

$$a_T = \|\vec{a}\|\cos\theta \quad \text{e} \quad a_N = \|\vec{a}\|\sin\theta$$

de onde obtemos que

$$a_T = \|\vec{a}\|\cos\theta = \frac{\|\vec{v}\|\|\vec{a}\|\cos\theta}{\|\vec{v}\|} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{\|\vec{v}\|}$$

$$a_N = \|\vec{a}\|\sin\theta = \frac{\|\vec{v}\|\|\vec{a}\|\sin\theta}{\|\vec{v}\|} = \frac{\vec{v}\times\vec{a}}{\|\vec{v}\|}$$

$$k = \frac{a_N}{(ds/dt)^2} = \frac{a_N}{\|\vec{}\|^2} = \frac{1}{\|v\|^2}\frac{\vec{v}\times\vec{a}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\vec{v}\times\vec{a}^3}{\|\vec{v}\|}$$

Exemplo

11. Suponha que uma partícula move-se no espaço, de tal forma que o vetor posição no instante t é $r(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$.

(a) Determine os componentes escalares tangencial e normal da aceleração no instante t.

(b) Determine os componentes escalares tangencial e normal da aceleração no instante $t = 1$.

(c) Determine os componentes vetorial tangencial e normal da aceleração no indtante $t = 1$.

(d) Determine a curvatura da trajetória no ponto em que a partícula está no instante $t = 1$.