



## MÉTODO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

- 10.1 Introdução
- 10.2 Trabalho de uma Força
- 10.3 Princípio dos Trabalhos Virtuais
- 10.4 Aplicações do Princípio dos Trabalhos Virtuais
- 10.5 Máquinas Reais. Eficiência Mecânica
- 10.6 Trabalho de uma Força durante um Deslocamento Finito
- 10.7 Energia Potencial
- 10.8 Energia Potencial e Equilíbrio
- 10.9 Estabilidade do Equilíbrio

### \*10.1 INTRODUÇÃO

Nos capítulos anteriores, foram resolvidos problemas que envolviam o equilíbrio de corpos rígidos, impondo que as forças externas atuando nos corpos estavam equilibradas. As equações de equilíbrio  $\Sigma F_x = 0$ ,  $\Sigma F_y = 0$ ,  $\Sigma M_A = 0$  foram escritas e resolvidas para as incógnitas desejadas. Agora vamos considerar um método diferente, que se mostrará mais eficaz para resolver certos tipos de problemas de equilíbrio. Esse método é baseado no *princípio dos trabalhos virtuais* e foi usado formalmente pela primeira vez pelo matemático suíço Jean Bernoulli no século XVIII.

Como você verá na Seção 10.3, o princípio dos trabalhos virtuais afirma que, se uma partícula ou um corpo rígido, ou, de maneira mais geral, um sistema de corpos rígidos ligados entre si, que está em equilíbrio sob a ação de várias forças externas, sofre um deslocamento arbitrário a partir dessa posição de equilíbrio, o trabalho total efetuado pelas forças externas durante o deslocamento é nulo. Este princípio é particularmente eficaz quando aplicado à solução de problemas que envolvam o equilíbrio de máquinas ou mecanismos que consistam em vários elementos ligados entre si.

Na segunda parte do capítulo, o método dos trabalhos virtuais será aplicado de uma forma alternativa, baseada no conceito de *energia potencial*. Será mostrado na Seção 10.8 que, se uma partícula, um corpo rígido ou um sistema de corpos rígidos está em equilíbrio, então a derivada de sua energia potencial em relação a uma variável que define sua posição deve ser zero.

Neste capítulo, você irá também aprender a avaliar a eficiência mecânica de uma máquina (Seção 10.5) e a determinar se uma posição de equilíbrio dada é estável, instável ou neutra (Seção 10.9).

### \*10.2 TRABALHO DE UMA FORÇA

Vamos primeiro definir os termos *deslocamento* e *trabalho* tal como são usados em mecânica. Considere uma partícula que se move de um ponto A em direção a um ponto vizinho A' (Fig 10.1). Se  $r$  representa o vetor posição correspondente ao ponto A, o pequeno vetor que liga A e A' pode ser representado pelo diferencial  $dr$ ; o vetor  $dr$  é chamado de *deslocamento* da partícula. Agora, vamos considerar que a força  $F$  está atuando sobre a partícula. O *trabalho da força F correspondente ao deslocamento dr* é definido pela quantidade

$$dU = F \cdot dr \quad (10.1)$$

a qual obtemos formando o produto escalar da força  $F$  pelo deslocamento  $dr$ . Representando, respectivamente, por  $F$  e  $ds$  as intensidades da força e do deslocamento, e por  $\alpha$  o ângulo formado por  $F$  e  $dr$ , e recordando a definição do produto escalar de dois vetores (Seção 3.9), escrevemos

$$dU = F ds \cos \alpha \quad (10.1')$$

Sendo uma *grandeza escalar*, o trabalho tem intensidade e sinal, mas não direção. Observamos também que o trabalho deve ser expresso

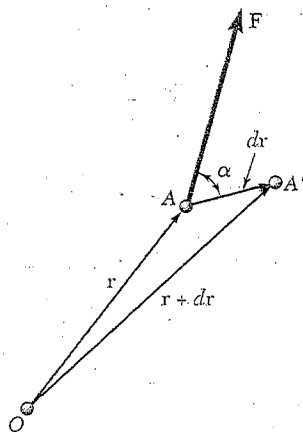


Fig. 10.1

em unidades obtidas pela multiplicação de unidades de comprimento por unidades de força. Portanto, se forem utilizadas unidades do SI, o trabalho deverá ser expresso em  $\text{N} \cdot \text{m}$ . A unidade de trabalho  $\text{N} \cdot \text{m}$  é denominada *joule* (**J**).<sup>1</sup>

Segue-se de (10.1') que o trabalho  $dU$  é positivo se o ângulo  $\alpha$  for agudo, e negativo se o ângulo  $\alpha$  for obtuso. Três casos particulares são de especial interesse. Se a força  $\mathbf{F}$  tem a mesma direção de  $d\mathbf{r}$ , o trabalho  $dU$  se reduz a  $F ds$ . Se  $\mathbf{F}$  tem direção oposta à de  $d\mathbf{r}$ , o trabalho é  $dU = -F ds$ . Finalmente, se  $\mathbf{F}$  é perpendicular a  $d\mathbf{r}$ , o trabalho  $dU$  é zero.

O trabalho  $dU$  de uma força  $\mathbf{F}$  durante um deslocamento  $d\mathbf{r}$  pode também ser considerado o produto de  $F$  pelo componente  $ds \cos \alpha$  do deslocamento  $d\mathbf{r}$  ao longo de  $\mathbf{F}$  (Fig. 10.2a). Essa interpretação é particularmente útil no cálculo do trabalho realizado pelo peso  $\mathbf{W}$  de um corpo (Fig. 10.2b). O trabalho de  $\mathbf{W}$  é igual ao produto de  $W$  pelo deslocamento vertical  $dy$  do centro de gravidade  $G$  do corpo. Se o deslocamento está direcionado para baixo, o trabalho é positivo; se está direcionado para cima, o trabalho é negativo.

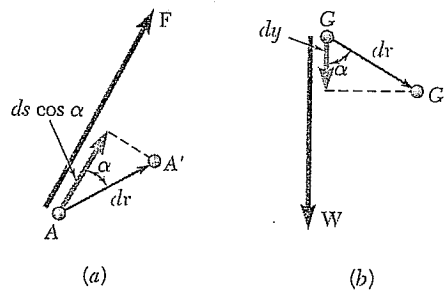


Fig. 10.2

Diversas forças encontradas freqüentemente em estática *não realizam trabalho*: forças aplicadas a pontos fixos ( $ds = 0$ ) ou atuando em uma direção perpendicular ao deslocamento ( $\cos \alpha = 0$ ). Entre essas forças estão: a reação em um pino sem atrito, quando o corpo suportado gira em torno do pino; a reação em uma superfície sem atrito quando o corpo em contato se move ao longo da superfície; a reação em um rolete que se move ao longo de seu trilho; o peso de um corpo quando seu centro de gravidade se move horizontalmente; e a força de atrito que atua em uma roda que rola sem escorregar (pois, em qualquer instante, o ponto de contato não se move). Exemplos de forças que *realizam trabalho* são: o peso de um corpo (exceto no caso considerado acima), a força de atrito que atua em um corpo que escorrega em uma superfície rugosa, e a maioria das forças aplicadas a um corpo em movimento.

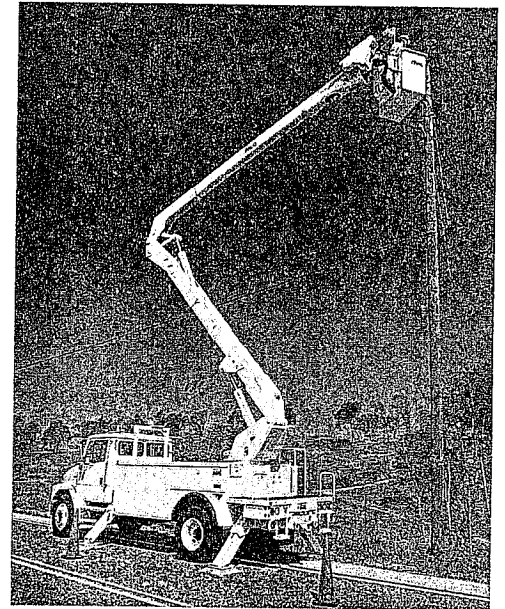


Foto 10.1 As forças exercidas pelos cilindros hidráulicos para posicionar a caçamba suspensa mostrada podem ser determinadas efetivamente por meio do método dos trabalhos virtuais, pois existe uma relação simples entre os deslocamentos dos pontos de aplicação das forças que atuam sobre os elementos do elevador.

<sup>1</sup> Joule é a unidade do SI de *energia*, seja na forma mecânica (trabalho, energia potencial, energia cinética) ou na forma química, elétrica ou térmica. Devemos notar que, embora  $\text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$ , o momento de uma força deve ser expresso em  $\text{N} \cdot \text{m}$  e não em joules, pois o momento de uma força não é uma forma de energia.

Em certos casos, a soma do trabalho realizado por várias forças é igual a zero. Considere, por exemplo, dois corpos rígidos  $AC$  e  $BC$  unidos em  $C$  por um *pino sem atrito* (Fig. 10.3a). Entre as forças que atuam em  $AC$  está a força  $\mathbf{F}$  exercida em  $C$  por  $BC$ . Em geral, o trabalho dessa força não será igual a zero, mas será igual em intensidade e oposto em sinal ao trabalho da força  $-\mathbf{F}$  exercida por  $AC$  em  $BC$ , pois essas forças são iguais e opostas e são aplicadas à mesma partícula. Portanto, quando se considera o trabalho total feito por todas as forças que atuam em  $AC$  e  $BC$ , o trabalho das duas forças internas em  $C$  se cancela. Um resultado similar é obtido se considerarmos um sistema que consista em dois blocos unidos por uma *corda inextensível*  $AB$  (Fig. 10.3b). O trabalho da força de tração  $\mathbf{T}$  em  $A$  é igual em intensidade ao trabalho da força de tração  $\mathbf{T}'$  em  $B$ , já que essas forças têm a mesma intensidade e os pontos  $A$  e  $B$  se movem pela mesma distância; mas, em um caso, o trabalho é positivo, e no outro é negativo. Portanto, o trabalho das forças internas novamente se cancela.

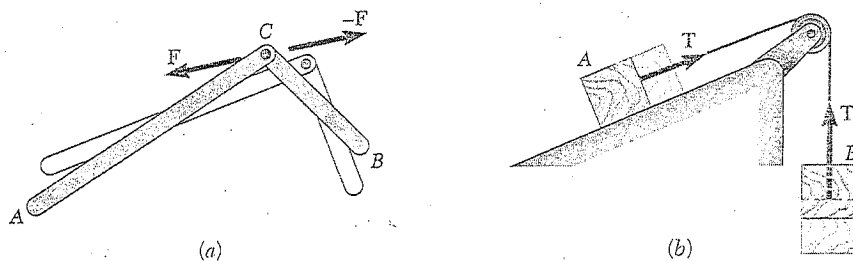


Fig. 10.3

Pode-se mostrar que o trabalho total das forças internas que mantêm unidas as partículas de um corpo rígido é igual a zero. Considere duas partículas  $A$  e  $B$  de um corpo rígido e as duas forças iguais e opostas  $\mathbf{F}$  e  $-\mathbf{F}$  que elas exercem uma sobre a outra (Fig. 10.4). Enquanto, em geral, pequenos deslocamentos  $d\mathbf{x}$  e  $d\mathbf{x}'$  das duas partículas são diferentes, os componentes desses deslocamentos ao longo de  $AB$  devem ser iguais; de outra forma, as partículas não permaneceriam à mesma distância uma da outra, e o corpo não seria rígido. Portanto, o trabalho de  $\mathbf{F}$  é igual em intensidade e oposto em sinal ao trabalho de  $-\mathbf{F}$ , e a soma deles é igual a zero.

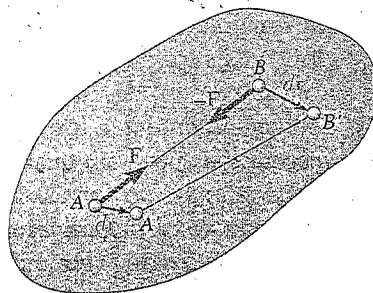


Fig. 10.4

Quando se calcula o trabalho das forças externas que atuam em um corpo rígido, freqüentemente é conveniente determinar o trabalho de um binário sem considerar separadamente o trabalho de cada uma das duas forças que formam o binário. Considere as duas forças  $\mathbf{F}$  e  $-\mathbf{F}$  que formam um binário de momento  $\mathbf{M}$  e atuam sobre um corpo rígido

(Fig. 10.5). Qualquer pequeno deslocamento do corpo rígido que leve  $A$  e  $B$ , respectivamente, até  $A'$  e  $B''$  pode ser dividido em duas partes, em uma das quais os pontos  $A$  e  $B$  sofrem deslocamentos iguais  $dr_1$ , e outra em que  $A'$  permanece fixo enquanto  $B'$  se move até  $B''$  por meio de um deslocamento  $dr_2$  de intensidade  $ds_2 = r d\theta$ . Na primeira parte do movimento, o trabalho de  $\mathbf{F}$  é igual em intensidade e oposto em sinal ao trabalho de  $-\mathbf{F}$ , e a soma desses trabalhos é zero. Na segunda parte do movimento, somente a força  $\mathbf{F}$  realiza trabalho, e seu trabalho é  $dU = F ds_2 = Fr d\theta$ . Porém, o produto  $Fr$  é igual à intensidade  $M$  do momento do binário. Portanto, o trabalho de um binário de momento  $\mathbf{M}$  que atua sobre um corpo rígido é

$$dU = M d\theta \quad (10.2)$$

sendo  $d\theta$  o pequeno ângulo, expresso em radianos, que o corpo roda. Novamente, observamos que o trabalho deve ser expresso em unidades obtidas pela multiplicação de unidades de comprimento por unidades de força.

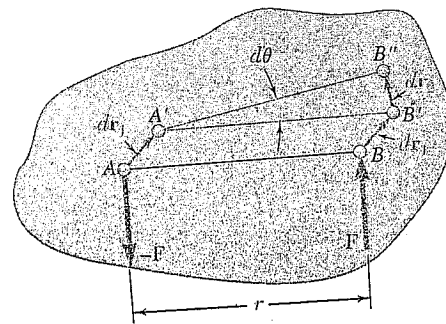


Fig. 10.5

### \*10.3 PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Considere uma partícula submetida à ação de várias forças  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$  (Fig. 10.6). Podemos imaginar que essa partícula sofre um pequeno deslocamento de  $A$  até  $A'$ . Esse deslocamento é possível, porém não será necessariamente realizado. As forças podem estar equilibradas e a partícula estar em repouso, ou a partícula pode se mover sob a ação das forças dadas em uma direção diferente de  $AA'$ . Como o deslocamento considerado não ocorre realmente, ele é denominado *deslocamento virtual*, e é representado por  $\delta r$ . O símbolo  $\delta r$  representa um diferencial de primeira ordem; ele é utilizado para distinguir o deslocamento virtual do deslocamento  $dr$  que ocorreria no movimento real. Como você verá, deslocamentos virtuais podem ser usados para se determinar se as condições de equilíbrio de uma partícula material estão satisfeitas.

O trabalho de cada uma das forças  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$  durante o deslocamento virtual  $\delta r$  é denominado *trabalho virtual*. O trabalho virtual de todas as forças que atuam na partícula da Fig. 10.6 é

$$\begin{aligned} \delta U &= \mathbf{F}_1 \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{F}_2 \cdot \delta \mathbf{r} + \dots + \mathbf{F}_n \cdot \delta \mathbf{r} \\ &= (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n) \cdot \delta \mathbf{r} \end{aligned}$$

ou

$$\delta U = \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r} \quad (10.3)$$

sendo  $\mathbf{R}$  a resultante das forças dadas. Portanto, o trabalho virtual total das forças  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$  é igual ao trabalho virtual de sua resultante  $\mathbf{R}$ .

O princípio dos trabalhos virtuais para uma partícula estabelece que, se uma partícula está em equilíbrio, o trabalho virtual total das forças que atim sobre ela é zero para qualquer deslocamento virtual dessa partícula. Essa condição é necessária: se a partícula estiver em equilíbrio, a resultante  $\mathbf{R}$  das forças será zero, e segue-se da Eq. (10.3) que o trabalho virtual total  $\delta U$  é zero. A condição é também suficiente: se o trabalho virtual total  $\delta U$  é zero para qualquer deslocamento virtual, o produto escalar  $\mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r}$  é zero para qualquer  $\delta \mathbf{r}$ , e a resultante  $\mathbf{R}$  deve ser zero.

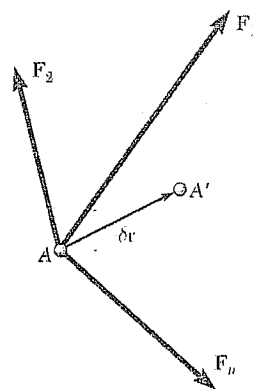


Fig. 10.6

No caso de um corpo rígido, o princípio dos trabalhos virtuais estabelece que, *se um corpo rígido está em equilíbrio, o trabalho virtual total das forças externas que atuam sobre o corpo rígido é zero para qualquer deslocamento virtual desse corpo*. A condição é necessária: se o corpo está em equilíbrio, todas as partículas que formam o corpo estão em equilíbrio e o trabalho virtual total das forças que atuam sobre todas as partículas deve ser zero; vimos, porém, na seção anterior, que o trabalho total das forças internas é zero; portanto, o trabalho total das forças externas deve também ser zero. Pode-se demonstrar que essa condição é também suficiente.

O princípio dos trabalhos virtuais pode ser estendido ao caso de um *sistema de corpos rígidos ligados entre si*. Se o sistema permanece ligado durante o deslocamento virtual, *somente o trabalho das forças externas ao sistema precisa ser considerado*, pois o trabalho total das forças internas nas várias conexões é zero.

#### \*10.4 APLICAÇÕES DO PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

O princípio dos trabalhos virtuais é particularmente eficaz quando aplicado à solução de problemas que envolvam máquinas ou mecanismos que consistam em vários corpos rígidos ligados entre si. Considere, por exemplo, a alavanca articulada *ACB* da Fig. 10.7a, usada para comprimir um bloco de madeira. Desejamos determinar a força exercida pela alavanca sobre o bloco quando uma dada força *P* é aplicada em *C*, considerando que não há atrito. Representando por *Q* a reação do bloco sobre a alavanca, traçamos o diagrama de corpo livre da alavanca e consideramos o deslocamento virtual obtido dando um incremento positivo  $\delta\theta$  ao ângulo  $\theta$  (Fig. 10.7b). Escolhendo um sistema de eixos coordenados

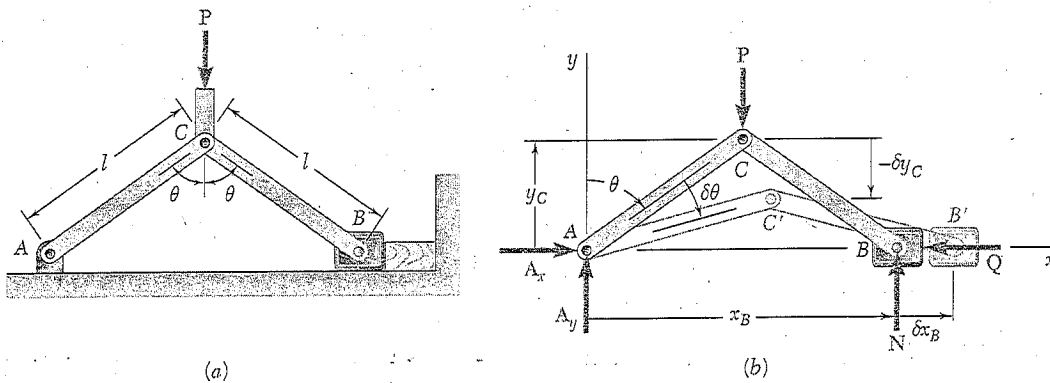


Fig. 10.7

com a origem em *A*, verificamos que  $x_B$  aumenta enquanto  $y_C$  diminui. Isso é indicado na figura, onde são mostrados um incremento positivo  $\delta x_B$  e um incremento negativo  $-\delta y_C$ . As reações  $A_x$ ,  $A_y$  e  $N$  não realizarão trabalho durante o deslocamento virtual considerado, e precisamos calcular apenas o trabalho de *P* e *Q*. Como *Q* e  $\delta x_B$  têm sentidos opostos, o trabalho virtual de *Q* é  $\delta U_Q = -Q \delta x_B$ . Como *P* e o incremento mostrado ( $-\delta y_C$ ) têm o mesmo sentido, o trabalho virtual de *P* é  $\delta U_P = +P(-\delta y_C) = -P \delta y_C$ . O sinal de menos obtido poderia ter sido previsto pela simples observação de que as forças *Q* e *P* estão direcionadas em

sentidos opostos aos eixos  $x$  e  $y$  positivos, respectivamente. Expressando as coordenadas  $x_B$  e  $y_C$  em termos do ângulo  $\theta$  e diferenciando, obtemos

$$\begin{aligned} x_B &= 2l \sin \theta & y_C &= l \cos \theta \\ \delta x_B &= 2l \cos \theta \delta \theta & \delta y_C &= -l \sin \theta \delta \theta \end{aligned} \quad (10.4)$$

O trabalho virtual total das forças  $Q$  e  $P$  é, portanto,

$$\begin{aligned} \delta U &= \delta U_Q + \delta U_P = -Q \delta x_B - P \delta y_C \\ &= -2Ql \cos \theta \delta \theta + Pl \sin \theta \delta \theta \end{aligned}$$

Estabelecendo  $\delta U = 0$ , obtemos

$$2Ql \cos \theta \delta \theta = Pl \sin \theta \delta \theta \quad (10.5)$$

$$Q = \frac{1}{2} P \operatorname{tg} \theta \quad (10.6)$$

A superioridade do método dos trabalhos virtuais sobre as equações convencionais de equilíbrio, no problema aqui considerado, é clara: utilizando o método dos trabalhos virtuais, fomos capazes de eliminar todas as reações desconhecidas, enquanto a equação  $\Sigma M_A = 0$  teria eliminado apenas duas dessas reações desconhecidas. Essa propriedade do método dos trabalhos virtuais pode ser usada na resolução de muitos problemas que envolvam máquinas e mecanismos. *Se o deslocamento virtual considerado é compatível com as restrições impostas pelos apoios e conexões, todas as reações e forças internas são eliminadas, e somente o trabalho das cargas, das forças aplicadas e das forças de atrito precisa ser considerado.*

Pode-se também usar o método dos trabalhos virtuais para resolver problemas que envolvem estruturas rígidas, embora os deslocamentos virtuais considerados nunca venham de fato a ocorrer. Considere, por exemplo, a estrutura  $ACB$  mostrada na Fig. 10.8a. Se o ponto  $A$  é mantido fixo, enquanto  $B$  sofre um deslocamento virtual horizontal (Fig. 10.8b), precisamos considerar somente o trabalho de  $P$  e  $B_x$ . Podemos,

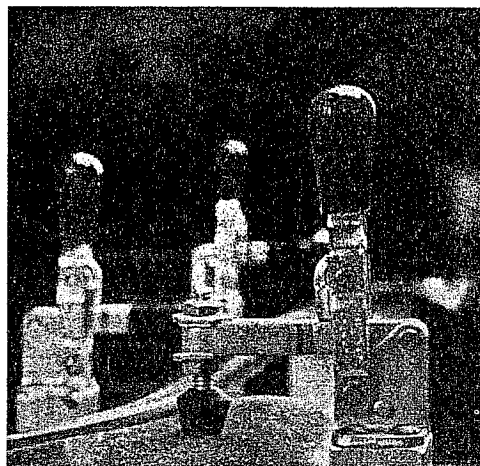
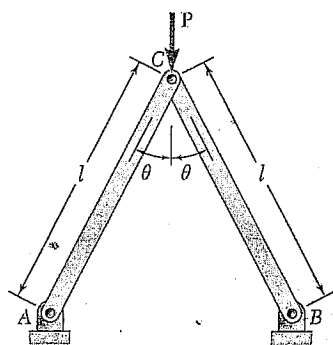
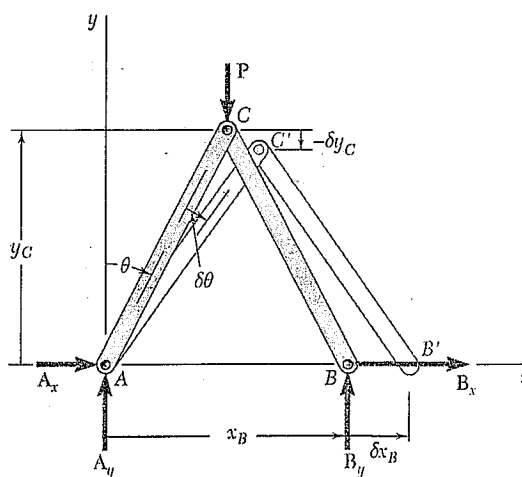


Foto 10.2 A força de aperto do torno articulado aqui mostrado pode ser expressa como função da força aplicada ao seu cabo, primeiro estabelecendo-se as relações geométricas entre os elementos do torno e, em seguida, aplicando-se o método dos trabalhos virtuais.



(a)



(b)

Fig. 10.8

portanto, determinar o componente  $B_x$  da reação do mesmo modo que determinamos a força  $Q$  no exemplo anterior (Fig. 10.7b); temos

$$B_x = -\frac{1}{2}P \operatorname{tg} \theta$$

Mantendo  $B$  fixo e dando a  $A$  um deslocamento virtual horizontal podemos, analogamente, determinar o componente  $A_x$  da reação. Os componentes  $A_y$  e  $B_y$  podem ser determinados girando-se a estrutura  $ACB$  como um corpo rígido, em torno de  $B$  e de  $A$ , respectivamente.

O método dos trabalhos virtuais pode também ser usado para se determinar a configuração de um sistema em equilíbrio submetido a forças dadas. Por exemplo, o valor do ângulo  $\theta$  para o qual a articulação da Fig. 10.7 está em equilíbrio, sob a ação de duas forças dadas  $P$  e  $Q$ , pode ser obtido resolvendo-se a Eq. (10.6) para  $\operatorname{tg} \theta$ .

Deve-se observar, entretanto, que o atrativo do método dos trabalhos virtuais depende, em grande parte, da existência de relações geométricas simples entre os vários deslocamentos virtuais envolvidos na solução de um dado problema. Quando tais relações simples não existirem, em geral é aconselhável voltar ao método convencional do Cap. 6.

### \*10.5 MÁQUINAS REAIS. EFICIÊNCIA MECÂNICA

Analisando a alavanca articulada na seção anterior, consideramos que não havia forças de atrito envolvidas. Assim, o trabalho virtual consistiu somente no trabalho da força aplicada  $P$  e na reação  $Q$ . Mas o trabalho da reação  $Q$  é igual em intensidade e oposto em sinal ao trabalho da força exercida pela alavanca sobre o bloco. A Eq. (10.5), portanto, expressa que o *trabalho produzido (output)*,  $2Ql \cos \theta \delta\theta$ , é igual ao *trabalho recebido (input)*  $Pl \sin \theta \delta\theta$ . Uma máquina na qual os trabalhos recebido e produzido são iguais é chamada de máquina "ideal". Em uma máquina "real", as forças de atrito sempre realizarão algum trabalho, e o trabalho produzido será menor que o trabalho recebido.

Considere, por exemplo, a alavanca articulada da Fig. 10.7a e admita agora que uma força de atrito  $F$  se desenvolva entre o bloco deslizante  $B$  e o plano horizontal (Fig. 10.9). Usando os métodos convencionais da estática e somando os momentos em relação a  $A$ , obtemos  $N = P/2$ . Representando por  $\mu$  o coeficiente de atrito entre o bloco  $B$  e o

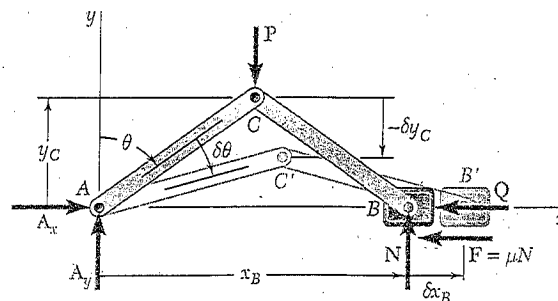


Fig. 10.9



plano horizontal, temos  $F = \mu N = \mu P/2$ . Relembrando as fórmulas (10.4), encontramos que o trabalho virtual total das forças  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{F}$  durante o deslocamento virtual mostrado na Fig. 10.9 é

$$\begin{aligned}\delta U &= -Q \delta x_B - P \delta y_C - F \delta x_B \\ &= -2Ql \cos \theta \delta \theta + Pl \operatorname{sen} \theta \delta \theta - \mu Pl \cos \theta \delta \theta\end{aligned}$$

Estabelecendo  $\delta U = 0$ , obtemos

$$2Ql \cos \theta \delta \theta = Pl \operatorname{sen} \theta \delta \theta - \mu Pl \cos \theta \delta \theta \quad (10.7)$$

que mostra que o trabalho produzido é igual ao trabalho recebido menos o trabalho da força de atrito. Resolvendo para  $Q$ , temos

$$Q = \frac{1}{2} P (\operatorname{tg} \theta - \mu) \quad (10.8)$$

Notamos que  $Q = 0$  quando  $\operatorname{tg} \theta = \mu$ , ou seja, quando  $\theta$  é igual ao ângulo de atrito  $\phi$ , e que  $Q < 0$  quando  $\theta < \phi$ . A alavanca articulada pode, então, ser usada somente para valores de  $\theta$  maiores que o ângulo de atrito.

A *eficiência mecânica* de uma máquina é definida pela relação

$$\eta = \frac{\text{trabalho produzido}}{\text{trabalho recebido}} \quad (10.9)$$

Claramente, a eficiência mecânica de uma máquina ideal é  $\eta = 1$ , uma vez que os trabalhos recebido e produzido são iguais, enquanto a eficiência mecânica de uma máquina real será sempre menor que 1.

No caso da alavanca articulada que acabamos de analisar, escrevemos

$$\eta = \frac{\text{trabalho produzido}}{\text{trabalho recebido}} = \frac{2Ql \cos \theta \delta \theta}{Pl \operatorname{sen} \theta \delta \theta}$$

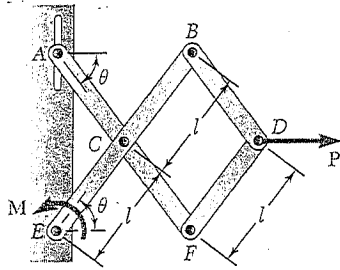
Substituindo o valor de  $Q$  dado na Eq. (10.8), obtemos

$$\eta = \frac{P (\operatorname{tg} \theta - \mu) l \cos \theta \delta \theta}{Pl \operatorname{sen} \theta \delta \theta} = 1 - \mu \cot \theta \quad (10.10)$$

Verificamos que, na ausência de forças de atrito, teremos  $\mu = 0$  e  $\eta = 1$ . No caso geral, quando  $\mu$  é diferente de zero, a eficiência  $\eta$  torna-se zero para  $\mu \cot \theta = 1$ , ou seja, para  $\operatorname{tg} \theta = \mu$ , ou  $\theta = \operatorname{tg}^{-1} \mu = \phi$ . Observamos, novamente, que a alavanca articulada pode ser usada somente para valores de  $\theta$  maiores que o ângulo de atrito  $\phi$ .

### PROBLEMA RESOLVIDO 10.1

Usando o método dos trabalhos virtuais, determine a intensidade do binário  $M$  necessária para se manter o equilíbrio do mecanismo mostrado na figura.



### SOLUÇÃO

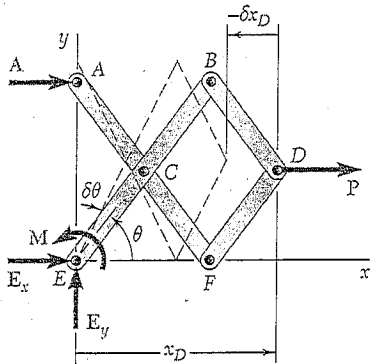
Escolhendo um sistema de eixos coordenados com origem em  $E$ , temos

$$x_D = 3l \cos \theta \quad \delta x_D = -3l \sin \theta \delta \theta$$

**Princípio dos trabalhos virtuais.** Como as reações  $A$ ,  $E_x$  e  $E_y$  não realizarão trabalho durante o deslocamento virtual, o trabalho virtual total realizado por  $M$  e  $P$  deve ser zero. Observando que  $P$  atua no sentido positivo do eixo dos  $x$  e que  $M$  atua no sentido positivo de  $\theta$ , escrevemos

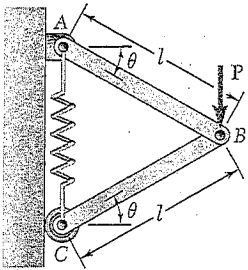
$$\begin{aligned} \delta U = 0: \quad & +M \delta \theta + P \delta x_D = 0 \\ & +M \delta \theta + P (-3l \sin \theta \delta \theta) = 0 \end{aligned}$$

$$M = 3Pl \sin \theta \quad \blacktriangleleft$$



### PROBLEMA RESOLVIDO 10.2

Determine as expressões para  $\theta$  e para a tração na mola que correspondem à posição de equilíbrio do mecanismo. O comprimento indeformado da mola é  $h$ , e a constante de mola é  $k$ . Despreze o peso do mecanismo.



### SOLUÇÃO

Com o sistema de coordenadas mostrado

$$\begin{aligned} y_B &= l \sin \theta & y_C &= 2l \sin \theta \\ \delta y_B &= l \cos \theta \delta \theta & \delta y_C &= 2l \cos \theta \delta \theta \end{aligned}$$

O alongamento da mola é

$$s = y_C - h = 2l \sin \theta - h$$

A intensidade da força exercida em  $C$  pela mola é

$$F = ks = k(2l \sin \theta - h) \quad (1)$$

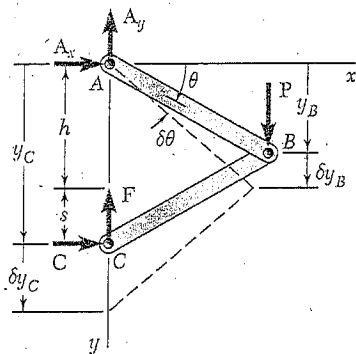
**Princípio dos trabalhos virtuais.** Como as reações  $A_x$ ,  $A_y$  e  $C$  não realizam trabalho, o trabalho virtual total realizado por  $P$  e  $F$  deve ser zero.

$$\begin{aligned} \delta U = 0: \quad & P \delta y_B - F \delta y_C = 0 \\ & P(l \cos \theta \delta \theta) - k(2l \sin \theta - h)(2l \cos \theta \delta \theta) = 0 \end{aligned}$$

$$\sin \theta = \frac{P + 2kh}{4kl} \quad \blacktriangleleft$$

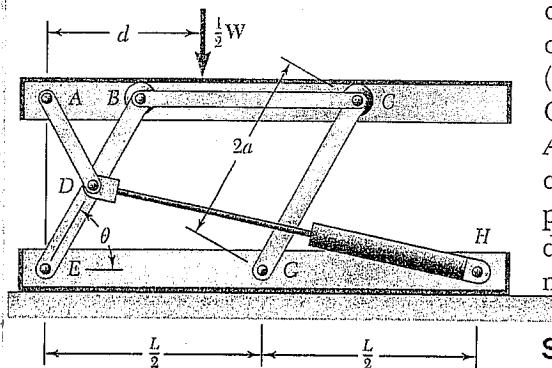
Substituindo esta expressão em (1), obtemos

$$F = \frac{1}{2} P \quad \blacktriangleleft$$



### PROBLEMA RESOLVIDO 10.3

Uma mesa de elevação hidráulica é usada para erguer um engradado de 1.000 kg. A mesma consiste em uma plataforma e dois sistemas articulados idênticos, nos quais cilindros hidráulicos exercem forças iguais. (Somente um sistema articulado e um cilindro são mostrados na figura.) Os elementos  $EDB$  e  $CG$  têm, cada qual, comprimento  $2a$ , e o elemento  $AD$  está preso por um pino ao ponto médio de  $EDB$ . Se o engradado é colocado sobre a mesa de modo tal que metade do seu peso é suportada pelo sistema mostrado na figura, determine a força exercida por cada cilindro na elevação do engradado para  $\theta = 60^\circ$ ,  $a = 0,70$  m e  $L = 3,20$  m. Esse mecanismo já foi considerado anteriormente, no Problema Resolvido 6.7.



### SOLUÇÃO

A máquina considerada consiste na plataforma e no sistema articulado, com uma força aplicada (*input*)  $F_{DH}$  exercida pelo cilindro e uma força de saída (*output*) igual e oposta a  $1/2 W$ .

**Princípio dos trabalhos virtuais.** Inicialmente observamos que as reações em  $E$  e  $G$  não realizam trabalho. Representando por  $y$  a elevação da plataforma acima da base e por  $s$  o comprimento  $DH$  do conjunto cilindro-pistão, escrevemos

$$\delta U = 0: \quad -\frac{1}{2} W \delta y + F_{DH} \delta s = 0 \quad (1)$$

O deslocamento vertical  $\delta y$  da plataforma é expresso em termos do deslocamento angular  $\delta\theta$  de  $EDB$  como se segue:

$$y = (EB) \text{ sen } \theta = 2a \text{ sen } \theta$$

$$\delta y = 2a \text{ cos } \theta \delta\theta$$

Analogamente, para expressar  $\delta s$  em termos de  $\delta\theta$ , primeiro verificamos que, pela lei dos co-senos,

$$s^2 = a^2 + L^2 - 2aL \text{ cos } \theta$$

Diferenciando,

$$2s \delta s = -2aL (-\text{sen } \theta) \delta\theta$$

$$\delta s = \frac{aL \text{ sen } \theta}{s} \delta\theta$$

Substituindo para  $\delta y$  e  $\delta s$  em (1), escrevemos

$$\left(-\frac{1}{2} W\right) 2a \text{ cos } \theta \delta\theta + F_{DH} \frac{aL \text{ sen } \theta}{s} \delta\theta = 0$$

$$F_{DH} = W \frac{s}{L} \text{ cot } \theta$$

Com os dados numéricos fornecidos, temos

$$W = mg = (1.000 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2) = 9.810 \text{ N} = 9,81 \text{ kN}$$

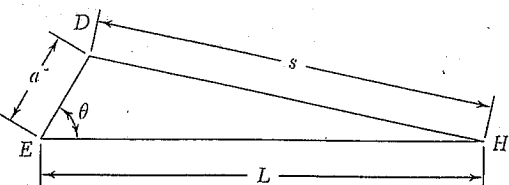
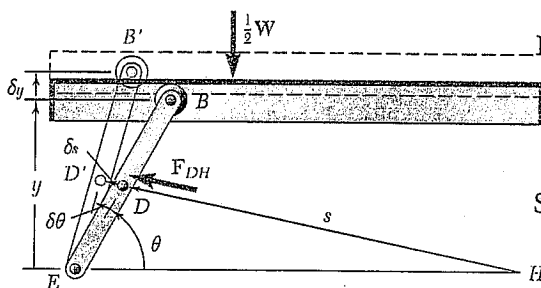
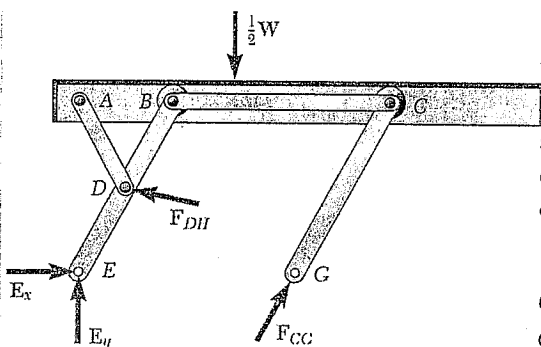
$$s^2 = a^2 + L^2 - 2aL \text{ cos } \theta$$

$$= (0,70)^2 + (3,20)^2 - 2(0,70)(3,20) \text{ cos } 60^\circ = 8,49$$

$$s = 2,91 \text{ m}$$

$$F_{DH} = W \frac{s}{L} \text{ cot } \theta = (9,81 \text{ kN}) \frac{2,91 \text{ m}}{3,20 \text{ m}} \text{ cot } 60^\circ$$

$$F_{DH} = 5,15 \text{ kN} \quad \blacktriangleleft$$



# METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, você aprendeu a usar o *método dos trabalhos virtuais*, que é uma maneira diferente de resolver problemas que envolvam o equilíbrio de corpos rígidos.

O trabalho realizado por uma força durante um deslocamento do seu ponto de aplicação ou por um binário durante uma rotação é obtido por meio das Eqs. (10.1) e (10.2), respectivamente:

$$dU = F ds \cos \alpha \quad (10.1)$$

$$dU = M d\theta \quad (10.2)$$

**Princípio dos trabalhos virtuais.** Em sua forma mais geral e mais útil, esse princípio pode ser escrito como se segue: *se um sistema de corpos rígidos ligados entre si está em equilíbrio, o trabalho virtual total das forças externas aplicadas ao sistema é igual a zero para qualquer deslocamento virtual desse sistema.*

Quando for aplicar o princípio dos trabalhos virtuais, tenha em mente o seguinte:

**1. Deslocamento virtual.** Uma máquina ou mecanismo não tem tendência a se mover. Entretanto, *podemos causar, ou imaginar, um pequeno deslocamento.* Como não ocorre de fato, tal deslocamento é chamado de *deslocamento virtual*.

**2. Trabalho virtual.** O trabalho realizado por uma força ou um binário durante um deslocamento virtual é chamado de *trabalho virtual*.

**3. Você só precisa considerar as forças que realizam trabalho** durante o deslocamento virtual. É importante lembrar que somente o componente de um deslocamento virtual paralelo a uma força dada precisa ser considerado quando você estiver calculando o trabalho virtual. Essa é a razão pela qual, por exemplo, no Problema Resolvido 10.2 somente o deslocamento vertical do pino *B* foi determinado.

**4. Forças que não realizam trabalho** durante um deslocamento virtual que sejam consistentes com as restrições impostas no sistema incluem as seguintes:

- a. Reações nos apoios
- b. Forças internas nas ligações
- c. Forças exercidas por cordas e cabos inextensíveis

Nenhuma dessas forças precisa ser considerada quando você usar o método dos trabalhos virtuais.

**5. Certifique-se de expressar os vários deslocamentos virtuais** envolvidos nos seus cálculos em termos de um *único deslocamento virtual*. Isso foi feito em cada um dos três problemas resolvidos precedentes, nos quais os deslocamentos virtuais foram todos expressos em termos de  $\delta\theta$ . Além disso, deslocamentos virtuais contendo termos de segunda ordem e de ordem mais alta [por exemplo,  $(\delta\theta)^2$  e  $(\delta x)^2$ ] podem ser ignorados quando você estiver calculando o trabalho virtual.

**6. Lembre-se de que o método dos trabalhos virtuais é efetivo somente nos casos** em que a geometria do sistema torna relativamente fácil relacionar os deslocamentos envolvidos.

**7. O trabalho da força *F* exercida por uma mola durante um deslocamento virtual  $\delta x$**  é dado por  $\delta U = F\delta x$ . Na próxima seção você vai determinar o trabalho realizado durante um deslocamento finito da força exercida por uma mola.

# PROBLEMAS

10.1 e 10.2 Determine a força vertical  $P$  que deve ser aplicada em  $G$  para se manter o equilíbrio do sistema articulado.

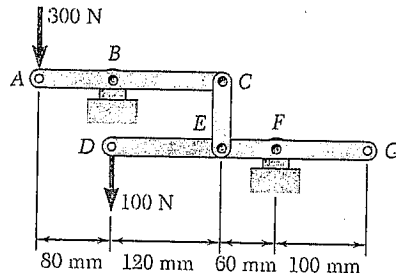


Fig. P10.1 e P10.4

10.3 e 10.4 Determine o binário  $M$  que deve ser aplicado ao elemento  $DEFG$  para se manter o equilíbrio do sistema articulado.

10.5 Uma mola indeformada de constante  $7,2 \text{ N/cm}$  é presa a pinos nos pontos  $C$  e  $I$  tal como mostra a figura. O pino em  $B$  é preso ao elemento  $BDE$  e pode deslizar livremente ao longo da fenda na placa fixa. Determine a força na mola e o deslocamento horizontal do ponto  $H$  quando uma força horizontal de  $90 \text{ N}$  direcionada para a direita é aplicada (a) no ponto  $G$ , (b) nos pontos  $G$  e  $H$ .

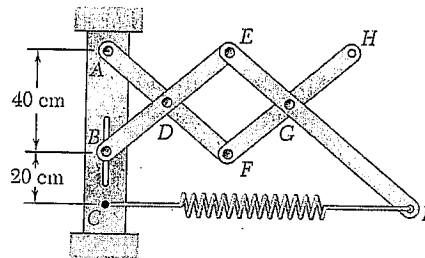


Fig. P10.5 e P10.6

10.6 Uma mola indeformada de constante  $7,2 \text{ N/cm}$  é presa a pinos nos pontos  $C$  e  $I$  tal como mostra a figura. O pino em  $B$  é preso ao elemento  $BDE$  e pode deslizar livremente ao longo da fenda na placa fixa. Determine a força na mola e o deslocamento horizontal do ponto  $H$  quando uma força horizontal de  $90 \text{ N}$  direcionada para a direita é aplicada (a) no ponto  $E$ , (b) nos pontos  $D$  e  $E$ .

10.7 Sabendo que a força de atrito máxima exercida pela garrafa sobre a rolha é  $300 \text{ N}$ , determine (a) a força  $P$  que se deve aplicar ao saca-rolhas para abrir a garrafa, (b) a força máxima exercida pela base do saca-rolhas sobre a boca da garrafa.

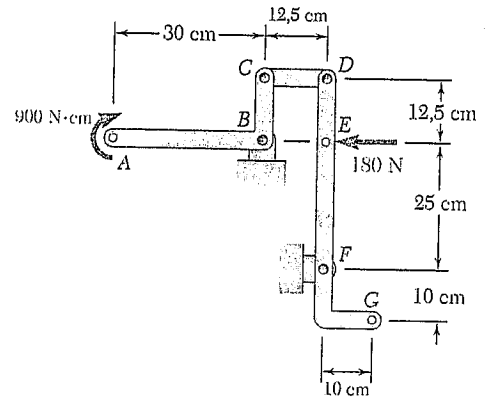


Fig. P10.2 e P10.3

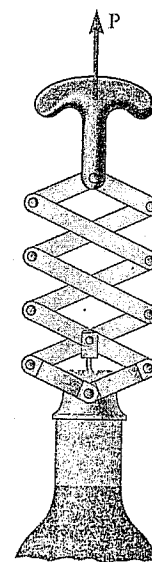


Fig. P10.7

10.8 O mecanismo articulado de duas barras mostrado na figura é sustentado por um pino e um suporte em  $B$  e por um colar em  $D$ , que desliza livremente sobre uma haste vertical. Determine a força  $P$  necessária para se manter o equilíbrio do mecanismo.

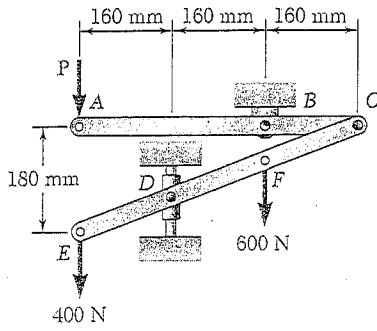


Fig. P10.8

10.9 A força  $P$  atua sobre o mecanismo mostrado na figura; deduza uma expressão para a intensidade da força  $Q$  necessária para o equilíbrio.

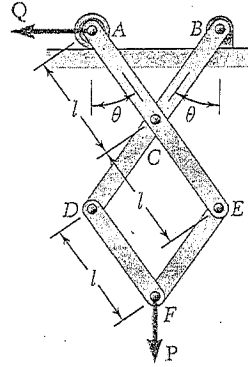


Fig. P10.9

10.10 Sabendo que a linha de ação da força  $Q$  passa pelo ponto  $C$ , deduza uma expressão para a intensidade de  $Q$  necessária para se manter o equilíbrio.

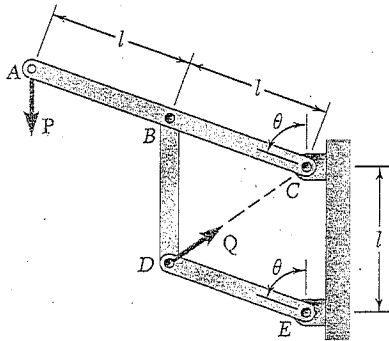


Fig. P10.10

10.11 Resolva o Problema 10.10 considerando que a força  $P$  aplicada no ponto  $A$  atua horizontalmente para a esquerda.

10.12 A haste fina  $AB$  é presa a um colar  $A$  e repousa sobre uma pequena roda em  $C$ . Desprezando o raio da roda e o efeito do atrito, deduza uma expressão para a intensidade da força  $Q$  necessária para se manter o equilíbrio da haste.

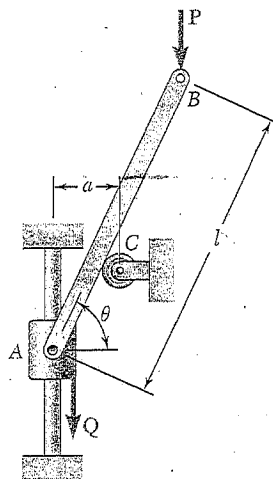


Fig. P10.12

10.13 Uma mesa com elevador de tesoura dupla é usada para levantar um componente de máquina de 4.500 N. A mesa consiste em uma plataforma e dois mecanismos articulados idênticos sobre os quais cilindros hidráulicos exercem forças iguais. (Somente um mecanismo e um cilindro são mostrados.) Cada elemento do mecanismo tem 60 cm de comprimento, e os pinos  $C$  e  $G$  estão nos pontos médios de seus respectivos elementos. O cilindro hidráulico está preso por pinos em  $A$  à base da mesa e em  $F$  que está a 15 cm de  $E$ . Se o componente está colocado sobre a mesa de modo que metade do seu peso é sustentada pelo sistema mostrado na figura, determine a força exercida por cada cilindro quando  $\theta = 30^\circ$ .

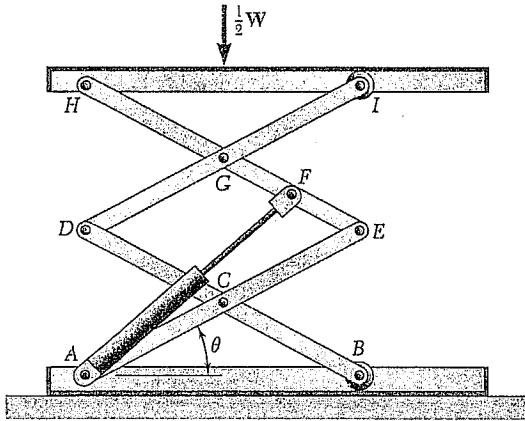


Fig. P10.13 e P10.14

10.14 Uma mesa com elevador de tesoura dupla é usada para levantar um componente de máquina de 4.500 N. A mesa consiste em uma plataforma e dois mecanismos articulados idênticos sobre os quais cilindros hidráulicos exercem forças iguais. (Somente um mecanismo e um cilindro são mostrados.) Cada elemento do mecanismo tem 60 cm de comprimento, e os pinos  $C$  e  $G$  estão nos pontos médios de seus respectivos elementos. O cilindro hidráulico está preso por pinos em  $A$ , à base da mesa, e em  $F$ , que está a 15 cm de  $E$ . Se o componente está colocado sobre a mesa de modo que metade do seu peso é sustentada pelo sistema mostrado na figura, determine o menor valor admissível de  $\theta$  sabendo que a força máxima que cada cilindro pode exercer é 36 kN.

10.15 a 10.17 Deduza uma expressão para a intensidade do binário  $M$  necessária para se manter o equilíbrio do mecanismo articulado mostrado na figura.

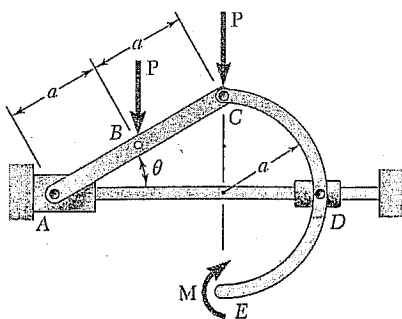


Fig. P10.15

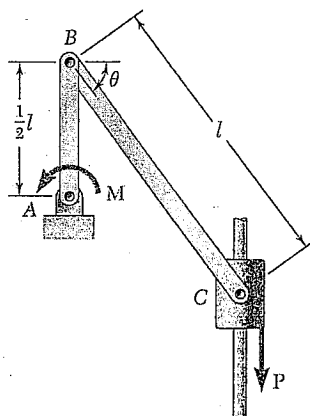


Fig. P10.16

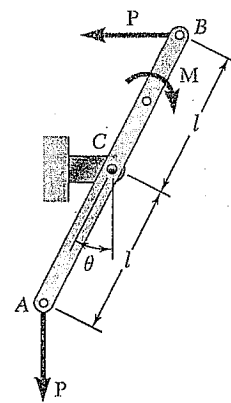


Fig. P10.17

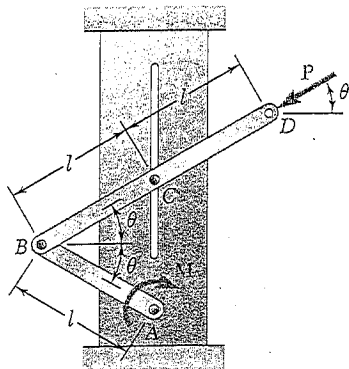


Fig. P10.18

10.18 O pino em  $C$  é preso ao elemento  $BCD$  e pode deslizar ao longo de uma fenda aberta na placa fixa mostrada na figura. Desprezando o efeito do atrito, deduza uma expressão para a intensidade do binário  $M$  necessária para se manter o equilíbrio quando a força  $P$  que atua em  $D$  está direcionada (a) tal como mostra a figura, (b) verticalmente para baixo, (c) horizontalmente para a direita.

10.19 Uma força  $P$  de  $4,5 \text{ kN}$  é aplicada tal como mostra a figura ao pistão de um sistema motor. Sabendo que  $AB = 6,25 \text{ cm}$  e  $BC = 25 \text{ cm}$ , determine o binário  $M$  necessário para se manter o equilíbrio do sistema quando (a)  $\theta = 30^\circ$ , (b)  $\theta = 150^\circ$ .

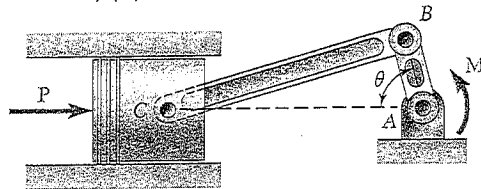


Fig. P10.19 e P10.20

10.20 Um binário  $M$  de intensidade  $101,25 \text{ N} \cdot \text{m}$  é aplicado tal como mostra a figura à manivela de um sistema motor. Sabendo que  $AB = 6,25 \text{ cm}$  e  $BC = 25 \text{ cm}$ , determine a força  $P$  necessária para se manter o equilíbrio do sistema quando (a)  $\theta = 60^\circ$ , (b)  $\theta = 120^\circ$ .

10.21 Para o mecanismo articulado mostrado na figura, determine a força  $P$  necessária para o equilíbrio quando  $a = 45 \text{ cm}$ ,  $M = 2.700 \text{ N} \cdot \text{cm}$  e  $\theta = 30^\circ$ .

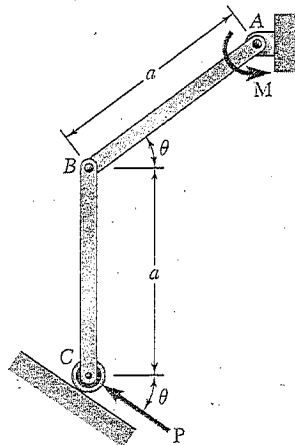


Fig. P10.21 e P10.22

10.22 Para o mecanismo articulado mostrado na figura, determine o binário  $M$  necessário para o equilíbrio quando  $a = 0,6 \text{ m}$ ,  $P = 135 \text{ N}$  e  $\theta = 40^\circ$ .

10.23 Determine o valor de  $\theta$  correspondente à posição de equilíbrio do mecanismo do Problema 10.10 quando  $P = 270 \text{ N}$  e  $Q = 337,5 \text{ N}$ .

10.24 Determine o valor de  $\theta$  correspondente à posição de equilíbrio do mecanismo do Problema 10.11 quando  $P = 90 \text{ N}$  e  $Q = 112,5 \text{ N}$ .

10.25 Uma haste delgada de comprimento  $l$  é presa a um colar em  $B$  e repousa sobre uma parte de um cilindro circular de raio  $r$ . Desprezando o efeito do atrito, determine o valor de  $\theta$  correspondente à posição de equilíbrio do mecanismo quando  $l = 300 \text{ mm}$ ,  $r = 90 \text{ mm}$ ,  $P = 60 \text{ N}$  e  $Q = 120 \text{ N}$ .

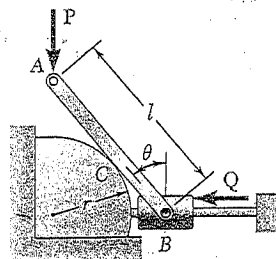


Fig. P10.25 e P10.26

10.26 Uma haste delgada de comprimento  $l$  é presa a um colar em  $B$  e repousa sobre uma parte de um cilindro circular de raio  $r$ . Desprezando o efeito do atrito, determine o valor de  $\theta$  correspondente à posição de equilíbrio do mecanismo quando  $l = 280 \text{ mm}$ ,  $r = 100 \text{ mm}$ ,  $P = 300 \text{ N}$  e  $Q = 600 \text{ N}$ .



**10.27** Determine o valor de  $\theta$  correspondente à posição de equilíbrio do mecanismo do Problema 10.12 quando  $l = 600$  mm,  $a = 100$  mm,  $P = 100$  N e  $Q = 160$  N.

**10.28** Determine o valor de  $\theta$  correspondente à posição de equilíbrio do mecanismo do Problema 10.13 quando  $l = 900$  mm,  $a = 150$  mm,  $P = 75$  N e  $Q = 135$  N.

**10.29** Duas hastas  $AC$  e  $CE$  estão unidas por um pino em  $C$  e por uma mola  $AE$ . A constante da mola é  $k$ , e a mola está indeformada quando  $\theta = 30^\circ$ . Para o carregamento mostrado na figura, deduza uma equação em  $P$ ,  $\theta$ ,  $l$  e  $k$  que deve ser satisfeita quando o sistema está em equilíbrio.

**10.30** Duas hastas  $AC$  e  $CE$  estão unidas por um pino em  $C$  e por uma mola  $AE$ . A constante da mola é  $300$  N/m, e a mola está indeformada quando  $\theta = 30^\circ$ . Sabendo que  $l = 200$  mm e desprezando a massa das hastas, determine o valor de  $\theta$  correspondente ao equilíbrio quando  $P = 160$  N.

**10.31** Resolva o Problema 10.30 considerando que a força  $P$  é movida para  $C$  e atua verticalmente para baixo.

**10.32** Para o mecanismo mostrado na figura, o bloco  $A$  pode se mover livremente em sua guia e repousa contra uma mola de constante  $27$  N/cm que está indeformada quando  $\theta = 45^\circ$ . Para o carregamento mostrado na figura, determine o valor de  $\theta$  correspondente ao equilíbrio.

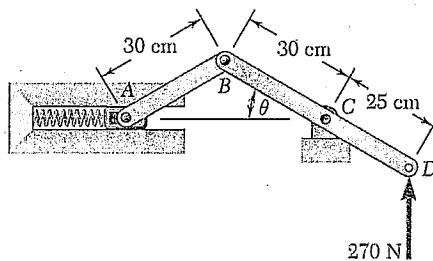


Fig. P10.32

**10.33** Uma força  $P$  de intensidade de  $675$  N é aplicada ao mecanismo articulado em  $B$ . A constante da mola é  $22,5$  N/cm, e a mola está indeformada quando  $AB$  e  $BC$  são horizontais. Desprezando o peso do mecanismo e sabendo que  $l = 37,5$  cm, determine o valor de  $\theta$  correspondente ao equilíbrio.

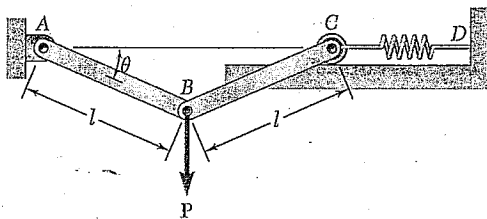


Fig. P10.33 e P10.34

**10.34** Uma força vertical  $P$  é aplicada ao mecanismo articulado em  $B$ . A constante da mola é  $k$ , e a mola está indeformada quando  $AB$  e  $BC$  são horizontais. Desprezando o peso do mecanismo, deduza uma equação em  $\theta$ ,  $P$ ,  $l$  e  $k$  que deve ser satisfeita quando o mecanismo está em equilíbrio.

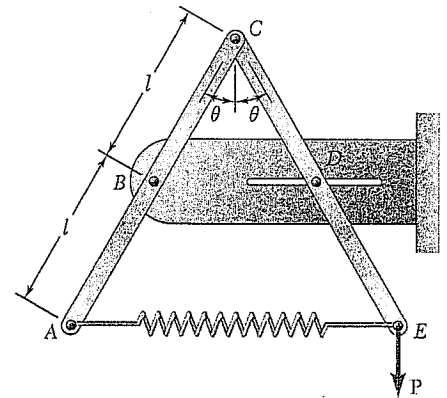


Fig. P10.29 e P10.30

**10.35 e 10.36** Sabendo que a constante da mola  $CD$  é  $k$  e que a mola está indeformada quando a haste  $ABC$  está horizontal, determine o valor de  $\theta$  correspondente ao equilíbrio para os dados indicados.

**10.35**  $P = 675 \text{ N}$ ,  $l = 750 \text{ mm}$ ,  $k = 7,2 \text{ kN/m}$ .

**10.36**  $P = 600 \text{ N}$ ,  $l = 800 \text{ mm}$ ,  $k = 4 \text{ kN/m}$ .

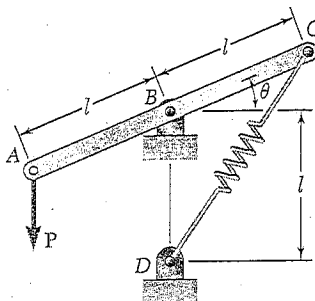


Fig. P10.35 e P10.36

**10.37** Uma força horizontal  $P$  de intensidade de  $160 \text{ N}$  é aplicada ao mecanismo em  $C$ . A constante da mola é  $k = 1,8 \text{ kN/m}$ , e a mola está indeformada quando  $\theta = 0$ . Desprezando a massa do mecanismo, determine o valor de  $\theta$  correspondente ao equilíbrio.

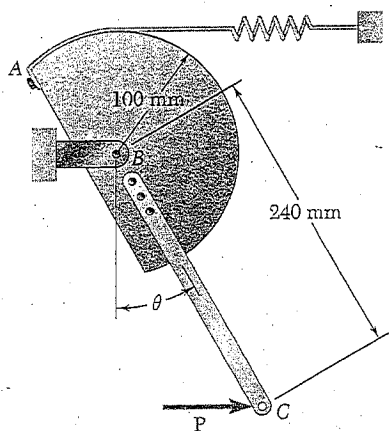


Fig. P10.37

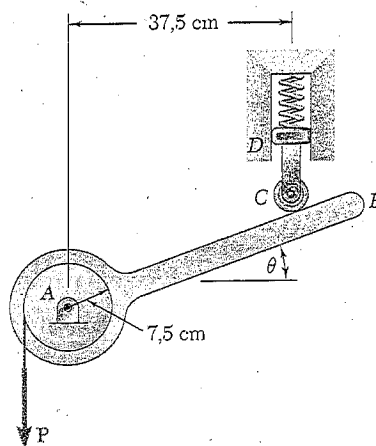


Fig. P10.38

**10.38** Uma corda é enrolada em torno do tambor  $A$  que está preso ao elemento  $AB$ . O bloco  $D$  pode se mover livremente em sua guia e está preso à haste de conexão  $CD$ . Desprezando o peso de  $AB$  e sabendo que a mola é de constante  $7,2 \text{ N/cm}$  e está indeformada quando  $\theta = 0$ , determine o valor de  $\theta$  correspondente ao equilíbrio quando uma força para baixo  $P$  de intensidade  $432 \text{ N}$  é aplicada à extremidade da corda.

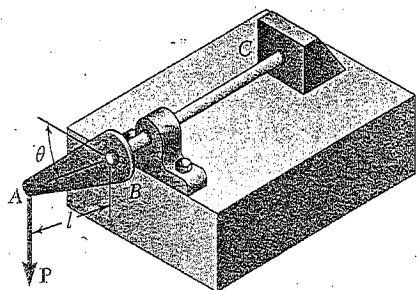


Fig. P10.39

**10.39** Uma alavanca  $AB$  é presa ao eixo horizontal  $BC$  que passa através de um mancal e é soldado a um suporte fixo em  $C$ . A constante de mola torcional do eixo  $BC$  é  $K$ ; ou seja, é necessário um binário de intensidade  $K$  para girar a extremidade  $B$  de  $1$  radiano. Sabendo que o eixo não está torcido quando  $AB$  é horizontal, determine o valor de  $\theta$  correspondente à posição de equilíbrio quando  $P = 1.800 \text{ N}$ ,  $l = 25 \text{ cm}$  e  $K = 202,5 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$ .

10.40 Resolva o Problema 10.39 supondo que  $P = 5,67 \text{ kN}$ ,  $l = 25 \text{ cm}$ , e  $K = 202,5 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$ . Obtenha respostas em cada um dos seguintes quadrantes:  $0 < \theta < 90^\circ$ ,  $270^\circ < \theta < 360^\circ$  e  $360^\circ < \theta < 450^\circ$ .

10.41 A posição da manivela  $BCD$  é controlada pelo cilindro hidráulico  $AB$ . Para o carregamento mostrado na figura, determine a força exercida pelo cilindro hidráulico no pino  $B$  sabendo que  $\theta = 60^\circ$ .

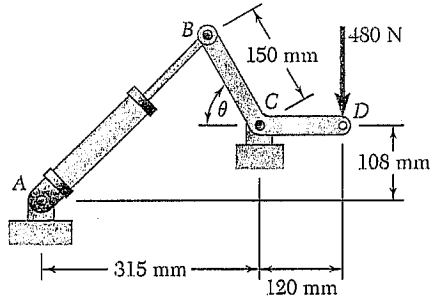


Fig. P10.41 e P10.42

10.42 A posição da manivela  $BCD$  é controlada pelo cilindro hidráulico  $AB$ . Determine o ângulo  $\theta$  sabendo que o cilindro hidráulico exerce uma força de  $420 \text{ N}$  no pino  $B$  quando a manivela está na posição mostrada na figura.

10.43 Para o mecanismo articulado mostrado na figura, determine a força  $P$  necessária para o equilíbrio quando  $M = 40 \text{ N} \cdot \text{m}$ .

10.44 Uma corda é enrolada em torno de um tambor de raio  $a$  que está preso por um pino em  $A$ . A constante da mola é  $3 \text{ kN/m}$ , e a mola está indeformada quando  $\theta = 0$ . Sabendo que  $a = 150 \text{ mm}$  e desprezando a massa do tambor, determine o valor de  $\theta$  correspondente ao equilíbrio quando uma força para baixo  $P$  de intensidade  $48 \text{ N}$  é aplicada à extremidade da corda.

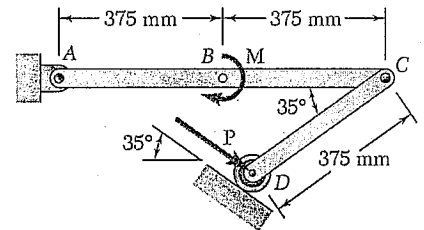


Fig. P10.43

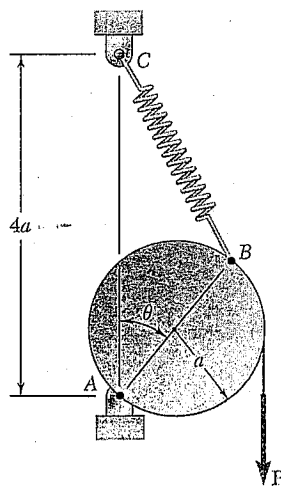


Fig. P10.44

**10.45** O braço telescópico  $ABC$  é usado para prover uma plataforma elevada para operários de construção. Juntos, operários e a plataforma têm uma massa de 204 kg, e seu centro de gravidade combinado está localizado diretamente acima de  $C$ . Para a posição em que  $\theta = 20^\circ$ , determine a força exercida sobre o pino  $B$  pelo único cilindro hidráulico  $BD$ .

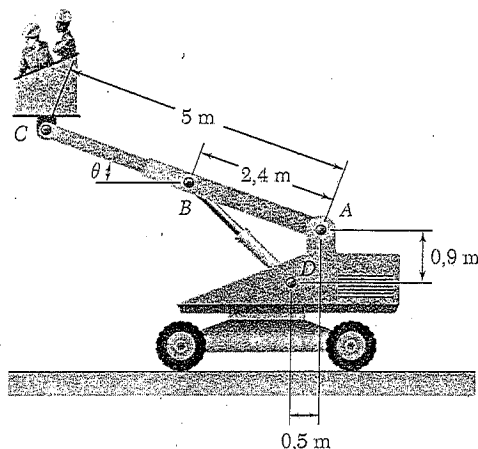


Fig. P10.45

**10.46** Resolva o Problema 10.45 considerando que os operários desceram para um ponto próximo ao solo de modo que  $\theta = -20^\circ$ .

**10.47** Um bloco de peso  $W$  é levado ao repouso em um plano formando um ângulo  $\alpha$  com a horizontal por meio de uma força  $P$  direcionada ao longo do plano. Se  $\mu$  é o coeficiente de atrito entre o bloco e o plano, deduza uma expressão para a eficiência mecânica do sistema. Mostre que a eficiência mecânica não pode exceder  $\frac{1}{2}$ , sabendo-se que o bloco deve permanecer no lugar quando a força  $P$  for removida.

**10.48** Representando por  $\mu_s$  o coeficiente de atrito estático entre o colar  $C$  e a haste vertical, deduza uma expressão para a intensidade do maior binário  $M$  para o qual o equilíbrio é mantido na posição mostrada na figura. Explique o que acontece se  $\mu_s \geq \tan \theta$ .

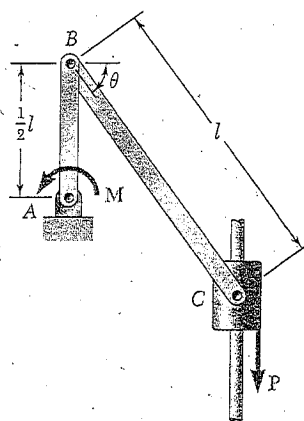


Fig. P10.48 e P10.49

**10.49** Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o colar  $C$  e a haste vertical é 0,40, determine a intensidade do maior e do menor binário  $M$  para o qual equilíbrio é mantido na posição mostrada quando  $\theta = 35^\circ$ ,  $l = 75$  cm e  $P = 5,4$  kN.

**10.50** Deduza uma expressão para a eficiência mecânica do macaco discutido na Seção 8.6. Mostre que, se o macaco tem que ser autotravante, a eficiência mecânica não pode exceder  $\frac{1}{2}$ .

**10.51** Representando por  $\mu_s$  o coeficiente de atrito estático entre o bloco preso à barra  $ACE$  e a superfície horizontal, deduza expressões em termos de  $P$ ,  $\mu_s$  e  $\theta$  para a maior e a menor intensidades da força  $Q$  para as quais o equilíbrio é mantido.

**10.52** Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o bloco preso à barra  $ACE$  e a superfície horizontal é igual a 0,15, determine as intensidades da maior e da menor forças  $Q$  para as quais o equilíbrio é mantido quando  $\theta = 30^\circ$ ,  $l = 20$  cm e  $P = 720$  N.

**10.53** Usando o método dos trabalhos virtuais, determine separadamente a força e o binário representando a reação em  $A$ .

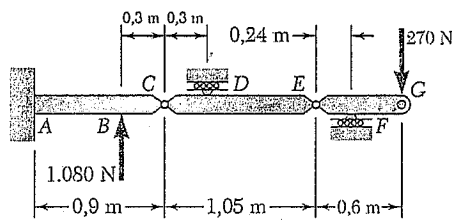


Fig. P10.53 e P10.54

**10.54** Usando o método dos trabalhos virtuais, determine a reação em  $D$ .

**10.55** Voltando ao Problema 10.41 e usando o valor encontrado para a força exercida pelo cilindro hidráulico  $AB$ , determine a mudança no comprimento de  $AB$  necessária para se elevar em 18 mm a carga de 480 N.

**10.56** Voltando ao Problema 10.45 e usando o valor encontrado para a força exercida pelo cilindro hidráulico  $BD$ , determine a mudança no comprimento de  $BD$  necessária para se elevar de 50 mm a plataforma presa em  $C$ .

**10.57** Determine o movimento vertical do nó  $D$  se o comprimento do elemento  $BF$  é aumentado de 75 mm. (*Dica:* aplique uma carga vertical no nó  $D$  e, usando os métodos do Cap. 6, calcule a força exercida pelo elemento  $BF$  nos nós  $B$  e  $F$ . Em seguida, aplique o método dos trabalhos virtuais para um deslocamento virtual resultando no aumento especificado no comprimento do elemento  $BF$ . Esse método deve ser usado somente para pequenas mudanças nos comprimentos dos elementos.)

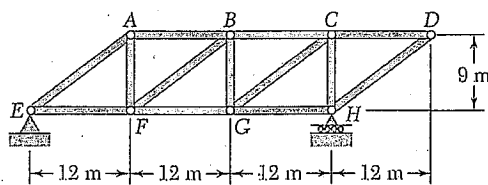


Fig. P10.57 e P10.58

**10.58** Determine o movimento horizontal do nó  $D$  se o comprimento do elemento  $BF$  é aumentado de 75 mm. (Ver dica para o Problema 10.57).

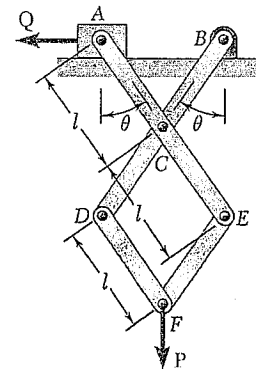


Fig. P10.51 e P10.52

### \*10.6 TRABALHO DE UMA FORÇA DURANTE UM DESLOCAMENTO FINITO

Considere uma força  $\mathbf{F}$  que atua sobre uma partícula. O trabalho de  $\mathbf{F}$  correspondente a um deslocamento infinitesimal  $d\mathbf{r}$  da partícula foi definido na Seção 10.2 como

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (10.1)$$

O trabalho de  $\mathbf{F}$  correspondente a um deslocamento finito da partícula de  $A_1$  até  $A_2$  (Fig. 10.10a) é representado por  $U_{1 \rightarrow 2}$  e é obtido integrando-se (10.1) ao longo da curva descrita pela partícula:

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (10.11)$$

Usando a expressão alternativa

$$dU = F ds \cos \alpha \quad (10.1')$$

dada na Seção 10.2 para o trabalho elementar  $dU$ , podemos também expressar o trabalho  $U_{1 \rightarrow 2}$  como

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{s_1}^{s_2} (F \cos \alpha) ds \quad (10.11')$$

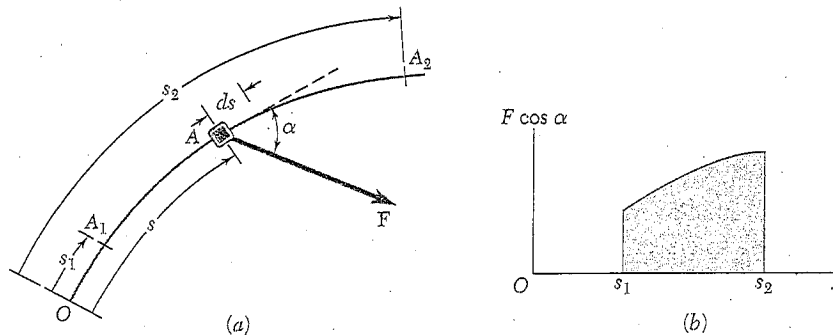


Fig. 10.10

onde a variável de integração  $s$  mede a distância ao longo do caminho percorrido pela partícula. O trabalho  $U_{1 \rightarrow 2}$  é representado pela área sob a curva obtida traçando  $F \cos \alpha$  em função de  $s$  (Fig. 10.10b). No caso de uma força  $\mathbf{F}$  de intensidade constante que atua na direção do movimento, a fórmula (10.11') fornece  $U_{1 \rightarrow 2} = F(s_2 - s_1)$ .

Lembrando da Seção 10.2 que o trabalho de um binário de momento  $\mathbf{M}$  durante uma rotação infinitesimal  $d\theta$  de um corpo rígido é

$$dU = M d\theta \quad (10.2)$$

expressamos a seguir o trabalho do binário durante uma rotação finita do corpo:

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta \quad (10.12)$$

No caso de um binário constante, a fórmula (10.12) fornece

$$U_{1 \rightarrow 2} = M(\theta_2 - \theta_1)$$

**Trabalho de um peso.** Afiramos na Seção 10.2 que o trabalho do peso  $W$  de um corpo durante um deslocamento infinitesimal desse corpo é igual ao produto de  $W$  pelo deslocamento vertical do centro de gravidade do corpo. Com o eixo dos  $y$  apontando para cima, o trabalho de  $W$  durante um deslocamento finito do corpo (Fig. 10.11) é obtido escrevendo-se

$$dU = -W dy$$

Integrando de  $A_1$  até  $A_2$ , temos

$$U_{1 \rightarrow 2} = - \int_{y_1}^{y_2} W dy = Wy_1 - Wy_2 \quad (10.13)$$

ou

$$U_{1 \rightarrow 2} = -W(y_2 - y_1) = -W \Delta y \quad (10.13')$$

sendo  $\Delta y$  o deslocamento vertical de  $A_1$  até  $A_2$ . O trabalho do peso  $W$  é, portanto, igual ao produto de  $W$  pelo deslocamento vertical do centro de gravidade do corpo. O trabalho é positivo quando  $\Delta y < 0$ , ou seja, quando o corpo está se movendo para baixo.

**O trabalho da força exercida por uma mola.** Considere um corpo  $A$  unido ao ponto fixo  $B$  por uma mola; considera-se que a mola esteja indeformada quando o corpo está em  $A_0$  (Fig. 10.12a). Evidência experimental nos mostra que a intensidade da força  $F$  exercida pela mola no corpo  $A$  é proporcional à deflexão  $x$  da mola medida a partir da posição  $A_0$ . Temos

$$F = kx \quad (10.14)$$

sendo  $k$  a constante de mola, expressa em N/m nas unidades do SI. O trabalho da força  $F$  exercida pela mola durante um deslocamento finito do corpo de  $A_1$  ( $x = x_1$ ) até  $A_2$  ( $x = x_2$ ) é obtido escrevendo-se

$$dU = -F dx = -kx dx$$

$$U_{1 \rightarrow 2} = - \int_{x_1}^{x_2} kx dx = -\frac{1}{2} kx_1^2 + \frac{1}{2} kx_2^2 \quad (10.15)$$

Observamos que o trabalho da força  $F$  exercida pela mola sobre o corpo é positivo quando  $x_2 < x_1$ , ou seja, quando a mola está retornando à sua posição indeformada.

Como a Eq. (10.14) é a equação de uma linha reta de inclinação  $k$  que passa pela origem, pode-se obter o trabalho  $U_{1 \rightarrow 2}$  de  $F$  durante o deslocamento de  $A_1$  até  $A_2$  avaliando-se a área do trapézio mostrado na Fig. 10.12b. Isso é feito calculando-se os valores  $F_1$  e  $F_2$  e multiplicando-se a base  $\Delta x$  do trapézio pela sua altura média  $\frac{1}{2}(F_1 + F_2)$ . Como o trabalho da força  $F$  exercido pela mola é positivo para um valor negativo de  $\Delta x$ , escrevemos

$$U_{1 \rightarrow 2} = -\frac{1}{2}(F_1 + F_2)\Delta x \quad (10.16)$$

A fórmula (10.16) geralmente é mais conveniente de usar do que a fórmula (10.15).

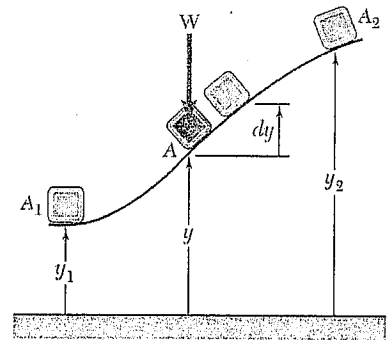
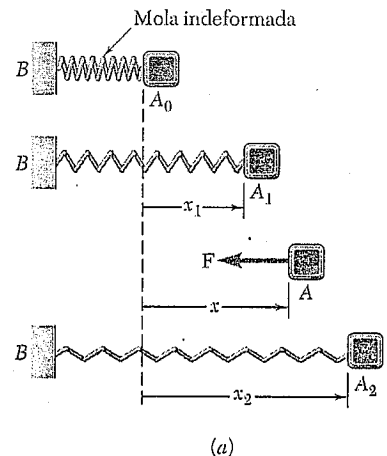
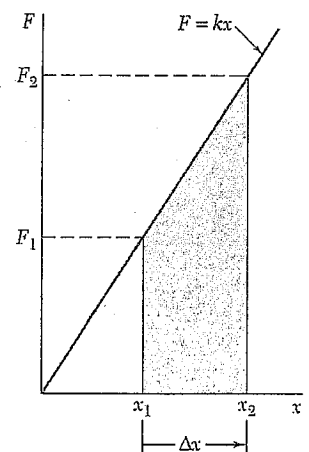


Fig. 10.11



(a)



(b)

Fig. 10.12

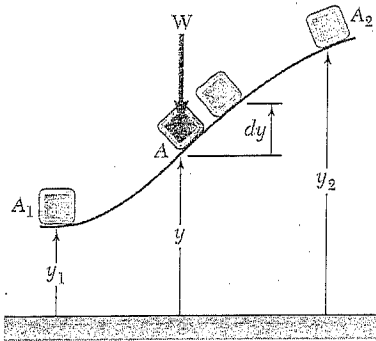


Fig. 10.11 (repetido)

Considerando novamente o corpo da Fig. 10.11, verificamos da Eq. (10.13) que o trabalho do peso  $\mathbf{W}$  durante um deslocamento finito é obtido subtraindo-se o valor da função  $Wy$  correspondente à segunda posição do corpo a partir de seu valor correspondente à primeira posição. O trabalho de  $\mathbf{W}$  é então independente do caminho realmente seguido; ele depende somente dos valores inicial e final da função  $Wy$ . Essa função denomina-se *energia potencial* do corpo com respeito à *força da gravidade*  $\mathbf{W}$  e é representada por  $V_g$ . Escrevemos

$$U_{1 \rightarrow 2} = (V_g)_1 - (V_g)_2 \quad \text{com } V_g = Wy \quad (10.17)$$

Observamos que se  $(V_g)_2 > (V_g)_1$ , ou seja, se a energia potencial aumenta durante o deslocamento (como no caso considerado aqui), o trabalho  $U_{1 \rightarrow 2}$  é negativo. Se, por outro lado, o trabalho de  $\mathbf{W}$  é positivo, a energia potencial diminui. Portanto, a energia potencial  $V_g$  do corpo fornece uma medida do trabalho que pode ser realizado por seu peso  $\mathbf{W}$ . Como somente a mudança na energia potencial, e não o valor real de  $V_g$ , está envolvida na fórmula (10.17), pode-se acrescentar uma constante arbitrária à expressão obtida para  $V_g$ . Em outras palavras, o nível a partir do qual a elevação  $y$  é medida pode ser escolhido arbitrariamente. Observamos que a energia potencial é expressa nas mesmas unidades que o trabalho, ou seja, em joules (J) nas unidades do SI.<sup>2</sup>

Considerando agora o corpo da Fig. 10.12a, observamos a partir da Equação (10.15) que o trabalho da força elástica  $\mathbf{F}$  é obtido subtraindo-se o valor da função  $\frac{1}{2}kx^2$  correspondente à segunda posição do corpo de seu valor correspondente à primeira posição. Essa função é representada por  $V_e$  e denomina-se *energia potencial* do corpo com respeito à *força elástica*  $\mathbf{F}$ . Escrevemos

$$U_{1 \rightarrow 2} = (V_e)_1 - (V_e)_2 \quad \text{com } V_e = \frac{1}{2}kx^2 \quad (10.18)$$

e observamos que, durante o deslocamento considerado, o trabalho da força  $\mathbf{F}$  exercida pela mola sobre o corpo é negativo e a energia potencial  $V_e$  aumenta. Devemos observar que a expressão obtida para  $V_e$  é válida somente se a deflexão da mola for medida a partir da sua posição indeformada.

O conceito de energia potencial pode ser usado quando estão envolvidas forças diferentes das forças gravitacionais e das forças elásticas. Esse conceito continua válido enquanto o trabalho elementar  $dU$  da força considerada for um *diferencial exato*. É então possível encontrar uma função  $V$ , denominada energia potencial, tal que

$$dU = -dV \quad (10.19)$$

Integrando (10.19) sobre um deslocamento finito, obtemos a fórmula geral

$$U_{1 \rightarrow 2} = V_1 - V_2 \quad (10.20)$$

<sup>2</sup> Ver nota de rodapé da página 559.

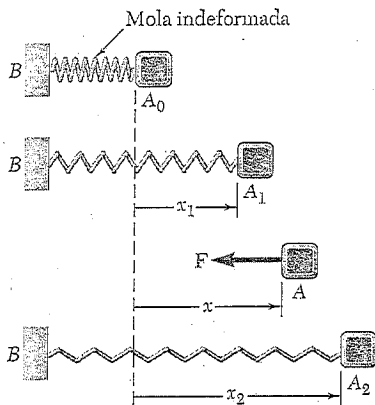


Fig. 10.12a (repetido)



que expressa que o trabalho da força é independente do caminho seguido e é igual a menos a mudança na energia potencial. Diz-se que a força que satisfaz a Eq. (10.20) é uma força conservativa.<sup>3</sup>

### \*10.8 ENERGIA POTENCIAL E EQUILÍBRIO

A aplicação do princípio dos trabalhos virtuais é consideravelmente simplificada quando se conhece a energia potencial de um sistema. No caso de um deslocamento virtual, a fórmula (10.19) se torna  $\delta U = -\delta V$ . Além disso, se a posição do sistema é definida por uma única variável independente  $\theta$ , podemos escrever  $\delta V = (dV/d\theta) \delta\theta$ . Como  $\delta\theta$  deve ser diferente de zero, a condição  $\delta U = 0$  para o equilíbrio do sistema torna-se

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \quad (10.21)$$

Em termos de energia potencial, portanto, o princípio dos trabalhos virtuais afirma que, se um sistema está em equilíbrio, a derivada de sua energia potencial total é igual a zero. Se a posição do sistema depende de várias variáveis independentes (diz-se então que o sistema tem vários graus de liberdade), as derivadas parciais de  $V$  em relação a cada uma das variáveis independentes devem ser iguais a zero.

Considere, por exemplo, uma estrutura feita de dois elementos  $AC$  e  $CB$  e que sustenta uma carga  $W$  em  $C$ . A estrutura é sustentada por um pino em  $A$  e um rolete em  $B$ , e uma mola  $BD$  liga  $B$  a um ponto fixo  $D$  (Fig. 10.13a). A constante da mola é  $k$ , e supõe-se que o comprimento natural da mola seja igual a  $AD$  e, portanto, que a mola está indeformada quando  $B$  coincide com  $A$ . Desprezando as forças de atrito e o peso dos elementos, encontramos que as únicas forças que realizam trabalho durante um deslocamento da estrutura são o peso  $W$  e a força  $F$  exercida pela mola no ponto  $B$  (Fig. 10.13b). A energia potencial total do sistema será então obtida somando-se a energia potencial  $V_g$  correspondente à força gravitacional  $W$  e a energia potencial  $V_e$  correspondente à força elástica  $F$ .

Escolhendo um sistema de coordenadas com origem em  $A$  e observando que a deflexão da mola, medida a partir de sua posição indeformada, é  $AB = x_B$ , escrevemos

$$V_e = \frac{1}{2} k x_B^2 \quad V_g = W y_C$$

Expressando as coordenadas  $x_B$  e  $y_C$  em termos do ângulo  $\theta$ , temos

$$x_B = 2l \sin \theta \quad y_C = l \cos \theta$$

$$V_e = \frac{1}{2} k (2l \sin \theta)^2 \quad V_g = W (l \cos \theta)$$

$$V = V_e + V_g = 2kl^2 \sin^2 \theta + Wl \cos \theta \quad (10.22)$$

As posições de equilíbrio do sistema são obtidas igualando-se a zero a derivada da energia potencial  $V$ . Escrevemos

$$\frac{dV}{d\theta} = 4kl^2 \sin \theta \cos \theta - Wl \sin \theta = 0$$

ou, fatorando  $l \sin \theta$ ,

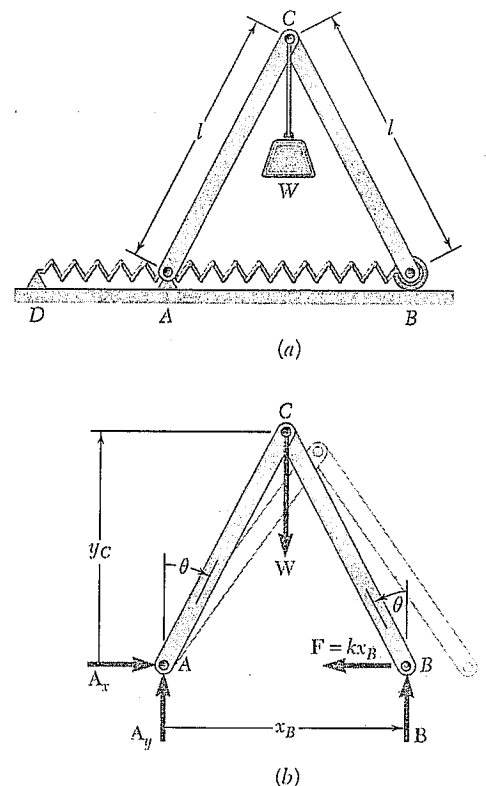


Fig. 10.13

<sup>3</sup> Uma discussão detalhada de forças conservativas é apresentada na Seção 13.7 do livro de *Dinâmica*.

$$\frac{dV}{d\theta} = l \operatorname{sen} \theta (4kl \cos \theta - W) = 0$$

Existem, portanto, duas posições de equilíbrio, correspondentes aos valores  $\theta = 0$  e  $\theta = \cos^{-1}(W/4kl)$ , respectivamente.<sup>4</sup>

### \*10.9 ESTABILIDADE DO EQUILÍBRIO

Considere as três barras uniformes de comprimento  $2a$  e peso  $W$  mostradas na Fig. 10.14. Embora cada haste esteja em equilíbrio, existe uma importante diferença entre os três casos considerados. Suponha que cada haste seja levemente deslocada da sua posição de equilíbrio e depois é solta: a haste  $a$  vai se mover de volta em direção à sua posição original; a haste  $b$  irá continuar o movimento afastando-se da sua posição original; e a haste  $c$  vai permanecer em sua nova posição. No caso  $a$ , diz-se que o equilíbrio da haste é *estável*; no caso  $b$ , diz-se que é *instável*; e, no caso  $c$ , diz-se que é *neutro*.

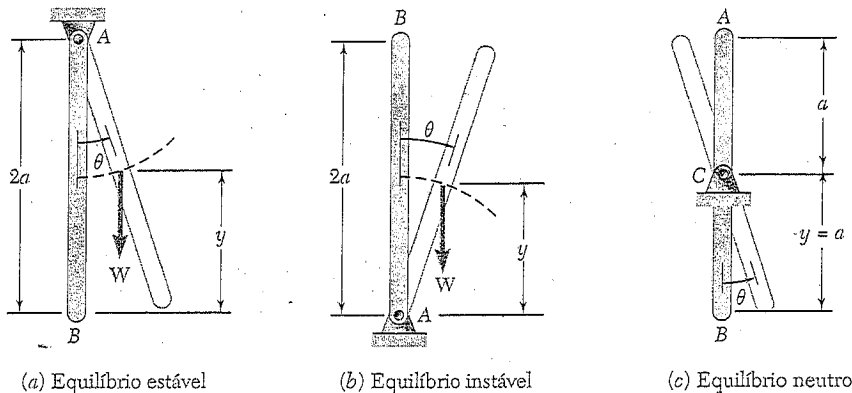


Fig. 10.14

Voltando à Seção 10.7, em que vimos que a energia potencial  $V_g$  com respeito a gravidade é igual a  $W_y$ , sendo  $y$  a elevação do ponto da aplicação de  $W$  medida a partir de um nível arbitrário, observamos que a energia potencial da haste  $a$  é mínima na posição de equilíbrio considerada, que a energia potencial da haste  $b$  é máxima, e que a energia potencial da haste  $c$  é constante. O equilíbrio é, portanto, *estável*, *instável* ou *neutro*, se a energia potencial for *mínima*, *máxima* ou *constante* (Fig. 10.15).

O resultado obtido é bem geral e pode ser visto como se segue: primeiro observamos que a força sempre tende a fazer um trabalho positivo e, portanto, a diminuir a energia potencial do sistema sobre o qual ela é aplicada. Portanto, quando um sistema é perturbado à partir da sua posição de equilíbrio, as forças que atuam no sistema tenderão a trazê-lo de volta à sua posição original se  $V$  for mínimo (Fig. 10.15a) e a movê-lo para longe se  $V$  for máximo (Fig. 10.15b). Se  $V$  for constante (Fig. 10.15c), as forças não tendem a mover o sistema de nenhuma dessas maneiras.

<sup>4</sup> A segunda posição não existe se  $W > 4kl$ .

Recordando: o cálculo que uma função é mínima ou máxima se sua derivada segunda é positiva ou negativa. Podemos, então, resumir as condições para o equilíbrio de um sistema com um grau de liberdade (ou seja, um sistema cuja posição é definida por uma única variável independente  $\theta$ ) como se segue:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\theta} = 0 \quad \frac{d^2V}{d\theta^2} > 0 &: \text{equilíbrio estável} \\ \frac{dV}{d\theta} = 0 \quad \frac{d^2V}{d\theta^2} < 0 &: \text{equilíbrio instável} \end{aligned} \quad (10.23)$$

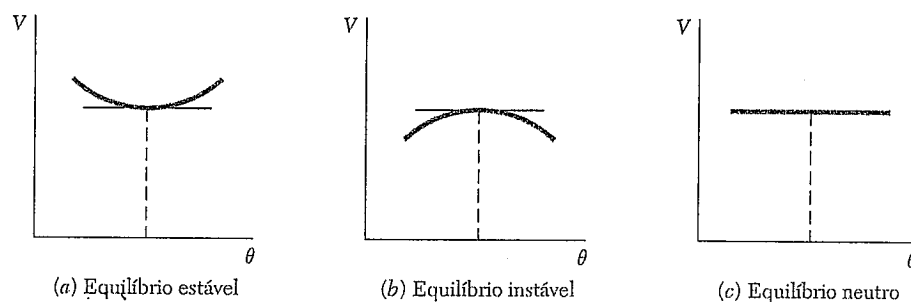


Fig. 10.15

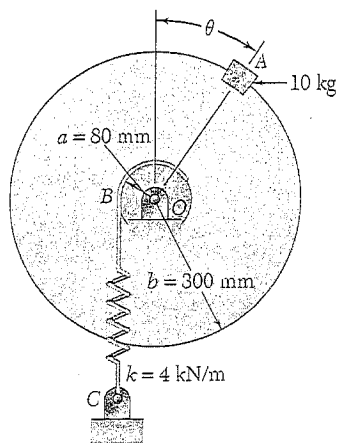
Se a primeira e a segunda derivadas de  $V$  forem ambas iguais a zero, é necessário examinar derivadas de ordens mais altas para se determinar se o equilíbrio é estável, instável ou neutro. O equilíbrio será neutro se todas as derivadas forem zero, pois nesse caso a energia potencial  $V$  é uma constante. O equilíbrio será estável se a primeira derivada que for encontrada diferente de zero for de ordem par e positiva. Em todos os outros casos, o equilíbrio será instável.

Se o sistema considerado tem *vários graus de liberdade*, a energia potencial  $V$  depende de inúmeras variáveis, e é portanto necessário aplicar a teoria de funções de várias variáveis para determinar se  $V$  é mínimo. Pode-se verificar que um sistema com 2 graus de liberdade será estável, e a correspondente energia potencial  $V(\theta_1, \theta_2)$  será mínima, se as seguintes relações forem satisfeitas simultaneamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \theta_1} = \frac{\partial V}{\partial \theta_2} = 0 \\ \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} < 0 \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} > 0 \end{aligned} \quad (10.24)$$

### PROBLEMA RESOLVIDO 10.4

Um bloco de 10 kg é preso ao aro de um disco de 300 mm de raio, tal como mostra a figura. Sabendo que a mola BC está indeformada quando  $\theta = 0$ , determine a posição ou posições de equilíbrio e determine em cada caso se o equilíbrio é estável, instável ou neutro.



### SOLUÇÃO

**Energia potencial.** Representando por  $s$  a deflexão da mola a partir de sua posição indeformada e colocando a origem das coordenadas em  $O$ , obtemos

$$V_e = \frac{1}{2} ks^2 \quad V_g = W y = mgy$$

Medindo  $\theta$  em radianos, temos

$$s = a\theta \quad y = b \cos \theta$$

Substituindo  $s$  e  $y$  nas expressões para  $V_e$  e  $V_g$ , escrevemos

$$V_e = \frac{1}{2} ka^2 \theta^2 \quad V_g = mgb \cos \theta$$

$$V = V_e + V_g = \frac{1}{2} ka^2 \theta^2 + mgb \cos \theta$$

**Posições de equilíbrio.** Estabelecendo que  $dV/d\theta = 0$ , escrevemos

$$\frac{dV}{d\theta} = ka^2 \theta - mgb \sin \theta = 0$$

$$\sin \theta = \frac{ka^2}{mgb} \theta$$

Substituindo  $a = 0,08$  m,  $b = 0,3$  m,  $k = 4$  kN/m e  $m = 10$  kg, obtemos

$$\sin \theta = \frac{(4 \text{ kN/m})(0,08 \text{ m})^2}{(10 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2)(0,3 \text{ m})} \theta$$

$$\sin \theta = 0,8699 \theta$$

sendo  $\theta$  expresso em radianos. Resolvendo numericamente para  $\theta$ , encontramos

$$\theta = 0 \quad \text{e} \quad \theta = 0,902 \text{ rad}$$

$$\theta = 0 \quad \text{e} \quad \theta = 51,7^\circ \quad \blacktriangleleft$$

**Estabilidade do equilíbrio.** A segunda derivada da energia potencial  $V$  com relação a  $\theta$  é

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = ka^2 - mgb \cos \theta$$

$$= (4 \text{ kN/m})(0,08 \text{ m})^2 - (10 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2)(0,3 \text{ m}) \cos \theta$$

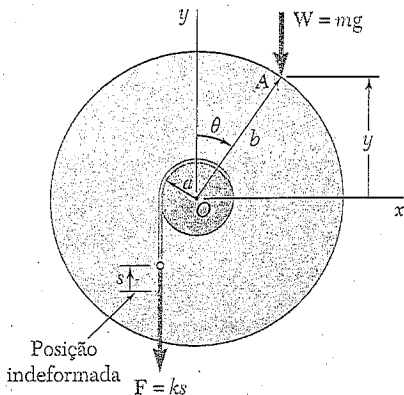
$$= 25,6 - 29,43 \cos \theta$$

Para  $\theta = 0$ :  $\frac{d^2V}{d\theta^2} = 25,6 - 29,43 \cos \theta = -3,83 < 0$

O equilíbrio é instável para  $\theta = 0$   $\blacktriangleleft$

Para  $\theta = 51,7^\circ$ :  $\frac{d^2V}{d\theta^2} = 25,6 - 29,43 \cos 51,7^\circ = +7,36 > 0$

O equilíbrio é estável para  $\theta = 51,7^\circ$   $\blacktriangleleft$



## METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção definimos o *trabalho de uma força durante um deslocamento finito* e a *energia potencial* de um corpo rígido ou de um sistema de corpos rígidos. Você aprendeu a usar o conceito de energia potencial para determinar a *posição de equilíbrio* de um corpo rígido ou de um sistema de corpos rígidos.

**1. A energia potencial  $V$  de um sistema** é igual à soma das energias potenciais associadas às várias forças atuantes sobre o sistema que *realizam trabalho* à medida que o sistema se move. Nos problemas desta seção você vai determinar o seguinte:

**a. Energia potencial de um peso.** Essa é a energia potencial devida à *gravidade*,  $V_g = W_y$ , sendo  $y$  a elevação do peso  $W$  medida a partir de um nível de referência arbitrário. Observe que a energia potencial  $V_g$  pode ser usada com qualquer força vertical  $\mathbf{P}$  de intensidade constante direcionada para baixo; escrevemos  $V_g = \mathbf{P}y$ .

**b. Energia potencial de uma mola.** A energia potencial,  $V_e = \frac{1}{2}kx^2$ , é devida à força *elástica* exercida por uma mola, sendo  $k$  a constante da mola e  $x$  a deformação da mola *medida a partir da sua posição indeformada*.

Reações em apoios fixos, forças internas em conexões, forças exercidas por cordas e cabos inextensíveis, e outras forças que não realizam trabalho não contribuem para a energia potencial do sistema.

**2. Expresse todas as distâncias e os ângulos em termos de uma só variável**, tal como um ângulo  $\theta$ , quando calcular a energia potencial  $V$  de um sistema. Isso é necessário, pois a determinação da posição de equilíbrio do sistema requer o cálculo da derivada  $dV/d\theta$ .

**3. Quando um sistema está em equilíbrio, a primeira derivada de sua energia potencial é igual a zero.** Então:

**a. Para determinar a posição de equilíbrio de um sistema**, uma vez que sua energia potencial  $V$  tiver sido expressa em termos de uma só variável  $\theta$ , calcule sua derivada e resolva a equação  $dV/d\theta = 0$  para  $\theta$ .

**b. Para determinar a força ou o binário necessário para se manter um sistema em uma dada posição em equilíbrio**, substitua o valor conhecido de  $\theta$  na equação  $dV/d\theta = 0$  e resolva essa equação para a força ou o binário desejado.

**4. Estabilidade do equilíbrio.** As seguintes regras geralmente se aplicam:

**a. Equilíbrio estável** ocorre quando a energia potencial do sistema é *mínima*, ou seja, quando  $dV/d\theta = 0$  e  $d^2V/d\theta^2 > 0$  (Figs. 10.14a e 10.15a).

**b. Equilíbrio instável** ocorre quando a energia potencial do sistema é *máxima*, ou seja, quando  $dV/d\theta = 0$  e  $d^2V/d\theta^2 < 0$  (Figs. 10.14b e 10.15b).

**c. Equilíbrio neutro** ocorre quando a energia potencial do sistema é *constante*;  $dV/d\theta$ ,  $d^2V/d\theta^2$ , e todas as derivadas sucessivas de  $V$  são então iguais a zero (Figs. 10.14c e 10.15c).

Veja a página 583 para uma discussão do caso quando  $dV/d\theta$ ,  $d^2V/d\theta^2$ , mas *não todas* as derivadas sucessivas de  $V$  são iguais a zero.

## PROBLEMAS

10.59 Usando o método da Seção 10.8, resolva o Problema 10.29.

10.60 Usando o método da Seção 10.8, resolva o Problema 10.30.

10.61 Usando o método da Seção 10.8, resolva o Problema 10.31.

10.62 Usando o método da Seção 10.8, resolva o Problema 10.33.

10.63 Usando o método da Seção 10.8, resolva o Problema 10.34.

10.64 Usando o método da Seção 10.8, resolva o Problema 10.35.

10.65 Usando o método da Seção 10.8, resolva o Problema 10.36.

10.66 Usando o método da Seção 10.8, resolva o Problema 10.38.

10.67 Mostre que o equilíbrio é neutro no Problema 10.1.

10.68 Mostre que o equilíbrio é neutro no Problema 10.2.

10.69 Duas barras uniformes idênticas, cada qual de peso  $W$  e comprimento  $L$ , estão unidas a roldanas que estão ligadas a uma correia, tal como mostra a figura. Supondo que não há escorregamento entre a correia e as roldanas, determine as posições de equilíbrio do sistema e determine em cada caso se o equilíbrio é estável, instável ou neutro.

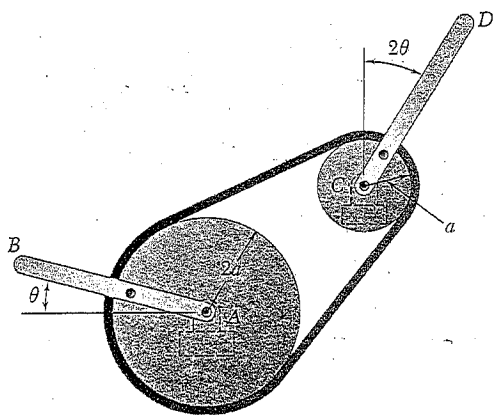


Fig. P10.69

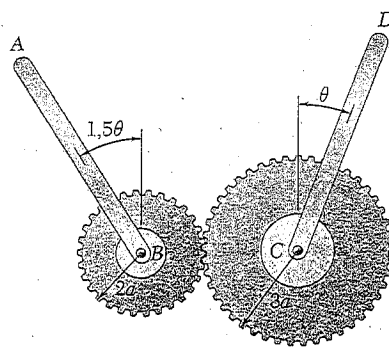


Fig. P10.70

10.70 Duas barras uniformes idênticas, cada qual de massa  $m$  e comprimento  $l$ , estão unidas a engrenagens, tal como mostra a figura. Para o intervalo  $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ , determine as posições de equilíbrio do sistema e determine em cada caso se o equilíbrio é estável, instável ou neutro.

**10.71** Duas barras uniformes, cada qual de massa  $m$ , estão unidas a engrenagens de raios iguais, tal como mostra a figura. Determine as posições de equilíbrio do sistema e determine em cada caso se o equilíbrio é estável, instável ou neutro.

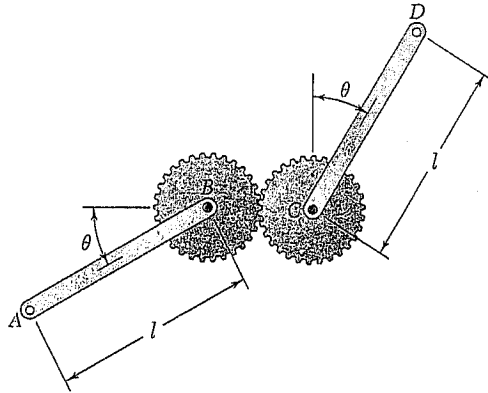


Fig. P10.71 e P10.72

**10.72** Duas barras uniformes,  $AB$  e  $CD$ , estão unidas a engrenagens de raios iguais, tal como mostra a figura. Sabendo que  $m_{AB} = 3,5$  kg e  $m_{CD} = 1,75$  kg, determine as posições de equilíbrio do sistema e determine em cada caso se o equilíbrio é estável, instável ou neutro.

**10.73** Usando o método da Seção 10.8, resolva o Problema 10.39. Determine se o equilíbrio é estável, instável ou neutro. (Dica: a energia potencial correspondente ao binário exercida por uma mola torcional é igual a  $\frac{1}{2}K\theta^2$ , sendo  $K$  a constante torcional da mola e  $\theta$  o ângulo de rotação.)

**10.74** No Problema 10.40, determine se cada uma das posições de equilíbrio é estável, instável ou neutra. (Ver dica para o Problema 10.73.)

**10.75** O ângulo  $\theta$  é igual a  $45^\circ$  depois que um bloco de massa  $m$  é pendurado no elemento  $AB$ , tal como mostra a figura. Desprezando a massa de  $AB$  e sabendo que a mola está indeformada quando  $\theta = 20^\circ$ , determine o valor de  $m$  e determine se o equilíbrio é estável, instável ou neutro.

**10.76** Um bloco de massa  $m$  é pendurado no elemento  $AB$ , tal como mostra a figura. Desprezando a massa de  $AB$  e sabendo que a mola está indeformada quando  $\theta = 20^\circ$ , determine o valor de  $\theta$  correspondente ao equilíbrio quando  $m = 3$  kg. Determine se o equilíbrio é estável, instável ou neutro.

**10.77** Uma haste delgada  $AB$ , de massa  $m$ , é presa a dois blocos  $A$  e  $B$  que podem se movimentar livremente nas guias mostradas na figura. Sabendo que a mola está indeformada quando  $y = 0$ , determine o valor de  $y$  correspondente ao equilíbrio quando  $m = 12$  kg,  $l = 750$  mm e  $k = 900$  N/m.

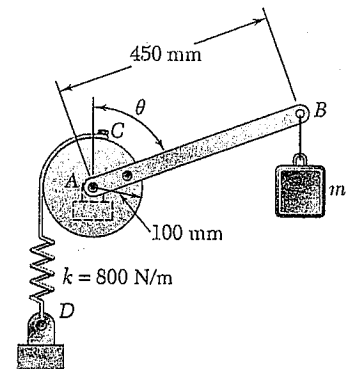


Fig. P10.75 e P10.76

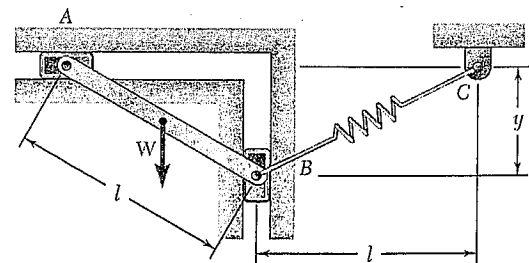


Fig. P10.77

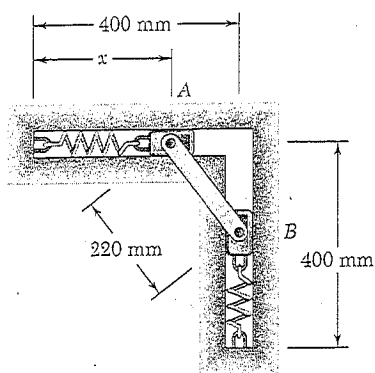


Fig. P10.78

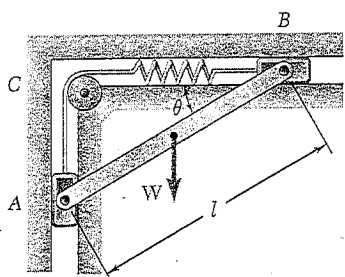


Fig. P10.79 e P10.80

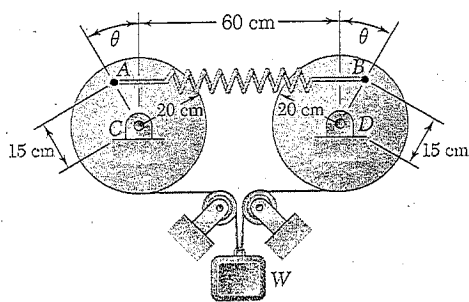


Fig. P10.81 e P10.82

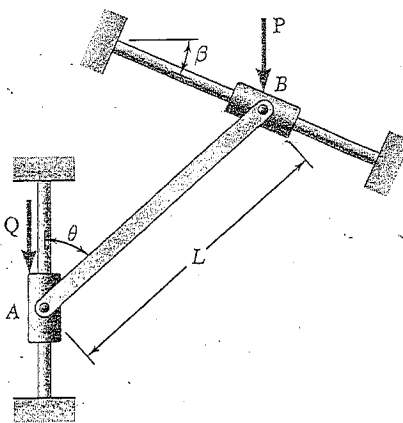


Fig. P10.83 e P10.84

10.78 Uma haste delgada  $AB$  de massa desprezível é unida a dois blocos de 4 kg,  $A$  e  $B$ , que podem se movimentar livremente nas guias mostradas na figura. Sabendo que a constante das molas é  $160 \text{ N/m}$  e que o comprimento indeformado de cada mola é de  $150 \text{ mm}$ , determine o valor de  $x$  correspondente ao equilíbrio.

10.79 Uma haste delgada  $AB$ , de massa  $m$ , é unida a dois blocos  $A$  e  $B$  que podem se movimentar livremente nas guias mostradas na figura. A constante da mola é  $k$ , e a mola está indeformada quando  $AB$  é horizontal. Desprezando o peso dos blocos, deduza uma equação em  $\theta$ ,  $m$ ,  $l$  e  $k$  que deve ser satisfeita quando a haste está em equilíbrio.

10.80 Uma haste delgada  $AB$ , de massa  $m$ , é unida a dois blocos  $A$  e  $B$  que podem se movimentar livremente nas guias mostradas na figura. Sabendo que a mola está indeformada quando  $AB$  é horizontal, determine três valores de  $\theta$  correspondentes ao equilíbrio quando  $m = 125 \text{ kg}$ ,  $l = 320 \text{ mm}$  e  $k = 15 \text{ kN/mm}$ . Determine em cada caso se o equilíbrio é estável, instável ou neutro.

10.81 A mola  $AB$ , de constante  $18 \text{ N/cm}$ , está unida a dois tambores idênticos tal como mostra a figura. Sabendo que a mola está indeformada quando  $\theta = 0$ , determine (a) o intervalo dos valores do peso  $W$  do bloco para os quais uma posição de equilíbrio exista, (b) o intervalo dos valores de  $\theta$  para os quais o equilíbrio é estável.

10.82 A mola  $AB$ , de constante  $18 \text{ N/cm}$ , está unida a dois tambores idênticos tal como mostra a figura. Sabendo que a mola está indeformada quando  $\theta = 0$  e que  $W = 180 \text{ N}$ , determine os valores de  $\theta$  menores que  $180^\circ$  correspondentes ao equilíbrio. Determine em cada caso se o equilíbrio é estável, instável ou neutro.

10.83 Uma haste delgada  $AB$  de massa desprezível é unida a dois colares  $A$  e  $B$  que podem se movimentar livremente ao longo das hastes-guia mostradas na figura. Sabendo que  $\beta = 30^\circ$  e  $P = Q = 450 \text{ N}$ , determine o valor do ângulo  $\theta$  correspondente ao equilíbrio.

10.84 Uma haste delgada  $AB$  de massa desprezível é unida a dois colares  $A$  e  $B$  que podem se movimentar livremente ao longo das hastes-guia mostradas na figura. Sabendo que  $\beta = 30^\circ$ ,  $P = 180 \text{ N}$  e  $Q = 45 \text{ N}$ , determine o valor do ângulo  $\theta$  correspondente ao equilíbrio.



10.85 e 10.86 O colar A pode deslizar livremente sobre a haste semi-circular mostrada na figura. Sabendo que a constante da mola é  $k$  e que o comprimento indeformado da mola é igual ao raio  $r$ , determine o valor de  $\theta$  correspondente ao equilíbrio quando  $m = 20 \text{ kg}$ ,  $r = 180 \text{ mm}$  e  $k = 3 \text{ N/mm}$ .

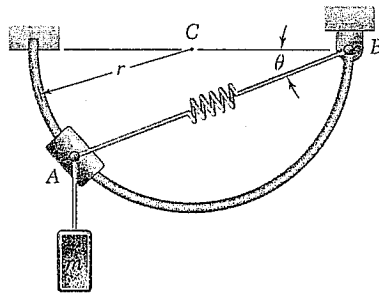


Fig. P10.85

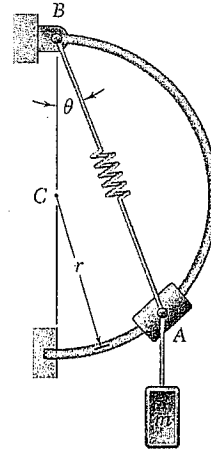


Fig. P10.86

10.87 O bloco D de 12 kg pode deslizar livremente sobre a superfície inclinada. Sabendo que a constante da mola é 480 N/m e que a mola está indeformada quando  $\theta = 0$ , determine o valor de  $\theta$  correspondente ao equilíbrio.

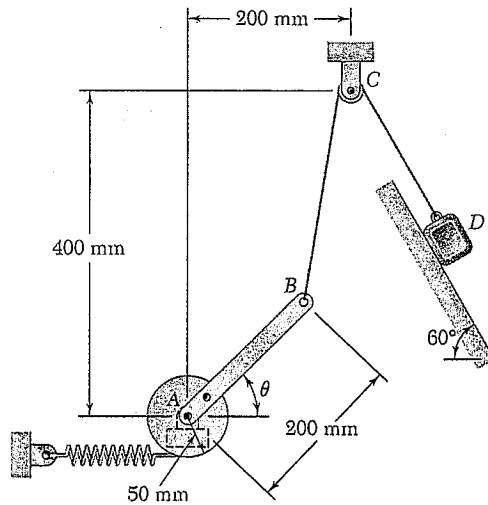


Fig. P10.87

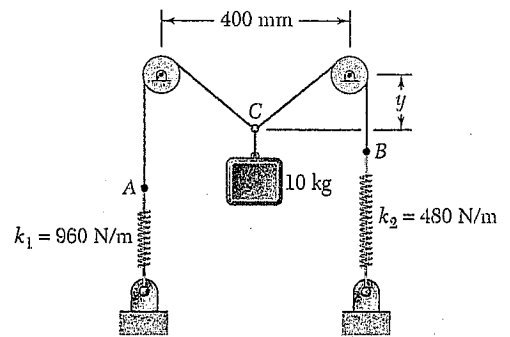


Fig. P10.88

10.88 O cabo AB está preso a duas molas e passa por um anel em C. Sabendo que as molas estão indeformadas quando  $y = 0$ , determine a distância  $y$  correspondente ao equilíbrio.

10.89 A haste AB está presa a uma articulação em A e a duas molas, cada qual de constante  $k$ . Se  $h = 125 \text{ cm}$ ,  $d = 60 \text{ cm}$  e  $W = 720 \text{ N}$ , determine o intervalo de valores de  $k$  para os quais o equilíbrio da haste é estável na posição mostrada na figura. Cada mola pode atuar tanto sob tração quanto sob compressão.

10.90 A haste AB está presa a uma articulação em A e a duas molas, cada qual de constante  $k$ . Se  $h = 75 \text{ cm}$ ,  $k = 7,2 \text{ N/cm}$  e  $W = 180 \text{ N}$ , determine a menor distância  $d$  para a qual o equilíbrio da haste é estável na posição mostrada na figura. Cada mola pode atuar tanto sob tração quanto sob compressão.

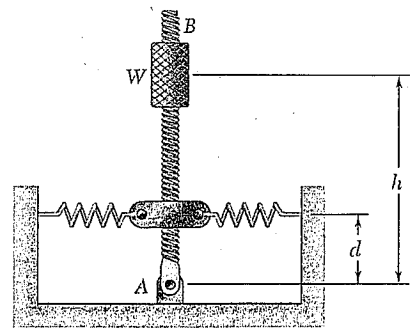


Fig. P10.89 e P10.90

10.91 A placa uniforme  $ABCD$  de massa desprezível é presa a quatro molas de constante  $k$  e está em equilíbrio na posição mostrada na figura. Sabendo que as molas podem atuar tanto sob tração quanto sob compressão e que estão indeformadas na posição dada, determine o intervalo de valores da intensidade  $P$  de duas forças horizontais iguais e opostas,  $P$  e  $-P$ , para os quais a posição de equilíbrio é estável.

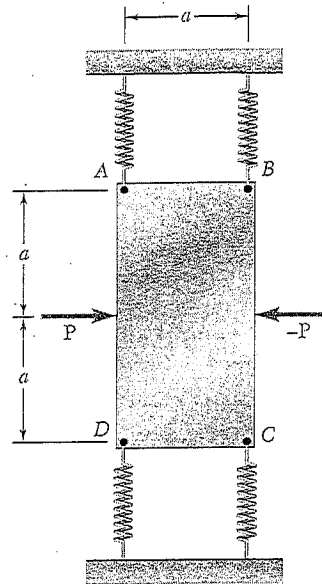


Fig. P10.91

10.92 e 10.93 Duas barras estão presas a uma única mola de constante  $k$  que está indeformada quando as barras estão na vertical. Determine o intervalo de valores de  $P$  para os quais o equilíbrio do sistema é estável na posição mostrada na figura.

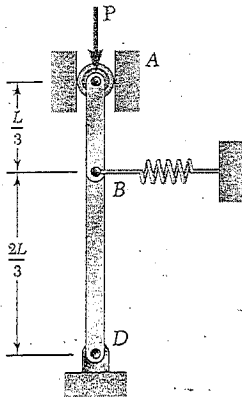


Fig. P10.92

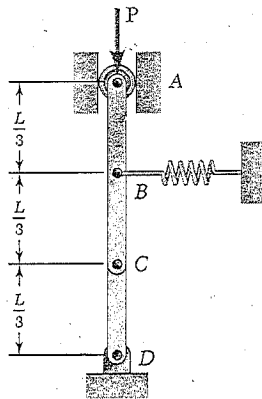


Fig. P10.93

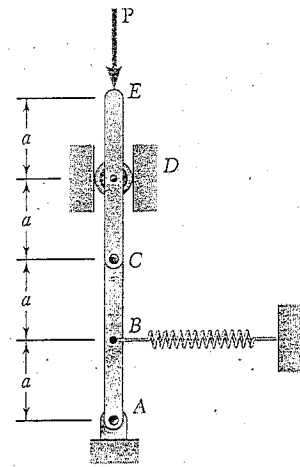


Fig. P10.94

10.94 A barra  $AC$  está presa a uma articulação em  $A$  e a uma mola de constante  $k$  que está indeformada quando a barra está na vertical. Sabendo que a mola pode atuar tanto sob tração quanto sob compressão, determine o intervalo de valores de  $P$  para os quais o equilíbrio do sistema é estável na posição mostrada na figura.

**10.95** A barra horizontal  $BEH$  está unida a três barras verticais. O colar em  $E$  pode deslizar livremente sobre a barra  $DF$ . Determine o intervalo de valores de  $P$  para os quais o equilíbrio do sistema é estável na posição mostrada na figura quando  $a = 300$  mm,  $b = 400$  mm e  $Q = 90$  N.

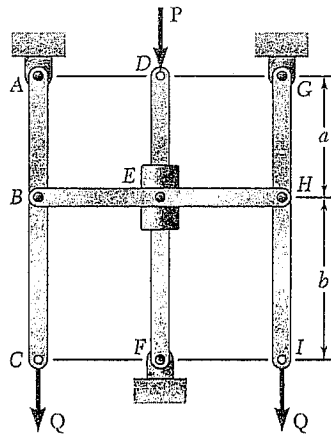


Fig. P10.95 e P10.96

**10.96** A barra horizontal  $BEH$  está unida a três barras verticais. O colar em  $E$  pode deslizar livremente sobre a barra  $DF$ . Determine o intervalo de valores de  $Q$  para os quais o equilíbrio do sistema é estável na posição mostrada na figura quando  $a = 480$  mm,  $b = 400$  mm e  $P = 600$  N.

**\*10.97** As barras  $AB$  e  $BC$ , cada qual de comprimento  $l$  e peso desprezível, são unidas a duas molas, cada qual de constante  $k$ . As molas estão indeformadas e o sistema está em equilíbrio quando  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ . Determine o intervalo de valores de  $P$  para os quais a posição de equilíbrio é estável.

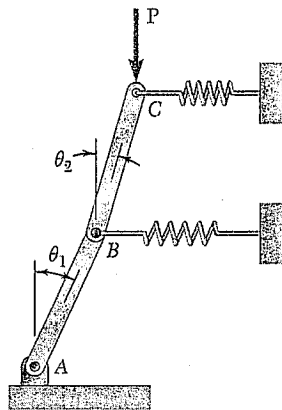


Fig. P10.97

**\*10.98** Resolva o Problema 10.97 sabendo que  $l = 400$  mm e  $k = 1,25$  kN/m.

**\*10.99** A barra  $ABC$  de comprimento  $2a$  e peso desprezível está articulada em  $C$  a um tambor de raio  $a$  tal como mostra a figura. Sabendo que a constante de cada mola é igual a  $k$  e que as molas estão indeformadas quando  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ , determine o intervalo de valores de  $P$  para os quais a posição de equilíbrio  $\theta_1 = \theta_2 = 0$  é estável.

**\*10.100** Resolva o Problema 10.99 sabendo que  $k = 18$  N/cm e  $a = 35$  cm.

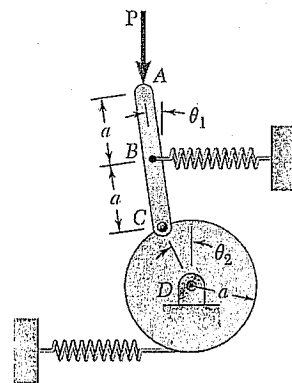


Fig. P10.99

## Trabalho de uma força

A primeira parte deste capítulo foi dedicada ao *princípio dos trabalhos virtuais* e à sua aplicação direta à solução de problemas de equilíbrio. Primeiro definimos o *trabalho de uma força F correspondente ao pequeno deslocamento dr* [Seção 10.2] como a quantidade

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (10.1)$$

obtida formando-se o produto escalar da força  $\mathbf{F}$  e do deslocamento  $d\mathbf{r}$  (Fig. 10.16). Representando respectivamente por  $F$  e  $ds$  as intensidades da força e do deslocamento, e por  $\alpha$  o ângulo formado entre  $\mathbf{F}$  e  $d\mathbf{r}$ , escrevemos

$$dU = F ds \cos \alpha \quad (10.1')$$

O trabalho  $dU$  é positivo se  $\alpha < 90^\circ$ , zero se  $\alpha = 90^\circ$  e negativo se  $\alpha > 90^\circ$ . Também encontramos que o *trabalho de um binário de momento M* que atua sobre um corpo rígido é

$$dU = M d\theta \quad (10.2)$$

sendo  $d\theta$  o pequeno ângulo, expresso em radianos, que o corpo gira.

## Deslocamento virtual

Considerando uma partícula localizada em  $A$  e sobre a qual atuam várias forças  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$  [Seção 10.3], imaginamos que a partícula se moveu para uma nova posição  $A'$  (Fig. 10.17). Como não aconteceu de verdade, esse deslocamento foi chamado de *deslocamento virtual* e representado por  $\delta\mathbf{r}$ , enquanto o trabalho correspondente das forças foi denominado *trabalho virtual* e representado por  $\delta U$ . Tínhamos

$$\delta U = \mathbf{F}_1 \cdot \delta\mathbf{r} + \mathbf{F}_2 \cdot \delta\mathbf{r} + \dots + \mathbf{F}_n \cdot \delta\mathbf{r}$$

O *princípio dos trabalhos virtuais* estabelece que, *se uma partícula está em equilíbrio, o trabalho virtual total  $\delta U$  das forças que atuam na partícula é igual a zero para qualquer deslocamento virtual da partícula.*

O princípio dos trabalhos virtuais pode ser estendido ao caso de corpos rígidos e sistemas de corpos rígidos. Como esse princípio envolve *somente forças que realizam trabalho*, sua aplicação fornece uma alternativa útil ao uso de equações de equilíbrio na solução de muitos problemas de engenharia. O princípio é particularmente eficaz no caso de máquinas e mecanismos que consistam em corpos rígidos ligados entre si, já que o trabalho das reações nos apoios é igual a zero e o trabalho das forças internas nos pinos de conexão se cancela [Seção 10.4; Problemas Resolvidos 10.1, 10.2 e 10.3].

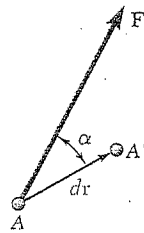


Fig. 10.16

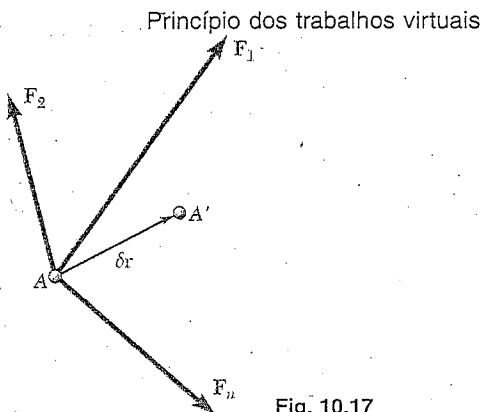


Fig. 10.17

No caso de *máquinas reais* [Seção 10.5], entretanto, o trabalho das forças de atrito deve ser levado em conta, resultando que o *trabalho produzido (output) será menor que o trabalho recebido (input)*. Definindo a *eficiência mecânica* de uma máquina como a relação

$$\eta = \frac{\text{trabalho produzido}}{\text{trabalho recebido}} \quad (10.9)$$

notamos também que para uma máquina ideal (sem atrito)  $\eta = 1$ , enquanto para uma máquina real  $\eta < 1$ .

Na segunda parte do capítulo consideramos o *trabalho de forças correspondente a deslocamentos finitos* de seus pontos de aplicação. O trabalho  $U_{1 \rightarrow 2}$  da força  $\mathbf{F}$  correspondente ao deslocamento da partícula A de  $A_1$  até  $A_2$  (Fig. 10.18) foi obtido integrando-se o lado direito da Eq. (10.1) ou (10.1') ao longo da curva descrita pela partícula [Seção 10.6]:

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \quad (10.11)$$

ou

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{s_1}^{s_2} (F \cos \alpha) ds \quad (10.11')$$

De modo semelhante, o trabalho de um binário de momento  $\mathbf{M}$  correspondente a uma rotação finita de  $\theta_1$  até  $\theta_2$  de um corpo rígido foi expresso como

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta \quad (10.12)$$

O *trabalho de um peso  $\mathbf{W}$  de um corpo* à medida que seu centro de gravidade se move da elevação  $y_1$  até  $y_2$  (Fig. 10.19) pode ser obtido fazendo-se  $F = W$  e  $\alpha = 180^\circ$  na Eq. (10.11'):

$$U_{1 \rightarrow 2} = - \int_{y_1}^{y_2} W dy = Wy_1 - Wy_2 \quad (10.13)$$

O trabalho de  $\mathbf{W}$  é portanto positivo *quando a elevação  $y$  diminui*.

Eficiência mecânica

Trabalho de uma força ao longo de um deslocamento finito

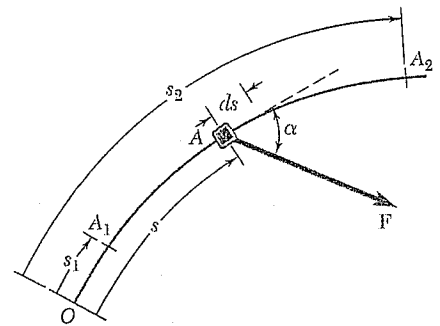


Fig. 10.18

Trabalho de um peso

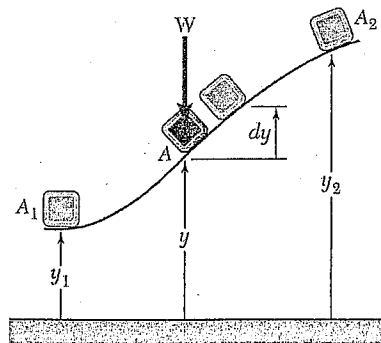


Fig. 10.19

## Trabalho da força exercida por uma mola

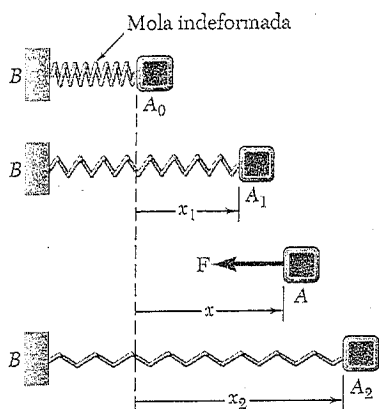


Fig. 10.20

## Energia potencial

## Expressão alternativa para o princípio dos trabalhos virtuais

## Estabilidade do equilíbrio

O trabalho da força  $F$  exercida por uma mola sobre um corpo  $A$  à medida que a mola é estendida de  $x_1$  até  $x_2$  (Fig. 10.20) pode ser obtido fazendo-se  $F = kx$ , sendo  $k$  a constante de mola e  $\alpha = 180^\circ$  na Eq. (10.11')

$$U_{1 \rightarrow 2} = - \int_{x_1}^{x_2} kx \, dx = \frac{1}{2} kx_1^2 - \frac{1}{2} kx_2^2 \quad (10.15)$$

O trabalho de  $F$  é portanto positivo quando a mola está retornando à sua posição indeformada.

Quando o trabalho de uma força  $F$  é independente do caminho realmente percorrido entre  $A_1$  e  $A_2$ , diz-se que a força é uma *força conservativa*, e seu trabalho pode ser expresso como

$$U_{1 \rightarrow 2} = V_1 - V_2 \quad (10.20)$$

sendo  $V$  a *energia potencial* associada a  $F$ , e  $V_1$  e  $V_2$  representam os valores de  $V$  em  $A_1$  e  $A_2$ , respectivamente [Seção 10.7]. As energias potenciais associadas, respectivamente, à *força da gravidade*  $W$  e à *força elástica*  $F$  exercida por uma mola foram definidas como

$$V_g = Wy \quad \text{e} \quad V_e = \frac{1}{2} kx^2 \quad (10.17, 10.18)$$

Quando a posição de um sistema mecânico depende de uma única variável independente  $\theta$ , a energia potencial do sistema é uma função  $V(\theta)$  dessa variável, e segue-se da Eq. (10.20) que  $\delta U = -\delta V = -(dV/d\theta) \delta\theta$ . A condição  $\delta U = 0$  requerida pelo princípio dos trabalhos virtuais para o equilíbrio do sistema pode então ser substituída pela condição

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \quad (10.21)$$

Quando todas as forças envolvidas são conservativas, pode ser preferível usar a Eq. (10.21) em vez de aplicar o princípio dos trabalhos virtuais diretamente [Seção 10.8; Problema Resolvido 10.4].

Essa abordagem apresenta uma outra vantagem, pois é possível determinar, a partir do sinal da segunda derivada de  $V$ , se o equilíbrio do sistema é *estável*, *instável* ou *neutro* [Seção 10.9]. Se  $d^2V/d\theta^2 > 0$ ,  $V$  é *mínimo* e o equilíbrio é *estável*; se  $d^2V/d\theta^2 < 0$ ,  $V$  é *máximo* e o equilíbrio é *instável*; se  $d^2V/d\theta^2 = 0$ , é preciso examinar derivadas de ordem mais alta.

# PROBLEMAS PARA REVISÃO DO TEMA

10.101 Deduza uma expressão para a intensidade da força  $Q$  necessária para se manter o equilíbrio do mecanismo mostrado na figura.

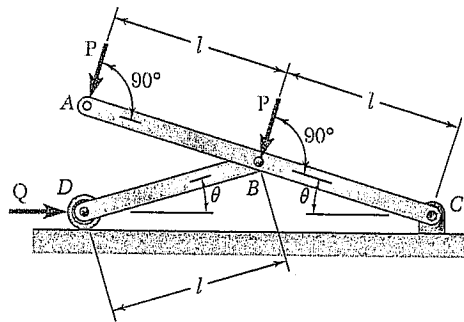


Fig. P10.101

10.102 A posição da haste  $ABC$  é controlada pelo cilindro hidráulico  $BD$ . Para o carregamento mostrado na figura, determine a força exercida pelo cilindro hidráulico no pino  $B$  quando  $\theta = 70^\circ$ .

10.103 A posição da haste  $ABC$  é controlada pelo cilindro hidráulico  $BD$ . Para o carregamento mostrado na figura, determine o maior valor possível do ângulo  $\theta$  se a força máxima que o cilindro pode exercer no pino  $B$  é de  $112,5 \text{ kN}$ .

10.104 Uma barra vertical  $AD$  está unida a duas molas de constante  $k$  e está em equilíbrio na posição mostrada na figura. Determine o intervalo de valores da intensidade  $P$  de duas forças verticais iguais e opostas  $P$  e  $-P$  para as quais a posição do equilíbrio é estável se (a)  $AB = CD$ , (b)  $AB = 2CD$ .

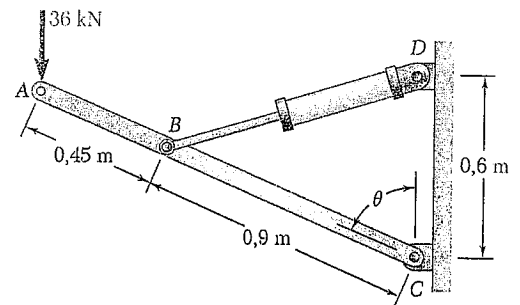


Fig. P10.102 e P10.103

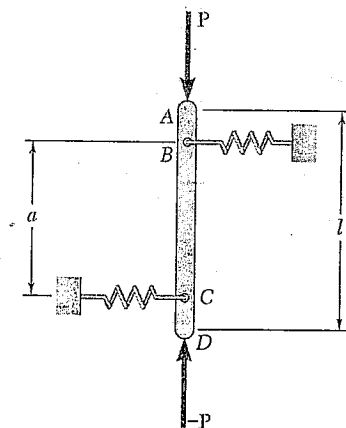


Fig. P10.104

10.105 Determine a força vertical  $P$  que deve ser aplicada em  $G$  para se manter o equilíbrio do acoplamento.

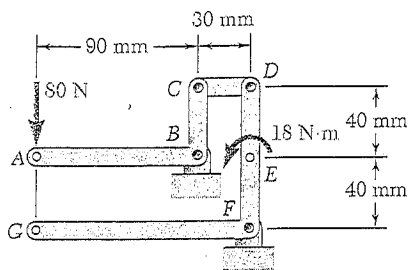


Fig. P10.105 e P10.106

10.106 Determine o binário  $M$  que deve ser aplicado ao elemento  $DEFG$  para se manter o equilíbrio do acoplamento.

10.107 Duas barras uniformes, cada qual de massa  $m$  e comprimento  $l$ , são presas a tambores que estão unidos por uma correia tal como mostra a figura. Considerando que não ocorre escorregamento entre a correia e os tambores, determine as posições de equilíbrio do sistema e determine em cada caso se o equilíbrio é estável, instável ou neutro.

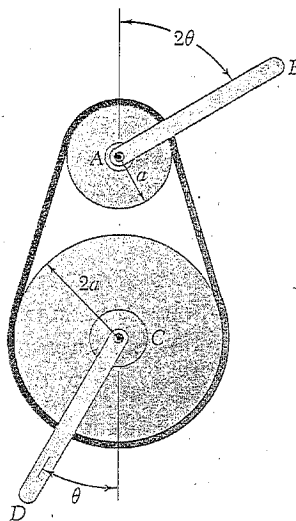


Fig. P10.107

10.108 Usando o método dos trabalhos virtuais, determine separadamente a força e o binário representando a reação em  $A$ .

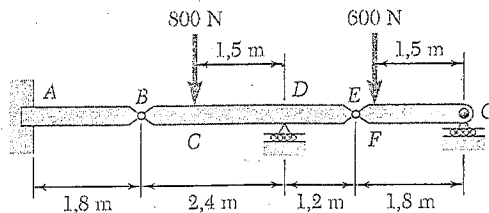


Fig. P10.108 e P10.109



10.109 Usando o método dos trabalhos virtuais, determine a reação em  $D$ .

10.110 A barra delgada  $AB$  está presa a um colar  $A$  e repousa sobre uma pequena roda em  $C$ . Desprezando o raio da roda e o efeito do atrito, deduza uma expressão para a intensidade da força  $Q$  necessária para se manter o equilíbrio da barra.

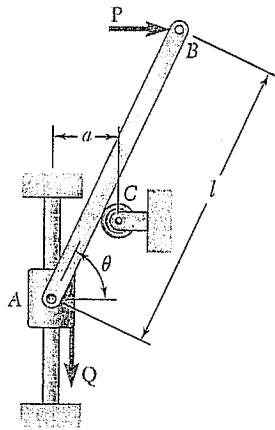


Fig. P10.110

10.111 Uma carga  $W$  de intensidade 450 N é aplicada ao mecanismo em  $C$ . Sabendo que a mola está indeformada quando  $\theta = 15^\circ$ , determine o valor de  $\theta$  correspondente ao equilíbrio e verifique se ele é estável.

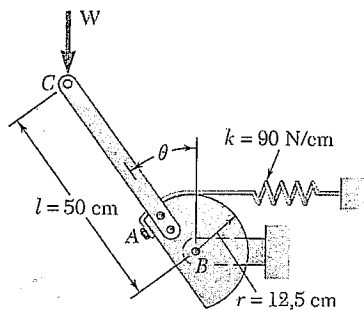


Fig. P10.111 e P10.112

10.112 Uma carga  $W$  de intensidade 450 N é aplicada ao mecanismo em  $C$ . Sabendo que a mola está indeformada quando  $\theta = 30^\circ$ , determine o valor de  $\theta$  correspondente ao equilíbrio e verifique se o equilíbrio é estável.

# PROBLEMAS PARA UTILIZAÇÃO DO COMPUTADOR

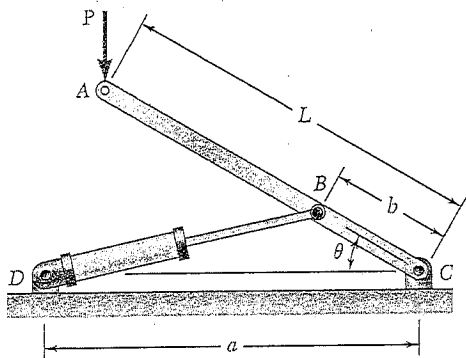


Fig. P10.C1

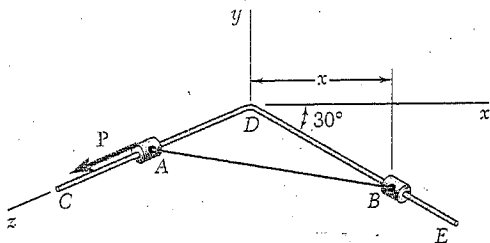


Fig. P10.C2

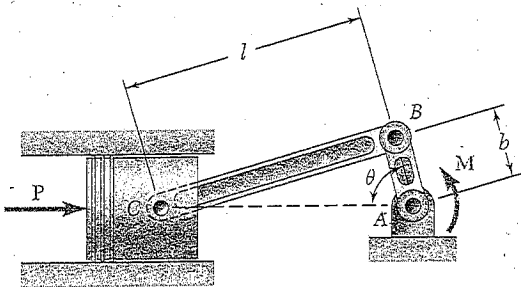


Fig. P10.C3

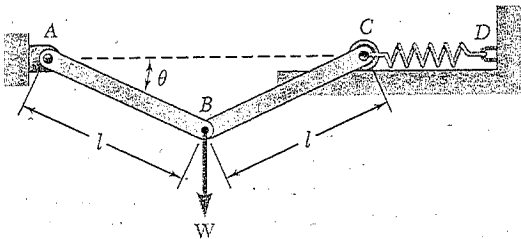


Fig. P10.C5

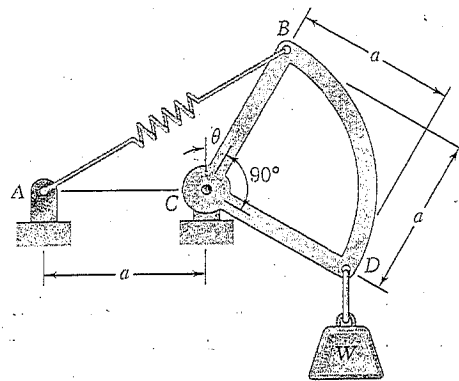


Fig. P10.C4

**10.C1** Sabendo que  $a = 50 \text{ cm}$ ,  $b = 15 \text{ cm}$ ,  $L = 50 \text{ cm}$  e  $P = 62,5 \text{ N}$ , use um aplicativo computacional para plotar o gráfico da força no elemento  $BD$  como uma função de  $\theta$  para valores de  $\theta$  entre  $30^\circ$  e  $150^\circ$ . Determine o intervalo de valores de  $\theta$  para os quais o valor absoluto da força no elemento  $BD$  é menor que  $450 \text{ N}$ .

**10.C2** Os colares  $A$  e  $B$  estão ligados pelo arame  $AB$  e podem deslizar livremente sobre as hastes mostradas na figura, onde a haste  $DE$  está no plano  $xy$ . Sabendo que o comprimento do arame é  $500 \text{ mm}$  e que a massa de cada colar é  $2,5 \text{ kg}$ , (a) use o princípio dos trabalhos virtuais para expressar, em termos da distância  $x$ , a intensidade da força  $P$  necessária para se manter o sistema em equilíbrio, e (b) plote o gráfico de  $P$  como uma função de  $x$  para  $100 \text{ mm} \leq x \leq 400 \text{ mm}$ .

**10.C3** Um binário  $M$  é aplicado à manivela  $AB$  para se manter o equilíbrio do sistema de motor mostrado na figura quando uma força  $P$  é aplicada ao pistão. (a) Sabendo que  $b = 48 \text{ mm}$  e  $l = 150 \text{ mm}$ , use um aplicativo computacional para plotar o gráfico do quociente  $M/P$  como uma função de  $\theta$  para valores de  $\theta$  entre  $0$  e  $180^\circ$ . (b) Determine o valor de  $\theta$  para o qual o quociente  $M/P$  é máximo e o correspondente valor de  $M/P$ .

**10.C4** A constante da mola  $AB$  é  $k$ , e a mola está indeformada quando  $\theta = 0$ . (a) Desprezando o peso do elemento  $BCD$ , expresse a energia potencial e sua derivada  $dV/d\theta$  em termos de  $a$ ,  $k$ ,  $W$  e  $\theta$ . (b) Usando um aplicativo computacional e sabendo que  $W = 600 \text{ N}$ ,  $a = 200 \text{ mm}$  e  $k = 15 \text{ kN/m}$ , plote o gráfico da energia potencial e de  $dV/d\theta$  como funções de  $\theta$  para valores de  $\theta$  entre  $0$  e  $165^\circ$ . (c) Determine os valores de  $\theta$  para os quais o sistema está em equilíbrio, e determine em cada caso se o equilíbrio é estável, instável ou neutro.

**10.C5** Uma carga vertical  $W$  é aplicada ao mecanismo em  $B$ . A constante da mola é  $k$ , e a mola está indeformada quando  $AB$  e  $BC$  são horizontais. Para  $l = 27,5 \text{ cm}$  e  $k = 22,5 \text{ N/cm}$ , plote o gráfico de  $W$  como uma função de  $\theta$  para valores de  $\theta$  entre  $0$  e  $80^\circ$ .

**10.C6** O pistão do guindaste  $ABC$  é controlado pelo cilindro hidráulico  $BD$ . Usando um aplicativo computacional, plote em um gráfico a intensidade da força exercida pelo cilindro hidráulico no pino  $B$  em função de  $\theta$  para valores de  $\theta$  entre  $5^\circ$  e  $120^\circ$ .

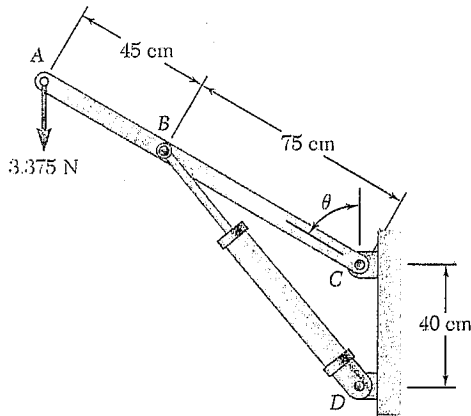


Fig. P10.C6

**\*10.C7** Um bloco de 8 kg é pendurado no ponto médio  $C$  do cabo  $AB$ , que está ligado a duas molas tal como mostra a figura. Sabendo que as molas estão indeformadas quando  $y = 0$ , plote o gráfico da distância  $y$  correspondente ao equilíbrio em função da constante de mola  $k_2$  para  $400 \text{ N/m} \leq k_2 \leq 600 \text{ N/m}$ .

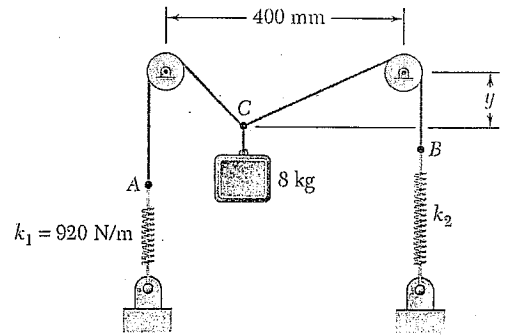


Fig. P10.C7

**10.C8** Uma barra delgada  $AB$  de peso  $W$  está ligada aos blocos  $A$  e  $B$  que podem se mover livremente nas guias mostradas na figura. A constante da mola é igual a  $k$  e a mola está indeformada quando  $AB$  é horizontal. Para  $l = 50 \text{ cm}$  e  $k = 1,8 \text{ N/cm}$ , use um aplicativo computacional para determinar os três valores do ângulo  $\theta$  correspondentes ao equilíbrio, para valores de  $W$  a partir de  $5 \text{ N}$  até  $50 \text{ N}$ , em incrementos de  $5 \text{ N}$ .

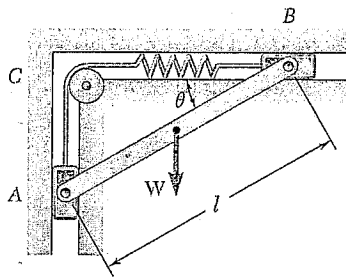


Fig. P10.C8

**10.C9** Uma carga vertical  $W$  é aplicada ao mecanismo em  $C$ . Desprezando o peso do mecanismo, use um aplicativo computacional para plotar o gráfico de  $\theta$  em função de  $W$ , para valores de  $W$  a partir de  $40 \text{ N}$  até  $480 \text{ N}$ , sabendo que  $k = 5 \text{ kN/m}$  e que a mola está indeformada quando  $\theta = 0$ .

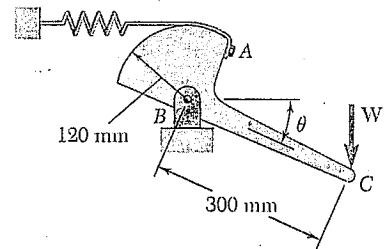


Fig. P10.C9

- 7.138 (a)  $a = 26,8$  m;  $b = 20,4$  m. (b) 35,3 m.  
 7.139 (a)  $a = 20,1$  m;  $b = 15,29$  m. (b) 26,5 m.  
 \*7.140 (a) Ponto C está 7,17 m à esquerda de B. (b) 64,89 N.  
 \*7.141 (a) Ponto C está 6,21 m à esquerda de B. (b) 42,98 N.  
 7.143 (a)  $1,326T_m/w$ . (b) 12,72 km.  
 7.146 (a) 0,338. (b)  $\theta_B = 56,5^\circ$ ;  $T_m = 0,755wL$ .  
 \*7.147 (b) 51,75 kN; 18,9 kN · m.  
 7.149 (a) 2,28 m. (b)  $D_x = 13,67$  kN  $\rightarrow$ ;  $D_y = 7,80$  kN  $\uparrow$ .  
 (c) 15,94 kN.  
 7.151 (Em Bf)  $0,289Wr$   $\uparrow$ .  
 7.152 (Em Bf)  $0,417Wr$   $\uparrow$ .  
 7.153 (Em Cf)  $F = 625$  N  $\downarrow$ ;  $V = 120,0$  N  $\leftarrow$ ;  $M = 27,0$  N · m  $\uparrow$ .  
 7.155 900 N; 675 N · m.  
 \*7.156 4,104 N · m, 1,35 m de A.  
 \*7.157 (a) 14,4 N. (b) 3 m.

## CAPÍTULO 8

- 8.1 Bloco em movimento;  $F = 193,2$  N  $\nearrow$ .  
 8.2 Em equilíbrio;  $F = 246$  N  $\nearrow$ .  
 8.3 Em equilíbrio;  $F = 3,05$  N  $\swarrow$ .  
 \*8.5  $6,94$  N  $\leq P \leq 54,36$  N.  
 \*8.6 (a) 187,7 N. (b)  $14,04^\circ$ .  
 8.7 (a)  $50,5^\circ$ . (b)  $66,5^\circ$ .  
 8.9 (a)  $0 \leq \theta \leq 54,9^\circ$ . (b)  $168,7^\circ \leq \theta \leq 180,0^\circ$ .  
 \*8.11 (a) 324 N  $\leftarrow$ . (b) 180 N  $\leftarrow$ .  
 \*8.12 (a) 252 N  $\leftarrow$ . (b) 180 N  $\leftarrow$ .  
 8.13  $43,0^\circ$ .  
 8.15 (a) 141,3 N. (b) 117,7 N. (c) 50,5 N.  
 8.17  $Wr\mu_s(1 + \mu_s)/(1 + \mu_s^2)$ .  
 8.18 (a)  $0,360Wr$ . (b)  $0,422Wr$ .  
 \*8.19 154,58 N · m.  
 8.21 0,200.  
 8.22 0,1835.  
 8.23 (a)  $4,62^\circ$  e  $48,2^\circ$ . (b)  $0,526W$  e  $0,374W$ .  
 8.25 0,1865.  
 8.27 0,283.  
 \*8.28 (a) 126,6 N  $\leftarrow$ . (b) 1,1 cm.  
 8.30  $(\mu_s)_A = 0,1364$ ;  $(\mu_s)_C = 0,1512$ .  
 8.31  $(\mu_s)_A = 0,1875$ ;  $(\mu_s)_C = 0,1977$ .  
 8.32 (a) A placa está em equilíbrio.  
 (b) A placa se move para baixo.  
 8.34 (a)  $W \leq 34,6$  N. (b)  $17,82$  N  $\leq W \leq 98,2$  N.  
 8.35 (a)  $W \leq 4,07$  N e  $W \geq 86,4$  N. (b)  $W \geq 246$  N.  
 \*8.36  $-52,7$  N  $\leq P \leq 38,7$  N.  
 8.37  $-12,31$  N  $\leq P \leq 105,3$  N.  
 8.39 37,9 N.  
 \*8.40 33,05 N · m  $\uparrow$ .  
 8.42 0,1757.  
 8.43  $35,8^\circ$ .  
 8.45 1,268W.  
 \*8.46 (a) 22,14 N. (b)  $C_x = 4,87$  N  $\leftarrow$ ;  $C_y = 471,15$  N  $\uparrow$ .  
 \*8.47 (a) 45,77 N. (b)  $C_x = 29,34$  N  $\rightarrow$ ;  $C_y = 474,3$  N  $\uparrow$ .  
 8.48 1,957 kN.  
 8.49 2,13 kN.  
 \*8.52 11,09 kN  $\leftarrow$ .  
 8.54 (a) 1,647 kN. (b) 1,647 kN.  
 8.55 (a) 789 N. (b) 1.100 N.  
 \*8.57 6,79 kN.  
 8.58 (a) A cunha é forçada para cima, saindo de entre as placas.  
 (b) A cunha permanecerá autobloqueada.  
 8.59 305 N.  
 \*8.60 (b) 260 N  $\leftarrow$ .  
 8.62 (a) 821 N  $\rightarrow$ . (b) A prancha irá deslizar.  
 8.63 (a) 818 N  $\leftarrow$ . (b) A prancha não se move.  
 8.64 0,384.  
 8.67 14,45 N · m.  
 \*8.70 5,87 N · m.  
 \*8.71 4,06 N · m.  
 8.72 15,31 N · m.  
 8.73 4,14 N · m.  
 8.74 14,48 N · m.  
 8.75 0,0787.  
 \*8.76 408,6 N.  
 \*8.77 376,2 N.  
 8.80 (a) 0,344. (b) 120,2 N.  
 8.81  $T_{AB} = 290$  N;  $T_{CD} = 310$  N;  $T_{EF} = 331$  N.  
 8.82  $T_{AB} = 310$  N;  $T_{CD} = 290$  N;  $T_{EF} = 272$  N.  
 \*8.83 (a) 5,30 kN. (b)  $1,349^\circ$ .  
 8.84 253 N.  
 8.85 250 N.  
 \*8.88 (a) 1,09 kN. (b) 0,82 kN.  
 \*8.89 24,88 cm.  
 8.90 18,39 N.  
 \*8.91 1,72 N · m.  
 8.95 13,80 N.  
 \*8.96 175 N.  
 8.97 1,200 mm.  
 8.98 42,7 N.  
 \*8.99 (a) 1,53 kN. (b) 1,26 kN.  
 \*8.101 (a) 0,329. (b) 2,67 voltas.  
 \*8.102 (a) 0,213. (b) 112,5 N.  
 \*8.103  $53,33$  N  $\leq W_B \leq 152,1$  N.  
 8.104  $286$  N  $\leq P \leq 4.840$  N.  
 8.107 40,1 N · m.  
 8.108 28,6 N · m.  
 \*8.109 (a) 38,03 N · m. (b) 18,99 N · m.  
 8.111 (a) 53,91 N. (b) 1,900.  
 8.113 (a) 432 N · m. (b) 0,219.  
 8.114 (a) 646 N. (b) 47,0 N.  
 8.115 0,361.  
 \*8.116 (a) 105 N. (b) 428 N. (c) 310 N.  
 8.118 (a)  $1,847$  kg  $\leq m_A \leq 34,7$  kg. (b)  $2,81$  kg  $\leq m_A \leq 22,8$  kg.  
 8.119 (a) 5,55 kg. (b) 8,00 kg.  
 8.120 (a)  $2,28$  kg  $\leq m_A \leq 28,1$  kg. (b)  $3,46$  kg  $\leq m_A \leq 18,49$  kg.  
 8.121 (a) 7,79 kg. (b) 5,40 kg.  
 \*8.122 4,83 N.  
 8.124 (a) 538 N · m  $\downarrow$ . (b) 1,142 kN  $\downarrow$ .  
 8.125 (a) 538 N · m  $\uparrow$ . (b) 879 N  $\downarrow$ .  
 8.126 0,350.  
 8.127 0,266.  
 8.130 81,7 N · m.  
 \*8.131 (a) 71,73 N · m. (b) 986 N.

- 8.133  $48,3^\circ \leq \theta \leq 78,7^\circ$ .  
 8.135  $31,0^\circ$ .  
 8.137  $14,23 \text{ kg} \leq m \leq 175,7 \text{ kg}$ .  
 \*8.139  $2.992,5 \text{ N}$ .  
 8.140  $35,1 \text{ N} \cdot \text{m}$ .  
 \*8.141 (b)  $12,1 \text{ N}$ .  
 \*8.142  $143,0 \text{ N} \leq P \leq 483 \text{ N}$ .  
 \*8.143 (a)  $51,44 \text{ N}$ . (b) O movimento é iminente em C.

### CAPÍTULO 9

- 9.1  $5a^3b/33$ .  
 9.2  $3a^3b/10$ .  
 9.3  $b^3h/4$ .  
 9.4  $47a^3b/60$ .  
 9.5  $5ab^3/17$ .  
 9.8  $0,0430ab^3$ .  
 9.9  $4ab^3/15$ .  
 9.10  $ab^3/4$ .  
 9.13  $2,16a^3b$ .  
 9.14  $0,1606a^3b$ .  
 9.15  $ab^3/10; b/\sqrt{5}$ .  
 9.17  $a^3b/6; a/\sqrt{3}$ .  
 9.18  $15a^3b/91; 0,524a$ .  
 9.20  $1,523a^3h; 1,404a$ .  
 9.21  $12a^4; 1,414a$ .  
 9.22  $4ab(a^2 + 5b^2)/3; \sqrt{(a^2 + 5b^2)}/3$ .  
 9.23  $ab(7a^2 + 52b^2)/210; \sqrt{(7a^2 + 52b^2)}/70$ .  
 9.26 (b)  $-10,56\%; -0,772\%; -0,0488\%$ .  
 9.27  $31\pi a^4/20; 1,153a$ .  
 9.28  $bh(12h^2 + b^2)/48; \sqrt{(12h^2 + b^2)}/24$ .  
 \*9.31  $9,53 \times 10^5 \text{ mm}^4; 27,3 \text{ mm}$ .  
 9.32  $7,36 \times 10^6 \text{ mm}^4; 32,0 \text{ mm}$ .  
 \*9.33  $1,57 \times 10^5 \text{ mm}^4; 11,1 \text{ mm}$ .  
 9.35  $I_x = 60,9a^4; I_y = 11,86a^4$ .  
 \*9.37  $I = 8,05 \times 10^6 \text{ mm}^4; d_2 = 62,5 \text{ mm}$ .  
 \*9.38  $A = 3.125 \text{ mm}^2; \bar{I} = 4,76 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .  
 9.39  $J_B = 608 \times 10^6 \text{ mm}^4; J_D = 1.215 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .  
 \*9.40  $4,33 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .  
 9.41  $I_x = 4,57 \times 10^6 \text{ mm}^4; \bar{I}_y = 1,42 \times 10^7 \text{ mm}^4$ .  
 9.43  $I_x = 30,6 \times 10^6 \text{ mm}^4; \bar{I}_y = 12,03 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .  
 9.44  $I_x = 433 \times 10^6 \text{ mm}^4; \bar{I}_y = 733 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .  
 \*9.46 (a)  $376,56 \times 10^8 \text{ mm}^4$ . (b)  $375,78 \times 10^8 \text{ mm}^4$ .  
 9.47 (a)  $122,4 \times 10^6 \text{ mm}^4$ . (b)  $64,4 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .  
 9.48 (a)  $1.392 \times 10^6 \text{ mm}^4$ . (b)  $729 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .  
 \*9.49  $\bar{I}_x = 407,08 \times 10^6 \text{ mm}^4; \bar{I}_y = 40,02 \times 10^6 \text{ mm}^4$ ;  
 $\bar{k}_x = 144,6 \text{ mm}; \bar{k}_y = 45,3 \text{ mm}$ .  
 9.51  $\bar{I}_x = 126,4 \times 10^6 \text{ mm}^4; \bar{I}_y = 108,8 \times 10^6 \text{ mm}^4$ ;  
 $\bar{k}_x = 94,2 \text{ mm}; \bar{k}_y = 87,5 \text{ mm}$ .  
 9.52  $12,29 \text{ mm}$ .  
 \*9.53  $\bar{I}_x = 3,86 \times 10^6 \text{ mm}^4; \bar{I}_y = 53,64 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .  
 9.55  $b = 91,2 \text{ mm}; \bar{I}_x = 11,34 \times 10^6 \text{ mm}^4; \bar{I}_y = 34,0 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .  
 9.56 (a)  $364 \text{ mm}$ .  
 (b)  $\bar{I}_x = 34,1 \times 10^6 \text{ mm}^4; \bar{I}_y = 110,2 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .  
 9.57  $3\pi r/16$ .  
 9.60  $1,224r$ .  
 \*9.61  $F_A = F_B = 977 \text{ N}; F_C = F_D = 999 \text{ N}$ .  
 9.62  $2,66 \text{ m}$ .  
 9.63  $225 \text{ mm}$ .  
 \*9.64  $110 \text{ mm}$ .  
 9.67  $a^4/2$ .  
 9.68  $a^2b^2/12$ .  
 9.69  $-b^2h^2/8$ .  
 9.70  $a^2b^2(4 + \pi^2)/8\pi^2$ .  
 \*9.72  $195,7 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .  
 9.73  $138,2 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .  
 9.74  $-159,6 \times 10^3 \text{ mm}^4$ .  
 9.75  $1,573 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .  
 9.77  $-262 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .  
 \*9.78  $1,1 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .  
 \*9.80  $\bar{I}_{x'} = 1.292,97 \times 10^6 \text{ mm}^4; \bar{I}_{y'} = 902,34 \times 10^6 \text{ mm}^4$ ;  
 $\bar{I}_{x'y'} = 760,55 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .  
 9.82  $\bar{I}_{x'} = 4,61 \times 10^6 \text{ mm}^4; \bar{I}_{y'} = 3,82 \times 10^6 \text{ mm}^4$ ;  
 $\bar{I}_{x'y'} = -3,83 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .  
 9.83  $\bar{I}_{x'} = 149,9 \times 10^3 \text{ mm}^4; \bar{I}_{y'} = 469 \times 10^3 \text{ mm}^4$ ;  
 $\bar{I}_{x'y'} = 143,5 \times 10^3 \text{ mm}^4$ .  
 \*9.84  $\bar{I}_{x'} = 2,07 \times 10^6 \text{ mm}^4; \bar{I}_{y'} = 2,63 \times 10^6 \text{ mm}^4; \bar{I}_{x'y'} = 1,71 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .  
 \*9.86  $7,22^\circ; 1.882,81 \times 10^6 \text{ mm}^4; 313,28 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .  
 9.88  $12,06^\circ; 8,06 \times 10^6 \text{ mm}^4; 0,365 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .  
 9.89  $-24,0^\circ; 524 \times 10^3 \text{ mm}^4; 94,9 \times 10^3 \text{ mm}^4$ .  
 \*9.90  $-19,64^\circ; 4,08 \times 10^6 \text{ mm}^4; 0,62 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .  
 \*9.92  $\bar{I}_{x'} = 12,93 \times 10^8 \text{ mm}^4; \bar{I}_{y'} = 9,02 \times 10^8 \text{ mm}^4$ ;  
 $\bar{I}_{x'y'} = 7,61 \times 10^8 \text{ mm}^4$ .  
 9.94  $\bar{I}_{x'} = 4,61 \times 10^6 \text{ mm}^4; \bar{I}_{y'} = 3,82 \times 10^6 \text{ mm}^4$ ;  
 $\bar{I}_{x'y'} = -3,83 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .  
 9.95  $\bar{I}_{x'} = 149,9 \times 10^3 \text{ mm}^4; \bar{I}_{y'} = 469 \times 10^3 \text{ mm}^4$ ;  
 $\bar{I}_{x'y'} = 143,5 \times 10^3 \text{ mm}^4$ .  
 \*9.96  $\bar{I}_{x'} = 2,07 \times 10^6 \text{ mm}^4; \bar{I}_{y'} = 2,63 \times 10^6 \text{ mm}^4; \bar{I}_{x'y'} = 1,71 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .  
 9.97  $20,2^\circ; 1,754a^4; 0,209a^4$ .  
 \*9.98  $7,22^\circ; 1.882,81 \times 10^6 \text{ mm}^4; 313,28 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .  
 9.100  $29,7^\circ; 405 \times 10^6 \text{ mm}^4; 83,9 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .  
 9.101  $-24,0^\circ; 524 \times 10^3 \text{ mm}^4; 94,9 \times 10^3 \text{ mm}^4$ .  
 \*9.103  $-20,0^\circ; 15,47 \times 10^6 \text{ mm}^4; 2,1 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .  
 9.104  $-30,1^\circ; 884 \times 10^6 \text{ mm}^4; 281 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .  
 9.105 (a)  $-215 \times 10^3 \text{ mm}^4$ . (b)  $-28,1^\circ$ . (c)  $568 \times 10^3 \text{ mm}^4$ .  
 \*9.106  $19,64^\circ; 4,81 \times 10^6 \text{ mm}^4; 0,19 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .  
 9.107  $-24,0^\circ; 8,33 \times 10^6 \text{ mm}^4; 1,509 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .  
 \*9.108 (a)  $-7,50^\circ$ . (b)  $252,34 \times 10^6 \text{ mm}^4; 107,03 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .  
 9.112  $\pm 159,4 \times 10^3 \text{ mm}^4$ .  
 9.113 (a)  $5mr^2/16$ . (b)  $0,1347mr^2$ .  
 9.114 (a)  $0,0699mb^2$ . (b)  $m(a^2 + 0,279b^2)/4$ .  
 9.116 (a)  $5ma^2/3$ . (b)  $11ma^2/18$ .  
 9.117 (a)  $ma^2/6$ . (b)  $m(a^2 + 7b^2)/6$ .  
 9.119 (a)  $5ma^2/18$ . (b)  $3,61ma^2$ .  
 9.120 (a)  $0,994ma^2$ . (b)  $2,33ma^2$ .  
 9.121  $5mb^2/18$ .  
 9.123 (a)  $1,085ma^2$ . (b)  $3,67ma^2$ .  
 9.124  $m(b^2 + h^2)/10$ .  
 9.126  $m(a^2 + b^2)/5$ .  
 9.127  $I_x = I_y = ma^2/4; I_z = ma^2/2$ .  
 9.128 (a)  $mh^2/6$ . (b)  $m(a^2 + 4h^2 \sin^2 \theta)/24$ .  
 (c)  $m(a^2 + 4h^2 \cos^2 \theta)/24$ .  
 \*9.129  $2,64 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2; 8,6 \text{ mm}$ .

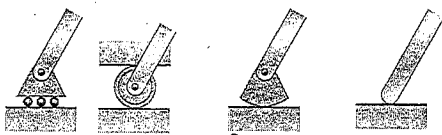

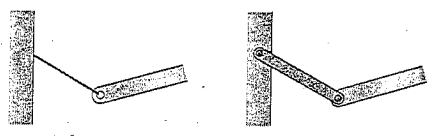

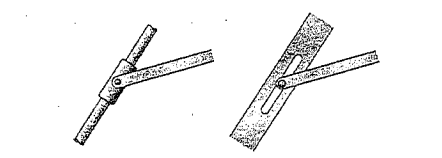
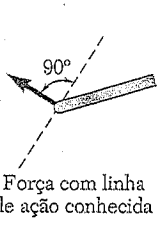

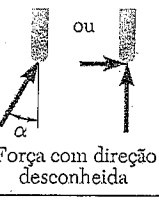
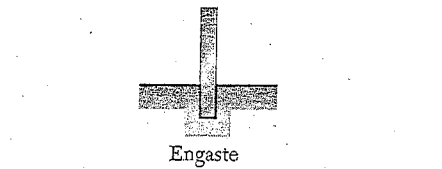

- 9.130  $1,184 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ; 8,19 mm.
- 9.131  $ma^2/2$ ;  $a/\sqrt{2}$ .
- \*9.132 5 cm.
- 9.133  $281 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .
- 9.136 (a) 46,0 mm. (b)  $8,54 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ; 45,4 mm.
- \*9.137  $I_x = 2,9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;  $I_y = 6,52 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;  $I_z = 5,44 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .
- 9.139  $I_x = 612 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;  $I_y = 737 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;  
 $I_z = 250 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .
- 9.141  $I_x = 37,4 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;  $I_y = 90,9 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;  
 $I_z = 76,7 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .
- \*9.142  $I_x = 19,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \times 10^{-3}$ ;  $I_y = 1,26 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;  
 $I_z = 1,24 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .
- \*9.143 (a)  $42,7 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . (b)  $62,8 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .  
(c)  $43,7 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .
- 9.144  $21,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .
- 9.145  $3,98 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .
- \*9.147 (a)  $9,41 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . (b)  $14,46 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .  
(c)  $2,75 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .
- 9.148  $I_x = I_z = 6,85 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;  $I_y = 12,63 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .
- 9.149  $I_x = 23,2 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;  $I_y = 21,4 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;  
 $I_z = 17,99 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .
- \*9.151  $I_{xy} = 6,11 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;  $I_{yz} = 14,84 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;  
 $I_{zx} = 33,79 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .
- \*9.152  $I_{xy} = 7,44 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;  $I_{yz} = 4,33 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;  
 $I_{zx} = 14,02 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .
- 9.153  $I_{xy} = 36,2 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;  $I_{yz} = 8,49 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;  
 $I_{zx} = 20,6 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .
- 9.154  $I_{xy} = -691 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;  $I_{yz} = 203 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;  
 $I_{zx} = -848 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .
- 9.157  $I_{xy} = -0,1931 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;  $I_{yz} = 0,310 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;  
 $I_{zx} = 2,26 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .
- \*9.158  $I_{xy} = -2,35 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;  $I_{yz} = 0$ ;  
 $I_{zx} = -1,29 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .
- 9.159  $I_{xy} = -11wa^3/g$ ;  $I_{yz} = wa^3(\pi + 6)/2g$ ;  $I_{zx} = -wa^3/4g$ .
- 9.162  $I_{xy} = -m'R_1^2/2$ ;  $I_{yz} = m'R_1^2/2$ ;  $I_{zx} = -m'R_2^2/2$ .
- 9.164 (a)  $mac/20$ . (b)  $I_{xy} = mab/20$ ;  $I_{yz} = mbc/20$ .
- 9.165  $ma^2(10h^2 + 3a^2)/12(h^2 + a^2)$ .
- 9.166  $3,22ma^2$ .
- \*9.167  $56,06 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .
- \*9.168  $5,22 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .
- 9.169  $5Wa^2/18g$ .
- 9.170  $5pta^4/12$ .
- 9.171  $6,74 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .
- 9.173  $25,3 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .
- 9.175 (a)  $b/a = 2,00$ ;  $c/a = 2,00$ .  
(b)  $b/a = 1,000$ ;  $c/a = 0,500$ .
- 9.176 (a) 2,00. (b)  $\sqrt{2/3}$ .
- 9.177 (a)  $1/\sqrt{3}$ . (b)  $\sqrt{7/12}$ .
- 9.179 (a)  $ma^2/6$ . (b)  $I_x = ma^2/6$ ;  $I_y = I_z = 11ma^2/12$ .
- 9.181 (a)  $K_1 = 0,363ma^2$ ;  $K_2 = 1,583ma^2$ ;  $K_3 = 1,720ma^2$ .  
(b)  $(\theta_x)_1 = (\theta_z)_1 = 49,7^\circ$ ;  $(\theta_y)_1 = 113,7^\circ$ ;  
 $(\theta_x)_2 = 45,0^\circ$ ;  $(\theta_y)_2 = 90,0^\circ$ ;  $(\theta_z)_2 = 135,0^\circ$ ;  
 $(\theta_x)_3 = (\theta_z)_3 = 73,5^\circ$ ;  $(\theta_y)_3 = 23,7^\circ$ .
- \*9.182 (a)  $K_1 = 43,7 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;  $K_2 = 42,62 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;  
 $K_3 = 62,88 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .  
(b)  $(\theta_x)_1 = (\theta_y)_1 = 90,0^\circ$ ;  $(\theta_z)_1 = 0$ ;
- $(\theta_x)_2 = 3,43^\circ$ ;  $(\theta_y)_2 = 86,6^\circ$ ;  $(\theta_z)_2 = 90,0^\circ$ ;  
 $(\theta_x)_3 = 93,4^\circ$ ;  $(\theta_y)_3 = 3,41^\circ$ ;  $(\theta_z)_3 = 90,0^\circ$ .
- \*9.183 (a)  $K_1 = 1,48 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;  
 $K_2 = 13,44 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;  
 $K_3 = 14,67 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .  
(b)  $(\theta_x)_1 = 72,5^\circ$ ;  $(\theta_y)_1 = 83,0^\circ$ ;  $(\theta_z)_1 = 18,89^\circ$ ;  
 $(\theta_x)_2 = 19,38^\circ$ ;  $(\theta_y)_2 = 83,7^\circ$ ;  $(\theta_z)_2 = 108,3^\circ$ ;  
 $(\theta_x)_3 = 98,2^\circ$ ;  $(\theta_y)_3 = 9,46^\circ$ ;  $(\theta_z)_3 = 94,7^\circ$ .
- 9.184 (a)  $K_1 = 0,1639Wa^2/g$ ;  $K_2 = 1,054Wa^2/g$ ;  $K_3 = 1,115Wa^2/g$ .  
(b)  $(\theta_x)_1 = 36,7^\circ$ ;  $(\theta_y)_1 = 71,6^\circ$ ;  $(\theta_z)_1 = 59,5^\circ$ ;  
 $(\theta_x)_2 = 74,9^\circ$ ;  $(\theta_y)_2 = 54,5^\circ$ ;  $(\theta_z)_2 = 140,5^\circ$ ;  
 $(\theta_x)_3 = 57,5^\circ$ ;  $(\theta_y)_3 = 138,8^\circ$ ;  $(\theta_z)_3 = 112,4^\circ$ .
- 9.185 (a)  $K_1 = 0,203pta^4$ ;  $K_2 = 0,698pta^4$ ;  $K_3 = 0,765pta^4$ .  
(b)  $(\theta_x)_1 = 40,2^\circ$ ;  $(\theta_y)_1 = 50,0^\circ$ ;  $(\theta_z)_1 = 86,7^\circ$ ;  
 $(\theta_x)_2 = 56,2^\circ$ ;  $(\theta_y)_2 = 134,5^\circ$ ;  $(\theta_z)_2 = 63,4^\circ$ ;  
 $(\theta_x)_3 = 70,8^\circ$ ;  $(\theta_y)_3 = 108,0^\circ$ ;  $(\theta_z)_3 = 153,2^\circ$ .
- \*9.186 (a)  $K_1 = 13,6 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$ ;  
 $K_2 = 25,2 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$ ;  
 $K_3 = 31,0 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$ .  
(b)  $(\theta_x)_1 = 35,2^\circ$ ;  $(\theta_y)_1 = (\theta_z)_1 = 65,9^\circ$ ;  
 $(\theta_x)_2 = 90,0^\circ$ ;  $(\theta_y)_2 = 45,0^\circ$ ;  $(\theta_z)_2 = 135,0^\circ$ ;  
 $(\theta_x)_3 = 54,7^\circ$ ;  $(\theta_y)_3 = (\theta_z)_3 = 125,3^\circ$ .
- 9.187  $a^3b/6$ .
- \*9.188  $\bar{I}_x = 7,08 \times 10^{-6} \text{ mm}^4$ ;  $\bar{I}_y = 1,76 \times 10^{-6} \text{ mm}^4$ .
- 9.190 (a)  $7ma^2/18$ . (b)  $0,819ma^2$ .
- \*9.192 (a)  $\bar{I}_x = 3,61 \times 10^6 \text{ mm}^4$ ;  $\bar{I}_y = 1,40 \times 10^6 \text{ mm}^4$ ;  
 $\bar{I}_{x'y'} = 1,44 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .  
(b) 59,8° horário.
- 9.194 (a) 176,9 mm. (b) 87,8 mm.
- 9.196  $I_x = 28,3 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;  $I_y = 183,8 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;  
 $k_x = 42,9 \text{ mm}$ ;  $k_y = 109,3 \text{ mm}$ .
- 9.197  $I_x = 4a^4$ ;  $I_y = 16a^4/3$ .
- 9.198 17,19 mm.

## CAPÍTULO 10

- 10.1 60 N ↓.
- \*10.2 180 N ↓.
- 10.4 6,00 N · m ↓.
- \*10.5 (a) 54 N T; 60 mm →. (b) 126 N T; 140 mm →.
- 10.7 (a) 75,0 N ↑. (b) 225 N ↓.
- 10.8 500 N ↓.
- 10.9  $(3P/2) \text{ tg } \theta$ .
- 10.12  $P[(l/a) \cos^3 \theta - 1]$ .
- \*10.13 8.144 N.
- 10.14  $5,42^\circ$ .
- 10.15  $3Pa/2$ .
- 10.18 (a)  $Pl \text{ sen } 2\theta$ . (b)  $3Pl \cos \theta$ . (c)  $Pl \text{ sen } \theta$ .
- \*10.19 (a) 171,3 N · m ↗. (b) 109,9 N · m ↗.
- \*10.20 (a) 1.661 N →. (b) 2.147 N →.
- \*10.21 34,7 N ⊥ 30,0°.
- \*10.22 96,53 N · m ↗.
- 10.25 39,2°.
- 10.26 32,3°.
- 10.27 40,8°.
- 10.28 19,81° e 51,9°.
- 10.30 25,0°.

- 10.31  $39,7^\circ$  e  $69,0^\circ$ .  
 10.32  $15,03^\circ$  e  $36,9^\circ$ .  
 10.33  $40,2^\circ$ .  
 10.36  $31,0^\circ$ .  
 10.37  $60,4^\circ$ .  
 10.39  $61,2^\circ$ .  
 10.40  $78,7^\circ$ ;  $324^\circ$ ;  $379^\circ$ .  
 10.41  $397\text{ N}$   $\nearrow 44,7^\circ$ .  
 10.42  $22,9^\circ$  e  $70,7^\circ$ .  
 10.43  $31,8\text{ N}$   $\nwarrow 35,0^\circ$ .  
 10.44  $15,27^\circ$ .  
 10.45  $9,47\text{ kN}$   $\nwarrow$ .  
 10.46  $10,20\text{ kN}$   $\nwarrow$ .  
 10.47  $\eta = 1/(1 + \mu \cot \alpha)$ .  
 \*10.49  $6,75\text{ kN} \cdot \text{m}$ ;  $1,84\text{ kN} \cdot \text{m}$ .  
 10.50  $\eta = \tan \theta / \tan (\theta + \phi_s)$ .  
 \*10.52  $677,7\text{ N}$ ;  $569,7\text{ N}$ .  
 \*10.53  $A = 67,5\text{ N}$   $\downarrow$ ;  $M_A = 263,3\text{ N} \cdot \text{m}$   $\uparrow$ .  
 \*10.54  $D = 1.418\text{ N}$   $\downarrow$ .  
 10.55  $21,8\text{ mm}$  (encurtado).  
 10.57  $41,7\text{ mm}$   $\downarrow$ .  
 10.60  $25,0^\circ$ .  
 10.61  $39,7^\circ$  e  $69,0^\circ$ .  
 10.62  $40,2^\circ$ .  
 10.65  $31,0^\circ$ .  
 10.69  $\theta = 14,48^\circ$ , instável;  $\theta = 90,0^\circ$ , estável;  
 $\theta = 165,5^\circ$ , instável;  $\theta = 270^\circ$ , estável.  
 10.70  $\theta = 0$ , instável;  $\theta = 137,8^\circ$ , estável.  
 10.73  $\theta = 61,2^\circ$ , estável.  
 10.74  $\theta = 78,7^\circ$ , estável;  $\theta = 324^\circ$ , instável;  $\theta = 379^\circ$ , estável.  
 10.75  $1,118\text{ kg}$ , estável.  
 10.76  $109,4^\circ$ , estável.  
 10.78  $301\text{ mm}$ .  
 10.80  $\theta = 9,69^\circ$ , estável;  
 $\theta = 33,8^\circ$ , instável;  
 $\theta = 90,0^\circ$ , estável.  
 \*10.81 (a)  $0 \leq W \leq 405\text{ N}$ .  
 (b)  $0 \leq \theta \leq 45,0^\circ$ .  
 10.82  $\theta = 13,19^\circ$ , estável;  
 $\theta = 76,8^\circ$ , instável.  
 10.83  $49,1^\circ$ .  
 10.84  $70,9^\circ$ .  
 10.85  $54,9^\circ$ .  
 10.87  $61,4^\circ$ .  
 \*10.89  $k > 12,49\text{ N/cm}$ .  
 \*10.90  $306\text{ mm}$ .  
 10.91  $0 \leq P < ka$ .  
 10.94  $0 \leq P < ka/10$ .  
 10.95  $0 \leq P < 320\text{ N}$ .  
 10.96  $Q > 432\text{ N}$ .  
 10.99  $0 \leq P < 0,219ka$ .  
 \*10.100  $0 \leq P < 138\text{ N}$ .  
 \*10.102  $80,55\text{ kN}$   $\nearrow$ .  
 10.104 (a) e (b)  $P < ka^2/2l$ .  
 10.105  $270\text{ N}$   $\uparrow$ .  
 10.107  $\theta = 0$  e  $\theta = 180,0^\circ$ , instável;  
 $\theta = 75,5^\circ$  e  $\theta = 285^\circ$ , estável.  
 10.108  $A = 250\text{ N}$   $\uparrow$ ;  $M_A = 450\text{ N} \cdot \text{m}$   $\uparrow$ .  
 10.109  $1.050\text{ N}$   $\uparrow$ .  
 10.110  $(Pl/a) \sin \theta \cos^2 \theta$ .  
 10.112  $113,8^\circ$ .

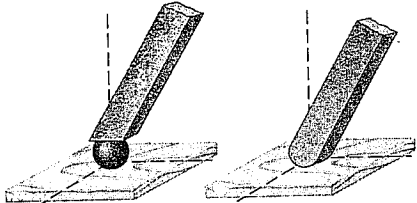
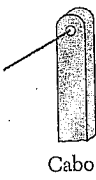
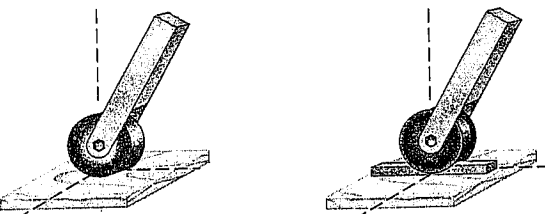
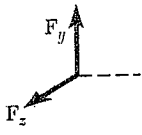
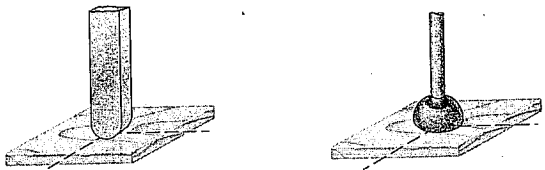
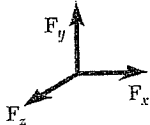
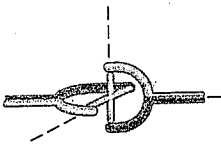
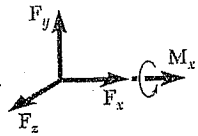
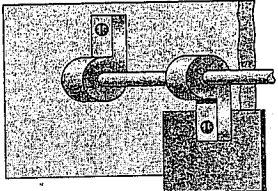
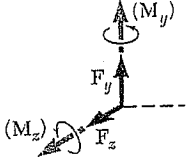
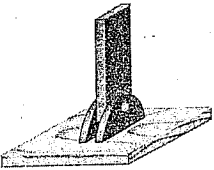
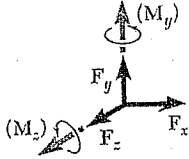
## Reações em apoios e conexões para uma estrutura bidimensional

Apoio ou Conexão	Reação	Número de Incógnitas
 <p>Roletes Suporte basculante Superfície sem atrito</p>	 <p>Força com linha de ação conhecida</p>	1
 <p>Cabo curto Haste curta</p>	 <p>Força com linha de ação conhecida</p>	1
 <p>Cursor sobre haste sem atrito Pino deslizante sem atrito</p>	 <p>Força com linha de ação conhecida</p>	1
 <p>Pino sem atrito ou articulação Superfície rugosa</p>	 <p>Força com direção desconhecida</p>	2
 <p>Engaste</p>	 <p>Força e binário</p>	3

O primeiro passo na solução de qualquer problema que envolva o equilíbrio de um corpo rígido é construir um diagrama de corpo livre apropriado do corpo. Como parte desse processo, é necessário mostrar nesse diagrama as reações através das quais o solo e outros corpos se opõem a um possível movimento do corpo. As figuras das capas internas resumem as possíveis reações exercidas sobre corpos bi e tridimensionais.



## Reações em apoios e conexões para uma estrutura tridimensional

 <p>Esfera      Superfície sem atrito</p>	 <p>Cabo</p> <p>Força com linha de ação conhecida (uma incógnita)</p>
 <p>Rolete sobre superfície rugosa      Roda sobre trilho</p>	 <p>Dois componentes de força</p>
 <p>Superfície rugosa      Rótula</p>	 <p>Três componentes de força</p>
 <p>Junta universal</p>	 <p>Três componentes de força e um binário</p>
 <p>Dobradiça e mancal suportando apenas carregamento radial</p>	 <p>Dois componentes de força (e dois binários, ver a página 192)</p>
 <p>Pino e suporte</p>	 <p>Três componentes de força (e dois binários, ver a página 192)</p>

## Prefixos do SI

Fator de multiplicação	Prefixo	Símbolo
1.000.000.000.000 = $10^{12}$	tera	T
1.000.000.000 = $10^9$	giga	G
1.000.000 = $10^6$	mega	M
1.0000 = $10^3$	quilo	k
100 = $10^2$	hecto‡	h
10 = $10^1$	deca‡	da
0,1 = $10^{-1}$	deci‡	d
0,01 = $10^{-2}$	centi‡	c
0,001 = $10^{-3}$	mili	m
0,000 001 = $10^{-6}$	micro	$\mu$
0,000 000 001 = $10^{-9}$	nano	n
0,000 000 000 001 = $10^{-12}$	pico	p
0,000 000 000 000 001 = $10^{-15}$	femto	f
0,000 000 000 000 000 001 = $10^{-18}$	atto	a

‡ O uso deste prefixo deve ser evitado, exceto para a medição de áreas e volumes e para o uso não-técnico do centímetro, como no caso das medições do corpo e das roupas.

## Principais unidades do SI usadas em mecânica

Grandeza	Unidade	Símbolo	Fórmula
Aceleração	Metro por segundo ao quadrado	...	$m/s^2$
Ângulo	Radiano	rad	†
Aceleração angular	Radiano por segundo ao quadrado	...	$rad/s^2$
Velocidade angular	Radiano por segundo	...	$rad/s$
Área	Metro quadrado	...	$m^2$
Massa específica	Quilograma por metro cúbico	...	$kg/m^3$
Energia	Joule	J	$N \cdot m$
Força	Newton	N	$kg \cdot m/s^2$
Frequência	Hertz	Hz	$s^{-1}$
Impulso	Newton-segundo	...	$kg \cdot m/s$
Comprimento	Metro	m	‡
Massa	Quilograma	kg	‡
Momento de uma força	Newton-metro	...	$N \cdot m$
Potência	Watt	W	$J/s$
Pressão	Pascal	Pa	$N/m^2$
Tempo	Segundo	s	‡
Velocidade	Metro por segundo	...	$m/s$
Volume, sólidos	Metro cúbico	...	$m^3$
Líquidos	Litro	L	$10^{-3}m^3$
Trabalho	Joule	J	$N \cdot m$

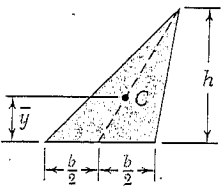
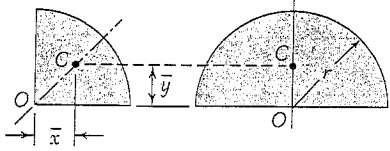
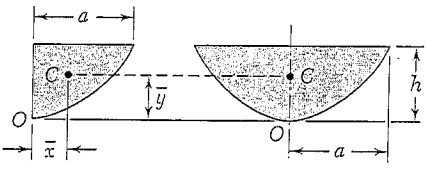
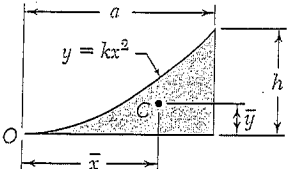
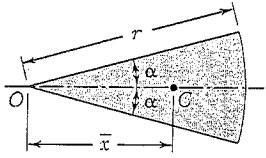
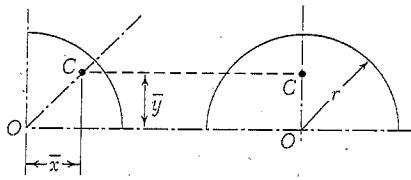
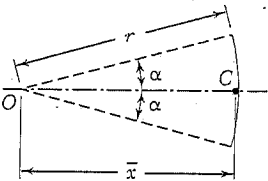
† Unidade suplementar (1 revolução =  $2\pi$  rad =  $360^\circ$ ).

‡ Unidade básica.

## Unidades costumeiras nos EUA e suas equivalentes no SI

Grandeza	Unidades costumeiras nos EUA	Equivalentes no SI
Aceleração	ft/s <sup>2</sup>	0,3048 m/s <sup>2</sup>
	in/s <sup>2</sup>	0,0254 m/s <sup>2</sup>
Área	ft <sup>2</sup>	0,0929 m <sup>2</sup>
	in <sup>2</sup>	645,2 mm <sup>2</sup>
Energia	ft · lb	1,356 J
Força	kip	4,448 kN
	lb	4,448 N
	oz	0,2780 N
Impulso	lb · s	4,448 N · s
Comprimento	ft	0,3048 m
	in	25,40 mm
	mi	1,609 km
Massa	oz massa	28,35 g
	lb massa	0,4536 kg
	slug	14,59 kg
	ton	907,2 kg
Momento de uma força	lb · ft	1,356 N · m
	lb · in	0,1130 N · m
Momento de inércia		
	De uma área	in <sup>4</sup>
De uma massa	lb · ft · s <sup>2</sup>	1,356 kg · m <sup>2</sup>
Quantidade de movimento	lb · s	4,448 kg · m/s
Potência	ft · lb/s	1,356 W
	hp	745,7 W
Pressão	lb/ft <sup>2</sup>	47,88 Pa
	lb/in <sup>2</sup> (psi)	6,895 kPa
Velocidade	ft/s	0,3048 m/s
	in/s	0,0254 m/s
	mi/h (mph)	0,4470 m/s
	mi/h (mph)	1,609 km/h
Volume	ft <sup>3</sup>	0,02832 m <sup>3</sup>
	in <sup>3</sup>	16,39 cm <sup>3</sup>
Líquidos	gal	3,785 L
	qt	0,9464 L
Trabalho	ft · lb	1,356 J

Centróides de áreas e linhas de formatos comuns

Formato		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área
Área triangular			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Área de um quarto de círculo		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Área semicircular		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Área semiparabólica		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Área parabólica		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Área sob arco parabólico		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Setor circular		$\frac{2r \text{ sen } \alpha}{3\alpha}$	0	$\alpha r^2$
Arco de um quarto de círculo		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Arco semicircular		0	$\frac{2r}{\pi}$	$\pi r$
Arco de círculo		$\frac{r \text{ sen } \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

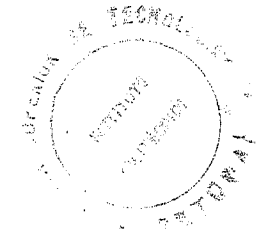
**Momentos de inércia de formatos geométricos comuns**

<p>Retângulo</p> $\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3$ $I_y = \frac{1}{3}b^3h$ $J_C = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$	
<p>Triângulo</p> $\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3$	
<p>Círculo</p> $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{2}\pi r^4$	
<p>Semicírculo</p> $I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{4}\pi r^4$	
<p>Quarto de círculo</p> $I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{8}\pi r^4$	
<p>Elipse</p> $\bar{I}_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi a^3b$ $J_O = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$	

**Momentos de inércia de massa de formatos geométricos comuns**

<p>Barra esbelta</p> $I_y = I_z = \frac{1}{12}mL^2$	
<p>Placa retangular delgada</p> $I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}mc^2$ $I_z = \frac{1}{12}mb^2$	
<p>Prisma retangular</p> $I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$	
<p>Disco delgado</p> $I_x = \frac{1}{2}mr^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4}mr^2$	
<p>Cilindro circular</p> $I_x = \frac{1}{2}ma^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2)$	
<p>Cone circular</p> $I_x = \frac{3}{10}ma^2$ $I_y = I_z = \frac{3}{5}m(\frac{1}{4}a^2 + h^2)$	
<p>Esfera</p> $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}ma^2$	

## 11



## Cinemática das Partículas

O movimento de cada um dos três veículos mostrados na figura é caracterizado, em qualquer instante, pela sua *posição*, pela sua *velocidade* e pela sua *aceleração*. De particular interesse é o *movimento relativo* de um veículo quando referido a outro. O estudo do movimento é conhecido como *Cinemática*, que constitui o assunto deste capítulo.



## 11.1. INTRODUÇÃO À DINÂMICA

Nos Capítulos 1 a 10 dedicámos a nossa atenção à *estática*, *i. e.*, à análise de corpos em repouso. Iniciamos agora o estudo da *dinâmica*, a parte da mecânica que trata da análise de corpos em movimento.

Enquanto o estudo da estática remonta ao tempo dos filósofos gregos, a primeira contribuição de vulto para o estudo da dinâmica foi devida a Galileu (1564-1642). As experiências de Galileu com corpos animados de movimento uniformemente acelerado levaram Newton (1642-1727) à formulação das suas leis fundamentais do movimento.

A Dinâmica divide-se em:

1. *Cinemática*, que trata do estudo da geometria do movimento. Permite relacionar deslocamento, velocidade, aceleração e tempo, sem qualquer referência à causa do movimento.
2. *Cinética*, que estuda a relação existente entre as forças que actuam num corpo, a sua massa, e o movimento consequente. A cinética é utilizada para prever o movimento causado por um determinado conjunto de forças, ou, de outro modo, para determinar as forças que produzem um dado movimento.

Os Caps. 11 a 14 são dedicados à *dinâmica das partículas*; no Cap. 11 consideramos a *cinemática das partículas*. O uso da palavra partículas não significa que o nosso estudo está limitado a corpúsculos; indica, sim, que, nestes primeiros capítulos, os corpos em movimento – possivelmente tão grandes como automóveis, foguetes ou aviões – são considerados sem olhar à sua dimensão. Dizer que os corpos são encarados como partículas significa apenas que, durante o movimento, o corpo é entendido como um todo, não se considerando qualquer rotação em torno do seu centro de massa. Porém, existem casos em que não podemos ser alheios a essa rotação, e, por este motivo, os corpos não podem ser considerados partículas. Tais movimentos são fruto de análise nos últimos capítulos, que tratam da *dinâmica dos corpos rígidos*.

Na primeira parte do Cap. 11, examinamos o movimento rectilíneo de uma partícula; significa que, em qualquer instante, podemos determinar a posição, a velocidade e a aceleração de uma partícula, à medida que se move ao longo de uma linha recta. Em primeiro lugar, utilizamos os métodos gerais de análise do movimento de uma partícula, e, em seguida, consideramos dois casos importantes, nomeadamente o movimento uniforme e o movimento uniformemente acelerado (Secs. 11.4 e 11.5). Na Sec. 11.6 analisa-se o movimento simultâneo de várias partículas, e é introduzido o conceito de movimento de uma partícula relativamente a outra. Como conclusão desta primeira parte, apresentam-se alguns métodos gráficos para a análise e a resolução de vários problemas envolvendo o movimento rectilíneo de partículas (Secs. 11.7 e 11.8).

Na segunda parte deste capítulo, examinamos o movimento de uma partícula que se desloca ao longo de uma trajectória curva. Uma vez que a posição, a velocidade e a aceleração de uma partícula são definidas como grandezas vectoriais, é necessário introduzir-se o conceito de derivada de uma função vectorial (Sec. 11.10) alargando deste modo o nosso conjunto de ferramentas matemáticas. Em seguida consideramos as aplicações em que o movimento se

descreve em termos das componentes rectangulares ou cartesianas da velocidade e da aceleração, entre as quais merece particular atenção o movimento de um projectil (Sec. 11.11). Na Sec. 11.12 consideramos o movimento de uma partícula relativamente a um sistema de referência em translação. Finalmente, o movimento curvilíneo é objecto de análise em função de outras componentes que não as rectangulares. Assim, introduzimos na Sec. 11.13 as componentes tangencial e normal da velocidade e da aceleração, legando para a Sec. 11.14 a introdução das componentes radial e transversal.

## MOVIMENTO RECTILÍNEO DE PARTÍCULAS

### 11.2. POSIÇÃO, VELOCIDADE E ACELERAÇÃO

De uma partícula que se move em linha recta diz-se que está em *movimento rectilíneo*. Em qualquer instante  $t$ , a partícula ocupa uma certa posição na linha recta. A fim de definir a sua posição  $P$ , escolhemos uma origem fixa  $O$ , e um sentido positivo ao longo da linha recta. Medimos a distância  $x$  da origem  $O$  a  $P$  e registamo-la com um sinal mais ou menos, consoante  $P$  é alcançado de  $O$  através de um movimento no sentido positivo ou no sentido negativo. A distância  $x$  e o correspondente sinal definem plenamente a sua posição, e designa-se por *coordenada de posição* da partícula. Por exemplo, a coordenada de posição de  $P$  na Fig. 11.1a é de  $x = +5$  m; a coordenada correspondendo a  $P'$  na Fig. 11.1b é  $x = -2$  m.

Se conhecermos, em qualquer instante  $t$ , a coordenada de posição  $x$ , podemos dizer que o movimento da partícula está definido. A tabela que relaciona a posição com o tempo pode ser expressa na forma de uma equação em  $x$  e em  $t$ , tal como  $x = 6t^2 - t^3$ , ou na forma gráfica de  $x$  versus  $t$ , como é mostrado na Fig. 11.6. A coordenada de posição  $x$  é frequentemente medida em metros (m), sendo o tempo  $t$  geralmente medido em segundos (s) – ambas são unidades fundamentais do Sistema Internacional de Unidades (SI).

Considere-se a posição  $P$  ocupada pela partícula no instante  $t$  e a respectiva coordenada de posição  $x$  (Fig. 11.2). Considere-se também a posição  $P'$ , ocupada pela partícula num instante posterior,  $t + \Delta t$ ; a coordenada de posição de  $P'$ , pode ser obtida adicionando à coordenada  $x$  o pequeno deslocamento  $\Delta x$ , que será positivo ou negativo consoante se situe à direita ou à esquerda de  $P$ . A velocidade média da partícula, ao longo do intervalo  $\Delta t$ , é definida como o quociente entre o deslocamento  $\Delta x$  e o intervalo de tempo  $\Delta t$ :

$$\text{Velocidade média} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

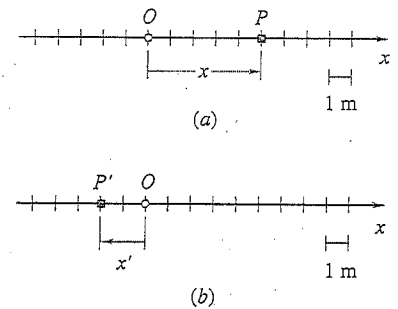


Fig. 11.1

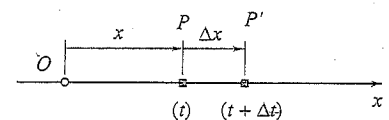


Fig. 11.2



Quando trabalhamos com unidades SI, o valor de  $\Delta x$  é expresso em metros, e o de  $\Delta t$  em segundos; deste modo, a velocidade média é expressa em metros por segundo (m/s).

A *velocidade instantânea*  $v$  de uma partícula no instante  $t$  é obtida a partir da velocidade média, através da imposição de tempos e de distâncias cada vez menores, ou seja

$$\text{Velocidade instantânea} = v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

A velocidade instantânea é também expressa em m/s. No limite, o quociente é, por definição, igual à derivada de  $x$  em relação a  $t$ , o que permite escrever

$$v = \frac{d x}{d t} \quad (11.1)$$

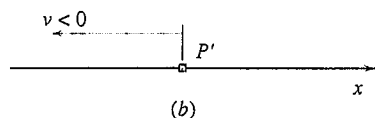
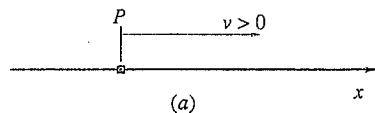


Fig. 11.3

A velocidade  $v$  é representada por um número real que pode ser positivo ou negativo†. Um valor positivo de  $v$  indica que  $x$  aumenta, *i. e.*, que a partícula se move no sentido positivo (Fig. 11.3a); um valor negativo de  $v$  indica que  $x$  diminui, *i. e.*, que a partícula se move no sentido negativo (Fig. 11.3b). O módulo de  $v$  é conhecido como *velocidade* ou, mais especificamente, como *intensidade da velocidade*.

Consideremos uma partícula com velocidade  $v$  no instante  $t$ , e, no instante  $t + \Delta t$ , com velocidade  $v + \Delta v$  (Fig. 11.4). A aceleração média da partícula durante o intervalo de tempo  $\Delta t$  é definida como o quociente entre  $\Delta v$  e  $\Delta t$ ,

$$\text{Aceleração média} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

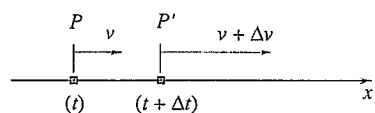


Fig. 11.4

Quando utilizamos unidades SI, o valor de  $\Delta v$  é expresso em m/s, e  $\Delta t$ , em segundos; assim, a aceleração média é expressa em m/s<sup>2</sup>.

A *aceleração instantânea*  $a$  de uma partícula no instante  $t$  é obtida a partir da aceleração média, escolhendo velocidades e tempos cada vez mais curtos, ou seja

$$\text{Aceleração instantânea} = a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

A aceleração instantânea é também expressa em m/s<sup>2</sup>. O limite do quociente é, por definição a derivada de  $v$  em relação a  $t$ , e traduz a taxa de variação da

† Como veremos na Sec. 11.9, a velocidade é de facto uma grandeza vectorial. Porém, estamos a considerar aqui apenas o movimento rectilíneo de partículas, no qual a velocidade tem uma direcção bem definida, ficando apenas por caracterizar o módulo e o sentido da mesma; a utilização de uma grandeza escalar com o respectivo sinal, mais ou menos, permite completar a definição. O que foi dito aplica-se também para o caso da aceleração no movimento rectilíneo.

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (11.2)$$

ou, substituindo  $v$  de (11.1)

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (11.3)$$

A aceleração  $a$  é representada por um número real que pode ser positivo ou negativo†. Um valor positivo de  $a$  indica que a velocidade (*i. e.*, o número  $v$ ) aumenta. Isto pode significar que a partícula se move mais depressa no sentido positivo (Fig. 11.5a), ou que está em movimento mais lento no sentido negativo (Fig. 11.5b); em ambos os casos o valor de  $\Delta v$  é positivo. Um valor negativo para  $a$  indica que a velocidade diminui; ou a partícula se move mais lentamente no sentido positivo (Fig. 11.5c), ou está em movimento mais rápido no sentido negativo (Fig. 11.5d)

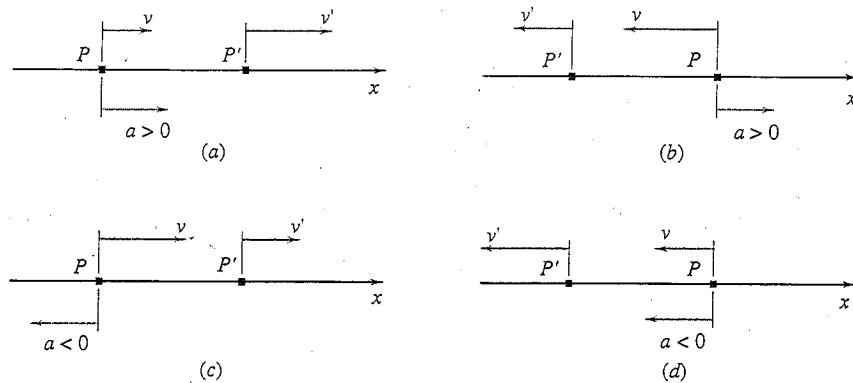


Fig. 11.5

O termo *desaceleração* é por vezes utilizado quando o valor de  $a$  pretende representar um decréscimo na velocidade da partícula (*i. e.* do módulo de  $v$ ); a partícula está, por isso, em movimento mais lento. Por exemplo, a partícula da Fig. 11.5 está desacelerada nas partes  $b$  e  $c$ ; ela está, na verdade, acelerada (*i. e.*, move-se mais rapidamente) nas partes  $a$  e  $d$ .

A aceleração pode ainda ser expressa de outra forma, através da eliminação do tempo elementar  $dt$  nas Eqs. (11.1) e (11.2): Resolvendo (11.1) em ordem a  $dt$ , obtemos  $dt = dx/v$ ; substituindo em (11.2) podemos escrever

$$a = v \frac{dv}{dx} \quad (11.4)$$

† Veja nota na p. 584.

Exemplo. Considere uma partícula que se desloca ao longo de uma linha recta e cuja posição é definida pela equação

$$x = 6t^2 - t^3$$

na qual  $t$  é expresso em segundos, e  $x$ , em metros. A velocidade  $v$  é, em qualquer instante, obtida pela diferenciação de  $x$  em relação a  $t$ :

$$v = \frac{dx}{dt} = 12t - 3t^2$$

A aceleração  $a$  obtém-se por nova derivação em relação a  $t$ :

$$a = \frac{dv}{dt} = 12 - 6t$$

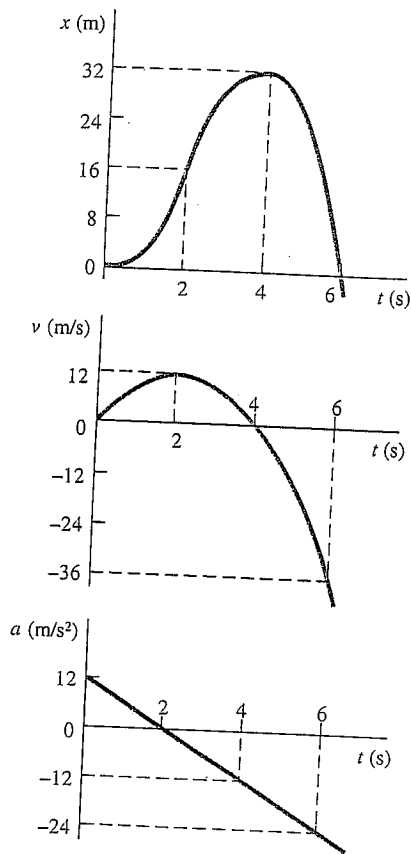


Fig. 11.6

Os valores da coordenada de posição, da velocidade e da aceleração em função do tempo, estão indicados na Fig. 11.6. As curvas obtidas são denominadas *curvas do movimento*. É importante notar que a partícula não se move ao longo destas curvas, mas sim ao longo de uma linha recta. Uma vez que a derivada de uma função traduz o declive da curva correspondente, o declive da curva  $x-t$ , num dado instante, é igual ao valor de  $v$  nesse instante, e o declive da curva  $v-t$  é igual ao valor de  $a$ . Dado que  $a = 0$  em  $t = 2$  s, o declive de  $v-t$  deverá ser nulo quando  $t = 2$  s; a velocidade atinge um máximo nesse instante. Do mesmo modo, uma vez que  $v = 0$  em  $t = 0$  e  $t = 4$  s, a tangente à curva  $x-t$  deve ser horizontal para ambos os valores de  $t$ .

Um estudo destas três curvas permite mostrar que o movimento da partícula, desde  $t = 0$  até  $t = \infty$ , pode dividir-se em quatro fases:

1. A partícula parte da origem,  $x = 0$ , sem velocidade mas com aceleração positiva. Sob o efeito desta aceleração, a partícula adquire velocidade positiva e desloca-se no sentido positivo. Desde  $t = 0$  até  $t = 2$  s,  $x$ ,  $v$  e  $a$  são todos positivos.
2. Quando  $t = 2$  s, a aceleração torna-se nula; a velocidade atinge o seu valor máximo. Desde  $t = 2$  s até  $t = 4$  s,  $v$  é positivo, mas  $a$  é negativo; a partícula move-se ainda no sentido positivo mas cada vez mais lentamente; a partícula está em desaceleração.
3. Em  $t = 4$  s, a velocidade é zero; a coordenada de posição  $x$  alcança o seu máximo valor. Doravante, os valores de  $v$  e  $a$  são negativos; a partícula está em aceleração e desloca-se no sentido negativo com velocidade crescente.
4. No instante  $t = 6$  s, a partícula passa pela origem; a sua coordenada  $x$  é zero, tendo percorrido 64 m desde o início do movimento. Para valores de  $t$  maiores que 6 s,  $x$ ,  $v$  e  $a$  serão todos eles negativos. A partícula mantém-se em movimento no sentido negativo, afastando-se de  $O$ , cada vez mais rapidamente.

Na secção anterior, vimos que o movimento de uma partícula é conhecido só quando é possível saber a sua posição em qualquer instante. Contudo, na prática, não é habitual definir o movimento de uma partícula através da relação entre  $x$  e  $t$ ; é mais usual definir-se a relação entre a aceleração e o tempo. Por exemplo, um corpo em queda livre possui uma aceleração constante, dirigida para baixo e igual a  $9,81 \text{ m/s}^2$ ; uma massa ligada a uma mola possui uma aceleração proporcional à deformação da mola em cada instante, medida a partir da posição de equilíbrio. Em geral, a aceleração de uma partícula pode ser expressa em função de uma das variáveis  $x$ ,  $v$  e  $t$ . A fim de determinar a coordenada de posição  $x$  em função de  $t$ , temos, pois, de proceder a duas integrações sucessivas.

Consideremos três classes comuns de movimento:

1.  $a = f(t)$ . A aceleração é uma dada função de  $t$ .  
Resolvendo a Eq. (11.2) em ordem a  $dv$  e substituindo  $a$  por  $f(t)$ , escrevemos

$$\begin{aligned} dv &= a \, dt \\ dv &= f(t) \, dt \end{aligned}$$

Integrando ambos os membros, obtemos a equação

$$\int dv = \int f(t) \, dt$$

que define  $v$  em termos de  $t$ . Note-se, no entanto, que surge uma constante como resultado da operação de integração. Este facto é explicado pela razão de ser possível definir vários movimentos com uma dada aceleração  $a = f(t)$ . Esta multiplicidade de movimentos deixa de existir, ao serem conhecidas as *condições iniciais* do movimento, *i. e.*, valores  $v_0$  da velocidade e  $t_0$  da coordenada de posição quando  $t = 0$ . Substituindo os integrais indefinidos por integrais definidos com limites inferiores que correspondem às condições iniciais  $t = 0$  e  $v = v_0$  e limites superiores correspondentes a  $t = t$  e  $v = v$ , podemos escrever

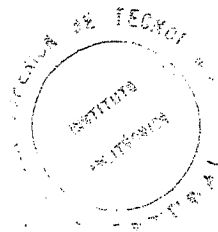
$$\begin{aligned} \int_{v_0}^v dv &= \int_0^t f(t) \, dt \\ v - v_0 &= \int_0^t f(t) \, dt \end{aligned}$$

que exprime  $v$  em termos de  $t$ .

A Eq. (11.1) pode agora ser resolvida em ordem a  $dx$ ,

$$dx = v \, dt$$

com a decorrente substituição de  $v$ . Podemos integrar ambos os membros, o da esquerda em relação a  $x$ , desde  $x = x_0$  até  $x = x$ , e o da direita



em relação a  $t$ , desde  $t = 0$  até  $t = t$ . A coordenada de posição  $x$  é obtida em função de  $t$ ; o movimento está, assim, completamente definido.

Nas Secs. 11.4 e 11.5 estudaremos dois casos particulares importantes: o caso em que  $a = 0$ , que diz respeito ao *movimento uniforme*, e o caso em que  $a = \text{constante}$ , que corresponde ao *movimento uniformemente acelerado*.

2.  $a = f(x)$ . A aceleração é uma dada função de  $x$ . Reformulando a Eq. (11.4) e substituindo  $a$  por  $f(x)$ , escrevemos

$$\begin{aligned}v dv &= a dx \\v dv &= f(x) dx\end{aligned}$$

Dado que ambos os membros contêm apenas uma variável, a equação está em condições de ser integrada. De novo, podemos designar, respectivamente por  $v_0$  e  $x_0$ , a velocidade e a coordenada de posição iniciais, obtendo assim

$$\begin{aligned}\int_{v_0}^v v dv &= \int_{x_0}^x f(x) dx \\ \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2 &= \int_{x_0}^x f(x) dx\end{aligned}$$

que determina  $v$  em função de  $x$ . Resolvemos agora a Eq. (11.1) em ordem a  $t$ ,

$$dt = \frac{dx}{v}$$

e substituímos o valor de  $v$ , entretanto obtido. Os dois membros da equação estão em condições de ser integrados, conseguindo-se assim a desejada relação entre  $x$  e  $t$ . Porém, na maioria dos casos, não se consegue levar a cabo esta última integração por via analítica, tendo por isso de se recorrer a métodos numéricos de integração.

3.  $a = f(v)$ . A aceleração é uma dada função de  $v$ . Podemos agora substituir  $f(v)$  por  $a$ , quer em (11.2) quer em (11.4), de modo a obter as seguintes relações

$$\begin{aligned}f(v) &= \frac{dv}{dt} & f(v) &= v \frac{dv}{dx} \\ dt &= \frac{dv}{f(v)} & dx &= \frac{v dv}{f(v)}\end{aligned}$$

Ao integrarmos a primeira equação obtemos uma relação entre  $v$  e  $t$ ; ao procedermos identicamente para a segunda equação conseguimos uma relação entre  $v$  e  $x$ . Qualquer uma destas relações se pode usar juntamente com a Eq. (11.1) de modo a obter a relação entre  $x$  e  $t$ , que caracteriza o movimento da partícula.

## PROBLEMA-TIPO 11.1

A posição de uma partícula que se desloca ao longo de uma linha recta é definida pela expressão  $x = t^3 - 6t^2 - 15t + 40$ , na qual  $x$  é expresso em metros, e  $t$ , em segundos. Determine (a) o instante para o qual a velocidade é nula, (b) a posição e a distância percorrida pela partícula nesse tempo, (c) a aceleração da partícula nesse instante, (d) a distância percorrida pela partícula desde  $t = 4$  s até  $t = 6$  s.

### RESOLUÇÃO

As equações do movimento são

$$x = t^3 - 6t^2 - 15t + 40 \quad (1)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 12t - 15 \quad (2)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t - 12 \quad (3)$$

a. Tempo para o qual  $v = 0$ . Fazendo  $v = 0$  em (2)

$$3t^2 - 12t - 15 = 0 \quad t = -1 \text{ s} \quad t = +5 \text{ s} \quad \blacktriangleleft$$

Apenas a raiz  $t = +5$  s corresponde a um instante depois de o movimento se ter iniciado: para  $t < 5$  s,  $v < 0$ , a partícula move-se no sentido negativo; para  $t > 5$  s,  $v > 0$ , a partícula desloca-se no sentido positivo.

b. Posição e distância percorrida quando  $v = 0$ . Substituindo  $t = +5$  s em (1), temos

$$x_5 = (5)^3 - 6(5)^2 - 15(5) + 40 \quad x_5 = -60 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$

A posição inicial quando  $t = 0$  era  $x_0 = +40$  m. Uma vez que  $v \neq 0$  durante o intervalo  $t = 0$  até  $t = 5$  s, temos

$$\begin{aligned} \text{Distância percorrida} &= x_5 - x_0 = -60 \text{ m} - 40 \text{ m} = -100 \text{ m} \\ \text{Distância percorrida} &= 100 \text{ m no sentido negativo} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

c. Aceleração quando  $v = 0$ . Substituímos  $t = +5$  s em (3):

$$a_5 = 6(5) - 12 \quad a_5 = +18 \text{ m/s}^2 \quad \blacktriangleleft$$

d. Distância percorrida desde  $t = 4$  s até  $t = 6$  s. A partícula desloca-se no sentido negativo desde  $t = 4$  s até  $t = 5$  s e no sentido positivo desde  $t = 5$  s até  $t = 6$  s; por esta razão, a distância percorrida em cada um dos intervalos de tempo será calculada separadamente.

Desde  $t = 4$  s até  $t = 5$  s:  $x_5 = -60$  m

$$x_4 = (4)^3 - 6(4)^2 - 15(4) + 40 \quad x_4 = -52 \text{ m}$$

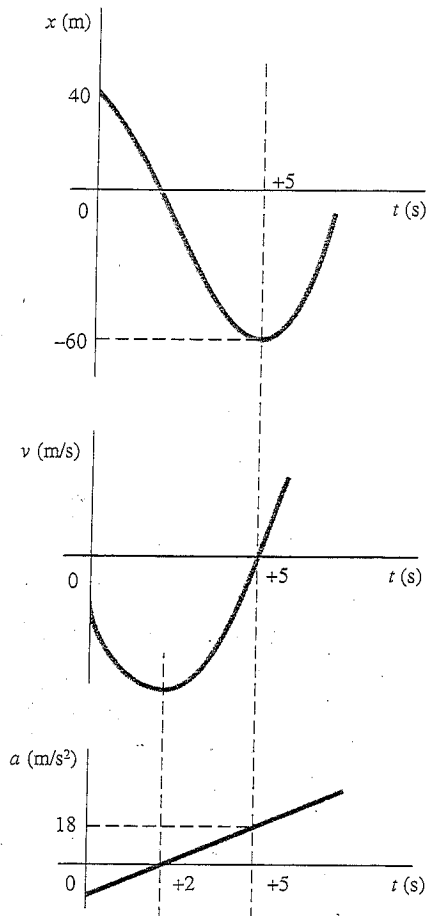
$$\begin{aligned} \text{Distância percorrida} &= x_5 - x_4 = -60 \text{ m} - (-52 \text{ m}) = -8 \text{ m} \\ &= 8 \text{ m no sentido negativo} \end{aligned}$$

Desde  $t = 5$  s até  $t = 6$  s:  $x_5 = -60$  m

$$x_6 = (6)^3 - 6(6)^2 - 15(6) + 40 \quad x_6 = -50 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \text{Distância percorrida} &= x_6 - x_5 = -50 \text{ m} - (-60 \text{ m}) = +10 \text{ m} \\ &= 10 \text{ m no sentido positivo} \end{aligned}$$

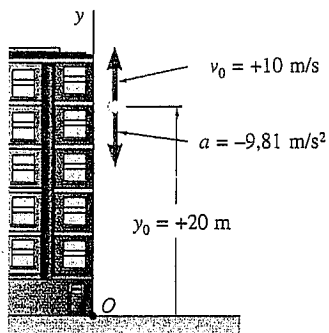
$$\text{Distância total percorrida desde } t = 4 \text{ s até } t = 6 \text{ s} = 8 \text{ m} + 10 \text{ m} = 18 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$



## PROBLEMA-TIPO 11.2

Uma bola é arremessada com uma velocidade de 10 m/s dirigida verticalmente para cima, a partir de uma janela localizada 20 m acima do solo. Sabendo que a aceleração da bola é constante e igual a 9,81 m/s<sup>2</sup> para baixo, determine (a) a velocidade  $v$  e a altura da bola  $y$  em qualquer instante, (b) a altura máxima alcançada pela bola e o correspondente valor de  $t$ , (c) o instante para o qual a bola toca o solo e a correspondente velocidade. Trace os diagramas  $v-t$  e  $y-t$ .

### RESOLUÇÃO



**a. Velocidade e altura.** O eixo  $y$ , que mede a posição da bola, é escolhido com origem  $O$  no solo e sentido positivo para cima. O valor da aceleração e os valores iniciais de  $v$  e  $y$  estão indicados na figura. Se substituirmos o valor de  $a$  em  $a = dv/dt$  e atendendo a que em  $t = 0$  a velocidade é  $v_0 = +10$  m/s, temos

$$\frac{dv}{dt} = a = -9,81 \text{ m/s}^2$$

$$\int_{v_0=10}^v dv = -\int_0^t 9,81 dt$$

$$[v]_{10}^v = -[9,81t]_0^t$$

$$v - 10 = -9,81 t$$

$$v = 10 - 9,81 t \quad (1) \quad \blacktriangleleft$$

Se substituirmos o valor de  $v$  em  $v = dy/dt$  e atendendo a que em  $t = 0$ ,  $y_0 = 20$  m, temos

$$\frac{dy}{dt} = v = 10 - 9,81 t$$

$$\int_{y_0=20}^y dy = \int_0^t (10 - 9,81) dt$$

$$[y]_{20}^y = -[10t - 4,905t^2]_0^t$$

$$y - 20 = 10t - 4,905 t^2$$

$$y = 20 + 10t - 4,905 t^2 \quad (2) \quad \blacktriangleleft$$

**b. Elevação máxima.** Quando a bola atinge a altura máxima, temos  $v = 0$ . Substituindo em (1), temos

$$10 - 9,81 t = 0$$

$$t = 1,019 \text{ s} \quad \blacktriangleleft$$

Considerando  $t = 1,019$  s em (2), obtemos

$$y = 20 + 10(1,019) - 4,905(1,019)^2$$

$$y = 25,1 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$

**c. A bola toca o solo.** Quando a bola atinge o solo, temos  $y = 0$ . Substituindo em (2), obtém-se

$$20 + 10t - 4,905 t^2 = 0$$

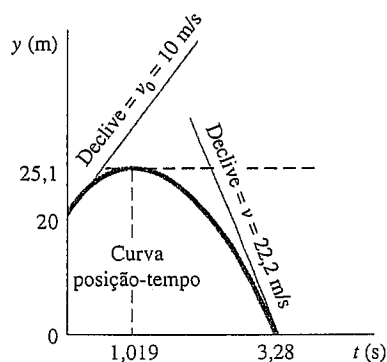
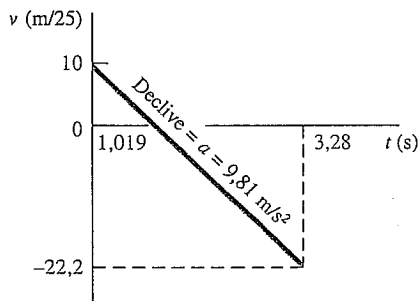
$$t = -1,243 \text{ s}$$

$$t = 3,28 \text{ s} \quad \blacktriangleleft$$

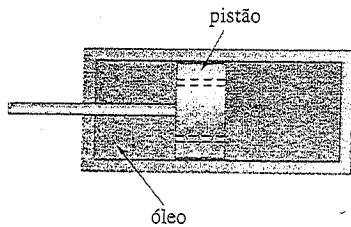
Apenas a raiz  $t = 3,28$  s corresponde a um instante após o início do movimento. Substituindo este valor em (1), temos

$$v = 10 - 9,81(3,28) = -22,2 \text{ m/s}$$

$$v = 22,2 \text{ m/s} \downarrow \quad \blacktriangleleft$$



### PROBLEMA-TIPO 11.3



O amortecedor que se destina à atenuação do movimento de recuo em algumas armas compõe-se essencialmente de um pistão, que se move no interior de um cilindro cheio de óleo, e é solidário com o cano. Quando se dá o recuo do cano com velocidade inicial  $v_0$ , o pistão desloca-se e força a passagem do fluido por orifícios ali existentes, causando uma desaceleração do cano, cujo valor é proporcional à sua velocidade, ou seja,  $a = -kv$ . Nestas condições exprima (a)  $v$  em função de  $t$ , (b)  $x$  em função de  $t$ , (c)  $v$  em função de  $x$ . Trace as correspondentes curvas do movimento.

### RESOLUÇÃO

a.  $v$  em função de  $t$ . Se substituirmos o valor de  $a = -kv$  na fórmula fundamental que define a aceleração,  $a = dv/dt$ , obtemos

$$-kv = \frac{dv}{dt} \quad \frac{dv}{v} = -k dt \quad \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -k \int_0^t dt$$

$$\ln \frac{v}{v_0} = -k t \quad v = v_0 e^{-kt} \quad \blacktriangleleft$$

b.  $x$  em função de  $t$ . Substituindo na expressão  $v = dx/dt$  o valor de  $v$  assim obtido, escrevemos

$$v_0 e^{-kt} = \frac{dx}{dt}$$

$$\int_0^x dx = v_0 \int_0^t e^{-kt} dt$$

$$x = -\frac{v_0}{k} [e^{-kt}]_0^t = -\frac{v_0}{k} (e^{-kt} - 1)$$

$$x = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}) \quad \blacktriangleleft$$

c.  $v$  em função de  $x$ . Substituindo o valor de  $a$  por  $-kv$  na expressão  $a = v dv/dx$ , escrevemos

$$-kv = v \frac{dv}{dx}$$

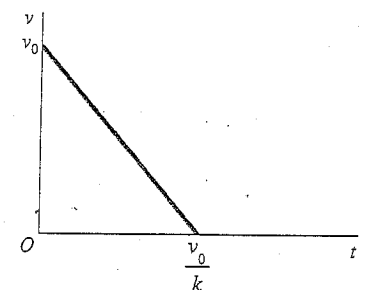
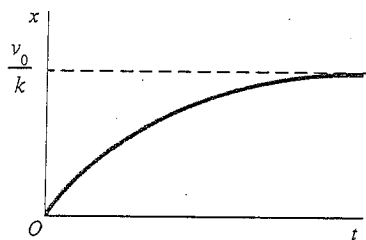
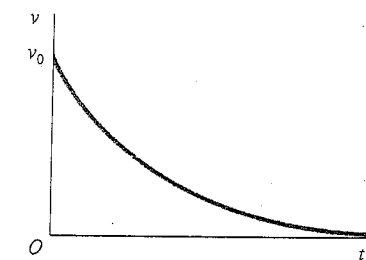
$$dv = -k dx$$

$$\int_{v_0}^v dv = -k \int_0^x dx$$

$$v - v_0 = -kx \quad v = v_0 - kx \quad \blacktriangleleft$$

**Verificação.** A alínea c) poderia resolver-se por eliminação de  $t$  nas respostas obtidas para as alíneas a) e b). Este método alternativo pode utilizar-se para verificação. Da alínea a) sabemos que  $e^{-kt} = v/v_0$ ; substituindo na resposta da alínea b), obtemos

$$x = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}) = \frac{v_0}{k} \left(1 - \frac{v}{v_0}\right) \Rightarrow v = v_0 - kx \quad (\text{Verifica})$$





# METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Os problemas respeitantes a esta lição destinam-se a questionar o leitor sobre o modo de determinar a *posição*, a *velocidade* ou a *aceleração* de uma partícula em *movimento rectilíneo*. Ao ler o enunciado do problema, é importante que consiga identificar as variáveis independentes (tipicamente  $t$  ou  $x$ ) e o que é pedido para se resolver (por exemplo, a necessidade de exprimir  $v$  em função de  $x$ ). Ao iniciar a resolução de um problema, pode revelar-se útil tomar nota quer dos dados do problema quer daquilo que é pedido.

**1. Determinação de  $v(t)$  e  $a(t)$  para um dado  $x(t)$ .** Tal como foi explicado na Sec. 11.2, a primeira e a segunda derivadas de  $x$  em ordem a  $t$  são iguais, respectivamente, à velocidade e à aceleração da partícula [Eqs. (11.1) e (11.2)]. Se a velocidade e a aceleração possuírem sinais opostos, a partícula pode atingir o repouso e, então, mover-se em sentido oposto [Prob.-Tipo 11.1]. Ora, ao calcularmos a distância total percorrida pela partícula, devemos em primeiro lugar verificar se a partícula atinge eventualmente a posição de repouso, durante o intervalo de tempo especificado. A construção do diagrama, semelhante ao do Prob.-Tipo 11.1, ajuda a visualizar o movimento, pois através dele registamos as posições e velocidades em momentos críticos (por exemplo,  $v = v_{\text{máx}}$ ,  $v = 0$ ).

**2. Determinação de  $v(t)$  e  $x(t)$  para uma dada  $a(t)$ .** Na primeira parte da Sec. 11.3 discutimos a solução deste tipo de problemas. Aí fizemos uso de condições iniciais, tais como  $t = 0$  e  $v = v_0$ , para os limites inferiores dos integrais em  $t$  e  $v$ , o que não quer dizer que não se pudessem utilizar outras condições, tais como  $t = t_1$  e  $v = v_1$ . Adicionalmente, se a função  $a(t)$  dada contiver uma constante desconhecida (por exemplo, a constante  $k$  se  $a = kt$ ) devemos, antes de mais, determinar o valor da constante pela substituição de um conjunto de valores de  $t$  e  $a$  na equação que define  $a(t)$ .

**3. Determinação de  $v(x)$  e  $x(t)$  para uma dada  $a(x)$ .** Este é o segundo caso que considerámos na Sec. 11.3. Aqui, verificamos de novo que os limites inferiores de integração podem ser quaisquer (por exemplo  $x = x_1$ ,  $v = v_1$ ). Para além disso, uma vez que  $v = v_{\text{máx}}$  quando  $a = 0$ , podemos facilmente determinar as posições para as quais os valores da velocidade são máximos, desde que se imponha  $a(x) = 0$  e se resolva em ordem a  $x$ .

**4. Determinação de  $v(x)$ ,  $v(t)$  e  $x(t)$  para uma dada  $a(v)$ .** Este constitui o último caso estudado na Sec. 11.3; o Prob.-Tipo 11.3 ilustra perfeitamente as técnicas adequadas para a solução deste tipo de problemas. Uma vez mais se aplicam os comentários feitos para os casos precedentes. Note-se que o Prob.-Tipo 11.3 contém um resumo sobre como e quando se devem utilizar as equações  $v = dx/dt$ ,  $a = dv/dt$  e  $a = vdv/dx$ .

## Problemas†

**11.1** O movimento de uma partícula é definido pela expressão  $x = 4t^4 - 6t^3 + 2t - 1$ , na qual  $x$  e  $t$  são expressos, respectivamente, em metros e em segundos. Determine a posição, a velocidade e a aceleração da partícula quando  $t = 2$  s.

**11.2** O movimento de uma partícula é definido pela expressão  $x = 3t^4 + 4t^3 - 7t^2 - 5t + 8$ , na qual  $x$  e  $t$  são expressos, respectivamente, em milímetros e em segundos. Determine a posição, a velocidade e a aceleração da partícula quando  $t = 3$  s.

**11.3** O movimento de uma partícula é definido pela expressão  $x = 6t^2 - 8 + 40 \cos \pi t$ , na qual  $x$  e  $t$  são expressos, respectivamente, em milímetros e em segundos. Determine a posição, a velocidade e a aceleração da partícula quando  $t = 6$  s.

**11.4** O movimento de uma partícula é definido pela expressão  $x = \frac{5}{3}t^3 - \frac{5}{3}t^2 - 30t + 8$ , na qual  $x$  e  $t$  são expressos, respectivamente, em metros e em segundos. Determine o tempo, a posição, a velocidade e a aceleração da partícula quando  $v = 0$ .

**11.5** O movimento de uma partícula é definido pela expressão  $x = 6t^4 - 2t^3 - 12t^2 + 3t + 3$ , na qual  $x$  e  $t$  são expressos, respectivamente, em metros e em segundos. Determine o tempo, a posição e a velocidade da partícula quando  $a = 0$ .

**11.6** O movimento de uma partícula é definido pela expressão  $x = 3t^3 - 6t^2 - 12t + 5$ , na qual  $x$  e  $t$  são expressos, respectivamente, em metros e em segundos. Determine (a) o instante em que a velocidade é zero, (b) a posição, a aceleração e a distância total percorrida quando  $t = 4$  s.

**11.7** O movimento de uma partícula é definido pela expressão  $x = t^3 - 9t^2 + 24t - 8$ , na qual  $x$  e  $t$  são expressos, respectivamente, em milímetros e em segundos. Determine (a) o instante em que a velocidade é zero, (b) a posição, e a distância total percorrida quando a aceleração é zero.

**11.8** O movimento de uma partícula é definido pela expressão  $x = t^3 - 6t^2 - 36t - 40$ , na qual  $x$  e  $t$  são expressos, respectivamente, em metros e em segundos. Determine (a) o instante em que a velocidade é zero, (b) a velocidade, a aceleração e a distância total percorrida quando  $x = 0$ .

**11.9** A aceleração de uma partícula é definida pela expressão  $a = 6 \text{ m/s}^2$ . Sabendo que  $x = -32 \text{ m}$  quando  $t = 0$ , e  $v = -6 \text{ m/s}$  quando  $t = 2$  s, determine a velocidade, a posição e a distância total percorrida quando  $t = 5$  s.

† Os problemas com numeração em itálico não possuem resposta no fim do livro.

**11.10** A aceleração de uma partícula é directamente proporcional ao tempo  $t$ . Quando  $t = 0$ , a velocidade da partícula é  $v = 16$  m/s. Sabendo que  $v = 15$  m/s e que  $x = 20$  m quando  $t = 1$  s, determine a velocidade, a posição e a distância total percorrida quando  $t = 7$  s.

**11.11** A aceleração de uma partícula é definida pela expressão  $a = A - 6t^2$ , em que  $A$  é constante. No instante  $t = 0$ , a partícula parte da posição  $x = 8$  m com  $v = 0$ . Sabendo que em  $t = 1$  s,  $v = 30$  m/s, determine (a) os instantes para os quais a velocidade é zero, (b) a distância total percorrida quando  $t = 7$  s.

**11.12** A aceleração de uma partícula é directamente proporcional ao quadrado do tempo  $t$ . Quando  $t = 0$ , a partícula encontra-se em  $x = 24$  m. Sabendo que em  $t = 6$  s,  $x = 96$  m e  $v = 18$  m/s, como pode expressar  $x$  e  $v$  em função de  $t$ ?

**11.13** Sabe-se que desde  $t = 2$  s até  $t = 10$  s a aceleração de uma partícula é inversamente proporcional ao cubo do tempo  $t$ . Quando  $t = 2$  s,  $v = -15$  m/s, e quando  $t = 10$  s,  $v = 0,36$  m/s. Sabendo que, em  $t = 2$  s, a partícula está duas vezes mais distante da origem do que em  $t = 10$  s, determine (a) as posições da partícula para  $t = 2$  s e para  $t = 10$  s, (b) a distância total percorrida pela partícula desde  $t = 2$  s até  $t = 10$  s.

**11.14** A aceleração de uma partícula é definida pela relação  $a = -8$  m/s<sup>2</sup>. Sabendo que  $x = 20$  m quando  $t = 4$  s e que  $x = 4$  m quando  $v = 16$  m/s, determine (a) o tempo para o qual a velocidade é zero, (b) a velocidade e a distância total percorrida pela partícula quando  $t = 11$  s.

**11.15** Uma partícula oscila entre os pontos correspondentes a  $x = 40$  mm e  $x = 160$  mm com uma aceleração  $a = k(100 - x)$ , com  $k$  constante. A velocidade da partícula é de 18 mm/s quando  $x = 100$  mm e torna-se nula para as posições  $x = 40$  mm e  $x = 160$  mm. Determine (a) o valor de  $k$ , (b) a velocidade quando  $x = 120$  mm.

**11.16** Uma partícula parte da origem e do repouso, sendo sujeita a uma aceleração  $a = k/(x+4)^2$ , com  $k$  constante. Sabendo que a velocidade da partícula é de 4 m/s quando  $x = 8$  m, determine (a) o valor de  $k$ , (b) a posição da partícula quando  $v = 4,5$  m/s, (c) o valor máximo da velocidade.

**11.17** A aceleração de uma partícula é definida pela relação  $a = 6x - 14$ , na qual  $a$  e  $x$  são expressos em m/s<sup>2</sup> e em m, respectivamente. Sabendo que  $v = 4$  m/s quando  $x = 0$ , determine (a) o valor máximo de  $x$ , (b) a velocidade após a partícula percorrer uma distância de 1 m.

**11.18** Uma partícula parte do repouso na posição  $x = 1$  m e é acelerada, entre as posições  $x = 2$  m e  $x = 8$  m, até a velocidade duplicar. Sabendo que a aceleração da partícula é definida pela expressão  $a = k[x - (A/x)]$ , determine os valores das constantes  $A$  e  $k$  se a partícula adquirir a velocidade de 29 m/s quando  $x = 16$  m.

**11.19** A aceleração de uma partícula é definida pela expressão  $a = k(1 - e^{-x})$ , onde  $k$  é constante. Sabendo que  $v = 6$  m/s quando  $x = -2$  m, e que a partícula atinge o repouso na origem, determine (a) o valor de  $k$ , (b) a velocidade da partícula quando  $x = -1$  m.

11.20 Com base em observações experimentais, definiu-se a aceleração de uma partícula através da relação  $a = -(0,1 + \text{sen } x/b)$ , onde  $a$  e  $x$  são expressos em  $\text{m/s}^2$  e em m, respectivamente. Sabendo que  $b = 0,8$  m e que  $v = 1$  m/s quando  $x = 0$ , determine (a) a velocidade da partícula quando  $x = -1$  m, (b) a posição correspondente à velocidade máxima, (c) o valor máximo da velocidade.

11.21 Partindo da origem e sem velocidade inicial, uma partícula fica sujeita à aceleração  $a = 0,8(v^2 + 49)^{1/2}$  onde  $a$  e  $v$  são expressos em  $\text{m/s}^2$  e em m/s, respectivamente. Determine (a) a posição da partícula quando  $v = 24$  m/s, (b) a velocidade da partícula quando  $x = 40$  m.

11.22 A aceleração de uma partícula é definida através da relação  $a = -k v^{1/2}$ , onde  $k$  é constante. Sabendo que  $x = 0$  e  $v = 81$  m/s em  $t = 0$  e que  $v = 36$  m/s quando  $x = 18$  m, determine (a) a velocidade da partícula quando  $x = 20$  m, (b) o tempo necessário para que a partícula atinja o repouso.

11.23 A aceleração de uma partícula é definida através da relação  $a = -k v^{2,5}$ , onde  $k$  é constante. A partícula parte da origem,  $x = 0$  com velocidade  $v = 16$  mm/s e quando  $x = 6$  mm a velocidade observada é de 4 mm/s. Determine (a) a velocidade da partícula quando  $x = 5$  mm, (b) o tempo necessário para que a partícula atinja a velocidade de 9 mm/s.

11.24 No instante  $t = 0$ , a partícula parte da posição  $x = 0$  com uma velocidade  $v_0$  e uma aceleração definida pela relação  $a = -5/(2 v_0 - v)$ , na qual  $a$  e  $v$  são expressos em  $\text{m/s}^2$  e em m/s, respectivamente. Sabendo que  $v = 0,5 v_0$  quando  $t = 2$  s, determine (a) a velocidade inicial da partícula, (b) o tempo necessário para que a partícula atinja o repouso, (c) a posição da partícula quando  $v = 1$  m/s.

11.25 A aceleração de uma partícula é definida através da relação  $a = 0,4(1 - k v)$ , onde  $k$  é constante. Sabendo que em  $t = 0$  a partícula parte do repouso em  $x = 4$  m, e que quando  $t = 15$  s,  $v = 4$  m/s, determine (a) a constante  $k$ , (b) a posição da partícula quando  $v = 6$  m/s, (c) o valor máximo da velocidade.

11.26 Uma partícula é projectada, desde a posição  $x = 0$ , para a direita com uma velocidade inicial de  $x = 0$ . Se a aceleração da partícula for definida pela expressão  $a = -0,6 v^{1,5}$ , na qual  $a$  e  $v$  são expressos em  $\text{m/s}^2$  e em m, respectivamente, determine (a) a distância que a partícula terá percorrido ao atingir a velocidade de 4 m/s, (b) o tempo necessário para que a partícula atinja  $v = 1$  m/s, (c) o tempo necessário para que a partícula percorra a distância de 6 m.

11.27 Com base em observações, a velocidade de um corredor pode aproximar-se de  $v = 7,5(1 - 0,04 x)^{0,3}$ , na qual  $v$  e  $x$  são expressos em km/h e em km, respectivamente. Sabendo que  $x = 0$  em  $t = 0$ , determine (a) a distância que o corredor terá percorrido ao fim de 1 hora, (b) a aceleração do corredor em  $\text{m/s}^2$  quando  $t = 0$ , (c) o tempo necessário para o corredor percorrer a distância de 6 km.

11.28 Os dados experimentais indicam que, numa região onde se situa uma grelha difusora, a velocidade do ar emitido é definida por  $v = 0,18 v_0/x$ , na qual  $v$  e  $x$  são, respectivamente, expressos em m/s e em m, sendo  $v_0$  a velocidade inicial de descarga do ar. Para  $v_0 = 3,6$  m/s, determine (a) a aceleração do ar em  $x = 2$  m, (b) o tempo necessário para o ar percorrer o espaço entre  $x = 1$  m e  $x = 3$  m.

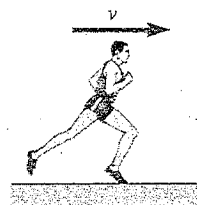
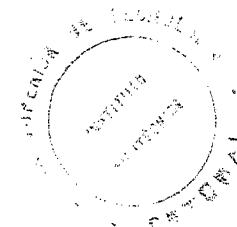


Fig. P11.27

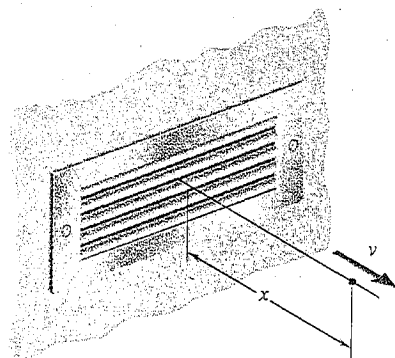


Fig. P11.28

11.29 A aceleração devida à gravidade, a uma altura  $y$  acima da superfície da Terra, pode ser traduzida pela expressão

$$a = \frac{-9,81}{\left[1 + \left(y / 6,37 \times 10^6\right)^2\right]^2}$$

na qual  $a$  e  $y$  são expressos em  $m/s^2$  e em  $m$ , respectivamente. Calcule a altura atingida por um projectil, disparado verticalmente desde a superfície da Terra, se a sua velocidade inicial for (a) 547 m/s, (b) 912 m/s, (c) 11 159 m/s.

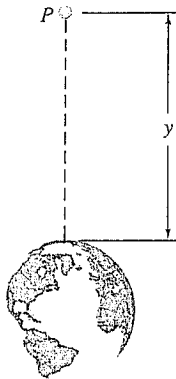


Fig. P11.29

11.30 A aceleração de uma partícula em queda livre, devida à gravidade, é dada por  $a = -gR^2/r^2$ , na qual  $r$  é a distância da partícula ao centro da Terra,  $R$  é o raio da Terra, e  $g$  é a aceleração devida à gravidade ao nível da superfície da Terra. Se  $R = 6371,64$  km, calcule a *velocidade de escape*, isto é, a velocidade mínima com que a partícula deve ser projectada desde a superfície da Terra e verticalmente para cima, se admitirmos que não deve regressar à Terra. (Sugestão:  $v = 0$  para  $r = \infty$ .)

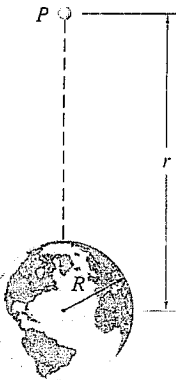


Fig. P11.30

11.31 A velocidade de uma partícula é dada por  $v = v_0[1 - \sin(\pi t/T)]$ . Sabendo que a partícula parte da origem com uma velocidade inicial  $v_0$ , determine (a) a sua posição e a sua aceleração quando  $t = 3T$ , (b) a posição correspondente à velocidade máxima, (c) a velocidade média durante o intervalo  $t = 0$  até  $t = T$ .

11.32 A velocidade de um cursor é definida pela relação  $v = v' \sin(\omega_n t + \phi)$ . Denominando por  $v_0$  e  $x_0$ , respectivamente, a velocidade e a posição do cursor em  $t = 0$  e sabendo que o seu deslocamento máximo é de  $2x_0$ , mostre que (a)  $v' = (v_0^2 + x_0^2 \omega_n^2) / 2 x_0 \omega_n$ , (b) a velocidade máxima da partícula ocorre quando  $x = v_0[3 - (v_0 / x_0 \omega_n)^2] / 2$ .

#### 11.4. MOVIMENTO RECTILÍNEO UNIFORME

O movimento rectilíneo uniforme processa-se em linha recta e encontra-se normalmente em aplicações práticas. Neste movimento, a aceleração  $a$  da partícula é zero, qualquer que seja o valor de  $t$ . A velocidade  $v$  é, por isso, constante, e a Eq. (11.1) transforma-se em

$$\frac{dx}{dt} = v = \text{constante}$$

A coordenada de posição  $x$  pode obter-se por integração desta equação. Denominando o valor inicial de  $x$  por  $x_0$ , escrevemos

$$\int_{x_0}^x dx = v \int_0^t dt$$

$$x - x_0 = v t$$

$$x = x_0 + v t \tag{11.5}$$

Esta equação deve usar-se apenas quando a velocidade da partícula é constante.

O movimento rectilíneo uniformemente acelerado é um outro tipo de movimento comum. Neste movimento a aceleração  $a$  é constante, e a Eq. (11.2) transforma-se em

$$\frac{dv}{dt} = a = \text{constante}$$

A velocidade  $v$  da partícula pode obter-se por integração desta equação,

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^v dv &= a \int_0^t dt \\ v - v_0 &= a t \\ v &= v_0 + a t \end{aligned} \quad (11.6)$$

onde  $v_0$  é a velocidade inicial. Substituindo  $v$  em (11.1), escrevemos

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + a t$$

Representando o valor inicial de  $x$  por  $x_0$ , e integrando, escrevemos

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x dx &= \int_0^t (v_0 + a t) dt \\ x - x_0 &= v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \end{aligned} \quad (11.7)$$

Podemos também recorrer à Eq. (11.4) e escrever

$$\begin{aligned} v \frac{dv}{dx} &= a = \text{constante} \\ v dv &= a dx \end{aligned}$$

Integrando ambos os membros, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^v v dv &= a \int_{x_0}^x dx \\ \frac{1}{2} (v^2 - v_0^2) &= a (x - x_0) \\ v^2 &= v_0^2 + 2a (x - x_0) \end{aligned} \quad (11.8)$$

As três equações anteriormente descritas fornecem as relações úteis entre a coordenada de posição, a velocidade e o tempo no caso do movimento uniformemente acelerado, desde que sejam conhecidos os valores de  $a$ ,  $v_0$  e  $x_0$ . Previamente, devemos fixar a origem  $O$  do eixo dos  $x$ , e o correspondente sentido positivo; este sentido é importante para determinarmos os sinais de  $a$ ,  $v_0$  e  $x_0$ . A Eq. (11.6) relaciona  $v$  e  $t$ , e deve ser utilizada sempre que se pretenda um valor da velocidade  $v$  para um dado instante, ou inversamente. A Eq. (11.7) relaciona  $x$  e  $t$ ; a Eq. (11.8) relaciona  $v$  e  $x$ . Uma aplicação importante do

movimento uniformemente acelerado é o movimento de um *corpo em queda livre*. A aceleração de um corpo em queda livre (geralmente designada por  $g$ ) é igual a  $9,81 \text{ m/s}^2$ .

É importante ter em atenção que as Eqs. (11.6) a (11.8) se podem utilizar *apenas quando a aceleração da partícula é constante*. Se a aceleração da partícula for variável, devemos recorrer às equações fundamentais (11.1) a (11.4) de acordo com os métodos descritos na Sec. 11.3.

## 11.6. MOVIMENTO DE VÁRIAS PARTÍCULAS

Quando várias partículas se movem independentemente umas das outras ao longo da mesma linha, as equações do movimento para cada partícula são independentes. Sempre que possível, deve registar-se o tempo para cada partícula, a partir do mesmo instante inicial, bem como deve fixar-se a mesma origem e a mesma direcção para medir os deslocamentos. Resumindo, deve usar-se um só relógio e uma só fita métrica.

**Movimento relativo de duas partículas.** Consideremos duas partículas  $A$  e  $B$  que se movem ao longo da mesma linha recta (Fig. 11.7). Se medirmos as coordenadas de posição  $x_A$  e  $x_B$  a partir da mesma origem, a diferença  $x_B - x_A$  define a *coordenada de posição de  $B$  relativamente a  $A$* , que designamos por  $x_{B/A}$ . Escrevemos então

$$x_{B/A} = x_B - x_A \quad x_B = x_A + x_{B/A} \quad (11.9)$$

Qualquer que seja a posição de  $A$  e  $B$  em relação à origem, um sinal positivo para  $x_{B/A}$  significa que  $B$  está à direita de  $A$ , e em caso contrário  $B$  está à esquerda de  $A$ .

A taxa de variação de  $x_{B/A}$  é conhecida como *velocidade de  $B$  relativamente a  $A$*  e é representada por  $v_{B/A}$ . Diferenciando (11.9), podemos escrever

$$v_{B/A} = v_B - v_A \quad v_B = v_A + v_{B/A} \quad (11.10)$$

Um sinal positivo para  $v_{B/A}$  significa que *a partir de  $A$  observamos  $B$  a mover-se para a direita*, e pelo contrário mover-se-á para a esquerda quando esse sinal é negativo.

A taxa de variação de  $v_{B/A}$  é conhecida como *aceleração de  $B$  relativamente a  $A$* , e é representada por  $a_{B/A}$ . Diferenciando (11.10), obtemos†

$$a_{B/A} = a_B - a_A \quad a_B = a_A + a_{B/A} \quad (11.11)$$

† Note que o produto dos índices  $A$  e  $B/A$  utilizados no segundo membro das Eqs. (11.9), (11.10) e (11.11) é igual ao índice  $B$  que figura no primeiro membro.

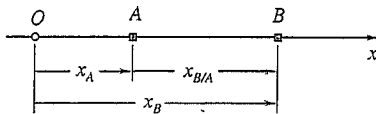


Fig. 11.7

**Movimentos dependentes.** Por vezes, a posição de uma partícula depende da posição de uma ou várias outras partículas. Os movimentos são ditos *dependentes*. Por exemplo, a posição do bloco B na Fig. 11.8 depende da posição do bloco A. Uma vez que o cabo ACDEFG possui comprimento constante, e que as parcelas de cabo CD e EF enroladas em torno das roldanas permanecem constantes, conclui-se que a soma dos comprimentos dos segmentos AC, DE e FG é constante. Observando que o segmento AC tem um comprimento que difere de  $x_A$  por uma constante, e que, de um modo semelhante, os comprimentos de DE e FG diferem de  $x_B$  também por uma constante, podemos escrever

$$x_A + 2x_B = \text{constante}$$

Uma vez que podemos escolher arbitrariamente apenas uma das coordenadas  $x_A$  e  $x_B$ , dizemos que o sistema mostrado na Fig. 11.8 tem *um grau de liberdade*. A partir da relação entre as coordenadas de posição  $x_A$  e  $x_B$ , podemos concluir que se  $x_A$  sofrer um incremento  $\Delta x_A$ , isto é, se o bloco A descer de um valor igual a  $\Delta x_A$ , a coordenada  $x_B$  receberá um incremento  $\Delta x_B = -\frac{1}{2} \Delta x_A$ . Por outras palavras, o bloco B subirá uma distância que é metade da que o bloco A desce; isto pode ser facilmente verificado na Fig. 11.8.

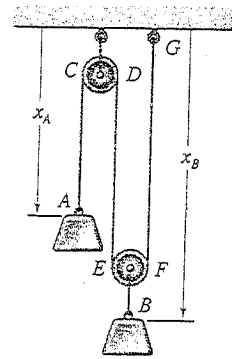


Fig. 11.8

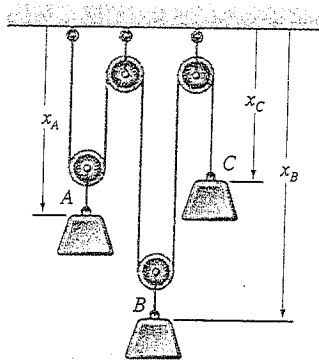


Fig. 11.9

No caso dos três blocos da Fig. 11.9, podemos novamente observar que o comprimento da corda que abraça as polias é constante, e, tal como no caso anterior, podemos escrever

$$2x_A + 2x_B + x_C = \text{constante}$$

Uma vez que podemos escolher arbitrariamente duas das coordenadas, dizemos que o sistema mostrado na Fig. 11.9 tem *dois graus de liberdade*.

Quando a relação existente entre as coordenadas de posição de várias partículas é *linear*, podemos estabelecer uma relação análoga para as suas velocidades e as suas acelerações. Por exemplo, no caso dos blocos da Fig. 11.9, obtemos, por diferenciação dupla,

$$2 \frac{dx_A}{dt} + 2 \frac{dx_B}{dt} + \frac{dx_C}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad 2v_A + 2v_B + v_C = 0$$

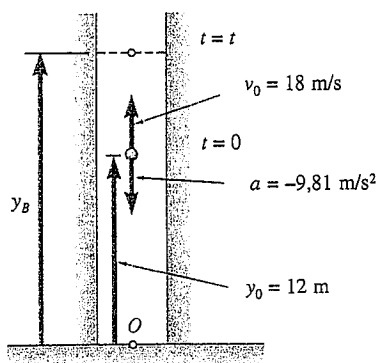
$$2 \frac{dv_A}{dt} + 2 \frac{dv_B}{dt} + \frac{dv_C}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad 2a_A + 2a_B + a_C = 0$$



## PROBLEMA-TIPO 11.4

Uma bola é arremessada verticalmente para cima, com uma velocidade inicial de 18 m/s, a partir do nível de 12 m do poço de um elevador. No mesmo instante, uma plataforma elevatória passa pelo nível dos 5m, com uma velocidade constante de 2m/s. Determine (a) quando e onde a bola atingirá o elevador, (b) a velocidade da bola relativamente ao elevador, quando a bola o atinge.

### RESOLUÇÃO



**Movimento da bola.** Uma vez que a bola possui aceleração constante, o seu movimento é *uniformemente acelerado*. Colocando a origem  $O$  do eixo dos  $y$  ao nível  $0$ , e seleccionando o sentido positivo para cima, concluímos que  $y_0 = +12$  m, que a velocidade inicial é  $v_0 = +18$  m/s, e que a aceleração é  $a = -9,81$  m/s<sup>2</sup>. Por substituição destes valores nas equações do movimento uniformemente acelerado, podemos escrever

$$v_B = v_0 + at \quad v_B = 18 - 9,81t \quad (1)$$

$$y_B = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad y_B = 12 + 18t - 4,905t^2 \quad (2)$$

**Movimento do elevador.** Uma vez que o elevador possui velocidade constante, o seu movimento é *uniforme*. Se considerarmos de novo a origem e o sentido seleccionados anteriormente, verificamos que  $y = +5$  m e escrevemos

$$v_E = +2 \text{ m/s} \quad (3)$$

$$y_E = y_0 + v_E t \quad y_E = 5 + 2t \quad (4)$$

**A bola atinge o elevador.** É importante notarmos que foram escolhidos o mesmo tempo  $t$  e a mesma origem  $O$ , quando da formulação das equações do movimento da bola e do elevador. Podemos verificar através da figura que a bola atinge o elevador quando

$$y_B = y_E \quad (5)$$

Substituindo em (5) os valores de  $y_B$  e  $y_E$  dados pelas equações (2) e (4), temos

$$5 + 2t = 12 + 18t - 4,905t^2$$

$$t = -0,39 \text{ s} \quad \text{e} \quad t = 3,65 \text{ s} \quad \blacktriangleleft$$

Apenas a raiz  $t = 3,65$  s corresponde a um instante após o início do movimento. Substituindo este valor em (4), temos

$$y_E = 5 + 2(3,65) = 12,3 \text{ m}$$

Altura acima do solo = 12,3 m  $\blacktriangleleft$

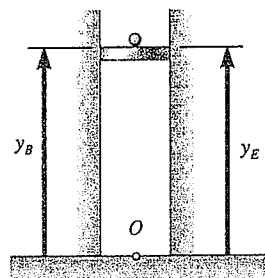
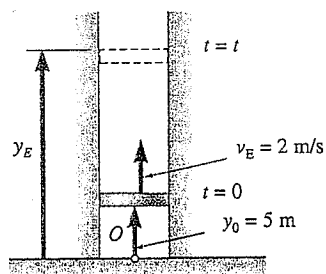
A velocidade da bola relativamente ao elevador no instante  $t = 3,65$  s é

$$v_{B/E} = v_B - v_E = (18 - 9,81t) - 2 = 16 - 9,81t$$

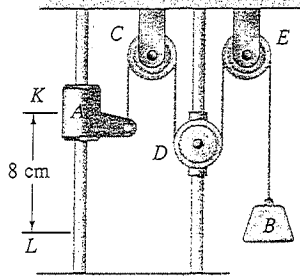
Quando a bola atinge o elevador, no instante  $t = 3,65$ s, temos

$$v_{B/E} = 16 - 9,81(3,65) \quad v_{B/E} = -19,81 \text{ m/s} \quad \blacktriangleleft$$

O sinal negativo significa que, quando observada do elevador, a bola se move para baixo.



## PROBLEMA-TIPO 11.5



O cursor  $A$  e o bloco  $B$  estão ligados através de um cabo que passa por três polias  $C$ ,  $D$  e  $E$ , como é mostrado na figura. As polias  $C$  e  $E$  têm eixos de rotação fixos, enquanto o eixo da polia  $D$  está ligado a um cursor que é puxado para baixo com uma velocidade constante de  $3 \text{ cm/s}$ . Em  $t = 0$  e para a posição  $K$ , o cursor  $A$  inicia o movimento para baixo com uma aceleração constante e sem velocidade inicial. Sabendo que a velocidade do cursor  $A$  é de  $12 \text{ cm/s}$  no instante em que passa pelo ponto  $L$ , determine a variação em altura, a velocidade e a aceleração do bloco  $B$  quando o cursor  $A$  passa por  $L$ .

### RESOLUÇÃO

**Movimento do cursor  $A$ .** Consideremos que a origem  $O$  se situa na superfície horizontal superior e que o sentido positivo do eixo é para baixo. Verificamos que, quando  $t = 0$ , o cursor  $A$  se encontra na posição  $K$  e que  $(v_A)_0 = 0$ . Dado que, quando o cursor passa por  $L$ , se verifica  $v_A = 12 \text{ cm/s}$  e  $v_A - (v_A)_0 = 8 \text{ cm/s}$ , podemos escrever

$$v_A^2 = (v_A)_0^2 + 2a_A[x_A - (x_A)_0] \quad (12)^2 = 0 + 2a_A(8)$$

$$a_A = 9 \text{ cm/s}^2$$

O tempo necessário para o cursor atingir o ponto  $L$  é obtido através de

$$v_A = (v_A)_0 + a_A t \quad 12 = 0 + 9t \quad t = 1,333 \text{ s}$$

**Movimento da polia  $D$ .** Recordando que o sentido positivo é para baixo, escrevemos

$$a_D = 0 \quad v_D = 3 \text{ cm/s} \quad x_D = (x_D)_0 + v_D t = (x_D)_0 + 3t$$

Quando o cursor atinge  $L$ , em  $t = 1,333 \text{ s}$ , temos

$$x_D = (x_D)_0 + 3(1,333) = (x_D)_0 + 3(1,333) = (x_D)_0 + 4$$

Então,

$$x_D - (x_D)_0 = 4 \text{ cm}$$

**Movimento do bloco  $B$ .** Podemos verificar que o comprimento total do cabo  $ACDEB$  difere da quantidade  $(x_A + 2x_D + x_B)$  apenas por uma constante. Uma vez que o comprimento do cabo se considera constante durante o movimento, esta quantidade também se mantém constante. Tomemos então os instantes  $t = 0$  e  $t = 1,333 \text{ s}$ , para os quais podemos escrever

$$x_A + 2x_D + x_B = (x_A)_0 + 2(x_D)_0 + (x_B)_0 \quad (1)$$

$$[x_A - (x_A)_0] + 2[x_D - (x_D)_0] + [x_B - (x_B)_0] = 0 \quad (2)$$

Sabemos que  $x_A - (x_A)_0 = 8 \text{ cm}$  e  $x_D - (x_D)_0 = 4 \text{ cm}$ ; substituindo estes valores em (2), obtemos

$$8 + 2(4) + [x_B - (x_B)_0] = 0 \quad x_B - (x_B)_0 = -16 \text{ cm}$$

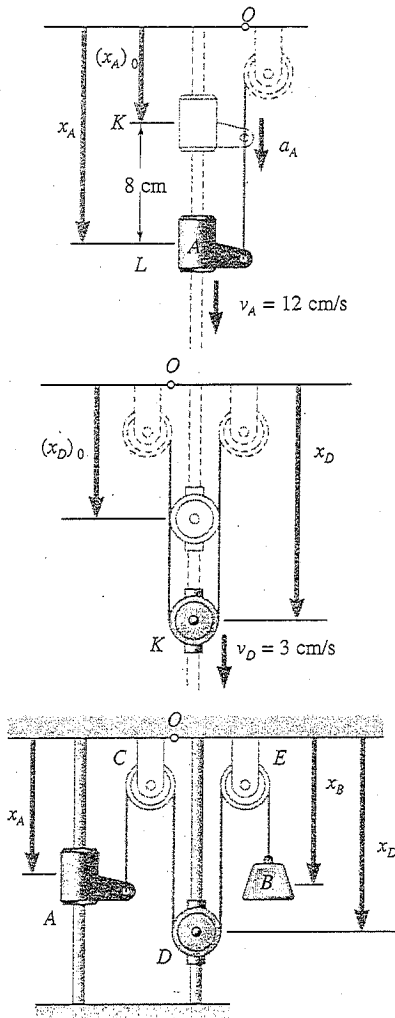
Então:

$$\text{a variação em altura de } B = 16 \text{ cm} \uparrow \leftarrow$$

Diferenciando (1) duas vezes, obtemos as equações que relacionam as velocidades e as acelerações de  $A$ ,  $B$  e  $D$ . Substituindo as velocidades e as acelerações de  $A$  e  $D$  no instante  $t = 1,333 \text{ s}$ , temos

$$v_A + 2v_D + v_B = 0 \quad 12 + 2(3) + v_B = 0 \quad v_B = -18 \text{ cm/s} \quad v_B = 18 \text{ cm/s} \uparrow \leftarrow$$

$$a_A + 2a_D + a_B = 0 \quad 9 + 2(0) + a_B = 0 \quad a_B = -9 \text{ cm/s}^2 \quad a_B = 9 \text{ cm/s}^2 \uparrow \leftarrow$$



Nesta lição deduzimos as equações que descrevem o *movimento rectilíneo uniforme* (velocidade constante) e o *movimento rectilíneo uniformemente acelerado* (aceleração constante). Introduzimos também o conceito de *movimento relativo*. As equações que dizem respeito ao movimento relativo [Eqs. (11.9) a (11.11)] podem aplicar-se a movimentos quer independentes quer dependentes de quaisquer duas partículas, ao longo de uma linha recta.

**A. Movimento independente de uma ou mais partículas.** A resolução dos problemas deste tipo deve organizar-se do seguinte modo:

**1. Inicie a resolução** anotando a informação fornecida, fazendo um esboço do sistema e escolhendo a origem e o sentido positivo do eixo das coordenadas [Prob.-Tipo 11.4]. Torna-se extremamente útil fazer uma visualização de problemas deste tipo.

**2. Escreva as equações** que descrevem os movimentos das várias partículas, bem como aquelas que estabelecem a relação entre os referidos movimentos [Eq. (5) do Prob.-Tipo 11.4].

**3. Estabeleça as condições iniciais, i. e.,** especifique as condições do sistema que correspondem ao instante  $t = 0$ . Este procedimento torna-se particularmente útil quando os movimentos das partículas se iniciam em instantes diferentes. Em tais situações, podemos utilizar uma das duas metodologias.

**a.** Seja  $t = 0$  o instante em que a última partícula inicia o movimento. Deve então determinar-se a posição inicial,  $x_0$ , e a velocidade inicial,  $v_0$ , de cada uma das restantes partículas.

**b.** Seja  $t = 0$  o instante em que a primeira partícula inicia o movimento. Deve então, em cada uma das equações que descrevem os movimentos das restantes partículas, substituir-se  $t$  por  $t - t_0$ , em que  $t_0$  corresponde ao instante em que cada partícula inicia o seu movimento. É importante reconhecer que as equações assim obtidas são válidas apenas para  $t \geq t_0$ .

**B. Movimento dependente de duas ou mais partículas.** Em problemas deste tipo, as partículas do sistema encontram-se ligadas entre si, normalmente através de cordas ou cabos. A metodologia para a resolução destes problemas é semelhante à apresentada no ponto anterior, à excepção de que agora é necessário descrever as ligações físicas entre as partículas. Nos problemas que se seguem, as ligações processam-se por um ou mais cabos. Para cada cabo, é necessário escrever equações semelhantes às últimas três equações da Sec. 11.6. Sugerimos que se utilize o seguinte procedimento:

1. **Faça-se um esboço do sistema** e selecione-se o conjunto de coordenadas, com uma indicação clara do sentido positivo para cada um dos eixos. Por exemplo, no Prob.-Tipo 11.5, os comprimentos são medidos para baixo a partir do suporte horizontal superior. Consequentemente, os deslocamentos, as velocidades e as acelerações positivas são dirigidos para baixo.

2. **Escreva-se a equação que traduz a restrição** imposta por cada cabo no movimento das partículas envolvidas. Diferenciando esta equação duas vezes, obtém-se a correspondente relação entre velocidades e acelerações.

3. **Se o movimento envolve várias direcções**, deve seleccionar-se, para cada uma das direcções, um eixo de coordenadas e o respectivo sentido positivo. A localização da origem de cada eixo deve ser levada a cabo de modo tal, que torne simples a formulação das equações de constrangimento. Por exemplo, no Prob.-Tipo 11.5, é mais fácil definir as várias coordenadas pela sua medição, desde o suporte superior para baixo, do que desde o suporte inferior para cima.

**Finalmente, tenhamos em atenção** que a metodologia descrita nesta lição e as correspondentes equações podem utilizar-se apenas com partículas cujo movimento é *uniforme* ou *uniformemente acelerado*.

# Problemas

11.33 Uma automobilista entra numa via a uma velocidade de 36 km/h e acelera uniformemente, ao longo de uma distância de 0,2 km, até atingir a velocidade de 90 km/h. Determine (a) a aceleração do automóvel, (b) o tempo necessário para atingir a velocidade de 90 km/h.

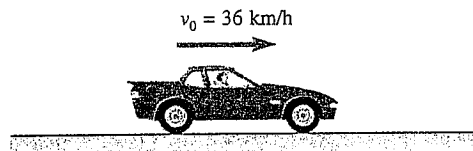


Fig. P11.33

11.34 Um camião percorre 164 m em 8 s enquanto desacelera a uma razão constante de  $0,5 \text{ m/s}^2$ . Determine (a) a sua velocidade inicial, (b) a sua velocidade final, (c) a distância percorrida durante os primeiros 0,6 s.

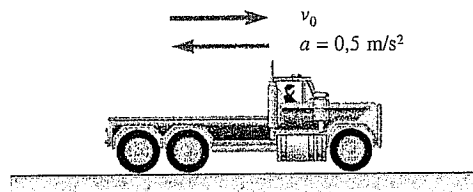


Fig. P11.34

11.35 Um grupo de estudantes lança um modelo de um foguetão na direcção vertical. Com base em registos, os estudantes determinaram que a altitude alcançada pelo foguetão foi de 27,3 m no fim da fase de voo propulsionada, tendo aterrado 16 s mais tarde. Sabe-se que o pára-quedas falhou a sua missão, provocando a queda livre do foguete após ter alcançado a altitude máxima. Admitindo que  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ , determine (a) a velocidade  $v_1$  do foguetão no fim da fase de voo propulsionado, (b) a altitude máxima alcançada pelo foguetão.

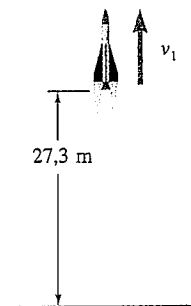


Fig. P11.35

11.36 Considerando uma aceleração uniforme de  $3,35 \text{ m/s}^2$  e sabendo que a velocidade do carro é de 48,27 km/h quando passa por A, determine (a) o tempo necessário para o carro atingir a posição B, (b) a velocidade do carro quando passa por B.

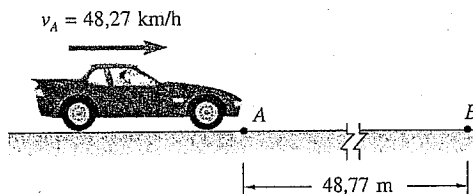


Fig. P11.36

11.37 Numa corrida de 100 m, um corredor acelera uniformemente durante os primeiros 35 m e depois mantém constante a sua velocidade. Se o tempo registado para os primeiros 35 m é de 5,4 s, determine (a) a sua aceleração, (b) a sua velocidade final, (c) o seu tempo de corrida.

11.38 Uma pequena embalagem parte do repouso em A e desloca-se sobre os rolos do transportador ABCD. A embalagem tem uma aceleração uniforme de  $4,8 \text{ m/s}^2$  enquanto percorre os trajectos AB e CD, a sua velocidade é constante entre B e C. Se a velocidade da embalagem for de  $7,2 \text{ m/s}$  à passagem em D, determine (a) a distância  $d$  entre C e D, (b) o tempo necessário para a embalagem atingir a posição D.

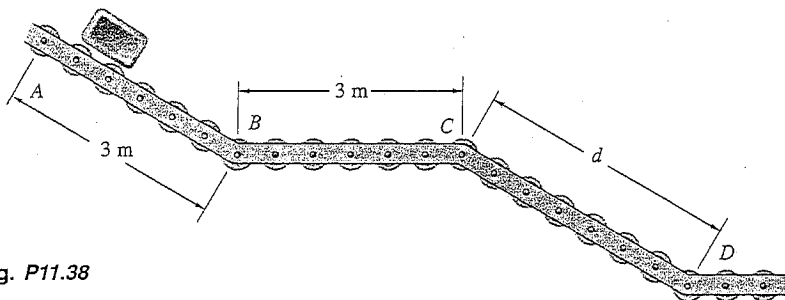


Fig. P11.38

11.39 Um agente da polícia estacionou o seu carro de patrulha numa zona em que a velocidade de tráfego aconselhada é de  $70 \text{ km/h}$ . Enquanto isto, observa um automóvel que passa pelo local viajando a uma velocidade reduzida e constante. Pensando que o condutor do automóvel pudesse estar sob o efeito de alguma intoxicação, o agente inicia a marcha com o seu carro e acelera uniformemente até atingir os  $90 \text{ km/h}$  em 8 s; mantendo esta velocidade constante, demora 42 s até ultrapassar o outro condutor, após este ter passado a referida zona. Sabendo que decorreram 18 s antes de o agente iniciar a perseguição ao motorista, determine (a) a distância que o agente percorreu antes de ultrapassar o motorista, (b) a velocidade do motorista.

11.40 Como estafeta de uma corrida, o corredor A entra com uma velocidade de  $12,9 \text{ m/s}$  numa zona de 20 m de comprimento para passagem do testemunho. Após 1,82 s e enquanto os dois deixam a zona à mesma velocidade, entrega o testemunho ao corredor B. Determine (a) a aceleração uniforme de cada um dos corredores, (b) o instante em que o corredor B deve começar a correr.

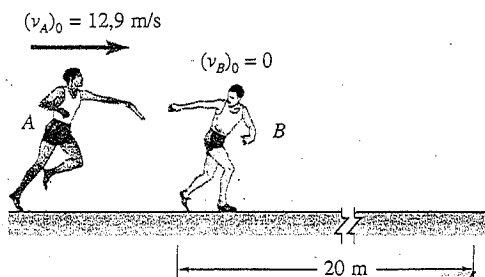


Fig. P11.40

11.41 Numa corrida, o barco A lidera a prova com um avanço de 36,58 m, viajando ambos os barcos com a mesma velocidade constante de 168,9 km/h. Sabe-se que, quando  $t = 0$ , os barcos impuseram acelerações com valores constantes, e que quando B passa por A,  $t = 8$  s e  $v_A = 217,2$  km/h determine (a) a aceleração de A, (b) a aceleração de B.

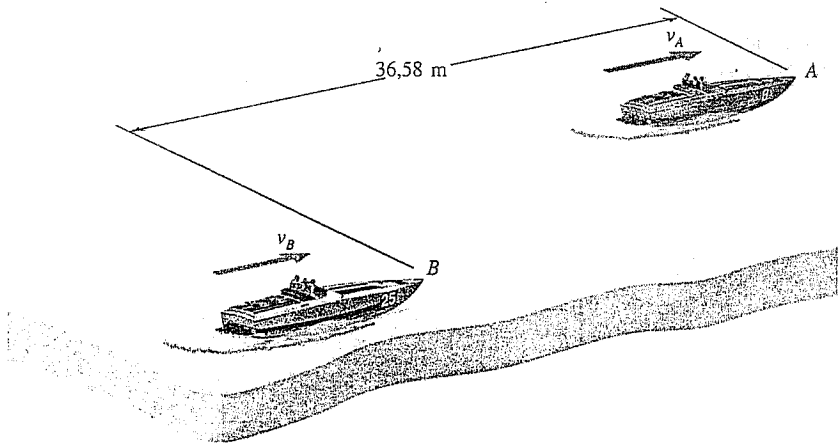


Fig. P11.41

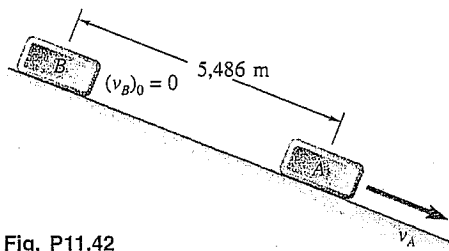


Fig. P11.42

11.42 Duas caixas são colocadas num plano inclinado, a intervalos de tempo  $t_R$ , e escorregam sobre o plano com uma aceleração constante. Sabendo que, quando se solta a caixa B, a caixa A precedente deslizou já 5,486 m, e que 1 s mais tarde elas se encontram a 9,144 m uma da outra, determine (a) o valor de  $t_R$ , (b) a aceleração de cada caixa.

11.43 Dois automóveis, A e B, viajando na mesma direcção e em faixas adjacentes, param num sinal vermelho. Assim que o sinal se torna verde, o automóvel A acelera à razão de  $2 \text{ m/s}^2$ . Dois segundos mais tarde, o automóvel B inicia a sua marcha com uma aceleração de  $3,6 \text{ m/s}^2$ . Determine (a) quando e onde B ultrapassa A, (b) a velocidade de cada automóvel nesse instante.

11.44 Dois automóveis aproximam-se um do outro, quando se encontram em faixas de rodagem adjacentes. Em  $t = 0$ , A e B estão distanciados de 1 km, as suas velocidades são  $v_A = 108 \text{ km/h}$  e  $v_B = 63 \text{ km/h}$ , e situam-se, respectivamente, nos pontos P e Q. Sabendo que A passa pelo ponto Q, 40 s depois de B aí ter passado, e que B passa pelo ponto P 42 s depois de A ali ter passado, determine (a) as acelerações uniformes de A e B, (b) o instante em que os veículos passam um pelo outro, (c) a velocidade de B nesse instante.

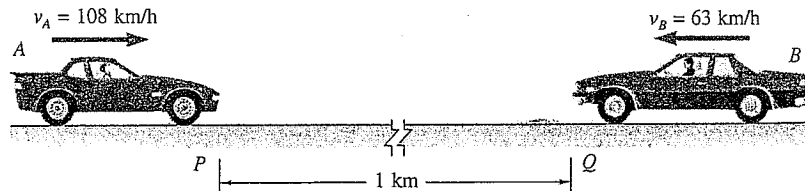


Fig. P11.44

11.45 O carro A está estacionado na faixa norte de uma auto-estrada, e o carro B viaja pela faixa sul à velocidade constante de 96,54 km/h. Quando  $t = 0$ , A inicia o movimento e acelera a uma razão  $a_A$ , enquanto em  $t = 5$  s, B inicia a desaceleração com um valor de  $a_B/6$ . Sabendo que quando os carros se cruzam  $x = 89,6$  m e  $v_A = v_B$ , determine (a) a aceleração  $a_A$ , (b) o momento em que os veículos se cruzam, (c) a distância  $d$  entre os veículos quando  $t = 0$ .

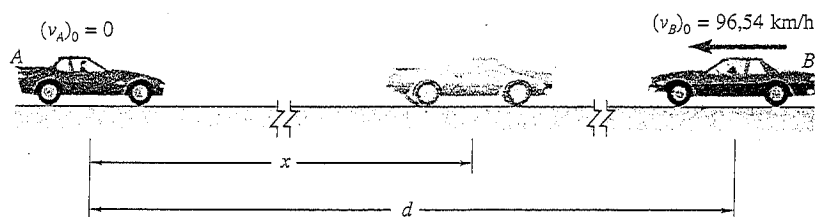


Fig. P11.45

11.46 Dois blocos A e B são colocados num plano inclinado como se mostra na figura. Quando  $t = 0$ , o corpo A é lançado para cima sobre o plano com uma velocidade inicial de 8,23 m/s ao mesmo tempo que B é libertado do repouso. Os blocos passam um pelo outro ao fim de 1 s, e B atinge a base do plano inclinado no instante  $t = 3,4$  s. Sabendo que a distância máxima alcançada pelo bloco A é de 6,4 m, medida a partir da referida base, e que as acelerações de A e B (devidas à gravidade e ao atrito) são constantes e dirigidas para baixo no plano inclinado, determine (a) as acelerações de A e B, (b) a distância  $d$ , (c) a velocidade de A quando os blocos se cruzam.

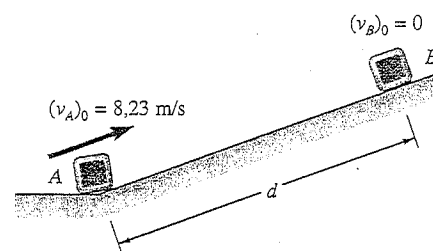


Fig. P11.46

11.47 O bloco deslizante A desloca-se para a esquerda com uma velocidade constante de 6 m/s. Determine (a) a velocidade do bloco B, (b) a velocidade do segmento do cabo D, (c) a velocidade do segmento do cabo C relativa ao segmento D.

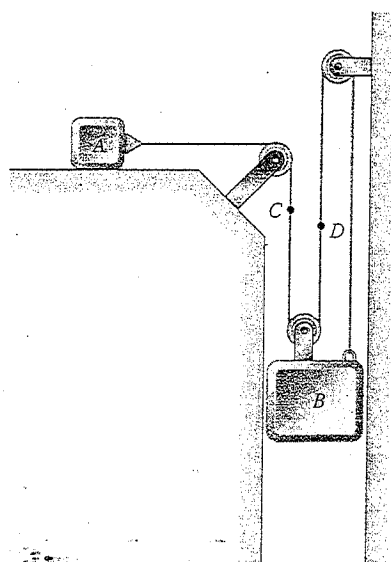


Fig. P11.47 e P11.48

11.48 O bloco B parte do repouso e move-se para baixo com aceleração constante. Sabendo que o bloco A atinge a velocidade de 4 m/s após ter percorrido a distância de 400 mm, determine (a) as acelerações de A e B, (b) a velocidade e a variação da posição de B ao fim de 2 s.



11.49 O bloco *B* move-se para baixo com uma velocidade constante de 24 mm/s. Determine (a) a velocidade do bloco *A*, (b) a velocidade do bloco *C*, (c) a velocidade do segmento de cabo *D*, (d) a velocidade do segmento do cabo *D* relativamente ao bloco *B*.

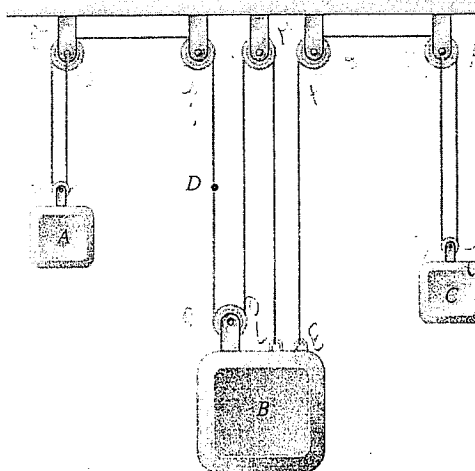


Fig. P11.49 e P11.50

11.50 O bloco *C* parte do repouso e move-se para baixo com uma aceleração constante. Sabendo que ao fim de 12 s a velocidade do bloco *A* é de 18 mm/s, determine (a) as acelerações dos blocos *A*, *B* e *C*, (b) a velocidade e a variação de posição do bloco *B* ao fim de 8 segundos.

11.51 O cursor *A* parte do repouso e move-se para cima com uma aceleração constante. Sabendo que decorridos 8 s a velocidade do cursor *B* relativa ao cursor *A* é de 24 mm/s, determine (a) as acelerações de *A* e *B*, (b) a velocidade e a variação de posição de *B* ao fim de 6 s.

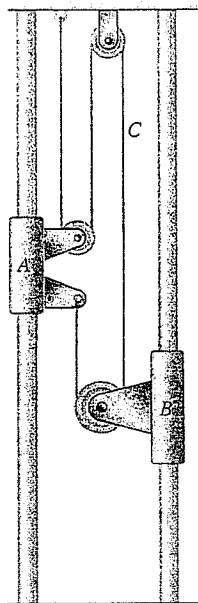


Fig. P11.51 e P11.52

11.52 Na posição mostrada na figura, o cursor *B* move-se para baixo com uma velocidade de 12 mm/s. Determine (a) a velocidade do cursor *A*, (b) a velocidade do segmento de cabo *C*, (c) a velocidade do segmento de cabo *C* relativamente ao cursor *B*.

11.53 O bloco deslizando *B* move-se para a direita com uma velocidade constante de 300 mm/s. Determine (a) a velocidade do bloco deslizando *A*, (b) a velocidade do segmento de cabo *C*, (c) a velocidade do segmento de cabo *D*, (d) a velocidade do segmento de cabo *C* relativamente ao bloco deslizando *B*.

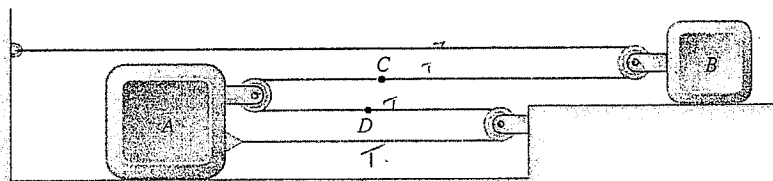


Fig. P11.53 e P11.54

11.54 Na posição mostrada, o bloco deslizando *B* move-se com aceleração constante, e a sua velocidade é de 150 mm/s. Sabendo que, após o bloco deslizando *A* se ter deslocado 240 mm para a direita, a sua velocidade é de 60 mm/s, determine (a) as acelerações de *A* e *B*, (b) a aceleração do segmento de cabo *D*, (c) a velocidade e a variação de posição do bloco deslizando *B* ao fim de 4 s.

11.55 O bloco *B* desloca-se para baixo com uma velocidade constante de 20 mm/s. Quando  $t = 0$ , o bloco *A* move-se para cima com aceleração constante e velocidade igual a 30 mm/s. Sabendo que quando  $t = 3$  s o bloco *C* se deslocou 57 mm para a direita, determine (a) a velocidade do bloco deslizando *C* quando  $t = 0$ , (b) as acelerações de *A* e *C*, (c) a variação na posição do bloco *A* ao fim de 5 s.

11.56 O bloco *B* parte do repouso, o bloco *A* desloca-se com aceleração constante, e o bloco deslizando *C* move-se para a direita, com aceleração constante de  $75 \text{ mm/s}^2$ . Sabendo que quando  $t = 2$  s as velocidades dos blocos *B* e *C* são 480 mm/s para baixo e 280 mm/s para a direita, respectivamente, determine (a) as acelerações de *A* e *B*, (b) as velocidades iniciais de *A* e *C*, (c) a variação na posição do bloco *C* ao fim de 3 segundos.

11.57 O cursor *A* parte do repouso quando  $t = 0$  e move-se para baixo com aceleração constante de  $7 \text{ mm/s}^2$ . O cursor *B* desloca-se para cima com aceleração constante, sendo a sua velocidade inicial de 8 mm/s. Sabendo que o cursor *B* percorre a distância de 20 mm desde  $t = 0$  até  $t = 2$  s, determine (a) as acelerações do cursor *B* e do bloco *C*, (b) o instante para o qual a velocidade do bloco *C* é zero, (c) a distância que o bloco *C* terá percorrido durante esse tempo.

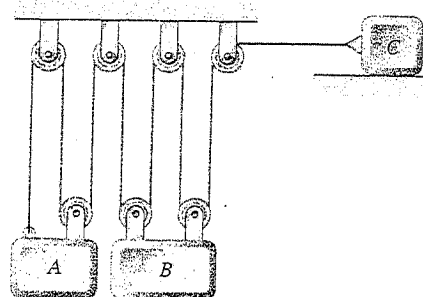


Fig. P11.55 e P11.56

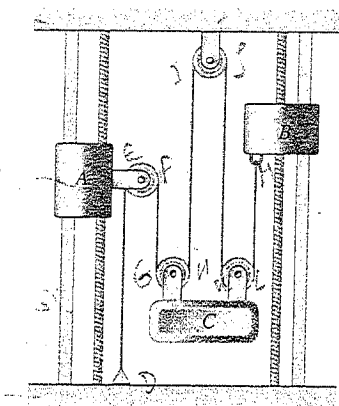


Fig. P11.57 e P11.58

11.58 Os cursores *A* e *B* partem do repouso, e o cursor *A* move-se para cima com uma aceleração constante de  $3 \text{ mm/s}^2$ . Sabendo que o cursor *B* se move para baixo com aceleração constante e que, após ter percorrido uma distância de 32 mm, a sua velocidade é de 8 mm/s, determine (a) a aceleração do bloco *C*, (b) a distância que o bloco *C* terá percorrido após 3 segundos.

11.59 O sistema representado na figura parte do repouso, e cada um dos componentes move-se com aceleração constante. Se a aceleração do bloco *C* relativa ao cursor *B* é de  $60 \text{ mm/s}^2$  para cima, e a aceleração do bloco *D* relativamente ao bloco *A* é de  $110 \text{ mm/s}^2$  para baixo, determine (a) a velocidade do bloco *C* após 3 s, (b) a variação na posição do bloco *D* ao fim de 5 segundos.

\*11.60 O sistema representado na figura parte do repouso, sendo o comprimento da corda superior ajustado de modo tal que *A*, *B* e *C* estão inicialmente ao mesmo nível. Cada um dos componentes move-se com aceleração constante, e após 2s a variação da posição do bloco *C* relativa ao bloco *A* é de 280 mm para cima. Sabendo que, quando a velocidade do cursor *B* relativamente ao bloco *A* é de 80 mm/s para baixo, os deslocamentos de *A* e *B* são, respectivamente, de 160 mm e 320 mm para baixo, determine (a) as acelerações de *A* e *B* se  $a_B > 10 \text{ mm/s}^2$ , (b) a variação na posição do bloco *D* quando a velocidade do bloco *C* é de 600 mm/s para cima.

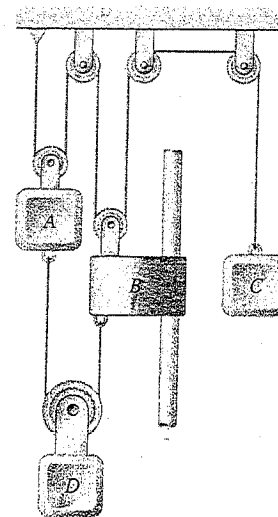


Fig. P11.59 e P11.60

### \*11.7. SOLUÇÃO GRÁFICA DE PROBLEMAS DE MOVIMENTO RECTILÍNEO

Na Sec. 11.2 observámos que as fórmulas fundamentais

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \text{e} \quad a = \frac{dv}{dt}$$

possuem significado físico. A primeira fórmula expressa que a velocidade, em qualquer instante, é igual ao declive da curva  $x-t$  nesse instante (Fig. 11.10). A segunda fórmula expressa que a aceleração é igual ao declive da curva  $v-t$

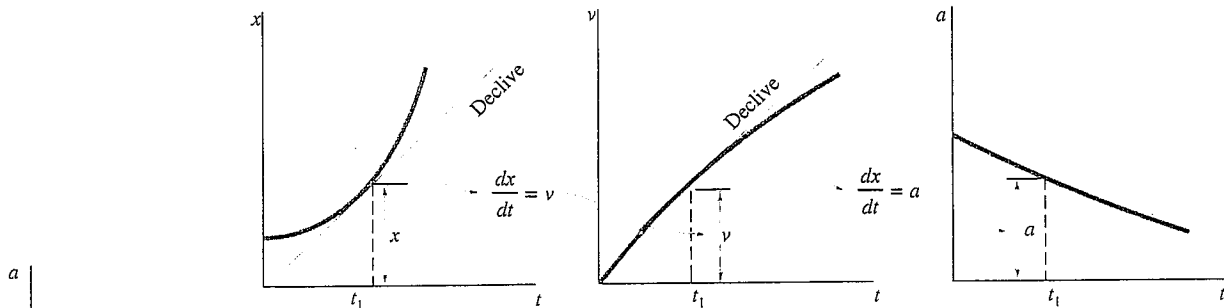


Fig. 11.10

(Fig. 11.10). Estas duas propriedades podem ser utilizadas para determinar graficamente as curvas  $v-t$  e  $a-t$  a partir do conhecimento da curva do movimento  $x-t$ .

Integrando as duas fórmulas fundamentais entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$ , podemos escrever

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v \, dt \quad \text{e} \quad v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a \, dt \quad (11.12)$$

A primeira fórmula expressa que a área medida sob a curva  $v-t$  entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$  é igual à variação de  $x$  durante esse intervalo de tempo (Fig. 11.11). Analogamente, a segunda fórmula expressa que a área medida sob a curva  $a-t$  entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$  é igual à variação de  $v$  durante esse intervalo de tempo (Fig. 11.11). Estas duas propriedades podem ser aproveitadas para determinar graficamente a curva do movimento  $x-t$  desde que sejam conhecidas as curvas  $v-t$  e  $a-t$  (veja Prob.-Tipo 11.6).

As soluções gráficas tornam-se particularmente úteis quando o movimento é definido a partir de resultados experimentais, e quando  $x$ ,  $v$  e  $a$  não são funções analíticas de  $t$ . Podem ainda oferecer vantagem quando o movimento é constituído por partes distintas e requerendo cada parte uma equação diferente para a sua análise. Sempre que se utilize uma solução gráfica, deve ter-se em atenção que: (1) a área sob a curva  $v-t$  mede uma *variação de  $x$* , e não  $x$ , e, analogamente, a área sob a curva  $a-t$  traduz uma variação de  $v$ ; (2) uma área acima do eixo  $t$  corresponde a um *acrécimo* em  $x$  ou em  $v$ , enquanto uma área localizada sob o eixo  $t$  traduz um *decrécimo* em  $x$  ou em  $v$ .

Quando do traçado das curvas do movimento, importa relembrar que, no caso de a velocidade ser constante, ela é representada por uma linha recta horizontal; a coordenada de posição é uma função linear de  $t$  e representa-se por uma linha recta oblíqua. Para o caso de a aceleração ser constante e diferente de zero, a sua representação gráfica é uma linha recta horizontal,  $v$  será então

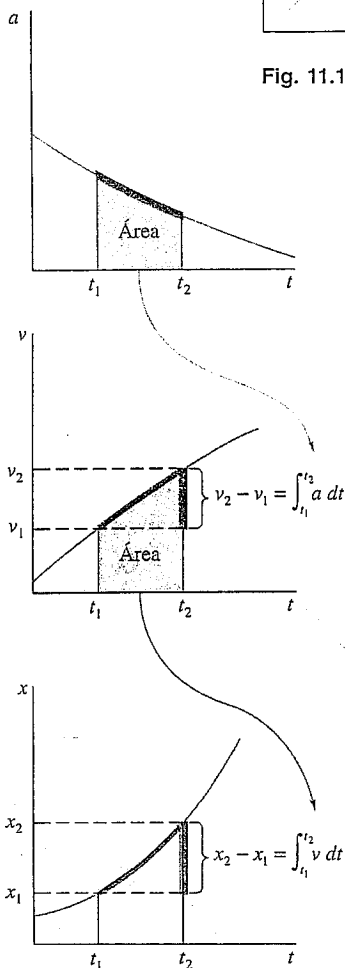
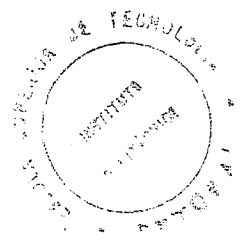


Fig. 11.11



uma função linear de  $t$ , representada pela linha recta oblíqua, e  $x$  expressar-se-á por um polinómio do 2.º grau em  $t$ , que se representa graficamente por uma parábola. Se a aceleração for uma função linear de  $t$ , a velocidade e a coordenada de posição serão, respectivamente, iguais a polinómios do 2.º e 3.º graus;  $a$  será então representada por uma linha recta oblíqua,  $v$  por uma parábola, e  $x$  por uma função cúbica. De um modo geral, se a aceleração for um polinómio de grau  $n$  em  $t$ , a velocidade será um polinómio de grau  $n + 1$ , e a coordenada de posição, um polinómio de grau  $n + 2$ ; estes polinómios são representados por curvas de movimento com o correspondente grau.

**\*11.8. OUTROS MÉTODOS GRÁFICOS**

Existem soluções gráficas alternativas que se podem utilizar para determinar, directamente a partir da curva  $a-t$ , a posição de uma partícula num dado instante. Se designarmos, respectivamente, por  $x_0$  e  $v_0$  os valores de  $x$  e  $v$  em  $t = 0$ , e por  $x_1$  e  $v_1$  os correspondentes valores em  $t = t_1$ , e supondo que a área sob a curva  $v-t$  se pode decompor num rectângulo de área  $v_0 t_1$  e elementos horizontais de área igual a  $(t_1 - t) dv$  (Fig. 11.12a), podemos escrever

$$x_1 - x_0 = \text{área sob a curva } v-t = v_0 t_1 + \int_{v_0}^{v_1} (t_1 - t) dv$$

Substituindo, no integral,  $dv$  por  $a dt$ , obtemos

$$x_1 - x_0 = v_0 t_1 + \int_0^{t_1} (t_1 - t) a dt$$

Reportando-nos agora à Fig. 11.12b, observamos que o integral representa o primeiro momento de área sob a curva  $a-t$ , em torno da linha  $t = t_1$ , que delimita a área à direita. Este método é, por esta razão, designado por *método do momento de área*. Se a abcissa  $\bar{t}$  do centróide  $C$  da área for conhecida, a coordenada  $x_1$  pode ser obtida através de

$$x_1 = x_0 + v_0 t_1 + (\text{área sob a curva } a-t)(t_1 - \bar{t}) \tag{11.13}$$

Se a área sob a curva  $a-t$  for composta, o último termo em (11.13) pode obter-se através da multiplicação de cada componente de área pela distância do respectivo centróide à linha  $t = t_1$ . As áreas acima do eixo  $t$  são consideradas positivas, e as que se encontram abaixo daquele eixo, negativas.

Por vezes, utiliza-se um outro tipo de curva de movimento, a curva  $v-x$ . Neste caso, a aceleração  $a$  pode obter-se, a partir do gráfico desta curva (Fig. 11.13), traçando-se a normal  $AC$  à curva e efectuando-se a *medição da subnormal*  $BC$ . Na verdade, observando que o ângulo entre  $AC$  e  $AB$  é igual ao ângulo  $\theta$ , entre a horizontal e a tangente em  $A$  (cujo declive é  $\text{tg } \theta = dv/dx$ ), escrevemos

$$BC = AB \text{ tg } \theta = v \frac{dv}{dx}$$

e, assim, através da fórmula (11.4),

$$BC = a$$

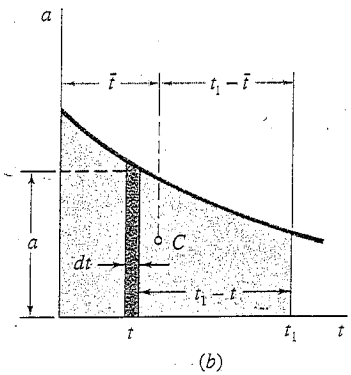
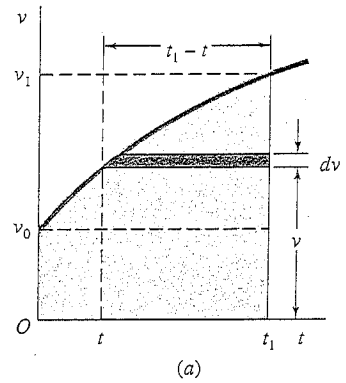


Fig. 11.12

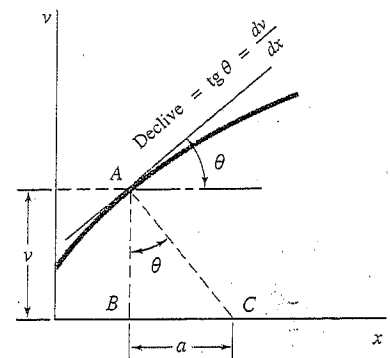
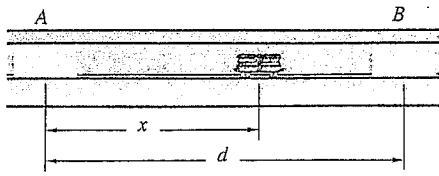
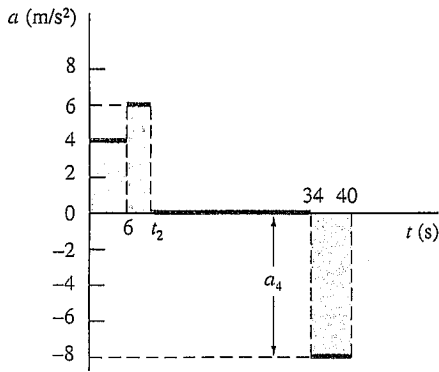


Fig. 11.13



## PROBLEMA-TIPO 11.6

Uma carruagem de metro parte da estação A, ganhando velocidade a uma razão de  $4 \text{ m/s}^2$  durante 6 s, e depois a uma razão de  $6 \text{ m/s}^2$  até que alcança a velocidade de  $48 \text{ m/s}$ . A carruagem mantém a velocidade até se aproximar da estação B; são aplicados então os travões, o que provoca uma desaceleração que conduz à paragem em 6s. O tempo total gasto no percurso entre A e B é de 40 s. Desenhe as curvas  $a-t$ ,  $v-t$  e  $x-t$ , e determine a distância entre as estações A e B.

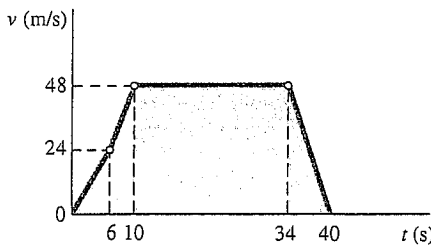


### RESOLUÇÃO

**Curva aceleração-tempo.** Uma vez que a aceleração ou é constante ou é zero, a curva  $a-t$  é construída com segmentos de recta horizontais. Os valores de  $t_2$  e  $a_4$  são calculados como se segue:

- $0 < t < 6$ : Variação em  $v = \text{área sob a curva } a-t$   
 $v_6 - 0 = (6 \text{ s})(4 \text{ m/s}^2) = 24 \text{ m/s}$
- $6 < t < t_2$ : Uma vez que a velocidade aumenta desde 24 até  $48 \text{ m/s}$   
 Variação em  $v = \text{área sob a curva } a-t$   
 $48 \text{ m/s} - 24 \text{ m/s} = (t_2 - 6)(6 \text{ m/s}^2) \quad t_2 = 10 \text{ s}$
- $t_2 < t < 34$ : Uma vez que a velocidade é constante, a aceleração é zero.
- $34 < t < 40$ : Variação em  $v = \text{área sob a curva } a-t$   
 $0 - 48 \text{ m/s} = (6 \text{ s})a_4 \quad a_4 = -8 \text{ m/s}^2$

Sendo a aceleração negativa, a área correspondente situa-se abaixo do eixo dos  $t$ , esta área representa o decréscimo em velocidade.



**Curva velocidade-tempo.** Uma vez que a aceleração ou é constante ou é zero, a curva  $v-t$  é construída com segmentos de recta que ligam os pontos determinados anteriormente.

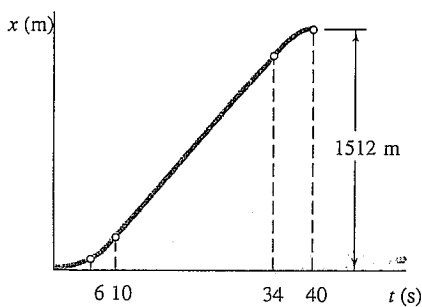
Variação em  $x = \text{área sob a curva } v-t$

- $0 < t < 6$ :  $x_6 - 0 = 0,5(6)(24) = 72 \text{ m}$
- $6 < t < 10$ :  $x_{10} - x_6 = 0,5(4)(24 + 48) = 144 \text{ m}$
- $10 < t < 34$ :  $x_{34} - x_{10} = (24)(48) = 1152 \text{ m}$
- $34 < t < 40$ :  $x_{40} - x_{34} = 0,5(6)(48) = 144 \text{ m}$

Adicionando as variações em  $x$ , obtemos a distância entre A e B:

$$d = x_{40} - 0 = 1512 \text{ m}$$

$$d = 1512 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$



**Curva posição-tempo.** Os pontos determinados acima devem ser ligados por três arcos de parábola e um segmento de recta. Ao construir a curva  $x-t$ , devemos ter em atenção que, para qualquer valor de  $t$ , o declive da tangente à referida curva é igual ao valor de  $v$  nesse instante.

# METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta lição (Secs. 11.7 e 11.8), fizemos a revisão e desenvolvemos várias técnicas gráficas para a solução de problemas sobre movimento rectilíneo. Estas técnicas permitem resolver os problemas, quer por aplicação directa simples quer servindo de suporte visual aos métodos analíticos, ajudando a uma melhor compreensão do movimento de um dado corpo. Sugerimos que se esboce uma ou mais curvas de movimento para os vários problemas desta lição, mesmo que estes não sejam devidos como trabalho de casa.

**1. Representação de curvas  $x-t$ ,  $v-t$  e  $a-t$  e aplicação de métodos gráficos.** Na Sec. 11.7 mencionámos algumas propriedades que devemos ter em conta sempre que se utilizem métodos gráficos para a resolução de problemas e que se transcrevem seguidamente.

*a. Os declives das curvas  $x-t$  e  $v-t$  no instante  $t_1$  são iguais, respectivamente, à velocidade e à aceleração no instante  $t_1$ .*

*b. As áreas sob as curvas  $x-t$  e  $v-t$  entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$  são iguais, respectivamente, à variação  $\Delta v$  na velocidade e à variação  $\Delta x$  na coordenada de posição durante esse intervalo de tempo.*

*c. Se conhecermos uma das curvas do movimento, podemos construir as outras duas, por recurso às propriedades fundamentais que resumimos nos parágrafos *a* e *b*. Contudo, ao utilizarmos as propriedades enunciadas em *b*, devemos ter em mente que, para calcular a velocidade e posição no instante  $t_2$ , se deve conhecer previamente a velocidade e a posição no instante  $t_1$ . Por este motivo, no Prob.-Tipo 11.6, é necessário conhecer antecipadamente o valor da velocidade inicial de modo a obter a velocidade em  $t = 6s$ :  $v_6 = v_0 + \Delta v = 0 + 24m/s = 24m/s$ .*

Podemos verificar que existe uma analogia entre as três curvas do movimento e os três diagramas que representam, respectivamente, a carga distribuída, o esforço transversal e o momento flector numa viga. Por isso, as técnicas utilizadas quando da aprendizagem da construção dos referidos diagramas podem agora ser novamente aplicadas.

**2. Utilização de métodos aproximados.** Quando as curvas  $a-t$  e  $v-t$  não são representadas por funções analíticas, ou quando estas são baseadas em valores experimentais, é frequentemente necessário recorrer a métodos aproximados para o cálculo das áreas sob as referidas curvas. Para isso, aproximamos uma dada área por um conjunto de rectângulos de espessura  $\Delta t$ , aproximação essa que será tanto mais correcta quanto menor for a espessura  $\Delta t$ . A velocidade e a coordenada de posição são calculadas através das seguintes expressões:

$$v = v_0 + \sum a_{\text{méd.}} \Delta t \qquad x = x_0 + \sum v_{\text{méd.}} \Delta t$$

onde  $a_{\text{méd.}}$  e  $v_{\text{méd.}}$  são as correspondentes alturas do rectângulo aceleração e do rectângulo velocidade.

(continua)

**3. Utilização da técnica do momento de área.** Esta técnica torna-se particularmente útil quando se pretende obter a variação da coordenada de posição, pelo conhecimento da curva  $a-t$ . Na Sec. 11.8 vimos que a coordenada  $x_1$  pode ser expressa por

$$x_1 = x_0 + v_0 t_1 + (\text{área sob a curva } a-t)(t_1 - \bar{t}) \quad (11.13)$$

É importante registar que, sempre que estejamos perante uma área composta sob a curva  $a-t$ , devemos utilizar o mesmo valor de  $t_1$  para o cálculo da contribuição de cada uma das componentes de área.

**4. Determinação da aceleração a partir da curva  $v-x$ .** Na Sec. 11.8 vimos que é possível, por medição directa, determinar a aceleração a partir da curva  $v-x$ . Contudo, é importante notar que este método é aplicável só para os casos em que se utiliza a mesma escala linear para os eixos  $v$  e  $x$  (por exemplo  $1 \text{ cm} = 1 \text{ m}$  e  $1 \text{ cm} = 1 \text{ m/s}$ ). Se esta condição não for satisfeita, a aceleração pode, ainda assim, ser determinada pela equação,

$$a = v \frac{dv}{dx}$$

na qual o declive  $dv/dx$  é obtido como se segue: primeiro traçamos a tangente à curva no ponto de interesse. Seguidamente, e usando escalas apropriadas, mede-se ao longo da tangente os correspondentes incrementos  $\Delta x$  e  $\Delta v$ . O declive pretendido é igual ao quociente  $\Delta v/\Delta x$ .

# Problemas

11.61 Uma partícula desloca-se ao longo de uma linha recta com a aceleração indicada na figura. Sabendo que a partícula parte da origem com  $v_0 = -2$  m/s, (a) construa as curvas  $v-t$  e  $x-t$  para  $0 < t < 18$  s, (b) determine a posição e velocidade da partícula bem como a distância percorrida quando  $t = 18$  s.

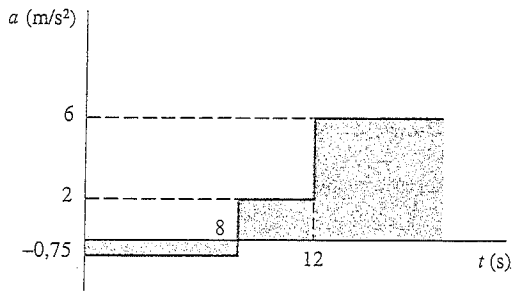


Fig. P11.61 e P11.62

11.62 Uma partícula desloca-se ao longo de uma linha recta com a aceleração indicada na figura. Sabendo que a partícula parte da origem com  $v_0 = -2$  m/s, (a) construa as curvas  $v-t$  e  $x-t$  para  $0 < t < 18$  s, e determine (b) o valor mínimo da velocidade, (c) o valor mínimo da sua coordenada de posição.

11.63 Uma partícula desloca-se ao longo de uma linha recta com a velocidade indicada na figura. Sabendo que  $x = -540$  m quando  $t = 0$ , (a) construa as curvas  $a-t$  e  $x-t$  para  $0 < t < 50$  s, e determine (b) a distância total percorrida pela partícula quando  $t = 50$  s, (c) os dois instantes para os quais  $x = 0$ .

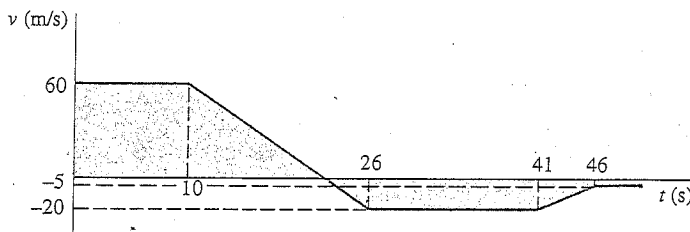


Fig. P11.63 e P11.64

11.64 Uma partícula desloca-se ao longo de uma linha recta com a velocidade indicada na figura. Sabendo que  $x = -540$  m quando  $t = 0$ , (a) construa as curvas  $a-t$  e  $x-t$  para  $0 < t < 50$  s, e determine (b) o valor máximo para a coordenada de posição da partícula, (c) os dois instantes para os quais  $x = 100$  m.



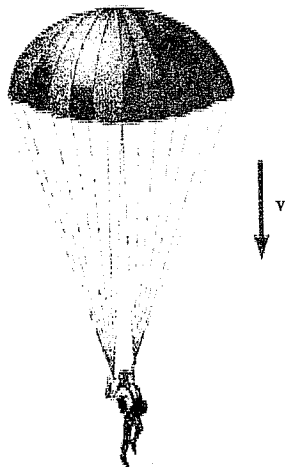


Fig. P11.65

11.65 Um pára-quedista encontra-se em queda livre a uma velocidade de 200 km/h e abre o seu pára-quedas quando se encontra a uma altitude de 600 m. Após sofrer uma brusca e constante desaceleração, prossegue a sua descida a uma velocidade de 50 km/h entre a altitude de 586 m e a de 30 m, altura em que manobra o seu pára-quedas contra o vento de modo a tornar mais lenta a descida. Admitindo que o pára-quedista aterra com uma velocidade vertical desprezável, determine (a) o tempo necessário para a aterragem do pára-quedista, desde a abertura do seu pára-quedas, (b) a desaceleração inicial.

11.66 Um componente de uma máquina está montado sobre um transportador e é pintado com uma pistola pulverizadora enquanto se desloca de 4 m em 20 s. O transportador adquire uma velocidade inicial de 80 mm/s e pode ser acelerado até um máximo de 60 mm/s<sup>2</sup>. Sabendo que o processo de pintura demora 15 s, e que é executado enquanto o transportador se desloca a uma velocidade constante, calcule o menor valor possível para a velocidade máxima do transportador.

11.67 Um sensor de temperatura encontra-se colocado num cursor que se desloca ao longo de 60 cm. As velocidades máximas permitidas ao cursor são de 12 cm/s para a direita e de 30 cm/s para a esquerda. Ao deslocar-se para a direita, o cursor acelera e desacelera a uma razão de 6 cm/s<sup>2</sup>; quando se desloca para a esquerda a aceleração e a desaceleração processam-se com um valor de 20 cm/s<sup>2</sup>. Determine o tempo necessário para que o cursor complete um ciclo, e construa os diagramas  $v-t$  e  $x-t$ .

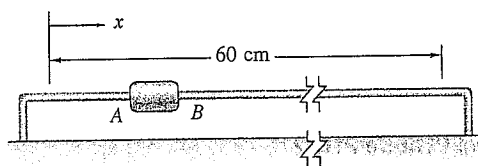


Fig. P11.67

11.68 Um comboio desloca-se a 40 km/h e encontra-se a 3 km de uma estação. Sabendo que o comboio chega à estação 7,5 min. após ter iniciado uma desaceleração constante, determine (a) o tempo necessário para o comboio percorrer os primeiros 2,5 km, (b) a velocidade a que o comboio chega à estação, (c) o valor constante da sua desaceleração final.

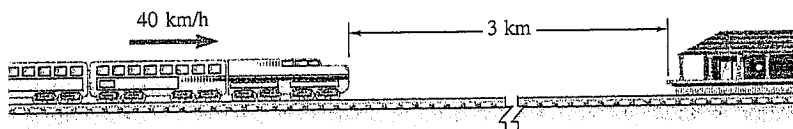


Fig. P11.68

11.69 Dois postos de controlo de uma prova de rali estão colocados na mesma estrada e afastados 12 km um do outro. Os limites de velocidade nos primeiros 8 km e nos últimos 4 km são, respectivamente, de 100 km/h e 70 km/h. Os condutores devem efectuar a paragem em cada posto de controlo, sendo o tempo entre A e B especificado para 8 min e 20 s. Admitindo que um condutor acelera e desacelera com um valor constante, determine o valor da sua aceleração se ele procura viajar com o máximo de velocidade possível.

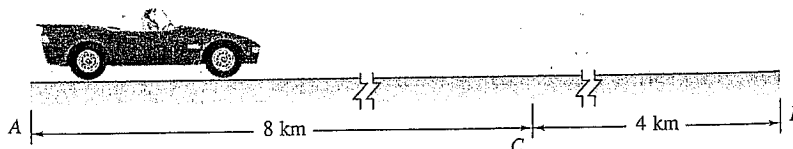


Fig. P11.69

11.70 Um modelo de um barco é submetido a ensaios num reservatório com água; para tal, impõe-se um movimento na direcção horizontal com uma velocidade inicial de  $6 \text{ m/s}$ ; seguidamente varia-se a sua aceleração, linearmente, desde  $-12 \text{ m/s}^2$ , quando  $t = 0$ , até  $-2 \text{ m/s}^2$  para  $t = t_1$ , permanecendo constante e igual a  $-2 \text{ m/s}^2$  até ao instante  $t = 1,4 \text{ s}$ . Sabendo que  $v = 1,8 \text{ m/s}$  para  $t = t_1$ , determine (a) o valor de  $t_1$ , (b) a velocidade e a posição do modelo quando  $t = 1,4 \text{ s}$ .

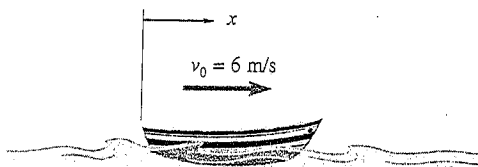


Fig. P11.70

11.71 Um autocarro encontra-se estacionado na bermada de uma estrada quando um camião passa pelo local com uma velocidade de  $45 \text{ km/h}$ . Dois minutos mais tarde, o autocarro inicia o seu percurso, acelerando uniformemente até alcançar a velocidade de  $60 \text{ km/h}$ , que depois se mantém constante. Sabendo que,  $12 \text{ min.}$  depois de o camião ter passado o autocarro, este se encontra  $0,8 \text{ km}$  à sua frente, determine (a) quando e onde o autocarro passa o camião, (b) a aceleração uniforme do autocarro.

11.72 Os automóveis A e B estão afastados de  $d = 200 \text{ m}$  e deslocam-se com velocidades constantes de  $(v_A)_0 = 20 \text{ km/h}$  e  $(v_B)_0 = 15 \text{ km/h}$ , respectivamente, numa estrada com o piso coberto de gelo. Sabendo que  $45 \text{ s}$  depois de o condutor do carro A ter accionado os travões, a fim de evitar uma ultrapassagem ao carro B, estes colidem, determine (a) a desaceleração constante do carro A, (b) a velocidade relativa do carro A relativamente a B, quando se dá a colisão.

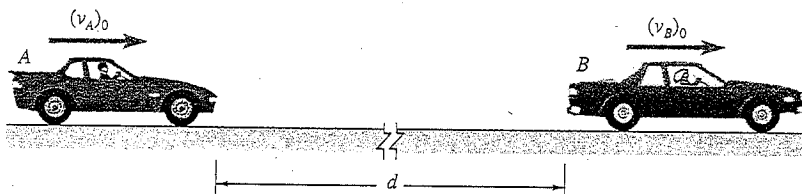


Fig. P11.72 e P11.73

11.73 Os automóveis A e B deslocam-se com velocidades constantes de  $(v_A)_0 = 36 \text{ km/h}$  e  $(v_B)_0 = 27 \text{ km/h}$ , respectivamente, numa estrada com o piso coberto de gelo. A fim de evitar uma ultrapassagem ao carro B, o condutor do carro A acciona os seus travões e desacelera a uma razão de  $0,042 \text{ m/s}^2$ . Determine a distância  $d$ , entre os carros, para a qual o condutor do carro A deve aplicar os travões se pretende evitar a colisão com o carro B.

11.74 Um elevador parte do repouso e move-se no sentido ascendente, acelerando a uma razão de  $1,2 \text{ m/s}^2$  até alcançar uma velocidade de  $7,8 \text{ m/s}$ , que depois se mantém. Dois segundos depois de o elevador ter iniciado o seu movimento, um homem colocado  $12 \text{ m}$  acima da posição inicial do tecto do elevador lança uma bola para cima, com uma velocidade inicial de  $20 \text{ m/s}$ . Determine o instante em que a bola choca com o elevador.

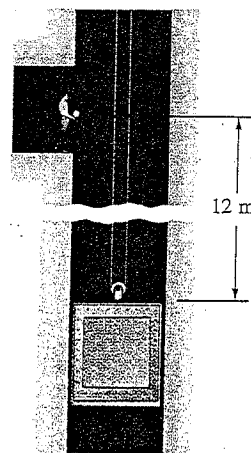


Fig. P11.74

11.75 O automóvel A desloca-se ao longo de uma estrada com uma velocidade constante  $(v_A)_0 = 60$  km/h, e encontra-se a 380 m de um acesso no qual se encontra o automóvel B, que inicia a sua entrada através da faixa de aceleração com uma velocidade  $(v_B)_0 = 15$  km/h. O automóvel B acelera uniformemente, percorrendo uma distância de 200 m em 5 s, tomando em seguida a faixa principal, que percorre com a mesma aceleração até alcançar a velocidade de 60 km/h, que se mantém então constante. Determine a distância final a que se encontram os dois automóveis.

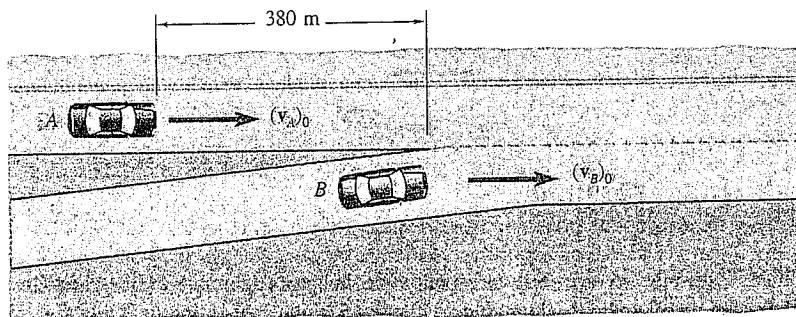


Fig. P11.75

11.76 O automóvel A desloca-se à velocidade de 40 km/h quando entra numa zona com limite de velocidade de 30 km/h. A condutora desacelera o automóvel, à razão de  $16$  m/s<sup>2</sup>, até alcançar a velocidade de 30 km/h, que depois mantém constante. Entretanto, o condutor do automóvel B, que se encontrava 60 m atrás e viajava à velocidade de 45 km/h, entra na zona de limite de velocidade e desacelera à razão de  $20$  m/s<sup>2</sup> até atingir a velocidade de 28 km/h. Sabendo que este condutor mantém a sua velocidade, determine (a) a distância mais próxima a que ficam os dois automóveis, (b) o tempo necessário para que o automóvel A se situe 70 m à frente do automóvel B.

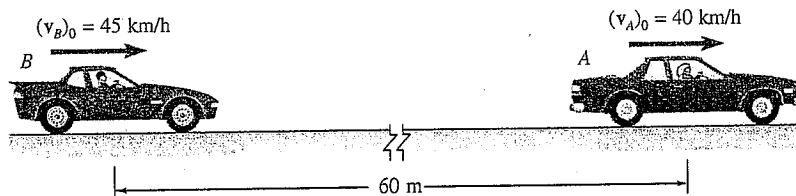


Fig. P11.76

11.77 Um automóvel desloca-se com a velocidade de 54 km/h, quando o condutor avista uma criança em plena via. O condutor trava, até a criança se retirar para o passeio, e acelera de novo a fim de retomar a velocidade inicial, de 54 km/h; o registo da aceleração está representado na figura. Considerando que  $x = 0$  e  $t = 0$ , determine (a) o instante de tempo  $t_1$  para o qual a velocidade é novamente de 54 km/h, (b) a posição do carro nesse instante, (c) a velocidade média do carro no intervalo  $1 \text{ s} \leq t \leq t_1$ .

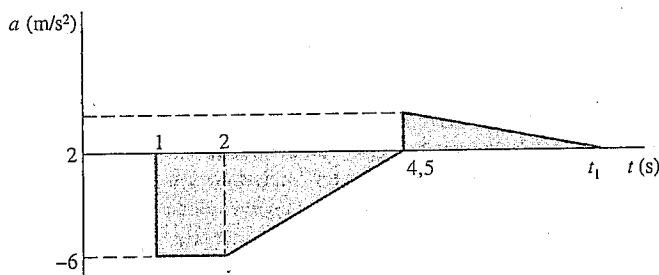


Fig. P11.77

11.78 Tal como se mostra na figura, a aceleração de uma dada partícula é representada por uma parábola, desde  $t = 0$  até  $t = 4$  s. Sabendo que, quando  $t = 0$ ,  $x = 0$  e  $v = 8$  m/s, (a) construa as curvas  $v-t$  e  $x-t$  para o intervalo  $0 < t < 4$  s, (b) determine a posição da partícula para  $t = 3$  s. (Sugestão. Utilize a tabela localizada no verso da capa.)

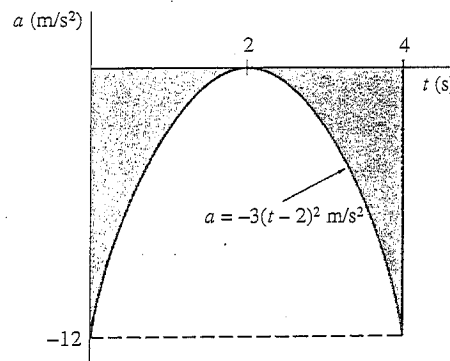


Fig. P11.78

11.79 Durante um processo de fabricação, um transportador de correia inicia o seu movimento e desloca-se 1,2 m até atingir temporariamente o repouso. Sabendo que o movimento brusco, que se traduz pela taxa de variação da aceleração, limitado a  $\pm 4,8$  m/s<sup>2</sup> por segundo, determine (a) o mínimo tempo necessário para que a correia se desloque 1,2 m, (b) os valores máximo e médio da velocidade da correia durante esse tempo.

11.80 Um comboio viaja entre dois terminais de um aeroporto, que estão situados a 1,6 km um do outro. Com o objectivo de proporcionar conforto aos passageiros, a aceleração é limitada a  $\pm 4,8$  m/s<sup>2</sup>, e o movimento brusco, que se traduz pela taxa de variação da aceleração, é limitado a  $\pm 0,8$  m/s<sup>2</sup> por segundo. Se o comboio atingir a velocidade máxima de 20 km/h, determine (a) o mínimo tempo necessário para o comboio viajar entre os terminais, (b) a correspondente velocidade média do comboio.

11.81 A figura mostra o registo da aceleração obtida durante o ensaio de um carro desportivo. Sabendo que o carro parte do repouso, determine, por métodos aproximados, (a) a velocidade do carro no instante  $t = 8$  s, (b) a distância percorrida quando  $t = 20$  s.

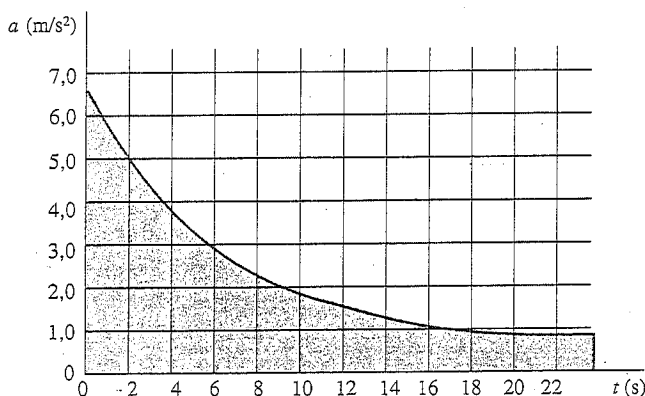


Fig. P11.81

11.82 O pistão de um cilindro demora 2 s a atingir o repouso; o registo da aceleração está representado na figura. Determine, por métodos aproximados, (a) a velocidade inicial do pistão, (b) a distância percorrida pelo pistão durante o seu trajecto até ao repouso.

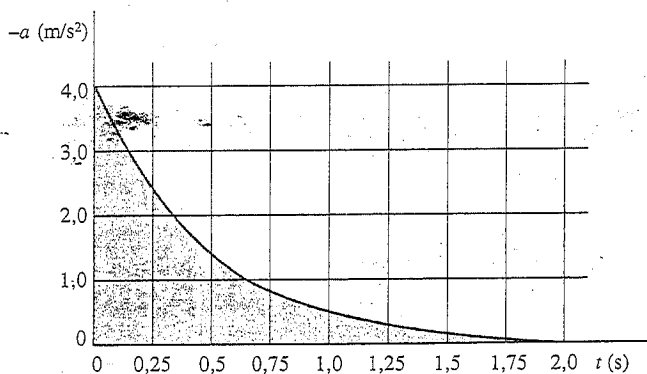


Fig. P11.82

**11.83** Um avião de treino aterra com a velocidade de 126 m/s sobre um porta-aviões. Durante a actuação do mecanismo de travagem registam-se os valores da velocidade e da aceleração, cujos resultados se mostram na figura (curva a cheio). Determine, por métodos aproximados, (a) o tempo necessário para o avião atingir o repouso, (b) a distância percorrida durante esse tempo.

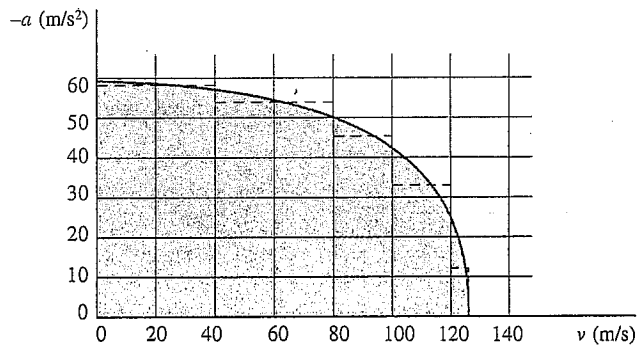


Fig. P11.83

**11.84** A figura mostra uma curva  $v-x$  obtida experimentalmente para uma plataforma de transporte. Determine, por métodos aproximados, a aceleração da plataforma (a) quando  $x = 10$  mm, (b) quando  $v = 80$  mm/s.

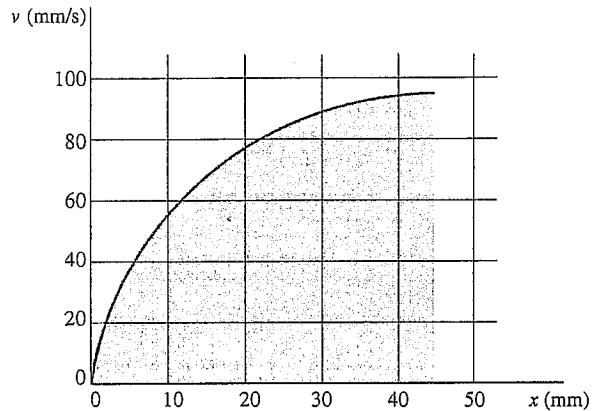


Fig. P11.84

**11.85** Recorrendo ao método da Sec. 11.8, derive a fórmula  $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$  para a coordenada de posição de uma partícula em movimento rectilíneo uniformemente acelerado.

**11.86** Recorrendo ao método da Sec. 11.8, determine a posição da partícula do Prob. 11.61 quando  $t = 16$  s.

**11.87** Um acelerómetro é colocado num novo modelo de barco salva-vidas, a fim de se realizarem ensaios experimentais, tendo-se obtido o registo mostrado na figura. Se a velocidade do barco for de 7,5 m/s quando  $t = 0$  e estiver em repouso para  $t = t_1$ , determine, usando o método da Sec. 11.8, (a) o instante  $t_1$ , (b) a distância percorrida pelo barco antes de atingir o repouso.

**11.88** Construa, para a partícula do Prob. 11.63, a curva  $a-t$  e determine, usando o método da Sec. 11.8, (a) a posição da partícula quando  $t = 52$  s, (b) o valor máximo da coordenada de posição.

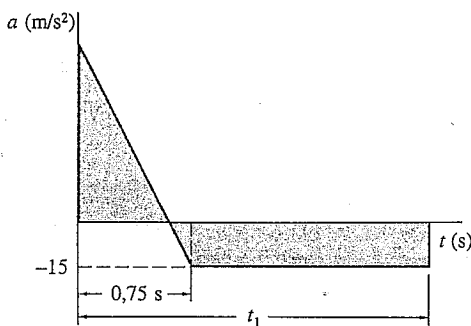


Fig. P11.87

11.9. VECTOR DE POSIÇÃO, VELOCIDADE E ACELERAÇÃO

Sempre que uma partícula se desloca ao longo de uma trajectória que não seja uma linha recta, dizemos que a partícula está em *movimento curvilíneo*. A posição da partícula num dado instante  $t$  pôde definir-se pela utilização de um vector  $r$ , traçado num sistema de referência fixo  $Oxyz$ , tal como é representado na Fig. 11.14a. Este vector caracteriza-se pela sua intensidade pela sua direcção, e pelo seu sentido definindo, por isso, completamente a posição da partícula em relação ao sistema de eixos; o vector  $r$  designa-se por *vector de posição* da partícula no instante  $t$ .

Consideremos agora a posição  $P'$  da partícula no instante  $t + \Delta t$ , que se caracteriza pelo vector posição  $r'$ . O vector  $\Delta r$ , que liga as extremidades  $P$  e  $P'$ , traduz a variação do vector de posição durante o intervalo de tempo  $\Delta t$ , como se verifica na Fig. 11.14a. É importante sublinhar que essa variação se processa quer em termos de *direcção* quer em termos de *intensidade*. A *velocidade média* da partícula no intervalo de tempo  $\Delta t$  é definida pelo quociente  $\Delta r / \Delta t$ . Dado que  $\Delta r$  é um vector, e  $\Delta t$ , um escalar, o quociente  $\Delta r / \Delta t$  é um vector ligado a  $P$ , com a mesma direcção que  $\Delta r$  e com intensidade obtida pelo quociente entre  $\Delta r$  e  $\Delta t$  (Fig. 11.14b).

A *velocidade instantânea* da partícula no instante  $t$  obtém-se ao escolher intervalos de tempo  $\Delta t$  cada vez menores e, conseqüentemente, vectores  $\Delta r$  cada vez mais curtos. A velocidade instantânea é assim representada pelo vector

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \tag{11.14}$$

À medida que o intervalo de tempo  $\Delta t$  e o vector  $\Delta r$  se tornam mais pequenos, os pontos  $P$  e  $P'$  tendem a aproximar-se um do outro, e o vector  $v$ , obtido no limite, torna-se tangente à trajectória descrita pela partícula (Fig. 11.14c).

Dado que o vector de posição  $r$  depende do tempo  $t$ , podemos referi-lo como uma *função vectorial* do escalar  $t$ , e representá-lo por  $r(t)$ . O conceito de derivada de um escalar, introduzido na teoria do Cálculo Elementar, pode agora ser alargado ao quociente  $\Delta r / \Delta t$ , permitindo o cálculo da *derivada* do vector posição  $r(t)$ . Podemos escrever

$$v = \frac{dr}{dt} \tag{11.15}$$

A intensidade  $v$  do vector velocidade  $v$  designa-se por *velocidade* da partícula ou, mais especificamente, *intensidade da velocidade*. O valor de  $v$  pode ser obtido, através da expressão 11.14, mas agora substituindo  $\Delta r$  pela respectiva intensidade do vector, ou seja, pelo comprimento do segmento  $PP'$ . À medida que  $\Delta t$  se torna menor, aquele comprimento aproxima-se do comprimento do arco  $PP'$ , sendo  $v$  dado por

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{PP'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad v = \frac{ds}{dt} \tag{11.16}$$

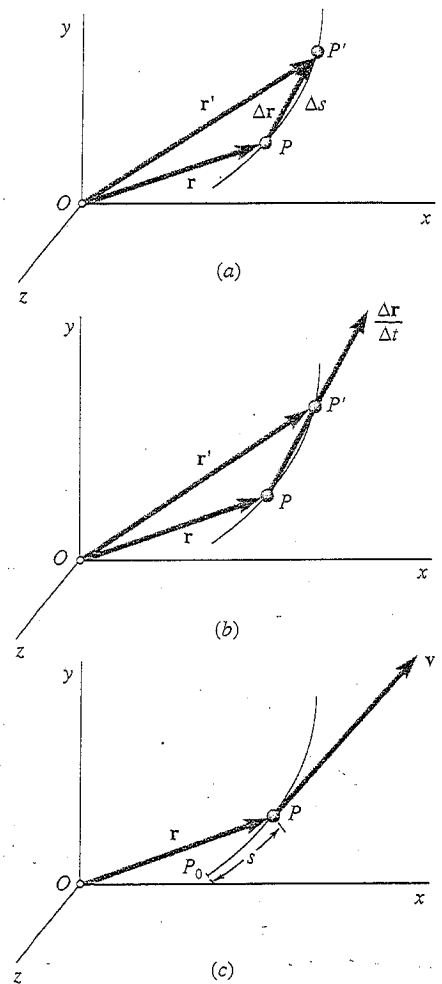


Fig. 11.14

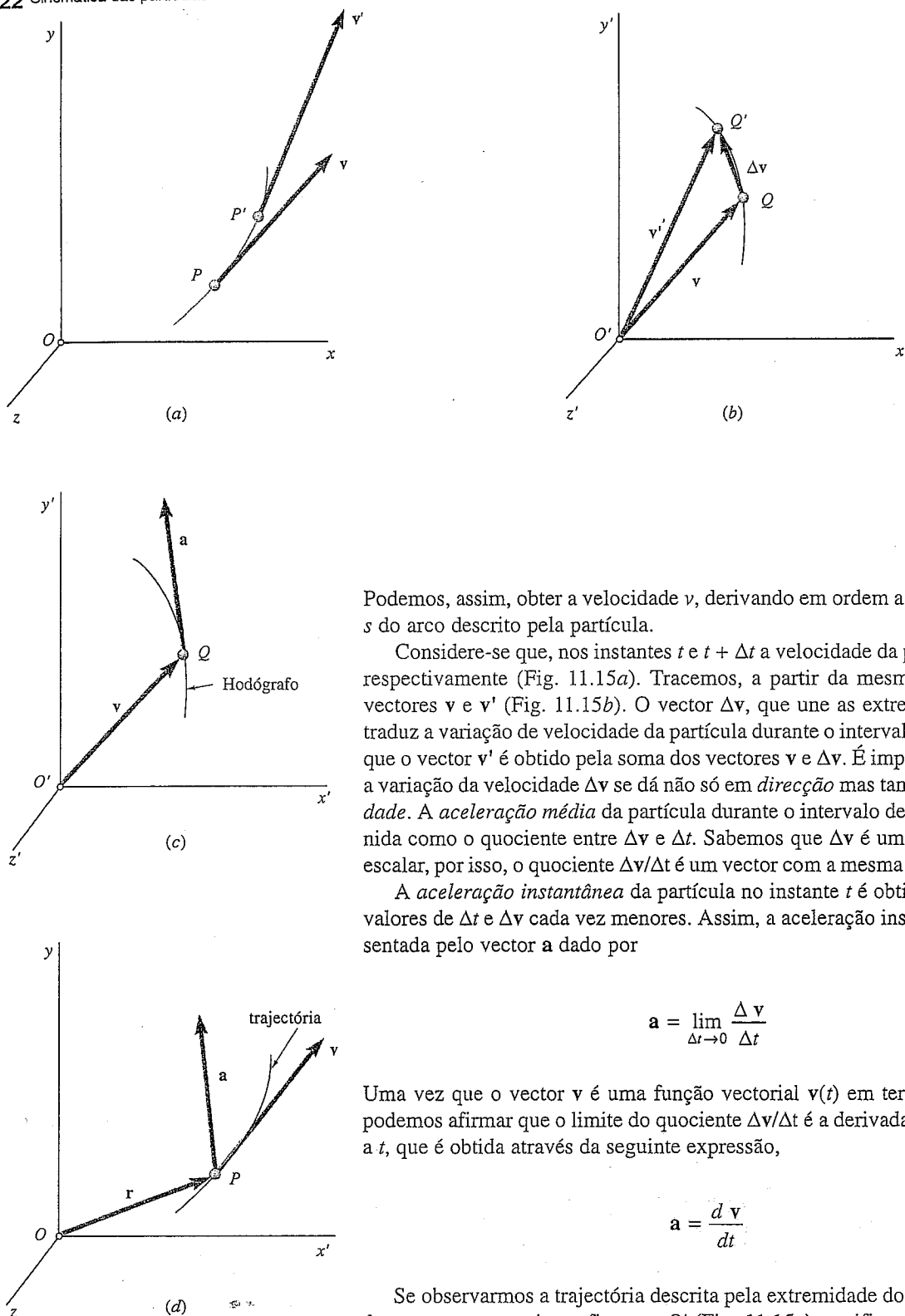


Fig. 11.15

Podemos, assim, obter a velocidade  $v$ , derivando em ordem a  $t$  o comprimento  $s$  do arco descrito pela partícula.

Considere-se que, nos instantes  $t$  e  $t + \Delta t$  a velocidade da partícula é  $v$  e  $v'$ , respectivamente (Fig. 11.15a). Tracemos, a partir da mesma origem  $O'$ , os vectores  $v$  e  $v'$  (Fig. 11.15b). O vector  $\Delta v$ , que une as extremidades  $Q$  e  $Q'$ , traduz a variação de velocidade da partícula durante o intervalo de tempo  $\Delta t$ , já que o vector  $v'$  é obtido pela soma dos vectores  $v$  e  $\Delta v$ . É importante notar que a variação da velocidade  $\Delta v$  se dá não só em *direcção* mas também em *intensidade*. A *aceleração média* da partícula durante o intervalo de tempo  $\Delta t$  é definida como o quociente entre  $\Delta v$  e  $\Delta t$ . Sabemos que  $\Delta v$  é um vector, e  $\Delta t$ , um escalar, por isso, o quociente  $\Delta v/\Delta t$  é um vector com a mesma direcção que  $\Delta v$ .

A *aceleração instantânea* da partícula no instante  $t$  é obtida ao considerar valores de  $\Delta t$  e  $\Delta v$  cada vez menores. Assim, a aceleração instantânea é representada pelo vector  $a$  dado por

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (11.17)$$

Uma vez que o vector  $v$  é uma função vectorial  $v(t)$  em termos do tempo  $t$ , podemos afirmar que o limite do quociente  $\Delta v/\Delta t$  é a derivada de  $v$  em relação a  $t$ , que é obtida através da seguinte expressão,

$$a = \frac{d v}{d t} \quad (11.18)$$

Se observarmos a trajectória descrita pela extremidade do vector velocidade  $v$ , com a sua origem fixa em  $O'$  (Fig. 11.15c), verificamos que o vector aceleração  $a$  é tangente àquela trajectória, que designaremos por *hodógrafo* do movimento. Note-se que o vector aceleração *não* é, geralmente, tangente à trajectória descrita pela partícula (Fig. 11.15d).

Na secção anterior, vimos que a velocidade,  $v$ , de uma partícula em movimento curvilíneo pode ser representada pela derivada da função vectorial  $r(t)$ , que é utilizada para caracterizar a posição dessa partícula. Analogamente, a aceleração  $a$  de uma partícula pode ser representada pela derivada da função vectorial  $v(t)$ . Na presente secção, apresentaremos uma definição formal da derivada de funções vectoriais, bem como de algumas regras que governam a diferenciação de somas e produtos das referidas funções.

Seja  $P(u)$  a função vectorial de uma variável escalar  $u$ . Deste modo, o escalar define completamente a intensidade e a direcção do vector  $P$ , ou seja, se o vector  $P$  for traçado a partir de uma origem fixa  $O$  e se variar o valor de  $u$ , a extremidade de  $P$  descreverá uma certa curva no espaço. Considere os vectores  $P$  correspondendo, respectivamente, aos valores de  $u$  e  $u + \Delta u$  para a variável escalar (Fig. 11.16a). Seja  $\Delta P$  o vector que une as suas extremidades; podemos assim, escrever

$$\Delta P = P(u + \Delta u) - P(u)$$

Se dividirmos ambos os membros por  $\Delta u$  e fizermos que este valor tenda para zero, estamos assim a definir a derivada da função vectorial  $P(u)$ :

$$\frac{dP}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{P(u + \Delta u) - P(u)}{\Delta u} \quad (11.19)$$

Quando  $\Delta u$  tende para zero, a linha de acção de  $\Delta P$  torna-se tangente à curva representada na Fig. 11.16a. Assim, a derivada  $dP/du$  da função vectorial representada por  $P(u)$  é tangente à curva descrita pela sua extremidade (Fig. 11.16b).

As regras para a diferenciação de somas e produtos de funções escalares podem ser estendidas às funções vectoriais. Vejamos, primeiro, a adição de duas funções vectoriais  $P(u)$  e  $Q(u)$  da mesma variável escalar  $u$ . A definição dada em (11.19) permite-nos escrever:

$$\frac{d(P+Q)}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta(P+Q)}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta P}{\Delta u} + \frac{\Delta Q}{\Delta u} \right)$$

ou, uma vez que o limite de uma soma é igual à soma dos limites das suas parcelas,

$$\frac{d(P+Q)}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta u} + \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta u}$$

$$\frac{d(P+Q)}{du} = \frac{dP}{du} + \frac{dQ}{du} \quad (11.20)$$

Consideremos agora o produto de uma função escalar  $f(u)$  por uma função vectorial  $P(u)$ , ambas em termos da mesma variável escalar  $u$ . A derivada do vector  $fP$  é dada por

$$\frac{d(fP)}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{(f + \Delta f)(P + \Delta P) - fP}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta f}{\Delta u} P + f \frac{\Delta P}{\Delta u} \right)$$

na qual as conhecidas propriedades dos limites de somas e produtos podem de novo ser aplicadas, conduzindo a

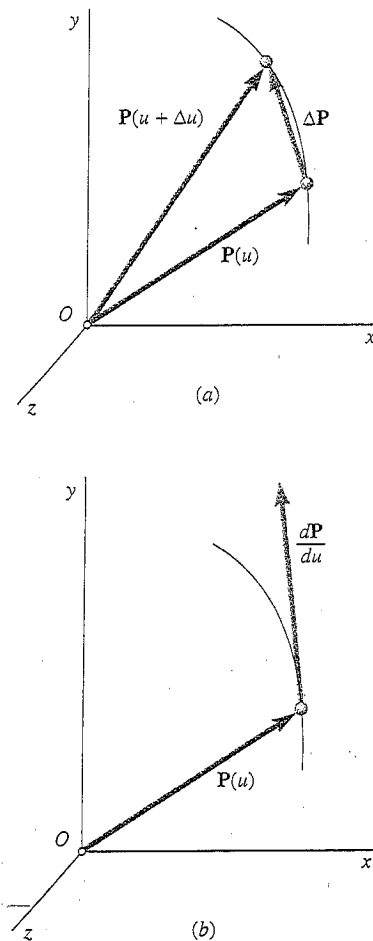


Fig. 11.16



$$\frac{d(f \mathbf{P})}{du} = \frac{df}{du} \mathbf{P} + f \frac{d\mathbf{P}}{du} \quad (11.21)$$

De um modo análogo, podemos obter as derivadas dos *produtos interno e externo* de duas funções vectoriais  $\mathbf{P}(u)$  e  $\mathbf{Q}(u)$  como se descreve,

$$\frac{d(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q})}{du} = \frac{d\mathbf{P}}{du} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{P} \cdot \frac{d\mathbf{Q}}{du} \quad (11.22)$$

$$\frac{d(\mathbf{P} \times \mathbf{Q})}{du} = \frac{d\mathbf{P}}{du} \times \mathbf{Q} + \mathbf{P} \times \frac{d\mathbf{Q}}{du} \quad (11.23)^\dagger$$

As propriedades anteriormente descritas podem ser utilizadas para determinar as *componentes cartesianas da derivada de uma função vectorial*  $\mathbf{P}(u)$ . Esta função pode ser expressa em termos das suas componentes relativas a um sistema de eixos cartesiano  $x, y, z$ , a seguir descrito,

$$\mathbf{P} = P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}$$

onde  $P_x, P_y, P_z$ , são as componentes rectangulares do vector  $\mathbf{P}$ , e  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , os versores que correspondem, respectivamente, aos eixos  $x, y, z$  (Sec. 2.12). Através da Eq. (11.20), a derivada de  $\mathbf{P}$  é igual à soma das derivadas dos seus termos, e, uma vez que estes são formados pelo produto de um escalar por uma função vectorial, devemos utilizar (11.21). Porém, os versores  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  têm amplitude constante e direcções fixas. Por estas razões as suas derivadas são nulas, o que conduz a

$$\frac{d\mathbf{P}}{du} = \frac{dP_x}{du} \mathbf{i} + \frac{dP_y}{du} \mathbf{j} + \frac{dP_z}{du} \mathbf{k} \quad (11.25)$$

Por definição, os coeficientes dos versores são as componentes escalares do vector  $d\mathbf{P}/du$ , podendo, por isso, concluir-se que as *componentes rectangulares escalares ou cartesianas da derivada da função vectorial*  $\mathbf{P}(u)$  são obtidas por diferenciação das respectivas componentes escalares de  $\mathbf{P}$ .

**Taxa de variação de um vector.** No caso de o vector  $\mathbf{P}$  ser uma função do tempo  $t$ , a sua derivada  $d\mathbf{P}/dt$  representa a *taxa de variação de*  $\mathbf{P}$  relativamente ao sistema de eixos  $Oxyz$ . Decompondo  $\mathbf{P}$  nas suas componentes rectangulares, temos

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{dP_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dP_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dP_z}{dt} \mathbf{k}$$

ou, utilizando pontos para indicar a diferenciação relativamente ao tempo  $t$ ,

$$\dot{\mathbf{P}} = \dot{P}_x \mathbf{i} + \dot{P}_y \mathbf{j} + \dot{P}_z \mathbf{k} \quad (11.25')$$

† Como o produto externo não é comutativo (Sec. 3.4), deve manter-se a ordem dos factores na Eq. (11.23).

Como se verá mais tarde na Sec. 15.10, a taxa de variação de um vector, quando observado de um *sistema de referência móvel*, é, geralmente, diferente da sua taxa de variação, quando observado de um sistema de referência fixo. Contudo, se o sistema móvel  $O'x'y'z'$  estiver *em translação*, i. e., se os seus eixos se mantiverem paralelos aos correspondentes eixos do sistema fixo  $Oxyz$  (Fig. 11.17), os versores  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  são os mesmos, e, por isso, o vector  $\mathbf{P}$  possuirá, em qualquer instante, as mesmas componentes  $P_x, P_y, P_z$ , em ambos os sistemas de referência. Da Eq. (11.25') se pode concluir que a taxa de variação  $\dot{\mathbf{P}}$  é a mesma qualquer que seja o referencial considerado. Podemos então afirmar que: *a taxa de variação de um vector é a mesma, relativamente a um referencial fixo e a um referencial em movimento de translação*. Esta propriedade simplificará consideravelmente o nosso estudo, uma vez que trataremos principalmente de sistemas de referência em translação.

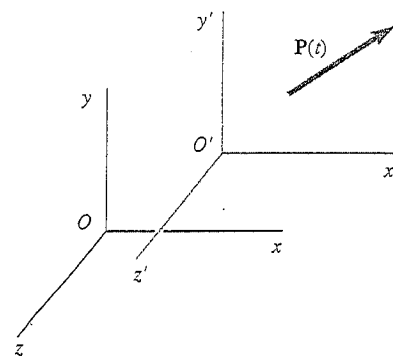


Fig. 11.17

### 11.11. COMPONENTES CARTESIANAS DA VELOCIDADE E DA ACELERAÇÃO

Quando a posição de uma partícula é definida em qualquer instante através das suas coordenadas rectangulares ou cartesianas  $x, y$  e  $z$ , torna-se conveniente decompor a velocidade  $\mathbf{v}$  e a aceleração  $\mathbf{a}$  da partícula nessas mesmas componentes (Fig. 11.18).

Decompondo o vector posição  $\mathbf{r}$  de uma partícula nas suas componentes cartesianas  $x, y$  e  $z$ , que são funções do tempo, temos

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{11.26}$$

Diferenciando duas vezes, obtemos

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \tag{11.27}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} \tag{11.28}$$

nas quais  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  e  $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$  representam, respectivamente, a primeira e a segunda derivadas de  $x, y$  e  $z$  em relação a  $t$ . Das equações (11.27) e (11.28) podemos concluir que as componentes escalares da velocidade e da aceleração são,

$$v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad v_z = \dot{z} \tag{11.29}$$

$$a_x = \ddot{x} \quad a_y = \ddot{y} \quad a_z = \ddot{z} \tag{11.30}$$

Um valor positivo para  $v_x$  significa que a componente vectorial  $\mathbf{v}_x$  está dirigida para a direita, e um valor negativo indica que está direccionada para a esquerda. O sentido de cada uma das outras componentes vectoriais pode ser determinado pelo sinal da componente escalar correspondente. Quando for necessário, podemos determinar as intensidades, as direcções e os sentidos da velocidade e da aceleração através das suas componentes escalares recorrendo aos métodos apresentados nas Secs. 2.7 e 2.12.

A utilização de componentes cartesianas para determinar a posição, a velocidade e a aceleração de uma partícula torna-se particularmente efectiva quando a componente  $a_x$  da aceleração depende apenas de  $t$ , de  $x$  e/ou de  $v_x$ ,

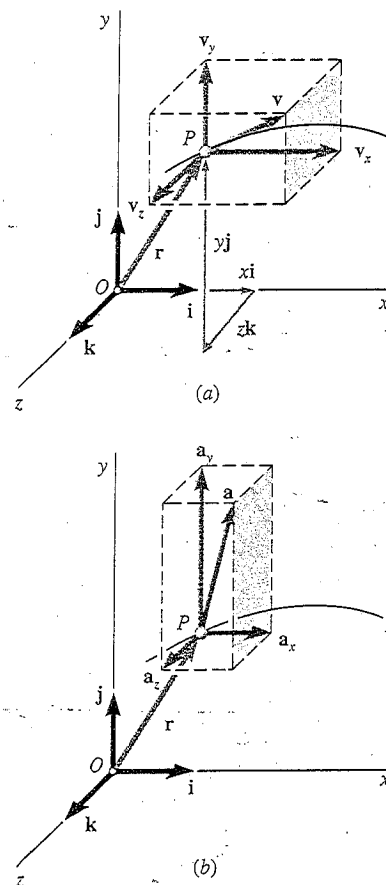


Fig. 11.18

e quando, do mesmo modo,  $a_y$  depende apenas de  $t$ , de  $y$  e/ou de  $v_y$ , e  $a_z$  apenas de  $t$ , de  $z$  e/ou de  $v_z$ . As equações (11.30) bem como as Eqs. (11.29) podem ser integradas independentemente umas das outras. Quer isto dizer que o movimento da partícula se considera separadamente, para qualquer uma das direcções  $x$ ,  $y$  ou  $z$ .

Seja, por exemplo, o caso do *movimento de um projectil*, para o qual a resistência do ar se pode desprezar; pode verificar-se (Sec. 12.5) que as componentes da aceleração são expressas por:

$$a_x = \ddot{x} = 0 \quad a_y = \ddot{y} = -g \quad a_z = \ddot{z} = 0$$

Se definirmos a posição de um canhão através das coordenadas  $x_0$ ,  $y_0$  e  $z_0$ , e as condições de velocidade inicial  $v_0$  do projectil (bala) por  $(v_x)_0$ ,  $(v_y)_0$  e  $(v_z)_0$ , a integração dupla em  $t$  permite obter

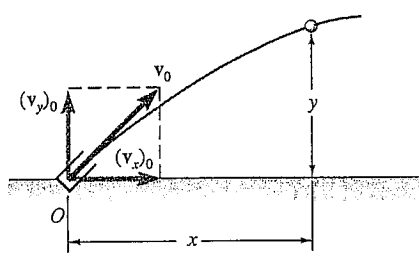
$$\begin{aligned} v_x = \dot{x} &= (v_x)_0 & v_y = \dot{y} &= (v_y)_0 - gt & v_z = \dot{z} &= (v_z)_0 \\ x &= x_0 + (v_x)_0 t & y &= y_0 + (v_y)_0 t - \frac{1}{2} gt^2 & z &= z_0 + (v_z)_0 t \end{aligned}$$

Se o projectil for arremessado da origem  $O$  e ao longo do plano  $xy$ , temos como condições iniciais  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$  e  $(v_z)_0 = 0$  resultando nas seguintes equações do movimento

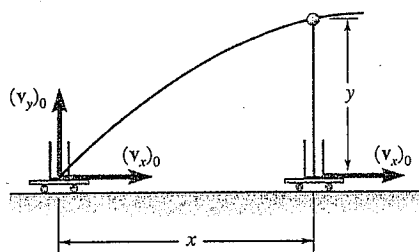
$$\begin{aligned} v_x &= (v_x)_0 & v_y &= (v_y)_0 - gt & v_z &= 0 \\ x &= (v_x)_0 t & y &= (v_y)_0 t - \frac{1}{2} gt^2 & z &= 0 \end{aligned}$$

Estas equações mostram que o movimento do projectil permanece no plano  $xy$ , sendo uniforme na direcção horizontal, e uniformemente acelerado na direcção vertical. Podemos, por isso, decompor o movimento do projectil em dois movimentos rectilíneos independentes, que podem facilmente ser visualizados através da Fig. 11.19 – o projectil é disparado, verticalmente com velocidade inicial  $(v_y)_0$ , de uma plataforma que se desloca, em movimento uniforme, com velocidade  $(v_x)_0$ . Em qualquer instante, a coordenada  $x$  do projectil é igual à distância percorrida pela plataforma, enquanto a coordenada  $y$  é calculada como se o projectil se movesse apenas na direcção vertical.

Podemos observar que, em qualquer instante, as equações que definem as coordenadas  $x$  e  $y$  do projectil são as equações paramétricas de uma parábola. Então, a trajectória de um projectil é *parabólica*. Contudo, não é este o caso sempre que se toma em consideração a resistência do ar ou a variação da aceleração gravítica com a altitude.



(a) Movimento de um projectil



(b) Movimentos rectilíneos equivalentes

Fig. 11.19

## 11.12. MOVIMENTO EM RELAÇÃO A UM SISTEMA EM TRANSLAÇÃO

Na secção anterior, recorremos apenas a um sistema de referência para descrever o movimento de uma partícula. Na maioria dos casos, esse sistema encontrava-se rigidamente ligado à Terra e era considerado fixo. Existem, porém, situações onde se torna conveniente utilizar, simultaneamente, vários sistemas de referência. Se, por exemplo, um dos sistemas estiver ligado à Terra, designar-se-á por *sistema de referência fixo*, enquanto os restantes serão denominados de *sistemas de referência móveis*. Note-se, contudo, que a escolha do sistema fixo é puramente arbitrária. Qualquer sistema pode ser designado por "fixo", enquanto todos os restantes, não ligados rigidamente a este, serão os sistemas "móveis".

Consideremos duas partículas  $A$  e  $B$  que se deslocam no espaço (Fig. 11.20); os vectores  $\mathbf{r}_A$  e  $\mathbf{r}_B$  definem, em qualquer instante, a sua posição relativamente ao sistema de referência fixo  $Oxyz$ . Seja agora um sistema de eixos  $x'y'z'$ , centrado em  $A$  e paralelo aos eixos  $x, y, z$ . Enquanto a origem  $A$  se move, os eixos mantêm a sua orientação; diz-se então que o sistema de eixos  $Ax'y'z'$  está em *translação* relativamente a  $Oxyz$ . O vector  $\mathbf{r}_{B/A}$ , que liga  $A$  a  $B$ , define a *posição de  $B$  relativamente ao sistema móvel  $Ax'y'z'$*  (ou, resumidamente, a *posição de  $B$  relativamente a  $A$* ).

Como se pode verificar na Fig. 11.20, o vector de posição da partícula  $B$  é a soma do vector de posição da partícula  $A$  com o vector que define a posição de  $B$  relativamente a  $A$ ; podemos então escrever,

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \quad (11.31)$$

Derivando (11.31) em relação a  $t$ , considerando o referencial fixo, e usando pontos para representar as derivadas em ordem ao tempo, temos

$$\dot{\mathbf{r}}_B = \dot{\mathbf{r}}_A + \dot{\mathbf{r}}_{B/A} \quad (11.32)$$

As derivadas  $\dot{\mathbf{r}}_A$  e  $\dot{\mathbf{r}}_B$  representam, respectivamente, as velocidades  $\mathbf{v}_A$  e  $\mathbf{v}_B$  das partículas  $A$  e  $B$ . Uma vez que  $Ax'y'z'$  está em translação, a derivada  $\dot{\mathbf{r}}_{B/A}$  representa a taxa de variação do vector  $\mathbf{r}_{B/A}$  relativamente ao referencial móvel  $Ax'y'z'$  bem como relativamente ao referencial fixo (Sec. 11.10). Esta derivada define, assim, a *velocidade  $\mathbf{v}_{B/A}$  de  $B$  relativamente ao sistema móvel  $Ax'y'z'$*  (ou, resumidamente, a *velocidade  $\mathbf{v}_{B/A}$  de  $B$  em relação a  $A$* ). Podemos escrever

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \quad (11.33)$$

Diferenciando a Eq. (11.33) em ordem a  $t$ , e usando a derivada  $\dot{\mathbf{v}}_{B/A}$  para definir a *aceleração  $\mathbf{a}_{B/A}$  de  $B$  relativamente ao sistema móvel  $Ax'y'z'$*  (ou resumidamente, a *aceleração  $\mathbf{a}_{B/A}$  de  $B$  em relação a  $A$* ), escrevemos

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \quad (11.34)$$

O movimento de  $B$  em relação ao sistema fixo  $Oxyz$  designa-se por *movimento absoluto de  $B$* . As equações obtidas nesta secção mostram que o *movimento absoluto de  $B$  pode ser obtido pela combinação do movimento de  $A$  com o movimento de  $B$  em relação ao sistema móvel ligado a  $A$* . Por exemplo, a Eq. (11.33) mostra que a velocidade absoluta  $\mathbf{v}_B$  da partícula  $B$  pode obter-se pela adição vectorial da velocidade de  $A$  com a velocidade de  $B$  em relação ao sistema móvel  $Ax'y'z'$ . Significado semelhante tem a Eq. (11.34), agora aplicável à aceleração†. Contudo, devemos notar que o *referencial  $Ax'y'z'$  está animado de movimento de translação*, ou seja, mantém a sua orientação enquanto se move com  $A$ . Como veremos mais tarde (Sec. 15.14), utilizam-se outras expressões quando o referencial está animado de movimento de rotação.

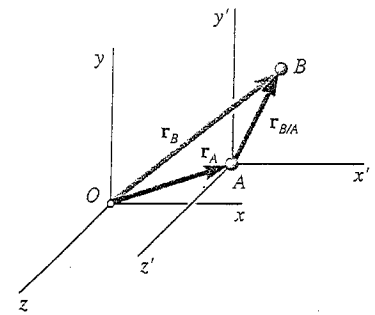
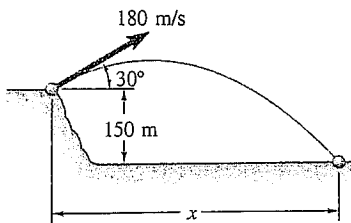


Fig. 11.20

† Note-se que o produto dos índices  $A$  e  $B/A$  utilizados no segundo membro das Eqs. (11.31) e (11.34) é igual ao índice  $B$  que figura no primeiro membro.

## PROBLEMA-TIPO 11.7



Um projectil é disparado do topo de uma ribanceira com 150 m de altura, com uma velocidade inicial de 180 m/s e fazendo um ângulo de  $30^\circ$  com a horizontal. Considerando que a resistência do ar se pode desprezar, calcule (a) a distância horizontal desde a arma até ao ponto onde o projectil toca o solo, (b) a altura máxima atingida pelo projectil.

### RESOLUÇÃO

Consideremos isoladamente os movimentos vertical e horizontal.

**Movimento vertical. Movimento uniformemente acelerado.** Se escolhermos a origem  $O$  do sistema de eixos no ponto de disparo, e o sentido positivo do eixo  $y$  para cima, temos

$$(v_y)_0 = (180 \text{ m/s}) \text{ sen } 30^\circ = +90 \text{ m/s}$$

$$a = -9,81 \text{ m/s}^2$$

Valores estes que, substituídos nas equações do movimento uniformemente acelerado, conduzem a

$$v_y = (v_y)_0 + a t \quad v_y = 90 - 9,81 t \quad (1)$$

$$y = (v_y)_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad y = 90 t - 4,9 t^2 \quad (2)$$

$$v_y^2 = (v_y)_0^2 + 2 a y \quad v_y^2 = 8100 - 19,62 y \quad (3)$$

**Movimento horizontal. Movimento uniforme.** Admitindo que o sentido positivo do eixo  $x$  é para a direita, temos

$$(v_x)_0 = (180 \text{ m/s}) \text{ cos } 30^\circ = +155,9 \text{ m/s}$$

Se substituirmos na equação do movimento uniforme, obtemos

$$x = (v_x)_0 t \quad x = 155,9 t \quad (4)$$

**a. Distância horizontal.** Quando o projectil atinge o solo, temos

$$y = -150 \text{ m}$$

Substituindo este valor na Eq. (2) para o movimento vertical, podemos escrever

$$-150 = 90 t - 4,9 t^2 \quad t^2 - 18,37 t - 30,6 = 0 \quad t = 19,91 \text{ s}$$

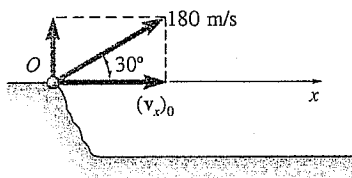
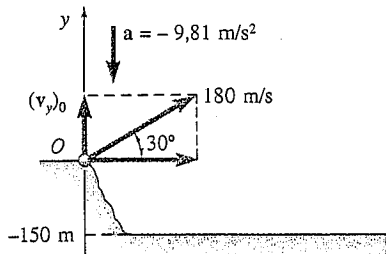
Neste instante, a Eq. (4) para o movimento horizontal pode escrever-se como

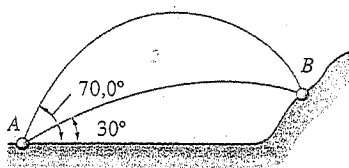
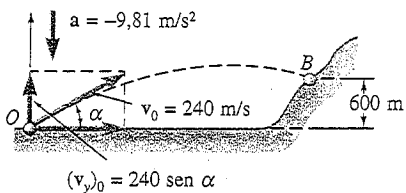
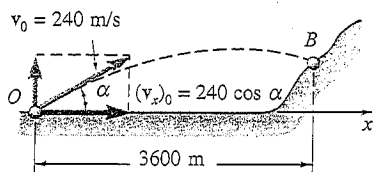
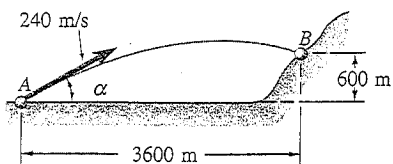
$$x = 155,9 (19,91) \text{ m} \quad x = 3100 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$

**b. Altura máxima.** Quando o projectil atinge a altura máxima, temos  $v_y = 0$ ; impondo esta condição na Eq.(3) para o movimento vertical, obtém-se

$$0 = 8100 - 19,62 y \quad y = 413 \text{ m}$$

$$\text{Máxima elevação acima do solo} = 150 + 413 = 563 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$





## PROBLEMA-TIPO 11.8

Um projectil é disparado com uma velocidade inicial de 240 m/s contra um alvo localizado 600 m acima da arma A e à distância horizontal de 3600 m. Admitindo que se pode desprezar a resistência do ar, determine o valor do ângulo de disparo.

### RESOLUÇÃO

Consideremos separadamente os movimentos vertical e horizontal.

**Movimento horizontal. Movimento uniforme.** Se escolhermos a origem  $O$  do sistema de eixos no ponto de disparo, temos

$$(v_x)_0 = 240 \cos \alpha$$

Se substituirmos na equação do movimento uniforme, obtemos

$$x = (v_x)_0 t \quad x = (240 \cos \alpha) t$$

O tempo necessário para que o projectil percorra a distância horizontal de 3600 m pode obter-se ao impormos  $x = 3600$  m.

$$3600 = (240 \cos \alpha) t$$

$$t = \frac{3600}{240 \cos \alpha} = \frac{15}{\cos \alpha}$$

**Movimento vertical. Movimento uniformemente acelerado.** Considerando o sentido positivo do eixo  $y$  para cima, temos

$$(v_y)_0 = 240 \sin \alpha \quad a = -9,81 \text{ m/s}^2$$

Substituindo na equação do movimento uniformemente acelerado, temos

$$y = (v_y)_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad y = (240 \sin \alpha) t - 4,90 t^2$$

**Projectil atinge o alvo.** Quando o projectil atinge o alvo, temos

$$x = 3600 \text{ m} \quad y = 600 \text{ m}$$

Substituindo o valor de  $y$ , e tendo em conta o valor de  $t$  encontrado acima, escrevemos

$$600 = 240 \sin \alpha \frac{15}{\cos \alpha} - 4,90 \left( \frac{15}{\cos \alpha} \right)^2$$

Dado que  $1/\cos^2 \alpha = \sec^2 \alpha = 1 + \text{tg}^2 \alpha$ , podemos escrever

$$600 = 240 (15) \text{tg} \alpha - 4,90(15^2)(1 + \text{tg}^2 \alpha) \\ 1103 \text{tg}^2 \alpha - 3600 \text{tg} \alpha + 1703 = 0$$

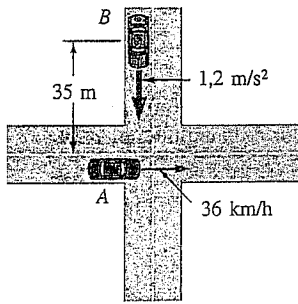
Resolvendo esta equação quadrática em  $\text{tg} \alpha$ , temos

$$\text{tg} \alpha = 0,574 \quad \text{e} \quad \text{tg} \alpha = 2,69 \\ \alpha = 30^\circ$$

$$\alpha = 70,0^\circ \quad \blacktriangleleft$$

O alvo é atingido para quaisquer um destes ângulos de disparo (ver figura).

## PROBLEMA-TIPO 11.9



O automóvel A desloca-se para leste com uma velocidade constante de 36 km/h. Quando chega ao cruzamento mostrado, um outro automóvel, B, parte do repouso, 35 m a norte do cruzamento, e move-se para sul com uma aceleração constante de 1,2 m/s<sup>2</sup>. Determine a posição, a velocidade e a aceleração de B relativamente a A, 5s depois de A passar pelo cruzamento.

### RESOLUÇÃO

Escolhemos a origem dos eixos  $x$  e  $y$ , na intersecção das duas estradas e com os sentidos positivos para leste e norte, respectivamente.

**Movimento do automóvel A.** A velocidade é expressa em m/s

$$v_A = \left(36 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) \left(\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}}\right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}\right) = 10 \text{ m/s}$$

Uma vez que o movimento de A é uniforme, escrevemos, para qualquer instante  $t$

$$\begin{aligned} a_A &= 0 \\ v_A &= +10 \text{ m/s} \\ x_A &= (x_A)_0 + v_A t = 0 + 10t \end{aligned}$$

Para o instante  $t = 5$  s, temos

$$\begin{aligned} a_A &= 0 & a_A &= 0 \\ v_A &= +10 \text{ m/s} & v_A &= 10 \text{ m/s} \rightarrow \\ x_A &= +(10 \text{ m/s})(5 \text{ s}) = +50 \text{ m} & r_A &= 50 \text{ m} \rightarrow \end{aligned}$$

**Movimento do automóvel B.** De acordo com os dados, verificamos que este movimento é uniformemente acelerado; por isso, escrevemos,

$$\begin{aligned} a_B &= -1,2 \text{ m/s}^2 \\ v_B &= (v_B)_0 t + a_B t = 0 - 1,2 t \\ y_B &= (y_B)_0 + (v_B)_0 t + \frac{1}{2} a_B t^2 = 35 + 0 - \frac{1}{2} (1,2) t^2 \end{aligned}$$

Para o instante  $t = 5$  s, temos

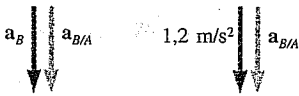
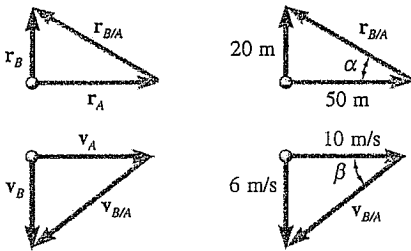
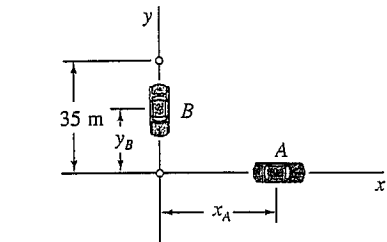
$$\begin{aligned} a_B &= -1,2 \text{ m/s}^2 & a_B &= 1,2 \text{ m/s}^2 \downarrow \\ v_B &= -(1,2 \text{ m/s}^2)(5 \text{ s}) = -6 \text{ m/s} & v_B &= 6 \text{ m/s} \downarrow \\ y_B &= 35 \text{ m} - \frac{1}{2} (1,2 \text{ m/s}^2) (5 \text{ s})^2 = +20 \text{ m} & r_B &= 20 \text{ m} \uparrow \end{aligned}$$

**Movimento de B relativamente a A.** Traçando o triângulo correspondente à equação vectorial  $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$  obtemos o módulo e a direcção do vector de posição de B relativamente a A

$$r_{B/A} = 53,9 \text{ m} \quad \alpha = 21,8^\circ \quad r_{B/A} = 53,9 \text{ m} \nearrow 21,8^\circ \blacktriangleleft$$

De modo análogo, podemos encontrar a velocidade e a aceleração de B relativamente a A

$$\begin{aligned} v_{B/A} &= 11,66 \text{ m/s} & v_B &= v_A + v_{B/A} & v_{B/A} &= 11,66 \text{ m/s} \nearrow 31^\circ \blacktriangleleft \\ a_B &= a_A + a_{B/A} & \beta &= 31^\circ & a_{B/A} &= 1,2 \text{ m/s}^2 \downarrow \blacktriangleleft \end{aligned}$$



# METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Os problemas desta lição dizem respeito aos *movimentos bi e tridimensional* de uma partícula. As interpretações física da velocidade e da aceleração são as mesmas que foram feitas nas primeiras lições deste capítulo, mas convém recordar que estas grandezas são vectoriais. Devemos ainda compreender, da experiência que adquirimos com vectores na estática, que é vantajoso exprimir os vectores de posição, velocidade e aceleração através das suas componentes cartesianas [Eqs. (11.27) e (11.28)]. Além disso, é importante recordar que, dados dois vectores,  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , o produto interno  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$  se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  forem perpendiculares entre si, enquanto que o produto externo  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$  quando  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são paralelos.

**A. Análise do movimento de um projectil.** A maioria dos problemas que se seguem trata do movimento bidimensional de um projectil, e na sua resolução considera-se desprezável a resistência oferecida pelo ar. Na Sec. 11.11, desenvolvemos as equações que descrevem este tipo de movimento; aí observámos que a componente horizontal da velocidade permanece constante (movimento uniforme), enquanto na direcção vertical se mantém constante a aceleração (movimento uniformemente acelerado). Foi possível considerar separadamente os movimentos horizontal e vertical da partícula. Sendo o projectil disparado da origem, podemos escrever as duas equações

$$x = (v_x)_0 t \qquad y = (v_y)_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

1. *Se a velocidade inicial e o ângulo de disparo forem conhecidos*, o valor de  $y$  que corresponde a um dado valor de  $x$  (ou o valor de  $x$  para um dado valor de  $y$ ) pode ser obtido pela resolução de uma das duas equações em ordem a  $t$ , e, depois substituindo  $t$  na outra equação [Prob.-Tipo 11.7].

2. *Se a velocidade inicial e as coordenadas de um ponto da trajectória forem conhecidos*, e se pretendémos *determinar o ângulo de disparo*  $\alpha$ , devemos iniciar a resolução do problema exprimindo as componentes  $(v_x)_0$  e  $(v_y)_0$ , da velocidade inicial, em função do ângulo  $\alpha$ . Estas expressões, bem como os valores de  $x$  e  $y$ , são então substituídas nas equações apresentadas acima. Por último, resolvemos a primeira equação em ordem a  $t$  e substituímos o valor na segunda equação, de modo a obter uma equação trigonométrica em  $\alpha$ , que depois se pode resolver em ordem a esta incógnita [Prob.-Tipo 11.7].

(continua)



**B. Resolução de problemas com movimento relativo a duas dimensões.** Na Sec. 11.12 vimos que o movimento absoluto de uma partícula  $B$  se pode obter pela combinação do movimento de uma partícula  $A$  com o *movimento de  $B$  relativamente* ao referencial ligado a  $A$  que está em *translação*. A velocidade e a aceleração de  $B$  podem ser expressos como se mostra nas Eqs. (11.33) e (11.34), respectivamente.

**1. Visualização do movimento de  $B$  em relação a  $A$ .** Imaginemos que nos encontramos ligados à partícula  $A$  à medida que observamos o movimento da partícula  $B$ . Por exemplo, no Prob.-Tipo 11.9, para um passageiro do automóvel  $A$ , o automóvel  $B$  parece deslocar-se na direcção sudoeste (o movimento para *sul* é óbvio, enquanto para *oeste* é devido ao facto de o automóvel  $A$  se estar a mover para leste – o automóvel  $B$  parece assim, mover-se para oeste). Note-se que esta conclusão é consistente com a direcção de  $\mathbf{v}_{B/A}$ .

**2. Resolução de um problema com movimento relativo.** Primeiro devemos escrever as Eqs. (11.31), (11.33) e (11.34), que relacionam os movimentos das partículas  $A$  e  $B$ . Podemos depois utilizar um dos seguintes métodos:

**a. Construção do triângulo de vectores,** com a correspondente solução para o vector de posição, velocidade e aceleração [Prob.-Tipo 11.9].

**b. Definição dos vectores nas componentes cartesianas,** com a correspondente resolução dos dois conjuntos de equações escalares assim obtidas. Se escolhermos esta via, devemos ter o cuidado de seleccionar o mesmo sentido positivo para o deslocamento, a velocidade e a aceleração de cada partícula.

# Problemas

*Nota:* Despreze a resistência do ar em problemas que envolvem projectéis

**11.89** O movimento de uma partícula é definido pelas equações  $x = 4t^4 - 6t$  e  $y = 6t^3 - 2t^2$ , nas quais  $x$  e  $y$  são expressos em milímetros, e  $t$ , em segundos. Determine a velocidade e a aceleração quando (a)  $t = 1$  s, (b)  $t = 2$  s, (c)  $t = 4$  s.

**11.90** O movimento de uma partícula é definido pelas equações  $x = 2 \cos \pi t$  e  $y = 1 - 4 \cos 2\pi t$ , nas quais  $x$  e  $y$  são expressos em metros, e  $t$ , em segundos. Mostre que a trajectória da partícula é uma parte da parábola mostrada e determine a velocidade e a aceleração quando (a)  $t = 0$ , (b)  $t = 1,5$  s.

**11.91** O movimento de uma partícula é definido pelas equações  $x = [(t-2)^3/12] + t^2$  e  $y = (t^3/12) - (t-1)^2/2$ , nas quais  $x$  e  $y$  são expressos em metros, e  $t$ , em segundos. Determine (a) a intensidade da menor velocidade alcançada pela partícula, (b) os correspondentes instante, posição e direcção da velocidade.

**11.92** O movimento de uma partícula é definido pelas equações  $x = 4t - 2 \sin t$  e  $y = 4 - \cos t$ , nas quais  $x$  e  $y$  são expressos em metros, e  $t$ , em segundos. Esboce a trajectória da partícula, e determine (a) as intensidades da menor e da maior velocidades alcançadas pela partícula, (b) os correspondentes instantes, posições e direcções das velocidades.

**11.93** O movimento de uma partícula é definido pelo vector de posição  $\mathbf{r} = A(\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + A(\sin t - t \cos t)\mathbf{j}$ , no qual  $t$  é expresso em segundos. Determine os valores de  $t$  para os quais os vectores de posição e de aceleração são (a) perpendiculares, (b) paralelos.

**11.94** O movimento vibratório amortecido de uma partícula é definido pelo vector de posição  $\mathbf{r} = x_1[1 - 1/(t+1)]\mathbf{i} + (y_1 e^{-\pi t/2} \cos 2\pi t)\mathbf{j}$ , no qual  $t$  é expresso em segundos. Para  $x_1 = 30$  mm e  $y_1 = 20$  mm, determine a posição, a velocidade e a aceleração da partícula quando (a)  $t = 0$ , (b)  $t = 1,5$  s.

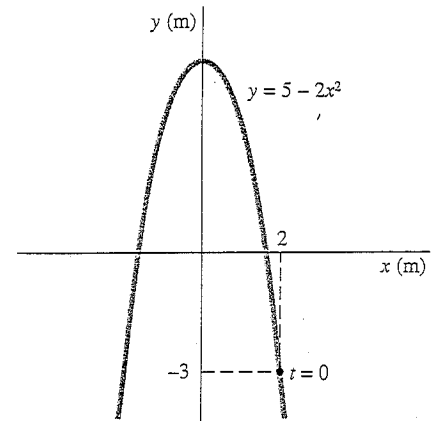


Fig. P11.90

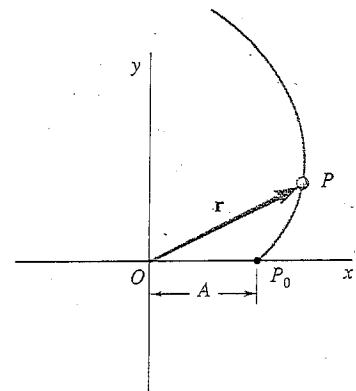


Fig. P11.93

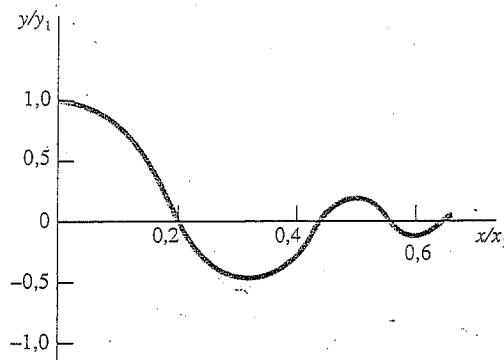


Fig. P11.94

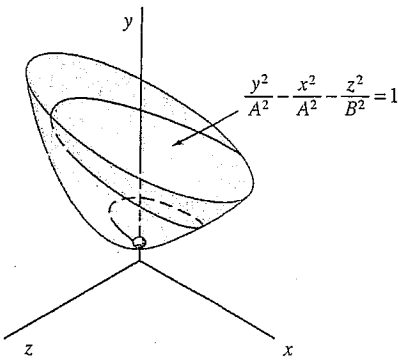


Fig. P11.96

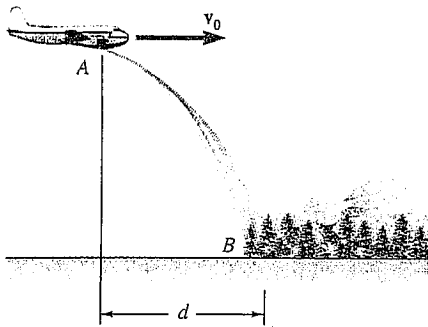


Fig. P11.97

11.95 O movimento tridimensional de uma partícula é definido pelo vector de posição  $r = (Rt \cos \omega_n t)\mathbf{i} + ct\mathbf{j} + (Rt \sin \omega_n t)\mathbf{k}$ . Determine o módulo da velocidade e da aceleração da partícula. (A trajectória descrita pela partícula é uma hélice cónica).

\*11.96 O movimento tridimensional de uma partícula é definido pelo vector de posição  $r = (At \cos t)\mathbf{i} + A(t^2 + 1)^{1/2}\mathbf{j} + (Bt \sin t)\mathbf{k}$ , onde  $r$  e  $t$  são expressos em metros e em segundos, respectivamente. Mostre que a curva descrita pela partícula se situa numa hiperbolóide  $(y/A)^2 - (x/A)^2 - (z/B)^2 = 1$ . Para  $A = 3$  e  $B = 1$ , determine (a) os módulos da velocidade e da aceleração quando  $t = 0$ , (b) o menor valor de  $t$ , diferente de zero, para o qual os vectores de posição e de velocidade são perpendiculares entre si.

11.97 Um avião para combate a incêndios está preparado para lançar água, enquanto voa a uma velocidade de 315 km/h e a uma altitude de 80 m. Determine a distância  $d$  para a qual o piloto deve lançar a água de modo a atingir as chamas em B.

11.98 Três crianças atiram, entre si, bolas de neve. A criança A lança uma bola com a velocidade horizontal  $v_0$ . Se a bola passar pela cabeça da criança B e atingir a criança C, determine (a) o valor de  $v_0$ , (b) a distância  $d$ .

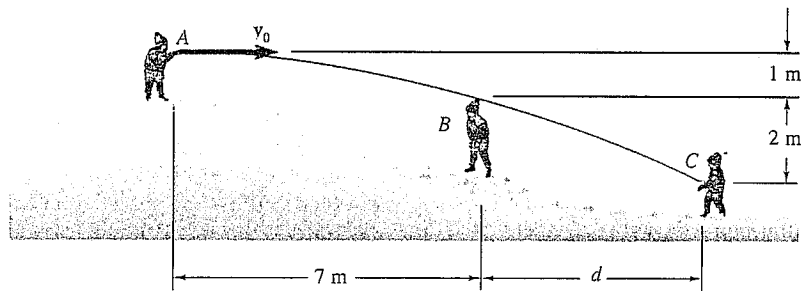


Fig. P11.98

11.99 Enquanto faz a distribuição, uma rapariga atira os jornais com uma velocidade  $v_0$ . Determine a gama de valores de  $v_0$  que permitam aos jornais cair entre os pontos B e C.

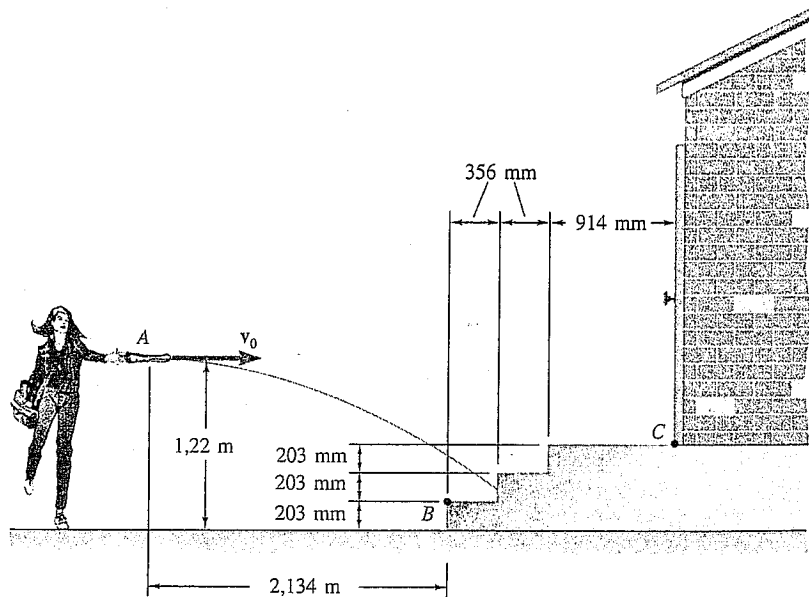


Fig. P11.99

11.100 Uma máquina lança bolas de baseball com uma velocidade horizontal  $v_0$ . Sabendo que a altura  $h$  varia entre 787 mm e 1067 mm, determine, (a) a gama de valores de  $v_0$ , (b) os valores de  $a$  correspondentes às alturas  $h = 787$  mm e  $h = 1067$  mm.

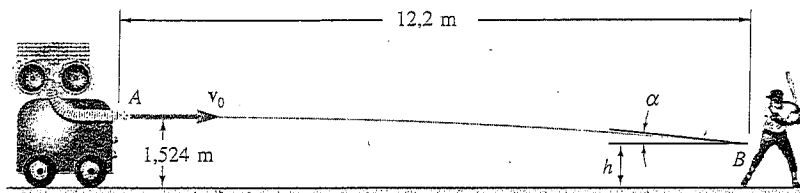


Fig. P11.100

11.101 Um jogador de vôlei executa o serviço do jogo imprimindo à bola uma velocidade  $v_0$ , cujo módulo é 13,4 m/s e faz um ângulo de  $20^\circ$  com a horizontal. Determine (a) se a bola passa a rede, (b) a que distância da rede a bola toca o solo.

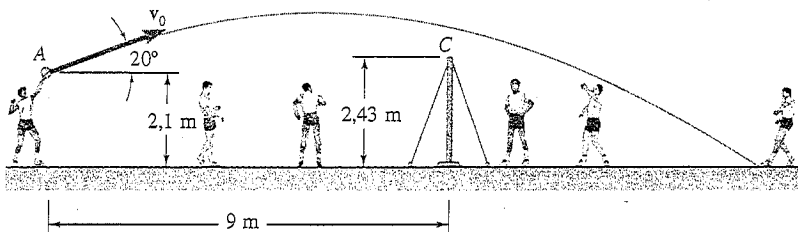


Fig. P11.101

11.102 Verte-se leite para um copo com a altura de 140 mm e diâmetro interior de 66 mm. Se a velocidade inicial do leite for 1,2 m/s e fizer um ângulo de  $40^\circ$  com a horizontal, determine a gama de valores da altura para aos quais o leite entra no copo.

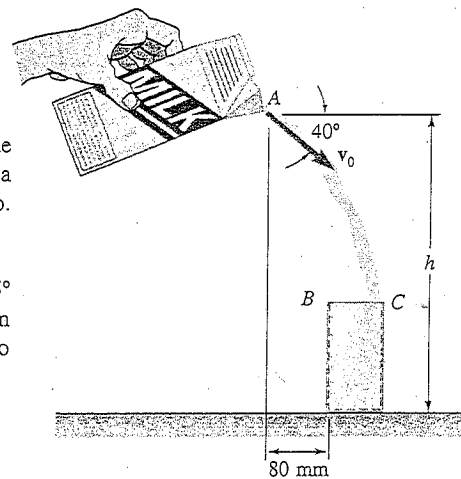


Fig. P11.102

11.103 Um jogador de golfe dá uma tacada na bola, fazendo um ângulo de  $25^\circ$  com a horizontal e com uma velocidade inicial de 48,8 m/s. Sabendo que o campo tem um declive de  $5^\circ$ , determine a distância  $d$  entre o jogador e o ponto onde se dá o primeiro impacto da bola com o solo.

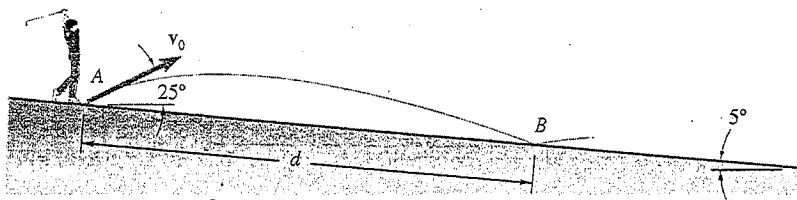


Fig. P11.103

11.104 A água escorre de uma conduta com uma velocidade de  $0,76 \text{ m/s}$  e com um ângulo de  $15^\circ$  com a horizontal. Determine a gama de valores da distância  $d$  para os quais a água entra no reservatório BC.

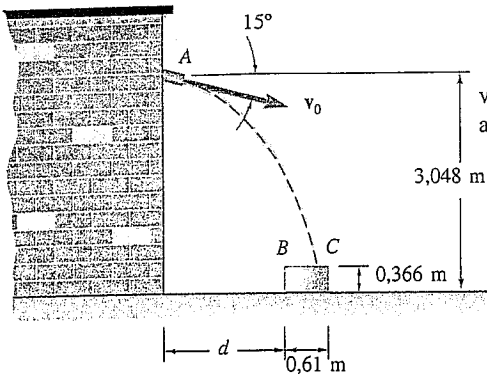


Fig. P11.104

11.105 O proprietário de uma casa utiliza um lança-neve para desimpedir a sua via de acesso. Sabendo que a neve é descarregada com um ângulo de cerca de  $40^\circ$  com a horizontal, determine a velocidade inicial  $v_0$  da neve.

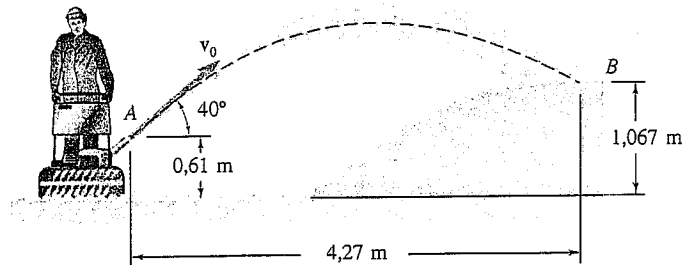


Fig. P11.105

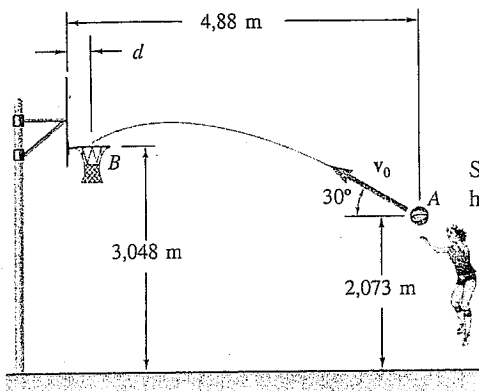


Fig. P11.106

11.106 Uma jogadora de basquete lança a bola quando está a  $4,88 \text{ m}$  do cesto. Sabendo que a bola possui uma velocidade inicial  $v_0$  e faz um ângulo de  $30^\circ$  com a horizontal, determine o valor de  $v_0$  quando  $d$  é igual a (a)  $228,6 \text{ mm}$ , (b)  $431,8 \text{ mm}$ .

11.107 Um grupo de crianças atira bolas contra um pneu que tem um diâmetro interior de  $0,72 \text{ m}$  e que se encontra suspenso numa árvore. Uma das crianças atira uma bola com uma velocidade inicial  $v_0$  e com um ângulo de  $3^\circ$  com a horizontal. Determine a gama de valores  $v_0$  para os quais a bola atravessa o pneu.

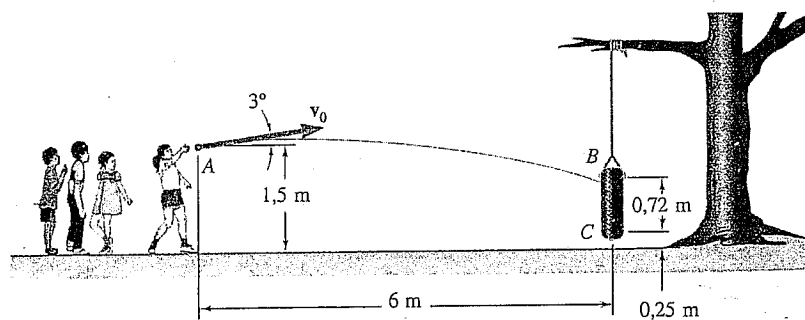


Fig. P11.107

**11.108** Um tubo descarrega água para refrigeração no ponto *A*, com uma velocidade inicial  $v_0$  e fazendo um ângulo de  $6^\circ$  com a horizontal, sobre uma mó rectificadora com 350 mm de diâmetro. Determine a gama de valores  $v_0$  para os quais a água atinge a mó entre os pontos *B* e *C*.

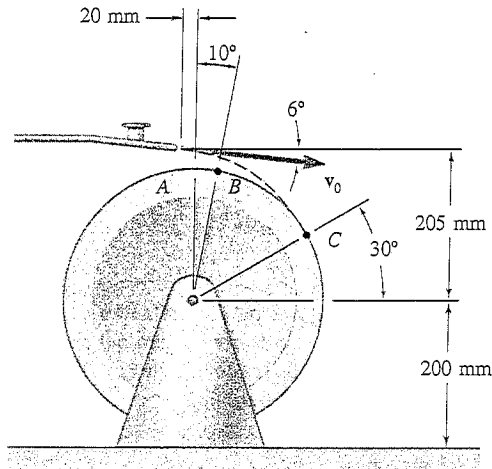


Fig. P11.108

**11.109** Enquanto segura uma das extremidades, um operário lança um rolo de corda sobre o galho mais baixo de uma árvore. Se ele proceder ao lançamento com uma velocidade inicial  $v_0$  e fazendo um ângulo de  $65^\circ$  com a horizontal, determine a gama de valores  $v_0$  para os quais a corda passará por cima do galho mais baixo.

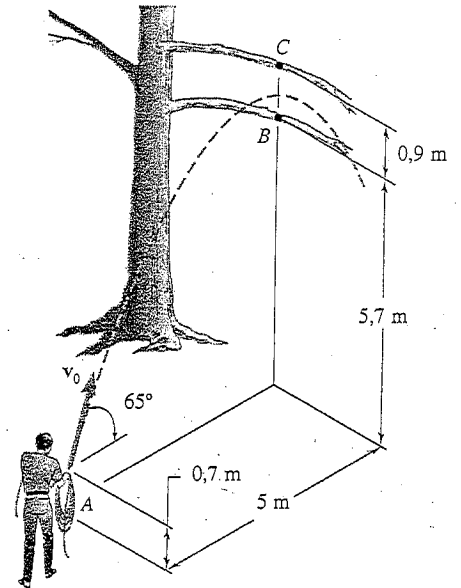


Fig. P11.109

**11.110** Uma bola cai sobre o degrau de uma escada e ressalta com uma velocidade  $v_0$  que faz um ângulo de  $15^\circ$  com a vertical. Determine o valor de  $v_0$  sabendo que imediatamente antes de a bola tocar o ponto *B* a sua velocidade  $v_B$  faz um ângulo de  $12^\circ$  com a vertical.

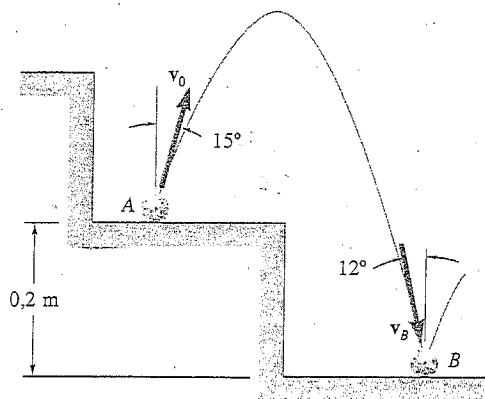


Fig. P11.110

**11.111** Um modelo de foguete é lançado a partir do ponto *A* com uma velocidade  $v_0$  de 85,34 m/s. Se o pára-quedas do foguete não for accionado e o foguete aterrar 103,6 m distante de *A*, determine (a) o ângulo  $\alpha$  que  $v_0$  faz com a vertical, (b) a altura máxima atingida pelo foguete, (c) a duração do voo.

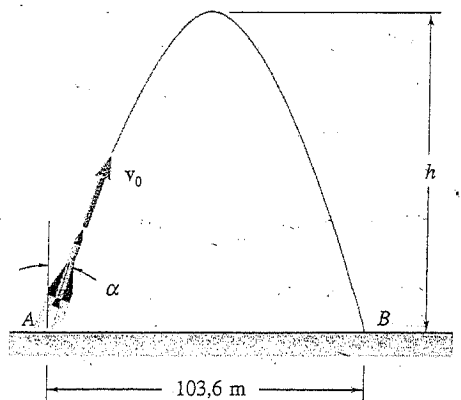


Fig. P11.111

11.112 A velocidade inicial  $v_0$  de uma bola de hóquei é de 168,9 km/h. Determine (a) o maior valor (menor que  $45^\circ$ ) do ângulo  $\alpha$  para o qual a bola entra na baliza, (b) o tempo necessário para a bola atingir a baliza.

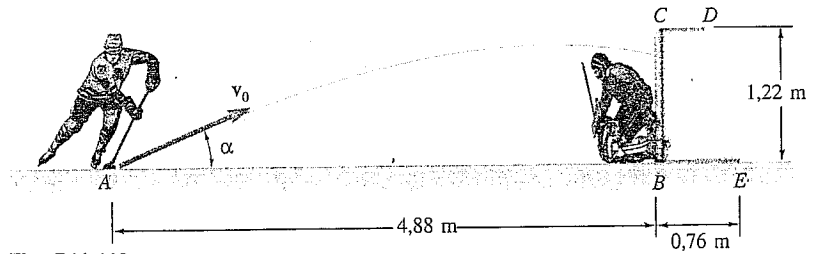


Fig. P11.112

11.113 Um jogador responsável pelo lançamento de bolas atira uma bola com uma velocidade inicial  $v_0$  de 72 km/h fazendo um ângulo  $\alpha$  com a horizontal. Se a altura da bola no ponto B for de 0,68 m, determine (a) o ângulo  $\alpha$ , (b) o ângulo  $\theta$  que a velocidade da bola forma com a horizontal no ponto B.

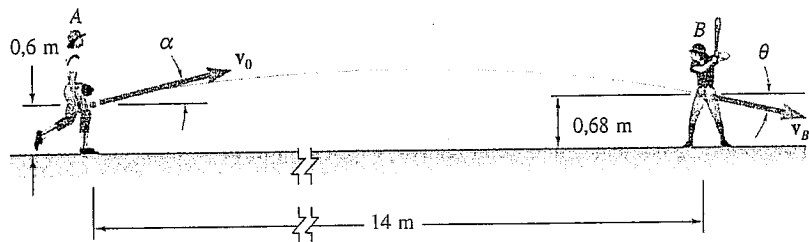


Fig. P11.113

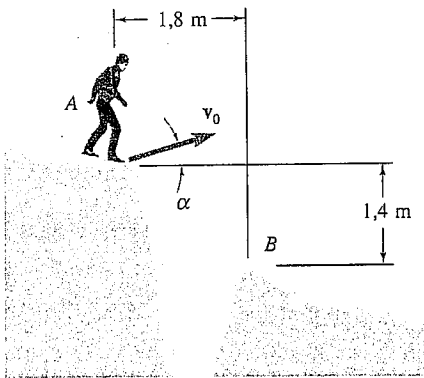


Fig. P11.114

\*11.114 Um alpinista tenciona saltar de A para B por cima de uma fenda. Determine o menor valor da velocidade inicial  $v_0$  e o correspondente ângulo  $\alpha$ , de modo que consiga alcançar o ponto B.

11.115 Um aspersor oscilante de um jardim lança água com uma velocidade inicial  $v_0$  de 8 m/s, de maneira a regar uma zona de cultura de vegetais. Determine a distância  $d$ , até ao ponto B mais afastado que ainda pode ser regado, e o correspondente ângulo  $\alpha$  quando (a) os vegetais estão na fase inicial de crescimento, (b) a altura  $h$  é de 1,8 m.

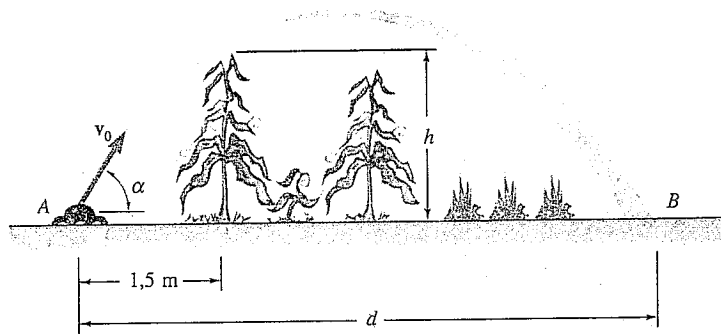


Fig. P11.115

11.116 Um operário utiliza uma mangueira com água sob alta pressão para limpar um tubo de esgoto. Se a água for lançada com uma velocidade inicial  $v_0$  de 11,5 m/s, determine (a) a distância  $d$  até ao ponto  $B$  mais afastado, situado no cimo do tubo, que o operário consegue lavar a partir da posição  $A$ , (b) o correspondente ângulo  $\alpha$ .

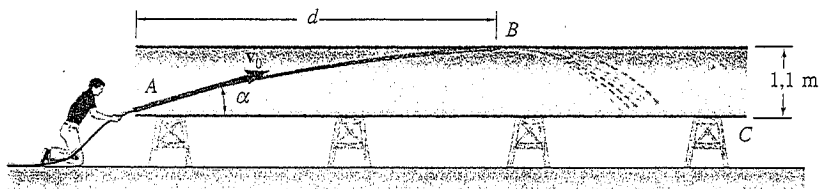


Fig. P11.116

11.117 Um bloco deslizante  $A$  move-se para baixo com uma velocidade de 0,5 m/s, enquanto a velocidade da porção de correia entre as polias  $C$  e  $D$  relativamente a  $A$  é de  $v_{CD/A} = 2$  m/s  $\nearrow \theta$ . Determine a velocidade da porção  $CD$  da correia quando (a)  $\theta = 45^\circ$  (b)  $\theta = 60^\circ$ .

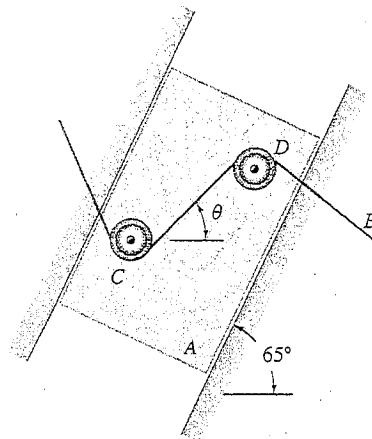


Fig. P11.117

11.118 As velocidades dos esquiadores  $A$  e  $B$  estão indicadas na figura. Determine a velocidade de  $A$  relativamente a  $B$ .

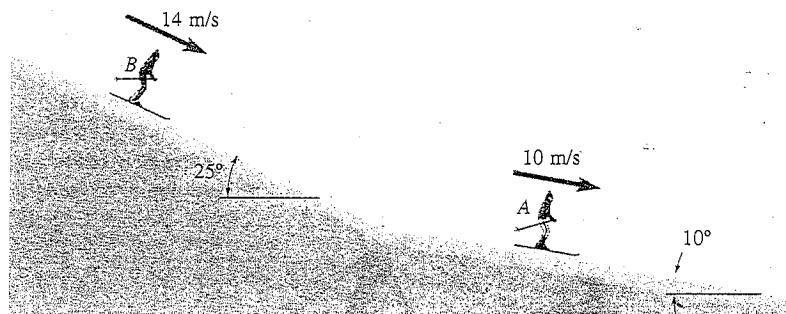


Fig. P11.118

11.119 Um radar colocado na costa indica que o barco deixa o cais com uma velocidade  $v = 9,8$  nós  $\nearrow 70^\circ$ , enquanto os instrumentos a bordo do barco indicam 10 nós e uma direcção de  $30^\circ$  para sudoeste relativamente ao rio. Determine a velocidade do rio.

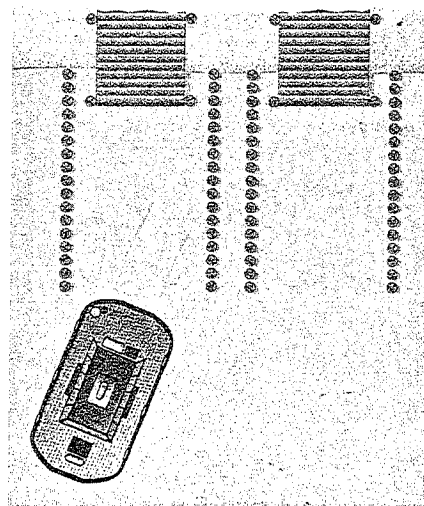


Fig. P11.119



11.120 Os aviões *A* e *B* voam à mesma altitude quando localizam o centro do furacão *C*. A velocidade de *C* relativamente a *A* é  $v_{C/A} = 378 \text{ km/h}$   $\nearrow 75^\circ$ , e a velocidade de *C* relativamente a *B* é  $v_{C/B} = 418 \text{ km/h}$   $\searrow 40^\circ$ . Determine (a) a velocidade de *B* relativamente a *A*, (b) a velocidade de *A* se o radar em terra indicar que o furacão se move com uma velocidade de  $38,6 \text{ km/h}$  para norte, (c) a alteração da posição de *C* relativamente a *B* durante um intervalo de 15 minutos.

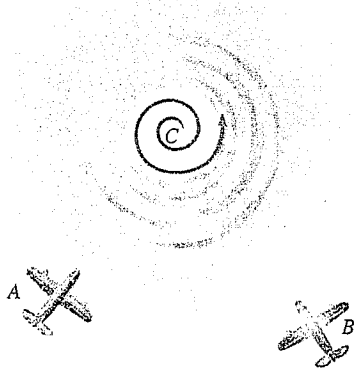


Fig. P11.120

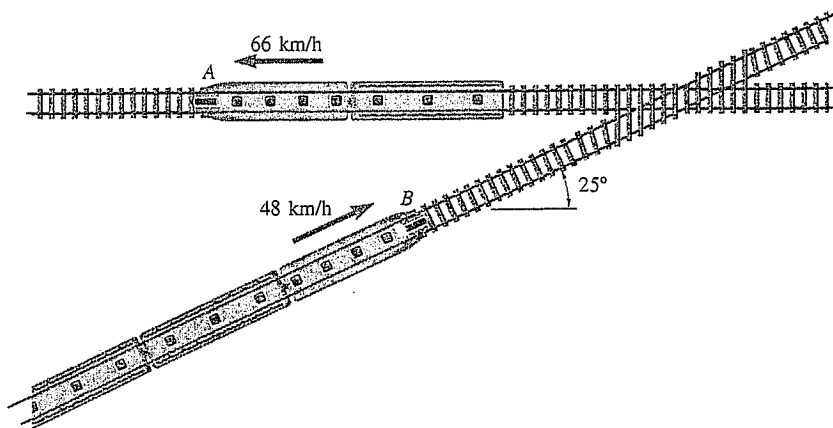


Fig. P11.121

11.122 Sabendo que a velocidade do bloco *B* relativamente a *A*, é  $v_{B/A} = 5,6 \text{ m/s}$   $\nearrow 70^\circ$ , determine as velocidades de *A* e *B*.

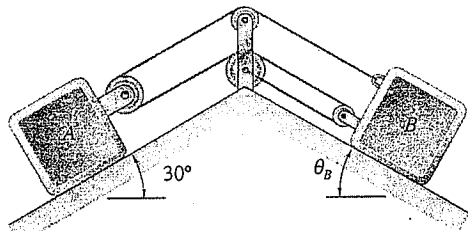


Fig. P11.122

11.123 Sabendo que no instante mostrado o bloco *A* tem uma velocidade de  $8 \text{ mm/s}$  e uma aceleração de  $6 \text{ mm/s}^2$ , ambas dirigidas para baixo no plano, determine (a) a velocidade do bloco *B*, (b) a aceleração do bloco *B*.

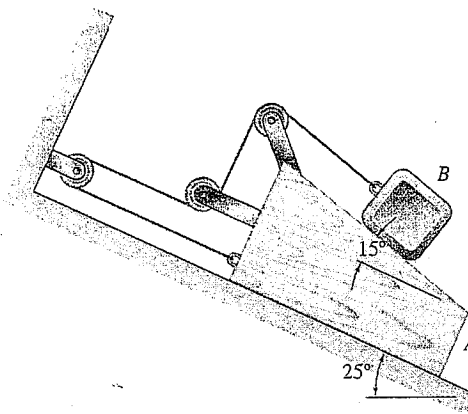


Fig. P11.123

11.124 Um rolete  $P$  move-se ao longo de uma ranhura que foi maquinada no bloco  $A$  como é mostrado, com velocidade constante de 200 mm/s e no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. Sabendo que o bloco se desloca para cima no plano com uma velocidade constante de 120 mm/s, determine o módulo e a direção da velocidade do rolete  $P$  relativamente ao sistema de eixos  $xy$  quando (a)  $\theta = 30^\circ$ , (b)  $\theta = 135^\circ$ .

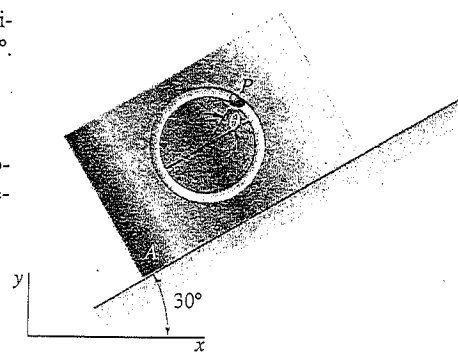


Fig. P11.124

11.125 O conjunto formado pela haste  $A$  e pela cunha  $B$  parte do repouso e desloca-se para a direita com uma aceleração constante de  $2 \text{ mm/s}^2$ . Determine (a) a aceleração da cunha  $C$ , (b) a velocidade da cunha  $C$  quando  $t = 10 \text{ s}$ .

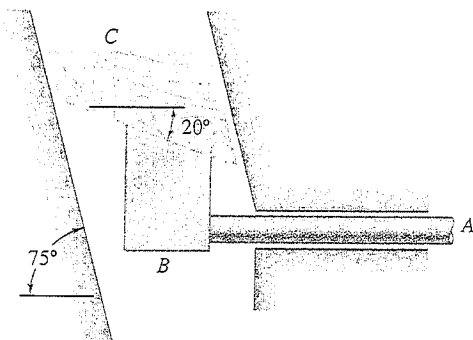


Fig. P11.125

11.126 O camião mostrado na figura possui uma grua telescópica cuja extremidade móvel é  $B$ . Ao iniciar o seu movimento de retaguarda com uma aceleração constante de  $1,2 \text{ m/s}^2$ , a extremidade  $B$  recolhe-se com uma aceleração constante de  $0,5 \text{ m/s}^2$  relativamente ao camião. Determine (a) a aceleração da extremidade  $B$ , (b) a velocidade da extremidade  $B$  quando  $t = 2 \text{ s}$ .

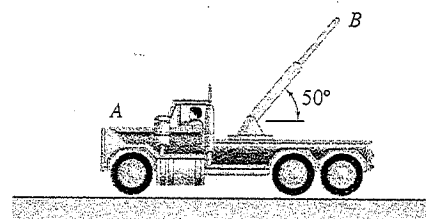


Fig. P11.126

11.127 A correia transportadora  $A$ , que faz um ângulo de  $20^\circ$  com a horizontal, move-se com uma velocidade constante de  $1,22 \text{ m/s}$  e destina-se ao carregamento de um avião. Sabendo que o operário atira o saco  $B$  com uma velocidade inicial de  $0,76 \text{ m/s}$  e com um ângulo de  $30^\circ$  com a horizontal, determine a velocidade do saco relativamente à correia, quando este toca na correia.

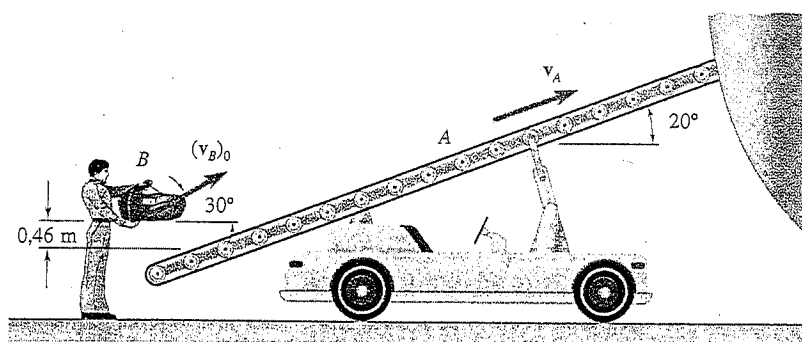


Fig. P11.127

**11.128** Um camião descarrega carvão sobre um tapete transportador no ponto  $B$  com uma velocidade  $(v_C)_0 = 1,83 \text{ m/s}$   $\nearrow 50^\circ$ . Determine a velocidade  $v_B$  do tapete, se a velocidade relativa com que o carvão atinge o tapete for (a) vertical, (b) tão pequena quanto possível.

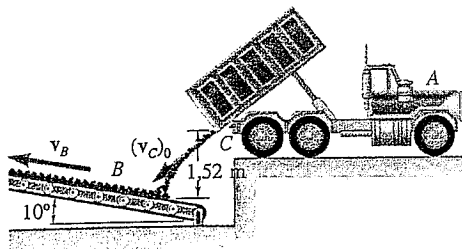


Fig. P11.128

**11.129** Um automobilista viaja para norte à velocidade de 25 km/h, quando observa um camião que se aproxima de noroeste. Depois de reduzir a velocidade para 15 km/h, muda de rumo em direcção a noroeste, e observa de novo o camião, parecendo-lhe agora que se aproxima de oeste. Considerando que a velocidade do camião é constante durante o período de observação, determine o módulo e a direcção da velocidade do camião.

**11.130** Quando um pequeno barco se desloca para norte à velocidade de 5 km/h, verifica-se que a bandeira colocada na sua popa forma um ângulo  $\theta = 50^\circ$  com a linha central do barco, como mostra a figura. Mais tarde, quando o barco se dirige para leste com 20 km/h, o ângulo  $\theta$  é novamente de  $50^\circ$ . Determine a velocidade e direcção do vento.

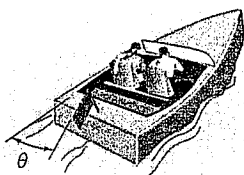


Fig. P11.130

**11.131** Um armazém tem em exposição o modelo de um comboio,  $D$ , que se desloca num plano inclinado situado entre as escadas de acesso ascendente e descendente. Quando o comboio e os clientes passam pelo ponto  $A$ , acontece que um cliente, situado na escada ascendente  $B$ , tem a percepção de que o comboio se move para baixo, formando um ângulo de  $22^\circ$  com a horizontal, enquanto para um cliente situado na escada descendente  $C$  o comboio parece estar a mover-se para cima e para a esquerda com um ângulo de  $23^\circ$  com a horizontal. Sabendo que a velocidade das escadas é de 0,9 m/s, determine a velocidade e a direcção do comboio.

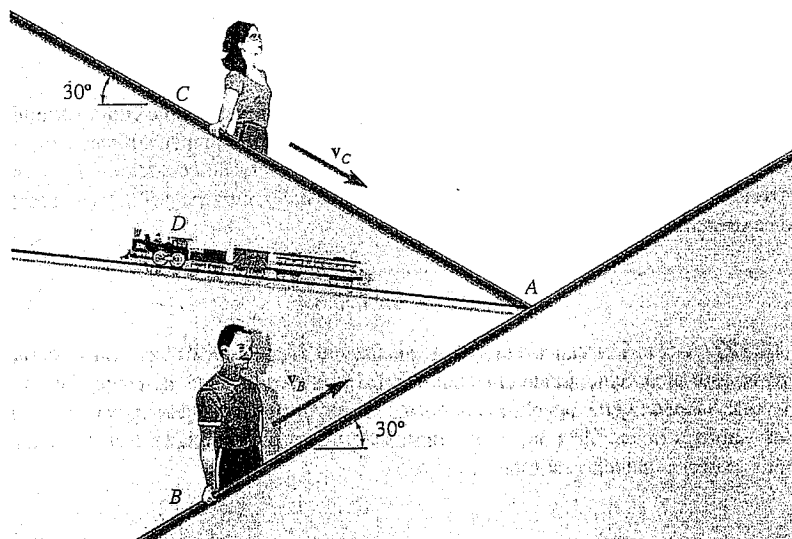


Fig. P11.131

**11.132** Durante uma tempestade um automóvel desloca-se para norte com uma velocidade de 40 km/h. Enquanto isto, observa-se, através da janela esquerda, que a trajectória das gotas de água da chuva parecem formar um ângulo de  $75^\circ$  com a vertical e estar direccionadas para a esquerda. Quando observadas da janela direita de um outro automóvel, que viaja para sul com a velocidade de 30 km/h, as gotas de água parecem formar um ângulo de  $60^\circ$  com a vertical. Se o condutor do automóvel que se desloca para norte decidir parar, com que ângulo serão vistas as gotas a cair?

Vimos na Sec. 11.9 que a velocidade de uma partícula é um vector tangente à sua trajectória, mas que, em geral, a aceleração não é tangente à referida trajectória. Por vezes, torna-se conveniente decompor a aceleração em componentes, que estão dirigidas segundo a tangente e a normal à trajectória da partícula.

**Movimento plano de uma partícula.** Consideremos inicialmente que a partícula se move numa curva contida no plano da figura. Seja  $P$  a posição da partícula num dado instante, e seja  $e_t$  o vector ligado a  $P$ , tangente à trajectória e orientado no sentido do movimento (Fig. 11.21a). Seja  $e'_t$  o vector correspondente à posição  $P'$  da partícula num instante posterior. Podemos traçar ambos os vectores a partir da mesma origem  $O'$ , e definir assim o vector  $\Delta e_t = e'_t - e_t$  (Fig. 11.21b). Uma vez que  $e_t$  e  $e'_t$  são vectores unitários, as suas extremidades situam-se numa circunferência de raio 1. Designando por  $\Delta\theta$  o ângulo formado por  $e_t$  e  $e'_t$ , verificamos que o módulo de  $\Delta e_t$  é  $2 \text{ sen } (\Delta\theta/2)$ . Considerando agora o vector  $\Delta e_t/\Delta\theta$ , podemos notar que, ao fazer tender  $\Delta\theta$  para zero, este vector se torna tangente à circunferência de raio unitário (Fig. 11.21b), i. e., perpendicular a  $e_n$ , sendo a sua intensidade dada por

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{2 \text{ sen } (\Delta\theta/2)}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen } (\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2} = 1$$

Assim, o vector obtido no limite é um vector unitário designado por  $e_n$ , cuja direcção é definida pela normal à trajectória da partícula e cujo sentido é determinado pelo sentido de rotação de  $e_t$ . Podemos escrever

$$e_n = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta e_t}{\Delta\theta}$$

$$e_n = \frac{d e_t}{d\theta} \tag{11.35}$$

Uma vez que a velocidade  $v$  da partícula é tangente à trajectória, podemos expressá-la pelo produto do escalar  $v$  pelo vector  $e_t$ , ou seja,

$$v = v e_t \tag{11.36}$$

Para obter a aceleração da partícula, devemos derivar em ordem a  $t$  a Eq. (11.36). Aplicando a regra da diferenciação do produto de um escalar por um vector (Sec. 11.10), escrevemos

$$a = \frac{d v}{d t} = \frac{d v}{d t} e_t + v \frac{d e_t}{d t} \tag{11.37}$$

Mas,

$$\frac{d e_t}{d t} = \frac{d e_t}{d\theta} \frac{d\theta}{d s} \frac{d s}{d t}$$

Recordando de (11.16) que  $ds/dt = v$ , e de (11.35) que  $de_t/d\theta = e_n$ , e do cálculo elementar que  $d\theta/ds = 1/\rho$ , na qual  $\rho$  é o raio de curvatura da trajectória em  $P$  (Fig. 11.22), temos

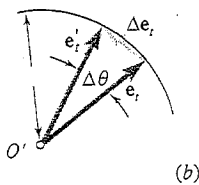
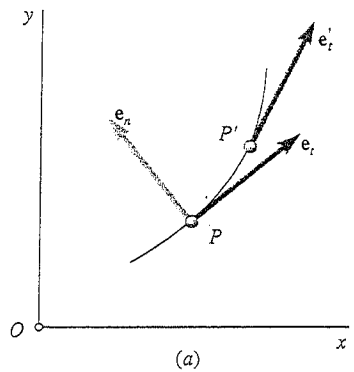


Fig. 11.21

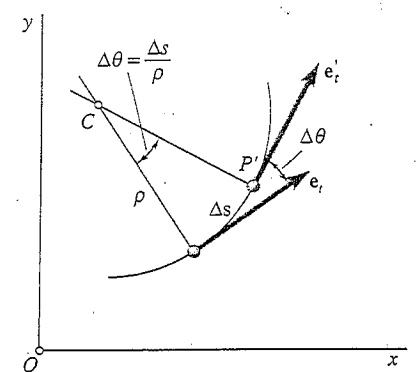


Fig. 11.22

$$\frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = \frac{v}{\rho} \mathbf{e}_n \quad (11.38)$$

Substituindo na Eq. (11.37), obtemos

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_n \quad (11.39)$$

Assim, as componentes escalares da aceleração são

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad (11.40)$$

As expressões acima obtidas significam que a *componente tangencial* da aceleração é igual à *taxa de variação da velocidade da partícula*, enquanto a *componente normal* é igual ao *quadrado da velocidade dividido pelo raio de curvatura da trajectória em P*. Se a velocidade da partícula aumentar,  $a_t$  é positiva, e a componente  $\mathbf{a}_t$  é no sentido do movimento. Se a velocidade da partícula diminuir,  $a_t$  é negativa e a componente  $\mathbf{a}_t$  é contrária ao movimento. Porém, a componente  $\mathbf{a}_n$  é sempre dirigida para o centro de curvatura da trajectória (Fig.11.23).

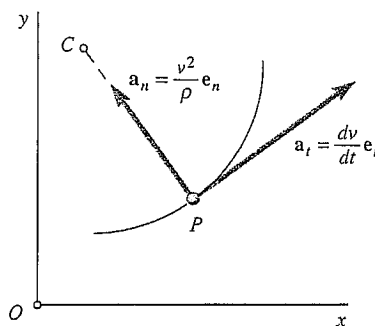


Fig. 11.23

Do exposto, podemos concluir que a componente tangencial da aceleração reflecte uma mudança na intensidade da velocidade da partícula, enquanto a sua componente normal traduz uma variação na direcção do movimento da partícula. A aceleração da partícula será nula, somente se ambas as componentes forem iguais a zero. Por isso, a aceleração de uma partícula que se desloque ao longo de uma curva com velocidade constante não é nula a menos que a partícula passe por um ponto de inflexão da curva (onde o raio de curvatura é infinito) ou se a curva se transformar numa linha recta.

O facto de a componente normal da aceleração depender do valor do raio de curvatura da trajectória descrita pela partícula é tomado em devida conta no projecto de estruturas e mecanismos, tais como asas de aviões, vias ferroviárias e cames. Por esta razão se justifica a inexistência de mudanças bruscas na curvatura das asas, que de outro modo provocariam valores elevados na aceleração das partículas. Esta razão assiste de igual modo o projecto de curvas ferroviárias, para evitar uma mudança brusca na aceleração das carruagens (que é pre-

judicial ao material e desagradável para os passageiros). Um segmento recto da via, por exemplo, nunca é seguido directamente de um troço circular; utilizam-se secções especiais de transição, para suavizar a passagem do raio de curvatura infinito do segmento recto para o raio de curvatura finito da secção circular. Do mesmo modo, o projecto de cames de alta velocidade contempla a existência de zonas de transição que produzem uma variação contínua da aceleração.

**Movimento da partícula no espaço.** As Eqs. (11.39) e (11.40) são ainda aplicáveis ao caso de uma partícula que se move ao longo de uma trajectória curva no espaço. Contudo, uma vez que podemos fazer passar, por um ponto  $P$  da curva, inúmeras linhas rectas que lhe são perpendiculares, torna-se necessário definir mais concretamente a direcção do versor  $e_n$ .

Consideremos de novo os versores  $e_t$  e  $e'_t$  tangentes à trajectória da partícula em dois pontos vizinhos  $P$  e  $P'$  (Fig. 11.24a), e o vector  $\Delta e_t$ , que representa a diferença entre  $e_t$  e  $e'_t$  (Fig. 11.24b). Imaginemos agora um plano que passa por  $P$  (Fig. 11.24a) e que é paralelo ao plano definido pelos três vectores  $-e_t$ ,  $e'_t$

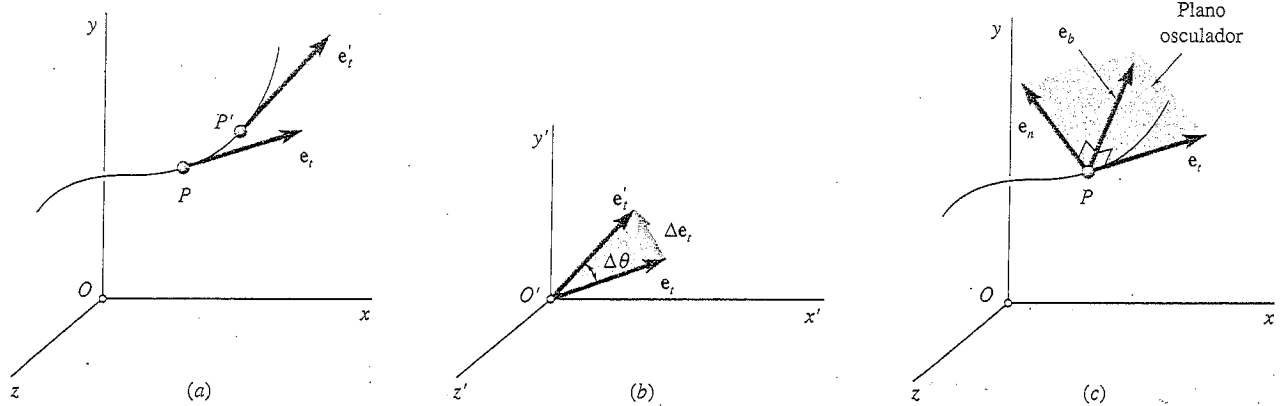


Fig. 11.24

e  $\Delta e_t$  (Fig. 11.24b). Este plano contém a tangente à curva em  $P$  e é paralelo à tangente em  $P'$ . Se fizermos agora aproximar  $P'$  de  $P$ , obtemos no limite o plano que melhor se adapta à curva na vizinhança do ponto  $P$ . Este plano é designado por *plano osculador*† em  $P$ . Da definição resulta que o plano osculador contém o versor  $e_n$ , uma vez que este vector representa o limite do vector  $\Delta e_t/\Delta\theta$ . A normal definida por  $e_n$  está, assim, contida no plano osculador; é designada por *normal principal* em  $P$ . O versor  $e_b = e_t \times e_n$ , que completa o triedro directo  $e_t, e_n, e_b$  (Fig. 11.24c) define a *binormal* em  $P$ . A binormal é, assim, perpendicular ao plano osculador. Concluimos que a aceleração de uma partícula em  $P$  pode ser decomposta em duas componentes: uma segundo a tangente, e a outra, segundo a normal principal em  $P$ , tal como é indicado na Eq. (11.39). Note-se que a aceleração não tem componente segundo a binormal.

† Em latim *osculare*, beijar.

## 11.14. COMPONENTES RADIAL E TRANSVERSAL

Em alguns problemas de movimento plano, a posição da partícula  $P$  define-se através das suas coordenadas polares  $r$  e  $\theta$  (Fig. 11.25a). Toma-se então conveniente decompor a velocidade e a aceleração da partícula segundo duas direcções, respectivamente uma paralela e outra perpendicular à linha  $OP$  e que se designam por *componentes radial e transversal*.

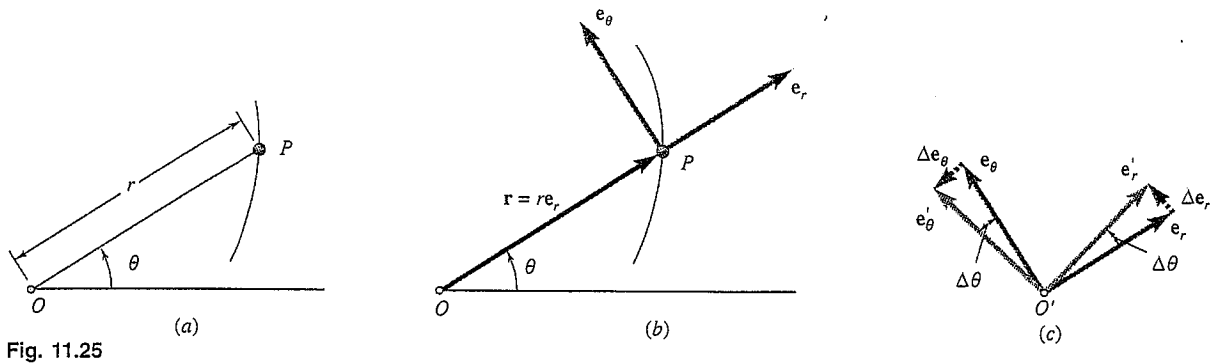


Fig. 11.25

Consideremos dois versores  $e_r$  e  $e_\theta$  ligados ao ponto  $P$  (Fig. 11.25b). O vector  $e_r$  está dirigido ao longo de  $OP$ , e o vector  $e_\theta$  obtém-se pela rotação de  $e_r$  de  $90^\circ$  no sentido contrário ao movimento dos ponteiros do relógio. O versor  $e_r$  define a direcção *radial*, i. e., a direcção segundo a qual  $P$  se movimentaria se  $r$  aumentasse e  $\theta$  se mantivesse constante; o versor  $e_\theta$  define a direcção *transversal*, i. e., a direcção segundo a qual  $P$  se moveria se  $\theta$  aumentasse e se  $r$  se mantivesse constante. Uma operação semelhante à utilizada na Sec. 11.13 para determinar a derivada do versor  $e_r$ , resulta nas seguintes expressões

$$\frac{d e_r}{d \theta} = e_\theta \quad \frac{d e_\theta}{d \theta} = -e_r \quad (11.41)$$

onde  $-e_r$  representa um vector com sentido oposto a  $e_r$  (Fig. 11.25c). Usando a diferenciação em cadeia, as derivadas dos vectores  $e_r$  e  $e_\theta$  em ordem ao tempo podem ser expressas como se segue

$$\frac{d e_r}{dt} = \frac{d e_r}{d \theta} \frac{d \theta}{dt} = e_\theta \frac{d \theta}{dt} \quad \frac{d e_\theta}{dt} = \frac{d e_\theta}{d \theta} \frac{d \theta}{dt} = -e_r \frac{d \theta}{dt}$$

ou, representando as derivadas em ordem ao tempo por pontos,

$$\dot{e}_r = \dot{\theta} e_\theta \quad \dot{e}_\theta = -\dot{\theta} e_r \quad (11.42)$$

A fim de obtermos a velocidade  $v$  da partícula  $P$ , expressamos o vector de posição de  $P$  como sendo o produto do escalar  $r$  pelo vector unitário  $e_r$  e diferenciamos em ordem a  $t$ ,

$$v = \frac{d}{dt} (r e_r) = \dot{r} e_r + r \dot{e}_r$$

ou, recordando a primeira das Eqs. (11.42),

$$v = \dot{r} e_r + r \dot{\theta} e_\theta \quad (11.43)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{e}}_\theta$$

ou, substituindo  $\dot{\mathbf{e}}_r$  e  $\dot{\mathbf{e}}_\theta$  das equações (11.42) e pondo em evidência os valores de  $\mathbf{e}_r$  e  $\mathbf{e}_\theta$  temos,

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta \quad (11.44)$$

Podemos então concluir que as componentes escalares da velocidade e da aceleração nas direcções radial e transversal são

$$v_r = \dot{r} \quad v_\theta = r\dot{\theta} \quad (11.45)$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \quad (11.46)$$

É importante notar que a componente  $a_r$  não é igual à derivada de  $v_r$ , e que, de igual modo, a componente  $a_\theta$  não é igual à derivada de  $v_\theta$ .

No caso de a partícula se mover ao longo de uma circunferência com centro em  $O$ , temos  $r = \text{constante}$  e  $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ , e pelas fórmulas (11.43) e (11.44) a velocidade e a aceleração reduzem-se a

$$\mathbf{v} = r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \quad \mathbf{a} = -r\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta \quad (11.47)$$

**Extensão ao movimento da partícula no espaço: coordenadas cilíndricas.** Por vezes, a posição da partícula  $P$  no espaço é definida por coordenadas cilíndricas  $R$ ,  $\theta$ , e  $z$  (Fig 11.26a). É então conveniente utilizar versores,  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  e  $\mathbf{k}$ , mostrados na Fig. 11.26b. Decompondo o vector de posição  $\mathbf{r}$  da partícula  $P$  segundo os versores, podemos escrever

$$\mathbf{r} = R\mathbf{e}_R + z\mathbf{k} \quad (11.48)$$

Notando que  $\mathbf{e}_R$  e  $\mathbf{e}_\theta$  definem, respectivamente, as direcções radial e transversal no plano horizontal  $xy$ , e que o vector  $\mathbf{k}$ , que define a direcção axial, é constante quer em direcção quer em intensidade, podemos facilmente concluir que

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{R}\mathbf{e}_R + R\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{k} \quad (11.49)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_R + (R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{k} \quad (11.50)$$

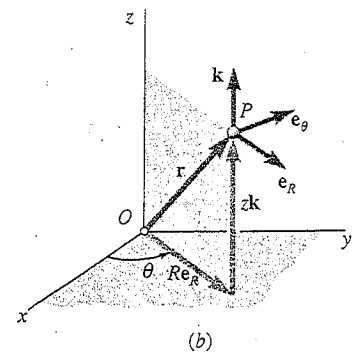
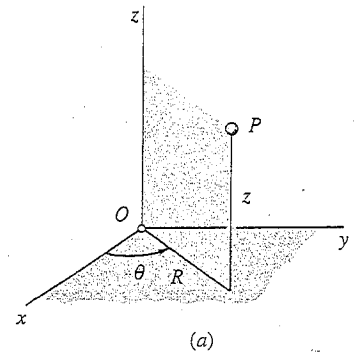
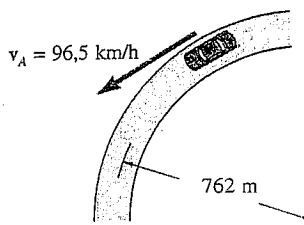


Fig. 11.26



## PROBLEMA-TIPO 11.10



Um motorista desloca-se à velocidade de 96,5 km/h numa zona curva de uma auto-estrada cujo raio de curvatura é de 762 m. O condutor aplica repentinamente os travões, provocando uma desaceleração constante. Sabendo que, 8 s depois, a velocidade se reduziu para 72,4 km/h, determine a aceleração do automóvel imediatamente após os travões terem sido accionados.

### RESOLUÇÃO

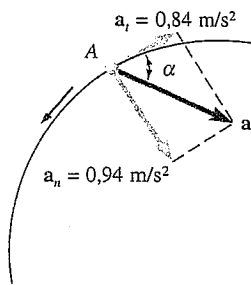
**Componente tangencial da aceleração.** Primeiro expressamos a velocidade em m/s

$$96,5 \text{ km/h} = \left( 96,5 \frac{\text{km}}{\text{h}} \right) \left( \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \right) \left( \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right) = 26,8 \text{ m/s}$$

$$72,4 \text{ km/h} = 20,1 \text{ m/s}$$

Uma vez que o automóvel reduz a velocidade a uma razão constante, temos

$$a_t = a_t \text{ média} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{20,1 \text{ m/s} - 26,8 \text{ m/s}}{8 \text{ s}} = 0,84 \text{ m/s}^2$$



**Componente normal da aceleração.** Imediatamente após os travões terem sido aplicados, a velocidade é ainda de 26,8 m/s, e temos,

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(26,8 \text{ m/s})^2}{762 \text{ m}} = 0,94 \text{ m/s}^2$$

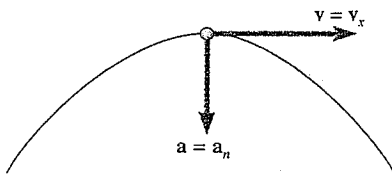
**Módulo e direcção da aceleração.** A intensidade e a direcção da resultante  $a$ , cujas componentes são  $a_n$  e  $a_t$ , são,

$$\text{tg } \alpha = \frac{a_n}{a_t} = \frac{0,94 \text{ m/s}^2}{0,84 \text{ m/s}^2} \quad \alpha = 48,2^\circ \quad \blacktriangleleft$$

$$a = \frac{a_n}{\text{sen } \alpha} = \frac{0,94}{\text{sen } 48,2} \quad a = 1,26 \text{ m/s}^2 \quad \blacktriangleleft$$

## PROBLEMA-TIPO 11.11

Determine o valor mínimo do raio de curvatura da trajectória descrita por um projectil considerado no Prob.-Tipo 11.7.



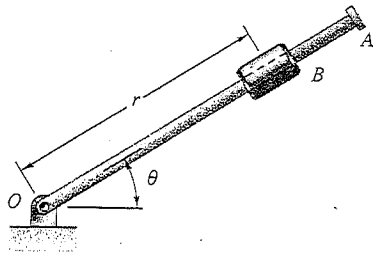
### RESOLUÇÃO

Uma vez que  $a_n = v^2/\rho$ , temos  $\rho = v^2/a_n$ . O raio tende a diminuir quando  $v$  decresce ou quando  $a_n$  aumenta. A velocidade  $v$  é mínima no cimo da trajectória, uma vez que aí se verifica  $v_y = 0$ ;  $a_n$  é máximo no mesmo ponto, uma vez que a direcção vertical coincide com a direcção da normal. Por isso, o raio mínimo de curvatura ocorre no topo da trajectória. Neste ponto, temos

$$v = v_x = 155,9 \text{ m/s} \quad a_n = a = 9,81 \text{ m/s}^2$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(155,9 \text{ m/s})^2}{9,81 \text{ m/s}^2} \quad \rho = 2480 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$

## PROBLEMA-TIPO 11.12



A rotação do braço  $OA$  com  $0,9$  m é definida pela relação  $\theta = 0,15t^2$ , na qual  $\theta$  é expresso em radianos, e  $t$ , em segundos. O cursor  $B$  desliza ao longo do braço, de tal modo que a distância a partir de  $O$  é  $r = 0,9 - 0,12t^2$ , em que  $r$  é expresso em metros, e  $t$ , em segundos. Após o braço ter rodado  $30^\circ$ , determine (a) a velocidade total do cursor, (b) a aceleração total do cursor, (c) a aceleração do cursor relativamente ao braço.

### RESOLUÇÃO

Instante  $t$  para o qual  $\theta = 30^\circ$ . Substituindo  $\theta = 30^\circ = 0,254$  rad na expressão para  $\theta$ , obtemos

$$\theta = 0,15t^2 \quad 0,524 = 0,15t^2 \quad t = 1,869 \text{ s}$$

Equações do movimento. Substituindo  $t = 1,869$  s na expressão para  $r$  e  $\theta$ , e nas expressões da primeira e da segunda derivadas, temos

$$\begin{aligned} r &= 0,9 - 0,12t^2 = 0,481 \text{ m} & \theta &= 0,15t^2 = 0,524 \text{ rad} \\ \dot{r} &= -0,24t = -0,449 \text{ m/s} & \dot{\theta} &= 0,30t = 0,561 \text{ rad/s} \\ \ddot{r} &= 0,24 = 0,240 \text{ m/s}^2 & \ddot{\theta} &= 0,30 = 0,300 \text{ rad/s}^2 \end{aligned}$$

a. Velocidade de  $B$ . Com recurso às Eqs. (11.45), obtemos os valores de  $v_r$  e  $v_\theta$  no instante  $t = 1,869$  s.

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{r} = -0,449 \text{ m/s} \\ v_\theta &= r\dot{\theta} = 0,481(0,561) = 0,270 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Através da resolução gráfica do triângulo rectângulo mostrado, obtemos a intensidade e a direcção da velocidade

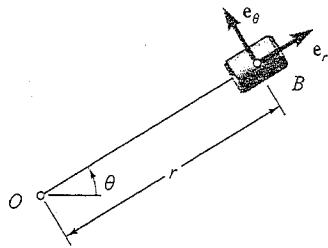
$$v = 0,524 \text{ m/s} \quad \beta = 31,0^\circ \quad \blacktriangleleft$$

b. Aceleração de  $B$ . Utilizando as Eqs. (11.46), obtemos

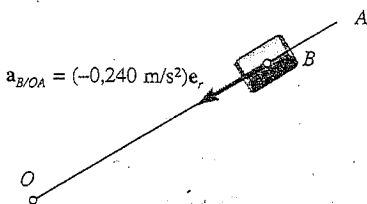
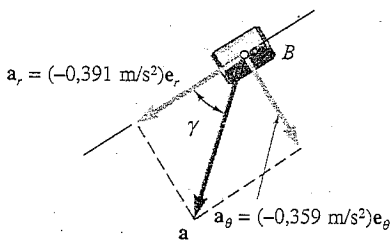
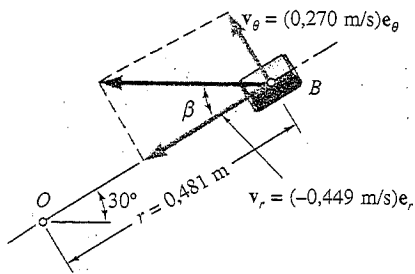
$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ &= -0,240 - 0,481(0,561)^2 = -0,391 \text{ m/s}^2 \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \\ &= 0,481(0,300) + 2(-0,449)(0,561) = -0,359 \text{ m/s}^2 \\ a &= 0,531 \text{ m/s}^2 \quad \gamma = 42,6^\circ \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

c. Aceleração de  $B$  relativamente ao braço  $OA$ . Verificamos que o movimento do cursor relativamente ao braço é rectilíneo e definido pela coordenada  $r$ . Podemos escrever

$$\begin{aligned} a_{B/OA} &= \ddot{r} = -0,240 \text{ m/s}^2 \\ & a_{B/OA} = 0,240 \text{ m/s}^2 \text{ apontando para } O \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{a} &= a_r \mathbf{e}_r + a_\theta \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$



# METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nos problemas que se seguem, é pedido que a velocidade e a aceleração de partículas sejam expressas quer em termos das suas componentes tangencial e normal quer em termos das suas componentes radial e transversal. Embora estas componentes não sejam tão familiares como as cartesianas, verificaremos que elas facilitam não só a descrição de certos tipos de movimentos, mas também a resolução de vários problemas.

**1. Utilização das componentes tangencial e normal.** Estas componentes são frequentemente utilizadas quando a partícula se desloca ao longo de uma trajectória circular ou quando se pretende determinar o raio de curvatura da trajectória. Recordemos que o versor  $e_t$  é tangente à trajectória (e por isso alinhado com a velocidade) enquanto o versor  $e_n$  está dirigido ao longo da normal e apontando sempre para o centro de curvatura. Daqui resulta que, à medida que a partícula se move, as direcções dos dois vectores vão variando.

**2. Aceleração em função das componentes tangencial e normal.** Na Sec. 11.13, verificámos que, para ambos os movimentos bi e tridimensionais, se podia aplicar a seguinte equação:

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_n \quad (11.39)$$

As observações que se seguem tornam-se úteis para a resolução dos problemas desta lição.

**a. A componente tangencial** da aceleração mede a taxa de variação da intensidade da velocidade:  $a_t = dv/dt$ . Daí resulta que, quando  $a_t$  é constante, podem ser usadas as equações para o movimento uniformemente acelerado com a aceleração igual a  $a_t$ . Além do mais, quando a partícula se move com uma velocidade constante, temos  $a_t = 0$ , e a aceleração da partícula reduz-se apenas à sua componente normal.

**b. A componente normal** da aceleração aponta sempre para o centro de curvatura da trajectória da partícula, e a sua intensidade é:  $a_n = v^2/\rho$ . Esta componente é facilmente determinada desde que se conheçam a intensidade  $v$  da velocidade e o raio de curvatura  $\rho$ . Pelo contrário, se conhecermos o valor da aceleração normal e a intensidade da velocidade, podemos obter o raio de curvatura  $\rho$  da trajectória [Prob.-Tipo 11.11].

**c. No movimento tridimensional**, utiliza-se um terceiro versor,  $\mathbf{e}_b = \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n$ , que define a direcção da *binormal*. Uma vez que este vector é perpendicular à velocidade e à aceleração, pode ser obtido escrevendo

$$\mathbf{e}_b = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}$$

3. *Utilização das componentes radial e transversal.* Estas componentes utilizam-se na análise do movimento plano de uma partícula  $P$ , sempre que a sua posição seja definida pelas suas coordenadas polares  $r$  e  $\theta$ . Tal como se mostra na Fig. 11.25, o versor  $e_r$ , que define a direcção *radial*, está ligado ao ponto  $P$  e aponta para fora desde o ponto fixo  $O$ , enquanto o vector  $e_\theta$ , que define a direcção *transversal*, se obtém pela rotação de  $90^\circ$ , no sentido anti-horário. Nas Eqs. (11.43) e (11.44), exprimimos respectivamente a velocidade e a aceleração da partícula em função das suas componentes radial e transversal. Podemos verificar que as expressões obtidas contêm a primeira e a segunda derivadas em ordem a  $t$  das coordenadas  $r$  e  $\theta$ .

Nesta lição encontraremos os seguintes problemas que envolvem as componentes radial e transversal:

*a. As coordenadas  $r$  e  $\theta$  são funções conhecidas de  $t$ .* Neste caso, calculamos a primeira e a segunda derivadas de  $r$  e  $\theta$ , e substituí-se as expressões obtidas nas Eqs. (11.43) e (11.44).

*b. Existe uma certa relação entre  $r$  e  $\theta$ .* Primeiramente, deve determinar-se esta relação a partir da geometria de um dado sistema e usá-la para exprimir  $r$  como função de  $\theta$ . Uma vez conhecida a função  $r = f(\theta)$ , podemos derivar sucessivamente até determinar  $\dot{r}$  em função de  $\theta$  e  $\dot{\theta}$ , e  $\ddot{r}$  em função de  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$  e  $\ddot{\theta}$ :

$$\begin{aligned}\dot{r} &= f'(\theta) \dot{\theta} \\ \ddot{r} &= f''(\theta) \dot{\theta}^2 + f'(\theta) \ddot{\theta}\end{aligned}$$

As expressões obtidas podem agora ser substituídas nas Eqs. (11.43) e (11.44).

*c. Movimento tridimensional de uma partícula.* Tal como se referiu no fim da Sec. 11.14, este movimento é frequentemente descrito em função das *coordenadas cilíndricas*  $R$ ,  $\theta$ , e  $z$  (Fig. 11.26). Os versores consistem em  $e_R$ ,  $e_\theta$  e  $k$ . As correspondentes componentes da velocidade e a aceleração são dadas pelas Eqs. (11.49) e (11.50). Note-se que a distância radial  $R$  é sempre medida no plano paralelo a  $xy$ , e deve ter-se o máximo cuidado em não confundir o vector de posição  $\mathbf{r}$  com a componente radial  $R e_R$ .

# Problemas

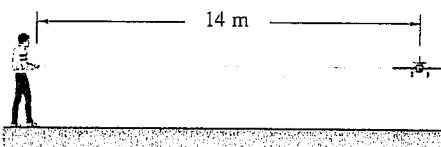


Fig. P11.133

11.133 Determine a componente normal da aceleração de um modelo de avião, se este estiver a voar com uma velocidade constante de 18 m/s, numa trajetória horizontal e circular com raio de 14 m.

11.134 Um automóvel percorre uma pista circular com diâmetro  $d$ , a fim de se testar as suas características. Determine (a) o valor de  $d$  tal que a componente da aceleração seja  $3,2 \text{ m/s}^2$  quando a velocidade do automóvel é de  $72 \text{ km/h}$ , (b) a velocidade do automóvel se  $d = 180 \text{ m}$  e a componente normal da aceleração é de  $0,6 g$ .

11.135 Determine a velocidade máxima que o carro pode alcançar ao longo do segmento circular  $AB$  da pista, para que a componente normal da aceleração não exceda o valor de  $3g$ .

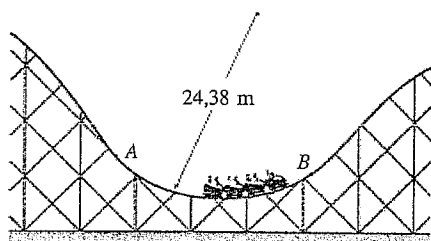


Fig. P11.135

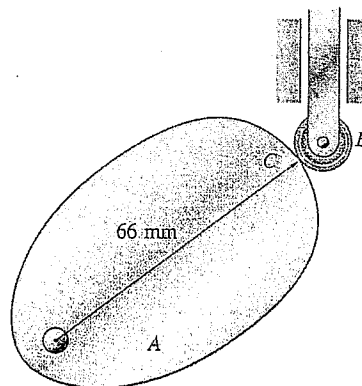


Fig. P11.136

11.136 À medida que a came  $A$  roda, o rolete  $B$  rola sem escorregar sobre a superfície da came. Sabendo que as componentes normais da aceleração dos pontos de contacto em  $C$ , da came  $A$  e do rolete  $B$ , são, respectivamente,  $660 \text{ mm/s}^2$  e  $6782 \text{ mm/s}^2$ , determine o diâmetro do rolete.

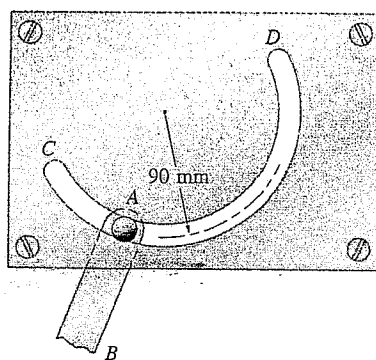


Fig. P11.137

11.137 O rolete  $A$ , que está ligado à barra  $AB$ , é constringido a mover-se ao longo da ranhura circular  $CD$ . Sabendo que em  $t = 0$  o rolete parte do repouso e se desloca de tal modo que a sua velocidade cresce a uma razão constante de  $20 \text{ mm/s}^2$ , determine a intensidade da aceleração total quando (a)  $t = 0$ , (b)  $t = 2 \text{ s}$ .

11. 138 No instante em que se desliga a corrente de uma serra circular, a velocidade periférica de um dente da serra com diâmetro de 250 mm é de 45 m/s. Esta velocidade decresce a uma razão constante, e a serra atinge o repouso em 9 s. Determine o tempo para o qual a aceleração total do dente é de 40 m/s<sup>2</sup>.

11. 139 Uma pista de corrida exterior tem 128 m de diâmetro. Uma corredora aumenta a sua velocidade a uma razão constante, desde 4,3 m/s para 7,3 m/s durante uma distância de 28,9 m. Determine a aceleração total da corredora, 2 s depois de ter começado a aumentar a velocidade.

11. 140 Numa corrida de aviões, o avião A voa, num dado instante, em linha recta e horizontalmente, aumentando a sua velocidade à razão de 8 m/s<sup>2</sup>. O avião B voa à mesma altitude que o avião A, e, à medida que contorna um marco de referência, descreve uma trajectória circular com 300 m de raio. Sabendo que nesse instante a velocidade de B está a decrescer à razão de 3 m/s<sup>2</sup>, determine, para a posição indicada, (a) a velocidade de B relativamente a A, (b) a aceleração de B relativamente a A.

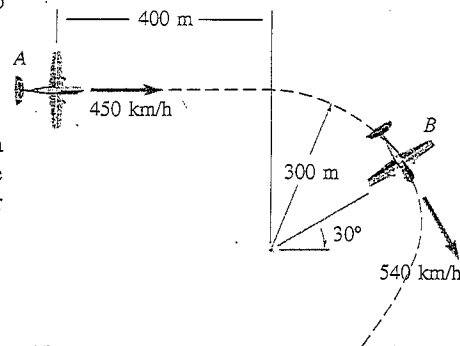


Fig. P11.140

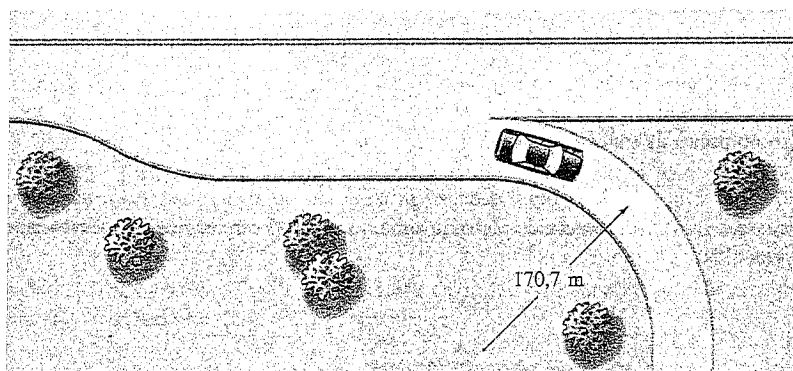


Fig. P11.141

11. 141 Um motorista viaja ao longo de uma secção recta de uma auto-estrada, e, antes de deixar a auto-estrada através de uma rampa circular com um raio de 171 m, reduz a velocidade do seu automóvel a uma razão constante. Continua então a desacelerar à mesma razão constante, de tal modo que, 10 s depois de entrar na rampa, a sua velocidade decresce para 32,2 km/h, velocidade que depois se mantém constante. Sabendo que, a esta velocidade constante, a aceleração total do automóvel é igual a um quarto do seu valor antes de entrar na rampa, determine o máximo valor da aceleração.

11. 142 Os carros de corrida A e B deslocam-se nas secções circulares das pistas. No instante indicado, a velocidade de A decresce a uma razão de 7 m/s<sup>2</sup>, e a velocidade de B aumenta a uma razão de 2 m/s<sup>2</sup>. Para as posições indicadas, determine (a) a velocidade de B relativamente a A, (b) a aceleração de B relativamente a A.

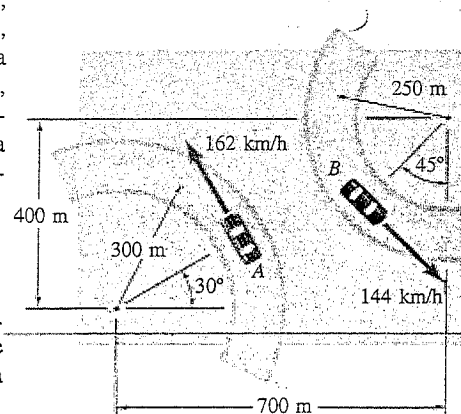


Fig. P11.142

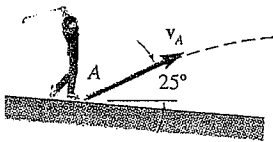


Fig. P11.143

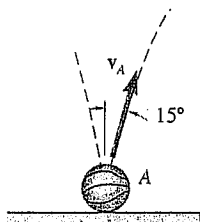


Fig. P11.145

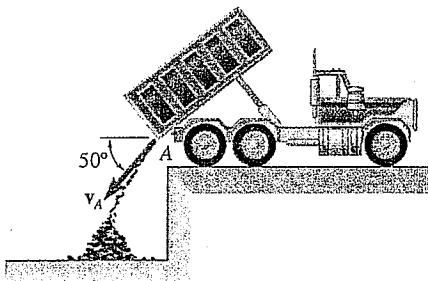


Fig. P11.146

11.143 Um jogador de golfe lança a sua bola a partir do ponto  $A$ , com uma velocidade inicial de  $50 \text{ m/s}$  e fazendo um ângulo de  $25^\circ$  com a horizontal. Determine o raio de curvatura da trajetória descrita pela bola ( $a$ ) no ponto  $A$ , ( $b$ ) no ponto mais elevado da trajetória.

11.144 A fotografia tirada a um lançador de neve revela que o raio de curvatura da trajetória da neve no ponto  $A$ , à saída do tubo de descarga, é de  $8,5 \text{ m}$ . Determine ( $a$ ) a velocidade de descarga  $v_A$  da neve no ponto  $A$ , ( $b$ ) o raio de curvatura da trajetória no seu ponto mais elevado.

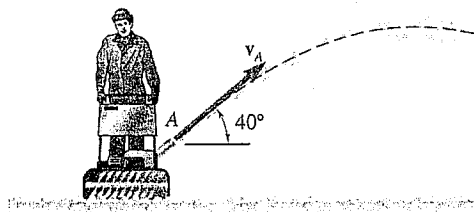


Fig. P11.144

11.145 Uma bola de basquetebol é atirada contra o chão no ponto  $A$  e ressalta com a velocidade  $v_A$  de intensidade  $2,3 \text{ m/s}$ , como é indicado na figura. Determine o raio de curvatura da trajetória descrita pela bola ( $a$ ) no ponto  $A$ , ( $b$ ) no ponto mais elevado da trajetória.

11.146 Um camião descarrega carvão com a velocidade inicial de  $v_A = 1,83 \text{ m/s}$  a  $50^\circ$ . Determine o raio de curvatura da trajetória descrita pelo carvão ( $a$ ) no ponto  $A$ , ( $b$ ) no ponto da trajetória que está  $0,9 \text{ m}$  abaixo de  $A$ .

11.147 Um tubo horizontal descarrega água, no ponto  $A$ , para um reservatório. Expresse o raio de curvatura do jacto de água no ponto  $B$  em termos das intensidades das velocidades  $v_A$  e  $v_B$ .

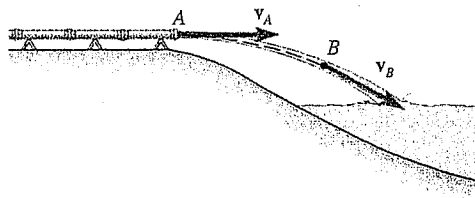


Fig. P11.147

11.148 Uma criança lança uma bola a partir do ponto  $A$  com uma velocidade inicial de  $20 \text{ m/s}$  e fazendo um ângulo de  $25^\circ$  com a horizontal. Determine a velocidade da bola, nos pontos para os quais o raio de curvatura da trajetória da bola é igual a três quartos do valor em  $A$ .

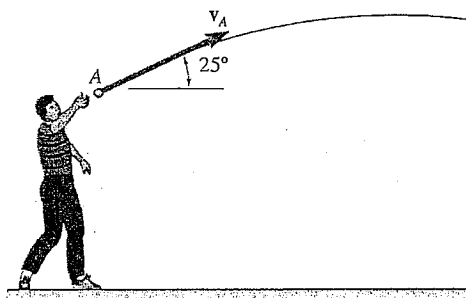


Fig. P11.148

**11.149** Um projectil é disparado do ponto  $A$  com uma velocidade inicial  $v_0$ . (a) Mostre que o raio de curvatura da trajectória do projectil atinge o seu valor mínimo para o ponto  $B$  mais alto da trajectória. (b) Denominando por  $\theta$  o ângulo formado pela tangente à trajectória e a horizontal num dado ponto  $C$ , mostre que o raio de curvatura da trajectória em  $C$  é  $\rho = \rho_{\min.}/\cos^3 \theta$ .

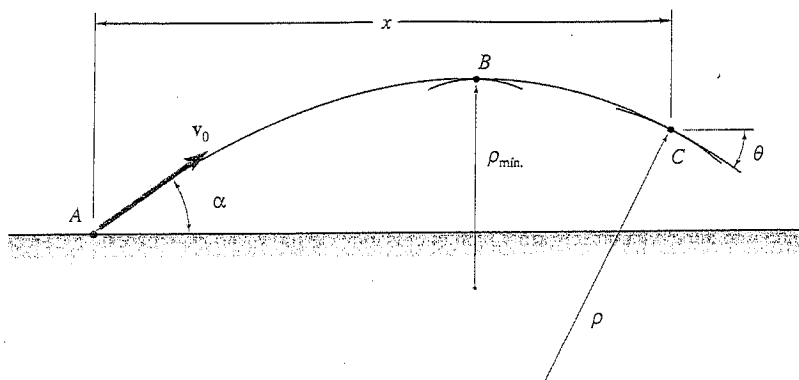


Fig. P11.149 e P11.150

**11.150** Um projectil é disparado do ponto  $A$  com uma velocidade inicial  $v_0$ , que forma um ângulo  $\alpha$  com a horizontal. Expresse o raio de curvatura da trajectória do projectil no ponto  $C$ , em termos de  $x$ ,  $v_0$ ,  $\alpha$  e  $g$ .

\***11.151** Determine o raio de curvatura da trajectória descrita pela partícula do Prob. 11.95 quando  $t = 0$ .

\***11.152** Determine o raio de curvatura da trajectória descrita pela partícula do Prob. 11.96 quando  $t = 0$ ,  $A = 3$  e  $B = 1$ .

**11.153 até 11.155** Sabe-se que um satélite consegue viajar indefinidamente segundo uma órbita circular à volta de um planeta, se a componente normal da aceleração do satélite for igual a  $g(R/r)^2$ , em que  $g$  é a aceleração da gravidade à superfície do planeta,  $R$  é o raio do planeta, e  $r$  é a distância do centro do planeta ao satélite. Determine a velocidade do satélite relativamente ao planeta, se o satélite for suposto viajar indefinidamente segundo uma órbita circular localizada a uma distância de 160 km da superfície do planeta.

**11.153** Vénus:  $g = 8,53 \text{ m/s}^2$ ,  $R = 6161 \text{ km}$

**11.154** Marte:  $g = 3,83 \text{ m/s}^2$ ,  $R = 3332 \text{ km}$

**11.155** Júpiter:  $g = 26,0 \text{ m/s}^2$ ,  $R = 69\,893 \text{ km}$

**11.156 e 11.157** Sabendo que o diâmetro do Sol é de 1 390 176 km e que a aceleração da gravidade à sua superfície é de  $274,3 \text{ m/s}^2$ , determine, para o planeta abaixo referido, raio da sua órbita, supostamente circular, em torno do Sol. (Veja a informação dada nos Probs. 11.153-11.155.)

**11.156** Terra:  $(v_{\text{média}})_{\text{órbita}} = 107\,159 \text{ km/h}$

**11.157** Saturno:  $(v_{\text{média}})_{\text{órbita}} = 34\,722 \text{ km/h}$

**11.158** Sabendo que o raio da Terra é de 6370 km, determine o tempo necessário para a realização de uma órbita completa do telescópio espacial *Hubble*, sabendo que se desloca segundo uma órbita situada 590 km acima da superfície terrestre. (Veja a informação dada nos Probs. 11.153-11.155.)



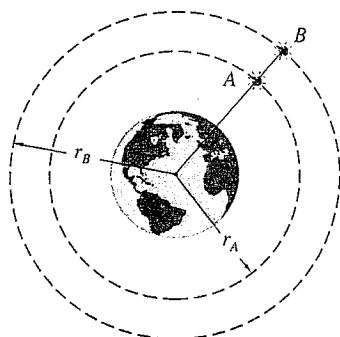


Fig. P11.160

**11.159** Um satélite viaja segundo uma órbita circular em torno de Marte a uma altitude de 289,6 km. Depois de a altitude ser ajustada, verificou-se que o tempo referente a uma órbita aumentou em 10 por cento. Sabendo que o raio de Marte é de 3332 km, determine a nova altitude do satélite. (Ver a informação dada nos Probs. 11.153-11.155.)

**11.160** Os satélites A e B viajam segundo órbitas circulares em torno da Terra, contidas no mesmo plano e a altitudes de 193 km e 322 km, respectivamente. Se no instante  $t = 0$ , os satélites estão alinhados como é mostrado, e sabendo que o raio da Terra é  $R = 6372$  km, determine quando é que os satélites estarão de novo alinhados radialmente. (Veja a informação dada nos Probs. 11.153-11.155.)

**11.161** O movimento bidimensional de uma partícula é definido pelas expressões  $r = 3(2 - e^{-t})$  e  $\theta = 4(t + 2e^{-t})$ , nas quais  $r$  é expresso em metros;  $t$ , em segundos, e  $\theta$ , em radianos. Determine a velocidade e a aceleração da partícula ( $a$ ) quando  $t = 0$ , ( $b$ ) quando  $t$  se aproxima de infinito. Que conclusão pode retirar no que respeita à trajetória final da partícula?

**11.162** A trajetória de uma partícula está representada na figura. O movimento é definido pelas expressões  $r = b(2 + \cos \pi t)$  e  $\theta = \pi t$ , nas quais  $t$  é expresso em segundos, e  $\theta$ , em radianos. Determine ( $a$ ) a velocidade e a aceleração da partícula quando  $t = 2$  s, ( $b$ ) os valores de  $\theta$  para os quais a intensidade da velocidade é máxima.

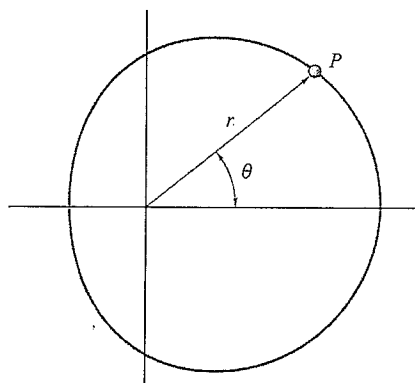


Fig. P11.162

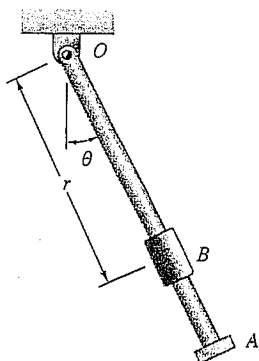


Fig. P11.163 e P11.164

**11.163** A rotação da barra OA em torno de O é definida pela expressão  $\theta = \pi(4t^2 - 8t)$ , na qual  $\theta$  é expresso em radianos, e  $t$ , em segundos. A corredeira B desliza ao longo da barra, de tal modo que a distância medida a partir de O é dada por  $r = 10 + 6 \sin \pi t$ , onde  $r$  e  $t$  são expressos em milímetros e em segundos, respectivamente. Quando  $t = 1$  s, determine ( $a$ ) a velocidade da corredeira, ( $b$ ) a aceleração total da corredeira, ( $c$ ) a aceleração da corredeira relativamente à barra.

**11.164** A oscilação da barra OA em torno de O é definida pela expressão  $\theta = (2/\pi)(\sin \pi t)$ , na qual  $\theta$  é expresso em radianos, e  $t$ , em segundos. A corredeira B desliza ao longo da barra, de tal modo que a distância medida a partir de O é dada por  $r = 25/(t + 4)$ , onde  $r$  e  $t$  são expressos em milímetros e em segundos, respectivamente. Quando  $t = 1$  s, determine ( $a$ ) a velocidade da corredeira, ( $b$ ) a aceleração total da corredeira, ( $c$ ) a aceleração da corredeira relativamente à barra.

**11.165** A trajetória de uma partícula P é a elipse definida pelas expressões  $r = 2/(2 - \cos \pi t)$  e  $\theta = \pi t$ , nas quais  $r$  é expresso em metros;  $t$ , em segundos, e  $\theta$ , em radianos. Determine a velocidade e a aceleração da partícula quando ( $a$ )  $t = 0$ , ( $b$ )  $t = 0,5$  s.

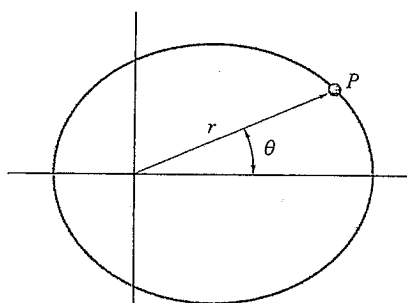


Fig. P11.165

11.166 O movimento bidimensional de uma partícula é definido pelas expressões  $r = 2a \cos \theta$  e  $\theta = bt^2/2$ , nas quais  $a$  e  $b$  são constantes. Determine (a) as intensidades da velocidade e da aceleração em qualquer instante, (b) o raio de curvatura da trajectória. Que conclusão pode retirar no que respeita à trajectória da partícula?

11.167 As características de um carro desportivo são estudadas através de uma câmara de alta velocidade situada no ponto A. A câmara é montada sobre um mecanismo que permite o registo do movimento do carro, enquanto se desloca no segmento de recta BC. Determine a velocidade do carro em função de  $b$ ,  $\theta$  e  $\dot{\theta}$ .

11.168 Determine a intensidade da aceleração do carro do Prob. 11.167 em função de  $b$ ,  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$  e  $\ddot{\theta}$ .

11.169 Depois de descolar, um helicóptero eleva-se segundo uma linha recta de ângulo constante  $\beta$ . O seu voo é seguido pelo radar desde o ponto A. Determine a velocidade do helicóptero em função de  $d$ ,  $\beta$ ,  $\theta$  e  $\dot{\theta}$ .

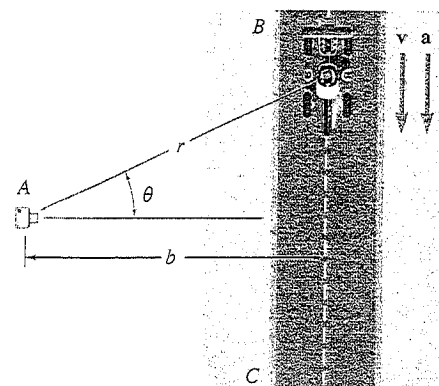


Fig. P11.167

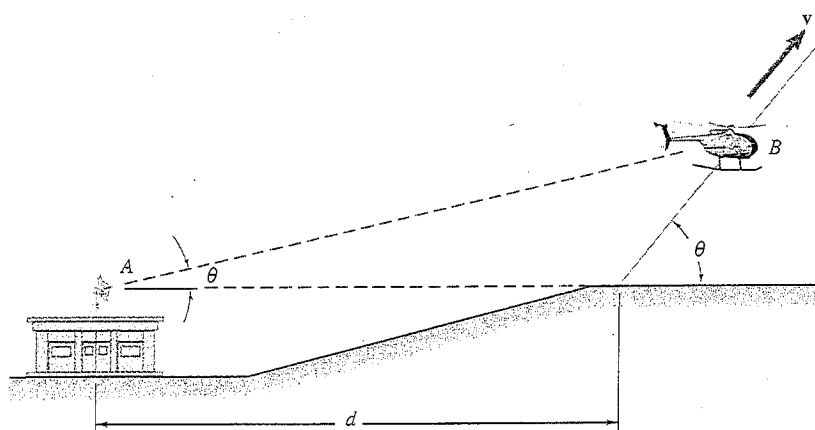


Fig. P11.169

\*11.170 O pino P, que desliza livremente na ranhura OA, está ligado à barra BC. Determine a taxa de variação  $\dot{\theta}$  do ângulo  $\theta$ , sabendo que BC se desloca com velocidade constante  $v_0$ . Exprima a sua resposta em função de  $v_0$ ,  $h$ ,  $\beta$  e  $\theta$ .

11.171 Para o carro desportivo do Prob. 11.167, verificou-se que levou 0,5 s para viajar desde a posição  $\theta = 60^\circ$  até à posição  $\theta = 35^\circ$ . Sabendo que  $b = 25$  m, determine a velocidade média do carro durante o intervalo de 0,5 s.

11.172 Para o helicóptero do Prob. 11.169, verificou-se que, quando este se encontrava em B, a distância e o ângulo de subida eram  $r = 914$  m e  $\theta = 20^\circ$ , respectivamente. Quatro segundos mais tarde, a estação de radar localizou o helicóptero com  $r = 1012$  m e  $\theta = 23,1^\circ$ . Determine a velocidade média e o ângulo de subida  $\beta$  do helicóptero durante o intervalo de 4 segundos.

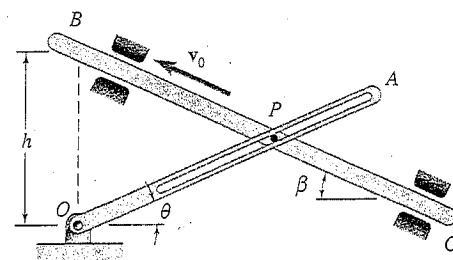


Fig. P11.170

11.173 e 11.174 Uma partícula desloca-se ao longo da espiral mostrada na figura. Determine a intensidade da velocidade da partícula em função de  $b$ ,  $\theta$  e  $\dot{\theta}$ .

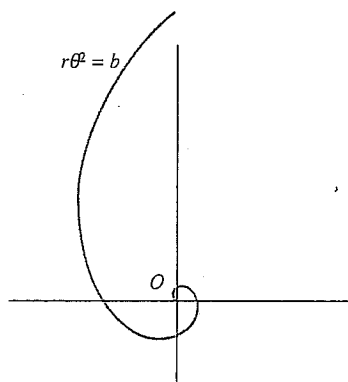


Fig. P11.173 e P11.175

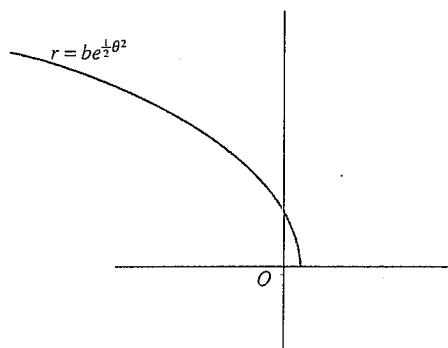


Fig. P11.174 e P11.176

11.175 e 11.176 Uma partícula desloca-se ao longo da espiral mostrada na figura. Sabendo que  $\dot{\theta}$  é constante, e denominando esta constante por  $w$ , determine a intensidade da aceleração da partícula em função de  $b$ ,  $\theta$  e  $w$ .

11.177 Mostre que  $\dot{r} = h\dot{\phi} \sin\theta$  sabendo que, no instante indicado, o degrau AB da máquina está a rodar no sentido contrário ao movimento dos ponteiros do relógio e a uma razão constante de  $\dot{\phi}$ .

11.178 O movimento de uma partícula sobre a superfície de um cilindro circular recto é definido pelas relações  $R = A$ ,  $\theta = 2\pi t$  e  $z = At^2/4$ , na qual  $A$  é uma constante. Determine as intensidades da velocidade e da aceleração da partícula em qualquer instante.

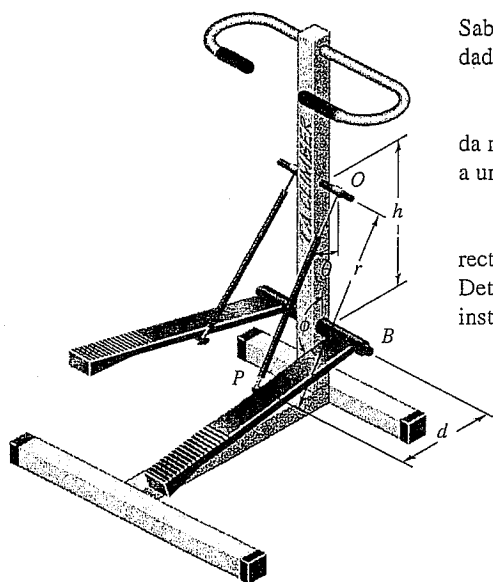


Fig. P11.177

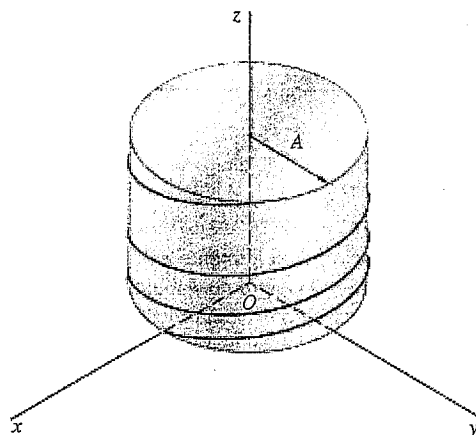


Fig. P11.178

11.179 O movimento tridimensional de uma partícula é definido pelas coordenadas cilíndricas (veja Fig. 11.26)  $R = A/(t + 1)$ ,  $\theta = Bt$  e  $z = Ct/(t + 1)$ . Determine as intensidades da velocidade e da aceleração da partícula quando (a)  $t = 0$ , (b)  $t = \infty$ .

\*11.180 Para a hélice cónica do Prob. 11.95, determine o ângulo que o plano osculador forma com o eixo  $y$ .

\*11.181 Determine a direcção da binormal da trajectória descrita pela partícula do Prob. 11.96 quando (a)  $t = 0$ , (b)  $t = \pi/2$  s.

# REVISÃO E RESUMO DO CAPÍTULO 11

Na primeira metade do capítulo, analisámos o *movimento rectilíneo de uma partícula*, i. e., o movimento de uma partícula que se processa ao longo de uma linha recta. Para definir a posição  $P$  da partícula sobre a linha, escolhemos uma origem fixa  $O$  e um sentido positivo (Fig. 11.27). A distância  $x$ , de  $O$  a  $P$ , com o sinal apropriado, define completamente a posição da partícula sobre a linha e designa-se por *coordenada de posição* da partícula [Sec. 11.2].

Coordenada de posição de uma partícula no movimento rectilíneo

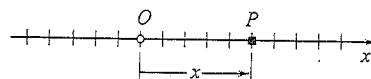


Fig. 11.27

Verificámos que a *velocidade*  $v$  da partícula é igual à derivada da coordenada de posição  $x$  em ordem ao tempo,

Velocidade e aceleração no movimento rectilíneo

$$v = \frac{d x}{d t} \quad (11.1)$$

e que a *aceleração*  $a$  era obtida por diferenciação de  $v$  em ordem a  $t$ ,

$$a = \frac{d v}{d t} \quad (11.2)$$

ou

$$a = \frac{d^2 x}{d t^2} \quad (11.3)$$

Vimos também que  $a$  podia ser obtida como

$$a = v \frac{d v}{d x} \quad (11.4)$$

Vimos que a velocidade  $v$  e a aceleração  $a$  eram representadas por números reais que podiam ser positivos ou negativos. Um valor positivo para  $v$  indica que a partícula se move no sentido positivo, e um valor negativo, que se desloca no sentido negativo. Contudo, um valor positivo para  $a$  pode significar que a partícula está verdadeiramente acelerada (i. e., que se desloca mais depressa) no sentido positivo, ou que está desacelerada (i. e., que se desloca mais devagar) em sentido negativo. Uma interpretação semelhante aplica-se relativamente a um valor negativo para  $a$  [Prob.-Tipo. 11.1].

Em muitos problemas, as condições do movimento de uma partícula são definidas pelo tipo de aceleração que a partícula possui e pelas condições iniciais [Sec. 11.3]. A velocidade e a posição da partícula podem então ser obtidas por integração de duas das equações de (11.1) a (11.4). A selecção destas equações depende do tipo de aceleração em questão [Probs.-Tipo. 11.1 e 11.3].

Determinação da velocidade e da aceleração por integração

## Movimento rectilíneo uniforme

Encontram-se frequentemente dois tipos de movimentos: o *movimento rectilíneo uniforme* [Sec. 11.4], para o qual a velocidade  $v$  da partícula é constante,

$$x = x_0 + vt \quad (11.5)$$

## Movimento rectilíneo uniformemente acelerado

e o *movimento rectilíneo uniformemente acelerado* [Sec. 11.5], para o qual a aceleração  $a$  da partícula é constante, e temos,

$$v = v_0 + at \quad (11.6)$$

$$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 \quad (11.7)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad (11.8)$$

## Movimento relativo de duas partículas

Quando duas partículas se deslocam ao longo da mesma linha recta, podemos querer considerar o movimento de  $B$  relativamente a  $A$  [Sec. 11.6]. Designando

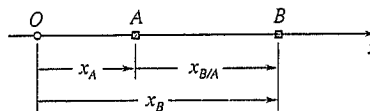


Fig. 11.28

por  $x_{B/A}$  a *coordenada de posição de B relativamente a A* (Fig. 11.28), tínhamos

$$x_B = x_A + x_{B/A} \quad (11.9)$$

Diferenciando sucessivamente esta equação duas vezes em ordem ao tempo, obtemos

$$v_B = v_A + v_{B/A} \quad (11.10)$$

$$a_B = a_A + a_{B/A} \quad (11.11)$$

onde  $v_{B/A}$  e  $a_{B/A}$  representam respectivamente a *velocidade* e a *aceleração* de  $B$  relativamente a  $A$ .

## Blocos ligados por cordas inextensíveis

Quando vários blocos se encontram *ligados por cordas inextensíveis*, é possível estabelecer uma relação linear entre as suas coordenadas de posição. Podem estabelecer-se relações semelhantes se no que respeita às velocidades e às acelerações de modo a podermos analisar o movimento [Prob.-Tipo 11.5].

## Soluções gráficas

Por vezes torna-se conveniente utilizar uma solução gráfica para problemas que envolvam o movimento rectilíneo de uma partícula [Secs. 11.7 e 11.8]. A solução gráfica geralmente utiliza as curvas  $x-t$ ,  $v-t$  e  $a-t$  [Sec. 11.7; Prob.-Tipo 11.6]. Em qualquer instante  $t$ , concluímos que

$$v = \text{declive da curva } x-t$$

$$a = \text{declive da curva } v-t$$

enquanto que para um intervalo de tempo de  $t_1$  a  $t_2$  temos

$$v_2 - v_1 = \text{área sob a curva } a-t$$

$$x_2 - x_1 = \text{área sob a curva } v-t$$

## Vector de posição e velocidade no movimento curvilíneo

Na segunda metade do capítulo analisámos o *movimento curvilíneo de uma partícula*, i. e., o movimento de uma partícula que descreve uma trajectória curva. A posição  $P$  da partícula num dado instante  $t$  [Sec. 11.9] foi definida

pelo vector de posição  $r$ , que liga a origem  $O$  do sistema de coordenadas e o ponto  $P$  (Fig. 11.29). A velocidade  $v$  da partícula foi definida pela relação

$$v = \frac{dr}{dt} \tag{11.15}$$

e verificou-se ser um vector tangente à trajectória da partícula e de intensidade  $v$  (chamada intensidade da velocidade) igual à derivada em ordem ao tempo do comprimento  $s$  do arco descrito pela partícula:

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{11.16}$$

A aceleração  $a$  da partícula foi definida pela relação,

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{11.18}$$

e chamamos a atenção para o facto de que, em geral, a aceleração não é tangente à trajectória da partícula.

Antes de considerarmos as componentes da velocidade e da aceleração, fizemos uma revisão da definição formal da derivada de uma função vectorial e estabelecemos algumas regras que governam a diferenciação de somas e produtos de funções vectoriais. Vimos que a taxa de variação de um vector é a mesma quer em relação a um sistema de referência fixo quer relativamente a um sistema de eixos em translação [Sec. 11.10].

Denominando por  $x, y$  e  $z$  as coordenadas cartesianas de uma partícula  $P$ , concluímos que as componentes cartesianas da velocidade e da aceleração de  $P$  são iguais, respectivamente, à primeira e à segunda derivadas em ordem a  $t$  das correspondentes coordenadas:

$$v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad v_z = \dot{z} \tag{11.29}$$

$$a_x = \ddot{x} \quad a_y = \ddot{y} \quad a_z = \ddot{z} \tag{11.30}$$

No caso de a componente  $a_x$  da aceleração depender apenas de  $t, x$ , e/ou  $v_x$ , e analogamente quando  $a_y$  depender apenas de  $t, y$ , e/ou  $v_y$ , e  $a_z$  depender apenas de  $t, z$ , e/ou  $v_z$ , podemos integrar independentemente uma das outras as Eqs. (11.30). A análise de um dado movimento curvilíneo pode então ser reduzida à análise de três movimentos rectilíneos independentes [Sec. 11.11]. Esta abordagem é particularmente efectiva no estudo do movimento de projecteis. [Prob.-Tipo 11.7 e 11.8].

Quando duas partículas se deslocam no espaço (Fig. 11.30), considerámos o movimento de  $B$  relativamente a  $A$ , ou, mais precisamente, relativamente a um sistema móvel ligado a  $A$  e em translação com  $A$  [Sec. 11.12]. Designando por  $r_{B/A}$  o vector de posição de  $B$  em relação a  $A$  (Fig. 11.30), tínhamos

$$r_B = r_A + r_{B/A} \tag{11.31}$$

Designando por  $v_{B/A}$  e  $a_{B/A}$ , respectivamente, a velocidade e a aceleração de  $B$  relativa a  $A$ , vimos também que

$$v_B = v_A + v_{B/A} \tag{11.33}$$

$$a_B = a_A + a_{B/A} \tag{11.34}$$

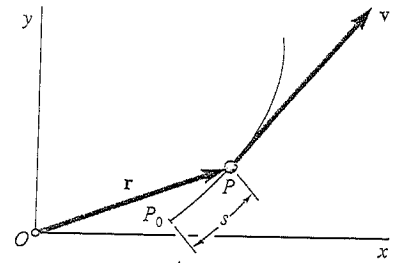


Fig. 11.29

Aceleração no movimento curvilíneo

Derivada de uma função vectorial

Componentes cartesianas da velocidade e da aceleração

Movimentos componentes

Movimento relativo de duas partículas

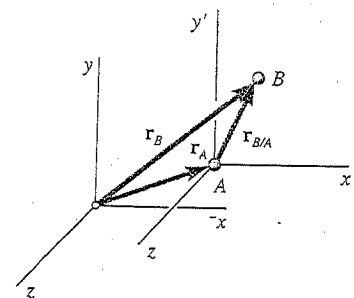


Fig. 11.30

## Componentes tangencial e normal

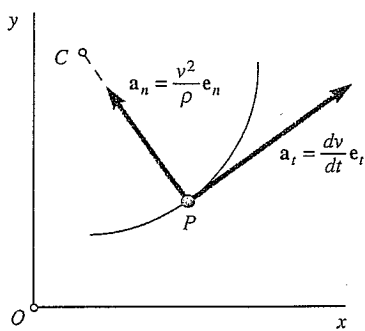


Fig. P11.31

Por vezes, torna-se conveniente decompor a velocidade e a aceleração de uma partícula  $P$  em outras componentes que não as cartesianas  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Podemos considerar dois versores ligados a uma partícula  $P$ , que se desloca ao longo de uma trajectória contida num plano; um tangente a  $e_t$  e outro normal à trajectória  $e_n$ ; este vector aponta para o centro de curvatura da trajectória [Sec. 11.13]. A velocidade e a aceleração da partícula podem assim ser expressas em função das componentes tangencial e normal,

$$\mathbf{v} = v \mathbf{e}_t \quad (11.36)$$

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_n \quad (11.39)$$

na qual  $v$  é a intensidade da velocidade da partícula, e  $\rho$  o raio de curvatura da trajectória [Probs.-Tipo 11.10 e 11.11]. Note-se que, enquanto a velocidade  $v$  é dirigida segundo a tangente à trajectória, a aceleração possui uma das componentes,  $a_t$ , nessa direcção, e uma outra,  $a_n$ , dirigida segundo a normal e apontando para o centro de curvatura da trajectória (Fig. 11.31).

## Movimento ao longo de uma curva no espaço

Para uma partícula  $P$  que se desloca ao longo de uma curva no espaço, definimos o plano que melhor se adapta à curva na vizinhança de  $P$ , como sendo o *plano osculador*. Este plano contém os versores  $e_t$  e  $e_n$ , que definem, respectivamente, a tangente e a normal principal à curva. O versor  $e_b$ , que é perpendicular ao plano osculador define a *binormal*.

## Componentes radial e transversal

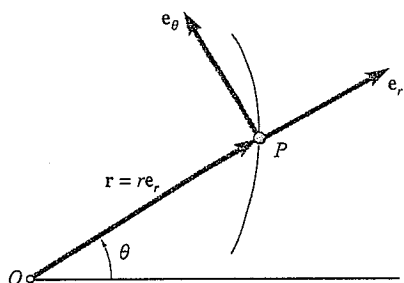


Fig. 11.32

Quando a posição da partícula que se desloca num plano é definida pelas coordenadas polares  $r$  e  $\theta$ , torna-se conveniente utilizar as componentes radial e transversal dirigidas, respectivamente, segundo o vector de posição  $r$  e numa outra direcção que se obtém por rotação de  $r$  de  $90^\circ$  no sentido anti-horário [Sec. 11.14]. Fixamos a  $P$  os versores  $e_r$  e  $e_\theta$  dirigidos, respectivamente, segundo às direcções radial e transversal (Fig. 11.32). Expressimos então a velocidade e a aceleração da partícula em função destas duas componentes, tal que,

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \quad (11.43)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{r} \mathbf{e}_r + \dot{r} \dot{\mathbf{e}}_r + \dot{r} \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r \ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r \dot{\theta} \dot{\mathbf{e}}_\theta \quad (11.44)$$

nas quais os pontos são utilizados para indicar uma diferenciação em ordem ao tempo. As componentes escalares da velocidade e da aceleração nas direcções radial e transversal são,

$$v_r = \dot{r} \quad v_\theta = r \dot{\theta} \quad (11.45)$$

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \quad a_\theta = r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} \quad (11.46)$$

É importante ter em atenção que quer  $a_r$ , quer  $a_\theta$  não são iguais às derivadas de  $v_r$  e  $v_\theta$ , respectivamente, em ordem ao tempo [Prob.-Tipo 11.12].

O capítulo termina com a discussão quanto ao uso das coordenadas cilíndricas para definir a posição de uma partícula no espaço.

## Problemas de Revisão

**11.182** O movimento de uma partícula é definido pela relação  $x = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 4$ , na qual  $x$  e  $t$  são expressos em metros e em segundos, respectivamente. Determine (a) o instante em que a velocidade é zero (b) a posição e a distância total percorrida quando a aceleração é nula.

**11.183** A aceleração de uma partícula é definida pela expressão  $a = -60x^{-1.5}$ , na qual  $a$  e  $x$  são expressos em  $m/s^2$  e em metros, respectivamente. Sabendo que a partícula parte da posição  $x = 4$  m sem velocidade inicial, determine a velocidade da partícula quando (a)  $x = 4$  m, (b)  $x = 1$  m, (c)  $x = 100$  mm.

**11.184** Um projectil entra num meio resistente quando  $x = 0$  com velocidade inicial  $v_0 = 274,3$  m/s e percorre 101,6 mm antes de atingir o repouso. Assumindo que a velocidade do projectil é definida pela relação  $v = v_0 - kx$ , na qual  $v$  é expresso em m/s e  $x$  em m, determine (a) a aceleração inicial do projectil, (b) o tempo necessário para que o projectil penetre 99 mm no meio resistente.

**11.185** Um monta-cargas que se desloca para cima com velocidade constante de 1,83 m/s passa por um elevador de passageiros que se encontra parado. Quatro segundos mais tarde o elevador de passageiros inicia o movimento para cima com uma aceleração constante de  $0,73$  m/s<sup>2</sup>. Determine (a) quando e onde os elevadores se encontram à mesma altura (b) a velocidade do elevador de passageiros nesse instante.

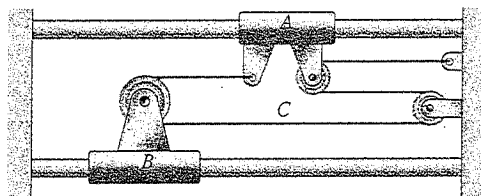


Fig. P11.186

**11.186** Na posição mostrada, a correia  $B$  move-se para a esquerda com uma velocidade de 150 mm/s. Determine (a) a velocidade da correia  $A$ , (b) a velocidade do segmento  $C$  do cabo, (c) a velocidade do segmento  $C$  do cabo relativamente à correia  $B$ .

**11.187** Os três blocos mostrados movem-se com velocidades constantes. Calcule a velocidade de cada bloco, sabendo que a velocidade do bloco  $A$  relativamente a  $C$  é de 300 mm/s para cima, e que a velocidade de  $B$  relativamente a  $A$  é de 200 mm/s para baixo.

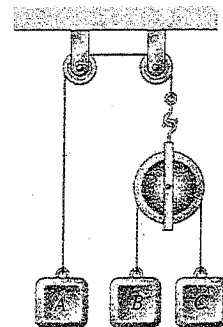


Fig. P11.187



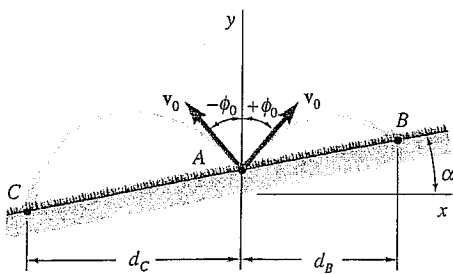


Fig. P11.188

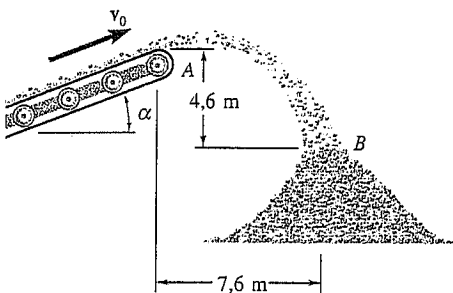


Fig. P11.191

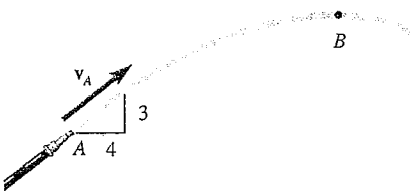


Fig. P11.192

11.188 Um aspersor de água oscilante está colocado no ponto  $A$  num plano inclinado que forma um ângulo  $\alpha$  com a horizontal. O aspersor projecta água com velocidade inicial  $v_0$  fazendo um ângulo  $\phi$  com a vertical, que varia entre  $-\phi_0$  e  $+\phi_0$ . Sabendo que  $v = 9,1$  m/s,  $\phi_0 = 40^\circ$  e  $\alpha = 10^\circ$ , determine a distância horizontal entre o aspersor e os pontos  $B$  e  $C$  que delimitam a área irrigada.

11.189 Quando observado de um navio que se move para leste com velocidade de 8 km/h, o vento parece soprar do sul. Após o navio mudar de rumo, e estando a mover-se para norte com a mesma velocidade, o vento parece soprar de sudoeste. Admitindo que a velocidade do vento permanece constante durante o período de observação, determine a intensidade e a direcção da velocidade real do vento.

11.190 A condutora de um automóvel reduz a velocidade a uma razão constante, desde 72,4 até 48,3 km/h durante uma distância de 228,6 m e ao longo de uma curva com 457,2 m de raio. Determine a intensidade da aceleração total do automóvel, depois de este ter percorrido 152,4 m ao longo da curva.

11.191 Sabendo que a correia transportadora se desloca com velocidade constante de 7,3 m/s, determine o ângulo  $\alpha$  com que a areia é depositada em  $B$ .

11.192 A partir de medições efectuadas numa fotografia tirada a um jacto de água, verifica-se que este deixa a extremidade do tubo fazendo um raio de curvatura com 25 m. Determine (a) a velocidade inicial  $v_A$  do jacto, (b) o raio de curvatura do jacto quando alcança o seu ponto mais alto,  $B$ .

11.193 Um avião percorre uma trajectória de voo segundo uma linha recta horizontal que passa por cima de uma estação de radar  $A$ . Sabendo que o avião se desloca para a esquerda com uma velocidade constante  $v_0$ , determine  $d\theta/dt$  e  $d^2\theta/dt^2$  em função de  $v_0$ ,  $h$ , e  $\theta$ .

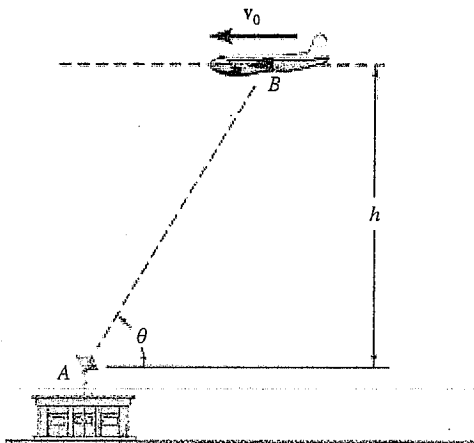


Fig. P11.193

Os problemas seguintes destinam-se a resolução com o auxílio de um computador.

**11.C1** O mecanismo da figura é conhecido por mecanismo de retorno rápido de Whitworth. A manivela  $AP$  roda com uma velocidade angular constante,  $\dot{\phi}$ , e o rolete  $P$  pode mover-se livremente ao longo da ranhura existente na barra  $BD$ . Escreva um programa de computador que permita registar os valores de  $\theta$  em função de  $\phi$ , e os valores de  $\dot{\theta}$  em função de  $\phi$  para uma rotação completa da manivela  $AP$ . Considere que  $\dot{\phi} = 1 \text{ rad/s}$ ,  $l = 101,6 \text{ mm}$  e (a)  $b = 63,5 \text{ mm}$ , (b)  $b = 76,2 \text{ mm}$ , (c)  $b = 88,9 \text{ mm}$

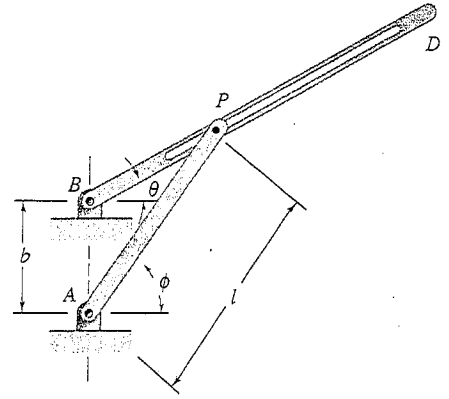


Fig. P11.C1

**11.C2** Uma bola cai no degrau superior de uma escada com oito degraus. A velocidade inicial da bola é  $v_0$  e a sua direcção faz um ângulo  $\alpha$  com a vertical. A bola ressalta e cai no degrau seguinte, como se mostra na figura. De cada vez que a bola salta, nos pontos  $A, B, C, \dots$ , a componente horizontal da velocidade permanece constante, enquanto a componente vertical sofre uma redução de  $k$  por cento. Escreva um programa de computador que possa ser utilizado para determinar (a) se a bola salta para os degraus inferiores sem falhar qualquer um deles, (b) se a bola salta para os degraus inferiores sem saltar duas vezes no mesmo degrau, (c) o primeiro degrau para o qual a bola salta duas vezes. Utilize valores de  $v_0$  compreendidos entre  $1,8 \text{ m/s}$  e  $3,0 \text{ m/s}$  com incrementos de  $0,6 \text{ m/s}$ , valores de  $\alpha$  desde  $18^\circ$  até  $26^\circ$  com incrementos de  $4^\circ$ , e valores de  $k$  iguais a 40 e a 50.

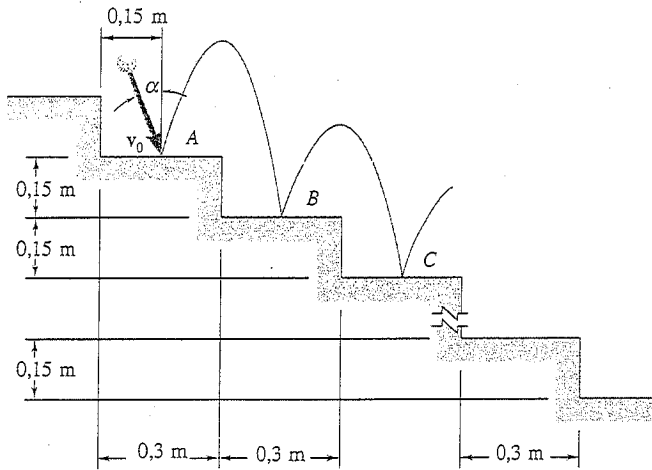


Fig. P11.C2

**11.C3** Num parque de diversões, o "avião"  $A$  está ligado a uma barra rígida  $OB$  com  $10 \text{ m}$  de comprimento. Para funcionar, o conjunto haste-avião é inicialmente forçado a rodar de tal modo que  $70^\circ \leq \theta_0 \leq 130^\circ$ . Em seguida é abandonado em movimento livre de rotação em torno de  $O$ . O avião fica então sujeito à aceleração gravítica e também à desaceleração devida à resistência do ar,  $-kv^2$ , que actua em sentido oposto ao da velocidade  $v$ . Escreva um programa de computador que permita determinar a velocidade do avião para valores conhecidos de  $\theta_0$  e de  $\theta$ . O programa deve permitir a determinação do valor de  $\theta$  correspondente à primeira posição de repouso do avião, após ter iniciado o movimento livre. Deve também permitir a determinação da velocidade máxima do avião e os dois primeiros valores de  $\theta$  para os quais  $v = 0$ . Despreze a massa e a resistência aerodinâmica de  $OB$ , e ignore o atrito no apoio  $O$ . Considere valores de  $\theta_0$  compreendidos entre  $70^\circ$  e  $130^\circ$ , com acréscimos de  $30^\circ$ . Para cada valor de  $\theta_0$ , suponha (a)  $k = 0$ , (b)  $k = 2 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ , (c)  $k = 4 \times 10^{-2} \text{ m}^{-1}$ . (Sugestão: exprima a aceleração tangencial do avião em função de  $g, k$  e  $\theta$ , e tenha em atenção que  $v_\theta = r\dot{\theta}$ . Utilize incrementos  $\Delta t = 0,008 \text{ s}$ , e considere que a aceleração se mantém constante durante cada intervalo de tempo.)

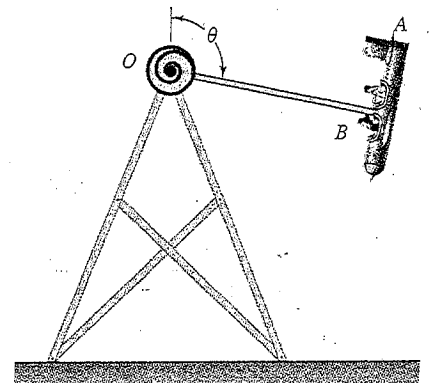


Fig. P11.C3

11.C4 Um motorista viaja numa auto-estrada à velocidade de 96,5 km/h e decide sair através de uma rampa destinada a esse efeito. Como era intenção sua parar a viatura, aplica os travões até que a mesma se imobiliza. Admitindo que a intensidade da aceleração total não pode exceder  $3 \text{ m/s}^2$ , escreva um programa de computador que permita determinar o tempo mínimo necessário para que o automóvel se imobilize, e a distância necessária para que tal aconteça se a rampa (a) for recta, (b) possuir um raio de curvatura igual a 243,8 m. Considere intervalos de tempo  $\Delta t = 1 \text{ s}$ , e resolva cada uma das partes admitindo que o condutor actua sobre os travões de modo que  $dv/dt$ , durante cada intervalo de tempo, (1) permanece constante, (2) varia linearmente.

11.C5 Um aspersor oscilante, para regar um jardim, projecta a água com uma velocidade  $v_0$  de 10 m/s. (a) Sabendo que apenas os lados do pavilhão BCDE estão abertos, escreva um programa de computador que permita calcular a distância  $d$  ao ponto F, que será ainda regado para valores de  $\alpha$  compreendidos entre  $20^\circ$  e  $80^\circ$  com incrementos de  $5^\circ$ . (b) Com recurso a valores de incrementos cada vez mais pequenos, determine o valor máximo de  $d$  e o correspondente valor de  $\alpha$ .

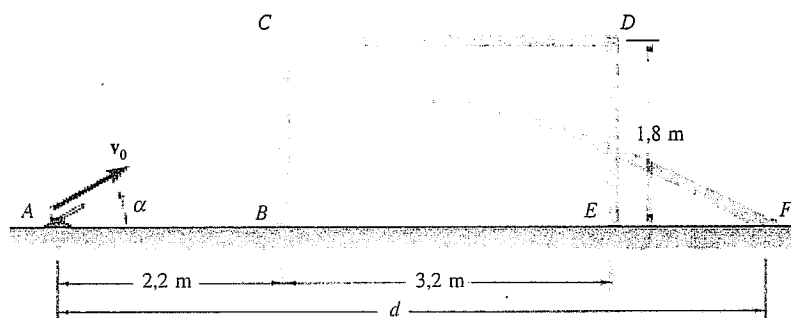


Fig. P11.C5

## 12

**Cinética das Partículas:  
Segunda Lei de Newton**

Na zona curva da pista, cada ciclista está sujeito a uma aceleração que é dirigida para o centro de curvatura da trajectória. A força responsável por esta aceleração é a resultante do peso do ciclista e da força exercida pelo solo nas rodas da sua bicicleta. A relação existente entre a força, a massa e a aceleração é objecto de estudo neste capítulo.

