A demonstração desse teorema é simples e fica a cargo do leitor. Basta substituir o contorno C por contornos envolvendo cada zero e cada pólo isoladamente (Exerc. 2 adiante).

Observe que $f'(z)/f(z) = (\log f(z))'$, onde tomamos qualquer ramo do logaritmo. (Lembramos que diferentes ramos têm a mesma derivada, já que eles diferem entre si por valores constantes.) Em vista disso, podemos escrever:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}[\log f(z)]_C,$$

ou seja, a integral é igual à variação de $\log f(z)$ ao longo do contorno C. Acontece que essa variação só afeta a parte imaginária do logaritmo, pois a parte real $\log|f(z)|$ volta ao valor inicial uma vez completado o percurso C. Em conseqüência, denotando com $\Delta_C \arg f(z)$ a variação sofrida pelo argumento de $f(z)$ ao longo do contorno C, obtemos o chamado *princípio do argumento*:

$$Z - P = \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z).$$

O princípio do argumento tem uma interessante interpretação geométrica. Suponhamos que C só contenha em seu interior um zero z_0 de ordem r e nenhum pólo. Então, quando z percorre o contorno C no sentido positivo, o ponto $w = f(z)$ percorrerá um contorno C' envolvendo r vezes a origem no plano w (Fig. 5.7). E se z_0 for um pólo de ordem s em vez de zero, $w = f(z)$ percorrerá o contorno C' envolvendo r vezes a origem do plano w no sentido negativo.

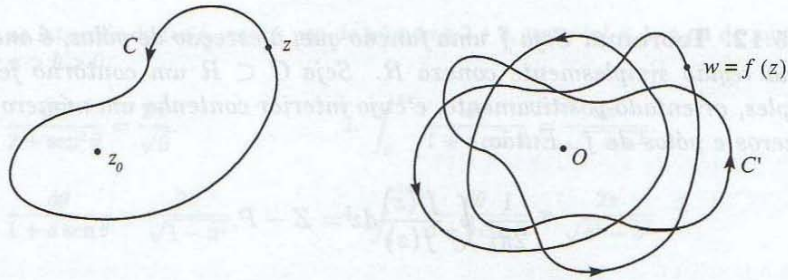


Fig. 5.7

O teorema seguinte é uma aplicação interessante do princípio do argu-

mento.

5.13. Teorema (de Rouché.) *Sejam f e g funções analíticas numa região simplesmente conexa R. Seja $C \subset R$ um contorno fechado simples, orientado positivamente e tal que $|f(z)| > |g(z)|$ nos pontos de C. Então $f(z)$ e $f(z) + g(z)$ têm o mesmo número de zeros no interior de C.*

Demonstração. Por causa da hipótese $|f(z)| > |g(z)|$, $f(z)$ não se anula sobre C. Em conseqüência, podemos escrever:

$$\begin{aligned}\Delta_C \arg[f(z) + g(z)] &= \Delta_C \arg\left[f(z)\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right)\right] \\ &= \Delta_C \arg f(z) + \Delta_C \arg\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right).\end{aligned}$$

Observe agora que o ponto $w = 1 + f(z)/g(z)$ não pode circundar a origem no plano w, pois $|w - 1| = |f(z)/g(z)| < 1$. Portanto,

$$\Delta_C \arg\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right) = 0,$$

donde segue-se que,

$$\Delta_C \arg[f(z) + g(z)] = \Delta_C \arg f(z).$$

Daqui e do princípio do argumento segue o resultado desejado.

O teorema de Rouché permite fazer uma demonstração muito elegante do Teorema Fundamental da Álgebra, do qual consideramos uma versão na p. 107.

5.14. Teorema Fundamental da Álgebra. *Todo polinômio de grau $n > 0$ tem exatamente n raízes, contadas as multiplicidades.*

Demonstração. Seja

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

um polinômio qualquer de grau $n > 0$, de sorte que $a_n \neq 0$. Pondo

$$f(z) = a_n z^n, \quad g(z) = a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

e $|z| = R$, teremos:

$$\lim_{R\to\infty}\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| \geq \lim_{R\to\infty}\frac{|a_n|R^n}{|a_{n-1}|R^{n-1}+\ldots+|a_1|R+|a_0|} = \infty,$$

donde se vê que existe R tal que $|f(z)| > |g(z)|$ para $|z| = R$. Daqui e do teorema de Rouché concluímos que $f(z)$ e $f(z)+g(z) = P(z)$ têm o mesmo número de zeros, isto é, exatamente n, que é o número de zeros de $f(z)$, como queríamos demonstrar.

EXERCÍCIOS

1. Prove que o resíduo logarítmico de uma função f num ponto que seja pólo de ordem r da função é igual à ordem s desse pólo.

2. Demonstre o Teorema 5.12.

Capítulo 6

CONTINUAÇÃO ANALÍTICA

Sabemos que a série

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

tem raio de convergência 1, e, portanto, define uma função analítica no disco $|z| < 1$. Sabemos também que essa série tem por soma a função $g(z) = 1/(1-z)$, a qual, por sua vez, está definida em todo o plano complexo, exceto em $z = 1$. Então, a função g é uma extensão da função f; mais do que isso, é uma "extensão analítica". Isto é importante, pois, embora uma função possa ter muitas extensões diferentes, essa extensão é única quando preserva a analiticidade, como nos garante o teorema seguinte.

6.1. Teorema (de unicidade da extensão analítica). *Sejam f e g funções analíticas numa mesma região R, que coincidem numa vizinhança de um ponto $z_0 \in R$, ou apenas num conjunto de pontos tendo ponto de acumulação $z_0 \in R$. Então f e g são idênticas, isto é, coincidem em toda a região R.*

Para a demonstração deste teorema, necessitamos do seguinte lema de topologia métrica.

6.2. Lema. *A distância entre dois conjuntos fechados e disjuntos, um dos quais limitado, é positiva.*

Demonstração. Sejam X e Y conjuntos fechados e disjuntos, sendo X limitado. A distância entre eles, $d(X, Y)$, é definida como sendo o ínfimo das distâncias $d(x, y) = |x-y|$, x variando em X e y variando em Y. É claro que $d(X, Y) \geq 0$. Vamos provar que $d(X, Y) > 0$. Se fosse $d(X, Y) = 0$,

haveria duas seqüências, $x_n \in X$ e $y_n \in Y$, tais que $|x_n - y_n| \to 0$. Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, x_n possuiria uma subseqüência convergindo para um ponto $x_0 \in X$, a qual continuamos a indicar com a mesma notação x_n. Em correspondência a x_n, haveria também uma subseqüência de y_n (que continuamos a denotar por y_n), a qual, por ser equivalente a x_n, seria convergente para um certo y_0, que pertenceria a Y, já que Y é fechado. Em conseqüência, $|x_0 - y_0| = 0$, donde $x_0 = y_0$. Mas isto contradiz a hipótese de que X e Y são disjuntos e completa a demonstração.

Demonstração do teorema. Seja z um ponto qualquer da região R. Vamos provar que f e g coincidem em z. Pela hipótese, f e g possuem a mesma série de Taylor numa vizinhança de z_0 (veja o Teorema 4.15 na p. 136). Se z pertence a essa vizinhança, o teorema está demonstrado.

Se z estiver fora da referida vizinhança, conectamos z_0 a z por meio de um arco C todo contido em R e denotamos com δ a distância de C à fronteira de R. Como essa fronteira e C são conjuntos fechados, e C é limitado, $\delta > 0$. Tomamos, sobre C, a partir de z_0, os pontos $z_1, z_2, \ldots, z_n = z$, tais que $|z_0 - z_1| < \delta$, $|z_1 - z_2| < \delta, \ldots, |z_{n-1} - z| < \delta$. Então, $z_j \in V_\delta(z_{j-1})$, $j = 1, \ldots, n$ (Fig. 6.1). Como f e g coincidem em $V_\delta(z_0)$, e $z_1 \in V_\delta(z_0)$, as séries de Taylor de f e g coincidem em $V_\delta(z_1)$. Como $z_2 \in V_\delta(z_1)$, as séries de Taylor de f e g coincidem em $V_\delta(z_2)$; e assim por diante, até concluirmos que as séries de Taylor de f e g coincidem em $V_\delta(z_n)$, portanto f e g coincidem em $z_n = z$, como queríamos provar.

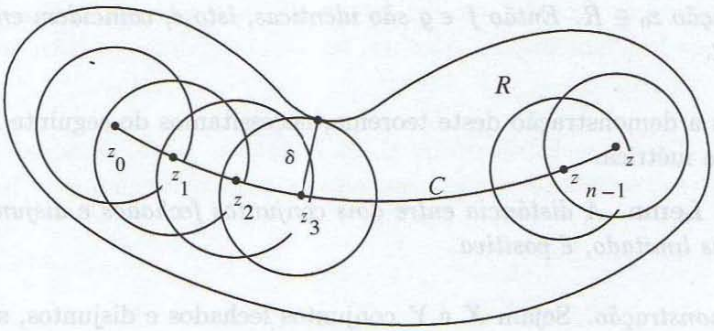


Fig. 6.1

O teorema de unicidade que acabamos de demonstrar leva naturalmente

à definição de "continuação analítica" que damos a seguir.

6.3. Definição. *Sejam R uma região e E um subconjunto de R com um ponto de acumulação em R. Seja f uma função definida em E, possuindo uma extensão analítica g na região R. Diz-se, então, que g é continuação analítica de f em R; ou ainda, prolongamento analítico.*

O requisito de que E tenha um ponto de acumulação em R é feito justamente para garantir a unicidade da extensão g, de acordo com o Teorema 6.1. Com efeito, pode acontecer que duas funções analíticas distintas coincidam numa infinidade de pontos que se acumulam num ponto $z_0 \notin R$. (Veja o Exerc. 1 adiante.)

Primeiras conseqüências. Permanência das relações funcionais

O teorema de unicidade garante que se uma função já é analítica numa região, e tem continuação analítica numa região maior, então essa continuação analítica é única; e garante também que uma função analítica numa certa região R fica completamente determinada pelo conhecimento da função apenas numa vizinhança de um ponto de R, num pequeno arco ou mesmo apenas num conjunto de pontos que tenha ponto de acumulação pertencente a R.

Consideremos concretamente o caso da função exponencial, inicialmente definida no eixo real. No Capítulo 2 estendemos essa função a todo o plano complexo, utilizando a fórmula

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y);$$

e dessa maneira obtivemos uma função analítica. Poderíamos ter utilizado outros meios; por exemplo, a série de potências

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

também define uma função analítica em todo o plano, extensão da exponencial real. Em vista do teorema de unicidade, as duas extensões aqui

consideradas são idênticas. Essa mesma observação é válida para todas as funções reais que estendemos ao plano complexo, como o logaritmo e as funções trigonométricas.

O teorema de unicidade permite estender ao plano complexo, ou a regiões do plano complexo, várias identidades que já tenham sido estabelecidas no eixo real, ou em subconjuntos do eixo real. Tomemos um exemplo simples, a identidade

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1,$$

que é válida para x real. Podemos afirmar que, para todo z complexo,

$$\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1.$$

Com efeito, $F(z) = \cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z$ é continuação analítica a todo o plano complexo da função real $f(x) = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x$. Mas acontece que $f(x)$ é constantemente igual a 1; portanto, sua continuação analítica também tem de ser a constante 1.

O mesmo raciocínio aqui utilizado permite demonstrar a permanência de certas relações funcionais. O mais simples é o caso polinomial. Assim, *suponhamos que as funções reais $f_1, \ldots, f_n$ estejam definidas num intervalo do eixo real, aí satisfazendo uma identidade do tipo*

$$P(f_1(x), \ldots, f_n(x)) = 0,$$

onde P é um polinômio em n variáveis. Supondo ainda que essas funções tenham continuações analíticas a uma mesma região R do plano complexo, podemos afirmar que

$$P(f_1(z), \ldots, f_n(z)) = 0$$

nessa região.

É exatamente esse o caso exemplificado anteriormente, da identidade trigonométrica $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$, onde $f_1(z) = \cos z$, $f_2(z) = \operatorname{sen} z$ e $P(f_1, f_2) = f_1^2 + f_2^2 - 1$.

O mesmo raciocínio pode ser aplicado a situações mais gerais que polinômios. A título de ilustração, vamos provar que

$$\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \operatorname{sen} z_2.$$

Para isso, lembramos que essa identidade é verdadeira quando z_1 e z_2 são números reais, isto é, sabemos que, sendo x e b números reais quaisquer,

então

$$\operatorname{sen}(x+b) = \operatorname{sen} x \cos b + \cos x \operatorname{sen} b.$$

Por continuação analítica,

$$\operatorname{sen}(z+b) = \operatorname{sen} z \cos b + \cos z \operatorname{sen} b$$

quaisquer que sejam b real e z complexo. Com efeito, o primeiro membro desta última igualdade é continuação analítica do primeiro membro da identidade anterior, o mesmo acontecendo com os segundos membros. Em seguida faz-se $z = z_1$, $b = x$, e nova continuação analítica leva x a z_2, completando a demonstração.

Esse mesmo raciocínio pode ser aplicado a todas as identidades estabelecidas no Capítulo 2, pp. 64 e seguintes.

Continuação analítica por reflexão

As funções que assumem valores reais para valores reais da variável independente, como

$$z^2 - 3z, \quad \cos z, \quad e^z \quad \text{etc.},$$

são tais que seus valores se refletem no eixo real quando z é assim refletido, isto é: $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$. Isto já não é verdade no caso de funções que não são reais para valores reais de z, como

$$z^2 - 3iz, \quad i\cos z, \quad e^{iz} \quad \text{etc.}$$

Essa propriedade é a versão mais simples do chamado *princípio de reflexão*, que vamos considerar agora.

6.4. Teorema (princípio de reflexão). *Seja f uma função analítica numa região R que intersecta o eixo real e tal que $z \in R \Leftrightarrow \overline{z} \in R$. Suponhamos ainda que $f(z)$ seja real para z real. Então $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ para todo $z \in R$.*

Demonstração. Seja x_0 um ponto qualquer de R que seja real. Então,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - x_0)^n,$$

para todo z numa vizinhança conveniente de x_0, digamos, $V_\delta(x_0)$. Os coeficientes a_n são todos reais, pois

$$a_0 = f(x_0),\ a_1 = f'(x_0),\ a_2 = \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} \ldots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \ldots,$$

e todas as derivadas $f^{(n)}(x_0)$ que aí aparecem podem ser calculadas considerando z real. Em conseqüência, $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$, ou seja, a função

$$F(z) = f(z) - \overline{f(\overline{z})}$$

que é analítica em R (veja o Exerc. 9 adiante), se anula em $V_\delta(x_0)$; portanto, se anula identicamente em R por continuação analítica. Isto completa a demonstração do teorema.

O teorema anterior permite continuar analiticamente uma função f, dada inicialmente numa região R contida no semiplano superior $\operatorname{Im} z > 0$ ou no semiplano inferior $\operatorname{Im} z < 0$, desde que $\overline{R}$ contenha um conjunto I do eixo real, que seja aberto como subconjunto da reta, e f seja contínua e real em $R \cup I$. Para isso, sendo R^* o refletido de R no eixo real, basta definir f para $z \in R^*$ mediante $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$ (observe que $\overline{z} \in R$) para que f se estenda analiticamente a R^*.

O procedimento que acabamos de descrever é conhecido como o *princípio de reflexão de Riemann-Schwarz*. Para demonstrar sua validade, vamos supor que R esteja contido no semiplano superior $\operatorname{Im} z > 0$. (O raciocínio é inteiramente análogo caso R esteja no semiplano inferior $\operatorname{Im} z < 0$.) Seja C um disco (aberto) centrado em algum ponto de I, e tal que, juntamente com sua fronteira Γ, esteja todo contido em $R \cup R^* \cup I$. Pelo Teorema 3.17 (p. 105), a função

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

é analítica no interior de C. Vamos mostrar que ela coincide com $f(z)$ nesse disco. Isto implicará o resultado desejado, como se vê facilmente.

Sejam γ a interseção de C com I (Fig. 6.2a), Γ^+ a parte de Γ no semiplano superior e Γ^- a parte de Γ no semiplano inferior. Então, para $z \notin I$, podemos escrever:

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+ \cup \gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^- \cup (-\gamma)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

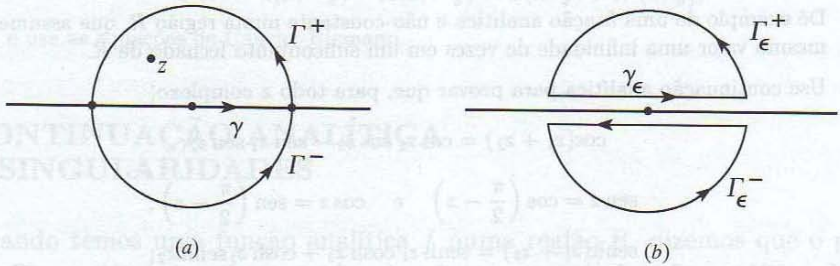


Fig. 6.2

Notamos, em seguida, pela fórmula integral de Cauchy, que, se z estiver no semiplano superior, a primeira integral será igual a $f(z)$ (veja também o parágrafo seguinte), enquanto a segunda será nula; e se z estiver no semiplano inferior, a primeira integral será nula, enquanto a segunda será igual a $f(z)$. E, por continuidade, $g(z)$ coincide com $f(z)$ também em I.

Na verdade, estamos usando a fórmula integral de Cauchy nas integrações em $\Gamma^+ \cup \gamma$ e em $\Gamma^- \cup (-\gamma)$, o que, a rigor, exigiria saber, de antemão, que f é analítica em γ. Mas isto pode ser facilmente contornado, assim: seja Γ_ε a parte de Γ no semiplano $\operatorname{Im} z \geq \varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$ é tomado suficientemente pequeno. Em seguida fechamos o contorno Γ_ε com o segmento horizontal $\gamma_\varepsilon = \gamma + i\varepsilon$ (Fig. 6.2b). No contorno $\Gamma_\varepsilon \cup \gamma_\varepsilon$ podemos aplicar a fórmula integral de Cauchy, após o que passamos ao limite com $\varepsilon \to 0$; isto é possível pela continuidade do integrando num conjunto compacto. O mesmo raciocício pode ser feito na integração sobre $\Gamma \cup (-\gamma)$.

EXERCÍCIOS

1. Construa um exemplo com duas funções analíticas distintas, f e g, definidas na mesma região R, e coincidindo numa seqüência infinita de pontos distintos z_n que converge para um ponto fora de R.
2. Mostre que uma função analítica numa região R não pode assumir o mesmo valor num conjunto de pontos com ponto de acumulação em R, sob pena de ser constante.
3. Seja f uma função analítica e não-constante numa região R, e seja F um subconjunto fechado e limitado de R. Prove que só pode haver um número finito de pontos de F onde f assume o mesmo valor. Prove, em particular, que se f é uma função não-constante e regular num ponto z_0, então existe $\delta > 0$ tal que $f(z) \neq f(z_0)$ para todo

$z \in V'_\delta(z_0)$. (Observe que esta propriedade segue também do Corolário 3.23 da p. 114.)

4. Dê exemplo de uma função analítica e não-constante numa região R, que assume um mesmo valor uma infinidade de vezes em um subconjunto fechado de R.

5. Use continuação analítica para provar que, para todo z complexo,

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2;$$

$$\operatorname{sen} z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) \quad \text{e} \quad \cos z = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - z\right);$$

$$\operatorname{senh}(z_1 + z_2) = \operatorname{senh} z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \operatorname{senh} z_2;$$

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \operatorname{senh} z_1 \operatorname{senh} z_2.$$

6. A série $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^{3n}$ define uma função analítica no disco $|z| < 1$. Obtenha sua continuação analítica a todo o plano e mostre que ela é regular e nula no infinito, que ela possui apenas três singularidades do tipo pólo, e localize esses pólos.

7. Faça o mesmo para $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{5n}$.

8. Determine a continuação analítica a todo o plano da função

$$f(x) = \int_0^\infty te^{-tx}\,dt, \quad x > 0.$$

Mostre que ela é regular no infinito e localize sua única singularidade.

9. Com a mesma notação usada na demonstração do Teorema 6.4, prove que a função $F(z) = \overline{f(\overline{z})}$ é analítica em R.

10. Prove a recíproca do Teorema 6.4, isto é, que, se $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ para todo $z \in R$, então $f(z)$ é real para z real em R.

11. Considere a função $w = \sqrt{z} = re^{i\theta/2}$, com as restrições $r > 0$ e $0 < \theta < \pi$. Explique como continuá-la analiticamente ao 4º quadrante através do semi-eixo positivo Ox; e ao 3º quadrante através do semi-eixo negativo Ox.

12. Repita o exercício anterior com a função $w = \log z$ $0 < \arg z < \pi$.

RESPOSTAS E SUGESTÕES

1. $f(z) = \operatorname{sen}(1/z)$ e $g(z)$ identicamente nula coincidem numa seqüência infinita de pontos tendendo a zero. Isso é possível porque zero não pertence ao domínio de analiticidade da primeira função.

9. Escreva $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, donde

$$F(z) = u(x, -y) - iv(x, -y) = U(x, y) + iV(x, y),$$

e use as equações de Cauchy-Riemann.

CONTINUAÇÃO ANALÍTICA E SINGULARIDADES

Quando temos uma função analítica f numa região R, dizemos que o par (f, R) constitui um *elemento funcional* ou *germe de função analítica*. Isso porque é concebível que se possa estender f analiticamente a uma região maior, englobando R; e, de acordo com o teorema da unicidade da continuação analítica, o elemento funcional (f, R) determinará completamente essa continuação analítica, constituindo-se, pois, num "germe" da função analítica estendida. Aliás, basta a série de Taylor de f relativa a um ponto z_0 de R para que a continuação analítica de f fique completamente determinada.

Comecemos com um exemplo concreto, retomando as funções consideradas no início do capítulo,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{e} \quad g(z) = \frac{1}{1-z}. \tag{6.1}$$

A primeira, embora definida apenas no disco $|z| < 1$, tem soma facilmente identificável, que é a função $g(z)$. Em conseqüência, g é a continuação analítica de f a todo o plano, excetuado o ponto $z = 0$, que é pólo simples.

Mas em geral não é assim, pois a função pode ser dada inicialmente por uma série cuja soma não seja conhecida, por uma integral ou outro recurso qualquer; e o problema que se apresenta é o de saber se ela tem continuação analítica e como obter essa continuação. Por exemplo, não sabemos como obter a soma da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{3^n + 1} z^n$$

em forma simples, como em (6.1), ou, como se diz, em "forma fechada". Mas sabemos que seu raio de convergência é 3, de forma que ela define uma função analítica no disco $|z| < 3$. Como, então, continuá-la analiticamente? Se é que ela tem continuação analítica.

Para descrever um procedimento de caráter geral, é conveniente primeiro introduzir a noção de continuação analítica de elementos funcionais.

6.5. Definição. *Sejam (f_1, R_1) e (f_2, R_2) dois elementos funcionais tais que $R_1 \cap R_2 \neq \phi$ e $f_1(z) = f_2(z)$ para $z \in R_1 \cap R_2$. Diz-se então que cada um dos elementos funcionais (f_1, R_1) e (f_2, R_2) é a continuação analítica direta do outro.*

Quando (f_1, R_1) e (f_2, R_2) são a continuação analítica direta um do outro, a função f, definida por

$$f(z) = f_1(z) \text{ em } R_1 \quad \text{e} \quad f(z) = f_2(z) \text{ em } R_2,$$

é a continuação analítica, tanto de f_1 como de f_2, à região $R_1 \cup R_2$.

Em geral, os elementos funcionais de que falamos aqui são séries de potências associadas a seus discos de convergência. Assim, para continuar analiticamente uma função f, consideremos um certo caminho L, que se origine num ponto da região R, onde f é dada inicialmente. Observe que (f, R) é o elemento funcional de onde partimos. Desenvolvemos f em série de potências f_1 relativamente a outro ponto $z_1 \in L$, que esteja também em R, na expectativa de que o disco de convergência R_1 desta série tenha uma parte fora de R. (f_1, R_1) é um novo elemento funcional, a partir do qual construímos outro elemento (f_2, R_2), centrado num ponto $z_2 \in R_1 \cap L$; e assim por diante. Dizemos que estamos continuando analiticamente a função f ao longo do caminho L, ou que se trata de uma *continuação analítica ao longo do caminho L*. Vejamos um exemplo concreto.

6.6. Exemplo. Retomemos a função f dada pela série em (6.1). Seja z_1 um ponto qualquer de seu disco de convergência $|z| < 1$, denotado por R, e seja f_1 a função dada pela série de Taylor de f relativa ao ponto z_1:

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_1^{(n)}(z_1)}{n!}(z - z_1)^n, \quad \text{onde } f_1^{(n)}(z_1) = \frac{n!}{(1 - z_1)^{n+1}}.$$

O raio de convergência desta série, como se calcula prontamente, é $|1 - z_1|$. Seja R_1 o disco de convergência $|z - z_1| < |1 - z_1|$. Assim, os elementos funcionais (f, R) e (f_1, R_1) são continuação analítica direta um do outro.

Caso $0 \leq z_1 < 1$, $|1 - z_1| = 1 - z_1$ e $R_1 \subset R$ (Fig. 6.3a); neste caso, f_1 é uma restrição de f e em nada ajuda para continuar f analiticamente. Mas, em qualquer outra situação (Fig. 6.3b), $|1 - z_1| > 1 - |z_1|$, e o disco de convergência R_1 conterá pontos fora de R; portanto, neste caso, f_1 efetua uma continuação analítica de f fora do disco original R. Observe que, em ambos os casos, a fronteira de R_1 passa pelo ponto $z = 1$, que é, como já sabemos, um pólo simples da continuação analítica de f a todo o plano.

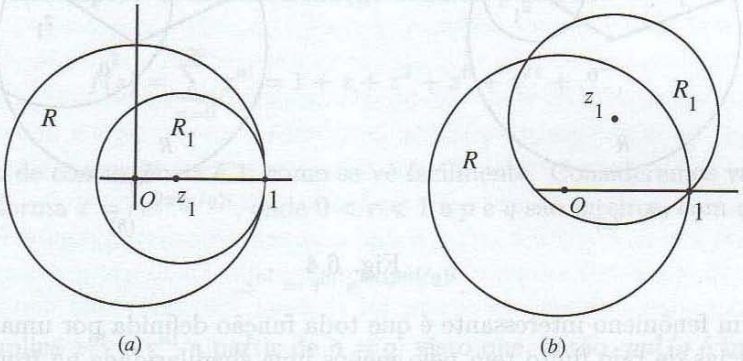


Fig. 6.3

Singularidades

Consideremos uma função f, definida por uma série de potências relativa a um ponto z_0, centro de seu disco de convergência R. Sejam r o raio desse disco (que supomos finito e não-nulo), ζ um ponto da fronteira de R e z_1 um ponto qualquer do segmento aberto $z_0\zeta$ (Fig. 6.4). Consideremos a série de Taylor da função f relativa ao centro z_1. Com isso estamos procurando continuar f analiticamente ao longo do raio $z_0\zeta$.

Esta última série terá raio de convergência pelo menos igual à distância $|\zeta - z_1|$ de z_1 a ζ (Fig. 6.4a). Mas o raio pode superar esse valor, caso em que a série realmente continua f analiticamente além de seu domínio original de definição (Fig. 6.4b).

Se o raio da série for exatamente $|\zeta - z_1|$, como ilustra a Fig. 6.4a, então a série não nos proporcionará continuação alguma. Neste caso, dizemos que ζ é uma *singularidade* da função f. Um caso como este ocorreu no Exem-

plo 6.6, onde a função considerada não tinha continuação analítica ao longo do raio que vai da origem ao ponto 1. Este ponto era uma singularidade da função, fato este já sabido anteriormente pelo conhecimento da soma da série.

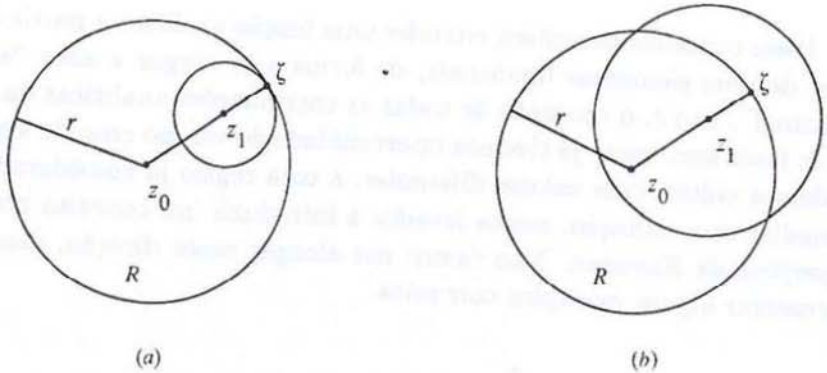


Fig. 6.4

Um fenômeno interessante é que toda função definida por uma série de potências de raio finito tem pelo menos uma singularidade na fronteira de seu disco de convergência. É o que veremos a seguir.

6.7. Teorema. *Seja f uma função definida por uma série de potências relativa a um ponto z_0, centro de seu disco de convergência C, de raio R, que supomos finito e não-nulo. Então f tem pelo menos uma singularidade na fronteira F de C.*

Demonstração. Suponhamos que f possa ser continuada analiticamente ao longo de qualquer raio $z_0\zeta$, ζ variando na fronteira F de C. Então f pode ser desenvolvida em séries de Taylor em discos C_ζ (abertos) centrados em ζ. Assim, f prolonga-se analiticamente, de forma que seu domínio original C fica aumentado da união U de todos esses discos C_ζ. (Observe que os valores das diferentes continuações de f nos discos C_ζ coincidem nas interseções desses discos.) Seja G a fronteira de U. Ora, F e G são disjuntos, pois $F \subset U$ e U é aberto, de sorte que $U \cap G = \phi$. Então, a distância δ de F a U é positiva (cf. Lema 6.2). Assim, f estará sendo continuada analiticamente a todo um conjunto $C \cup U$ que contém um disco centrado

em z_0, de raio $R+\delta$. Em conseqüência, o raio de convergência da série de potências de f relativamente a z_0 deveria ser $R+\delta$ e não R. Isto contradiz a hipótese do teorema e completa a demonstração.

Vamos dar exemplo de uma função em que todos os pontos da fronteira de seu disco de convergência são singularidades. A função não é continuável além dessa fronteira, a qual é chamada *fronteira natural da função.*

6.8. Exemplo. Considere a função definida pela série

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}=1+z+z^2+z^6+z^{24}+\ldots,$$

cujo raio de convergência é 1, como se vê facilmente. Consideremos valores de z da forma $z=re^{2\pi(p/q)i}$, onde $0<r<1$ e p e q são inteiros, com $q>0$. Então,

$$z^{n!}=r^{n!}e^{2\pi(pn!/q)i},$$

o que implica $z^{n!}=r^{n!}$ a partir de $n=q$, visto que, então, $pn!/q$ é inteiro. Em conseqüência,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{q-1} z^{n!}+\sum_{n=q}^{\infty} r^{n!},$$

donde obtemos, sendo $N>2q$ um número inteiro qualquer:

$$|f(z)|\geq\sum_{n=q}^{\infty} r^{n!}-\sum_{n=0}^{q-1} r^{n!}>\sum_{n=q}^{N} r^{n!}-q>(N-q+1)r^{N!}-q.$$

Ora, esta última expressão tende a $N+1-2q$ com $r\to 1$. Como N pode ser tomado arbitrariamente grande, isso prova que $|f(z)|$ tende a infinito com z tendendo à fronteira ao longo do raio $z=re^{2\pi(p/q)i}$. Em vista disso, é impossível que f tenha uma continuação analítica g a uma região contendo qualquer ponto z_0 da fronteira, pois g teria de ser analítica em todos os pontos de um arco da fronteira contendo z_0, mas tal arco contém infinitos pontos da forma $e^{2\pi(p/q)i}$.

Continuação analítica por cadeias

Para melhor compreender a relevância do conceito que vamos introduzir agora, comecemos com um exemplo.

6.9. Exemplo. A função $\log z$, como sabemos, só fica bem definida quando restringimos o argumento de z convenientemente. Consideremos as regiões R_k como semiplanos dados pelas seguintes restrições ao argumento de z:

$$\frac{k\pi}{2} < \arg z < \frac{k\pi}{2} + \pi.$$

Denotemos com f_k o ramo do logaritmo definido nesses semiplanos, isto é, $f_k(z) = \log z$, com z restrito a R_k. Então, (f_k, R_k) é um elemento funcional ou germe do logaritmo. Observe que os elementos (f_k, R_k) e (f_{k+1}, R_{k+1}) são a continuação analítica direta um do outro. Os valores $k = -1$, $k = 0$, $k = 1$ e $k = 2$ nos dão o logaritmo nos semiplanos $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Re} z < 0$ e $\operatorname{Im} z < 0$, respectivamente. Cada um é a continuação analítica direta de seu antecessor ou sucessor imediato, mas não de outro elemento qualquer. Por exemplo, (f_1, R_1) não é continuação analítica direta de (f_{-1}, R_{-1}).

Observe que R_2 e R_{-1} têm uma interseção não-vazia, mas f_2 e f_{-1} não coincidem nessa interseção. No entanto, é claro que sendo cada elemento funcional da seqüência

$$(f_{-1}, R_{-1}),\ (f_0, R_0),\ (f_1, R_1),\ (f_2, R_2)$$

continuação analítica direta de seu antecessor imediato, então (f_2, R_2) deve ser considerado continuação analítica de (f_{-1}, R_{-1}) em algum novo sentido. Isso nos leva à noção de continuação analítica por cadeias, como definimos a seguir.

6.10. Definições. *Um conjunto de elementos funcionais*

$$(f_1, R_1),\ (f_2, R_2), \ldots,\ (f_n, R_n),$$

tal que cada um é a continuação analítica direta de seu antecessor ou sucessor imediato, é chamada uma cadeia de elementos funcionais ligando

(f_1, R_1) *a* (f_n, R_n). *Cada elemento* (f_k, R_k) *da cadeia é chamado uma continuação analítica de qualquer outro* (f_j, R_j) *(podendo eventualmente, mas não necessariamente, ser continuação analítica direta).*

Diz-se que uma família de elementos funcionais (que pode ser finita ou infinita) é conexa se quaisquer dois de seus elementos podem ser ligados por uma cadeia de elementos pertencentes à família.

Esses conceitos permitem estender uma função analítica a partir de qualquer de seus elementos funcionais, de forma a se chegar a uma "extensão maximal", isto é, o conjunto de todas as continuações analíticas da função. E, ao fazer isso, como já tivemos oportunidade de ver, no caso do logaritmo, podemos voltar, com valores diferentes, a uma região já considerada. Para remediar essa situação, somos levados a introduzir um conceito novo, o de *superfície de Riemann.* Não vamos nos alongar nessa direção, mas apenas apresentar alguns exemplos concretos.

Superfícies de Riemann

Vejamos como essas idéias se aplicam no caso concreto do logaritmo, que começamos a analisar no Exemplo 6.8. Os vários elementos ali considerados, (f_k, R_k), com k variando no conjunto dos inteiros, são uma família conexa que faz a máxima extensão possível do logaritmo. Mas surge aqui um novo fenômeno: partindo de um determinado elemento funcional (f_{-1}, R_{-1}), que nos dá o logaritmo no semiplano $\operatorname{Re} z > 0$, voltamos a este mesmo semiplano com o elemento funcional (f_3, R_3), o qual, todavia, não coincide com o elemento inicial (f_{-1}, R_{-1}): o logaritmo volta acrescido de $2\pi i$.

Por causa desse fenômeno, dizemos que $z = 0$ é um *ponto de ramificação*; e que o logaritmo é uma *função multivalente.* Para fazê-la "univalente", somos levados a distinguir várias réplicas dos semiplanos, como R_{-1} e R_3. Para isso, vamos juntando os vários elementos funcionais (f_k, R_k) em seqüência, "colando" os semiplanos R_k uns aos outros convenientemente. Assim, R_{-1} é colado a R_0 no 1º quadrante, que é comum a esses semiplanos; R_0 é colado a R_1 no 2º quadrante, que é comum eles dois, R_1 colado a R_2 no 3º quadrante, R_2 colado a R_3 no 4º quadrante etc. Mas observe que o 4º quadrante que comparece em R_2 deve ser distinguido do 4º quadrante que comparece em R_{-1}, bem assim todo o semiplano R_3 deve ser distinguido

do semiplano R_{-1}.

Esse procedimento de colagem sucessiva dos vários elementos funcionais equivale à construção que descrevemos a seguir. Consideramos várias réplicas F_k do plano complexo (k variando no conjunto dos números inteiros), correspondendo aos números complexos z tais que

$$2k\pi \leq \arg z < 2(k+1)\pi.$$

F_k é cortada ao longo do semi-eixo positivo, de sorte que possui duas arestas, uma delas em que $\arg z = 2k\pi$, chamada 1ª aresta, a outra em que $\arg z = 2(k+1)\pi$, chamada 2ª aresta. Agora colamos a 2ª aresta de F_k na 1ª aresta de F_{k+1}, k variando no conjunto dos inteiros. O resultado é o que se chama a *superfície de Riemann* do logaritmo, uma superfície "espiralada", ilustrada na Fig. 6.5. Assim, partindo de um ponto $z = re^{i\theta}$ e aumentando continuamente seu argumento até o valor $\theta + 2\pi$, atingimos o ponto $z' = re^{i\theta+2\pi}$. Mas observe que z' não coincide com z, pois encontra-se em nova folha da superfície de Riemann, o que torna o logaritmo uma função multivalente.

Observe também que a superfície de Riemann não apenas torna a função univalente; ela faz a extensão máxima da função. De fato, quando consideramos um ramo do logaritmo, como

$$\log z = \log r + i \arg z, \quad 2k\pi \leq \arg z < 2(k+1)\pi,$$

por que preferir este a outro ramo qualquer? É evidente que um ramo não passa de um elemento funcional ou germe, não a função em sua totalidade.

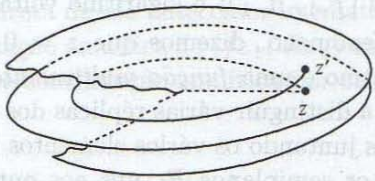


Fig. 6.5

6.11. Exemplo. Outra função multivalente é a raiz quadrada. Sendo $z = re^{i\theta}$, $f(z) = r^{1/1}e^{i\theta/2}$. Mas o argumento θ tem várias determinações; como sabemos, sendo θ_0 uma delas, as demais são dadas por $\theta_0 + 2k\pi$,

k variando no conjunto dos inteiros. Assim, $f(z) = r^{1/1}e^{i\theta_0/2}e^{k\pi i}$. Ora, $e^{k\pi i} = \pm 1$, conforme k seja par ou ímpar, respectivamente. Então, sendo f_0 o valor de $f(z)$ com $k = 0$, vemos que, partindo de z com argumento θ_0, após uma volta em torno da origem no sentido positivo ($k = 1$), o valor de f passa a ser $-f_0$; uma volta mais ($k = 2$) e o valor de f volta a ser f_0. Assim, após o ponto z percorrer duas voltas em torno da origem, ele deve voltar à posição inicial (Fig. 6.6a).

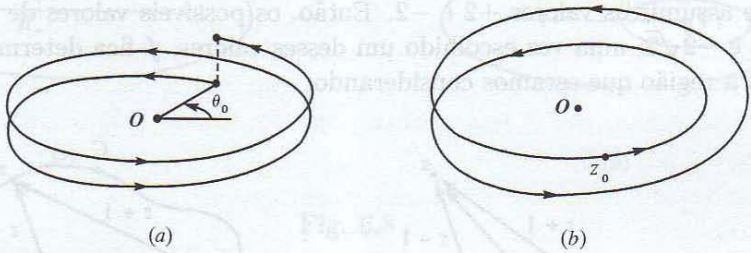


Fig. 6.6

Essas observações mostram que $z = 0$ é um ponto de ramificação da função raiz quadrada; e para formar sua superfície de Riemann bastam apenas duas réplicas do plano complexo, F_0 e F_1 na notação usada há pouco. Colamos a 2ª aresta de F_0 com a 1ª aresta de F_1 e a 2ª aresta de F_1 com a 1ª aresta de F_1. A Fig. 6.6b ilustra um caminho fechado simples em volta da origem nessa superfície de Riemann.

6.12. Exemplo. Vamos estudar a função

$$f(z) = \sqrt{z^2 - 1} = \sqrt{z+1}\sqrt{z-1}.$$

Para fazê-la univalente, cortamos o plano ao longo dos semi-eixos $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$, através das restrições

$$-\pi < \arg(z+1) < \pi \quad \text{e} \quad 0 < \arg(z-1) < 2\pi.$$

Obtemos assim uma região (Fig. 6.7a) onde ambas as funções $\sqrt{z+1}$ e $\sqrt{z-1}$ são univalentes, portanto, onde é também univalente a função original $\sqrt{z^2-1}$.

Outra possibilidade consiste em cortar o plano complexo ao longo do segmento $[-1, 1]$, de modo que, se um contorno fechado simples C envolver

o ponto 1, ele terá necessariamente de envolver o ponto -1 (Fig. 6.7b). Dessa forma, se um ponto z se desloca ao longo de C, no sentido antihorário, voltando à posição inicial, os argumentos de $z+1$ e $z-1$ ficam aumentados de 2π e $f(z)$ volta ao valor inicial. Novamente aqui, f é univalente na região considerada, mas possui dois ramos, dependendo do valor escolhido num ponto qualquer. Por exemplo, seja $z_0 = 3$. Como sabemos, há dois valores possíveis para $\sqrt{z_0 - 1}$, que são $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$, conforme $\arg(z_0 - 1)$ seja um múltiplo par ou ímpar de 2π, respectivamente. Analogamente, $\sqrt{z_0 + 1}$ pode assumir os valores $+2$ e -2. Então, os possíveis valores de $f(z_0)$ são $2\sqrt{2}$ e $-2\sqrt{2}$; uma vez escolhido um desses valores, f fica determinada em toda a região que estamos considerando.

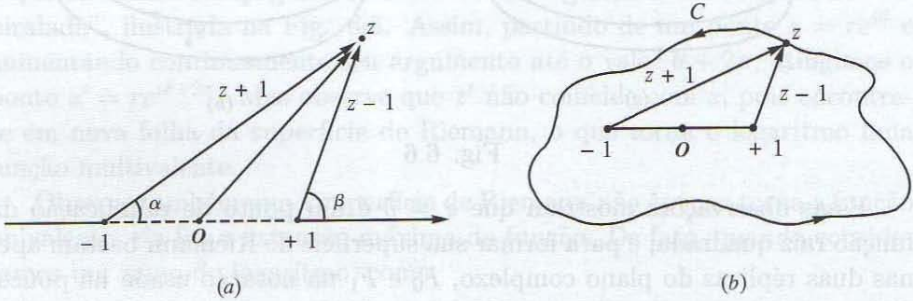
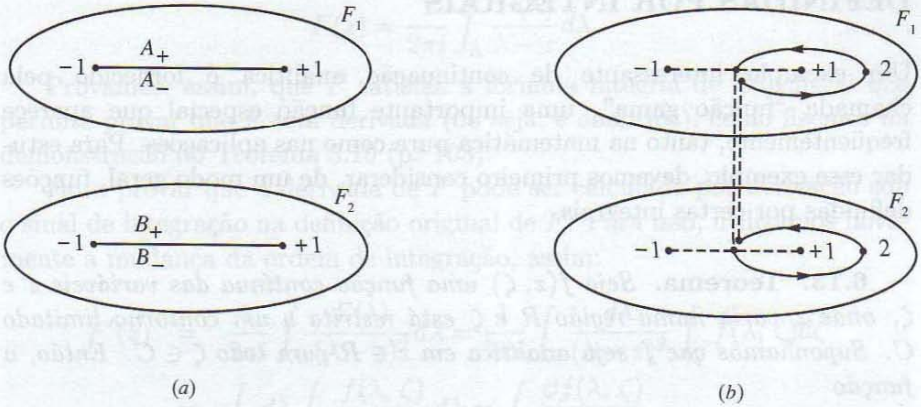


Fig. 6.7

Temos de juntar esses dois ramos convenientemente para construir a superfície de Riemann de f. Para isso, tomemos duas réplicas F_1 e F_2 do plano complexo cortado ao longo do segmento $[-1, 1]$, correspondendo aos dois ramos de f. Cada réplica possui duas arestas, ao todo quatro arestas, duas inferiores A_- e B_- e duas superiores A_+ e B_+ (Fig. 6.8a). Obtemos a superfície de Riemann colando A_- com B_+ e A_+ com B_-. Assim, um ponto que parta de $z = 2$ em F_1 e se desloque no sentido positivo no contorno circular de centro $z = 1$ e raio $r = 1/2$, ao atingir a aresta A_+ passa para F_2; e, depois de mais meia volta, retorna ao ponto $z = 2$, mas agora em F_2. Continuando por mais meia volta, retornamos a F_1, onde mais meia volta nos leva ao ponto inicial $z = 2$ em F_1 (Fig. 6.8b).



(*a*) (*b*)

Fig. 6.8

Os exemplos de funções multivalentes aqui considerados são relativamente simples, e suas superfícies de Riemann podem ser facilmente visualizadas. Em geral isso não é assim, mas em muitas aplicações basta o conhecimento de ramos particulares, que obtemos freqüentemente sem muita dificuldade.

EXERCÍCIOS

Nos Exercs. 1 a 7, construa a superfície de Riemann da função dada.

1. $f(z) = z^{1/3}$.

2. $f(z) = (z-1)^{2/3}$.

3. $f(z) = z^{m/n}$, onde m e n são números naturais, com $n > 1$.

4. $f(z) = z^{\alpha}$, α irracional.

5. $f(z) = (z^2-1)^{1/3}$.

6. $f(z) = \sqrt{z^2+1}$.

7. $f(z) = \sqrt{z(z^2-1)}$. *Sugestão*: Considere duas réplicas do plano complexo, ambas cortadas de -1 a zero e de 1 a ∞.

FUNÇÕES ANALÍTICAS DEFINIDAS POR INTEGRAIS

Um exemplo interessante de continuação analítica é fornecido pela chamada "função gama", uma importante função especial que aparece freqüentemente, tanto na matemática pura como nas aplicações. Para estudar esse exemplo, devemos primeiro considerar, de um modo geral, funções definidas por certas integrais.

6.13. Teorema. *Seja $f(z, \zeta)$ uma função contínua das variáveis z e ζ, onde z varia numa região R e ζ está restrita a um contorno limitado C. Suponhamos que f seja analítica em $z \in R$ para todo $\zeta \in C$. Então, a função*

$$F(z) = \int_C f(z, \zeta) d\zeta$$

é analítica na região R, e $F'(z) = \displaystyle\int_C \frac{\partial f(z, \zeta)}{\partial z} d\zeta.$

Demonstração. Faremos a demonstração no pressuposto de que C seja um arco regular, ao qual se reduz facilmente o caso geral em que C seja composto de uma sucessão finita de arcos regulares, bastando para isso substituir a integral sobre C por uma soma finita de integrais sobre arcos regulares. Assim, supomos que C seja dado por uma parametrização $\zeta = \zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t)$, t variando num intervalo (a, b).

Seja Λ um contorno fechado simples, envolvendo o ponto z, e todo contido na região R, juntamente com seu interior. Pela fórmula de Cauchy,

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C d\zeta \int_\Lambda \frac{f(\lambda, \zeta)}{\lambda - z} d\lambda.$$

Utilizando as parametrizações dos contornos C e Λ, essa integral repetida pode ser escrita como soma de integrais reais repetidas, envolvendo integrandos contínuos. Em tais integrais podemos inverter a ordem das integrações; após recomposição das integrais complexas, chegamos à conclusão de que podemos inverter a ordem das integrações na última expressão acima e escrever:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Lambda \frac{d\lambda}{\lambda - z} \int_C f(\lambda, \zeta) d\zeta,$$

ou seja,

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda} \frac{F(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda.$$

Provamos, assim, que F satisfaz a fórmula integral de Cauchy, o que permite provar que F tem derivada (ou seja, é analítica), como fizemos na demonstração do Teorema 3.16 (p. 103).

Falta provar que a derivada de F pode ser calculada por derivação sob o sinal de integração na definição original de F. Para isso, utilizamos novamente a mudança da ordem de integração, assim:

$$\begin{aligned} F'(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda} \frac{F(\lambda)}{(\lambda - z)^2} d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda} \frac{d\lambda}{(\lambda - z)^2}\int_{C} f(\lambda, \zeta) d\zeta \\ &= \int_{C} d\lambda \int_{\Lambda} \frac{f(\lambda, \zeta)}{(\lambda - z)^2} d\lambda = \int_{C} \frac{\partial f(\lambda, \zeta)}{\partial \lambda}. \end{aligned}$$

Isto completa a demonstração.

6.14. Teorema. *Seja C um contorno não-limitado, indo para infinito ao longo do eixo Ox ou em qualquer outra direção. Suponhamos que as condições do teorema anterior estejam satisfeitas em qualquer parte limitada de C e que a integral*

$$F(z) = \int_{C} f(z, \zeta) d\zeta$$

seja uniformemente convergente. Então as conclusões do teorema anterior permanecem válidas.

Demonstração. Seja C_n a parte de C no círculo de centro na origem e raio n. Pelo teorema anterior,

$$F_n(z) = \int_{C_n} f(z, \zeta) d\zeta$$

é analítica, e $F_n'(z) = \displaystyle\int_{C_n} \frac{\partial f(z, \zeta)}{\partial z} d\zeta$. Aplicando o Teorema 4.6 (p. 123) como se a seqüência F_n fosse a reduzida s_n de uma série uniformemente convergente, teremos:

$$F'(z) = \lim F_n'(z) = \lim \int_{C_n} \frac{\partial f(z, \zeta)}{\partial z} d\zeta = \int_{C} \frac{\partial f(z, \zeta)}{\partial z} d\zeta,$$

e isto conclui a demonstração.

Um teorema análogo a este último pode ser formulado, com a hipótese de que a integral se estenda sobre um contorno limitado C, mas o integrando $f(z, \zeta)$ tenda a infinito em um ou em ambos os extremos de C. (Veja o Exerc. 1 adiante). Veremos a aplicação de um tal teorema no estudo da função gama, considerada logo a seguir.

A função gama

A chamada *função gama* aparece em vários domínios da Matemática, sejam de natureza puramente teórica, sejam nas aplicações. Ela foi introduzida por Euler como extensão do fatorial de um número inteiro positivo. Começamos observando que repetidas integrações por partes nos conduzem a

$$\int_0^\infty e^{-t} t^n dt = n!$$

para todo inteiro $n \geq 0$. Ora, esta última integral faz sentido mesmo quando substituímos n por x real maior do que -1. Isso resulta na função

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt,$$

definida para todo $x > -1$. Generalizando, pois, o fatorial, podemos escrever:

$$x! = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt, \quad x > -1.$$

Para evitar esse $x > -1$, basta escrever $x - 1$ em lugar de x, o que nos conduz à função gama com argumento real, denotada por $\Gamma(x)$:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0.$$

Assim, $\Gamma(n+1) = n!$ para todo inteiro $n \geq 0$.

A notação $z!$ até que é a mais lógica e natural para indicar a função $\Gamma(z+1)$, e alguns autores chegaram a insistir nela, mas sem sucesso; Γ é a notação consagrada e não há mais como mudar essa situação.

A última integral acima faz sentido mesmo quando substituímos a variável real x pela variável complexa z, desde que façamos a restrição

$\operatorname{Re} z > 0$. Para vermos isso, primeiro separemos as duas integrais impróprias que aparecem na expressão

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \tag{6.2}$$

da seguinte maneira:

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt. \tag{6.3}$$

A segunda destas integrais converge qualquer que seja z, por causa do fator e^{-t}, que decai fortemente no infinito e domina o fator t^{z-1}. Além disso, a convergência é uniforme, desde que z fique restrito a qualquer região limitada (Exerc. 2 adiante). Portanto, pelo Teorema 6.14, essa segunda integral define uma função inteira, ou seja, analítica em todo o plano.

Já a primeira integral só converge se $\operatorname{Re} z > 0$, em vista do fator t^{-1}, que tende a infinito quando t se aproxima de zero. Para provar que ela define uma função analítica em todo o semiplano $\operatorname{Re} z > 0$, basta notar que, dado um tal z, existe $a > 0$ tal que $\operatorname{Re} z > a$; e, como a integral é uniformemente convergente nesse domínio (Exerc. 3 adiante), concluímos que ela define uma função analítica de z em todo o semiplano $\operatorname{Re} z > 0$ (conforme o Exerc. 1 adiante). Em conseqüência, a função gama, dada pela expressão (6.2), é uma função analítica no semiplano indicado, $\operatorname{Re} z > 0$.

Continuação analítica a todo o plano

Observe que

$$e^{-t} t^{z-1} = t^{z-1} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}$$

é uma série que, à exceção do primeiro termo, converge com $\operatorname{Re} z > 0$; portanto, pode ser integrada termo a termo de $t = 0$ a $t = 1$:

$$\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{n+z-1} dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n / n!}{z+n}.$$

Substituindo em (6.3) obtemos:

$$\Gamma(z) = \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n/n!}{z+n}. \tag{6.4}$$

A série que aí aparece converge uniformemente em qualquer região cuja fronteira esteja a uma distância positiva do conjunto formado pela origem e os inteiros negativos (Exerc. 4 adiante). Exemplo de tal região é o plano todo do qual se eliminam discos de raios $\delta > 0$, centrados nos referidos pontos. Portanto, a expressão (6.4) é a continuação analítica da função gama a todo o plano complexo, exceção feita do zero e dos inteiros negativos. Como essa mesma expressão nos mostra, esses pontos são pólos simples com resíduos $(-1)^n/n!$

EXERCÍCIOS

1. Seja $f(z, \zeta)$ uma função contínua das variáveis z e ζ, onde z varia numa região R e ζ está restrita a um contorno limitado C, excluídos um ou ambos de seus extremos. Suponhamos que f seja analítica em $z \in R$ para todo $\zeta \in C$, tendendo a infinito quando ζ aproxima um dos extremos de C; e que a integral que define a função

$$F(z) = \int_C f(z, \zeta)d\zeta$$

seja uniformemente convergente. Prove que $F(z)$ é analítica na região R, e

$$F'(z) = \int_C \frac{\partial f(z, \zeta)}{\partial z} d\zeta$$

2. Prove que a integral $\displaystyle\int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ converge uniformemente, desde que a variável z fique restrita a qualquer região limitada.

3. Prove que a integral $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt$ converge uniformemente em qualquer semiplano $\operatorname{Re} z \geq a > 0$.

4. Prove que a série em (6.4) converge uniformemente em qualquer região cuja fronteira esteja a uma distância positiva do conjunto formado pela origem e os inteiros negativos.

5. Prove que $\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1)$. Mais geralmente, prove que

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2)\ldots(z+1)z\Gamma(z),$$

donde

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)}.$$

Observe que esta expressão permite fazer a continuação analítica de $\Gamma(z)$ ao semiplano $\operatorname{Re} z > -n$, pois o segundo membro está definido nesse semiplano, exceção feita dos pólos $0, -1, -2 \dots -(n-1)$.

6. Calcule $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(5/2)$, $\Gamma(-9/2)$; de um modo geral, calcule $\Gamma(n+1/2)$, sendo n inteiro qualquer, positivo ou negativo. *Sugestão:* Primeiro mostre que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$; faça isso elevando a integral ao quadrado e transformando a integral repetida numa integral dupla. (Veja [A3], Seç. 5.5.)

7. Mostre que $\int_0^\infty e^{-zt^2}\,dt$ define uma função analítica no semiplano $\operatorname{Re} z > 0$. Mostre ainda que essa função tem continuação analítica a todo o plano cortado ao longo do semi-eixo $(-\infty, 0]$, dada por $\sqrt{\pi/4z}$.

Capítulo 7

APLICAÇÕES À DINÂMICA DOS FLUIDOS

OS MOVIMENTOS FLUIDOS A CONSIDERAR

Veremos, no presente capítulo, algumas aplicações simples das funções analíticas à Dinâmica dos Fluidos e, em particular, à Aerodinâmica. Nossas considerações se restringirão a fluidos perfeitos, homogêneos e incompressíveis. Num *fluido perfeito* a força que uma parte do fluido exerce sobre a parte adjacente é devida apenas à pressão, sempre perpendicular à superfície de separação entre as partes. Na verdade, isto nunca ocorre na Natureza, sendo apenas uma idealização simplificadora, confirmada, com boa aproximação, em várias situações físicas importantes.

Faremos a hipótese de que o fluido permaneça *homogêneo* e *incompressível* durante o movimento, de sorte que a densidade de massa ρ é constante em todos os pontos e durante todo o tempo[1]. Suporemos também que o movimento seja bidimensional e estacionário. *Bidimensional* significa que existe um plano, que tomaremos como o plano xy, tal que a velocidade se mantenha paralela a este plano, independente da terceira coordenada espacial z, de forma que o movimento é o mesmo em todos os planos paralelos ao plano xy, bastando, pois, estudar o movimento neste plano. *Estacionário* é o movimento cuja velocidade em cada ponto mantém-se constante no tempo.

[1] *Homogêneo* significa que ρ se mantém constante nos diferentes pontos, podendo variar com o tempo; *incompressível* significa que ρ se mantém constante para cada partícula, podendo variar de uma partícula para outra. As duas condições juntas implicam ρ constante em todas as variáveis, espaciais e temporal.

Conservação da massa

Denotemos com $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x, y)$ o vetor velocidade no ponto (x, y), de componentes $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$. Suporemos sempre que essas funções sejam de classe C^1, isto é, elas têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em seus domínios de definição. Então u e v satisfazem a seguinte equação, chamada *equação de continuidade* ou *equação de conservação da massa*:

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{7.1}$$

Na verdade, esta equação é caso particular da equação geral de continuidade, da qual fazemos uma dedução em [A3], p. 232, Eq. 7.11).

Vamos deduzir (7.1) diretamente, considerando o fluxo do vetor $\mathbf{q}$ através de uma curva C. Se ds designa o elemento de arco ao longo de C e $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ o vetor unitário normal à curva (Fig. 7.1a), o *fluxo* ψ de $\mathbf{q}$ através de C, no sentido de $\mathbf{n}$, é definido pela expressão

$$\psi = \int_C \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}\, ds \tag{7.2}$$

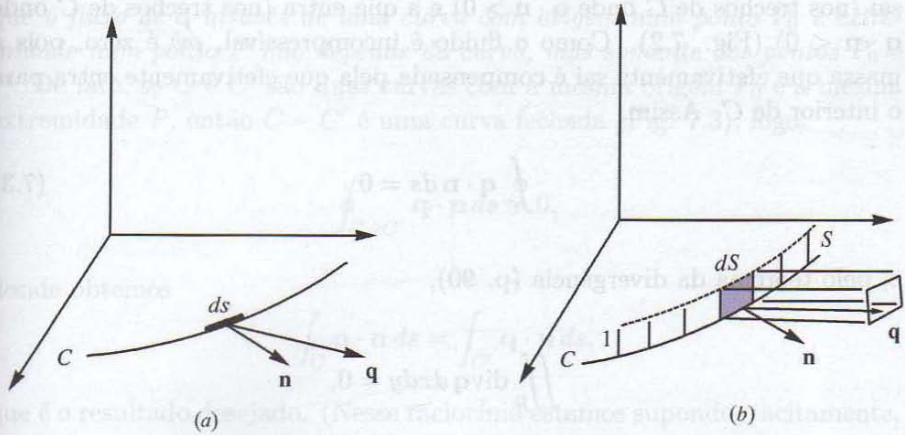


Fig. 7.1

A importância deste conceito decorre do significado físico de $\rho\psi$, que passamos a explicar. Seja S a superfície cilíndrica formada pelos segmentos

unitários levantados a partir dos pontos de C, perpendicularmente ao plano xy (Fig. 7.1b). Então, ao elemento de arco ds corresponde um elemento de superfície $dS = 1 \cdot ds$, de sorte que $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds$ é numericamente igual ao volume $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds$ de um pequeno cilindro de base dS e altura $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$. Ora, $\mathbf{q}$ é o deslocamento das partículas de fluido por unidade de tempo, de forma que $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds$ é o volume de fluido que atravessa o elemento de área dS por unidade de tempo. Em conseqüência, $\rho \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS$ é a massa de fluido que atravessa dS por unidade de tempo no sentido do vetor $\mathbf{q}$. Quando integramos sobre C em (7.2) e multiplicamos por ρ, vemos que $\rho\psi$ é a massa de fluido que atravessa a superfície S na unidade de tempo, no sentido indicado por $\mathbf{n}$.

Notemos que a integração em (7.2) será negativa naqueles trechos da curva onde $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} < 0$, ou seja, onde o fluxo de massa através de S efetivamente se processa no sentido oposto ao de $\mathbf{n}$. Assim, $\rho\psi$ representa, na verdade, a soma algébrica de toda a massa que atravessa S no sentido de $\mathbf{n}$; ou ainda, $\rho\psi$ é a diferença entre a massa que atravessa S no sentido de $\mathbf{n}$ e a que atravessa S no sentido oposto ao de $\mathbf{n}$.

Suponhamos agora que C seja uma curva fechada simples, que esteja contida, juntamente com seu interior, no domínio onde u e v sejam de classe C^1. Seja $\mathbf{n}$ a normal externa de C. $\rho\psi$ será a massa total que sai do interior de S na unidade de tempo, ou ainda, a diferença entre a que sai (nos trechos de C onde $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} > 0$) e a que entra (nos trechos de C onde $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} < 0$) (Fig. 7.2). Como o fluido é incompressível, $\rho\psi$ é zero, pois a massa que efetivamente sai é compensada pela que efetivamente entra para o interior de C. Assim,

$$\oint_C \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0 \tag{7.3}$$

e, pelo teorema da divergência (p. 90),

$$\iint_R \operatorname{div} \mathbf{q} \, dx dy = 0,$$

onde R é o interior da curva C. Como $\operatorname{div} \mathbf{q}$ é função contínua e R é um domínio arbitrário, o teorema da média para integrais nos permite concluir que $\operatorname{div} \mathbf{q} = 0$. Isto completa a demonstração de (7.1).

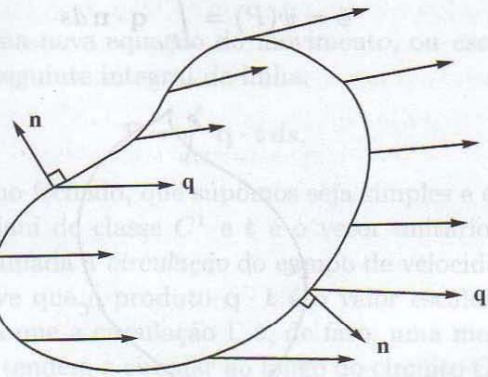


Fig. 7.2

O campo de velocidades é, como se vê, *solenoidal*, designação esta que é dada aos campos vetoriais com divergente nulo. Como é fácil ver, um campo vetorial $\mathbf{q}$ é solenoidal se e somente se seu fluxo é zero para todo contorno fechado simples que esteja contido, juntamente com seu interior, no domínio onde $\operatorname{div}\mathbf{q}$ seja contínuo.

A lei de conservação da massa na forma (7.3) tem como conseqüência que *o fluxo de* $\mathbf{q}$ *através de uma curva com origem num ponto* P_0 *e extremidade num ponto* P *não depende da curva, mas somente dos pontos* P_0 *e* P. De fato, se C e C' são duas curvas com a mesma origem P_0 e a mesma extremidade P, então $C - C'$ é uma curva fechada (Fig. 7.3); logo,

$$\oint_{C-C'} \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\,ds = 0,$$

donde obtemos

$$\int_C \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\,ds = \int_{C'} \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\,ds,$$

que é o resultado desejado. (Nesse raciocínio estamos supondo, tacitamente, que o interior do circuito $C - C'$ esteja todo contido no domínio de $\mathbf{q}$; ou ainda, que a curva C se deforma na curva C' sem sair do domínio de $\mathbf{q}$.) Segue-se então que, fixado o ponto inicial $P_0 = (x_0, y_0)$, o fluxo ψ dado em (7.2) passa a ser uma função do ponto final $P = (x, y)$, já que pode ser

escrito na forma

$$\psi = \psi(P) = \int_{P_0}^{P} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}\, ds \tag{7.4}$$

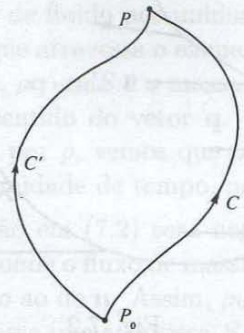


Fig. 7.3

Esta função ψ *permanece constante ao longo das trajetórias das partículas.* Para vermos isso, notamos que se Q é um ponto qualquer sobre a trajetória que passa por P (Fig. 7.4), podemos escrever:

$$\psi(Q) = \int_{P_0}^{P} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}\, ds + \int_{P}^{Q} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}\, ds = \psi(P) + \int_{P}^{Q} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}\, ds$$

Ora, esta última integral se anula, pois é feita ao longo da trajetória por P, e $\mathbf{q}$ é tangente, enquanto $\mathbf{n}$ é normal a essa trajetória, de forma que $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0$.

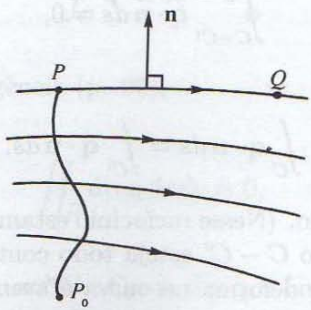


Fig. 7.4

Escoamentos irrotacionais

Obteremos agora uma nova equação do movimento, ou *escoamento* fluido. Começamos com a seguinte integral de linha:

$$\Gamma = \int_C \mathbf{q} \cdot \mathbf{t}\, ds, \tag{7.5}$$

onde C é um caminho fechado, que supomos seja simples e em cujo interior as funções u e v sejam de classe C^1 e $\mathbf{t}$ é o vetor unitário tangente a C. Essa integral Γ é chamada a *circulação* do campo de velocidades $\mathbf{q}$ ao longo da curva C. Observe que o produto $\mathbf{q} \cdot \mathbf{t}$ é o valor escalar da velocidade tangencial, de forma que a circulação Γ é, de fato, uma medida de quanto as partículas fluidas tendem a circular ao longo do circuito C. Por exemplo, vamos supor que o movimento seja uma rotação pura, a velocidade sendo sempre perpendicular ao raio vetor $\mathbf{r} = (x, y)$, como ilustra a Fig. 7.5a. É claro então que a circulação de $\mathbf{q}$ será positiva ao longo de círculos centrados na origem e percorridos no mesmo sentido de $\mathbf{q}$. Por outro lado, se a velocidade for constante, a circulação será zero ao longo de qualquer circuito C, e é fácil entender por que: a contribuição à integral em (7.5) será positiva na parte de C onde $\mathbf{q} \cdot \mathbf{t} > 0$ e negativa onde $\mathbf{q} \cdot \mathbf{t} < 0$ (Fig. 7.5b).

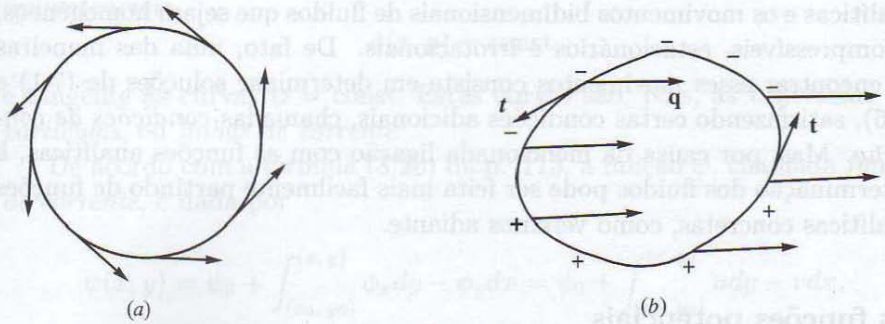


Fig. 7.5

A circulação é uma função do circuito C. Considerando este circuito como constituído das mesmas partículas do fluido, ele se deforma com o passar do tempo. Um teorema fundamental, devido a Lord Kelvin (e que não vamos demonstrar aqui)[2], afirma que a circulação permanece constante

[2] O leitor pode encontrar a demonstração desse teorema nas referências [C1] e [M1].

com o passar do tempo. Ora, na hipótese de que o movimento se origina do repouso, a circulação é inicialmente zero; logo, será zero por todo o tempo.

Esta é a hipótese de que o movimento seja *irrotacional*. Vejamos a que equação diferencial ela nos leva. Para tanto, basta notar que

$$0 = \int_C \mathbf{q} \cdot \mathbf{t}\, ds = \int_C u\, dx + v\, dy.$$

Aplicando o teorema de Green (p. 90), esta equação passa a ser

$$\iint_R \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy = 0,$$

onde R é a região interior ao circuito C. Finalmente, como o integrando é uma função contínua e R é uma região arbitrária, obtemos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{7.6}$$

Como é fácil ver, as equações (7.1) e (7.6) são as equações de Cauchy-Riemann para as funções u e $-v$, de sorte que a função $u - iv$ é analítica. Isto estabelece uma ligação muito importante e útil entre a teoria das funções analíticas e os movimentos bidimensionais de fluidos que sejam homogêneos, incompressíveis, estacionários e irrotacionais. De fato, uma das maneiras de encontrar esses movimentos consiste em determinar soluções de (7.1) e (7.6), satisfazendo certas condições adicionais, chamadas *condições de contorno*. Mas, por causa da mencionada ligação com as funções analíticas, a determinação dos fluidos pode ser feita mais facilmente partindo de funções analíticas concretas, como veremos adiante.

As funções potenciais

A Eq. 7.6 nos diz que a diferencial

$$udx + vdy$$

Aliás, estes livros apresentam os fundamentos matemáticos da Dinâmica dos Fluidos de maneira precisa, clara e sucinta.

é exata, já que sua integral ao longo de qualquer curva fechada C é zero ([A3], p. 208). Logo, existe uma função $\phi = \phi(x, y)$, chamada *potencial de velocidade*, tal que

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad \text{ou} \quad \mathbf{q} = \operatorname{grad} \phi \tag{7.7}$$

Substituindo (7.7) em (7.1), verificamos que ϕ satisfaz a equação de Laplace:

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0. \tag{7.8}$$

Vemos assim que a função ϕ é harmônica, possuindo, pois, derivadas parciais de todas as ordens.

Seja $\psi = \psi(x, y)$ a conjugada harmônica de ϕ. Pelo que vimos na p. 111, ψ é determinada a menos de uma constante aditiva. Suas curvas de nível,

$$\psi(x, y) = \text{const.},$$

cruzam as curvas de nível da função ϕ em ângulo reto em todo ponto onde $\operatorname{grad} \psi \neq 0$ (ou $\operatorname{grad} \phi \neq 0$). Ora, como $\mathbf{q} = \operatorname{grad} \phi$, vemos que, onde o campo vetorial $\mathbf{q}$ for diferente de zero, ele é perpendicular às *curvas eqüipotenciais*

$$\phi(x, y) = \text{const.}$$

e tangente às curvas $\psi = \text{const}$. Estas curvas são, pois, as *trajetórias das partículas*, ou *linhas de corrente*[3].

De acordo com a fórmula (3.20) da p. 113, a função ψ, chamada *função de corrente*, é dada por

$$\psi(x, y) = \psi_0 + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \phi_x dy - \phi_y dx = \psi_0 + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} u dy - v dx,$$

onde ψ_0 é uma constante arbitrária e a integração se processa ao longo de qualquer caminho C ligando (x_0, y_0) a (x, y). Se ds designa o elemento de

[3] Com a hipótese que fazemos de que o escoamento seja estacionário, esses dois conceitos coincidem. Fora dessa hipótese, as trajetórias são diferentes das linhas de corrente. Estas são definidas como as curvas em cada um de cujos pontos as direções da tangente e da velocidade coincidem. Ora, se a velocidade variar com o tempo em cada ponto, as linhas de corrente, em geral, não coincidirão com as trajetórias.

arco ao longo de C e $\mathbf{n} = (n_{x_1}, n_{y_1})$ o vetor normal unitário, então ([2], p. 201)

$$dx = -n_y ds \quad \text{e} \quad dy = n_x ds,$$

de sorte que

$$\psi(x, y) = \psi_0 + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}\, ds$$

Isto mostra que, a menos da constante ψ_0, ψ *é o fluxo do campo de velocidades* $\mathbf{q}$ *através de qualquer curva ligando* (x_0, y_0) *a* (x, y), isto é, a mesma grandeza dada em (7.4).

Com a notação $z = x + iy$, a função analítica

$$F(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

é chamada o *potencial complexo* do movimento. Observe que

$$F'(z) = \phi_x + i\psi_x = \phi_x - i\phi_y = u - iv,$$

de sorte que a expressão $w(z) = F'(z)$, é chamada, apropriadamente, de *velocidade complexa*. O módulo da velocidade, por sua vez, resulta ser

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{u^2 + v^2} = |F'(z)|.$$

Os pontos z onde $F'(z) = 0$ — e, conseqüentemente, $\mathbf{q} = 0$ — são chamados *pontos de estagnação*.

Como mencionamos atrás, um modo prático de encontrar possíveis escoamentos bidimensionais de fluidos consiste em partir de exemplos concretos de funções analíticas $F(z)$, o que é muito mais fácil do que resolver as equações diferenciais parciais (7.1) e (7.6) — ou sua equivalente (7.8). A partir de agora, e nas seções seguintes, descreveremos vários exemplos de escoamentos fluidos correspondentes a potenciais complexos dados.

Exemplos básicos

7.1. Exemplo. Consideremos a função

$$F(z) = \alpha z,$$

onde $\alpha = a + ib$ é uma constante. Temos:

$$F'(z) = \alpha = a + ib$$

e

$$F(z) = (ax - by) + i(bx + ay),$$

de sorte que

$$\phi = ax - by \quad \text{e} \quad \psi = bx + ay,$$
$$u = a \quad \text{e} \quad v = -b.$$

O escoamento fluido ocorre em todo o plano complexo, as linhas de corrente sendo dadas pela família de retas paralelas,

$$bx + ay = \text{const.}$$

e as linhas eqüipotenciais pela família de retas ortogonais,

$$ax - by = \text{const.}$$

Como se vê, e como já sabemos, as retas de cada família cruzam as retas da outra família ortogonalmente (Fig. 7.6). O escoamento é uniforme ao longo de retas paralelas, com velocidade complexa $F'(z) = \alpha = a + ib = u - iv$, por isto mesmo chamado *escoamento paralelo*. O escoamento é paralelo ao eixo Ox, da esquerda para a direita, quando $\alpha = V > 0, V$ sendo então a velocidade do escoamento.

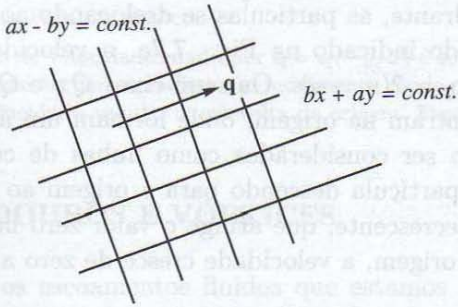


Fig. 7.6

7.2. Exemplo. Vamos considerar o potencial complexo

$$F(z) = z^2,$$

restrito ao primeiro quadrante $x > 0$, $y > 0$. Como

$$F(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy,$$

vemos que

$$\phi = x^2 - y^2 \quad \text{e} \quad \psi = 2xy,$$

de sorte que as linhas de corrente são as hipérboles

$$xy = \text{const.}$$

e as linhas eqüipotenciais as hipérboles

$$x^2 - y^2 = \text{const.}$$

Novamente observamos que as linhas de corrente cruzam as linhas eqüipotenciais ortogonalmente, como ilustra a Fig. 7.7. (Veja também o Exerc. 13 da p. 62.) A velocidade complexa é dada por

$$F'(z) = 2z = 2x + 2iy = u - iv,$$

de sorte que $u = 2x$ e $v = -2y$.

Como se vê, o presente potencial complexo descreve um escoamento fluido no 1º quadrante, as partículas se deslocando ao longo das linhas de corrente no sentido indicado na Fig. 7.7a, a velocidade no ponto (x, y) sendo dada por $\mathbf{q} = 2(x, -y)$. Os semi-eixos Qx e Qy são como paredes fixas que se encontram na origem, onde formam um ângulo de 90°. Esses semi-eixos podem ser considerados como linhas de corrente particulares; mas então, uma partícula descendo para a origem ao longo do eixo dos y tem velocidade decrescente, que atinge o valor zero na origem. Por outro lado, a partir da origem, a velocidade cresce de zero a infinito ao longo do eixo dos x.

É claro que o potencial que acabamos de analisar representa um escoamento fluido em cada um dos quatro quadrantes, nos semiplanos, ou no plano todo (Fig. 7.7b). Em qualquer desses casos, a origem é um ponto de estagnação.

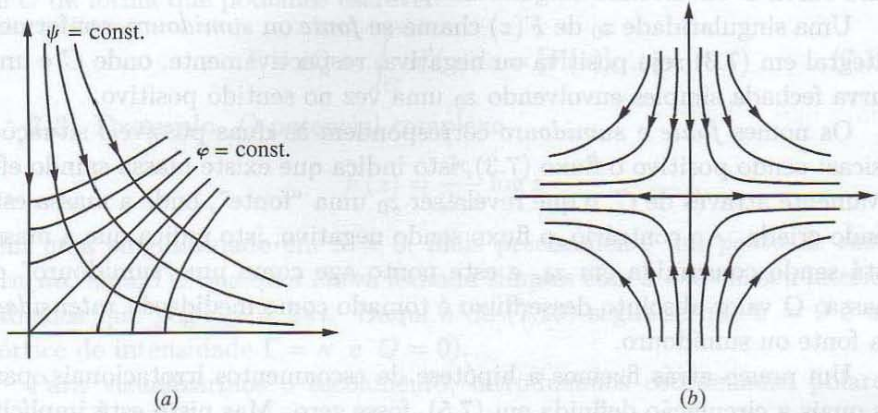


Fig. 7.7

EXERCÍCIOS

1. No Exemplo 2 atrás, prove que uma partícula que se desloca ao longo do eixo Oy tende para a origem sem nunca alcançá-la em tempo finito.
2. Faça um estudo completo do escoamento fluido associado ao potencial $F(z) = iaz^2$, onde $a > 0$, indicando as linhas de corrente, linhas eqüipotenciais, eventuais pontos de estagnação e velocidade. Faça um gráfico. Considere também o caso $a < 0$.
3. Mostre que o campo de velocidades dado por $\mathbf{q} = \alpha(x, 0)$ é irrotacional, mas não solenoidal. Explique por que ele não corresponde, fisicamente, ao escoamento de um fluido incompressível. Faça um gráfico.
4. Mostre que o campo de velocidades dado por $\mathbf{q} = \omega(-y, x)$ é solenoidal, mas não irrotacional. Mostre que ele corresponde a um movimento rígido, como o de um sólido em rotação, com velocidade angular ω em volta da origem. Faça um gráfico.

FONTES, SUMIDOUROS E VÓRTICES

Como vimos atrás, os escoamentos fluidos que estamos considerando são solenoidais. Para estes campos vale a Eq. 7.3, que exprime o fato de que o fluxo do campo de velocidades através de qualquer curva fechada C é zero. Mas isto deve ser entendido no pressuposto de que a curva C e seu interior estejam contidos no domínio de analiticidade do potencial complexo $F(z)$.

Esta função pode ter singularidades e a integral (7.3) pode não ser zero para uma curva C envolvendo singularidades.

Uma singularidade z_0 de $F(z)$ chama-se *fonte* ou *sumidouro*, conforme a integral em (7.3) seja positiva ou negativa, respectivamente, onde C é uma curva fechada simples envolvendo z_0 uma vez no sentido positivo.

Os nomes *fonte* e *sumidouro* correspondem às duas possíveis situações físicas: sendo positivo o fluxo (7.3), isto indica que existe massa saindo efetivamente através de C, o que revela ser z_0 uma "fonte", onde a massa está sendo criada. Ao contrário, o fluxo sendo negativo, isto indica que a massa está sendo consumida em z_0, e este ponto age como um "sumidouro" de massa. O valor absoluto desse fluxo é tomado como medida da *intensidade* da fonte ou sumidouro.

Um pouco atrás fizemos a hipótese de escoamentos irrotacionais, para os quais a circulação definida em (7.5), fosse zero. Mas nisto está implícito que a curva fechada C e seu interior estão no domínio de regularidade do movimento. Pode acontecer que parte do interior de C nem seja ocupado pelo fluido, como veremos adiante; ou o interior de C contenha uma ou mais singularidades do potencial complexo. (Veja o Exemplo 7.3 adiante.) Nesses casos a circulação Γ, definida em (7.5) pode não ser zero; ela representa então uma medida do que o escoamento tem de componente "circulatória". Por isso mesmo uma singularidade z_0 em torno da qual $\Gamma \neq 0$ é chamada *vórtice* de intensidade Γ.

O fluxo e a circulação podem ser calculados, separadamente, efetuando-se as integrações em (7.3) e (7.5), respectivamente. Mas há um jeito mais fácil de se fazer isso, calculando uma única integral complexa. Basta notar que

$$\begin{aligned}\oint_C F'(z)dz &= \oint_C (u - iv)(dx + idy)\\ &= \oint_C udx + vdy + i\oint_C udy - vdx.\end{aligned}$$

Mas, pelo que vimos atrás, estas duas últimas integrais são, respectivamente, a circulação Γ e o fluxo Q do campo de velocidades relativos à curva C:

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{q}\cdot\mathbf{t}ds \quad \text{e} \quad Q = \oint_C \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}ds. \tag{7.9}$$

Portanto,

$$\oint_C F'(z)dz = \Gamma + iQ$$

Observe que esta última integral é a própria variação de $F(z)$ em volta de C de forma que podemos escrever:

$$\Gamma + iQ = \oint_C F'(z)dz = [F(z)]_C. \tag{7.10}$$

7.3. Exemplo. O potencial complexo

$$F(z) = \frac{\kappa}{2\pi i}\log z$$

tem uma singularidade em $z = 0$, mais precisamente um *ponto de ramificação*. Sendo C qualquer curva fechada simples com $z = 0$ em seu interior, sabemos que $[\log z]_C = 2\pi i$. Daqui e de (7.10) segue-se que $z = 0$ é um vórtice de intensidade $\Gamma = \kappa$ e $Q = 0$).

Para visualizarmos o escoamento, introduzimos coordenadas polares, pondo $z = re^{i\theta}$:

$$F(z) = \frac{\kappa}{2\pi i}(\log r + i\theta),$$

de sorte que

$$\phi = \frac{\kappa\theta}{2\pi} \quad \text{e} \quad \psi = \frac{-\kappa \log r}{2\pi}.$$

Vemos assim que as linhas de corrente $\psi =$ const. são os círculos centrados na origem, $r =$ const.; e as linhas eqüipotenciais $\phi =$ const. são os raios pela origem, $\theta =$ const. (Fig. 7.8).

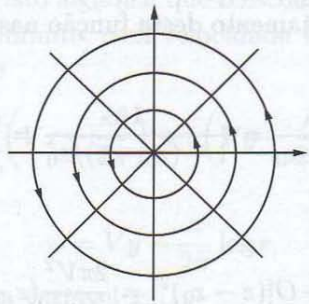


Fig. 7.8

A velocidade complexa é dada por

$$F'(z) = \frac{-i\kappa}{2\pi z} = \frac{-i\kappa\overline{z}}{2\pi r^2} = \frac{-\kappa(y + ix)}{2\pi r^2};$$

logo,

$$u = \frac{-\kappa y}{2\pi r^2} \quad \text{e} \quad v = \frac{\kappa x}{2\pi r^2}.$$

A velocidade num ponto $z_0 = re^{i\theta}$ é tangente ao círculo $r = \text{const.}$ e tem módulo $|\mathbf{q}| = \kappa/2\pi r$; ela está dirigida no sentido anti-horário se $\kappa > 0$ e no sentido horário se $\kappa < 0$. Observe que a intensidade da velocidade,

$$|\mathbf{q}| = |F'(z)| = \frac{\kappa}{2\pi r},$$

cai como $1/r$ com o crescer de r. (Compare este fato com o análogo do movimento rígido do Exerc. 4 atrás.) Este é o chamado escoamento de *rotação pura.*

7.4. Exemplo. Vamos estudar o escoamento fluido associado ao potencial complexo

$$F(z) = Vz + \frac{\kappa}{2\pi i}\log z, \tag{7.11}$$

onde $V > 0$ e $\kappa < 0$. Como se vê, este potencial é a superposição dos potenciais correspondentes a um escoamento paralelo e a uma rotação pura.

O escoamento tem um ponto de estagnação em $z_0 = i\kappa/2\pi V$, pois

$$F'(z) = V - \frac{i\kappa}{2\pi z} = V\left(1 - \frac{z_0}{z}\right) \tag{7.12}$$

Analisemos o comportamento desta função nas proximidades de $z = z_0$. Como

$$\frac{z_0}{z} = \frac{z_0}{(z - z_0) + z_0} = \frac{1}{1 - (z_0 - z)/z_0} = \sum_{n-1}^{\infty}\left(\frac{z_0 - z}{z_0}\right)^n,$$

segue-se que

$$F'(z) = \frac{V(z - z_0)}{z_0} + O[(z - z_0)^2] = \frac{2\pi V^2}{i\kappa}(z - z_0) + O[(z - z_0)^2].$$

Vemos assim que, nas proximidades do ponto de estagnação $z = z_0$, o escoamento aproxima-se daquele correspondente ao potencial complexo

$$F_0(z) = \frac{i\pi V^2}{-\kappa}(z - z_0)^2.$$

Ora, este é do tipo estudado no Exerc. 2 atrás, onde a constante a deve ser tomada igual a $-\pi V^2/\kappa > 0$ e substituir z por $z - z_0$. Isto nos permite construir o gráfico das linhas de corrente do potencial (7.11) localmente nas proximidades do ponto $z = z_0$ (Fig. 7.9).

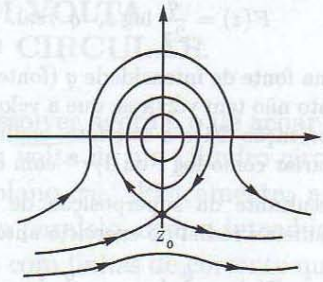


Fig. 7.9

Voltando à Eq. 7.12, vemos que o escoamento apresenta um vórtice na origem, em cujas proximidades ele se aproxima de uma rotação pura, no sentido anti-horário, pois $\kappa < 0$. Daí o aspecto das linhas de corrente nas proximidades da origem, como ilustra a Fig. 7.9.

Observemos agora que

$$F'(z) \to V \quad \text{com} \quad z \to \infty,$$

como vemos por (7.12). Isto significa que o escoamento se aproxima de um escoamento paralelo no infinito, com velocidade V, ao longo do eixo dos x. Finalmente notamos que

$$F(z) = \left(Vx + \frac{\kappa\theta}{2\pi}\right) + i\left(Vy - \frac{\kappa}{2\pi}\log r\right),$$

de sorte que

$$\psi = Vy - \frac{\kappa}{2\pi}\log r.$$

Ora, esta função é par na variável x:

$$\psi(-x, y) = \psi(x, y).$$

Isto significa que as linhas de corrente são curvas simétricas em relação ao eixo Oy, como ilustra a Fig. 7.9.

EXERCÍCIOS

1. No Exemplo 7.3 atrás, calcule Γ e Q diretamente de (7.9), onde C é uma curva fechada simples, positivamente orientada e que: i) não envolve a origem; ii) envolve a origem.

2. Estude o escoamento correspondente ao potencial complexo

$$F(z) = \frac{q}{2\pi} \log z, \quad q \text{ real.}$$

Mostre que a origem é uma fonte de intensidade q (fonte genuína se $q > 0$, sumidouro se $q < 0$); que o escoamento não tem vórtices; que a velocidade é radial e comporta-se como $1/r$. Dê uma interpretação física a este fato, explicando por que, fisicamente, a velocidade não poderia variar como $\log r$ ou $1/r^\alpha$ com $\alpha \neq 1$.

3. Estude o escoamento resultante da superposição de uma rotação pura $[F(z) = (q/2\pi i) \log z]$ com o escoamento radial do exercício anterior, isto é, com potencial

$$F(z) = \frac{q}{2\pi} \log z + \frac{q}{2\pi i} \log z.$$

Mostre que agora a origem é fonte e vórtice ao mesmo tempo, ambos com a mesma intensidade q. Mostre que as linhas de corrente são espirais logarítmicas centradas na origem (o que justifica a designação de *vórtice espiralado* que se dá a tal tipo de singularidade).

4. Em continuação ao exercício anterior, estude o escoamento resultante do potencial

$$F(z) = \frac{q}{2\pi} \log z + \frac{\kappa}{2\pi i} \log z,$$

sob as várias hipóteses de q e κ serem positivos ou negativos.

5. Estude o escoamento correspondente ao potencial $F(z) = a/z, \quad a > 0$. Mostre que ele não possui fontes ou vórtices. Faça um gráfico das linhas de corrente e das linhas eqüipotenciais. Estude a variação da velocidade ao longo de uma linha de corrente. Considere também o caso $a < 0$ e o caso $a = ib$ com b real.

6. Estude o escoamento resultante do potencial

$$F(z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \log \frac{z+\varepsilon}{z-\varepsilon} = \frac{q}{2\pi} \frac{\log(z+\varepsilon) - \log(z-\varepsilon)}{2\varepsilon},$$

onde q e ε são positivos. Mostre que este escoamento possui uma fonte em $z = -\varepsilon$ e um sumidouro em $z = \varepsilon$, ambos de mesma intensidade q. Observe que, quando $\varepsilon \to 0$, o potencial aqui considerado tende ao potencial do exercício anterior com $a = q/2\pi$. Por causa disto o escoamento do exercício anterior é chamado de "doublet".

7. Esboce as linhas de corrente e linhas eqüipotenciais do escoamento associado ao potencial

$$F(z) = \frac{\kappa}{2\pi i} \log \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

Mostre que z_1 e z_2 são vórtices de intensidades κ e $-\kappa$, respectivamente.

8. Estude os casos não considerados no Exemplo 7.4: $V > 0$ e $\kappa > 0$, $V < 0$ e $\kappa < 0$, $V < 0$ e $\kappa > 0$.
9. Estude o escoamento associado ao potencial $F(z) = Vz + a \log z$, com $V > 0$ e $a > 0$, descrevendo o gráfico das linhas de corrente, velocidade, pontos de estagnação, etc.

ESCOAMENTO EM VOLTA DE UM CILINDRO CIRCULAR

O problema que vamos resolver agora é o de achar o potencial complexo de um escoamento fluido em volta de um cilindro circular de raio R, colocado perpendicularmente ao plano xy. Fisicamente, a situação corresponde a perturbar um escoamento paralelo, com a introdução do cilindro. O resultado será um escoamento com linhas de corrente que se aproximam de retas paralelas, tanto mais quanto mais nos afastarmos do cilindro. A velocidade do fluido também será tanto mais próxima da velocidade da corrente não-perturbada quanto mais longe do cilindro estiver o ponto considerado.

Suponhamos o cilindro centrado na origem, de forma que o movimento se passa no domínio $|z| > R$. Seja $w_\infty = u_\infty - iv_\infty$ o valor da velocidade complexa do escoamento não-perturbado. Com a inserção do cilindro vamos obter um escoamento regido por um potencial complexo $F(z)$ tal que a velocidade $F'(z)$ deverá ser uma função regular no domínio $|z| > R$, aproximando o valor $V > 0$ com $|z| \to \infty$. Então o desenvolvimento de Laurent de $F'(z)$ referente à origem deverá assumir a forma

$$F'(z) = V + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots, \quad |z| > R.$$

Portanto, a menos de uma constante aditiva (irrelevante na obtenção da velocidade, das linhas de corrente e das linhas eqüipotenciais), devemos ter:

$$F(z) = Vz + c_1 \log z - \frac{c_2}{z} - \frac{c_3}{2z^2} - \dots \tag{7.13}$$

Introduzindo coordenadas polares, pondo também

$$c_j = a_j + ib_j, \quad j = 1, 2, \dots,$$

teremos:

$$F(z) = Vre^{i\theta} + (a_1 + ib_1)(\log r + i\theta) - \frac{a_2 + ib_2}{r} e^{-i\theta} - \frac{a_3 + ib_3}{2r^2} e^{-2\theta} - \dots$$

As funções φ e ψ podem agora ser obtidas facilmente. Esta última, em particular, sendo a parte imaginária de $F(z)$, é dada por:

$$\begin{aligned}\psi &= Vr\,\mathrm{sen}\,\theta + a_1\theta + b_1 \log r \\ &+ \frac{a_2\,\mathrm{sen}\,\theta - b_2\cos\theta}{r} + \frac{a_3\,\mathrm{sen}\,2\theta - b_3\cos 2\theta}{2r^2} + \ldots;\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\psi &= a_1\theta + b_1\log r + \frac{a_2 + Vr^2}{r}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ &- \frac{b_2}{r}\cos\theta + \frac{a_3}{2r^2}\,\mathrm{sen}\,2\theta - \frac{b_3}{2pi^2}\cos\theta + \ldots\end{aligned}$$

Observamos agora que o contorno do cilindro $r = R$ deve ser uma linha de corrente, logo $\psi = \text{const.}$ se $r = R$. Isto ocorrerá se tomarmos

$$a_1 = 0,\ \ a_2 = -VR^2,\ \ b_2 = 0 \quad \text{e} \quad c_3 = c_4 = \ldots = 0.$$

Com isto o potencial complexo passa a ser

$$F(z) = Vz + ib_1 \log z + \frac{R^2 V}{z},$$

onde b_1 é uma constante real.

A presença do logaritmo em $F(z)$ indica que o escoamento correspondente a esse potencial pode ter circulação. Sendo C uma curva orientada que envolva o cilindro $|z| = R$ uma vez no sentido anti-horário, teremos:

$$\oint_C F'(z)dz = [F(z)]_C = ib_1[\log z]_C = -2\pi b_1.$$

Daqui e de (7.10) concluímos que o fluxo Q é zero e que a circulação tem intensidade $\kappa = 2\pi b_1$. É mais apropriado escrever $F(z)$ em termos deste parâmetro κ, da velocidade V no infinito e do raio R do cilindro:

$$F(z) = Vz + \frac{\kappa}{2\pi i}\log z + \frac{R^2 V}{z}. \tag{7.14}$$

O caso em que $\kappa = 0$, isto é, sem circulação, é mais simples e fica para ser analisado pelo leitor como exercício. Vamos tratar o caso $\kappa < 0$, procurando

os possíveis pontos de estagnação. Para isso devemos achar os valores z que anulam a velocidade complexa $F'(z)$. Como

$$F'(z) = V + \frac{\kappa}{2\pi i z} - \frac{R^2 V}{z^2},$$

a equação $F'(z) = 0$ se escreve:

$$z^2 - \frac{i\kappa}{2\pi V} z - R^2 = 0,$$

cujas raízes são:

$$z_{\pm} = \frac{i\kappa}{4\pi V} \pm \sqrt{R^2 - (\kappa/4\pi V)^2}. \tag{7.15}$$

O caso mais simples é aquele em que não há circulação: $\kappa = 0$ e os pontos de estagnação estão em $z = \pm R$ (Exerc. 1 adiante). Se $\kappa < 0$, temos três casos a considerar:

1º caso: $\kappa < -4\pi V R$. Então as duas raízes em (7.15) são distintas e imaginárias. Como seu produto é $-R^2$, somente uma delas estará no domínio do fluido, $|z| > R$. Neste caso o escoamento tem o aspecto indicado na Fig. 7.10.

2º caso: $\kappa = -4\pi V R$. Agora as raízes em (7.15) são coincidentes e seu valor comum é $z_0 = iR$. O escoamento está ilustrado na Fig. 7.11.

3º caso: $-4\pi V R < \kappa < 0$. Neste caso as duas raízes estão simetricamente dispostas em relação ao eixo Oy, portanto seus módulos são iguais a R. Temos assim dois pontos de estagnação sobre o cilindro $|z| = R$ e o escoamento apresenta o aspecto ilustrado na Fig. 7.12.

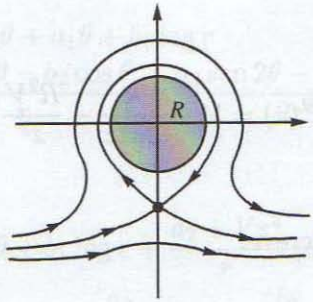


Fig. 7.10

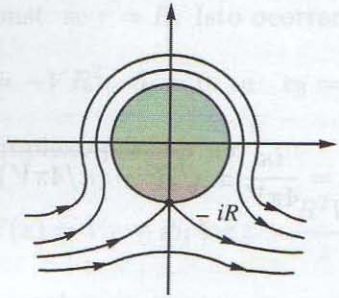


Fig. 7.11

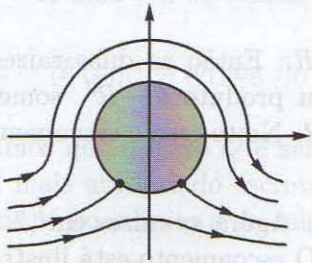


Fig. 7.12

EXERCÍCIOS

1. Discuta o escoamento resultante do potencial (7.14) com $\kappa = 0$. Analise a situação não somente no domínio exterior ao cilindro, mas também em $|z| < R$. Observe que nas proximidades de $z = 0$ o escoamento se aproxima daquele correspondente a um doublet (Exerc. 5 atrás). A Fig. 7.13 ilustra as linhas de corrente externamente ao cilindro.
2. Discuta o Exemplo (7.14) no caso $V > 0$ e $\kappa > 0$.
3. Considere o escoamento em volta de um cilindro circular de raio R, cuja velocidade complexa no infinito seja agora $w_\infty = Ve^{-i\alpha}$ e não V. Isto significa que a velocidade vetorial no infinito será o vetor $\mathbf{q}_\infty = V(\cos\alpha\mathbf{i} + \operatorname{sen}\alpha\mathbf{j})$, de módulo V, fazendo um ângulo α com o eixo Ox. Mostre que esse escoamento é dado pelo potencial complexo

$$F(z) = w_\infty z + \frac{\kappa}{2\pi i}\log z + \frac{R^2 w_\infty}{z}. \tag{7.16}$$

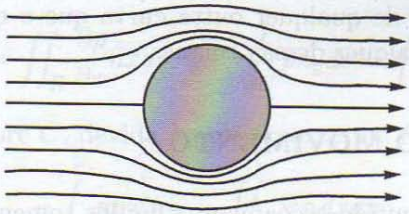


Fig. 7.13

ESCOAMENTO EM VOLTA DE UM CILINDRO QUALQUER

Na seção anterior a hipótese de que o cilindro fosse circular levou à determinação dos coeficientes em (7.13) e à obtenção do potencial (7.14). No caso de um cilindro qualquer, esse método já não é aplicável, e a determinação do potencial complexo tem de ser feita de outra maneira.

Todavia, mesmo com a forma genérica (7.13), podemos calcular a circulação e provar que o coeficiente c_1 deve ser um número imaginário. De fato, sendo C uma curva fechada simples envolvendo o perfil do cilindro no sentido positivo, de (7.13) obtemos:

$$[F(z)]_C = 2\pi i c_1.$$

Daqui e de (7.10), concluímos que

$$\Gamma = -2\pi \mathrm{Im}\, c_1 \quad \text{e} \quad Q = 2\pi \mathrm{Re}\, c_1.$$

Estas relações nos mostram que o número c_1 deve ser imaginário para que o fluxo Q seja nulo. Portanto, se κ é o valor da circulação, então $c_1 = \kappa/2\pi i$ e o potencial tem a seguinte forma:

$$F(z) = Vz + \frac{\kappa}{2\pi i}\log z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)z^{n-1}}, \tag{7.17}$$

esta última série sendo convergente para $|z| > R$, onde $|z| \leq R$ é qualquer disco que contenha o perfil do cilindro.

Resta esclarecer por que o fluxo Q é zero. Para isto basta lembrar que o perfil do cilindro é uma linha de corrente; logo, através dela, $Q = O$. Como a integral de $F'(z)$ ao longo dessa curva tem o mesmo valor imaginário se efetuada ao longo de qualquer outra curva que o envolva, segue-se que $Q = O$ através de qualquer dessas curvas.

A DINÂMICA DO MOVIMENTO

Até agora temos discutido escoamentos fluidos somente do ponto de vista cinemático, sem qualquer preocupação com as forças envolvidas. Vamos cuidar disto agora, analisando a força que se origina da pressão p.

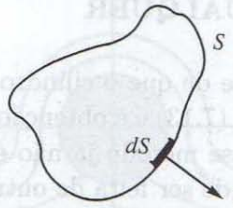


Fig. 7.14

Dada uma superfície fechada S, seja $\mathbf{n}$ o vetor normal unitário externo, isto é, dirigido para fora de S (Fig. 7.14). Então, num elemento de superfície dS, a força de pressão que o fluido no interior de S exerce sobre o exterior é $(pds)\mathbf{n}$, enquanto que $-(pds)\mathbf{n}$ é a força, de fora para dentro, no mesmo

elemento de superfície dS. Em conseqüência, a força de pressão resultante, que o fluido exterior a S exerce sobre esta superfície, é dada por

$$-\int\int_S p\mathbf{n}\,dS.$$

No caso bidimensional a que estamos restritos, S é uma superfície cilíndrica de altura unitária, levantada sobre uma curva fechada C, como na p. 205 (veja a Fig. 7.1). Então, $dS = 1 \cdot ds$, onde ds é o elemento de arco ao longo de C, e a integral anterior passa a ser

$$-\int_C p\mathbf{n}\,ds = -\int p(n_x, n_y)ds.$$

$\mathbf{n}$ é agora a normal externa referente ao contorno C.

Vamos transformar esta última integral numa integral dupla sobre a região R, interior a C. Para isto basta notar que ([2], Seç. 6.5)

$$\int_C pn_x ds = \int\int_R \frac{\partial p}{\partial x}dxdy \quad \text{e} \quad \int_C pn_y ds = \int\int_R \frac{\partial p}{\partial y}dxdy;$$

portanto, a força sobre C, devida à pressão externa, é dada por:

$$-\int_C p\mathbf{n}\,ds = -\int\int_R \nabla p\,dxdy.$$

Como se vê, a expressão $-\nabla p$ tem o significado de *força por unidade de volume*, pois produz a força resultante sobre R quando integrada sobre esta região (ou melhor, sobre uma região cilíndrica, correspondente à superfície cilíndrica S referida acima).

Vamos, em seguida, obter a *equação de conservação do momento linear*, correspondente à segunda lei de Newton (força = massa × aceleração). Uma dedução dessa equação, numa situação geral, está feita em [A3], Seç. 7.2.2, Exemplo 3. Faremos aqui uma dedução apropriada às hipóteses em que estamos trabalhando.

Começamos por observar que ρ é a massa por unidade de volume e $-\nabla p$ a força de pressão, também por unidade de volume. Então, desprezando quaisquer outras forças, a equação

$$\rho\frac{d\mathbf{q}}{dt} = -\nabla p \tag{7.18}$$

exprime a segunda lei de Newton, pois dq/dt é a aceleração. Notando que

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(x, y) = (u(x, y),\ v(x, y)),$$

e usando também a Eq. 7.6, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{q}}{dt} &= \left(u_x\frac{dx}{dt} + u_y\frac{dy}{dt},\ v_x\frac{dx}{dt} + v_y\frac{dy}{dt}\right)\\ &= (uu_x + vv_x,\ uu_y + vv_y).\end{aligned}$$

Com isto, a Eq. 7.18 se desdobra nas seguintes equações escalares:

$$\rho(uu_x + vv_x) = -p_x \quad \text{e} \quad \rho(uu_y + vv_y) = -p_y. \tag{7.19}$$

Destas equações obtemos facilmente uma importante equação, devida a Daniel Bernoulli. Para obtê-la, basta notar que as equações (7.19) significam que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho(u^2+v^2)}{2} + p\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\rho(u^2+v^2)}{2} + p\right) = 0.$$

Concluímos, pois, que

$$\frac{\rho q^2}{2} + p = A, \tag{7.20}$$

onde $q^2 = u^2 + v^2$ e A é uma constante. É esta a anunciada *equação de Bernoulli*.

Na seção seguinte usaremos a Eq. 7.20 para deduzir a célebre fórmula de Kutta e Joukovski, que permite calcular a força que um fluido em movimento exerce sobre um corpo nele imerso. Um caso típico dessa força é a chamada *força de levantamento*, responsável pela sustentação do vôo de um avião.

Mesmo sem fazer qualquer cálculo, mas apenas com um simples exame da Eq. 7.20, podemos compreender o surgimento dessa força. Como preliminar a esse exame, notemos que o movimento uniforme de um avião na atmosfera é dinamicamente equivalente ao movimento contrário da atmosfera, com o avião parado. Isto resulta da observação do fenômeno de um referencial fixado no avião. (Aliás, é essa equivalência — conseqüência do princípio da relatividade da Mecânica Clássica — que permite o estudo do vôo em túneis de vento, ou túneis aerodinâmicos.)

Consideremos, pois, uma asa de avião representada pelo seu perfil no plano xy (Fig. 7.15) e imaginemos um escoamento fluido com pontos de

estagnação em P e Q no referido perfil. O escoamento começa com velocidade V no infinito à esquerda, bifurca-se em P, voltando a reunificar-se em Q, para, finalmente, reassumir a velocidade V no infinito à direita. Invoquemos agora a Eq. 7.20. Ela nos diz que a velocidade aumenta quando a pressão diminui e diminui se a pressão aumenta. Portanto, se os pontos de estagnação forem tais que o arco superior PAQ seja mais longo que o arco inferior PBQ, a velocidade do fluido ao longo do primeiro desses arcos terá de ser maior que a velocidade ao longo do segundo arco, pois as partículas que se bifurcam simultaneamente em P devem chegar no mesmo instante em Q. Assim, a pressão será maior na parte de baixo da asa do que na parte de cima, e, conseqüentemente, as forças de pressão terão uma resultante dirigida de baixo para cima, que é a força de levantamento ou sustentação.

Evidentemente, para se conseguir esse resultado é necessário produzir o escoamento descrito acima, com os pontos de estagnação P e Q convenientemente posicionados. Como conseguir isto é uma questão à parte, sobre a qual voltaremos a comentar mais adiante.

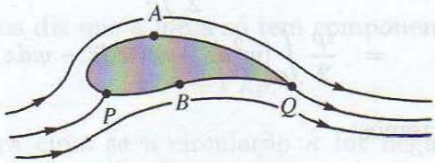


Fig. 7.15

Força sobre um cilindro e fórmula de Blasius

Calcularemos agora a resultante das forças de pressão sobre um cilindro de seção transversal arbitrária, imerso num fluido de escoamento dado por (7.17). Seja C o perfil do cilindro no plano xy, $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ sua normal externa e ds o elemento de arco sobre C. Então, pelo que vimos na seção anterior, essa resultante de forças será dada por

$$\mathbf{f} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} = -\int_C p\mathbf{n}\, ds.$$

Introduzindo a forma complexa $f = X - iY$, e levando em conta que

$$n_x ds = dy \quad \text{e} \quad n_y ds = -dx,$$

a expressão anterior é equivalente a

$$\begin{aligned} f &= X - iY = \int_C -p(n_x - in_y)ds = -\int_C p(dy + idx) \\ &= -i\int_C p(dx - idy) = -i\int_C p d\overline{z} \end{aligned}$$

Em seguida utilizamos a Eq. 7.20 para eliminar p. Notando que $q^2 = w\overline{w}$, onde $w = w(z) = F'(z)$ é a velocidade complexa, obtemos:

$$f = X - iY = \frac{i\rho}{2}\int_C \left(w\overline{w} + \frac{2A}{\rho} \right) d\overline{z}.$$

Ora, $2A/\rho$ é constante e a integral de $d\overline{z}$ é zero, como se verifica facilmente; logo,

$$\begin{aligned} f &= X - iY = \frac{i\rho}{2}\int_C w\overline{w}d\overline{z} \\ &= \frac{i\rho}{2}\int_C [w^2 dz + w(\overline{w}d\overline{z} - wdz)]. \end{aligned}$$

Como $w = u - iv$, temos:

$$\begin{aligned} \overline{w}d\overline{z} - wdz &= 2i\,\mathrm{Im}(\overline{w}d\overline{z}) \\ &= 2i\,\mathrm{Im}[(u + iv)(dx - idy)] \\ &= -2i(-udy + vdx) \\ &= -2i(un_x + vn_y)ds = -2i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{n})ds. \end{aligned}$$

Notamos agora que $\mathbf{q}\cdot\mathbf{n} = 0$ sobre o contorno C, pois este é uma linha de corrente. Em conseqüência, a força complexa assume a seguinte forma simples, conhecida como *fórmula de Blasius*:

$$f = X - iY = \frac{i\rho}{2}\int_C w(z)^2 dz. \tag{7.21}$$

Fórmula de Kutta-Joukovski

Em seguida usaremos esta fórmula para obter f em termos de V, κ e ρ. Notamos primeiramente, que, sendo $w(z)$ regular e univalente no exterior de C, este contorno pode ser substituído por um círculo $|z| = R$ que contenha C em seu interior, sem que isto modifique o valor da integral em (7.21). Esta substituição nos permite utilizar o desenvolvimento (7.17) para obter $w(z) = F'(z)$. Com esse procedimento a expressão da força em (7.21) assume a forma

$$\begin{aligned} f = X - iY &= \frac{i\rho}{2}\int_{|z|=R}\left(V + \frac{\kappa}{2\pi i z} + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \dots\right)^2 dz \\ &= \frac{i\rho}{2}\int_{|z|=R}\left(V^2 + \frac{V\kappa}{\pi i z} + \dots\right) dz, \end{aligned}$$

onde os pontos substituem termos em z^{-2}, $z^{-3}, \dots$ Ora, as integrais destes termos são todas nulas, bem assim a integral de V^2. Então, fica apenas o termo em $1/z$ a ser integrado, o que nos dá:

$$f = X - iY = V\kappa\rho i.$$

Esta expressão nos diz que a força só tem componente vertical,

$$Y = -V\kappa\rho,$$

e estará dirigida para cima se a circulação κ for negativa, e para baixo se $\kappa > 0$. Na verdade, pelo que dissemos na p. 227, estamos lidando apenas com a força por superfície cilíndrica de comprimento unitário na direção perpendicular ao plano xy. A força numa superfície cilíndrica de comprimento L é dada por

$$Y = -V\kappa\rho L.$$

Mais geralmente, suponhamos que a velocidade complexa no infinito seja $w_\infty = Ve^{-i\alpha}$ e não V. Então, como no Exerc. 3 atrás, é fácil verificar que o potencial complexo adequado a este caso é o mesmo de (7.17), com w_∞ em lugar de V, isto é,

$$F(z) = w_\infty z + \frac{\kappa}{2\pi i}\log z - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{c_n}{(n-1)z^{n-1}}. \tag{7.22}$$

A expressão da força, por sua vez, passa a ser

$$f = X - iY = Ve^{-i\alpha}\kappa\rho Li = ie^{-i\alpha}(V\kappa\rho L).$$

Portanto,

$$\overline{f} = X + iY = -ie^{i\alpha}(V\kappa\rho L), \tag{7.23}$$

o que significa que a força $\mathbf{f} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j}$ é perpendicular à velocidade $\mathbf{q}_\infty$ no infinito (Fig. 7.16). Além disso, a direção de $\mathbf{f}$ é obtida por rotação da velocidade de um ângulo de 90°, no sentido positivo se $\kappa < 0$ e no sentido negativo se $\kappa > 0$.

A expressão (7.23) da força é conhecida como *fórmula de Kutta-Joukovski*, obtida independentemente por W. Kutta em 1902 e por N. Joukovski em 1906. O ângulo α, que supomos estar compreendido entre zero e 90°, é chamado *ângulo de ataque*.

A análise feita até aqui deixa em aberto várias questões, dentre elas a determinação do potencial complexo (7.22) e do perfil da asa que sofre ação da força (7.23). Estas questões serão resolvidas adiante, para o que temos de estudar algumas transformações especiais nas seções seguintes.

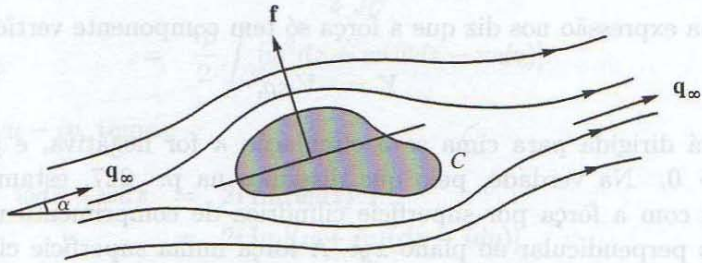


Fig. 7.16

A transformação de Möbius

O objetivo desta seção é provar que toda função do tipo

$$w = \frac{az + b}{cz + d},$$

chamada *transformação de Möbius*, tem a propriedade de levar qualquer reta numa reta ou círculo e também qualquer círculo numa reta ou círculo.

Posto de maneira mais sucinta, ela transforma retas e círculos em retas e/ou círculos.

A transformação de Möbius é também chamada *transformação fracionária linear*, por ser o quociente de dois polinômios do primeiro grau.

Comecemos com o caso particular em que $a = d = 0$ e $b = c = 1$, isto é, com a transformação $w = 1/z$.

A equação de uma reta ou círculo é

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0 \tag{7.24}$$

Trata-se de uma reta se $a = 0$ e pelo menos um dos números b ou c é diferente de zero; trata-se de um círculo se $a \neq 0$ e $b^2 + c^2 - 4ad > 0$.

Com a notação usual $z = x + iy$, $w = u + iv$, e lembrando que $w = 1/z$, portanto, $z = 1/w$, a Eq. 7.24 se escreve, sucessivamente:

$$az\overline{z} + b\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right) + c\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right) + d = 0;$$

$$\frac{a}{w\overline{w}} + \frac{b}{2}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{\overline{w}}\right) + \frac{c}{2i}\left(\frac{1}{w} - \frac{1}{\overline{w}}\right) + d = 0;$$

$$a + \frac{b}{2}(w + \overline{w}) - \frac{c}{2i}(w - \overline{w}) + dw\overline{w} = 0;$$

$$d(u^2 + v^2) + bu - cv + a = 0. \tag{7.25}$$

Ora, se (7.24) representa uma reta, teremos $a = 0$, $b \neq 0$ ou $c \neq 0$; e (7.25) representará uma reta (pela origem) se $d = 0$, e um círculo (também pela origem) se $d \neq 0$. Se (7.24) representa um círculo, então $a \neq 0$ e $b^2 + c^2 - 4ad > 0$; portanto, (7.25) representará uma reta se $d = 0$ e um círculo se $d \neq 0$. Isto completa a demonstração da propriedade já mencionada e aqui enunciada em destaque:

A função $w = 1/z$ transforma qualquer reta e qualquer círculo numa reta ou num círculo.

Vamos estabelecer esta mesma propriedade para a transformação geral

$$w = \frac{az + b}{cz + d}. \tag{7.26}$$

Se $c = 0$, teremos $w = \dfrac{a}{d}z + b$, e esta transformação leva retas em retas e círculos em círculos (Exercs. 1 a 3 adiante). Se $c \neq 0$, podemos escrever:

$$w = \frac{a(cz+d) + bc - ad}{c(cz+d)} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} \cdot \frac{1}{cz+d}$$

Escrita nesta forma, visivel que a transformação (7.26) é a composição de três transformações, L_1, L_2, L_3:

$$w = L_3 L_2 L_1(z),$$

onde

$$L_1 : z \longmapsto z_1 = cz + d;$$
$$L_2 : z_1 \longmapsto z_2 = 1/z_1;$$
$$L_3 : z_2 \longmapsto w = \alpha z_2 + \beta,$$

sendo $\alpha = (bc - ad)/c$ e $\beta = a/c$. Ora, como já vimos, cada uma das transformações L_1, L_2, L_3, tem a propriedade de levar retas e círculos em retas e/ou círculos. Em conseqüência, o mesmo é verdade da transformação $L_3 L_2 L_1$, ou seja, da transformação (7.26).

EXERCÍCIOS

1. Prove que a transformação $w = z + b$ leva círculos em círculos.
2. Prove que a transformação $w = az$ leva círculos em círculos.
3. Prove que a transformação $w = az + b$ leva retas em retas e círculos em círculos.
4. Verifique que a transformação $w = 1/z$ leva: a) reta pela origem em reta pela origem; b) reta que não passa pela origem em círculo pela origem; c) círculo pela origem em reta que não passa pela origem; e) círculo que não passa pela origem em círculo que não passa pela origem.
5. Prove que a composta de duas transformações de Möbius é novamente uma transformação de Möbius.
6. Prove que a composição de transformações de Möbius é associativa, isto é, $A(BC) = (AB)C$, quaisquer que sejam as transformações de Möbius A, B e C.
7. Mostre que a transformação $w = z^2$ leva qualquer reta pela origem num raio com início na origem; e que $w = z^3$ leva retas pela origem em retas pela origem. Generalize para $w = z^n$, n inteiro positivo.