

*Ensino & Informação*

*Prof. Altamir A. R. Araldi*

*Revista®*

SEGUNDA EDIÇÃO

**CÁLCULO TENSORIAL  
E  
RELATIVIDADE GERAL**

**UMA INTRODUÇÃO**



McGraw-Hill

Marcelo S. Berman  
Fernando M. Gomide

CÁLCULO TENSORIAL  
E RELATIVIDADE GERAL  
– UMA INTRODUÇÃO –

2ª edição

CÁLCULO TENSORIAL  
E RELATIVIDADE GERAL  
– UMA INTRODUÇÃO –  
**2ª edição**

Marcelo S. Berman

Engenheiro de Eletrônica (ITA)  
e Mestre em Ciências (ITA)

Fernando M. Gomide

Membro das "American Association for the Advancement of Science"; "The New York Academy of Science" e da "International Astronomical Union". Prof. Adjunto do Instituto Tecnológico de Aeronáutica (I.T.A.).

McGraw-Hill  
São Paulo  
Rua Tabapuã, 1.105, Itaim-Bibi  
CEP 04533  
(011) 881-8604 e (011) 881-8528

*Rio de Janeiro • Lisboa • Porto • Bogotá • Buenos Aires • Guatemala • Madrid • México •  
New York • Panamá • San Juan • Santiago*

*Auckland • Hamburg • Kuala Lumpur • London • Milan • Montreal • New Delhi • Paris •  
Singapore • Sydney • Tokyo • Toronto*

Cálculo tensorial e relatividade geral – Uma introdução

Copyright ©1987 da Editora McGraw-Hill, Ltda.

Todos os direitos para a língua portuguesa reservados pela Editora McGraw-Hill, Ltda.

Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida, guardada pelo sistema “retrieval” ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, seja este eletrônico, mecânico de fotocópia, de gravação, ou outros, sem prévia autorização, por escrito, da Editora.

*Editor:* Laércio Bento

*Coordenadora de Revisão:* Daisy Pereira Daniel

*Supervisor de Produção:* José Roberto Petroni

**Dados de Catalogação na Publicação (CIP) Internacional  
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)**

B442c Berman, Marcelo S.  
2.ed. Cálculo tensorial e relatividade geral : uma introdução / Marcelo S. Berman,  
Fernando M. Gomide. – 2.ed. - São Paulo ; McGraw-Hill, 1987.

1. Cálculo tensorial 2. Relatividade (Física) - I. Gomide, Fernando M., 1927 -  
II. Título.

CDD-515.63  
-530.11

87-0481

**Índices para catálogo sistemático:**

1. Cálculo tensorial : Matemática 515.63
2. Relatividade : Teoria : Física 530.11
3. Tensores : Cálculo ; Matemática 515.63
4. Teoria da relatividade : Física 530.11

## ÍNDICE

PREFÁCIO.

CAPÍTULO I	-	TENSORES EM ESPAÇOS AMORFOS.	1
		1. Introdução.	1
		2. Vetores e Tensores.	2
		3. Operações Algébricas com Tensores.	9
		4. Observações Finais.	13
CAPÍTULO II	-	TENSORES EM ESPAÇOS DE RIEMANN.	18
		1. Métrica.	18
		2. Símbolos de Christoffel.	21
		3. Derivada Covariante.	23
		4. Tensor de Curvatura.	27
CAPÍTULO III	-	FUNDAMENTOS DA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL.	32
		1. Os Princípios Básicos.	32
		2. O Tensor Energia-Momento.	
		3. Tensor Energia-Momento para um Cam po Eletromagnético.	37
		4. As Equações de Campo da Relativida de Geral.	39
		5. Redução das Equações de Einstein à Física Newtoniana.	43
		6. Obtenção da Equação das Geodésicas.	49

CAPÍTULO IV	-	A MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD E OS TESTES EXPERIMENTAIS.	52
		1. Métricas com Simetria Esférica.	52
		2. Avanço do Perihélio dos Planetas.	60
		3. Deflexão da Luz no Campo Gravitacio <u>o</u> nal.	68
		4. Deslocamento Espectral de Origem Gravitacional.	72
		5. Outras Verificações Experimentais.	74
APÊNDICE I	-	COMPLEMENTOS DE CÁLCULO TENSORIAL.	76
		1. Transformações Ortogonais e Tensores Cartesianos.	76
		2. Transporte Paralelo no Espaço de Riemann.	79
		3. Transporte de Fermi-Walker.	82
		4. Derivadas de Lie.	83
APÊNDICE II	-	COMPLEMENTOS DE RELATIVIDADE GERAL.	89
		1. Isometrias.	89
		2. Campos Estacionários e Estáticos.	91
		3. A Solução Interior de Schwarzschild.	94



## PREFÁCIO DA 1ª EDIÇÃO

Este livro destina-se a introduzir alunos dos cursos de Matemática e Física das universidades brasileiras ao Cálculo Tensorial, Geometria de Riemann, e à Teoria da Relatividade Geral. Com exceção da seção III.3, todos os quatro capítulos podem ser lidos por estudantes que tenham cursado Física Geral e Cálculo Avançado, sem maiores dificuldades.

Estudantes de astrofísica que precisam estudar buracos negros, ondas gravitacionais e estrelas compactas, além de cosmologia, vêm-se frequentemente diante da alternativa de fugir ao estudo da Teoria da Relatividade Geral, e se contentar com resultados apresentados sem demonstração, ou enfrentar compêndios volumosos sobre o assunto, com perda enorme de tempo.

A estes dois grupos de estudantes dirigimos nossa obra. Ela provém da experiência adquirida por um de nós (F.M.G.) nas aulas que ministrou no curso de pós-graduação do ITA, e pelo outro autor (M.S.B.), nas aulas dadas no curso de pós-graduação da UNITAU e no curso de Cálculo Tensorial que ofereceu para professores da FEJ (Faculdade de Engenharia de Joinville), em 1985.

Os quatro capítulos que compõem este livro permitem uma introdução aos fundamentos teóricos da Relatividade Geral e sua ferramenta matemática. Nos dois apêndices, são abordados assuntos complementares, os quais podem ser dispensados numa pri

meira leitura. Procuramos fornecer elementos operacionais da teoria, e, portanto, não introduzimos as "formas diferenciais", de tanta utilidade nas abordagens mais avançadas.

Se este livro despretensioso servir para levar alguns leitores a buscarem aperfeiçoar os conhecimentos adquiridos, ou permitir a leitura proveitosa de textos mais completos, e se o leitor se impregnar de admiração pela obra do cientista Albert Einstein, os autores se sentirão recompensados pelo seu esforço.

"Last, but not least", os autores expressam seu agradecimento à Srt<sup>a</sup> Luzia Galvão de Faria, pela datilografia deste trabalho.

Marcelo S. Berman.

Fernando de Mello Gomide.

Março de 1986.



## PREFÁCIO DA 2ª EDIÇÃO

Dada a grande acolhida que a 1ª edição mereceu por parte de colegas e alunos, esgotando-a em poucos meses, é com prazer que vemos o surgimento desta 2ª edição. O texto está inalterado, porém alguns deslizes tipográficos foram corrigidos.

Recomendamos aos leitores o estudo posterior de nosso outro livro, intitulado "INTRODUÇÃO À COSMOLOGIA RELATIVÍSTICA", onde são aplicados os conhecimentos teóricos apresentados nesta obra.

Marcelo S. Berman

Fernando de Mello Gomide

Curitiba e São José dos Campos

Março de 1987.

#### BIBLIOGRAFIA

- Adler, R., Bazin, M. e Shiffer, M. (1975) - "Introduction to General Relativity", McGraw-Hill, 2<sup>a</sup> edição.
- Carmeli, M. (1982) - "Classical Fields", Wiley.
- Choquet-Bruhat, Y, De Witt-Morette, C, e Dillard-Bleick, M. (1982) - "Analysis, Manifolds and Physics", North Holland, edição revista.
- Einstein, A. (1956) - "The Meaning of Relativity", Princeton U.P., 5<sup>a</sup> edição.
- Eisenhart, L.P. (1925) - "Riemannian Geometry", Princeton U.P.
- Lawden, D.F. (1983) - "An Introduction to Tensor Calculus, Relativity and Cosmology", Wiley, 3<sup>a</sup> edição.
- McVittie, G.C. (1965) - "General Relativity and Cosmology"  
Chapman and Hall Ltd.
- Misner, C.W., Thorne, K.S., e Wheeler, J.A. (1973) - "Gravitation  
Freeman.
- Synge, J.L. (1965) - "Relativity - The Special Theory", North Holland, 2<sup>a</sup> edição.
- Synge, J.L. (1960) - "Relativity - The General Theory", North Holland.
- Synge, J.L., e Schild, A. (1978) - "Tensor Calculus", Dover.
- Weinberg, S. (1972) - "Gravitation and Cosmology", Wiley.

### SOBRE O LIVRO

“Cálculo Tensorial e Relatividade Geral: Uma Introdução” é um texto de Física Matemática que introduz os dois assuntos, de que trata o título, para físicos, astrofísicos e matemáticos, que desejem conhecer os fundamentos destes assuntos, considerados hoje em dia essenciais para uma boa formação profissional.

O Cálculo Tensorial permite o estudo matemático de teorias, através de uma notação compacta e covariante. A Relatividade Geral é a teoria de Einstein de Gravitação, que se constitui hoje num dos pilares sobre os quais repousa a Física Moderna.

\*\*\*

### SOBRE OS AUTORES

O Professor **Fernando de Mello Gomide** é membro da “New York Academy of Science”, da “American Association for the Advancement of Science”, e da “International Astronomical Union”. Integra, como Professor Adjunto, a equipe do Departamento de Física do ITA (Instituto Tecnológico de Aeronáutica) de São José dos Campos, São Paulo, onde chefia o grupo de Cosmologia e leciona no Curso de Pós-Graduação. É autor de inúmeros artigos na área de Relatividade e Cosmologia, publicados no Brasil e no Exterior.

**Marcelo Samuel Berman** é engenheiro de eletrônica e Mestre em Ciências, pelo ITA, onde estudou sob orientação do Prof. F. M. Gomide. É autor de artigo, onde propõe uma nova lei para a Cosmologia Relativística, publicado na Europa (Nuovo Cimento, vol. 74 B, N. 2, pág. 182 – 186, 1983). Membro do IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers).

0-07-450058-9

